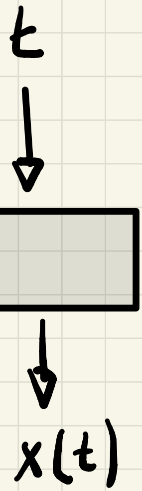
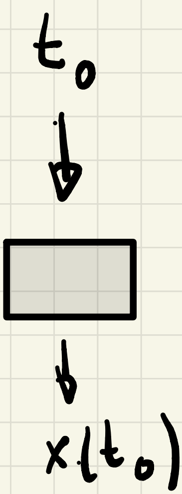
Zeitabhängiges System



Messung:



$t_1, \ldots, t_n$

$x(t_1) \ldots x(t_n)$

Vorhersage

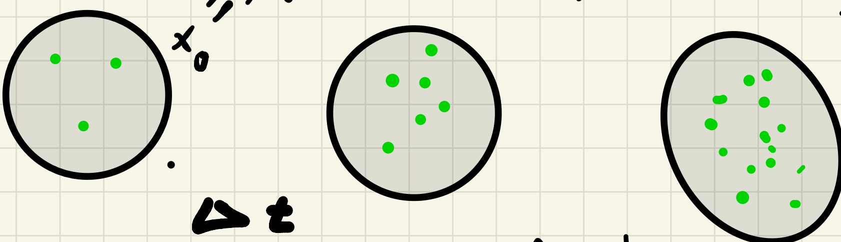
$$x'(t) \doteq f(x(t), t)$$

Vorhersage: Finde x(t) und setze zukünftigen Zeitpunkt t ein

Bsp

$x(t) :=$ Anzahl Bakterien

$x_0 = x(t_0)$ $\quad x(t_1) = x_1$ $\quad x(t_n) = x_n$



Δt

$$\frac{x_0 - x_1}{\Delta t} \approx x'(t)$$

$$x'(t) = \underline{\mu} \cdot x(t)$$

Lösung

$$x(0) = x_0$$

$$x(t) = c \cdot e^{\mu t} \qquad x(t) = x_0 \cdot e^{\mu t}$$

Haben Lösung gefunden. Gibt es weitere Lösungen oder ist dieLösung bei Angabe von Anfangswerten eindeutig?

Wenn f hinreichend gutartig -> Existiert eindeutige Lösung für AWP

Satz (Separation der Variablen)

$$x'(t) = h(x(t)) \cdot g(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Trennung_der_Ver%C3%A4nderlichen

Auflösen nach x(t) ergibt Lösung

Bsp:

$$x(t_0) = x_0 \geq 0$$

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)}$$

$$g(t) = 1$$

$$h(x(t)) = 2\sqrt{x(t)}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_0^t 1\, ds$$

$$\left[\sqrt{y}\right]_{x_0}^{x(t)} = \left[\xi\right]_0^t$$

$$\sqrt{x(t)} - \sqrt{x_0} = t - 0$$

Auflösen nach x(t)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x(t)} = t + \sqrt{x_0}$$

$$x(t) = \pm\left(t + \sqrt{x_0}\right)^2$$

$$x_0 \geq 0$$

$$x(t) = \left(t + \sqrt{x_0}\right)^2$$

z.B.

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = t^2$$

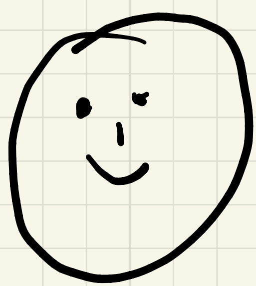
Probe für $x_0 = 0$

$x(t) = t^2$ $\quad t \geq 0$

$$x'(t) = (t^2)' = 2 \cdot t$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\underbrace{t^2}_{x(t)}}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{x(t)}$$



Def.: Systeme von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung sind Gleichungen der Form

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$
$$x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = f_2(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

AWP: $x_1(t_0) = x_0^1$

$$\vdots$$

$x_n(t_0) = x_0^n$

Volterra-Lotka-System (Räuber-Beute-Modell)

$x(t) \doteq$ Anzahl Beutetiere (Hasen)

