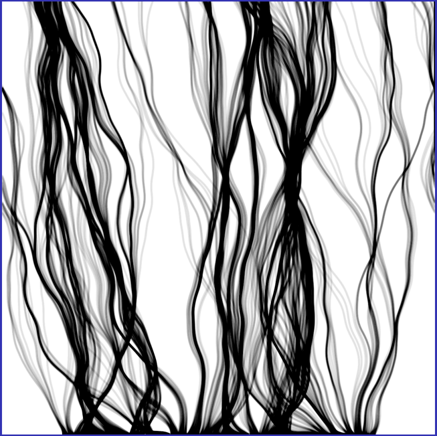
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und A und b stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis

Später!

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge $\mathcal{L}$ der auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ ist eine n-dimensionaler reeller Vektorraum.
- n Lösungen $\varphi_1, \cdots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ bilden genau dann eine Basis für $\mathcal{L}$, wenn die Vektoren $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ für ein $t \in I$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Sind $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen Gleichung, so auch $c_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + c_n \cdot \varphi_n$, da die Ableitung linear ist. $\mathcal{L}$ ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\begin{aligned} &\alpha_{t_0} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n \\ &\alpha_{t_0}(\varphi) := \varphi(t_0) \; . \end{aligned}$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der linearität ist α_{t_0} surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des Lösungsraumes $\mathcal{L}$ der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ heißt Fundamentalsystem.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \,.$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} \,.$$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix A lautet die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t)$ und $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA} x_0 \ .$$

Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist $e^{tA} v_1, \cdots, e^{tA} v_n$ ein Fundamentalsystem für $\mathcal{L}$. Damit bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem.

Beweis

Es ist $x(0) = x_0$ und $x'(t) = Ax(t)$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei v eine Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda} v$$

das AWP $x' = Ax$ mit $x(0) = v$.

Beweis

$\varphi_v'(t) = \lambda e^{t\lambda} v = e^{t\lambda} \lambda v = e^{t\lambda} A v = A e^{t\lambda} v = A\varphi_v(t)$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Hat eine Matrix A n Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, so bilden die Lösungen $\varphi_{v_1}, \cdots \varphi_{v_n}$ ein Fundamentalsystem.

Beweis

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

Hauptvektoren.

Ein Vektor v heißt Hauptvektor zum Eigenwert λ, falls es eine Zahl $s > 0$ gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl s, für die dies gilt heißt Stufe.

Hauptvektoren

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

Hauptvektoren

Für einen Haupvektor v der Stufe s zum Eigenwert λ ist

$$e^{At}v = e^{\lambda I t}e^{(A-\lambda I)t}v = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}((A-\lambda I)^k t^k v)$$

Hauptvektoren

Sei $x' = Ax$ mit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und λ, μ die Eigenwerte von A.

Dann können folgende Fälle auftreten:

- Es gibt zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1, λ_2. Die allgemeine Lösung lautet dann $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit den Eigenvektoren v_1, v_2.
- λ ist ein doppelter reller Eigenwert.
  - Der Lösungsraum $(A - \lambda I)x = 0$ hat dimension 2. Das ist der Fall, wenn bis auf Basistransformation $A = \lambda I$ ist.
    In diesem Fall hat die Differentialgleichung die allgemeinen Lösungen

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v, \;\; v \in \mathbb{R}^2 \text{ beliebig}$$

Hauptvektoren

- - Der Lösungsraum $(A - \lambda I)x = 0$ hat dimension 1.
    In diesem Fall gibt es einen Hauptvektor h der Stufe 2, also eine Lösung von $(A - \lambda I)h = v$. Die allgemeinen Lösungen lauten damit

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v + c_2(h + tv))\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- A hat die komplex konjugierten Eigenwerte $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$. Dann hat A die komplexen Eigenvektoren $w, \bar{w} \in \mathbb{C}^2$. Da A reell ist, sind $\varphi_1(t) := Re(we^{\lambda t})$ und $\varphi_2(t) := Im(we^{\lambda t})$. Mit $w = u + iv$ und $\lambda = \gamma + i\theta$ ergibt sich

$$\varphi_1(t) = Re(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\cos \theta t \cdot u - \sin \theta t \cdot v)$$
$$\varphi_2(t) = Im(we^{\lambda t}) = e^{\gamma t}(\sin \theta t \cdot u + \cos \theta t \cdot v)$$

Hauptvektoren

Die Lösungen sind damit gegeben durch

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$

Lineares System mit Hauptraum

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Lineares System mit Hauptraum

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Doppelter Eigenwert.

Eigenraum zum Eigenwert 1

$$\ker(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{e_1\}$$

Doppelter Eigenwert aber Eigenraum ist eindimensional.

Hauptraum zum Eigenwert 1

$$\ker((\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E)^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{e_1, e_2\}$$

e_2 ist Hauptvektor der Stufe 2, e_1 Hauptvektor der Stufe 1, also
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right) e_2 = e_1;\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - E\right) e_1 = 0$

Allgemeine Lösung

$$\varphi_1(t) := e^t \cdot e_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) := e^t \left(E + (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I)t \right) e_2 = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$$