

Angewandte Mathematik

Dr. Johannes Riesterer

3. November 2020



©Johannes Riesterer

Vorwort

Kann jeder Mathematik lernen? Als Antwort auf diese Frage möchte ich auf den interessanten Lebenslauf einer der bedeutendsten Mathematikerinnen aller Zeiten eingehen (Auszug aus Wikipedia):

Emmy Noether war eine deutsche Mathematikerin, die grundlegende Beiträge zur abstrakten Algebra und zur theoretischen Physik lieferte. Insbesondere hat Noether die Theorie der Ringe, Körper und Algebren revolutioniert. Das nach ihr benannte Noether-Theorem gibt die Verbindung zwischen Symmetrien von physikalischen Naturgesetzen und Erhaltungsgrößen an.

Sie zeigte in mathematischer Richtung keine besondere Frühreife, sondern hatte in ihrer Jugend Interesse an Musik und Tanzen. Sie besuchte die Städtische Höhere Töchterschule – das heutige Marie-Therese-Gymnasium – in der Schillerstraße in Erlangen. Mathematik wurde dort nicht intensiv gelehrt. Im April 1900 legte sie die Staatsprüfung zur Lehrerin der englischen und französischen Sprache an Mädchenschulen in Ansbach ab. 1903 holte sie in Nürnberg die externe Abiturprüfung am Königlichen Realgymnasium – dem heutigen Willstätter-Gymnasium – nach.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwissen und Konventionen	6
2 Mehrdimensionale Differentialrechnung	7
2.1 Richtungsableitung und Gradient reellwertiger Funktionen	9
2.2 Extrema	17
2.3 Gradient einer mehrdimensionalen Funktion	23
3 Mehrdimensionale Integralrechnung	25
3.1 Lebesgue Maß	25
3.2 Lebesgue Integral	28
3.2.1 Die L^1 -Halbnorm	30
3.2.2 Integration über den \mathbb{R}^n	31
Tabellenverzeichnis	34
Abbildungsverzeichnis	35

1 Vorwissen und Konventionen

Differenzierbarkeit reeller Funktionen

Eine reelle Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x \in (a, b)$, falls der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert die Ableitung (Steigung) von f in x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.



Abbildung 1: Quelle: Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Diferencial_quotient_of_a_function.svg

Mittelwertsatz einer Veränderlichen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Abbildung 2: Quelle: Wikipedia: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mittelwertsatz3.svg>

Taylorapproximation einer Veränderlichen

Jede reelle Funktion f , deren $p+1$ -ten Ableitungen existieren und stetig sind lässt sich mit Hilfe des Taylorpolynoms

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(a)(x-a)^p + R_{p+1}(x, a)$$

und dem Restglied $R_p(x, a) := \frac{1}{(p+1)!}f^{(p+1)}(\xi)(x-a)^{p+1}$ mit einem $\xi \in (x, a)$ darstellen.

Cauchy-Schwarzsche Gleichung

Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos(\varphi)$$

wobei φ der Innenwinkel zwischen v und w ist.

Äquivalenz von Normen

Die Normen $\|v\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ und $\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$ sind Äquivalent. Sie lassen sich mit Konstanten $k_1\|v\| < \|v\|_\infty k_2\|v\|$ gegeneinander abschätzen.

Symmetrische Matrizen

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist Äquivalent:

- A hat positive Eigenwerte.
- $v^T A v > 0$ für alle $v \neq 0$.
- alle Unterdeterminanten sind positiv. Speziell für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ bedeutet dies $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$.

Definition 1 (Konventionen). In diesem Abschnitt ist $U \subset \mathbb{R}^n$ stets eine offene

Teilmenge des \mathbb{R}^n . $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(i\text{-te Zeile}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnet den i -ten Basisvektor des \mathbb{R}^n .

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Definition 2 (Konvergenz). Eine Folge (a_n) in \mathbb{R}^n heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : d(a, a_n) < \varepsilon$$

In Worten: Es gibt für jedes beliebige (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ einen Index N derart, dass für alle Indizes $n > N$, also alle weiteren Folgenglieder, gilt: Der Abstand $d(a, a_n)$ ist kleiner als ε .

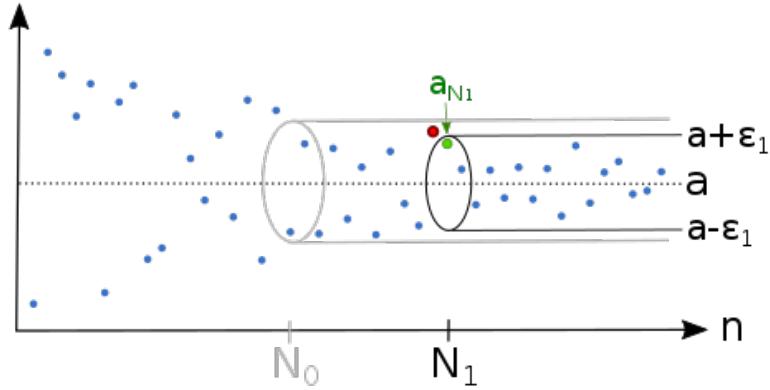


Abbildung 3: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Epsilonschlauch_klein.svg

Definition 3 (Grenzwert). Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $a \in X$. Wir nennen $L_a \in \mathbb{R}^m$ Grenzwert von f bezüglich der Annäherung von x an a , falls für jede konvergente Folge $x_n \rightarrow a$ die Folge $f(x_n)$ nach L_a konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_a .$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d(f(x), L_a) < \varepsilon$ gilt für jedes x mit $d(x, a) < \delta$.



Abbildung 4: Quelle: Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Limes_Definition_Vektorgrafik.svg



Abbildung 5: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Upper_semi.svg

Definition 4 (Stetige Funktion). Eine reellwertige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn für alle $y \in U$ der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = L_y$ existiert.

2.1 Richtungsableitung und Gradient reellwertiger Funktionen

Ableitungen beschreiben bildlich gesprochen das Verhalten einer Funktion bezüglich beliebig kleiner Änderungen der Eingabewerte.

Definition 5 (Richtungsableitung). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für einen Vektor $h \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in U$ heißt der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Richtungsableitung von f am Punkt a in Richtung h . Sie misst die Änderung der Funktion in Richtung h .

Speziell nennen wir für die Standard Basisvektoren e_i

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} := \partial_{e_i} f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

die partielle Ableitung von f in a nach x_i .

Definition 6 (Partielle Differenzierbarkeit). Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt partiell differenzierbar im Punkt $a \in U$, falls alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}$$

existieren.

