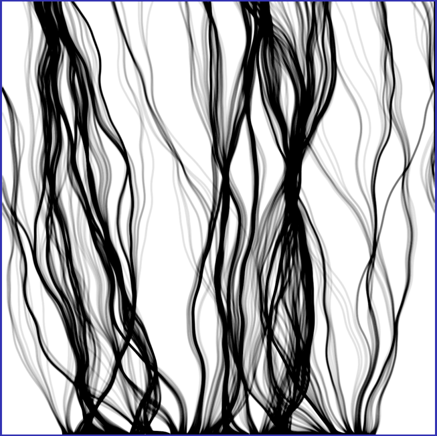
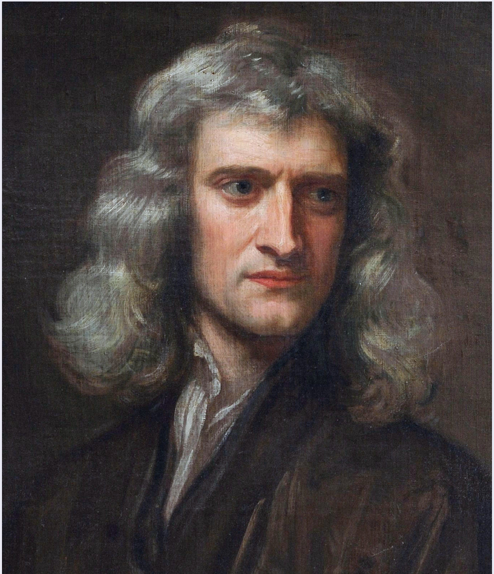
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Sir Isaac Newton



Konvergenz erfahrungsgemäß

Etwas konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn es sich diesem Grenzwert beliebig nahe annähert.

Figure: Konvergente Schienen

Infinitessimalrechnung

Wie kann man damit rechnen und braucht man das?

Achilles und die Schildkröte

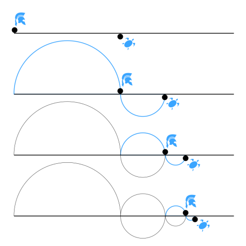


Figure: Quelle: Wikipedia:

Mehr hier im Video

Paradoxon der Antike

Obwohl Achilles schneller ist, kann er die Schildkröte niemals einholen.

Achilles und die Schildkröte infinitessimal betrachtet

Sei s_0 der Vorsprung der Schildkröte zu Beginn des Rennens, t_0 die Zeit, die Achilles benötigt, um s_0 zurückzulegen. Die Schildkröte sei q-mal langsamer als Achilles. Dann ist Achilles bei der Zeit $t_0 \cdot q$ ein weiteres Mal dort, wo die Schidlkröte vorher war. Nach der Zeit $(t_0 \cdot q) \cdot q = t_0 \cdot q^2$ ein drittes Mal usw. Mit $q^0 = 1$ ist die Summe aller betrachteten Zeiten, die Achilles zurücklegt:
$t = t_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = t_0 \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = t_0 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{t_0}{1-q}$.

Folge

Eine reelle Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$$

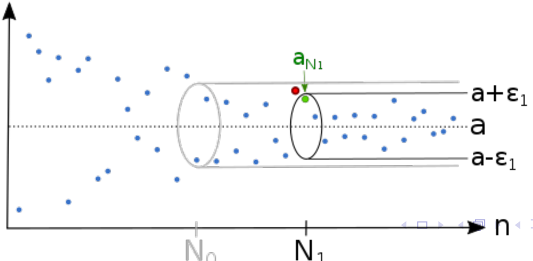
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir $a_n := a(n)$ als n tes Folgenglied.

Konvergenz

Eine Folge a_n in $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N} \; \forall \; n > N : \; d(a, a_n) < \varepsilon$$

in Worten: Es gibt für jedes beliebige (noch so kleine) ε einen Index N derart, dass für alle Indizes $n > N$, alle weiteren Folgenglieder, gilt: der Abstand $d(a, a_n)$ ist kleiner als ε.



Definition: Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Familie von Teilmengen von X ist, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ (Die leere Menge und die Gesamtheit X gehören zur Topologie).
2. Wenn $A, B \in \mathcal{T}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$ (Schnittstabilität von endlichen Mengen).
3. Wenn $\{A_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen in $\mathcal{T}$ ist, dann gilt $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ (Vereinigungsstabilität von beliebigen Mengen).

Die Familie $\mathcal{T}$ heißt die *Topologie* auf der Menge X. Die Mengen in $\mathcal{T}$ werden als *offene Mengen* bezeichnet.

Beispiel: Standardtopologie durch den Abstand

Sei (X, d) ein *metrischer Raum* mit Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die *Standardtopologie* $\mathcal{T}_d$ auf X wird durch den Abstand d induziert, indem als offene Mengen die folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ gewählt werden:

$$U \in \mathcal{T}_d \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U,\ \exists \epsilon > 0 \text{ sodass } B_\epsilon(x) \subseteq U,$$

wobei $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ eine *offene Kugel* um den Punkt x mit Radius ϵ ist.

Definition: Filter

Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist eine nicht-leere Familie von Teilmengen von X, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Falls $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$
3. Falls $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq X$, dann gilt $B \in \mathcal{F}$

Beispiel: Umgebungsfilter

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Der *Umgebungsfilter* $\mathcal{U}(x)$ besteht aus allen Teilmengen $U \subseteq X$, für die es eine offene Menge V gibt, sodass $x \in V \subseteq U$.