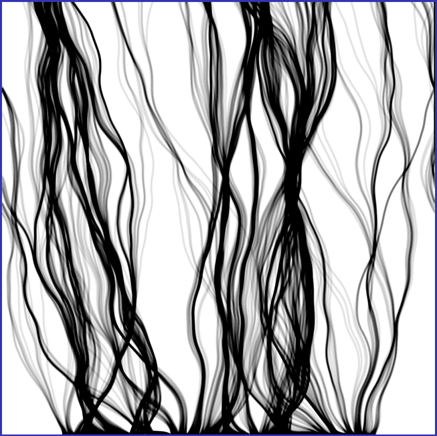
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Was ist Lean?

- Ein interaktiver Theorembeweiser und Programmiersprache.
- Wird verwendet, um mathematische Aussagen formal zu beweisen und zu verifizieren.
- Besitzt eine aktive und wachsende Community, insbesondere in der formalen Mathematik.

Curry Howard Isomorphismus

Basiert auf dem Curry-Howard-Isomorphismus. Der Curry-Howard-Isomorphismus besagt, dass logische Aussagen als Typen und Beweise als Programme betrachtet werden können. Mit anderen Worten:

- Logische Aussagen $\leftrightarrow$ Typen
- Beweise von Aussagen $\leftrightarrow$ Programme, die zu diesen Typen gehören

Lean Installation

Lean mathlib

mathlib lernen

Einleitung

Curry-Howard-Isomorphismus: Eine Beziehung zwischen Logik und Typentheorie.

Logische Aussagen entsprechen Typen, Beweise entsprechen Programmen.

- **Konjunktion ($\wedge$)** als Produkt-Typ
- **Disjunktion ($\vee$)** als Summen-Typ
- **Implikation ($\Rightarrow$)** als Funktionstyp
- **Allquantor ($\forall$)** als Produkttyp
- **Existenzquantor ($\exists$)** als Summentyp

Konjunktion ($\wedge$) und Produkttyp

Definition

Die Konjunktion $A \wedge B$ entspricht einem Produkttyp $A \times B$.
Ein Beweis für $A \wedge B$ ist ein Paar (a, b), wobei a ein Beweis für A und b ein Beweis für B ist.

LOGIK VS TYPES

$$A \wedge B \quad \leftrightarrow \quad A \times B$$

Beispiel:

Angenommen $A =$ "gerade Zahl" und $B =$ "größer als 2".
Ein Beweis von $A \wedge B$ ist ein Paar aus einer geraden Zahl x und der Eigenschaft $x > 2$.

Disjunktion ($\vee$) und Summentyp

Definition

Die Disjunktion $A \vee B$ entspricht einem Summentyp $A + B$.
Ein Beweis für $A \vee B$ ist entweder ein Beweis für A oder ein Beweis für B.

LOGIK VS TYPES

$$A \vee B \quad \leftrightarrow \quad A + B$$

Beispiel:

Angenommen $A =$ "gerade Zahl" und $B =$ "ungerade Zahl".
Ein Beweis für $A \vee B$ ist entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl.

Implikation ($\Rightarrow$) und Funktionstyp

Definition

Die Implikation $A \Rightarrow B$ entspricht einem Funktionstyp $A \rightarrow B$. Ein Beweis für $A \Rightarrow B$ ist eine Funktion, die aus einem Beweis für A einen Beweis für B konstruiert.

LOGIK VS TYPES

$$A \Rightarrow B \quad \leftrightarrow \quad A \rightarrow B$$

Beispiel:
Angenommen $A =$ "gerade Zahl" und
$B =$ "die Verdopplung ist auch gerade".
Ein Beweis für $A \Rightarrow B$ ist eine Funktion, die jede gerade Zahl n auf die Aussage abbildet, dass $2n$ auch gerade ist.

Allquantor ($\forall$) als Produkttyp

Definition

Der Allquantor $\forall x \in A \,.\, P(x)$ entspricht einem Produkttyp $\prod_{x:A} P(x)$.
Ein Beweis für $\forall x \in A \,.\, P(x)$ ist eine Funktion, die jedem $x \in A$ einen Beweis für $P(x)$ zuordnet.

LOGIK VS TYPES

$$\forall x \in A \,.\, P(x) \quad \leftrightarrow \quad \prod_{x:A} P(x)$$

Beispiel:

"Für jede natürliche Zahl n ist $n \geq 0$":

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \prod_{n:\mathbb{N}} (n \geq 0)$$

Existenzquantor ($\exists$) als Summentyp

Definition

Der Existenzquantor $\exists x \in A \,.\, P(x)$ entspricht einem Summentyp $\sum_{x:A} P(x)$.
Ein Beweis für $\exists x \in A \,.\, P(x)$ ist ein Paar $(x, \text{Beweis für } P(x))$, wobei $x \in A$ und $P(x)$ gilt.

LOGIK VS TYPES

$$\exists x \in A \,.\, P(x) \quad \leftrightarrow \quad \sum_{x:A} P(x)$$

Beispiel:
"Es gibt eine natürliche Zahl n, die größer als 10 ist":

$$\exists n \in \mathbb{N} \,.\, n > 10 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n:\mathbb{N}} (n > 10)$$