

### Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System  $t \mapsto x(t)$ . Möchten verstehen, wie sich  $x(t)$  über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_n$  lässt sich  $x(t_i)$  messen und damit  $x'(t_i) \cong \frac{x(t_i) - x(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}$  näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist die Ableitung  $x'(t) = f(x(t), t)$  eine Funktion in der Zeit und der Funktion selbst.

### Beispiel

(1)  $x'(t) = \mu x(t)$ . Dann ist  $x(t) = ce^{\mu t}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung. Ist  $x(0) = x_0$ , so ist  $x(t) = x_0 e^{\mu t}$  eine Lösung von (1) mit  $x(0) = x_0$ .

### System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$x_2'(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Werden zusätzlich die Anfangsbedingungen

$x_1(t_0) = x_0^1, \dots, x_n(t_0) = x_0^n$  vorgegebenen, so spricht man von

einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion

$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

### System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x', x)$$

mit  $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \dots; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$  ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

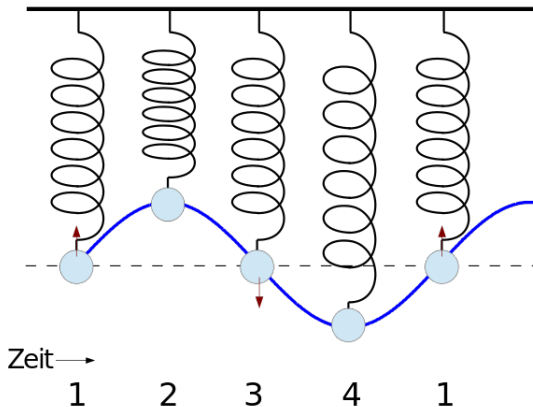
$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \dots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}.$$



### Harmonischer Oszillator

$$x''(t) = -x(t).$$

### Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

### System von Differentialgleichungen

Für eine vektorwertige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$   
definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t) dt \end{pmatrix}.$$

### System von Differentialgleichungen

Ein Weg  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann Lösung des AWP  $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$  mit  $\varphi(t_0) = x_0$ , wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \varphi) dt$$

gilt.

### Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.



### Volterra-Lotka System

<https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen>

### System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

die jedem Punkt  $x \in \Omega$  einen Vektor  $v(x) \in \mathbb{R}^n$  zuordnet.

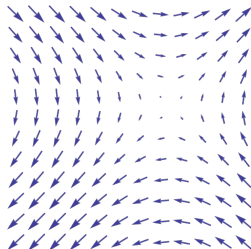


Figure: Quelle:

Wikipedia:[https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_field#/media/File:VectorField.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.svg)

### System von Differentialgleichungen

Ein Weg  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Integralkurve in dem Vektorfeld  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle  $t \in I$ .

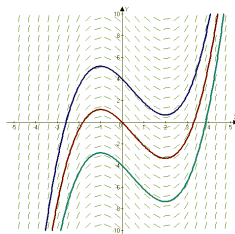


Figure: Quelle:

Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Integral\\_curve#/media/File:Slope\\_Field](https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field)

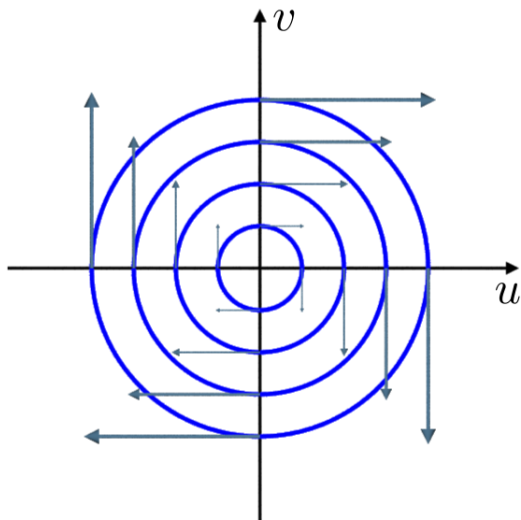
### System von Differentialgleichungen

Ein dynamisches System ist eine Abbildung  $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die jedem Punkt  $(t, x) \in U$  einen Vektor  $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$  zuordnet.

Eine Integralkurve oder Lösung für  $F$  ist eine Weg  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles  $t \in I$ .



