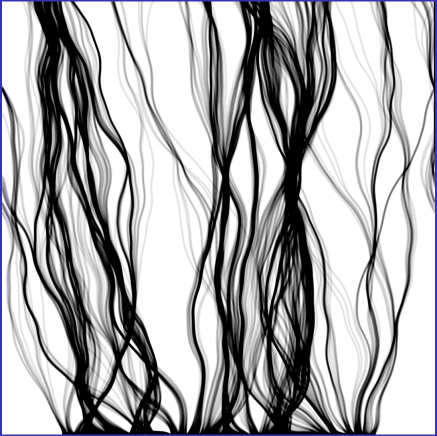
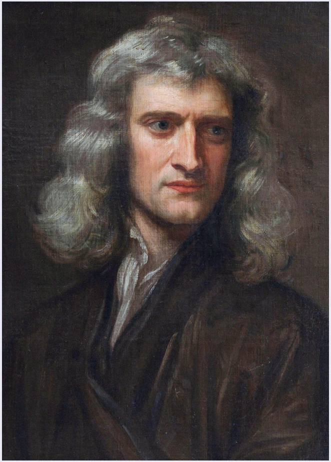
# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Sir Isaac Newton



## Konvergenz erfahrungsgemäß

Etwas konvergiert gegen einen Grenzwert, wenn es sich diesem Grenzwert beliebig nahe annähert.

Figure: Konvergente Schienen

**Infinitessimalrechnung**

Wie kann man damit rechnen und braucht man das?

## Achilles und die Schildkröte

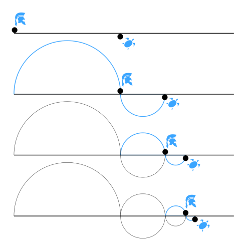


Figure: Quelle: Wikipedia:

Mehr hier im Video

## Paradoxon der Antike

Obwohl Achilles schneller ist, kann er die Schildkröte niemals einholen.

### Achilles und die Schildkröte infinitessimal betrachtet

Sei $s_0$ der Vorsprung der Schildkröte zu Beginn des Rennens, $t_0$ die Zeit, die Achilles benötigt, um $s_0$ zurückzulegen. Die Schildkröte sei $q$-mal langsamer als Achilles. Dann ist Achilles bei der Zeit $t_0 \cdot q$ ein weiteres Mal dort, wo die Schidlkröte vorher war. Nach der Zeit $(t_0 \cdot q) \cdot q = t_0 \cdot q^2$ ein drittes Mal usw. Mit $q^0 = 1$ ist die Summe aller betrachteten Zeiten, die Achilles zurücklegt:
$t = t_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = t_0 \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = t_0 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{t_0}{1-q}$.

## Folge

Eine reelle Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$$

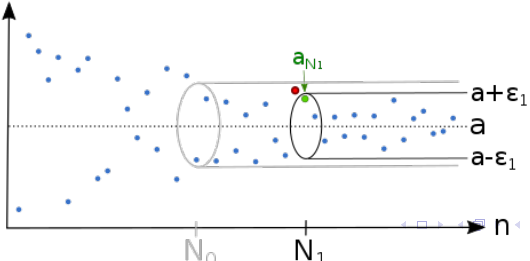
Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir $a_n := a(n)$ als $n$ tes Folgenglied.

## Konvergenz

Eine Folge $a_n$ in $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N \in \mathbb{N} \; \forall \; n > N : \; d(a, a_n) < \varepsilon$$

in Worten: Es gibt für jedes beliebige (noch so kleine) $\varepsilon$ einen Index $N$ derart, dass für alle Indizes $n > N$, alle weiteren Folgenglieder, gilt: der Abstand $d(a, a_n)$ ist kleiner als $\varepsilon$.



