

Angewandte Mathematik

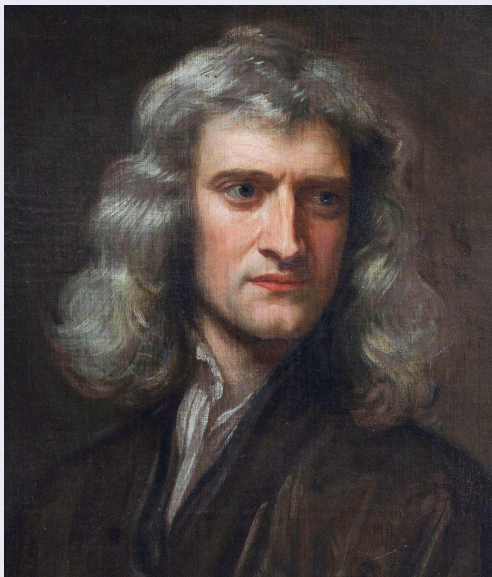


Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Infinitesimalrechnung

Infinitesimalrechnung

Sir Isaac Newton



Konvergenz erfahrungsgemäß

Etwas konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn es sich diesem Grenzwert beliebig nahe annähert.



Figure: Konvergente Schienen

Infinitesimalrechnung

Wie kann man damit rechnen und braucht man das?

Achilles und die Schildkröte

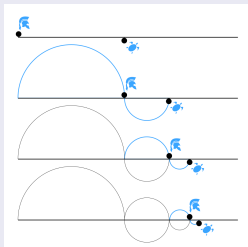


Figure: Quelle: Wikipedia:

Mehr hier im Video

Paradoxon der Antike

Obwohl Achilles schneller ist, kann er die Schildkröte niemals einholen.

Achilles und die Schildkröte infinitesimal betrachtet

Sei s_0 der Vorsprung der Schildkröte zu Beginn des Rennens, t_0 die Zeit, die Achilles benötigt, um s_0 zurückzulegen. Die Schildkröte sei q -mal langsamer als Achilles. Dann ist Achilles bei der Zeit $t_0 \cdot q$ ein weiteres Mal dort, wo die Schildkröte vorher war. Nach der Zeit $(t_0 \cdot q) \cdot q = t_0 \cdot q^2$ ein drittes Mal usw. Mit $q^0 = 1$ ist die Summe aller betrachteten Zeiten, die Achilles zurücklegt:

$$t = t_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = t_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = t_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{t_0}{1 - q}.$$

Folge

Eine reelle Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

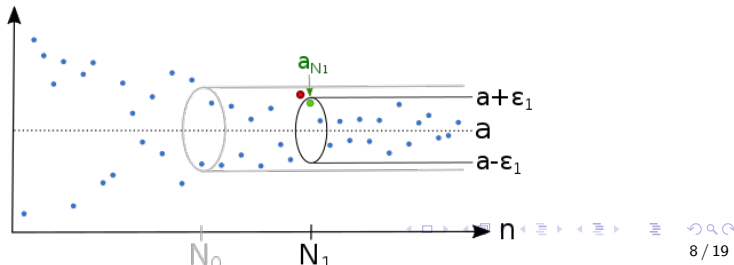
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir $a_n := a(n)$ als n tes Folgenglied.

Konvergenz

Eine Folge a_n in \mathbb{R}^n heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : d(a, a_n) < \varepsilon$$

in Worten: Es gibt für jedes beliebige (noch so kleine) ε einen Index N derart, dass für alle Indizes $n > N$, alle weiteren Folgenglieder, gilt: der Abstand $d(a, a_n)$ ist kleiner als ε .



Axiome eines metrischen Raumes

Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist, die die folgenden Axiome erfüllt:

- **Nichtnegativität:** $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$.
- **Identität der Ununterscheidbaren:** $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- **Symmetrie:** $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$.
- **Dreiecksungleichung:**
 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Betrachte den Raum \mathbb{R} mit der absoluten Differenz als Metrik:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Überprüfung der Axiome:

- **Nichtnegativität:** $|x - y| \geq 0$.
- **Identität der Ununterscheidbaren:** $|x - y| = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- **Symmetrie:** $|x - y| = |y - x|$.
- **Dreiecksungleichung:** $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Normen in einem Vektorraum

Sei $X = \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. Eine Norm auf X ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, die für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Positive Definitheit:** $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- **Homogenität:** $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- **Dreiecksungleichung:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Beispiel: Euklidische Norm in \mathbb{R}^2

Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist die euklidische Norm gegeben durch:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Konkretes Beispiel: Für $x = (3, 4)$ gilt:

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Abstände durch Normen

Sei $X = \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum und $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm. Ein durch die Norm definierter Abstand ist gegeben durch:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

wobei $x, y \in X$ beliebige Punkte sind. Dieser Abstand erfüllt die Axiome eines metrischen Raumes:

- **Nichtnegativität:** $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$.
- **Identität der Ununterscheidbaren:** $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- **Symmetrie:** $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$.
- **Dreiecksungleichung:**
 $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \quad \forall x, y, z \in X.$

Beispiele:

- **Euklidische Norm:** $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.
- **Manhattan-Norm:** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
- **Maximum-Norm:** $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Definition: Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , wobei X eine Menge und \mathcal{T} eine Familie von Teilmengen von X ist, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1 $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ (Die leere Menge und die Gesamtheit X gehören zur Topologie).
- 2 Wenn $A, B \in \mathcal{T}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$ (Schnittstabilität von endlichen Mengen).
- 3 Wenn $\{A_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen in \mathcal{T} ist, dann gilt $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ (Vereinigungsstabilität von beliebigen Mengen).

Die Familie \mathcal{T} heißt die *Topologie* auf der Menge X . Die Mengen in \mathcal{T} werden als *offene Mengen* bezeichnet.

Beispiel: Standardtopologie durch den Abstand

Sei (X, d) ein *metrischer Raum* mit Abstandsfunktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die *Standardtopologie* \mathcal{T}_d auf X wird durch den Abstand d induziert, indem als offene Mengen die folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ gewählt werden:

$$U \in \mathcal{T}_d \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ sodass } B_\epsilon(x) \subseteq U,$$

wobei $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ eine *offene Kugel* um den Punkt x mit Radius ϵ ist.

Ein *Filter* \mathcal{F} auf einer Menge X ist eine nicht-leere Familie von Teilmengen von X , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- ① $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- ② Falls $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$
- ③ Falls $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq X$, dann gilt $B \in \mathcal{F}$

$$atTop := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad (1)$$

$$M_n := \{m \mid m \geq n\} \quad (2)$$

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Der *Umgebungsfilter* $\mathcal{U}(x)$ besteht aus allen Teilmengen $U \subseteq X$, für die es eine offene Menge V gibt, sodass $x \in V \subseteq U$.

Sei $m : X \rightarrow Y$ ein Abbildung und \mathcal{F} ein Filter auf X . Der *Bildfilter* von \mathcal{F} unter m ist definiert durch

$$\text{MAP}(m)(\mathcal{F}) := \{M \subset Y \mid m^{-1}(M) \in \mathcal{F}\}. \quad (3)$$

Konvergenz von Filtern

Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Filter auf Y . Wir sagen \mathcal{F} konvergiert gegen \mathcal{G} falls

$$F \in \mathcal{G} \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad (4)$$

Wir schreiben hierfür auch $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$

Konvergenz einer Folge

Eine Folge

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$MAP(m)(atTop) \leq \mathcal{U}(a) \quad (5)$$