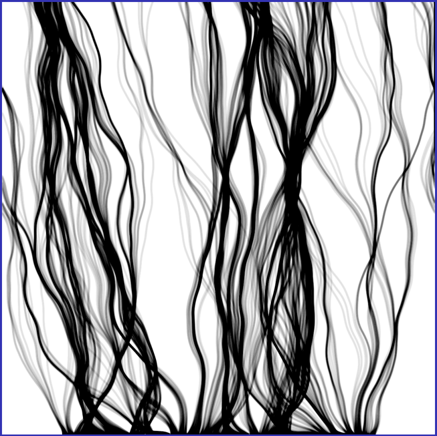
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Stetig, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$||F(t,x) - F(t,x')|| \leq L||x - x'||$$

für alle (t,x) und (t,x') in U.

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die linear ist in beiden Argumenten und die Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ erfüllt.

Beispiel

$d(x, y) := ||y - x||$ wobei $|| \cdot ||$ eine Norm ist.

Beispiel

Das für uns später relevante Beispiel ist der Funktionenraum mit der Maximumsnorm $||\varphi|| := \max_t |\varphi(t)|$.

Banachscher Fixpunktsatz

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $P : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(y)) < \lambda d(x, y)$$

und $\lambda < 1$. Dann besitzt P genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ mit $P(x^*) = x^*$.

Figure: Quelle: Wikipedia

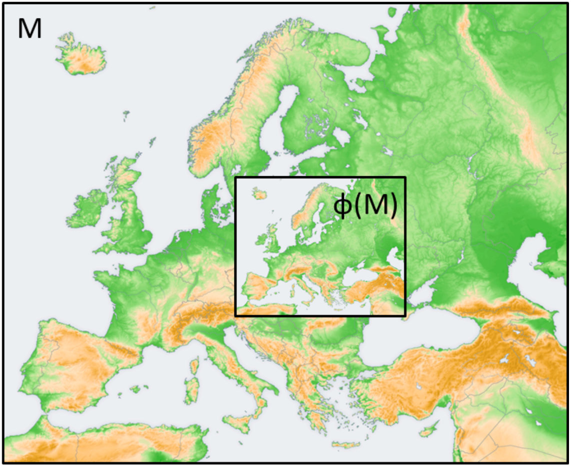


Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges $x_0 \in X$. Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge $x_n := P(x_{n-1})$. Für diese Gilt nach Voraussetzung an P

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \lambda^n (\sum_{i=0}^{m} \lambda^i) d(x_1, d_0 \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^m)}{1-\lambda} d(x_1, d_0) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, d_0) \end{aligned}$$

und da $\lambda < 1$ ist x_n eine Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert die Folge in X gegen einen Grenzwert x^*. Für diesen gilt $P(x^*) = P(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} P(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$ und damit ist x^* ein Fixpunkt von P.

Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein Intervall $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Betrachte die Menge $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n \mid ||\psi(t) - x_0|| \leq b\}$ von Wegen in der Nähe von x_0 und die Abbildung

$$P : M \to M$$
$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \psi(t))dt$$

Ein Fixpunkt von P ist eine Lösung der Differentialgleichung. P ist eine Kontraktion.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und A und b stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \;\; x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis

$F(t,x) := A(t)x(t) + b(t)$ ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten $L := \max_{t \in J} ||A(t)||$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge $\mathcal{L}$ der auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ ist eine n-dimensionaler reeller Vektorraum.
- n Lösungen $\varphi_1, \cdots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ bilden genau dann eine Basis für $\mathcal{L}$, wenn die Vektoren $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ für ein $t \in I$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Sind $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen Gleichung, so auch $c_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + c_n \cdot \varphi_n$, da die Ableitung linear ist. $\mathcal{L}$ ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\alpha_{t_0} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$$
$$\alpha_{t_0}(\varphi) := \varphi(t_0)\ .$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der linearität ist α_{t_0} surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des Lösungsraumes $\mathcal{L}$ der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ heißt Fundamentalsystem.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ .$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} \ .$$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix A lautet die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t)$ und $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA}x_0 \ .$$

Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist $e^{tA}v_1, \cdots, e^{tA}v_n$ ein Fundamentalsystem für $\mathcal{L}$. Damit bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem.

