

Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System $t \mapsto x(t)$. Möchten verstehen, wie sich $x(t)$ über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten t_0, \dots, t_n lässt sich $x(t_i)$ messen und damit $x'(t_i) \cong \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist die Ableitung $x'(t) = f(x(t), t)$ eine Funktion in der Zeit und der Funktion selbst.

Beispiel

(1) $x'(t) = \mu x(t)$. Dann ist $x(t) = ce^{\mu t}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist $x(0) = x_0$, so ist $x(t) = x_0 e^{\mu t}$ eine Lösung von (1) mit $x(0) = x_0$.

System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$x_2'(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Werden zusätzlich die Anfangsbedingungen

$x_1(t_0) = x_0^1, \dots, x_n(t_0) = x_0^n$ vorgegebenen, so spricht man von

einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion

$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x', x)$$

mit $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \dots; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$ ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

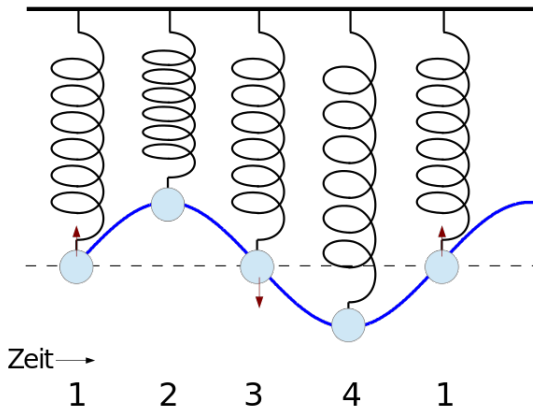
$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \dots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}.$$



Harmonischer Oszillator

$$x''(t) = -x(t).$$

Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

System von Differentialgleichungen

Für eine vektorwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$
definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t) dt \end{pmatrix}.$$

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des AWP $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$ mit $\varphi(t_0) = x_0$, wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \varphi) dt$$

gilt.

Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

Volterra-Lotka System

<https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen>

System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

die jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

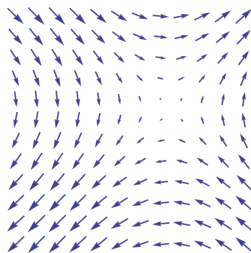


Figure: Quelle:

Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.svg

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve in dem Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle $t \in I$.

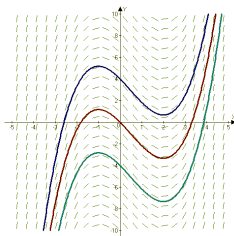


Figure: Quelle:

Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field

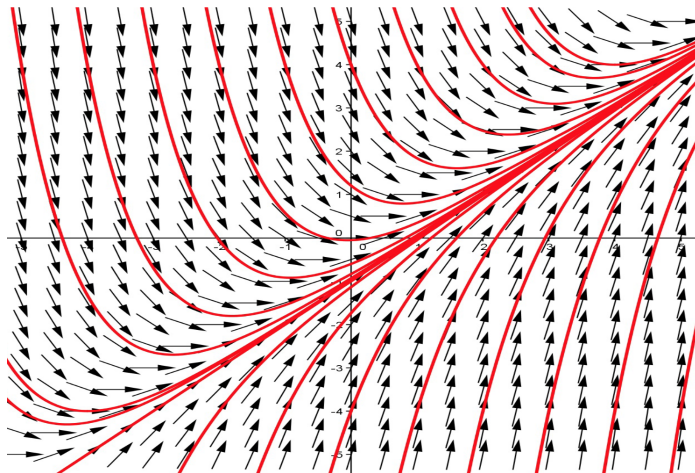
System von Differentialgleichungen

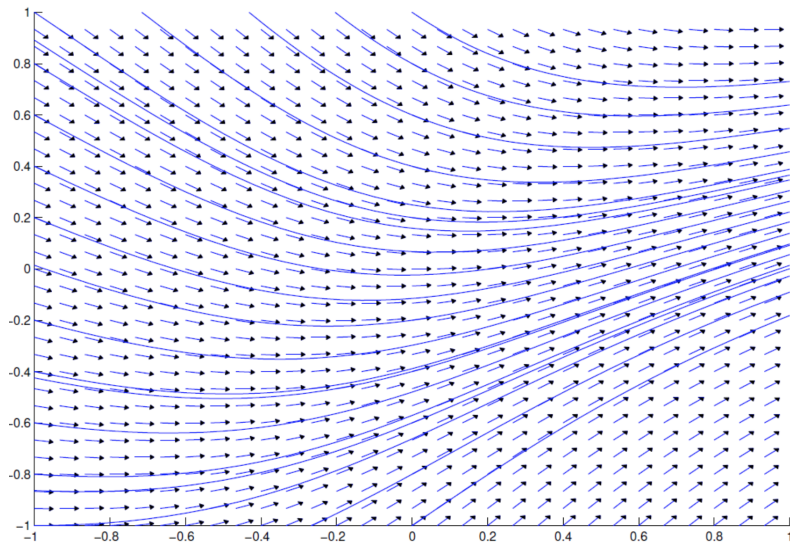
Ein dynamisches System ist eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $(t, x) \in U$ einen Vektor $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

