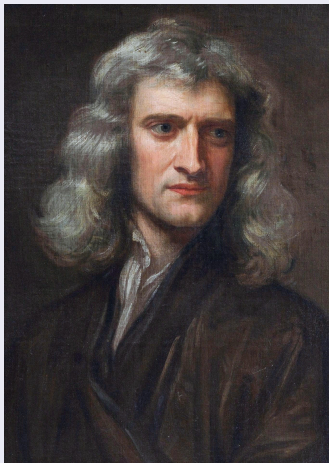


# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Sir Isaac Newton



### Konvergenz erfahrungsgemäß

Etwas konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn es sich diesem Grenzwert beliebig nahe annähert.



Figure: Konvergente Schienen

### Infinitesimalrechnung

Wie kann man damit rechnen und braucht man das?

### Achilles und die Schildkröte

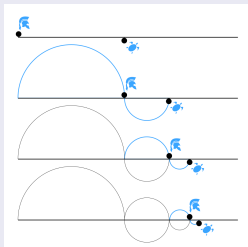


Figure: Quelle: Wikipedia:

[Mehr hier im Video](#)

### Paradoxon der Antike

Obwohl Achilles schneller ist, kann er die Schildkröte niemals einholen.

### Achilles und die Schildkröte infinitesimal betrachtet

Sei  $s_0$  der Vorsprung der Schildkröte zu Beginn des Rennens,  $t_0$  die Zeit, die Achilles benötigt, um  $s_0$  zurückzulegen. Die Schildkröte sei  $q$ -mal langsamer als Achilles. Dann ist Achilles bei der Zeit  $t_0 \cdot q$  ein weiteres Mal dort, wo die Schildkröte vorher war. Nach der Zeit  $(t_0 \cdot q) \cdot q = t_0 \cdot q^2$  ein drittes Mal usw. Mit  $q^0 = 1$  ist die Summe aller betrachteten Zeiten, die Achilles zurücklegt:

$$t = t_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = t_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = t_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{t_0}{1 - q}.$$

### Folge

Eine reelle Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

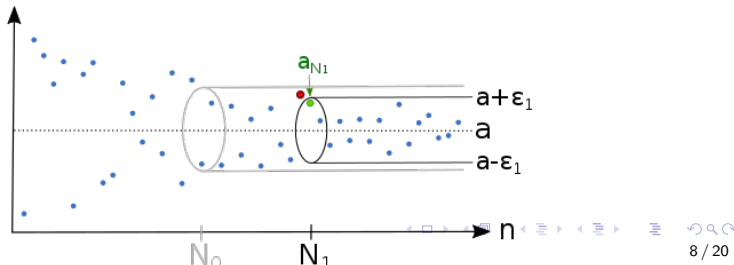
Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir  $a_n := a(n)$  als  $n$ tes Folgenglied.

### Konvergenz

Eine Folge  $a_n$  in  $\mathbb{R}^n$  heißt konvergent gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}^n$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : d(a, a_n) < \varepsilon$$

in Worten: Es gibt für jedes beliebige (noch so kleine)  $\varepsilon$  einen Index  $N$  derart, dass für alle Indizes  $n > N$ , alle weiteren Folgenglieder, gilt: der Abstand  $d(a, a_n)$  ist kleiner als  $\varepsilon$ .





# Axiome eines metrischen Raumes

Ein metrischer Raum ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung ist, die die folgenden Axiome erfüllt:

- **Nichtnegativität:**  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ .
- **Identität der Ununterscheidbaren:**  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
- **Symmetrie:**  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .
- **Dreiecksungleichung:**  
 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ .

Betrachte den Raum  $\mathbb{R}$  mit der absoluten Differenz als Metrik:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Überprüfung der Axiome:

- **Nichtnegativität:**  $|x - y| \geq 0$ .
- **Identität der Ununterscheidbaren:**  $|x - y| = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
- **Symmetrie:**  $|x - y| = |y - x|$ .
- **Dreiecksungleichung:**  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ .

# Normen in einem Vektorraum

Sei  $X = \mathbb{R}^n$  ein Vektorraum. Eine Norm auf  $X$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die für alle  $x, y \in X$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Positive Definitheit:**  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .
- **Homogenität:**  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ .
- **Dreiecksungleichung:**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

## Beispiel: Euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$

Sei  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist die euklidische Norm gegeben durch:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

**Konkretes Beispiel:** Für  $x = (3, 4)$  gilt:

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

# Abstände durch Normen

Sei  $X = \mathbb{R}^n$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Norm. Ein durch die Norm definierter Abstand ist gegeben durch:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

wobei  $x, y \in X$  beliebige Punkte sind. Dieser Abstand erfüllt die Axiome eines metrischen Raumes:

- **Nichtnegativität:**  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ .
- **Identität der Ununterscheidbaren:**  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
- **Symmetrie:**  $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$ .
- **Dreiecksungleichung:**  
 $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \quad \forall x, y, z \in X.$

**Beispiele:**

- **Euklidische Norm:**  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ .
- **Manhattan-Norm:**  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .
- **Maximum-Norm:**  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

## Definition:

Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Vektorraum  $V$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Linearität:**  $\langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + b\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$
- **Symmetrie:**  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- **Positivität:**  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  und  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  genau dann, wenn  $\mathbf{v} = 0$

## Beispiel: Euklidisches Skalarprodukt

In  $\mathbb{R}^n$  ist das Skalarprodukt definiert als:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

für  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  und  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ .

**Definition:**

Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist definiert als:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

**Beispiel: Euklidische Norm**

Für das euklidische Skalarprodukt ist die Norm:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

Diese Norm wird auch als *Euklidische Norm* oder *2-Norm* bezeichnet.

# Definition: Topologischer Raum

## Topologischer Raum [Mathlib](#)

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ , wobei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$  ist, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1  $\emptyset \in \mathcal{T}$  und  $X \in \mathcal{T}$  (Die leere Menge und die Gesamtheit  $X$  gehören zur Topologie).
- 2 Wenn  $A, B \in \mathcal{T}$ , dann gilt  $A \cap B \in \mathcal{T}$  (Schnittstabilität von endlichen Mengen).
- 3 Wenn  $\{A_i\}_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Mengen in  $\mathcal{T}$  ist, dann gilt  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$  (Vereinigungsstabilität von beliebigen Mengen).

Die Familie  $\mathcal{T}$  heißt die *Topologie* auf der Menge  $X$ . Die Mengen in  $\mathcal{T}$  werden als *offene Mengen* bezeichnet.



# Beispiel: Standardtopologie durch den Abstand

Sei  $(X, d)$  ein *metrischer Raum* mit Abstandsfunktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Die *Standardtopologie*  $\mathcal{T}_d$  auf  $X$  wird durch den Abstand  $d$  induziert, indem als offene Mengen die folgenden Teilmengen  $U \subseteq X$  gewählt werden:

$$U \in \mathcal{T}_d \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ sodass } B_\epsilon(x) \subseteq U,$$

wobei  $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$  eine *offene Kugel* um den Punkt  $x$  mit Radius  $\epsilon$  ist.

## Filter [Mathlib](#)

Ein *Filter*  $\mathcal{F}$  auf einer Menge  $X$  ist eine nicht-leere Familie von Teilmengen von  $X$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1  $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- 2 Falls  $A, B \in \mathcal{F}$ , dann gilt  $A \cap B \in \mathcal{F}$
- 3 Falls  $A \in \mathcal{F}$  und  $A \subseteq B \subseteq X$ , dann gilt  $B \in \mathcal{F}$

## Filter atTop

$$atTop := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad (1)$$

$$M_n := \{m \mid m \geq n\} \quad (2)$$

## Umgebungsfilter

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Der *Umgebungsfilter*  $\mathcal{U}(x)$  besteht aus allen Teilmengen  $U \subseteq X$ , für die es eine offene Menge  $V$  gibt, sodass  $x \in V \subseteq U$ .

## Bildfilter

Sei  $m : X \rightarrow Y$  ein Abbildung und  $\mathcal{F}$  ein Filter auf  $X$ . Der *Bildfilter* von  $\mathcal{F}$  unter  $m$  ist definiert durch

$$MAP(m)(\mathcal{F}) := \{M \subset Y \mid m^{-1}(M) \in \mathcal{F}\}. \quad (3)$$

## Konvergenz von Filtern

Seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  Filter auf  $Y$ . Wir sagen  $\mathcal{F}$  konvergiert gegen  $\mathcal{G}$  falls

$$G \in \mathcal{F} \forall G \in \mathcal{G} \quad (4)$$

Wir schreiben hierfür auch  $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$

## Konvergenz einer Folge

Eine Folge

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X$$

heißt konvergent gegen den Grenzwert  $a \in X$ , wenn gilt:

$$MAP(m)(atTop) \leq \mathcal{U}(a) \quad (5)$$