Definition 7 (Differenzierbarkeit). Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in U$, falls alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}$$

existieren und stetig sind. Man nennt in diesem Fall die $1 \times n$ -Matrix

$$df(a) := \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right)$$

das Differential von f im Punkt a . Der Vektor

$$\nabla f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

wird als Gradient bezeichnet. Es ist $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

★★★ Der Unterschied zwischen Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit ist also, dass die partiellen Ableitungen zusätzlich zur Existenz auch stetig sein müssen.



Abbildung 6: Quelle: Wikipedia: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gradient2.svg>

Bemerkung 1. Für das Differential einer differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt für alle $a \in U$:

- $df(a)(h) := df(a) \cdot h$ ist eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} .
- $df(a) \cdot h = \partial_h f(a)$.
- $d(f \cdot g) = g(a)d(f) + f(a)dg$
- $d(f + g) = df + dg$

Beweis. • Multiplikation mit einer Matrix ist eine lineare Abbildung.

- Für die Basisvektoren ist per Definition $df(a) \cdot e_i = \partial_{e_i} f(a)$. Da jeder Vektor h eine Linearkombination der Basisvektoren ist und df linear ist, folgt die Behauptung.
- Folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft reeller Funktionen.
- Folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft reeller Funktionen.

□

Satz 1 (Steilste Anstiegsrichtung). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, $a \in U$ und $v := \operatorname{argmax}_{h \in S^n} \partial_h f(a)$. Dann gilt

$$\|\nabla f(a)\| v = \nabla f(a).$$

Beweis. Mit der Cauchy-Schwarz Gleichung folgt für beliebiges h

$$\partial_h f(a) = df(a)h = \langle \nabla f(a), h \rangle = \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| \cdot \cos(\varphi)$$

wobei φ den Innenwinkel zwischen $\nabla f(a)$ und h bezeichnet. Für $\|h\| = 1$ wird somit $\partial_h f(a)$ maximal, wenn $\varphi = 0$ und somit $h = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ ist. □

Satz 2 (Lokale Linearisierung). Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gibt es ein Restglied $R(h)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$ so dass für alle $a \in U$ und $h \in \mathbb{R}$

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + R(h)$$

gilt.

★★★ Eine differenzierbare Funktion kann auf hinreichend kleinen Umgebungen beliebig genau durch eine lineare Funktion approximiert werden.

♦♦ Der Beweis beruht im Wesentlichen auf dem Mittelwertsatz einer Veränderlichen.

Beweis. Wir wählen einen offenen, achsenparallelen Quader $Q \subset U$, so dass er vollständig in U enthalten und $a \in Q$ ist. Jeder Punkt $a + h \in Q$ lässt sich damit durch einen achsenparallelen Streckenzug durch die Punkte

$$\begin{aligned} a_0 &:= a \\ a_i &:= a_{i-1} + h_i e_i; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit a verbinden.



Abbildung 7: Kantenzug mit achsenparallelen Kanten

Damit ist $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_{i-1}))$ und mit $\varphi_i(t) := f(a_i + t\mathbf{e}_i)$ gilt $f(a_i) - f(a_{i-1}) = \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0)$. Wegen dem Mittelwertsatz einer Veränderlichen gibt es τ_i mit

$$\varphi_i(h_i) - \varphi_i(0) = h_i \varphi'_i(\tau_i).$$

Da $\varphi'_i(t) = \frac{\partial f(a_{i-1} + t\mathbf{e}_i)}{\partial x_i}$ folgt mit $\xi_i := a_i + \tau_i \mathbf{e}_i$

$$f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\xi_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right) h_i$$

und damit

$$|f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h| \leq \|h\|_\infty \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\xi_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right|.$$

Für $h \rightarrow 0$ gilt $\xi_i \rightarrow a$ und da die partiellen Ableitungen stetig sind nach Voraussetzung und alle Normen äquivalent sind folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 2. Umformuliert bedeutet Satz 2.3, dass für das Differential einer differenzierbaren Funktion

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a)h}{\|h\|} = 0 \quad (1)$$

gilt. Ist L eine weitere lineare Abbildung mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(a)h}{\|h\|}$, so ist $L = df$. Das Differential ist somit eindeutig durch die Eigenschaft der lokalen Linearisierung bestimmt.

Beweis. Für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt

$$(L(a) - df(a))(v) = \lim_{t \rightarrow 0} (L(a) - df(a)) \left(\frac{tv}{\|tv\|} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(L(a) - df(a))(tv)}{\|tv\|} = 0$$

Da jeder Vektor als Linearkombination von Einheitsbasisvektoren dargestellt werden kann, folgt die Behauptung. \square

Definition 8 (Differenzierbarer Weg). Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Ein Weg ist eine Abbildung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

mit reellen, stetigen Funktionen $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (damit ist auch γ stetig). Der Weg heißt differenzierbar, falls alle Ableitungen $\gamma'_i(t)$ existieren. In diesem Fall definieren wir

$$\gamma'(t) := \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix}$$

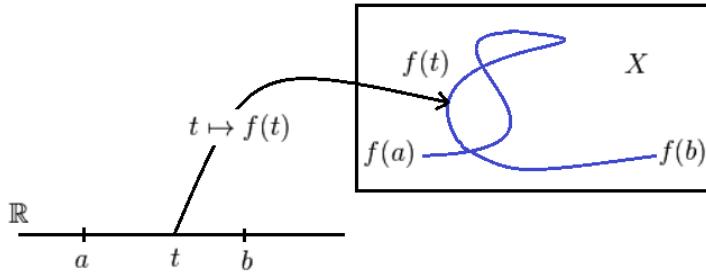


Abbildung 8: Quelle: Wikipedia; <https://de.wikipedia.org/wiki/EbeneKurve.png>

Im Folgenden gilt: $I := [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 3 ((Baby) Kettenregel). Sei $\gamma : I \rightarrow U$ ein differenzierbarer Weg und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenziertere Funktion. Dann ist $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und hat die Ableitung

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = df(\gamma(t))\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \gamma'_i(t)$$

★★★ Das Differential einer differenzierbare Funktion kann als eine Abbildung von Tangenten interpretiert werden.