# Axiome eines metrischen Raumes

Ein metrischer Raum ist ein Paar $(X, d)$, wobei $X$ eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung ist, die die folgenden Axiome erfüllt:

- **Nichtnegativität**: $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$.
- **Identität der Ununterscheidbaren**: $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- **Symmetrie**: $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$.
- **Dreiecksungleichung**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

# Beispiel eines metrischen Raumes

Betrachte den Raum $\mathbb{R}$ mit der absoluten Differenz als Metrik:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Überprüfung der Axiome:

- **Nichtnegativität**: $|x - y| \geq 0$.
- **Identität der Ununterscheidbaren**: $|x - y| = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- **Symmetrie**: $|x - y| = |y - x|$.
- **Dreiecksungleichung**: $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Sei $X = \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum. Eine Norm auf $X$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, die für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Positive Definitheit**: $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- **Homogenität**: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- **Dreiecksungleichung**: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**Beispiel: Euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$**
Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist die euklidische Norm gegeben durch:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

**Konkretes Beispiel:** Für $x = (3, 4)$ gilt:

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

# Abstände durch Normen

Sei $X = \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum und $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ eine Norm. Ein durch die Norm definierter Abstand ist gegeben durch:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

wobei $x, y \in X$ beliebige Punkte sind. Dieser Abstand erfüllt die Axiome eines metrischen Raumes:

- **Nichtnegativität**: $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$.
- **Identität der Ununterscheidbaren**: $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- **Symmetrie**: $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$.
- **Dreiecksungleichung**: $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \quad \forall x, y, z \in X$.

**Beispiele:**

- **Euklidische Norm:** $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.
- **Manhattan-Norm:** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
- **Maximum-Norm:** $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

# Skalarprodukt

**Definition:**
Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

auf einem reellen Vektorraum $V$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Linearität:** $\langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + b\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$
- **Symmetrie:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- **Positivität:** $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{v} = 0$

**Beispiel: Euklidisches Skalarprodukt**

In $\mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt definiert als:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

für $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

# Zusammenhang mit der Norm

**Definition:**
Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist definiert als:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

**Beispiel: Euklidische Norm**
Für das euklidische Skalarprodukt ist die Norm:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Diese Norm wird auch als *Euklidische Norm* oder *2-Norm* bezeichnet.

# Definition: Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, wobei $X$ eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Familie von Teilmengen von $X$ ist, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ (Die leere Menge und die Gesamtheit $X$ gehören zur Topologie).
2. Wenn $A, B \in \mathcal{T}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$ (Schnittstabilität von endlichen Mengen).
3. Wenn $\{A_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Mengen in $\mathcal{T}$ ist, dann gilt $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ (Vereinigungsstabilität von beliebigen Mengen).

Die Familie $\mathcal{T}$ heißt die *Topologie* auf der Menge $X$. Die Mengen in $\mathcal{T}$ werden als *offene Mengen* bezeichnet.

# Beispiel: Standardtopologie durch den Abstand

Sei $(X, d)$ ein *metrischer Raum* mit Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die *Standardtopologie* $\mathcal{T}_d$ auf $X$ wird durch den Abstand $d$ induziert, indem als offene Mengen die folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ gewählt werden:

$$U \in \mathcal{T}_d \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U,\ \exists \epsilon > 0 \text{ sodass } B_\epsilon(x) \subseteq U,$$

wobei $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ eine *offene Kugel* um den Punkt $x$ mit Radius $\epsilon$ ist.

# Definition: Filter

Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf einer Menge $X$ ist eine nicht-leere Familie von Teilmengen von $X$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Falls $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$
3. Falls $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq X$, dann gilt $B \in \mathcal{F}$

# Beispiel: atTop

$$atTop := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \tag{1}$$

$$M_n := \{m \mid m \geq n\} \tag{2}$$

# Beispiel: Umgebungsfilter

Sei $X$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Der *Umgebungsfilter* $\mathcal{U}(x)$ besteht aus allen Teilmengen $U \subseteq X$, für die es eine offene Menge $V$ gibt, sodass $x \in V \subseteq U$.

# Beispiel: Bildfilter

Sei $m : X \to Y$ ein Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $X$. Der *Bildfilter* von $\mathcal{F}$ unter $m$ ist definiert durch

$$MAP(m)(\mathcal{F}) := \{M \subset Y \mid m^{-1}(M) \in \mathcal{F}\}. \tag{3}$$

# Konvergenz

## Konvergenz von Filtern

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Filter auf $Y$. Wir sagen $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $\mathcal{G}$ falls

$$G \in \mathcal{F} \; \forall G \in \mathcal{G} \tag{4}$$

Wir schreiben hierfür auch $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$

## Konvergenz einer Folge

Eine Folge

$$a : \mathbb{N} \to X$$

heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in X$, wenn gilt:

$$MAP(m)(atTop) \leq \mathcal{U}(a) \tag{5}$$