$y(t) =$ Anzahl Räuber (Füchse)

$$x'(t) = -\beta\, y(t) + \underbrace{\alpha \cdot x(t)}_{\text{Exponentielles Wachstum}}$$

Beute wird gefressen

Exponentielles Wachstum

$$y'(t) = \underline{\delta}\, x(t)\, y(t) - \underbrace{\gamma \cdot y(t)}_{\text{Sterberate/ „inverses exponentielles Wachstum"}}$$

Exponentielles Wachstum
Abhängig von Anzahl
des Futters

Sterberate/
„inverses
exponentielles
Wachstum“

DGL höherer Ordnung -> System von DGL 1-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{n-1}(t), \dots, x(t))$$

AWP

$x(t_0), \dots, x^{n-1}(t_0)$

Bsp: $x(t)$ pos.

Newton

$$x''(t) = \frac{f}{m}$$

m = Masse

f = Kraft

AWP

$x(t_0) = x_0$ Anfangsposition

$x'(t_0)$ Anfangsgeschwindigkeit

Hilfsvariablen x_1(t), …. , x_n(t)

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

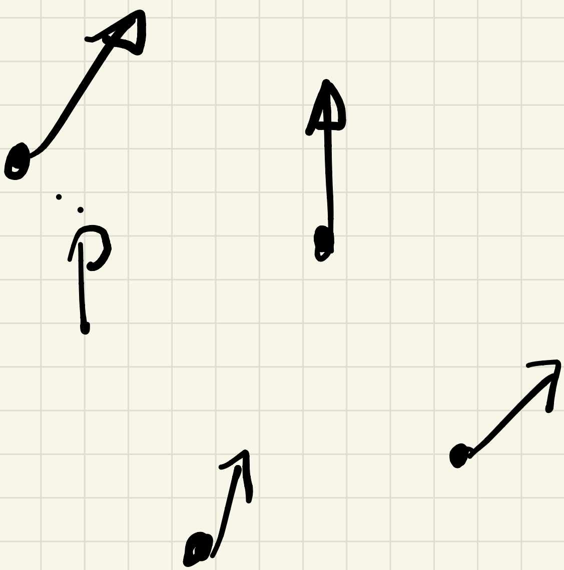
$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_n(t), \dots, x_1(t))$$

-> Systeme von GLS's erster Ordnung sind universell

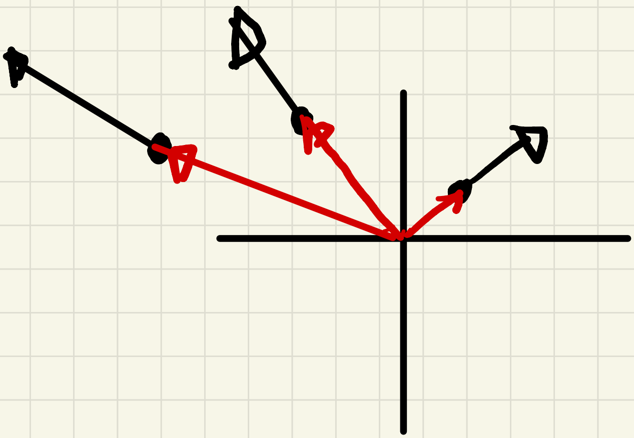
Def: Vektorfeld



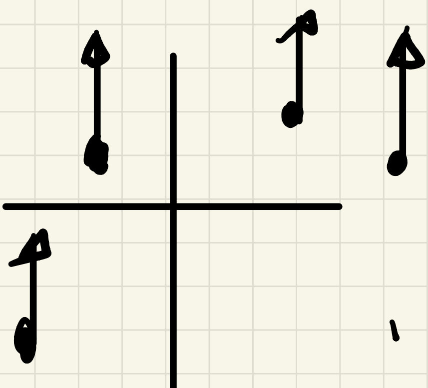
$$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Bsp:

