

# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

### Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung  $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Lipschitz-Stetig, falls es eine Konstante  $L \geq 0$  gibt mit

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$$

für alle  $(t, x)$  und  $(t, x')$  in  $U$ .

### Metrischer Raum

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  die linear ist in beiden Argumenten und die Dreiecksungleichung  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  erfüllt.

### Beispiel

$d(x, y) := \|y - x\|$  wobei  $\|\cdot\|$  eine Norm ist.

### Beispiel

Das für uns später relevante Beispiel ist der Funktionenraum mit der Maximumsnorm  $\|\varphi\| := \max_t |\varphi(t)|$ .

### Banachscher Fixpunktsatz

Es sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $P : X \rightarrow X$  eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(y)) < \lambda d(x, y)$$

und  $\lambda < 1$ . Dann besitzt  $P$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in X$  mit  $P(x^*) = x^*$ .



Figure: Quelle: Wikipedia

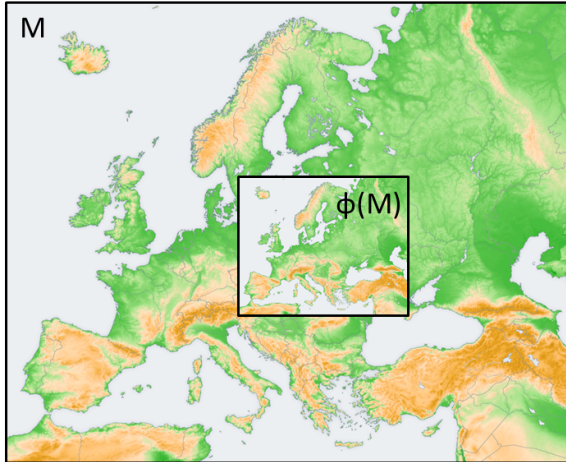


Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges  $x_0 \in X$ . Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge  $x_n := P(x_{n-1})$ . Für diese gilt nach Voraussetzung an  $P$

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) .$$

Da  $\lambda < 1$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+m}, x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) = 0$  und damit ist  $x_n$  eine Cauchyfolge. Da  $(X, d)$  vollständig ist, konvergiert die Folge in  $X$  gegen einen Grenzwert  $x^*$ . Für diesen gilt  $P(x^*) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$  und damit ist  $x^*$  ein Fixpunkt von  $P$ .

### Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt  $(t_0, x_0) \in U$  ein Intervall  $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$  auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$



Betrachte die Menge  $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|\psi(t) - x_0\| \leq b\}$  von Wegen in der Nähe von  $x_0$  und die Abbildung

$$P : M \rightarrow M$$

$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \psi(t)) dt$$

Ein Fixpunkt von  $P$  ist eine Lösung der Differentialgleichung.  $P$  ist eine Kontraktion.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit  $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

### Existenz und Eindeutigkeit]

Ist  $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$  eine lineare Differentialgleichung und  $A$  und  $b$  stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.

### Beweis

$F(t, x) := A(t)x(t) + b(t)$  ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten  $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|$  für jedes kompakte Intervall  $J \subset I$ .

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge  $\mathcal{L}$  der auf  $I$  definierten Lösungen der homogenen Gleichung  $x'(t) = A(t)x(t)$  ist ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum.
- $n$  Lösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  bilden genau dann eine Basis für  $\mathcal{L}$ , wenn die Vektoren  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  für ein  $t \in I$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  bilden.

Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  Lösungen der homogenen Gleichung, so auch  $c_1 \cdot \varphi_1 + \dots + c_n \cdot \varphi_n$ , da die Ableitung linear ist.  $\mathcal{L}$  ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\begin{aligned}\alpha_{t_0} : \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha_{t_0}(\varphi) &:= \varphi(t_0) .\end{aligned}$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der Linearität ist  $\alpha_{t_0}$  surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Basis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  des Lösungsraumes  $\mathcal{L}$  der homogenen Gleichung  $x'(t) = A(t)x(t)$  heißt Fundamentalsystem.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = A e^{tA} .$$

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix  $A$  lautet die Lösung des Anfangswertproblems  $x'(t) = Ax(t)$  und  $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA} x_0 .$$

Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $e^{tA}v_1, \dots, e^{tA}v_n$  ein Fundamentalsystem für  $\mathcal{L}$ . Damit bilden die Spalten von  $e^{tA}$  ein Fundamentalsystem.

