

# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Algorithmus

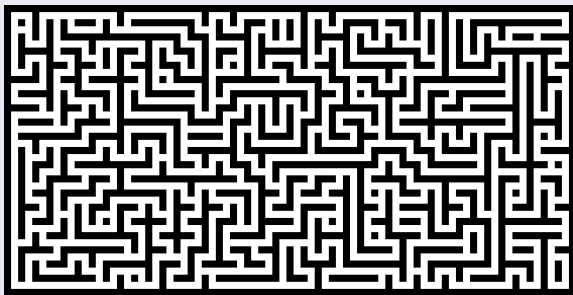


Figure: Quelle: Wikipedia

## Algorithmus Informell

Ein Algorithmus ist eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen. Algorithmen bestehen aus endlich vielen, wohldefinierten Einzelschritten.

## Algorithmus Formal

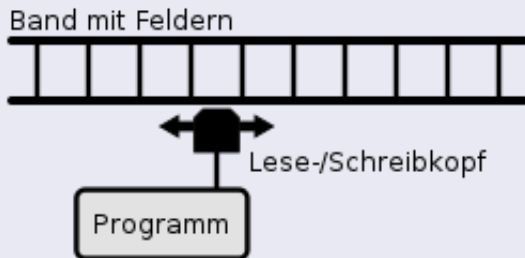




Figure: Quelle: Wikipedia

### Gleitkommazahl

Eine Gleitkommazahl ist eine Zahl  $z$  der Form

$$z = ad^e; \quad a = (\pm) \sum_{i=1}^l c_i d^{-i}$$
$$e, c_i \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\} \subset \mathbb{Z}$$

### Gleitkommazahl $d = 10$

$$0.314156 \cdot 10^1$$

### Gleitkommazahl Darstellung $d = 2$



## Schaltwerke

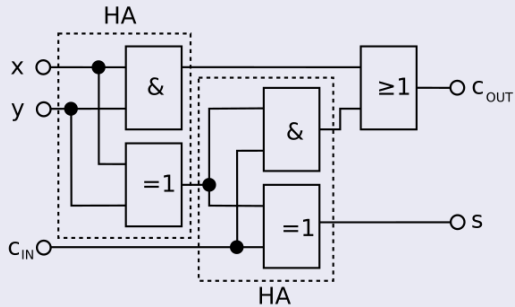


Figure: Quelle: Wikipedia

### Gleitkommazahl

Ist  $x$  eine reelle Zahl so gibt es eine Gleitkommazahl  $fl(x)$  mit

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq eps := d^{1-l}/2$$

### Gleitkommazahl

Für eine exakte Operation  $\circ \in \{+, -, \cdot, : \}$  gilt für die entsprechende Ausführung  $\hat{\circ}$  auf einem Computer

$$a \hat{\circ} b = (a \circ b)(1 + \epsilon), \quad \epsilon \leq \text{eps}$$

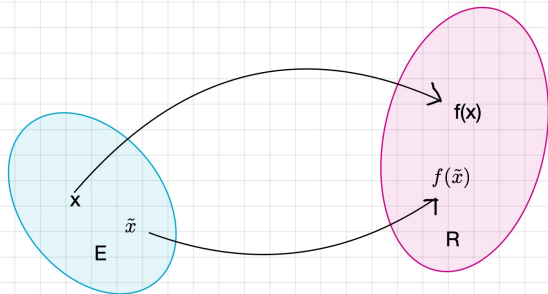


Eingabe -> Algorithmus -> Ausgabe

Eingabe    ->    Algorithmus    ->    Ausgabe  
mit Fehler    mit Fehler    mit Fehler

### Konditionszahl

Die Kondition beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten. Die Konditionszahl stellt ein Maß für diese Abhängigkeit dar. Sie beschreibt das Verhältnis von  $E := \{\tilde{x} \mid \|\tilde{x} - x\| \leq \text{eps}\|x\|\}$  zu  $R := \{f(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in E\}$ .