Beweis. Wegen der Differenzierbarkeit des Weges und der Funktion gilt für hinreichend kleine $k \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t+k) = \gamma(t) + k\gamma'(t) + r_1(k)|k|, \text{ mit } \lim_{k \rightarrow 0} r_1(k) = 0$$

$$f(\gamma(t)+h) = f(\gamma(t)) + df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)h + r_2(h)||h||, \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} r_2(h) = 0$$

Mit $h := \gamma(t+k) - \gamma(t)$ folgt

$$f(\gamma(t+k)) = f(\gamma(t)) + df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)k + R(k)$$

mit dem Restglied

$$R(k) := df(\gamma(t))r_1(k)|k| + r_2(\gamma(t+k) - \gamma(t))||\gamma'(t)k + r_1(k)|k||$$

Da $\lim_{k \rightarrow 0} R(k) = 0$ folgt die Behauptung. \square

Satz 4 (Mittelwertsatz). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenziertere Funktion und $a, b \in U$, so dass die Verbindungsstrecke von a nach b vollständig in U liegt. Dann gibts es einen Punkt $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(b) - f(a) = df(\xi)(b - a).$$



Abbildung 9: Quelle: Wikipedia

Beweis. Setze $\gamma(t) := a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$ (Verbindungsgerade zwischen a und b) und $F := f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Damit ist $F(1) - F(0) = f(1) - f(0)$ und nach der Kettenregel ist F differenzierbar. Mit dem Mittelwertsatz einer Veränderlichen gibt es $\tau \in (0, 1)$ mit $F(1) - F(0) = F'(\tau) = df(\gamma(\tau))(b - a)$. Somit ist $\xi := \gamma(\tau)$ der gesuchte Punkt. \square

Satz 5 (Satz von Schwarz). *Wenn Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$ existieren und letztere stetig ist, dann existiert auch $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$$

★★★ Bei wiederholten Ableiten spielt die Reihenfolge keine Rolle, wenn eine der Ableitungen existiert und stetig ist.

◇◆ Der Beweis geht in zwei Schritten: Man wendet den Mittelwertsatz einer Veränderlichen auf eine Hilfsfunktion an. Damit kann man die Differenz der Ableitungen abschätzen und zeigen, dass sie beliebig klein wird und damit gleich sind.

Beweis. Setze $\varphi(x, y) := f(a + xe_i + ye_j)$ mit $(x, y) \in V \subset \mathbb{R}^2$. Bei hinreichend kleiner Wahl von V existieren die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y} \varphi$, $\frac{\partial}{\partial x} \varphi$ und $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \varphi$

existiert und ist stetig nach Voraussetzung an f . Es reicht nun zu zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0)$ existiert und

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(0, 0)$$

gilt. Sei dazu $\epsilon > 0$ und $V' \subset V$ so gewählt, dass $|\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(0, 0)| < \epsilon$ gilt für $(x, y) \in V'$. Innerhalb eines achsenparallelen Quaders $Q \subset V'$ mit Ecken $(0, 0)$ und (h, k) setzen wir $u(x) := \varphi(x, k) - \varphi(x, 0)$. Zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes einer Veränderlichen liefert

$$\begin{aligned} u(h) - u(0) &= hu'(0) \\ &= h(\frac{\partial}{\partial x} \varphi(\xi, k) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\xi, 0)) = hk \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \frac{u(h) - u(0)}{hk} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(0, 0) \right| < \epsilon.$$

Da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(h) - u(0)}{hk} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\varphi(h, k) - \varphi(h, 0)}{k} - \frac{\varphi(0, k) - \varphi(0, 0)}{k} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} \varphi(h, 0) - \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0)}{k} \right) \end{aligned}$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} \varphi(h, 0) - \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0)}{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0)$$

folgt die Behauptung. □

Anwendung: Taylorreihe

Definition 9 (C^k -Funktion). Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ für die alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(a)$$

mit $i_1 + \cdots + i_k \leq k$ existieren und stetig sind heißt C^k -Funktion oder k -mal stetig differenzierbar. Eine C^1 -Funktion ist also eine differenzierbare Funktion.

Definition 10 (Höhere Ableitungen). Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ und Vektoren $v^1, \dots, v^p \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$d^p f(a)(v^1, \dots, v^p) := \partial_{v^1} \cdots \partial_{v^p} f(a)$$

die p -te Richtungsableitung von f . Sie ist wegen dem Satz von Schwarz wohldefiniert. Mit Bemerkung 1 ist

$$d^p f(a)(v^1, \dots, v^p) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a) \cdot v_{i_1}^1 \dots v_{i_p}^p.$$

Für einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$d^p f(a)z^p := d^p f(a) \underbrace{(z, \dots, z)}_{p-\text{mal}}.$$

Bemerkung 3. Für $p = 2$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) v_i u_j$$

und mit

$$f''(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \end{pmatrix}$$

ist $d^2 f(a)(u, v) = u^T \cdot f''(a) \cdot v$. Die Matrix $f''(a)$ wird auch Hesse-Matrix genannt. Nach dem Satz von Schwarz ist sie symmetrisch.

Satz 6 (Taylorapproximation). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^{p+1} -Funktion und $x, a \in U$, so dass die Verbindung zwischen x und a in U liegt. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^p d^k f(a)(x - a)^k + R_{p+1}(x, a)$$

mit dem Restglied $R_{p+1}(x, a) := \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(\xi)(x - a)^{p+1}$ für ein $\xi \in [a, x]$.

Beweis. Sei $h := (x - a)$ und $F(t) := f(a + th)$ mit $t \in [0, 1]$. Wiederholte Anwendung der (Baby) Kettenregel mit $\gamma(t) := a + th$ ergibt

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + th) h_i \\ F''(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + th) h_i h_j \\ &\vdots \\ F^p(t) &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a + th) h_{i_1} \dots h_{i_p}. \end{aligned}$$

Mit der Taylorapproximation für Funktionen einer Veränderlichen folgt

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^p(0) + R_{p+1}$$

mit dem Restglied $R_{p+1} := \frac{1}{(p+1)!}F^{p+1}(\tau)$ mit $\tau \in [0, 1]$. Da nach Konstruktion $F(0) = f(a)$ und $F(1) = f(x)$ folgt insgesamt die Behauptung. \square

Satz 7 (Qualitative Taylorformel). *Sei $T_p(x, a) = f(a) + \sum_{k=1}^p d^k f(a)(x-a)^k$ die Taylorapproximation einer C^p -Funktion. Dann gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_p(x, a)}{\|x - a\|^p} = 0.$$

Beweis. Da die partiellen Ableitungen stetig sind, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Radius $r > 0$, so dass für alle $y \in K_r(a)$ gilt

$$\frac{1}{p!}(d^p f(y) - d^p f(a))h^p \leq \epsilon \|h\|_\infty^p.$$

Mit der Taylorapproximation ist

$$f(x) = T_{p-1}(x, a) + \frac{1}{p!}d^p f(\xi)(x-a)^p = T_p(x, a) + \frac{1}{p!}(d^p f(\xi) - d^p f(a))h^p(x-a)^p$$

Mit obiger Abschätzung folgt die Behauptung. \square

2.2 Extrema

Definition 11 (Extremum). *Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Ein Punkt $a \in X$ heißt lokales Maximum bzw. Minimum, falls eine Umgebung U von a existiert, so dass $f(x) \leq f(a)$ bzw. $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in U$ gilt. Liegt einer der beiden Fälle vor, so spricht man von einem lokalen Extremum. Gilt strikt $f(x) < f(a)$ bzw. $f(x) > f(a)$, so nennt man das Extremum isoliert. Ist $U = X$ so nennt man es auch globales Maximum bzw. Minimum.*



Abbildung 10: Quelle: Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:MaximumParaboloid.png>



Abbildung 11: Quelle: Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:MaximumCounterexample.png>

Satz 8 (Notwendiges Kriterium). Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und hat f in $a \in U$ ein lokales Extremum, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(a) = \dots = \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $df(a) = 0$.