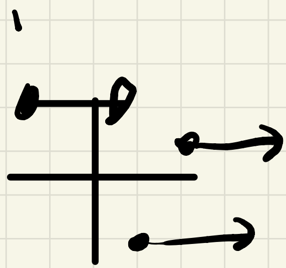
$$V:(x,y) := (x,y)$$



$$V(x,y) = (0,1)$$



$$V(x,y) = (1,0$$



Def: Inegralkurve

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes v, falls

$(*)\ f'(t) = v(f(t)) \ \forall t \in I$

<u>Bsp</u> $v(x, y) = (-y, x)$

$(*) \quad f_1'(t) = -f_2(t)$

$\quad f_2'(t) = f_1(t)$

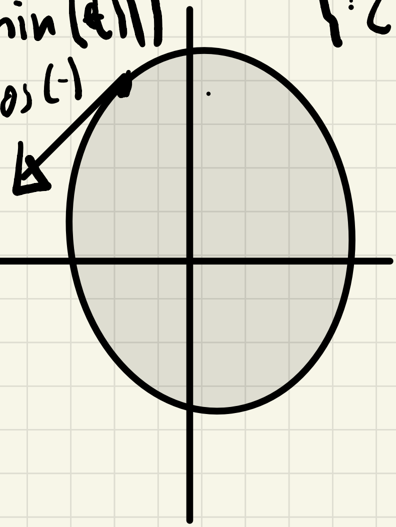
$\Rightarrow f_1(t) = c \cdot \cos(t)$

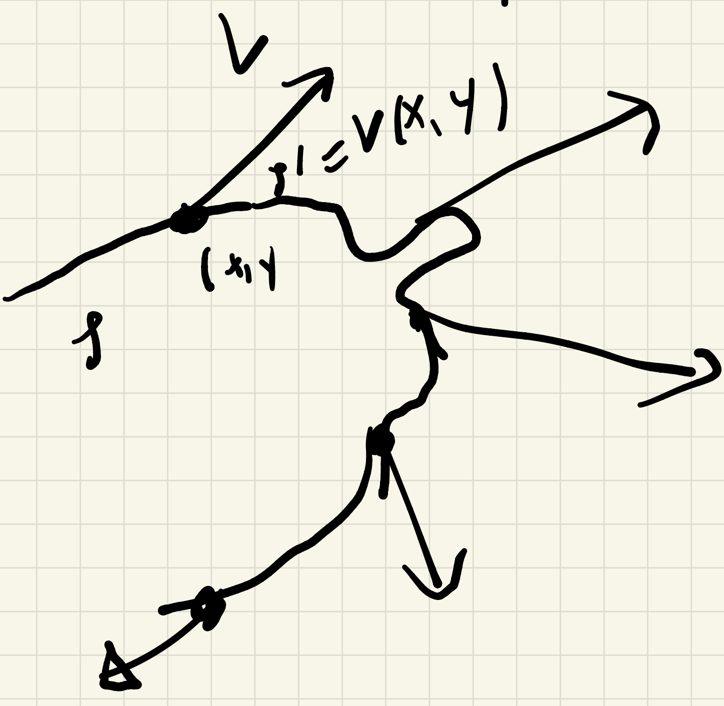
$\quad f_2(t) = c \cdot \sin(t)$

$(\cos' = -\sin)\ (\sin' = \cos)$

$$f(t) \begin{pmatrix} c \cdot \cos(t) \\ c \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix}$$





Dynamisches System = sich zeitlich verändertes Vektorfeld

$$F : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Zeit}} \times \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{Ort}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Integralkurve

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{f'(t) = F(t, f(t))}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad F(t, f(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1 \ldots \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

Integralkurve <-> Lösung eines Systems von DGL’s

Def: Integral mehrdimensionaler Funktionen

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)\,dt \end{pmatrix}$$

Komponentenweise

Integralversion einer DGL

$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig

f Integralkurve

$$\Leftrightarrow \quad f'(t) = F(t, x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(t) = f_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} F_i(s, f(s))\, ds$$

