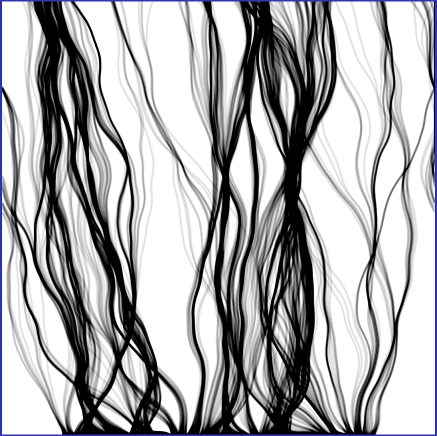
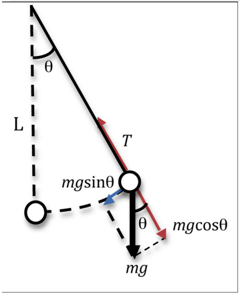
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Gedämpftes Pendel

$$\theta''(t) = -L\theta - \underbrace{\mu\theta'}_{\text{drag}}.\ \ L\theta = mg\sin(\theta)$$

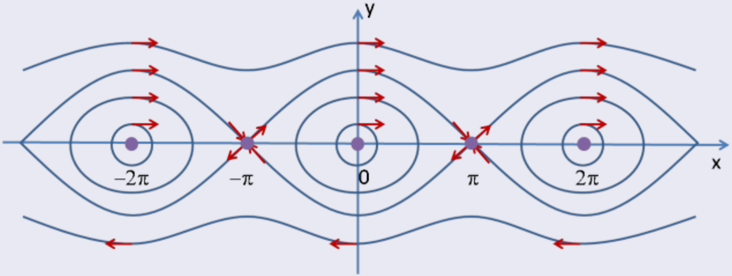


System gedämpftes Pendel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\mu x_2(t) - \frac{mg}{L}\sin(x_1(t)) \end{pmatrix} \text{ (nicht linear!)}$$

Phasenbild gedämpftes Pendel

$\mu = 0$



Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Lösung Harmonischer Oszillator

Anfangswert $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Harmonischer Oszillator

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!}$$

Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; k = 0 \mod 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; k = 1 \mod 4 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; k = 2 \mod 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; k = 3 \mod 4 \end{cases}$$

Harmonischer Oszillator

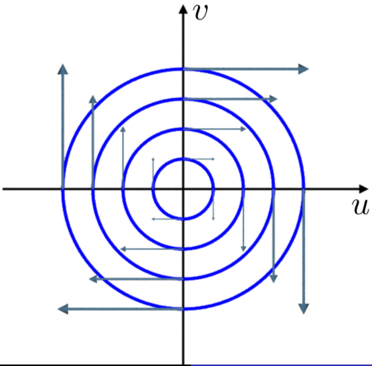
$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} \cdots \\ 1 & 0 \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Link:Trigonometrische Taylorreihen

Lösung Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Harmonischer Oszillator Eigenwerte

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexer Eigenwert.

Lineares System mit Hauptraum

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Lineares System mit Hauptraum

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - E\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Doppelter Eigenwert.

Eigenraum zum Eigenwert 1

$$\ker(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - E) = \ker\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \{e_1\}$$

Doppelter Eigenwert aber Eigenraum ist eindimensional.

Hauptraum zum Eigenwert 1

$$\ker((\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - E)^2) = \ker\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \ker\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \{e_1, e_2\}$$

e_2 ist Hauptvektor der Stufe 2, e_1 Hauptvekrot der Stufe 1, also
$\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - E\right)e_2 = e_1$; $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} - E\right)e_1 = 0$

Allgemeine Lösung

$$\varphi_1(t) := e^t \cdot e_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) := e^t \left(E + \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I \right) t \right) e_2 = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$