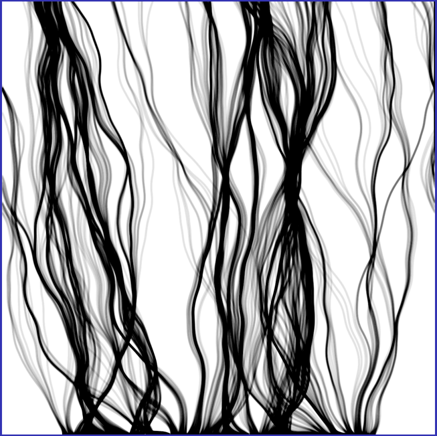
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Für eine $\mathcal{C}^n$-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist die Taylorreihe um a gegeben durch

$$T_N f(x; a) := \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorreihe Wiki

Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Für eine $\mathcal{C}^{n+1}$-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = T_n f(x; a) + R_n f(x; a) = T_n f(x; a) + o(|x-a|^n), \quad x \to a$$

Taylorreihe Wiki

Wiederholung Taylorreihe für 1-dimensionale Funktionen

Wie kann man das auf höhere Dimensionen verallgemeinern und was für Eigenschaften brauchen wir dafür?

Satz von Schwarz

Wenn Für eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$ existieren und letztere stetig ist, dann existiert auch $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$$

Bedeutung

Die Reihenfolge spielt beim wiederholten ableiten keine Rolle.

$\mathcal{C}^k$-Funktionen

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für die alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(a)$$

mit $i_1 + \cdots + i_k \leq k$ existieren und stetig sind heißt $\mathcal{C}^k$-Funktion oder k-mal stetig differenzierbar.

p-te Ableitung

Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U$ und Vektoren $v^1, \cdots, v^p \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$d^p f(a)\big(v^1, \cdots, v^p\big) := \partial_{v^1} \ldots \partial_{v^p} f(a)$$

die p-te Richtungsableitung von f. Sie ist wegen dem Satz von Schwarz wohldefiniert.

$$d^p f(a)\big(v^1, \cdots, v^p\big) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a) \cdot v^1_{i_1} \cdots v^p_{i_p} \; .$$

Für einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ definieren wir
$d^p f(a) z^p := d^p f(a) \underbrace{(z, \cdots, z)}_{p-mal}$.

Hessematrix

Für $p = 2$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) v_i u_i$$

und mit

$$f''(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} f(a) \end{pmatrix}$$

ist $d^2 f(a)(u, v) = u^T \cdot f''(a) \cdot v$. Die Matrix $f''(a)$ wird auch Hesse-Matrix genannt. Nach dem Satz von Schwarz ist sie symmetrisch.

Taylorapproximation

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{p+1}$-Funktion und $x, a \in U$, so dass die Verbindung zwischen x und a in U liegt. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{p!} d^k f(a)(x-a)^k + R_{p+1}(x;a)$$

mit dem Restglied $R_{p+1}(x;a) = o(||x-a||^n)$.

Beweis

Sei $F(t) := f(a+th)$ mit $t \in [0,1]$. Wiederholte Anwendung der Kettenregel mit $\gamma(t) := a + th$ ergibt

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a+th) h_i$$

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a+th) h_i h_j$$

$$\vdots$$

$$F^p(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} f(a+th) h_{i_1} \cdots h_{i_p} \; .$$

Beweis

Für $h := (x - a)$ ist $F(0) = f(a)$ und $F(1) = f(x)$ und mit der Taylorapproximation für Funktionen einer Veränderlichen

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{p!}F^p(0) + R_{p+1}$$

Extrema

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion und ist $f'(a) = 0$ für ein $a \in U$. Dann gilt:

- $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Minimum.
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ hat in a ein isoliertes lokales Maximum.
- $f''(a) \gtrless 0 \Rightarrow f$ hat in a einen Sattelpunkt.