Komponentenweise

Beweis: Komponentenweise HS der Differential und Integralrechnung

$$\|v\| := \max_i |v_i|$$

Maximumsnorm

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \\ -10000 \end{pmatrix} \right\| = |-10000|$$

$$= 10000$$

$$Q \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : Q \to \mathbb{R}$$

$$\|f\|_Q := \max_{x \in Q} f(x)$$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\|$$

$$\leq \left| \int_a^b \| f(t) \| \, dt \right|$$

Bew

$$f_i = \max_i \left| \int f_i(t)\, dt \right|$$

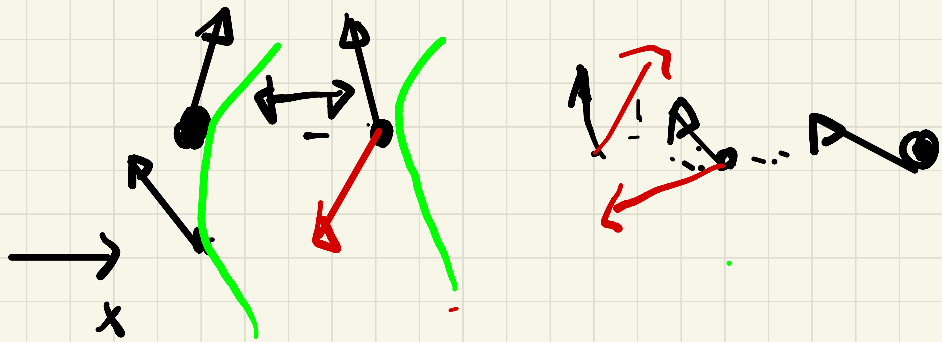
$$\Rightarrow \quad \left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| = \left| \int_a^b f_i(t)\, dt \right|$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_i(t)\, dt \right| \leq \left| \int_a^b | f_i(t) | \, dt \right|$$

$$f_i(t) \leq | f_i(t) |. \qquad \leq \int \| f($$

t_0

f groß



Def. Lipschitzstetigkeit

$F: U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(lokal) Lipschitz-Stetig

$$\|F(t,x) - F(t,x')\| \leq L \underbrace{\|x - x'\|}_{\text{Abstand}}$$

Proportional

$\forall\ (t,x)$ und (t,x')

F dillbar, $\mathcal{U}$ kompok

(Partielle, stet. Abl.)

$$\Rightarrow L := \max_i \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} F \right\|_{\mathcal{U}}$$

Bew: „kleine Änderungsraten -> „Ähnliche Funktitionswerte“

Satz Picard-Lindelöf, Lokale Existenz und Eindeutigkeit

$$F: U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-Stetig

- Dann gibt es zu jedem Punkt (t_0, x_0) ein Intervall)

$$I_\delta' = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

auf dem das AWP

$$x'(t) = F(t, x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt

Bew exist.

$\leadsto$ Fixpumtprob.

h Fkt. gesucht x^* mit

$$h(x^*) = x^*$$

$=$

Banachsche Fixpunktsatz (Abstrakt)

Bew 1-Teil

Aufstellen einer Fixpunktgleichung

Integralversion

φ Lösung AWP

PP

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \underset{\text{PP}}{\varphi(s)})\, ds$$

$$M := \{ \psi : I_\delta(t_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \| \psi(t) - \underset{\varphi(t_0)}{x_0} \| \leq b \}$$

$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \psi(s))\, ds$$

Beh

$P : M \longrightarrow M$

$$\| P\psi(t) - x_0 \|$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, \psi(s))\, ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\| F(s, \psi(s)) \|}_{\text{max Fkt (konst)}} ds \right|$$

$$\leq \delta \cdot \| F \|_Q \leq b$$

//

φ Lost AWP $\Leftrightarrow$ $(P\varphi)(t) = \varphi(t)$

$$P\varphi = \varphi$$

Metrik auf M

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{t \in I_\delta(t_0)} \{ \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \}$$

Banachsche Fixpunktsatz

(X,d) vollständig metrischer Raum und

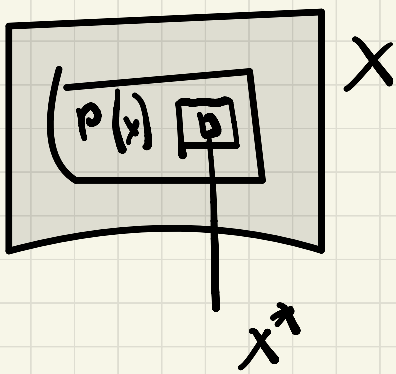
I $\quad P: X \to X$ stetig

$$d(P(x), P(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y)$$

$$\lambda < 1$$

Dann hat P genau ein Fixpunkt.

Bew:



$P(x^*) = x^*$