

# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Kann jeder Mathematik lernen?

## Kann jeder Mathematik lernen?

- Mathematik hat ein Motivationsproblem

## Kann jeder Mathematik lernen?

- Mathematik hat ein Motivationsproblem
- Jeder kann Mathematik lernen, aber Mathematik unterrichten ist sehr schwer, da jeder individuelle Materialien braucht.

## Kann jeder Mathematik lernen?

- Mathematik hat ein Motivationsproblem
- Jeder kann Mathematik lernen, aber Mathematik unterrichten ist sehr schwer, da jeder individuelle Materialien braucht.
- Eigeninitiative ist nötig

## Konstruktivismus

Die Existenz mathematischer Objekte ist durch ihre Konstruktion zu begründen.

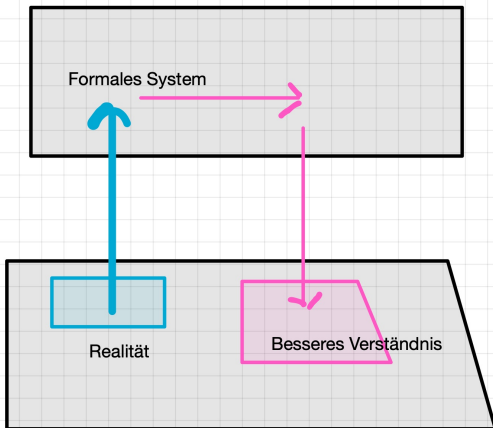
## Platonismus

Mathematische Gegenstände (Zahlen, geometrische Figuren, Strukturen) und Gesetze sind keine Konzepte, die im Kopf des Mathematikers entstehen, sondern es wird ihnen eine vom menschlichen Denken unabhängige Existenz zugesprochen.

## Was ist (angewandte) Mathematik?

- Algorithmen zum Lösen von Problemen.
- Abschätzungen, wie gut und genau die Algorithmen funktionieren.
- Mathematische Grundlagen, auf denen Algorithmen und Abschätzungen basieren.
- Softwaretechnische Aspekte in Bezug auf Implementierung der Algorithmen.

## Mathematische Modellierung





## Formale Systeme

- Mengenlehre (Logik erster Stufe)
- Kategorientheorie
- Typentheorie

## Algorithmus

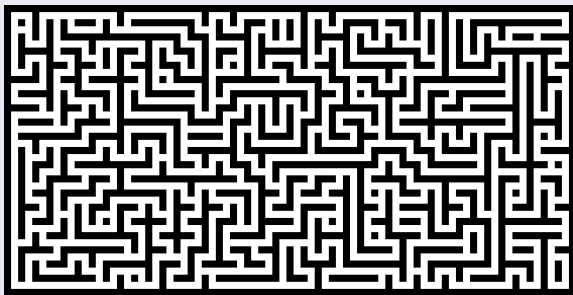


Figure: Quelle: Wikipedia

## Algorithmus Informell

Ein Algorithmus ist eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen. Algorithmen bestehen aus endlich vielen, wohldefinierten Einzelschritten.

## Algorithmus Formal

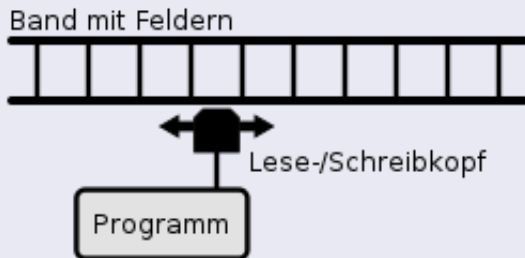




Figure: Quelle: Wikipedia

### Gleitkommazahl

Eine Gleitkommazahl ist eine Zahl  $z$  der Form

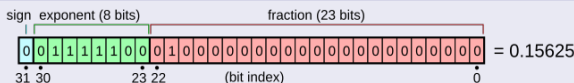
$$z = ad^e; \quad a = (\pm) \sum_{i=1}^l c_i d^{-i}$$

$$e, c_i \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\} \subset \mathbb{Z}$$