Beweis. Setze $F_k(t) := f(a + t\mathbf{e}_k)$. Da f ein Extremum in a hat, hat F_k in einer hinreichend kleinen Umgebung um 0 ein Extremum. Da F_k eine Funktion einer Veränderlichen ist, gilt $F'(0) = 0$. Da $\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = F'_k(0)$ folgt die Behauptung. \square

Definition 12 (Kritischer Punkt). Ein Punkt a mit $df(a) = 0$ wird als kritischer Punkt Bezeichnet.

Satz 9 (Hinreichendes Kriterium). Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und ist $f'(a) = 0$ ein kritischer Punkt für ein $a \in U$. Dann gilt:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Minimum.
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Maximum.

- $f''(\mathbf{a}) \geq 0 \Rightarrow f$ hat in \mathbf{a} einen Sattelpunkt.

Beweis. Sei $f'(\mathbf{a}) = 0$ und $f''(\mathbf{a}) > 0$. Mit der Taylorformel gilt für hinreichend kurze Vektoren $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{h} + R(\mathbf{h})$$

mit $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0$. Für $\|\mathbf{h}\| \leq 1$ hat $\mathbf{h}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{h}$ sein Maximum m auf dem Einheitskreis $\{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{h}\| = 1\}$ da $f''(\mathbf{a}) > 0$.

$$\mathbf{h}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{h} = \|\mathbf{h}\| \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \mathbf{h}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{h} \|\mathbf{h}\| \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \mathbf{h} \geq m \|\mathbf{h}\|^2.$$

Wir wählen ϵ so klein, dass $R(\mathbf{h}) \leq \frac{m}{2} \|\mathbf{h}\|^2$ gilt für $\|\mathbf{h}\| < \epsilon$ (was geht wegen Taylorformel). Damit erhalten wir

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{a}) + m \|\mathbf{h}\|^2.$$

und damit hat f ein lokales Minimum in \mathbf{a} .

Der Fall $f''(\mathbf{a}) < 0$ wird mit Betrachtung von $-f$ durch den vorigen Fall bewiesen.

Es sei nun $f''(\mathbf{a}) \geq 0$ und \mathbf{v} mit $\mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} > 0$ und \mathbf{w} mit $\mathbf{w}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{w} > 0$. Betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{v}}(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \\ F_{\mathbf{w}}(t) &:= f(\mathbf{a} + t\mathbf{w}) \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} F'_{\mathbf{v}}(t) &= 0; F''_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{v} > 0 \\ F'_{\mathbf{w}}(t) &= 0; F''_{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{w}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{w} < 0 \end{aligned}$$

und somit hat $F_{\mathbf{v}}$ ein isoliertes lokales Maximum und $F_{\mathbf{w}}$ ein isoliertes lokales Minimum und damit f kein lokales Extremum in \mathbf{a} . \square



Abbildung 12: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saddle_point.svg

Anwendung: Gradientenverfahren

Wie kann man Minima einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ finden? Wir wissen, dass an jedem Punkt $x_k \in \mathbb{R}^n$ der negative Gradient $d_k := -\nabla f(x_k)$ in die steilste Abstiegsrichtung zeigt. Die Idee des Gradientenabstieg ist, ein bestimmtes Stück in diese Richtung abzusteigen, damit der Funktionswert kleiner wird, also $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ zu setzen. Für hinreichend kleines α_k folgt mit Satz 2.3 über die lokale Linearisierung $f(x_{k+1}) = f(x_k) + \alpha_k d_k = f(x_k) + \alpha_k df(x_k)d_k + R(\alpha_k d_k)$. Somit gilt $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, falls $\nabla f(x_k) \neq 0$ und falls die Folge $f(x_k)$ beschränkt ist, so gibt es einen Fixpunkt x^* und dieser ist ein Minimum, da $\nabla f(x^*) = 0$ gelten muss.

Algorithm 1 Gradienstabstieg

- 1: Initialisiere $k := 0$ und zufälligen Startwert x_0 .
 - 2: Initialisiere Genauigkeit $\epsilon > 0$.
 - 3: **while** $\|\nabla f(x_k)\| > \epsilon$ do ► So lange kein Extrema vorliegt
 - 4: Bestimme α_k mit $f(x_k + \alpha d_k) = f(x_k) + \alpha_k df(x_k)d_k + R(\alpha_k d_k)$ ► Schrittweite bestimmen
 - 5: Setze $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$. ► Absteigen
 - 6: $k \leftarrow k + 1$ ► Wiederholen
-

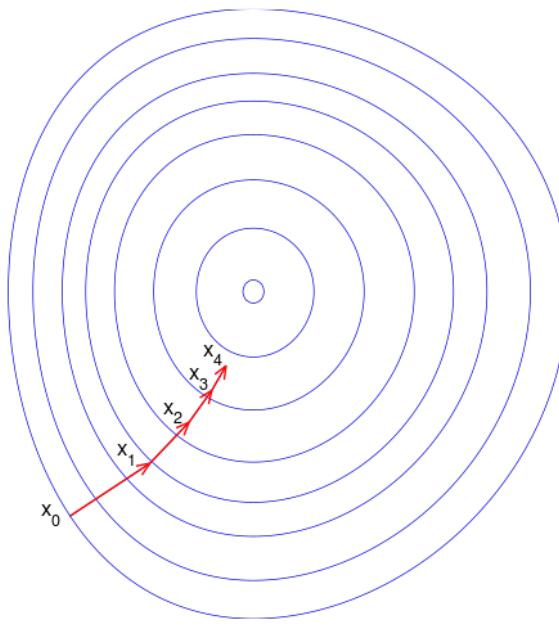


Abbildung 13: Quelle: Wikipedia

Definition 13. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, auf der f konstant ist, also $f(\gamma(t)) = c$ für eine festes $c \in \mathbb{R}$ gilt, heißt Höhenlinie.