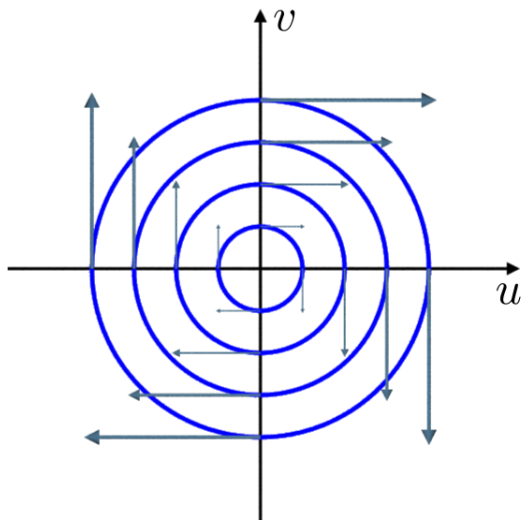
Eine Integralkurve oder Lösung für F ist eine Weg $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles $t \in I$.







Lösung Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Lösung Harmonischer Oszillator

Anfangswert $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist.

Harmonischer Oszillator

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!}$$

Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; k = 0 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; k = 1 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; k = 2 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; k = 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Harmonischer Oszillator

$$\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Link: [Trigonometrische Taylorreihen](#)

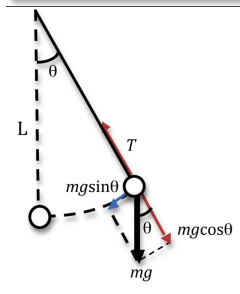
Harmonischer Oszillator Eigenwerte

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexer Eigenwert.

Gedämpftes Pendel

$$\theta''(t) = -L\theta - \underbrace{\mu\theta'}_{\text{drag}}. \quad L\theta = mg \sin(\theta)$$

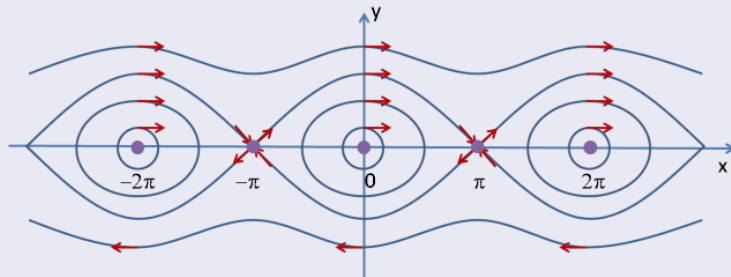


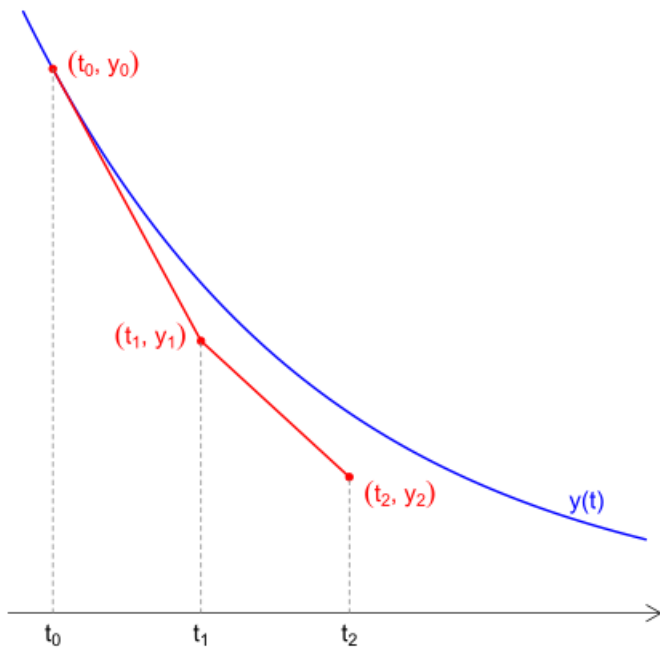
System gedämpftes Pendel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\mu x_2(t) - \frac{mg}{L} \sin(x_1(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{nicht linear!})$$

