Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System $t \mapsto x(t)$. Möchten verstehen, wie sich $x(t)$ über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten $t_0, \cdots t_n$ lässt sich $x(t_i)$ messen und damit $x'(t_i) \cong \frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$ näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist die Ableitung $x'(t) = f(x(t), t)$ eine Funktion in der Zeit und der Funktion selbst.

Beispiel

(1) $x'(t) = \mu x(t)$. Dann ist $x(t) = ce^{\mu t}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist $x(0) = x_0$, so ist $x(t) = x_0 e^{\mu t}$ eine Lösung von (1) mit $x(0) = x_0$.

System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\
x_2'(t) &= f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= f_n(t, x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

Werden zusätzlich die Anfanfsbedingungen $x_1(t_0) = x_0^1, \ldots, x_n(t_0) = x_0^n$ vorgegebenen, so spricht man von einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \cdots, x', x)$$

mit $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \cdots ; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$ ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

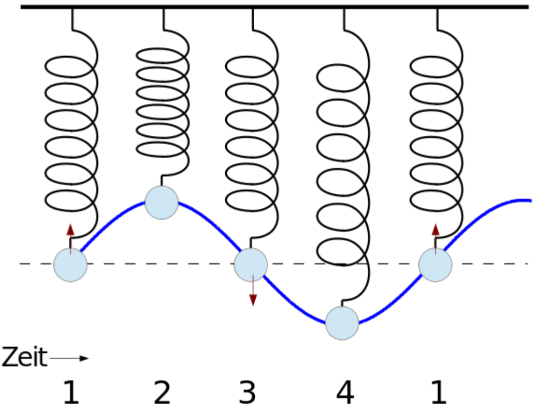
$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen
$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \cdots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}$.


Zeit
1
2
3
4
1

Harmonischer Oszillator

$x''(t) = -x(t).$

Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

System von Differentialgleichungen

Für eine vekorwertige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n; f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix} .$$

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des AWP $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$ mit $\varphi(t_0) = x_0$, wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \varphi) dt$$

gilt.

Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

Volterra-Lotka System

https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen

System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; ,$$

die jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

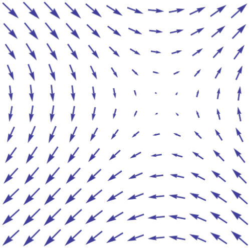


Figure: Quelle: Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.sv

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve in dem Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle $t \in I$.

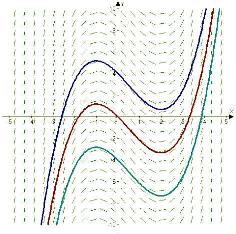


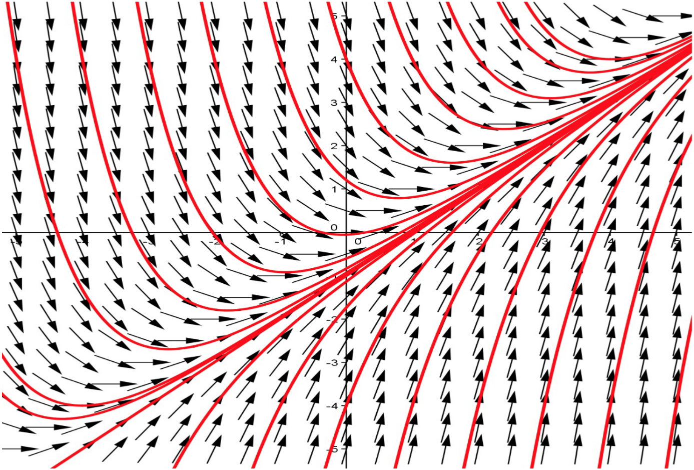
Figure: Quelle:
Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field