### Beweis

Es ist  $x(0) = x_0$  und  $x'(t) = Ax(t)$ .



Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei  $v$  eine Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda}v$$

das AWP  $x' = Ax$  mit  $x(0) = v$ .

Beweis

$$\varphi'_v(t) = \lambda e^{t\lambda}v = e^{t\lambda}\lambda v = e^{t\lambda}Av = Ae^{t\lambda}v = A\varphi_v(t).$$

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Hat eine Matrix  $A$   $n$  Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so bilden die Lösungen  $\varphi_{v_1}, \dots, \varphi_{v_n}$  ein Fundamentalsystem.

### Beweis

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

### Hauptvektoren.

Ein Vektor  $v$  heißt Hauptvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , falls es eine Zahl  $s > 0$  gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl  $s$ , für die dies gilt heißt Stufe.

### Hauptvektoren

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

### Hauptvektoren

Für einen Hauptvektor  $v$  der Stufe  $s$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist

$$e^{At}v = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} ((A - \lambda I)^k t^k v)$$

### Hauptvektoren

Sei  $x' = Ax$  mit  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  und  $\lambda, \mu$  die Eigenwerte von  $A$ .

Dann können folgende Fälle auftreten:

- Es gibt zwei verschiedene reelle Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$ . Die allgemeine Lösung lautet dann  
 $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$   $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  mit den Eigenvektoren  $v_1, v_2$ .
- $\lambda$  ist ein doppelter reeller Eigenwert.
  - Der Lösungsraum  $(A - \lambda I)x = 0$  hat dimension 2. Das ist der Fall, wenn bis auf Basistransformation  $A = \lambda I$  ist. In diesem Fall hat die Differentialgleichung die allgemeinen Lösungen

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v, \quad v \in \mathbb{R}^2 \text{ beliebig}$$

### Hauptvektoren

- Der Lösungsraum  $(A - \lambda I)x = 0$  hat dimension 1.  
In diesem Fall gibt es einen Hauptvektor  $h$  der Stufe 2, also eine Lösung von  $(A - \lambda I)h = v$ . Die allgemeinen Lösungen lauten damit

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v + c_2(h + tv)) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- $A$  hat die komplex konjugierten Eigenwerte  $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ . Dann hat  $A$  die komplexen Eigenvektoren  $w, \bar{w} \in \mathbb{C}^2$ . Da  $A$  reell ist, sind  $\varphi_1(t) := \operatorname{Re}(we^{\lambda t})$  und  $\varphi_2(t) := \operatorname{Im}(we^{\lambda t})$ . Mit  $w = u + iv$  und  $\lambda = \gamma + i\theta$  ergibt sich

$$\varphi_1(t) = \operatorname{Re}(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\cos \theta t \cdot u - \sin \theta t \cdot v)$$

$$\varphi_2(t) = \operatorname{Im}(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\sin \theta t \cdot u + \cos \theta t \cdot v)$$

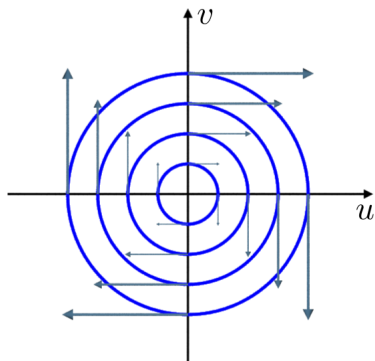
### Hauptvektoren

Die Lösungen sind damit gegeben durch

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

### Lösung Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$





### Harmonischer Oszillator Eigenwerte

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexer Eigenwert.

### Lineares System mit Hauptraum

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

### Lineares System mit Hauptraum

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - E\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Doppelter Eigenwert.

### Eigenraum zum Eigenwert 1

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{e_1\}$$

Doppelter Eigenwert aber Eigenraum ist eindimensional.

### Hauptraum zum Eigenwert 1

$$\ker\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right)^2\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{e_1, e_2\}$$

$e_2$  ist Hauptvektor der Stufe 2,  $e_1$  Hauptvektor der Stufe 1, also

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right)e_2 = e_1; \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right)e_1 = 0$$

### Allgemeine Lösung

$$\varphi_1(t) := e^t \cdot e_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) := e^t \left( E + \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I \right) t \right) e_2 = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$