Abbildung 14: Quelle: <https://getoutside.ordnancesurvey.co.uk/guides/understanding-map-contour-lines-for-beginners/>

Bemerkung 4. Der Gradient steht senkrecht auf Höhenlinien. Dies bedeutet, dass

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

gilt.

Beweis. Aus $f(\gamma(t)) = c$ folgt $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = 0$. Mit der Kettenregel folgt $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ und damit $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$. \square

Anwendung: Backpropagation

Ein Neuronales Netz ist eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die einem Input (auch Feature genannt) in Abhängigkeit der Gewichte Ω einen Ausgabewert zuordnet. Die Funktion ist dabei aus einfachen Bausteinen zusammengesetzt.

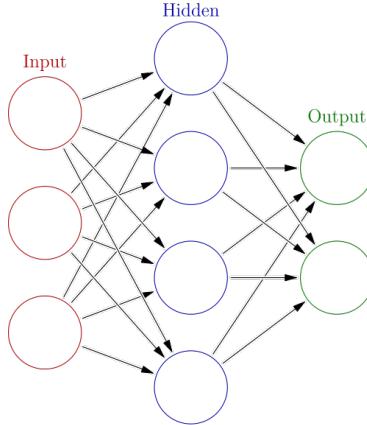


Abbildung 15: Quelle: Wikipedia

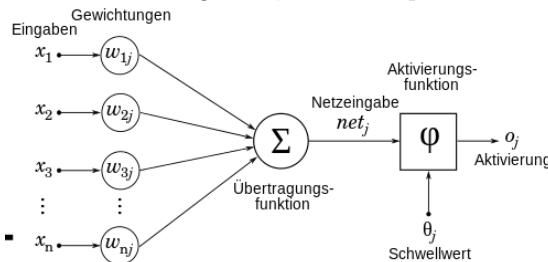


Abbildung 16: Quelle: Wikipedia

Gegeben ist ein Datensatz $D := \{(x_i, y_i)\}$. Finde Gewichte Omega, so dass Lossfunktion

$$L_D : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

minimal wird. Zum Beispiel $L_D(\omega) := \sum_{(x_i, y_i) \in D} (f(\omega, x_i) - y_i)^2$. Wende Gradientenverfahren an:

Algorithm 2 Gradientabstieg

- 1: Initialisiere $k := 0$ und zufällige Gewichte ω_0 .
 - 2: Initialisiere Genauigkeit $\epsilon > 0$.
 - 3: **while** $\|\nabla L_D(\omega)\| > \epsilon$ **do** So lange kein Extrema vorliegt
 - 4: Bestimme α_k mit $L_D(\omega_k + \alpha_k d_k) = L_D(\omega_k) + \alpha_k d L_D(\omega_k) d_k + R(\alpha_k d_k)$
 - Schrittweite bestimmen
 - 5: Setze $\omega_{k+1} := \omega_k + \alpha_k d_k$. ► Absteigen
 - 6: $k \leftarrow k + 1$ ► Wiederholen
-

Wenn der Datensatz D sehr groß ist (Big Data), ist die Berechnung des Gradienten der Lossfunktion entsprechend aufwendig. Um diesen Aufwand zu reduzieren, kann man das Gradientenverfahren modifizieren, so dass man Gradienten nur auf Teilräumen berechnet. Man erhält somit das sogenannte Mini-Batch Gradientenverfahren und das stochastische Gradientenverfahren.

Algorithm 3 Gradientabstieg

- 1: Initialisiere $k := 0$ und zufällige Gewichte \mathbf{w}_0 .
 - 2: Initialisiere Genauigkeit $\epsilon > 0$.
 - 3: Wähle Teilmenge $D'_0 \subset D$
 - 4: **while** $\|\nabla L_{D'_k}(\omega)\| > \epsilon$ **do** ► So lange kein Extrema vorliegt
 - 5: Bestimme α_k mit $L_{D'_k}(\omega_k + \alpha_k d_k) = L_{D'_k}(\omega_k) + \alpha_k d L_{D'_k}(\omega_k) d_k + R(\alpha_k d_k)$ ► Schrittweite bestimmen
 - 6: Setze $\omega_{k+1} := \omega_k + \alpha_k d_k$. ► Absteigen
 - 7: Wähle neue Teilmenge $D'_{k+1} \subset D$.
 - 8: $k \leftarrow k + 1$ ► Wiederholen
-

Wenn man als Teilmenge immer nur eine einelementige Menge wählt, so spricht man vom stochastischen Gradientenverfahren.



Abbildung 17: Quelle: <https://towardsdatascience.com/batch-mini-batch-stochastic-gradient-descent-7a62ecba642a>

2.3 Gradient einer mehrdimensionalen Funktion

Definition 14. Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung dF gibt, so dass

$$F(a + h) = F(a) + dF(a)h + R(h)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$ gilt für alle $a \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 5. Im Fall $n = 1$ stimmt diese Definition mit der alten Definition 7 überein.

Beweis. Nach Satz gilt für eine differenzierbare Funktion $f(a + th) = f(a) + df(a)h + R(th)$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(th)}{\|th\|} = 0$. Umstellen ergibt

$$df(a)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

und somit existieren alle linearen Abbildungen und wegen der Linearität von dF sind diese auch stetig. \square

Beispiel 1 (Affine Abbildung). Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $F(x) := Ax + b$ differenzierbar, da $F(a+h) = A(a+h) + b = Aa + Ah + b = Aa + b + Ah = F(a) + Ah$ und damit für $dF(a) := A$ und $R(h) = 0$ die Definition 14 erfüllt ist.

Satz 10 (Differenzierbarkeit von Produktfunktionen). Eine Funktion $F := (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ ist genau dann differenzierbar, wenn $F_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$dF(a) = (dF_1(a), dF_2(a)).$$

Beweis. Sind F_1 und F_2 differenzierbar, so gilt für $i = 1, 2$

$$F_i(a+h) = F_i(a) + dF_i h + R_i(h)$$

Dann gilt mit $dF(a) = (dF_1(a), dF_2(a))$ und $R(h) := (R_1(h), R_2(h))$

$$F(a+h) = F(a) + dFh + R(h)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0$ und damit ist F differenzierbar. Die Umkehrung folgt analog. \square

Bemerkung 6 (Differenzial von Produktfunktionen). Eine Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann differenzierbar, wenn ihre Koordinaten-Funktionen $F_1 : U \rightarrow \mathbb{R}, \dots, F_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(a) = \begin{pmatrix} F_1(a) \\ \vdots \\ F_m(a) \end{pmatrix}$ differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$dF(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_m(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_m(a) \end{pmatrix}$$

Bemerkung 7 (Differenzierbarkeit von Wegen). Ein Weg $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} : I \rightarrow U$ ist genau dann differenzierbar, wenn γ_i differenzierbar ist für $i = 1, \dots, m$ und dann gilt $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix}$.

