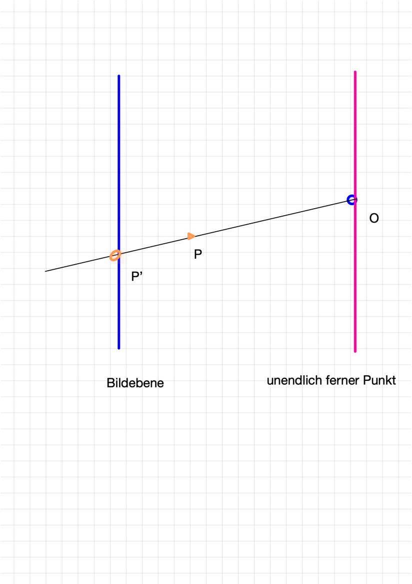
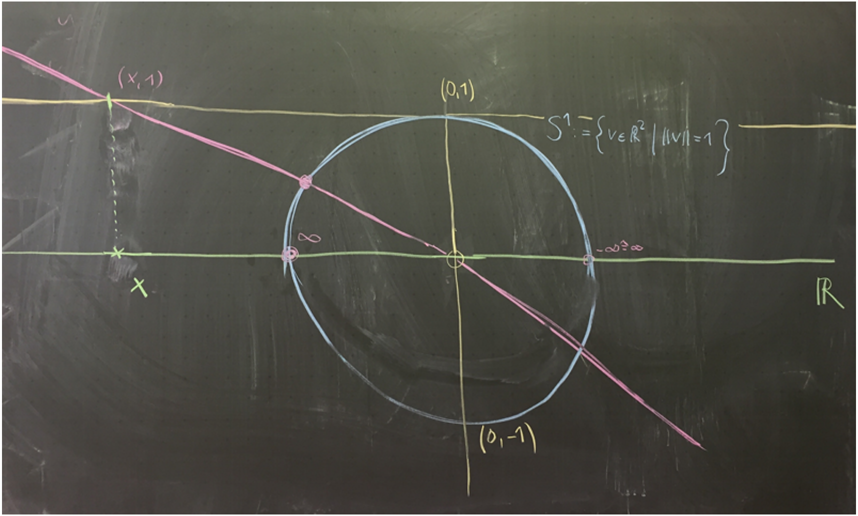
Homogene Koordianten

Perspektive

Homogene Koordinaten



Homogene Koordinaten



Homogene Koordinaten

Projektier Raum

Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^3 := \mathbb{R}^4 - \{0\}/\sim$$

$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}\,.$$

Homogene Koordinaten

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^3 \to \mathbb{P}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten.

Homogene Koordinaten

Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; p_4 = 0 \right\} \to \mathbb{A}^3$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{p_3}{p_4} \end{pmatrix} .$$

Homogene Koordinaten

Ferne Punkte

Die Menge der Punkte $F_3 := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \middle| \; p_4 = 0 \right\}$ heissen unendlich ferne Punkte.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cong \lim_{n\to\infty} n \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

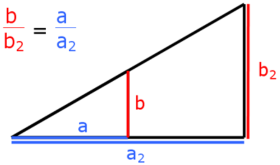
Identifikation der fernen Punkte

Es ist $F_3 \cong \mathbb{P}^2$

Zerlegung des projektiven Raumes

Der projektive Raum ist damit die Vereinigung des Affinen Raumes und den unendlich fernen Punkten. "Parallelen schneiden sich in den unendlich fernen Punkten". Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^3 &= \mathbb{A}^3 \cup F_3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup F_2 \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \\ &= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1\end{aligned}$$



Zentralprojektion

Die Matrizen

$$K_{persp_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}, K_{orth_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

realisieren die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur $X-Y$-Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz d in homogenen Koordinaten.

Zentralprojektion

Die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur $X - Y$-Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz d durch die Hintereinanderausführung folgender Abbildungen darstellen:

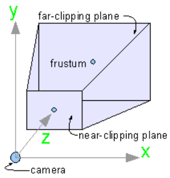
$$persp_{xy} : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2 \to \mathbb{A}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto K_{persp_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

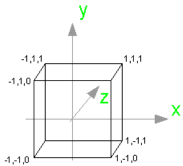
$$\mapsto K_{orth_{xy}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{d} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \end{pmatrix}$$

Clipping Koordinaten

$$P := \begin{pmatrix} \frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f-n}{f-n} & \frac{-2\cdot f\cdot n}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Camera Space



Clipping Space

Projektive Abbildungen

Wir können damit und mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\phi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$$
$$\phi(v) := A \cdot v + t$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + t \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Projektive Abbildungen

MVP:= Model View Projection Matrix