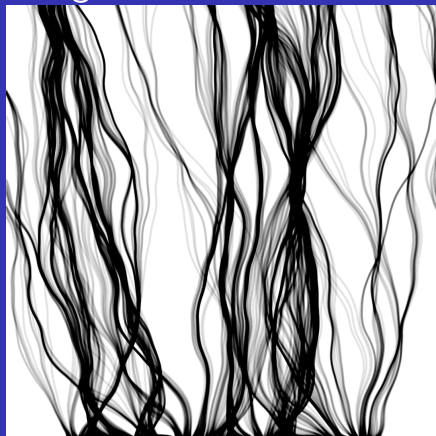


Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Für eine \mathcal{C}^n -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist die Taylorreihe um a gegeben durch

$$T_N f(x; a) := \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Taylorreihe Wiki

Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Für eine \mathcal{C}^{n+1} -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = T_n f(x; a) + R_n f(x; a) = T_n f(x; a) + o(|x - a|^n), \quad x \rightarrow a$$

Taylorreihe Wiki

Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Wie kann man das auf höhere Dimensionen verallgemeinern und was für Eigenschaften brauchen wir dafür?

Satz von Schwarz

Wenn Für eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$ existieren und letztere stetig ist, dann existiert auch $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$$

Bedeutung

Die Reihenfolge spielt beim wiederholten ableiten keine Rolle.

\mathcal{C}^k -Funktionen

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für die alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(a)$$

mit $i_1 + \cdots + i_k \leq k$ existieren und stetig sind heißt \mathcal{C}^k -Funktion oder k -mal stetig differenzierbar.

p-te Ableitung

Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ und Vektoren $v^1, \dots, v^p \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$d^p f(a)(v^1, \dots, v^p) := \partial_{v^1} \dots \partial_{v^p} f(a)$$

die p -te Richtungsableitung von f . Sie ist wegen dem Satz von Schwarz wohldefiniert.

$$d^p f(a)(v^1, \dots, v^p) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a) \cdot v_{i_1}^1 \dots v_{i_p}^p.$$

Für einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$d^p f(a)z^p := d^p f(a) \underbrace{(z, \dots, z)}_{p\text{-mal}}.$$

Hessematrix

Für $p = 2$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) v_j u_i$$

und mit

$$f''(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \end{pmatrix}$$

ist $d^2 f(a)(u, v) = u^T \cdot f''(a) \cdot v$. Die Matrix $f''(a)$ wird auch Hesse-Matrix genannt. Nach dem Satz von Schwarz ist sie symmetrisch.

Taylorapproximation

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^{p+1} -Funktion und $x, a \in U$, so dass die Verbindung zwischen x und a in U liegt. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} d^k f(a)(x-a)^k + R_{p+1}(x; a)$$

mit dem Restglied $R_{p+1}(x; a) = o(\|x - a\|^n)$.

Beweis

Sei $F(t) := f(a + th)$ mit $t \in [0, 1]$. Wiederholte Anwendung der Kettenregel mit $\gamma(t) := a + th$ ergibt

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + th) h_i$$

$$F''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + th) h_i h_j$$

\vdots

$$F^p(t) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a + th) h_{i_1} \cdots h_{i_p}.$$

Beweis

Für $h := (x - a)$ ist $F(0) = f(a)$ und $F(1) = f(x)$ und mit der Taylorapproximation für Funktionen einer Veränderlichen

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^p(0) + R_{p+1}$$

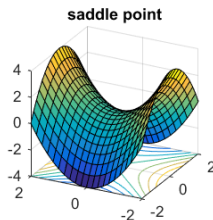
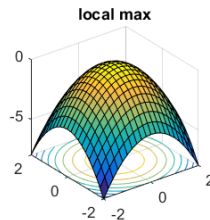
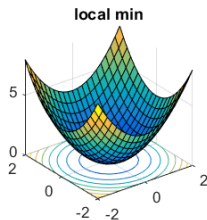
Extrema

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion und ist $f'(a) = 0$ für ein $a \in U$.
Dann gilt:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Minimum.
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Maximum.
- $f''(a) \geq 0 \Rightarrow f$ hat in a einen Sattelpunkt.

Positive/negative Definitheit

- $f''(a) > 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \ h^t f''(a) h > 0$.
- $f''(a) < 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \ h^t f''(a) h < 0$.
- $f''(a) \geq 0 \Leftrightarrow h^t f''(a) h \geq 0$.



