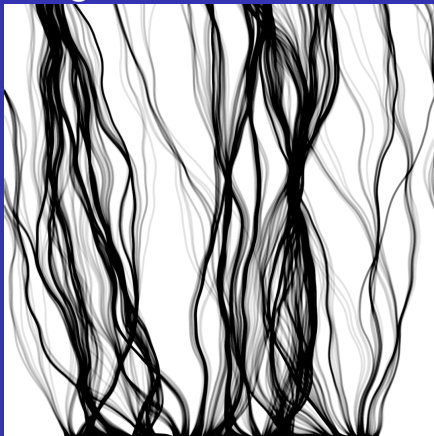


# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Für eine  $\mathcal{C}^n$ -Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  ist die Taylorreihe um  $a$  gegeben durch

$$T_N f(x; a) := \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Taylorreihe Wiki

## Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Für eine  $\mathcal{C}^{n+1}$ -Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(x) = T_n f(x; a) + R_n f(x; a) = T_n f(x; a) + o(|x - a|^n), \quad x \rightarrow a$$

Taylorreihe Wiki

## Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Wie kann man das auf höhere Dimensionen verallgemeinern und was für Eigenschaften brauchen wir dafür?

### Satz von Schwarz

Wenn Für eine Funktion  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$  und  $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$  existieren und letztere stetig ist, dann existiert auch  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$  und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$$

### Bedeutung

Die Reihenfolge spielt beim wiederholten ableiten keine Rolle.

### $\mathcal{C}^k$ -Funktionen

Eine Funktion  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  für die alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(a)$$

mit  $i_1 + \cdots + i_k \leq k$  existieren und stetig sind heißt  $\mathcal{C}^k$ -Funktion oder  $k$ -mal stetig differenzierbar.

### p-te Ableitung

Für eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in U$  und Vektoren  $v^1, \dots, v^p \in \mathbb{R}^n$  heißt

$$d^p f(a)(v^1, \dots, v^p) := \partial_{v^1} \dots \partial_{v^p} f(a)$$

die  $p$ -te Richtungsableitung von  $f$ . Sie ist wegen dem Satz von Schwarz wohldefiniert.

$$d^p f(a)(v^1, \dots, v^p) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a) \cdot v_{i_1}^1 \dots v_{i_p}^p.$$

Für einen Vektor  $z \in \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$d^p f(a)z^p := d^p f(a) \underbrace{(z, \dots, z)}_{p\text{-mal}}.$$

### Hessematrix

Für  $p = 2$  und  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ist

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) v_j u_i$$

und mit

$$f''(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \end{pmatrix}$$

ist  $d^2 f(a)(u, v) = u^T \cdot f''(a) \cdot v$ . Die Matrix  $f''(a)$  wird auch Hesse-Matrix genannt. Nach dem Satz von Schwarz ist sie symmetrisch.

### Taylorapproximation

Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^{p+1}$ -Funktion und  $x, a \in U$ , so dass die Verbindung zwischen  $x$  und  $a$  in  $U$  liegt. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{p!} d^k f(a) (x - a)^k + R_{p+1}(x; a)$$

mit dem Restglied  $R_{p+1}(x; a) = o(\|x - a\|^n)$ .



### Beweis

Sei  $F(t) := f(a + th)$  mit  $t \in [0, 1]$ . Wiederholte Anwendung der Kettenregel mit  $\gamma(t) := a + th$  ergibt

$$F'(t) = df(\gamma(t)) \cdot d\gamma(t) = df(\gamma(t)) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + th) h_i$$

$$F''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + th) h_i h_j$$

$\vdots$

$$F^p(t) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a + th) h_{i_1} \cdots h_{i_p}.$$

### Beweis

Für  $h := (x - a)$  ist  $F(0) = f(a)$  und  $F(1) = f(x)$  und mit der Taylorapproximation für Funktionen einer Veränderlichen

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^p(0) + R_{p+1}$$

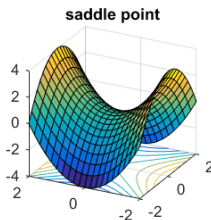
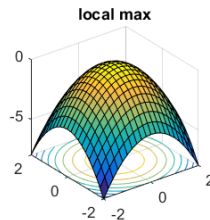
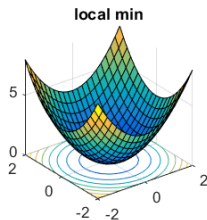
### Extrema

Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion und ist  $f'(a) = 0$  für ein  $a \in U$ .  
Dann gilt:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$  hat in  $a$  ein isoliertes lokales Minimum.
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$  hat in  $a$  ein isoliertes lokales Maximum.
- $f''(a) \geq 0 \Rightarrow f$  hat in  $a$  einen Sattelpunkt.

### Positive/negative Definitheit

- $f''(a) > 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \ h^t f''(a) h > 0$ .
- $f''(a) < 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \ h^t f''(a) h < 0$ .
- $f''(a) \geq 0 \Leftrightarrow h^t f''(a) h \geq 0$ .