### Lösung Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

### Harmonischer Oszillator

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

### Lösung Harmonischer Oszillator

$$\text{Anfangswert } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

### Harmonischer Oszillator

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!}$$



### Harmonischer Oszillator

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; k = 0 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; k = 1 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; k = 2 \pmod{4} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; k = 3 \pmod{4} \end{cases}$$

### Harmonischer Oszillator

$$\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} \cdots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \cdots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Link: Trigonometrische Taylorreihen

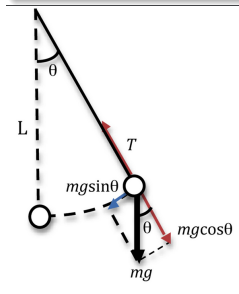
### Harmonischer Oszillator Eigenwerte

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexer Eigenwert.

### Gedämpftes Pendel

$$\theta''(t) = -L\theta - \underbrace{\mu\theta'}_{\text{drag}}. \quad L\theta = mg \sin(\theta)$$

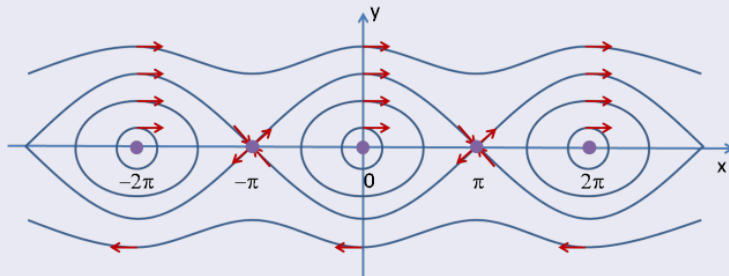


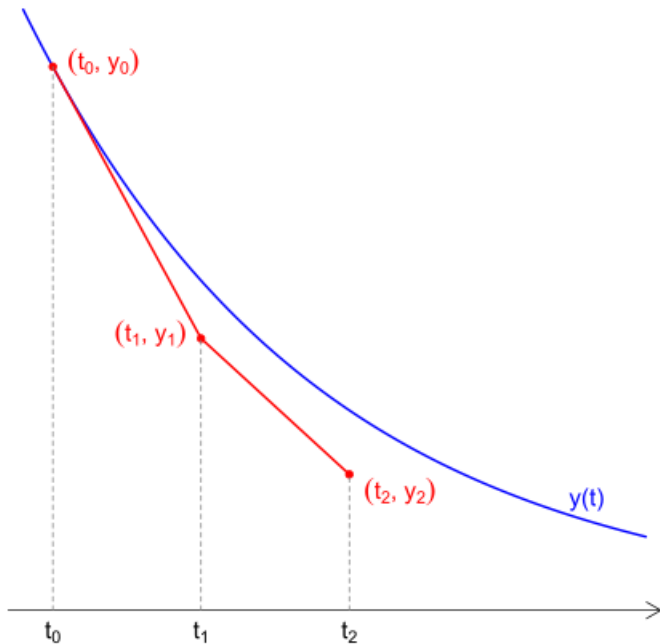
### System gedämpftes Pendel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\mu x_2(t) - \frac{mg}{L} \sin(x_1(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{nicht linear!})$$

### Phasenbild gedämpftes Pendel

$$\mu = 0$$



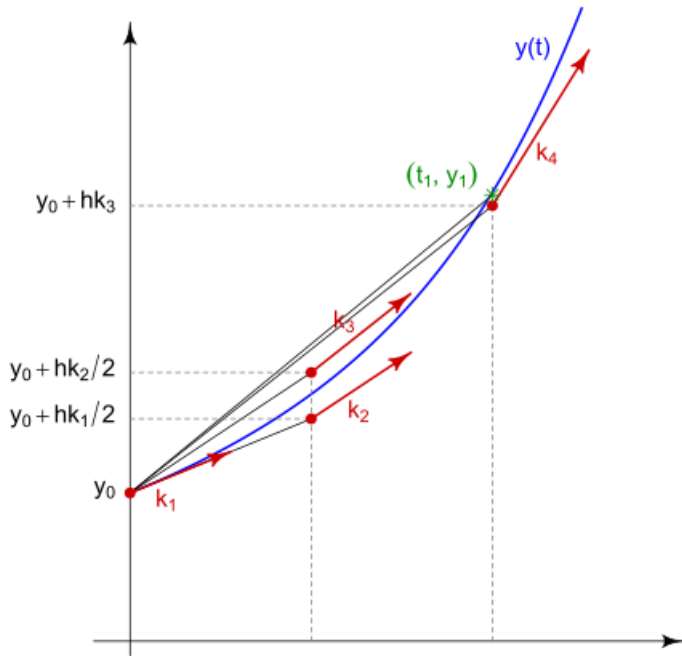


## Euler Verfahren

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$t_k = t_0 + kh \quad (1)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad (2)$$





## Runge Kutta Verfahren

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (4)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (5)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \quad (6)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \quad (7)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \quad (8)$$