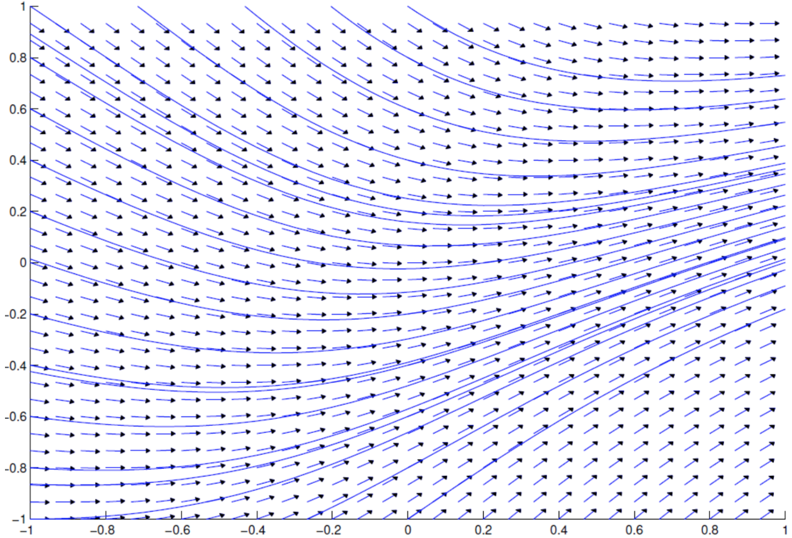
System von Differentialgleichungen

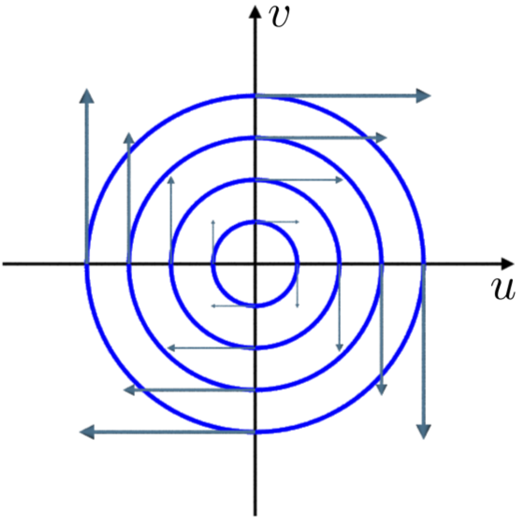
Ein dynamisches System ist eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $(t, x) \in U$ einen Vektor $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Eine Integralkurve oder Lösung für F ist eine Weg $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles $t \in I$.


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


v
u

Lösung Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Lösung Harmonischer Oszillator

Anfangswert $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ist.

Harmonischer Oszillator

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!}$$

Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; k = 0 \mod 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; k = 1 \mod 4 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; k = 2 \mod 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; k = 3 \mod 4 \end{cases}$$

Harmonischer Oszillator

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \cdots \\ 1 & 0 \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Link:Trigonometrische Taylorreihen

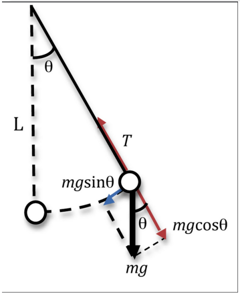
Harmonischer Oszillator Eigenwerte

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexer Eigenwert.

Gedämpftes Pendel

$$\theta''(t) = -L\theta - \underbrace{\mu\theta'}_{\text{drag}}.\quad L\theta = mg\sin(\theta)$$