### Beweis

Sei  $f'(a) = 0$  und  $f''(a) > 0$ . Mit der Taylorformel gilt für hinreichend kurze Vektoren  $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R(h)$$

mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|^2} = 0$ . Die Funktion  $v^T f''(a) v$  hat ein positives Minimum  $m$  auf der Einheitssphäre  $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$  da  $f''(a) > 0$ . Damit erhalten wir die Abschätzung

$$h^T f''(a) h = \|h\| \frac{1}{\|h\|} h^T f''(a) \|h\| \frac{1}{\|h\|} h \geq m \|h\|^2 .$$

### Beweis

Wir wählen  $\epsilon$  so klein, dass  $R(h) \leq \frac{m}{2}||h||^2$  gilt für  $||h|| < \epsilon$  (was geht wegen Taylorformel). Damit erhalten wir

$$f(a+h) \geq f(a) + m||h||^2.$$

und damit hat  $f$  ein lokales Minimum in  $a$ .

Der Fall  $f''(a) < 0$  wird mit Betrachtung von  $-f$  durch den vorigen Fall bewiesen.

### Beweis

Es sei nun  $f''(a) \geq 0$  und  $v$  mit  $v^T f''(a)v > 0$  und  $w$  mit  $w^T f''(a)w < 0$ . Betrachten wir die Funktionen

$$F_v(t) := f(a + tv)$$

$$F_w(t) := f(a + tw)$$

dann ist

$$F'_v(t) = 0; \quad F''_v(0) = v^T f''(a)v > 0$$

$$F'_w(t) = 0; \quad F''_w(0) = w^T f''(a)w < 0$$

und somit hat  $F_v$  ein isoliertes lokales Maximum und  $F_w$  ein isoliertes lokales Minimum und damit  $f$  kein lokales Extremum in  $a$ .

- Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix.
- Behauptung:  $A$  ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.
- Wir beweisen die beiden Richtungen:
  - Positive Definitheit  $\Rightarrow$  Positive Eigenwerte
  - Positive Eigenwerte  $\Rightarrow$  Positive Definitheit



# Richtung 1: Positive Definitheit $\Rightarrow$ Positive Eigenwerte

- Angenommen,  $A$  ist positiv definit. Das bedeutet:

$$h^\top A h > 0 \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

- Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor  $v \neq 0$ , sodass  $Av = \lambda v$ .
- Setze  $h = v$  und erhalte:

$$v^\top A v = v^\top (\lambda v) = \lambda v^\top v.$$

- Da  $v^\top v > 0$ , folgt  $\lambda > 0$ .
- Da dies für jeden Eigenwert von  $A$  gilt, sind alle Eigenwerte von  $A$  positiv.

## Richtung 2: Positive Eigenwerte $\Rightarrow$ Positive Definitheit

- Angenommen, alle Eigenwerte von  $A$  sind positiv.
- Da  $A$  symmetrisch ist, können wir  $A$  diagonalisieren:

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

wobei  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

- Für  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$h^\top Ah = h^\top Q \Lambda Q^\top h = (Q^\top h)^\top \Lambda (Q^\top h).$$

- Setze  $y = Q^\top h$ . Da  $Q$  orthogonal ist, gilt  $y \neq 0$  wenn  $h \neq 0$ .
- Dann ist:

$$h^\top Ah = y^\top \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

- Da  $\lambda_i > 0$  für alle  $i$  und  $y \neq 0$ , folgt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$ .
- Somit ist  $h^\top A h > 0$  für alle  $h \neq 0$ .
- Also ist  $A$  positiv definit.

# Aufgabe 2 (Extrema)

Gegeben ist die Funktion  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4$ .

- 1 Bestimme die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $f(x, y)$  bezüglich  $x$  und  $y$ .
- 2 Finde die kritischen Punkte der Funktion, indem du die partiellen Ableitungen gleich Null setzt und das resultierende Gleichungssystem löst.
- 3 Bestimme die partiellen Ableitungen 2. Ordnung und bilde die Hesse-Matrix an den kritischen Punkten.
- 4 Untersuche die Art der Extrema (Maximum, Minimum oder Sattelpunkt) anhand der Hesse-Matrix und der Determinantenkriterien.
- 5 Interpretiere die Ergebnisse im Kontext der Funktion. Beschreibe, was die gefundenen Extrema über die Funktion aussagen.

# Lösung 1: Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6.$$

Die kritischen Punkte ergeben sich aus:

$$8x - 4 = 0,$$

$$2y - 6 = 0.$$

Daraus folgt  $x = \frac{1}{2}$  und  $y = 3$ .

## Lösung 5: Interpretation der Ergebnisse

Die zweiten partiellen Ableitungen und die Hesse-Matrix lauten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die Hesse-Matrix ist somit:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Hessematrix sind 8 und 2 und damit positiv.  
Die Funktion hat also in  $(\frac{1}{2}, 3)$  ein lokales Minimum.