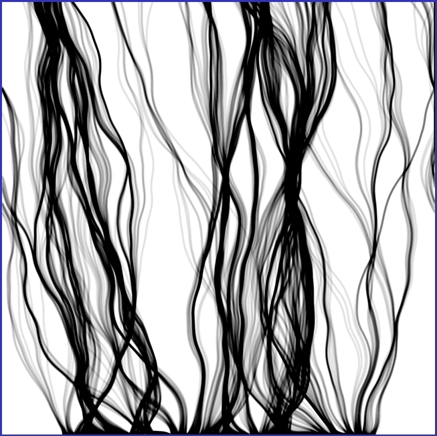
# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System $t \mapsto x(t)$. Möchten verstehen, wie sich $x(t)$ über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten $t_0, \cdots t_n$ lässt sich $x(t_i)$ messen und damit $x'(t_i) \cong \frac{x(x(t_i)-x(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}$ näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist $x'(t) = f(x(t), t)$.

**Beispiel**

(1) $x'(t) = \mu x(t)$. Dann ist $x(t) = ce^{\mu t}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist $x(0) = x_0$, so ist $x(t) = x_0 e^{\mu t}$ eine Lösung von (1) mit $x(0) = x_0$.

## System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Werden zusätzlich die Anfanfsbedingungen $x_1(t_0) = x_0^1, \ldots, x_n(t_0) = x_0^n$ vorgegebenen, so spricht man von einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

## System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem $n$-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \cdots, x', x)$$

mit $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \cdots; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$ ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen
$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \cdots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}$.

## System von Differentialgleichungen

Für eine vektorwertige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n; f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix} .$$

### System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des AWP $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$ mit $\varphi(t_0) = x_0$, wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \varphi) dt$$

gilt.

### Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

## Volterra-Lotka System

https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen

## System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ ,$$

die jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

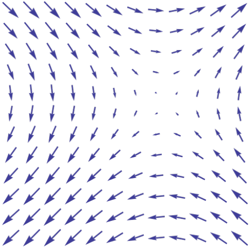


Figure: Quelle:
Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.sv

## System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve in dem Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle $t \in I$.

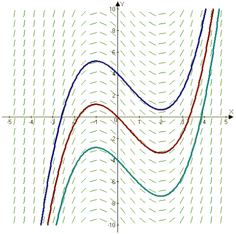


Figure: Quelle:
Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field

## System von Differentialgleichungen

Ein dynamisches System ist eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $(t, x) \in U$ einen Vektor $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.
Eine Integralkurve oder Lösung für $F$ ist eine Weg $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles $t \in I$.

### Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Stetig, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$||F(t,x) - F(t,x')|| \leq L||x - x'||$$

für alle $(t,x)$ und $(t,x')$ in $U$.

## Metrischer Raum

Ein metrischer Raum $(X, d)$ ist eine Menge $X$ zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die linear ist in beiden Argumenten und die Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ erfüllt.

## Beispiel

$d(x, y) := ||y - x||$ wobei $|| \cdot ||$ eine Norm ist.

## Beispiel

Das für uns später relevante Beispiel ist der Funktionenraum mit der Maximumsnorm $||\varphi|| := \max_t$.

**Banachscher Fixpunktsatz**

Es sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $P : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(x)) < \lambda d(x, y)$$

und $\lambda < 1$. Dann besitzt $P$ genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ mit $P(x^*) = x^*$.

Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges $x_0 \in X$. Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge $x_n := P(x_{n-1})$. Für diese Gilt nach Voraussetzung an $P$

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) \; .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_m) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) \; .$$

Da $\lambda < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_m) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, d_0) = 0$ und damit ist $x_n$ eine Cauchyfolge. Da $(X, d)$ vollständig ist, konvergiert die Folge in $X$ gegen einen Grenzwert $x^*$. Für diesen gilt $P(x^*) = P(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} P(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$ und damit ist $x^*$ ein Fixpunkt von $P$.

## Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein Intervall $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Betrachte die Menge $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n \mid ||\psi(t) - x_0|| \leq b\}$ von Wegen in der Nähe von $x_0$ und die Abbildung

$$P : M \to M$$
$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \psi(t))dt$$

Ein Fixpunkt von $P$ ist eine Lösung der Differentialgleichung. P ist eine Kontraktion.

## Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

## Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und $A$ und $b$ stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \;\; x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz $I$ definierte Lösung.

## Beweis

$F(t,x) := A(t)x(t) + b(t)$ ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten $L := \max_{t \in J} ||A(t)||$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$.

## Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge $\mathcal{L}$ der auf $I$ definierten Lösungen der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ ist eine $n$-dimensionaler reeller Vektorraum.
- $n$ Lösungen $\varphi_1, \cdots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ bilden genau dann eine Basis für $\mathcal{L}$, wenn die Vektoren $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ für ein $t \in I$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Sind $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen Gleichung, so auch $c_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + c_n \cdot \varphi_n$, da die Ableitung linear ist. $\mathcal{L}$ ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\begin{aligned} &\alpha_{t_0} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n \\ &\alpha_{t_0}(\varphi) := \varphi(t_0) \ . \end{aligned}$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der linearität ist $\alpha_{t_0}$ surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

**Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.**

Eine Basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des Lösungsraumes $\mathcal{L}$ der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ heißt Fundamentalsystem.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \; .$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} \; .$$

## Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix $A$ lautet die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t)$ und $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA} x_0 \ .$$

Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist $e^{tA} v_1, \cdots, e^{tA} v_n$ ein Fundamentalsystem für $\mathcal{L}$. Damit bilden die Spalten von $e^{tA}$ ein Fundamentalsystem.

## Beweis

Es ist $x(0) = x_0$ und $x'(t) = Ax(t)$.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei $v$ eine Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$. Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda} v$$

das AWP $x' = Ax$ mit $x(0) = v$.

### Beweis

$\varphi_v'(t) = \lambda e^{t\lambda} v = e^{t\lambda} \lambda v = e^{t\lambda} A v = A e^{t\lambda} v = A \varphi_v(t)$.

**Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.**

Hat eine Matrix $A$ $n$ Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, so bilden die Lösungen $\varphi_{v_1}, \cdots \varphi_{v_n}$ ein Fundamentalsystem.

**Beweis**

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

**Hauptvektoren.**

Ein Vektor $v$ heißt Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda$, falls es eine Zahl $s > 0$ gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl $s$, für die dies gilt heißt Stufe.

### Hauptvektoren

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

### Hauptvektoren

Für einen Haupvektor $v$ der Stufe $s$ zum Eigenwert $\lambda$ ist

$$e^{At}v = e^{\lambda It}e^{(A-\lambda I)t} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}((A-\lambda I)^k t^k v)$$

## Hauptvektoren

Sei $x' = Ax$ mit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\lambda, \mu$ die Eigenwerte von $A$.

Dann können folgende Fälle auftreten:

- Es gibt zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$. Die allgemeine Lösung lautet dann $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenvektoren $v_1, v_2$.
- $\lambda$ ist ein doppelter reller Eigenwert.
    - Der Lösungsraum $(A - \lambda I)x = 0$ hat dimension 2. Das ist der Fall, wenn bis auf Basistransformation $A = \lambda I$ ist.
      In diesem Fall hat die Differentialgleichung die allgemeinen Lösungen

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v, \ \ v \in \mathbb{R}^2 \text{ beliebig}$$

## Hauptvektoren

- - Der Lösungsraum $(A - \lambda I)x = 0$ hat dimension 1.
    In diesem Fall gibt es einen Hauptvektor $h$ der Stufe 2, also eine Lösung von $(A - \lambda I)h = v$. Die allgemeinen Lösungen lauten damit

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v + c_2(h + tv))\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- $A$ hat die komplex konjugierten Eigenwerte $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$. Dann hat $A$ die komplexen Eigenvektoren $w, \bar{w} \in \mathbb{C}^2$. Da $A$ reell ist, sind $\varphi_1(t) := Re(we^{\lambda t})$ und $\varphi_2(t) := Im(we^{\lambda t})$. Mit $w = u + iv$ und $\lambda = \gamma + i\theta$ ergibt sich

$$\varphi_1(t) = Re(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\cos\theta t \cdot u - \sin\theta t \cdot v)$$
$$\varphi_2(t) = Im(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\sin\theta t \cdot u + \cos\theta t \cdot v)$$

## Hauptvektoren

Die Lösungen sind damit gegeben durch

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$