### Kondition eines Problems

Die absolute Konditionierung eines Problems  $(f, x)$  ist die kleinste Zahl  $\kappa_{abs}$  mit

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq \kappa_{abs} \|x - \tilde{x}\|, \quad \tilde{x} \rightarrow x$$

### Kondition eines Problems

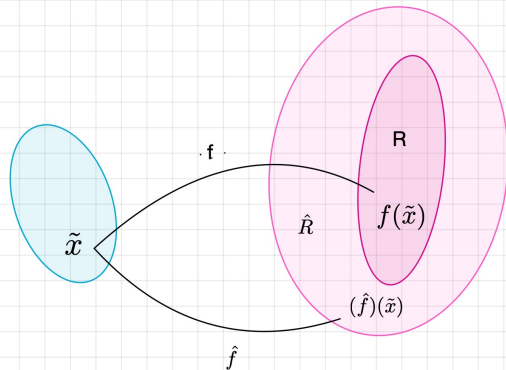
Die relative Konditionierung eines Problems  $(f, x)$  ist die kleinste Zahl  $\kappa_{rel}$  mit

$$\frac{\|f(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa_{rel} \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \quad \tilde{x} \rightarrow x$$

### Kondition eines Problems

Momentan können wir noch keine Konditionszahlen berechnen. Wir werden später lernen, wie wir sie in vielen Fällen abschätzen können.

### Stabilität



### Stabilität

Für eine Gleikommarealisierung  $\hat{f}$  eines Algorithmus zur Lösung des Problems  $(f, x)$  mit relativer Konditionszahl  $\kappa_{rel}$  ist der Stabilitätsindikator definiert als die kleinste Zahl  $\sigma \geq 0$  mit

$$\frac{\|\hat{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} \leq \sigma \kappa_{rel} \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

für alle  $\tilde{x} \in E$

### Stabilität eines Algorithmus

Der Algorithmus  $\hat{f}$  heisst stabil, wenn  $\sigma$  kleiner ist als die Anzahl der hintereinander ausgeführten Elementaroperationen.

### Message Passing Interface (MPI)

MPI ist ein Standard für die Kommunikation zwischen Prozessen in einem parallelen Rechensystem. Es ermöglicht die Entwicklung von standardisierten parallelen Anwendungen, die auf verschiedenen Rechnerarchitekturen laufen können.

### Message Passing Interface (MPI)

- **Punkt-zu-Punkt-Kommunikation:** Direkte Kommunikation zwischen zwei Prozessen mittels Senden und Empfangen von Nachrichten.
- **Kollektive Kommunikation:** Kommunikation zwischen einer Gruppe von Prozessen, z.B. Broadcast, Scatter, Gather und Reduce.
- **Synchronisation:** Mechanismen zur Synchronisation von Prozessen, z.B. Barrieren.
- **Kommunikatoren:** Gruppen von Prozessen, die miteinander kommunizieren können.
- **Rang:** Jeder Prozess in einem Kommunikator hat einen eindeutigen Rang, der zur Identifikation dient.



### Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation (PETSc)

PETSc ist eine Bibliothek für die Lösung wissenschaftlicher Rechenprobleme, die auf parallelen und verteilten Systemen ausgeführt werden. Bietet Werkzeuge für die Entwicklung von skalierbaren und effizienten numerischen Anwendungen.

- PETSc nutzt MPI für die Kommunikation zwischen Prozessen in parallelen Umgebungen.
- Unterstützt Punkt-zu-Punkt- und kollektive Kommunikation, um Daten zwischen Prozessen auszutauschen.
- Ermöglicht die Verteilung von Matrizen und Vektoren über mehrere Prozesse.
- Lineare und nichtlineare Gleichungslöser
- Eigenwertproblemlöser
- Zeitabhängige Probleme
- Preconditioner für die Beschleunigung der Konvergenz

### NumPy

NumPy ist eine Bibliothek für die Programmiersprache Python, die Unterstützung für große, mehrdimensionale Arrays und Matrizen bietet. Ermöglicht effiziente numerische Berechnungen und Datenmanipulationen.

### Grundprinzipien von NumPy

- **Arrays:** NumPy bietet das 'ndarray'-Objekt, das effiziente Speicher- und Rechenoperationen ermöglicht.
- **Broadcasting:** Ermöglicht die Durchführung von Operationen auf Arrays unterschiedlicher Größe.
- **Vektorisierung:** Vermeidet explizite Schleifen durch die Anwendung von Operationen auf ganze Arrays.
- **Universelle Funktionen (ufuncs):** Funktionen, die elementweise Operationen auf Arrays durchführen.

### Vorteile und Anwendungsgebiete von NumPy

- Hohe Leistung durch Implementierung in C
- Umfangreiche Bibliothek von mathematischen Funktionen
- Integration mit anderen wissenschaftlichen Python-Bibliotheken wie SciPy und Matplotlib