Positive/negative Definitheit

- $f''(a) > 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \; h^t f''(a) h > 0.$
- $f''(a) < 0 \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \; h^t f''(a) h < 0.$
- $f''(a) \gtrless 0 \Leftrightarrow h^t f''(a) h \gtrless 0.$

Beweis

Sei $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$. Mit der Taylorformel gilt für hinreichend kurze Vektoren $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R(h)$$

mit $\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{||h||^2} = 0$. Die Funktion $v^T f''(a) v$ hat ein positives Minimum m auf der Einheitssphäre $\{v \in \mathbb{R}^n \mid ||v|| = 1\}$ da $f''(a) > 0$. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$h^T f''(a) h = ||h|| \frac{1}{||h||} h^t f''(a) ||h|| \frac{1}{||h||} h \geq m ||h||^2 \; .$$

Beweis

Wir wählen ϵ so klein, dass $R(h) \leq \frac{m}{2}||h||^2$ gilt für $||h|| < \epsilon$ (was geht wegen Taylorformel). Damit erhalten wir

$$f(a+h) \geq f(a) + m||h||^2 \, .$$

und damit hat f ein lokales Minimum in a.
Der Fall $f''(a) < 0$ wird mit Betrachtung von $-f$ durch den vorigen Fall bewiesen.

Beweis

Es sei nun $f''(a) \gtrless 0$ und v mit $v^T f''(a) v > 0$ und w mit $w^T f''(a) w > 0$. Betrachten wir die Funktionen

$$F_v(t) := f(a + tv)$$
$$F_w(t) := f(a + tw)$$

dann ist

$$F_v'(t) = 0; \; F_v''(0) = v^T f''(a) v > 0$$
$$F_w'(t) = 0; \; F_w''(0) = w^T f''(a) w < 0$$

und somit hat F_v ein isoliertes lokales Maximum und F_w ein isoliertes lokales Minimum und damit f kein lokales Extremum in a.

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.
- Behauptung: A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- Wir beweisen die beiden Richtungen:
  - Positive Definitheit $\Rightarrow$ Positive Eigenwerte
  - Positive Eigenwerte $\Rightarrow$ Positive Definitheit

Richtung 1: Positive Definitheit $\Rightarrow$ Positive Eigenwerte

- Angenommen, A ist positiv definit. Das bedeutet:

$$h^\top A h > 0 \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

- Sei λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \neq 0$, sodass $Av = \lambda v$.
- Setze $h = v$ und erhalte:

$$v^\top A v = v^\top (\lambda v) = \lambda v^\top v.$$

- Da $v^\top v > 0$, folgt $\lambda > 0$.

- Da dies für jeden Eigenwert von A gilt, sind alle Eigenwerte von A positiv.
- Dies zeigt: Wenn A positiv definit ist, sind alle Eigenwerte positiv.

Richtung 2: Positive Eigenwerte $\Rightarrow$ Positive Definitheit

- Angenommen, alle Eigenwerte von A sind positiv.
- Da A symmetrisch ist, können wir A diagonalisieren:

$$A = Q\Lambda Q^\top,$$

wobei Λ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

- Für $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$h^\top A h = h^\top Q \Lambda Q^\top h = (Q^\top h)^\top \Lambda (Q^\top h).$$

- Setze $y = Q^\top h$. Da Q orthogonal ist, gilt $y \neq 0$ wenn $h \neq 0$.
- Dann ist:

$$h^\top A h = y^\top \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

- Da $\lambda_i > 0$ für alle i und $y \neq 0$, folgt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0$.
- Somit ist $h^\top Ah > 0$ für alle $h \neq 0$.
- Also ist A positiv definit.

Aufgabe 2 (Extrema)

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4$.

1. Bestimme die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y)$ bezüglich x und y.
2. Finde die kritischen Punkte der Funktion, indem du die partiellen Ableitungen gleich Null setzt und das resultierende Gleichungssystem löst.
3. Bestimme die partiellen Ableitungen 2. Ordnung und bilde die Hesse-Matrix an den kritischen Punkten.
4. Untersuche die Art der Extrema (Maximum, Minimum oder Sattelpunkt) anhand der Hesse-Matrix und der Determinantenkriterien.
5. Interpretiere die Ergebnisse im Kontext der Funktion. Beschreibe, was die gefundenen Extrema über die Funktion aussagen.

Lösung 1: Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6.$$

Die kritischen Punkte ergeben sich aus:

$$8x - 4 = 0,$$
$$2y - 6 = 0.$$

Daraus folgt $x = \frac{1}{2}$ und $y = 3$.

Lösung 5: Interpretation der Ergebnisse

Die zweiten partiellen Ableitungen und die Hesse-Matrix lauten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die Hesse-Matrix ist somit:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Hessematrix sind 8 und 2 und damit positiv. Die Funktion hat also in $(\frac{1}{2}, 3)$ ein lokales Minimum.