

Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Algorithmus

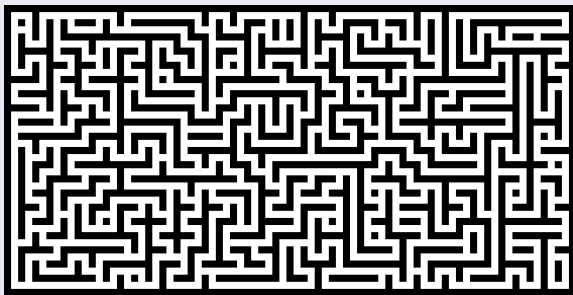


Figure: Quelle: Wikipedia

Algorithmus Informell

Ein Algorithmus ist eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen. Algorithmen bestehen aus endlich vielen, wohldefinierten Einzelschritten.

Algorithmus Formal

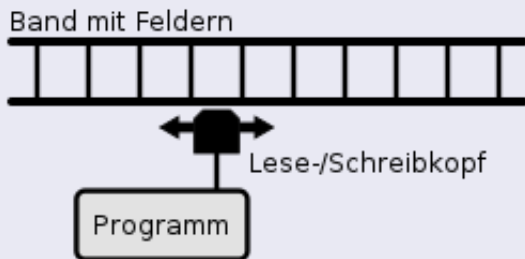




Figure: Quelle: Wikipedia

Gleitkommazahl

Eine Gleitkommazahl ist eine Zahl z der Form

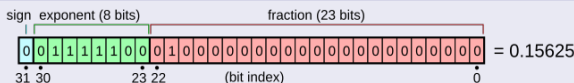
$$z = ad^e; \quad a = (\pm) \sum_{i=1}^l c_i d^{-i}$$

$$e, c_i \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\} \subset \mathbb{Z}$$

Gleitkommazahl $d = 10$

$$0.314156 \cdot 10^1$$

Gleitkommazahl Darstellung $d = 2$



Schaltwerke

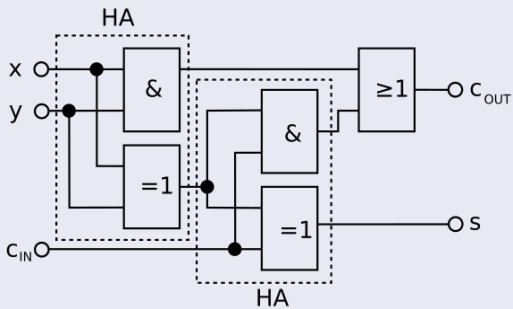


Figure: Quelle: Wikipedia

Gleitkommazahl

Ist x eine reelle Zahl so gibt es eine Gleitkommazahl $fl(x)$ mit

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq eps := d^{1-l}/2$$

Gleitkommazahl

Für eine exakte Operation $\circ \in \{+, -, \cdot, : \}$ gilt für die entsprechende Ausführung $\hat{\circ}$ auf einem Computer

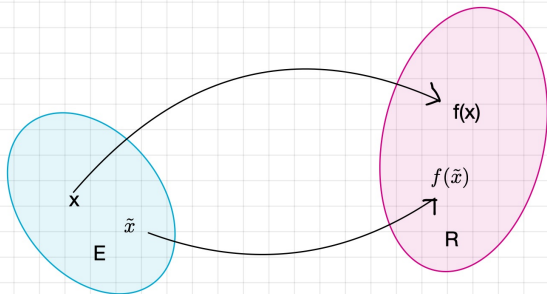
$$a \hat{\circ} b = (a \circ b)(1 + \epsilon), \quad \epsilon \leq \textit{eps}$$

Eingabe -> Algorithmus -> Ausgabe

Eingabe -> Algorithmus -> Ausgabe
mit Fehler mit Fehler mit Fehler

Konditionszahl

Die Kondition beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten. Die Konditionszahl stellt ein Maß für diese Abhängigkeit dar. Sie beschreibt das Verhältnis von $E := \{\tilde{x} \mid \|\tilde{x} - x\| \leq \text{eps}\|x\|\}$ zu $R := \{f(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in E\}$.



Kondition eines Problems

Die absolute Konditionierung eines Problems (f, x) ist die kleinste Zahl κ_{abs} mit

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq \kappa_{abs} \|x - \tilde{x}\|, \quad \tilde{x} \rightarrow x$$

Kondition eines Problems

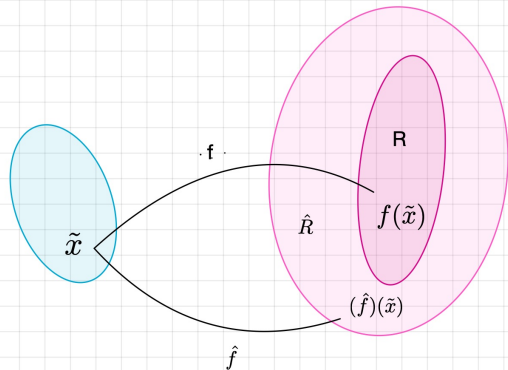
Die relative Konditionierung eines Problems (f, x) ist die kleinste Zahl κ_{rel} mit

$$\frac{\|f(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa_{rel} \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}, \quad \tilde{x} \rightarrow x$$

Kondition eines Problems

Momentan können wir noch keine Konditionszahlen berechnen. Wir werden später lernen, wie wir sie in vielen Fällen abschätzen können.

Stabilität



Stabilität

Für eine Gleikommarealisierung \hat{f} eines Algorithmus zur Lösung des Problems (f, x) mit relativer Konditionszahl κ_{rel} ist der Stabilitätsindikator definiert als die kleinste Zahl $\sigma \geq 0$ mit

$$\frac{\|\hat{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} \leq \sigma \kappa_{rel} \epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

für alle $\tilde{x} \in E$

Stabilität eines Algorithmus

Der Algorithmus \hat{f} heisst stabil, wenn σ kleiner ist als die Anzahl der hintereinander ausgeführten Elementaroperationen.