Satz 11 (Kettenregel). Seien $G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ und $F : V \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^k$ differenzierbar. Dann ist $F \circ G$ differenzierbar und mit $b := G(a)$ es gilt

$$d(F \circ G)(a) = dF(b) \cdot dG(a)$$

Beweis. Analog zu Baby Kettenregel. \square

Anwendung: Automatisches Ableiten



Abbildung 18: Quelle: Wikipedia

Automatisches Ableiten in Pytorch

Mit Hilfe des Automatischen Ableitens kann man den Gradienten der Lossfunktion zu einem Neuronalen Netz einfach berechnen, da dieser sich aus einfachen Funktionen zusammensetzt.

3 Mehrdimensionale Integralrechnung

3.1 Lebesgue Maß

Für offene Intervalle $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir $I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ einen n -dimensionalen Quader und $\bar{I} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ seinen Abschluss. Wir definieren das Volumen

$$\text{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n -dimensionalen Quader und mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein } k\}$$

die Menge der degenerierten Quader. Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern

$$\left\{ I_j \mid I_j \in \mathbb{I}(n) \text{ mit } A \subset \bigcup_j I_j \right\}$$

als Hüllquader für A .

Definition 15 (Lebesguesche äußere Maß). *Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch*

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) ; I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

Falls für alle Hüllquader $\text{vol}(I_j) = \infty$ gilt, so setzen wir $\mu(A) = \infty$.

Definition 16 (Erinnerung Infimum).

Definition 17 (Nullmenge). Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(N) = 0$ heißt Nullmenge.

Bemerkung 8. Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$

Beweis. Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$. \square

Satz 12 (σ -subadditivität). Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Beweis. Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadern $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j \sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \left(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right) = \left(\sum_j \mu(A_j)\right) + \epsilon$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 9. Für $I \in \mathbb{I}(n)$ gilt $\mu(I) = \text{vol}(I)$.

Beweis. Seien $I_j \in \mathbb{I}(n)$ mit $I \subset \bigcup_j I_j$. Da I beschränkt und abgeschlossen ist, ist I kompakt. Damit reichen endlich viele Intervalle, um $I \subset \bigcup_{j=1}^n I_j$ zu überdecken. Für endlich viele Intervalle ist es einfach zu zeigen, dass

$$\text{vol}(I) \leq \sum_{j=1}^n \text{vol}(I_j)$$

gilt. Damit folgt die Behauptung. \square

Satz 13. Für $I \in \mathbb{I}(n)$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $I \subset A \subset \bar{I}$ gilt $\mu(A) = \text{vol}(I)$.

Beweis. Mit $I_0 := I$ und $I_j := \emptyset$ ist $I \subset \bigcup_j I_j$ und damit gilt

$$\mu(I) \leq \sum_j \text{vol}(I_j) = \text{vol}(I)$$

Es sei $\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathbb{R}^n \mid I^0 \subset A \subset \bar{I}^0 \text{ mit } I^0 \in \mathbb{I}^0(n)\}$. Für $A_0 \in \mathcal{A}_0$ gibt es $\epsilon > 0$ und $I_\epsilon \in \mathbb{I}(n)$ mit $A \subset I_\epsilon$ und $\text{vol}(I_\epsilon) \leq \epsilon$ und damit $\mu(A_0) = 0$. Zu $I \in \mathbb{I}(n)$ gibt es $2n$ -Seiten $J_j \in \mathcal{A}_0$ mit $\bar{I} = I \cup \bigcup_{j=1}^{2n} J_j$. Aus der σ -subadditivität folgt

$$\mu(\bar{I}) \leq \mu(I) + \sum_{j=1}^{2n} \mu(J_j) = \mu(I)$$



Abbildung 19: Äuferes Maß



Abbildung 20: Inneres Maß

Für $I \subset A \subset \bar{I}$ folgt damit und mit der Monotonie

$$\mu(I) = \mu(A) = \mu(\bar{I}).$$

Mit Bemerkung 9 folgt die Behauptung. \square

Es sei $A, D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmenge mit $A \subset D$. Man kann einerseits das Volumen $\mu(A)$, als auch das Volumen $\mu_D(A) := \mu(D) - \mu(D \setminus A)$ berechnen. Man approximiert hierbei das Volumen von A einmal mit Hüllquadern von außen und einmal von innen.

Es ist daher sinnvoll von einer messbaren Menge zu sprechen, wenn diese beiden Volumen übereinstimmen, also $\mu_D(A) = \mu(A)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $\mu(D) = \mu(A) + \mu(D \setminus A)$. Für festes D wären somit alle Mengen A messbar, für die das äußere Lebesgue Maß additiv ist auf der Zerlegung $D = A \cup D \setminus A$. Lässt man die Bedingungen der Beschränktheit und $A \subset D$ fallen, gelangt man zu folgender Definition.

Definition 18 (μ -messbare Menge). Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar, falls für alle $D \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(D) = \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D)$$

Da wir die σ -subadditivität bereits nachgewiesen haben, können wir diese Bedingung auf

$$\mu(D) \geq \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D)$$

reduzieren. Die Menge aller messbaren Mengen bezeichnen wir mit \mathcal{A} .

Bemerkung 10. Nullmengen sind messbar.

Beweis. Es sei $N, D \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(N) = 0$. Wegen der Monotonie von μ ist $0 \leq \mu(N \cap D) \leq \mu(N) = 0$ und somit ist $N \cap D$ auch eine Nullmenge. Wir erhalten damit und nochmaliger Monotonie von μ

$$\mu(N \cap D) + \mu(N^c \cap D) = \mu(N^c \cap D) \leq \mu(D)$$

und damit ist N messbar. \square

σ -Algebra der messbaren Mengen

Die Menge der messbaren Mengen \mathcal{A} hat einige besondere Eigenschaften. Wir geben hier nur diese Eigenschaften ohne Beweis an. Die Beweise verwenden im wesentlichen Techniken, die wir bereits kennengelernt haben.

- Für eine Folge $A_i \in \mathcal{A}$ von messbaren Mengen mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ ist $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.
- Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist auch $A^c \in \mathcal{A}$.
- Für eine Folge $A_i \in \mathcal{A}$ messbarer Mengen ist $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$ messbar.