Beweis

Sei $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$. Mit der Taylorformel gilt für hinreichend kurze Vektoren $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R(h)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|^2} = 0$. Die Funktion $v^T f''(a) v$ hat ein positives Minimum m auf der Einheitssphäre $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ da $f''(a) > 0$. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$h^T f''(a) h = \|h\| \frac{1}{\|h\|} h^T f''(a) \|h\| \frac{1}{\|h\|} h \geq m \|h\|^2 .$$

Beweis

Wir wählen ϵ so klein, dass $R(h) \leq \frac{m}{2}||h||^2$ gilt für $||h|| < \epsilon$ (was geht wegen Taylorformel). Damit erhalten wir

$$f(a+h) \geq f(a) + m||h||^2.$$

und damit hat f ein lokales Minimum in a .

Der Fall $f''(a) < 0$ wird mit Betrachtung von $-f$ durch den vorigen Fall bewiesen.

Beweis

Es sei nun $f''(a) \geq 0$ und v mit $v^T f''(a)v > 0$ und w mit $w^T f''(a)w < 0$. Betrachten wir die Funktionen

$$F_v(t) := f(a + tv)$$

$$F_w(t) := f(a + tw)$$

dann ist

$$F'_v(t) = 0; \quad F''_v(0) = v^T f''(a)v > 0$$

$$F'_w(t) = 0; \quad F''_w(0) = w^T f''(a)w < 0$$

und somit hat F_v ein isoliertes lokales Maximum und F_w ein isoliertes lokales Minimum und damit f kein lokales Extremum in a .

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.
- Behauptung: A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- Wir beweisen die beiden Richtungen:
 - Positive Definitheit \Rightarrow Positive Eigenwerte
 - Positive Eigenwerte \Rightarrow Positive Definitheit

Richtung 1: Positive Definitheit \Rightarrow Positive Eigenwerte

- Angenommen, A ist positiv definit. Das bedeutet:

$$h^\top A h > 0 \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

- Sei λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \neq 0$, sodass $Av = \lambda v$.
- Setze $h = v$ und erhalte:

$$v^\top A v = v^\top (\lambda v) = \lambda v^\top v.$$

- Da $v^\top v > 0$, folgt $\lambda > 0$.
- Da dies für jeden Eigenwert von A gilt, sind alle Eigenwerte von A positiv.

- Angenommen, alle Eigenwerte von A sind positiv.
- Da A symmetrisch ist, können wir A diagonalisieren:

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

wobei Λ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

- Für $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$h^\top Ah = h^\top Q \Lambda Q^\top h = (Q^\top h)^\top \Lambda (Q^\top h).$$

- Setze $y = Q^\top h$. Da Q orthogonal ist, gilt $y \neq 0$ wenn $h \neq 0$.
- Dann ist:

$$h^\top Ah = y^\top \Lambda y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

- Da $\lambda_i > 0$ für alle i und $y \neq 0$, folgt $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$.
- Somit ist $h^\top A h > 0$ für alle $h \neq 0$.
- Also ist A positiv definit.

Aufgabe 2 (Extrema)

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4$.

- 1 Bestimme die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y)$ bezüglich x und y .
- 2 Finde die kritischen Punkte der Funktion, indem du die partiellen Ableitungen gleich Null setzt und das resultierende Gleichungssystem löst.
- 3 Bestimme die partiellen Ableitungen 2. Ordnung und bilde die Hesse-Matrix an den kritischen Punkten.
- 4 Untersuche die Art der Extrema (Maximum, Minimum oder Sattelpunkt) anhand der Hesse-Matrix und der Determinantenkriterien.
- 5 Interpretiere die Ergebnisse im Kontext der Funktion. Beschreibe, was die gefundenen Extrema über die Funktion aussagen.

Lösung 1: Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6.$$

Die kritischen Punkte ergeben sich aus:

$$8x - 4 = 0,$$

$$2y - 6 = 0.$$

Daraus folgt $x = \frac{1}{2}$ und $y = 3$.

Lösung 5: Interpretation der Ergebnisse

Die zweiten partiellen Ableitungen und die Hesse-Matrix lauten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die Hesse-Matrix ist somit:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Hessematrix sind 8 und 2 und damit positiv.
Die Funktion hat also in $(\frac{1}{2}, 3)$ ein lokales Minimum.