Beweis

Es ist $x(0) = x_0$ und $x'(t) = Ax(t)$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei v eine Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda}v$$

das AWP $x' = Ax$ mit $x(0) = v$.

Beweis

$\varphi_v'(t) = \lambda e^{t\lambda}v = e^{t\lambda}\lambda v = e^{t\lambda}Av = Ae^{t\lambda}v = A\varphi_v(t)$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Hat eine Matrix A n Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, so bilden die Lösungen $\varphi_{v_1}, \cdots \varphi_{v_n}$ ein Fundamentalsystem.

Beweis

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

Hauptvektoren.

Ein Vektor v heißt Hauptvektor zum Eigenwert λ, falls es eine Zahl $s > 0$ gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl s, für die dies gilt heißt Stufe.

Hauptvektoren

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

Hauptvektoren

Für einen Haupvektor v der Stufe s zum Eigenwert λ ist

$$e^{At}v = e^{\lambda It}e^{(A-\lambda I)t}v = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}((A-\lambda I)^k t^k v)$$

Hauptvektoren

Sei $x' = Ax$ mit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und λ, μ die Eigenwerte von A.

Dann können folgende Fälle auftreten:

- Es gibt zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1, λ_2. Die allgemeine Lösung lautet dann $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenvektoren v_1, v_2.
- λ ist ein doppelter reller Eigenwert.
    - Der Lösungsraum $(A - \lambda I)x = 0$ hat dimension 2. Das ist der Fall, wenn bis auf Basistransformation $A = \lambda I$ ist.
      In diesem Fall hat die Differentialgleichung die allgemeinen Lösungen

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v, \;\; v \in \mathbb{R}^2 \text{ beliebig}$$

Hauptvektoren

- - Der Lösungsraum $(A - \lambda I)x = 0$ hat dimension 1.
    In diesem Fall gibt es einen Hauptvektor h der Stufe 2, also eine Lösung von $(A - \lambda I)h = v$. Die allgemeinen Lösungen lauten damit

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v + c_2(h + tv))\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- A hat die komplex konjugierten Eigenwerte $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$. Dann hat A die komplexen Eigenvektoren $w, \bar{w} \in \mathbb{C}^2$. Da A reell ist, sind $\varphi_1(t) := Re(we^{\lambda t})$ und $\varphi_2(t) := Im(we^{\lambda t})$. Mit $w = u + iv$ und $\lambda = \gamma + i\theta$ ergibt sich

$$\varphi_1(t) = Re(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\cos\theta t \cdot u - \sin\theta t \cdot v)$$
$$\varphi_2(t) = Im(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\sin\theta t \cdot u + \cos\theta t \cdot v)$$

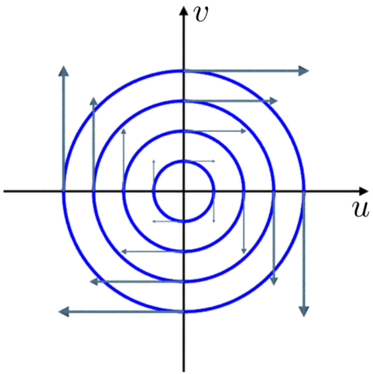
Hauptvektoren

Die Lösungen sind damit gegeben durch

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

Lösung Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Harmonischer Oszillator Eigenwerte

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexer Eigenwert.

Lineares System mit Hauptraum

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Lineares System mit Hauptraum

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Doppelter Eigenwert.

Eigenraum zum Eigenwert 1

$$\ker(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{e_1\}$$

Doppelter Eigenwert aber Eigenraum ist eindimensional.

Hauptraum zum Eigenwert 1

$$\ker((\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E)^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{e_1, e_2\}$$

e_2 ist Hauptvektor der Stufe 2, e_1 Hauptvektor der Stufe 1, also
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right) e_2 = e_1$; $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right) e_1 = 0$

Allgemeine Lösung

$$\varphi_1(t) := e^t \cdot e_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) := e^t \left(E + \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I \right) t \right) e_2 = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$$