Satz 14 (Charakterisierung messbarer Mengen). *Eine Menge A ist genau dann messbar, wenn $A = S \cup N$, wobei N eine Nullmenge und S Vereinigung von kompakten Mengen ist.*

3.2 Lebesgue Integral

Definition 19. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

Definition 20. Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $I_k \in \mathbb{I}(n)$ mit $I_l \cap I_h = \emptyset$ für $i \neq j$ heißt Treppenfunktion.



Abbildung 21: Quelle: Wikipedia: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png>

Bemerkung 11. Seien $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}$ und $\psi(x) = \sum_{j=1}^l u_j 1_{I_j}$. Dann definiert $(\varphi + \psi)(x) := \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^l (c_k + u_j) 1_{I_{k,j}}$ mit $I_{k,j} := I_k \cap I_j$ eine Treppenfunktion (nach entsprechender Ummumerierung zu einem einzigen Summenzeichen).

Definition 21. Für eine Treppenfunktion $\varphi(x) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}$ definieren wir das Integral durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu := \sum_{k=1}^m c_k \mu(I_k).$$

Satz 15. Seien $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}$ und $\psi(x) = \sum_{j=1}^l u_j 1_{I_j}$ zwei Treppenfunktionen. Für das Integral von Treppenfunktion gilt:

- Ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle x , dann ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$ (Das Integral hängt nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab und ist wohldefiniert)
- $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \varphi + \beta \psi d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$
- $\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| d\mu$
- Ist $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle x , so ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$

Beweis. Der Beweis wird über eine vollständige Induktion geführt. Der Induktionsanfang ist einfach zu zeigen. Wir nehmen an, die Aussage gilt für alle Dimensionen $k < n$. Zerlege $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Jeder Quader $I \in \mathbb{I}(n)$ zerlegt sich damit ebenfalls in ein Produkt $I = I' \times I''$ mit $I' \in \mathbb{I}(p)$ und $I'' \in \mathbb{I}(n-p)$ und für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ gilt $1_I(z) = 1_{I'}(x) \cdot 1_{I''}(y)$. Es sei nun $\varphi(z) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}(z)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ definiert $\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^m c_k 1_{I'_k}(y) \cdot 1_{I'_k}(x)$ eine Treppenfunktion auf \mathbb{R}^{n-p} . Nach Induktionsvoraussetzung hängt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) d\mu' = \sum_{k=1}^m c_k \mu'(I'_k) \cdot 1_{I'_k}(y) =: \phi(y)$$

nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab. $\phi(y)$ ist wiederum eine Treppenfunktion auf \mathbb{R}^{n-p} und nach Induktionsvoraussetzung hängt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y) d\mu'' = \sum_{k=1}^m c_k \mu'(I'_k) \cdot \mu''(I''_k)(y)$$

nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab. Somit gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) d\mu' d\mu'' = \sum_{k=1}^m c_k \mu'(I'_k) \cdot \mu''(I''_k)(y) = \sum_{k=1}^m c_k \mu(I_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) d\mu.$$

Die linke Seite hängt damit nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab und alle Behauptungen können so auf den Fall $n = 1$ zurückgeführt werden. \square

Bemerkung 12 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen). *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) d\mu' \right) d\mu''$$

Beweis. Siehe Beweis des letzten Satzes. \square

3.2.1 Die L^1 -Halbnorm

Der Fall ∞ ist bei den folgenden Betrachtungen immer als möglicher Fall zu berücksichtigen.

Definition 22. Eine Hüllreihe zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Reihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{I_k}(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$ sind positive reelle Zahlen $c_k > 0$.
- $I_k \subset \mathbb{R}^n$ sind offene Quadrate.
- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x)| \leq \phi(x)$.

Definition 23. Der Inhalt einer Hüllreihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{I_k}(x)$ ist definiert durch

$$I(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu(I_k).$$

Definition 24. Die L^1 -Halbnorm einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu f

$$\|f\|_1 := \inf \left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\}.$$

Lemma 1 (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung). *Für nicht negative Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ und f_k wählen wir eine Hüllreihe $\phi_k = \sum_i c_{ik} 1_{I_{ik}}$ mit Inhalt

$$I(\phi_k) = \sum_i c_{ik} \mu(1_{I_{ik}}) = \|f_k\|_1 + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dann ist $\phi := \sum_{k,i} c_{ik} 1_{I_{ik}}$ eine Hüllreihe der Funktion $\sum_k f_k$ mit

$$I(\phi) = \sum_{k,i} c_{ik} \mu(I_{ik}) = \sum_k \left(\sum_i c_{ik} \mu(I_{ik}) \right) \leq \sum_k \|f_k\|_1 + \epsilon$$

Mit $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_1 \leq I(\phi)$ und $\epsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 13 (Rechenregeln). *Für $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

- $\|cf\|_1 \leq |c| \|f\|_1$.

- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
- Aus $\|f(x)\|_1 \leq g(x)$ für alle x folgt $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

Beweis. • Für eine Hüllreihe ϕ von f ist $|c| \cdot \phi$ eine Hüllreihe von $c \cdot f$.

- Folgt aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung.
- Hullreihen sind immer größer-gleich der Funktion und damit haben größere Funktionen größere Hullreihen.

□

Lemma 2 (Fundamentallemma). *Für die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_I$ eines Quaders I gilt*

$$\|\mathbf{1}_I\|_1 = \mu(I) = \text{vol}(I) = \int \mathbf{1}_I d\mu$$

Beweis. $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}_I$ ist eine Hüllfunktion von $\mathbf{1}_I$ und damit gilt $\|\mathbf{1}_I\| \leq \mu(I)$. Sei $\phi(x) = \sum_k c_k \mathbf{1}_{I_k}$ eine Hüllreihe von $\mathbf{1}_I$ und $\epsilon > 0$. Da $\phi(x) \geq \mathbf{1}$ gibt es für jedes x einen Index $N(x)$ mit $\sum_{k=1}^{N(x)} c_k \mathbf{1}_{I_k} \geq \mathbf{1} - \epsilon$. Da die I_k offen sind, gibt es für jedes x eine Umgebung $U(x)$, so dass letztere Gleichung gilt. Da \bar{I} kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), überdecken endlich viele $U(x_1), \dots, U(x_n)$ den Quader I . Mit $N := \max\{N(x_1), \dots, N(x_n)\}$ folgt $\sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k} \geq (\mathbf{1} - \epsilon) \mathbf{1}_I$. Aus Satz 15 (iii) folgt

$$I(\phi) = \sum_k c_k \mu(I_k) \geq \sum_{k=1}^N c_k \mu(I_k) \geq (1 - \epsilon) \mu(I).$$

Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt $I(\phi) \geq \mu(I)$ und damit insgesamt die Behauptung. □

Lemma 3. *Für jede Treppenfunktion ϕ auf \mathbb{R}^n gilt*

$$\|\phi\|_1 = \int |\phi| d\mu.$$

3.2.2 Integration über den \mathbb{R}^n

Definition 25. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen φ_k existiert mit

$$\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 14. • Die reelle Zahlenfolge $\int \varphi_k d\mu$ ist eine Cauchyfolge und damit konvergent.