### Gleitkommazahl $d = 10$

$$0.314156 \cdot 10^1$$

### Gleitkommazahl Darstellung $d = 2$



## Schaltwerke

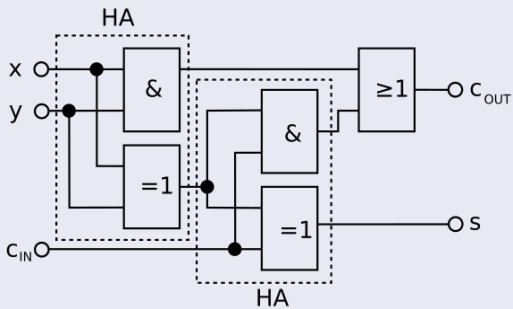


Figure: Quelle: Wikipedia

### Gleitkommazahl

Ist  $x$  eine reelle Zahl so gibt es eine Gleitkommazahl  $fl(x)$  mit

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq eps := d^{1-l}/2$$

### Gleitkommazahl

Für eine exakte Operation  $\circ \in \{+, -, \cdot, : \}$  gilt für die entsprechende Ausführung  $\hat{\circ}$  auf einem Computer

$$a \hat{\circ} b = (a \circ b)(1 + \epsilon), \quad \epsilon \leq \textit{eps}$$

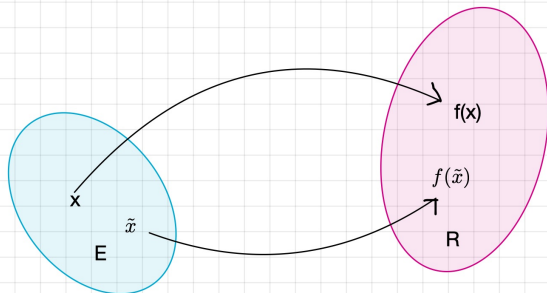


Eingabe -> Algorithmus -> Ausgabe

Eingabe   ->   Algorithmus   ->   Ausgabe  
mit Fehler   mit Fehler   mit Fehler

### Konditionszahl

Die Kondition beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten. Die Konditionszahl stellt ein Maß für diese Abhängigkeit dar. Sie beschreibt das Verhältnis von  $E := \{\tilde{x} \mid \|\tilde{x} - x\| \leq \text{eps}\|x\|\}$  zu  $R := \{f(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in E\}$ .



### Kondition eines Problems

Die absolute Konditionierung eines Problems  $(f, x)$  ist die kleinste Zahl  $\kappa_{abs}$  mit

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq \kappa_{abs} \|x - \tilde{x}\|, \quad \tilde{x} \rightarrow x$$

### Kondition eines Problems

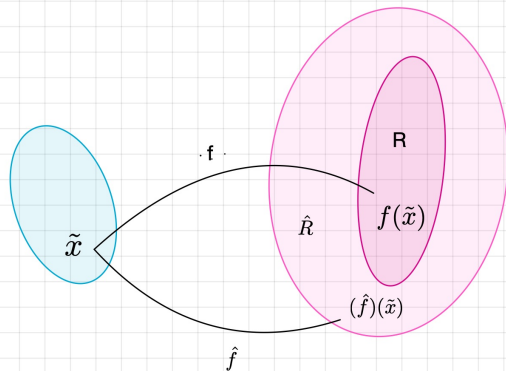
Die relative Konditionierung eines Problems  $(f, x)$  ist die kleinste Zahl  $\kappa_{rel}$  mit

$$\frac{\|f(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa_{rel} \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \quad \tilde{x} \rightarrow x$$

### Kondition eines Problems

Momentan können wir noch keine Konditionszahlen berechnen. Wir werden später lernen, wie wir sie in vielen Fällen abschätzen können.

### Stabilität



### Stabilität

Für eine Gleikommarealisierung  $\hat{f}$  eines Algorithmus zur Lösung des Problems  $(f, x)$  mit relativer Konditionszahl  $\kappa_{rel}$  ist der Stabilitätsindikator definiert als die kleinste Zahl  $\sigma \geq 0$  mit

$$\frac{\|\hat{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} \leq \sigma \kappa_{rel} \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

für alle  $\tilde{x} \in E$

### Stabilität eines Algorithmus

Der Algorithmus  $\hat{f}$  heisst stabil, wenn  $\sigma$  kleiner ist als die Anzahl der hintereinander ausgeführten Elementaroperationen.