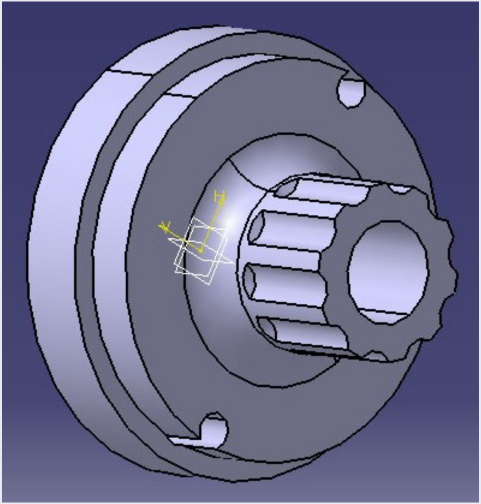
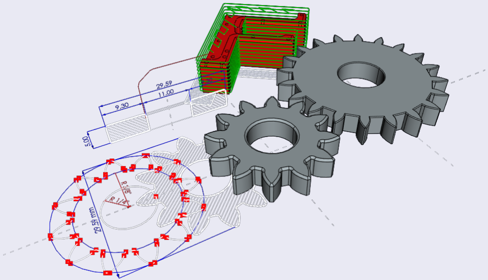
Computer Aided Design



CAD

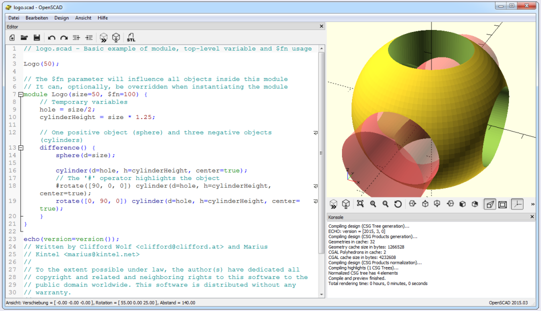
FreeCAD



Link

FreeCAD
FreeCAD Tutorials

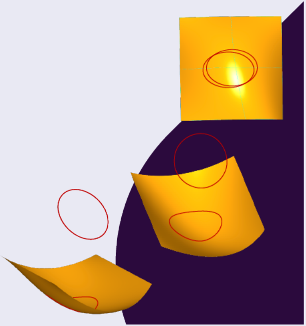
Openscad



Link

OpenSCAD

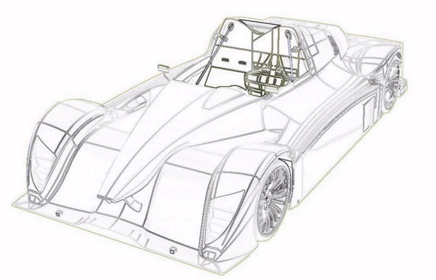
Modellierkern



Link

Modellierkern

BRB



Link

Begrenzungsflächenmodell (BRep)

Bernsteinpolynome

Die Bernsteinpolynome vom Grad n sind definiert als

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$$

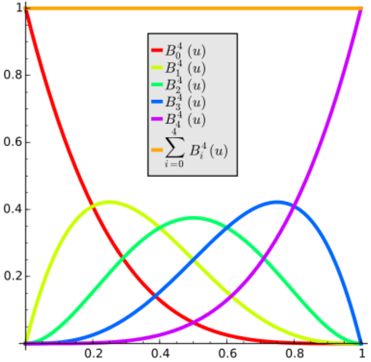
mit $i = 0, \ldots n$, $t \in [0,1]$ und dem Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{i(i-1)\cdots 1(n-i)(n-i-1)\cdots 1}\,.$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

Bezier Kurven und Flächen

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$



Bernsteinpolynome

Die Bernsteinpolynome vom Grad n bilden eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad n im Intervall $[0, 1]$.

Bernsteinpolynome

Es gilt die Rekursionsformel

$$B_i^n(t) = (1 - t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t)$$

mit $B_0^0(t) = 1$ und $B_n^i(t) = 0$ für $i < 0$ oder $i > n$.