Phasenbild gedämpftes Pendel

$$\mu = 0$$





Euler Verfahren

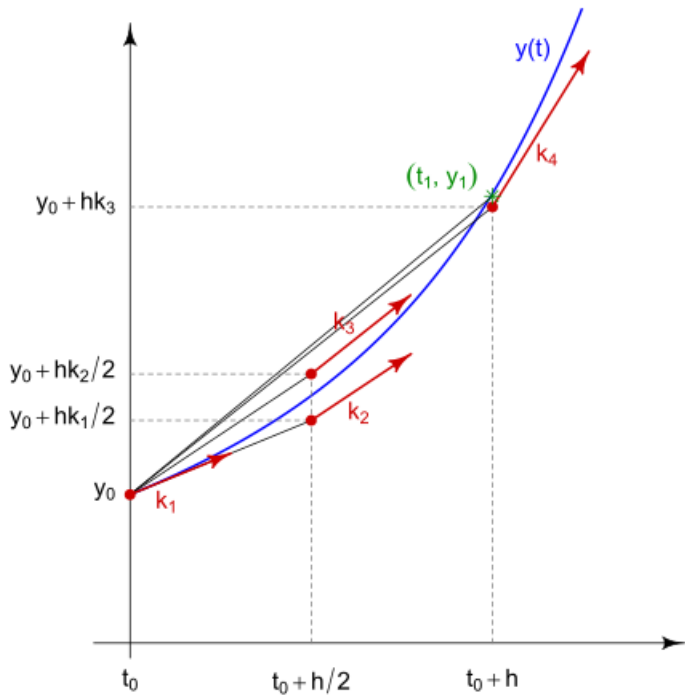
$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$t_k = t_0 + kh \quad (1)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad (2)$$

Approximationsfehler

Ist y eine Lösung des Anfangswertproblems und ist f differenzierbar, so gilt für den Approximationsfehler mit der Taylorreihe $y - y_k = o(h^2)$.



Runge Kutta Verfahren

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (4)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (5)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \quad (6)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \quad (7)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \quad (8)$$

Runge Kutta Verfahren als numerische Integration

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \quad (9)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \approx h \cdot \sum_{i=1}^4 \gamma_i k_i \quad (10)$$

Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Stetig (in x), falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$$

für alle (t, x) und (t, x') in U .

Banachscher Fixpunktsatz

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $P : X \rightarrow X$ eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(y)) < \lambda d(x, y)$$

und $\lambda < 1$. Dann besitzt P genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ mit $P(x^*) = x^*$.



Figure: Quelle: Wikipedia

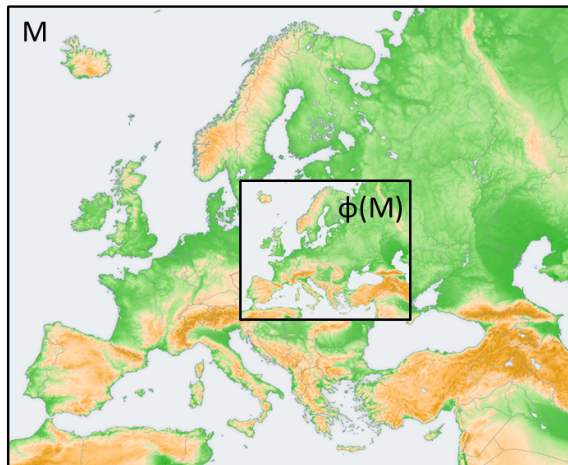


Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges $x_0 \in X$. Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge $x_n := P(x_{n-1})$. Für diese gilt nach Voraussetzung an P

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n \left(\sum_{i=0}^m \lambda^i d(x_1, x_0) \right) \\ &= \frac{\lambda^n (1 - \lambda^m)}{1 - \lambda} d(x_1, x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

und da $\lambda < 1$ ist x_n eine Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert die Folge in X gegen einen Grenzwert x^* . Für diesen gilt $P(x^*) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$ und damit ist x^* ein Fixpunkt von P .

Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein Intervall $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Betrachte die Menge $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|\psi(t) - x_0\| \leq b\}$ von Wegen in der Nähe von x_0 und die Abbildung

$$P : M \rightarrow M$$

$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \psi(t))dt$$

Wähle b so klein, dass P eine Kontraktion ist. Dann besitzt P einen Fixpunkt φ und dieser ist eine Lösung des AWP.

Die Eindeutigkeit zeigen wir folgendermassen. Sei I das Intervall auf dem eine Lösung existiert und $I' \subset I$ ein Intervall, auf dem zwei Lösungen $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ übereinstimmen. Da für den Startwert $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ auf jeden Fall gilt, ist I' nicht leer. Wegen der Stetigkeit ist I' abgeschlossen in I . Wir zeigen, dass I auch offen ist in I . Sei dazu $\xi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Da $\xi(t_0) = 0$ ist erhalten wir

$$\|\xi(t)\| = \int_{t_0}^t \|F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))\| dt \leq L \int_{t_0}^t \|\xi(t)\| dt$$

Mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir $\|\xi(t)\| = 0$ und damit $\varphi_1 = \varphi_2$ auf ganz I .

Lemma von Gronwall

Es sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(t) \geq 0$. Gibt es Konstanten $A, B \geq 0$ mit

$$g(t) \leq A \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right| + B$$

dann gilt $g(t) \leq B e^{A|t-t_0|}$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und A und b stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis

$F(t, x) := A(t)x(t) + b(t)$ ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$.