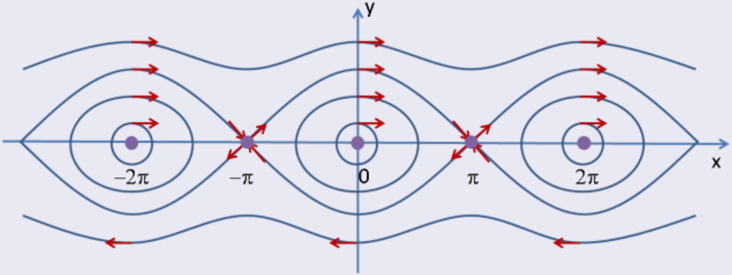


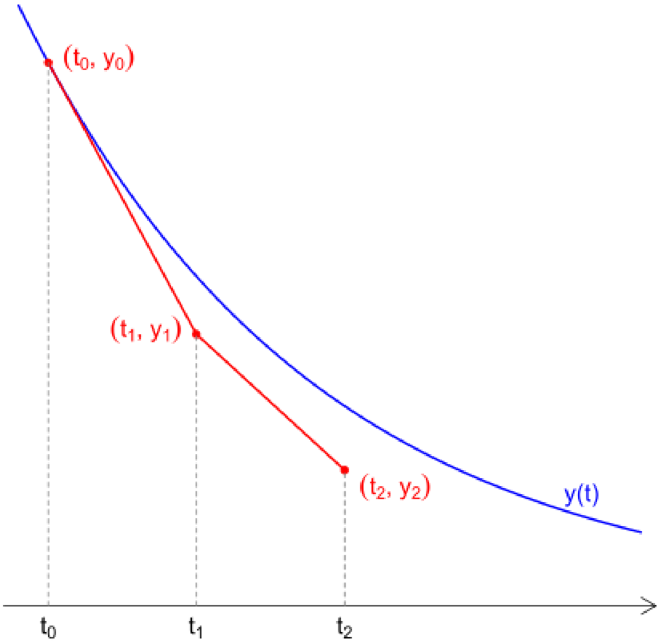
System gedämpftes Pendel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\mu x_2(t) - \frac{mg}{L}\sin(x_1(t)) \end{pmatrix} \text{ (nicht linear!)}$$

Phasenbild gedämpftes Pendel

$\mu = 0$





(t_0, y_0)
(t_1, y_1)
(t_2, y_2)
$y(t)$
t_0
t_1
t_2

Euler Verfahren

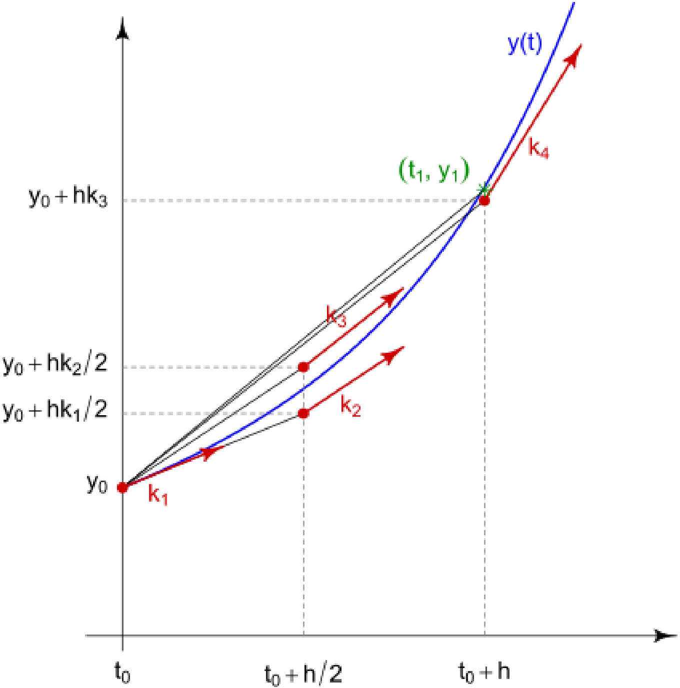
$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$

$$t_k = t_0 + kh \tag{1}$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \tag{2}$$

Approximationsfehler

Ist y eine Lösung des Anfangswertproblems und ist f differenzierbar, so gilt für den Approximationsfehler mit der Taylorreihe $y - y_k = o(h^2)$.


