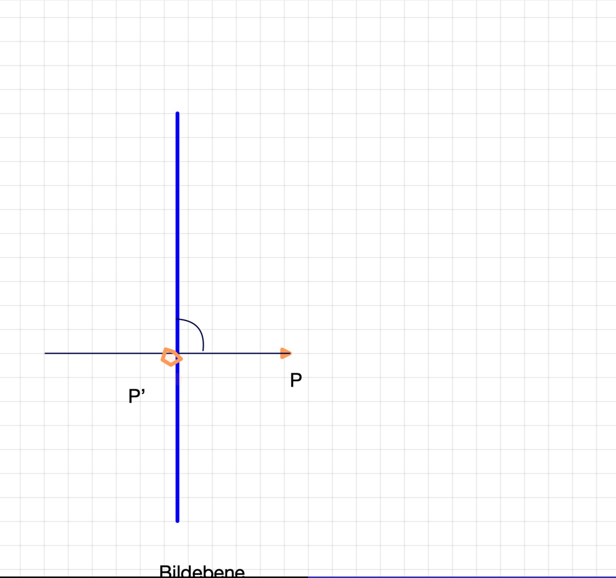
Perspektive

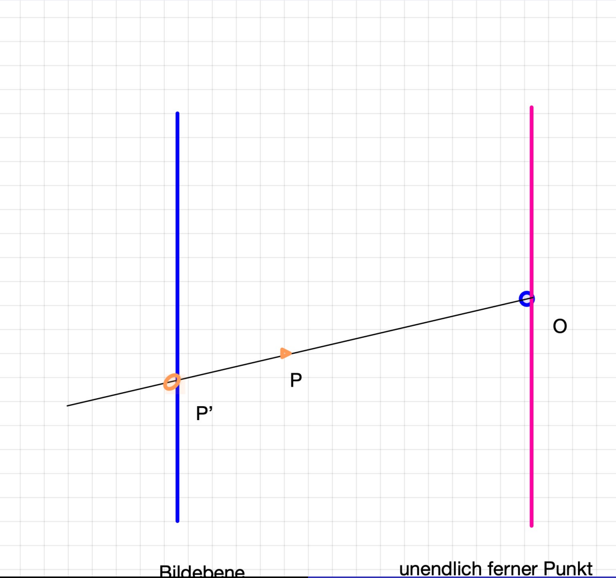
Perspektive

Projektionen

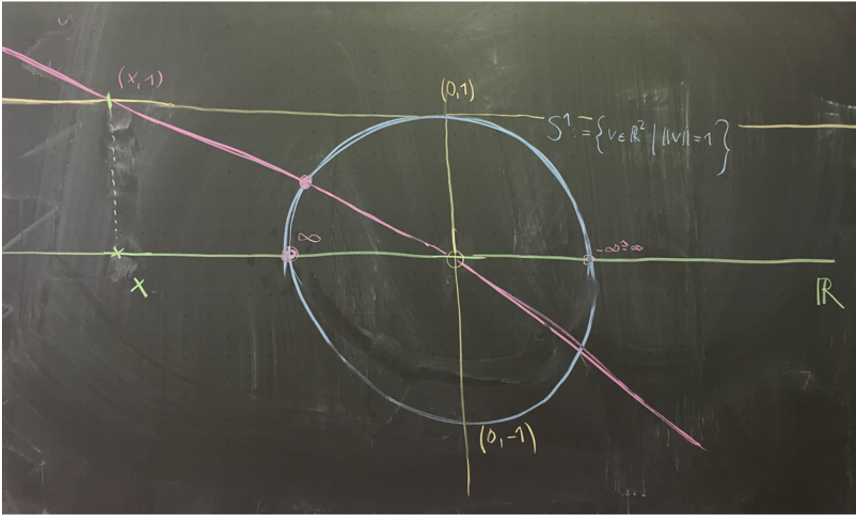
Orthogonale Projektion



Projektionen



Perspektive



Perspektive

Projektier Raum

Der projektive Raum ist definiert als

$$\mathbb{P}^3 := \mathbb{R}^4 - \{0\}/\sim$$

$$v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ für ein } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}\,.$$

Homogene Koordinaten

Wir haben die Abbildung

$$\mathbb{A}^3 \to \mathbb{P}^3$$
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und nennen das Bild eines Punktes unter dieser Abbildung die homogenen Koordinaten.

Homogene Koordinaten

Auf der Menge der homogenen Koordinaten haben wir die Umkehrabbildung

$$\mathbb{P}^3 - \left\{ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; p_4 = 0 \right\} \to \mathbb{A}^3$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{p_3}{p_4} \end{pmatrix} .$$

Ferne Punkte

Die Menge der Punkte $F_3 := \left\{ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \middle| \; p_4 = 0 \right\}$ heissen unendlich ferne Punkte.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} \cong \lim_{n\to\infty} n \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Identifikation der fernen Punkte

Es ist $F_3 \cong \mathbb{P}^2$

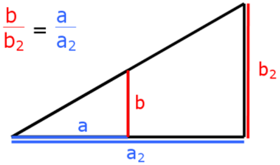
Perspektive

Zerlegung des projektiven Raumes

Der projektive Raum ist damit die Vereinigung des Affinen Raumes und den unendlich fernen Punkten. "Parallelen schneiden sich in den unendlich fernen Punkten". Es gilt also

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^3 &= \mathbb{A}^3 \cup F_3 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup F_2 \\
&= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \\
&= \mathbb{A}^3 \cup \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{S}^1
\end{aligned}
$$

Perspektive



Zentralprojektion

Die Matrizen

$$K_{persp_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}, K_{orth_{xy}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

realisieren die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur $X-Y$-Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz d in homogenen Koordinaten.

Zentralprojektion

Die Zentralprojektion auf die Ebene parallel zur $X-Y$-Ebene und Augenpunkt im Ursprung mit Augendistanz d durch die Hintereinanderausführung folgender Abbildungen darstellen:

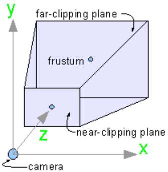
$$persp_{xy} : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2 \to \mathbb{A}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto K_{persp_{xy}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix}$$

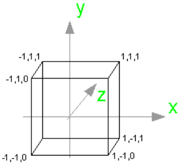
$$\mapsto K_{orth_{xy}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \end{pmatrix}$$

Clipping Koordinaten

$$P := \begin{pmatrix} \frac{n}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f-n}{f-n} & \frac{-2 \cdot f \cdot n}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$



Camera Space



Clipping Space

Perspektive

Projektive Abbildungen

Wir können mit der Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation eine affine Abbildung

$$\phi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$$
$$\phi(v) := A \cdot v + t$$

in homogenen Koordinate ausdrücken durch eine Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + t \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Projektive Abbildungen

MVP:= Model View Projection Matrix