Folgt fast direkt aus der Rekursionsformel des Binomialkoeffizienten.

Bernsteinpolynome

Seien $b_0, \ldots b_n \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt die Kurve

$$B^n(t) := \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot b_i \ , t \in [0,1]$$

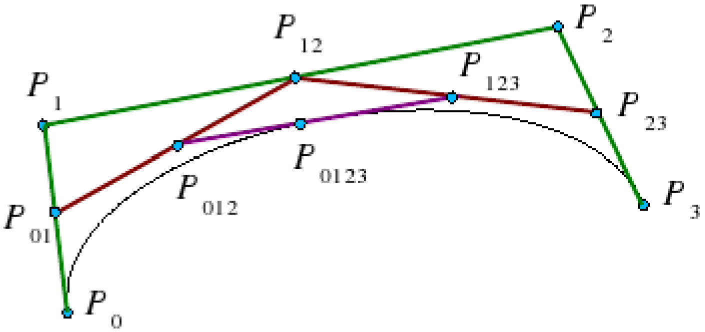
eine Bezierkurve vom Grad n. Die b_i werden auch Kontrollpunkte genannt. Für ein beliebiges Intervall $[a,b]$ definieren wir

$$B_{[a,b]}^n(t) := B^n\left(\frac{t-a}{a-b}\right) \ , t \in [a,b] \ .$$

Bernsteinpolynome

Eine Bezierkurve hat die Ableitung

- $(B^n)'(t) = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) \cdot (b_{j+1} - b_j)$, und nach der Kettenregel
- $(B^n_{[a,b]})'(t) = \frac{1}{b-a}(B^n)'\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$ für ein beliebiges Parameterintervall.



Sei $B^n(t) := \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \cdot b_i$ eine Bezierkurve. Für ein $t_0 \in [0,1]$ definieren wir rekursiv

$$b_i^k := \begin{cases} b_i & i = 0, \ldots, n \\ (1 - t_0) \cdot b_{i-1}^{k-1} + t_0 \cdot b_i^{k-1} & i = 1, \ldots, n \quad k = 1, \ldots, i \end{cases}$$

Bezier Kurven und Flächen

$$
\begin{tikzcd}
b_0 & = & b_0^0 \arrow[dr, "\cdot(1-t_0)"] & & & & \\
b_1 & = & b_1^0 \arrow[r, "\cdot t_0"] \arrow[dr, "\cdot(1-t_0)"] & b_1^1 \arrow[dr, "\cdot(1-t_0)"] & & & \\
b_2 & = & b_2^0 \arrow[r, "\cdot t_0"] & b_2^1 \arrow[r, "\cdot t_0"] & b_2^2 \arrow[ddr, dotted, no head] & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \\
b_{n-1} & = & b_{n-1}^0 \arrow[r, "\cdot t_0"] \arrow[dr, "\cdot(1-t_0)"] & b_{n-1}^1 \arrow[r, "\cdot t_0"] \arrow[dr, "\cdot(1-t_0)"] & b_{n-1}^2 \arrow[r, dotted, no head] & b_{n-1}^{n-1} \arrow[dr, "\cdot(1-t_0)"] & \\
b_n & = & b_n^0 \arrow[r, "\cdot t_0"] & b_n^1 \arrow[r, "\cdot t_0"] & b_n^2 \arrow[r, dotted, no head] & b_n^{n-1} \arrow[r, "\cdot t_0"] & b_n^n
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt $b_n^n = B^n(t_0)$.

Ersetzt man in einer Bezierkurve

$$B^m(v) := \sum_{j=0}^{m} B_j^m(v) \cdot b_j$$

vom Grad m die Kontrollpunkte b_j durch $m+1$ Bezierkurven

$$b_j(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) \cdot b_{ij}$$

vom Grad n mit jeweils $n+1$ Kontrollpunkten b_{ij} für $i = 0, \cdots, n$, so erhält man eine Fläche

$$F(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(u) B_j^m(v) \cdot b_{ij} \ ,$$

welche auch Tenorprodukt-Fläche der Bezierkurven oder einfach Bezierfläche genannt wird.