- Der Grenzwert ist unabhängig von der Folge φ_k .

Beweis. Für Treppenfunktionen ψ und ξ gilt

$$\begin{aligned} \left| \int \psi d\mu - \int \xi d\mu \right| &\leq \int |\psi - \xi| d\mu = \|\psi - \xi\|_1 \\ &\leq \|\psi - f\|_1 + \|f - \xi\|_1 \end{aligned}$$

woraus die Behauptungen folgen. □

Satz 16. Ist f über \mathbb{R}^n integrierbar, so auch $|f|$ und es gilt

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = \|f\|_1.$$

Beweis. Sei f integrierbar und φ_k eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|\varphi_k\|_1 \rightarrow 0$. Aus $\| |f| - |\varphi_k| \|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1$ ergibt sich wegen der Monotonie der L^1 -Norm

$$\| |f| - |\varphi_k| \|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1.$$

Damit gilt $\| |f| - |\varphi_k| \|_1 \rightarrow 0$ und somit ist $|f|$ integrierbar und mit der Abschätzung von Beträgen für Treppenfunktionen aus Satz 15 gilt

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \lim_k \int \varphi_k d\mu \right| \leq \int |\varphi_k| d\mu = \int |f| d\mu$$

und damit der erste Teil der Behauptung. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|f\| - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1$$

und wegen $\|\varphi_k\|_1 = \int |\varphi_k| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 15 (Rechenregeln). Sind f und g integrierbar, so gilt

- $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist integrierbar mit

$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

- Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- Ist g zusätzlich beschränkt, so ist auch $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis. • Sind ϕ_k und ψ_k approximierende Folge von Treppenfunktionen von f und g , so ist $\alpha\phi_k + \beta\psi_k$ eine approximierende Folge von $\alpha f + \beta g$.

- Nach Satz 16 ist $\int (g - f) d\mu = \|g - f\|_1 \geq 0$. \square

Bemerkung 16. Ist f integrierbar, so auch $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \min(f, 0)$. Damit ist $f = f^+ + f^-$ genau dann integrierbar, wenn f^+ und f^- integrierbar sind. Da $-f^- \geq 0$ ist, kann man sich in Beweisen häufig auf den Fall $f \geq 0$ beschränken.

Beweis. Es ist $\max(f, 0) = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $\min(f, 0) = \frac{1}{2}(f - |f|)$ und die Behauptung folgt aus den Rechenregeln. \square

Definition 26 (Integration über Teilmengen). Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

die triviale Fortsetzung von f auf \mathbb{R}^n . f heißt integrierbar über A , falls f_A über \mathbb{R}^n integrierbar ist und in diesem Fall bezeichnen wir mit

$$\int_A f(x) d\mu := \int f_A(x) d\mu$$

als das Integral von f über A .

Satz 17 (Kleiner Satz von B. Levi). Zu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gebe es eine monoton wachsende Folge φ_k von Treppenfunktionen mit

- Für alles $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x)$. f ist also die punktweise gebildete Grenzfunktion der φ_k .
- Die reelle Folge der Integrale $\int \varphi_k d\mu$ ist beschränkt.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k d\mu.$$

Beweis. Aus $f\varphi_k = \sum_{i=k}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung Lemma 1 und Lemma 3

$$\|f - \varphi_k\|_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} \int |\varphi_{i+1} - \varphi_i| d\mu = \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int \varphi_{i+1} d\mu - \int \varphi_i d\mu \right).$$

Die Folge $\int \varphi_k$ ist monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent. Bezeichnen wir mit I den Grenzwert, so folgt $\|f - \varphi_k\|_1 \leq I - \int \varphi_k d\mu$. Also gilt $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ und damit ist f integrierbar und mit der Definition des Integrals folgt die Behauptung. \square

Definition 27. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für alle $a \in U$ ein Radius $r > 0$ existiert, so dass der Ball $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\} \subset U$ in U enthalten ist.

Satz 18. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.

Beweis. Da U offen ist, kann man um jeden Punkt $a \in U$ einen Würfel $W_r(a)$ finden, dessen Mittelpunkt a und dessen Kantenlänge r eine rationale Zahl ist. Damit kann man zu Punkten a_1, \dots, a_n Würfel wählen, so dass $W_r(a_i) \cap W_r(a_j) = \emptyset$ für $i \neq j$ und mit $m_i := \min\{f(x) \mid x \in W_r(a_i)\}$ Hüllreihen $\psi_{a_1, \dots, a_n} := \sum_{i=1}^n m_i 1_{W_r(a_i)}$ konstruieren mit $\psi \leq f$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{T} := \{\psi_k\}$ die abzählbare Menge dieser Treppenfunktionen, so ist $f = \sup\{\psi \mid \psi \in \mathcal{T}\}$ und $\varphi_k := \max\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ eine monoton wachsende Treppenfunktion mit $\varphi_k \rightarrow f$. Da U beschränkt ist, gibt es eine Quader I mit $U \subset I$ und mit $M := \max f$ ist $\int \varphi_k d\mu \leq M\mu(I)$ beschränkt. Mit dem Satz von B. Levi folgt die Behauptung. \square

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1	Quelle: Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Diferencial_quotient_of_a_function.svg	
2	Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mittelwertsatz3.svg	6
3	Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EpsilonSchlauch_klein.svg	8
4	Quelle: Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Limes_Definition_Vektorgrafik.svg	9
5	Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Upper_semi.svg	9
6	Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gradient2.svg	10
7	Kantenzug mit achsenparallelen Kanten	12
8	Quelle: Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:EbeneKurve.png	13
9	Quelle: Wikipedia	14
10	Quelle: Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:MaximumParaboloid.png	18
11	Quelle: Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:MaximumCounterexample.png	18
12	Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saddle_point.svg	19
13	Quelle: Wikipedia	20
14	Quelle: https://getoutside.ordnancesurvey.co.uk/guides/understanding-map-contour-lines-for-beginners/	21
15	Quelle: Wikipedia	22
16	Quelle: Wikipedia	22
17	Quelle: https://towardsdatascience.com/batch-mini-batch-stochastic-gradient-descent-7a62ecba642a	23
18	Quelle: Wikipedia	25
19	Äußeres Maß	27
20	Inneres Maß	27
21	Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png	28