y(t)
k_4
(t_1, y_1)
$y_0 + hk_3$
k_3
$y_0 + hk_2/2$
$y_0 + hk_1/2$
k_2
y_0
k_1
t_0
$t_0 + h/2$
$t_0 + h$

Runge Kuta Verfahren

$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \tag{3}$$

$$t_{n+1} = t_n + h \tag{4}$$

$$k_1 = f(t_n, y_n), \tag{5}$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \tag{6}$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \tag{7}$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right). \tag{8}$$

Runge Kuta Verfahren als numerische Integration

$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y)dt \tag{9}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y)dt \approx h \cdot \sum_{i=1}^{4} \gamma_i k_i \tag{10}$$

Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Stetig (in x), falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$||F(t,x) - F(t,x')|| \leq L||x - x'||$$

für alle (t,x) und (t,x') in U.

Banachscher Fixpunktsatz

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $P : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(y)) < \lambda d(x, y)$$

und $\lambda < 1$. Dann besitzt P genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ mit $P(x^*) = x^*$.

Figure: Quelle: Wikipedia

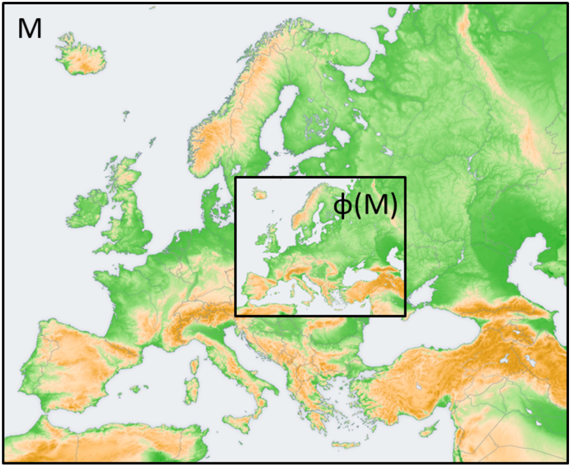


Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges $x_0 \in X$. Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge $x_n := P(x_{n-1})$. Für diese Gilt nach Voraussetzung an P

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) \ .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) \ .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \lambda^n \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda^i d(x_1, d_0) \right) \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^m)}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

und da $\lambda < 1$ ist x_n eine Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert die Folge in X gegen einen Grenzwert x^*. Für diesen gilt $P(x^*) = P(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} P(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$ und damit ist x^* ein Fixpunkt von P.

Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein Intervall $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Betrachte die Menge $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n \mid ||\psi(t) - x_0|| \leq b\}$ von Wegen in der Nähe von x_0 und die Abbildung

$$P : M \to M$$
$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \psi(t))dt$$

Wähle b so klein, dass P eine Kontraktion ist. Dann besitzt P einen Fixpunkt φ und dieser ist eine Lösung des AWPs.

Die Eindeutigkeit zeigen wir folgendermassen. Sei I das intervall auf dem eine Lösung exisitert und $I' \subset I$ ein Intervall, auf dem zwei Lösungen $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ übereinstimmen. Da für den Startwert $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ auf jeden Fall gilt, ist I' nicht leer. Sei $\xi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Da $\xi(t_0) = 0$ ist erhalten wir

$$||\xi(t)|| = \int_{t_0}^{t} ||F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))||dt \leq L \int_{t_0}^{t} ||\xi(t)||dt$$

Mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir $||\xi(t)|| = 0$ und damit $\varphi_1 = \varphi_2$ auf ganz I.

Lemma von Gronwall

Es sei $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(t) \geq 0$. Gibt es Konstanten $A, B \geq 0$ mit

$$g(t) \leq A \left| \int_{t_0}^{t} g(s) ds \right| + B$$

dann gilt $g(t) \leq Be^{A|t-t_0|}$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und A und b stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \;\; x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis

$F(t,x) := A(t)x(t) + b(t)$ ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten $L := \max_{t \in J} ||A(t)||$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$.