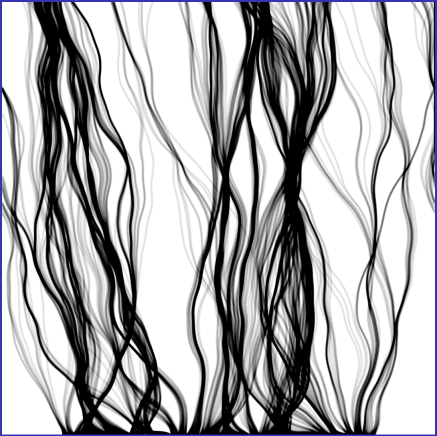
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Achilles und die Schildkröte

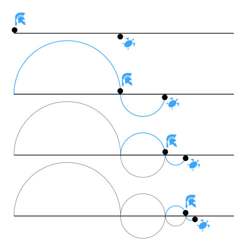


Figure: Quelle: Wikipedia:

Mehr hier im Video

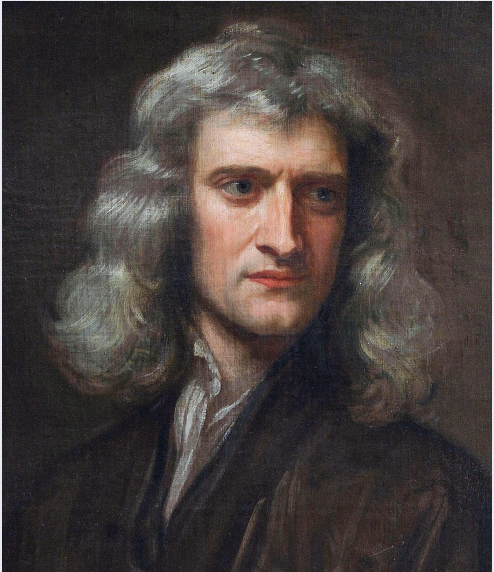
Paradoxon der Antike

Obwohl Achilles schneller ist, kann er die Schildkröte niemals einholen.

Achilles und die Schildkröte infinitessimal betrachtet

Sei s_0 der Vorsprung der Schildkröte zu Beginn des Rennens, t_0 die Zeit, die Achilles benötigt, um s_0 zurückzulegen. Die Schildkröte ist q-mal langsamer als Achilles. Dann holt Achilles die Schildkröte nach der Zeit $t_0 \cdot q$ ein weiteres Mal ein, nach der Zeit $(t_0 \cdot q) \cdot q = t_0 \cdot q^2$ ein drittes Mal usw. Mit $q^0 = 1$ ist die Summe aller betrachteten Zeiten, die Achilles zurücklegt:
$t = t_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = t_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = t_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{t_0}{1-q}$.

Konvergenz



Konvergenz

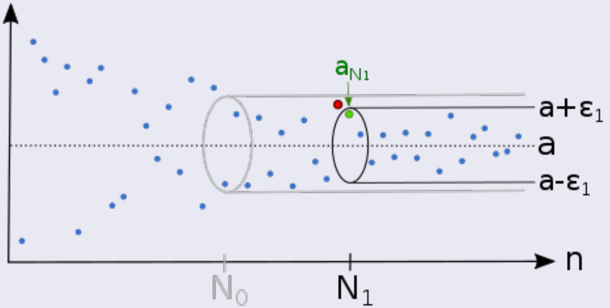


Figure: Quelle: Wikipedia:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Epsilonschlauch_klein.svg

Konvergenz

Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N} \; \forall \; n > N : \; d(a, a_n) < \varepsilon$$

in Worten: Es gibt für jedes beliebige (noch so kleine) ε einen Index N derart, dass für alle Indizes $n > N$, alle weiteren Folgenglieder, gilt: der Abstand $d(a, a_n)$ ist kleiner als ε.