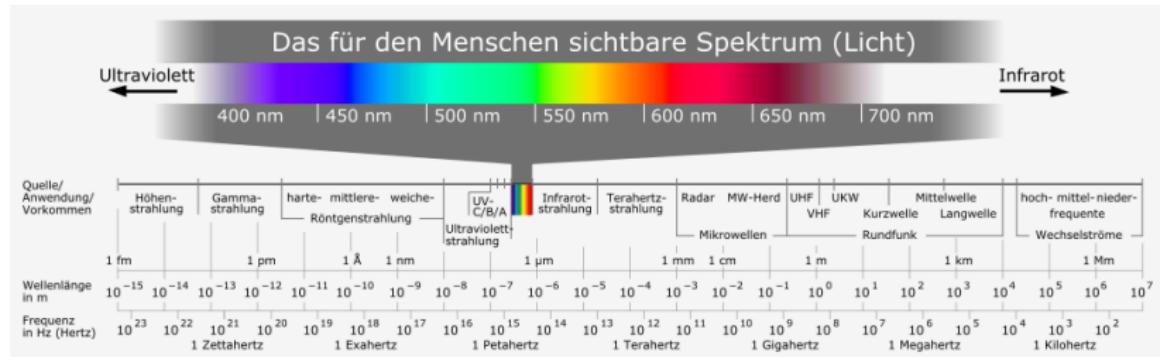


## Licht

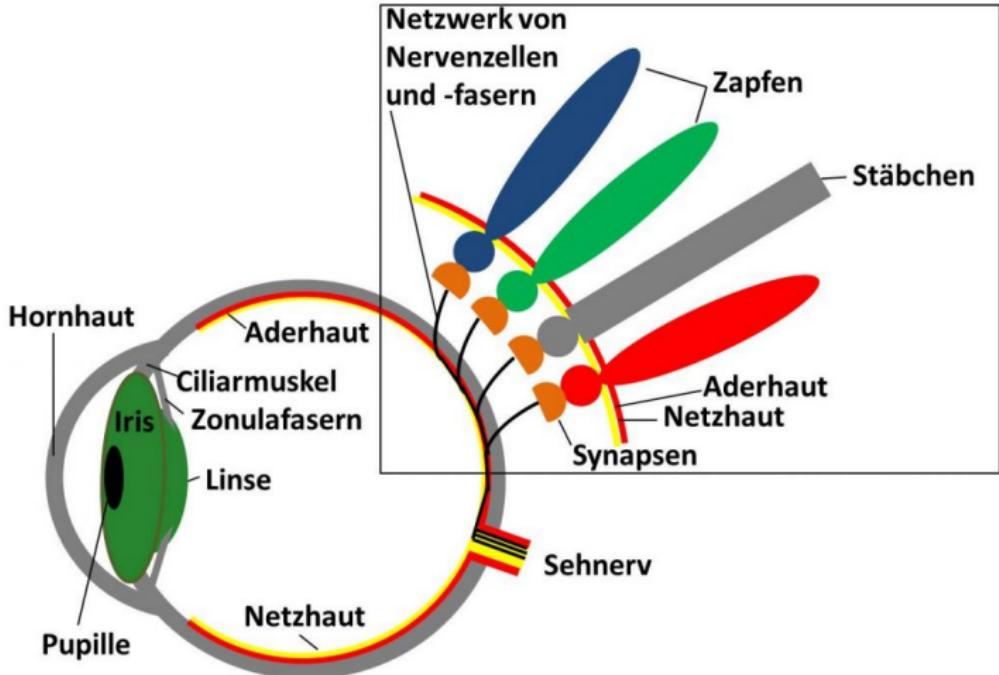


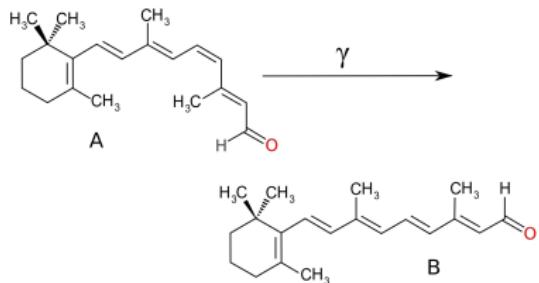
## Lichtmodelle



# Licht

Licht ist sowohl eine elektromagnetische Welle, als auch ein Teilchen, genannt Photon. Es breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c = 299792458\text{m/s}$  aus. Die Energie eines Photons ist durch  $E = h \cdot f$ , wobei  $h$  das konstante Planksche Wirkungsquantum und  $f$  die Frequenz der Welle ist.

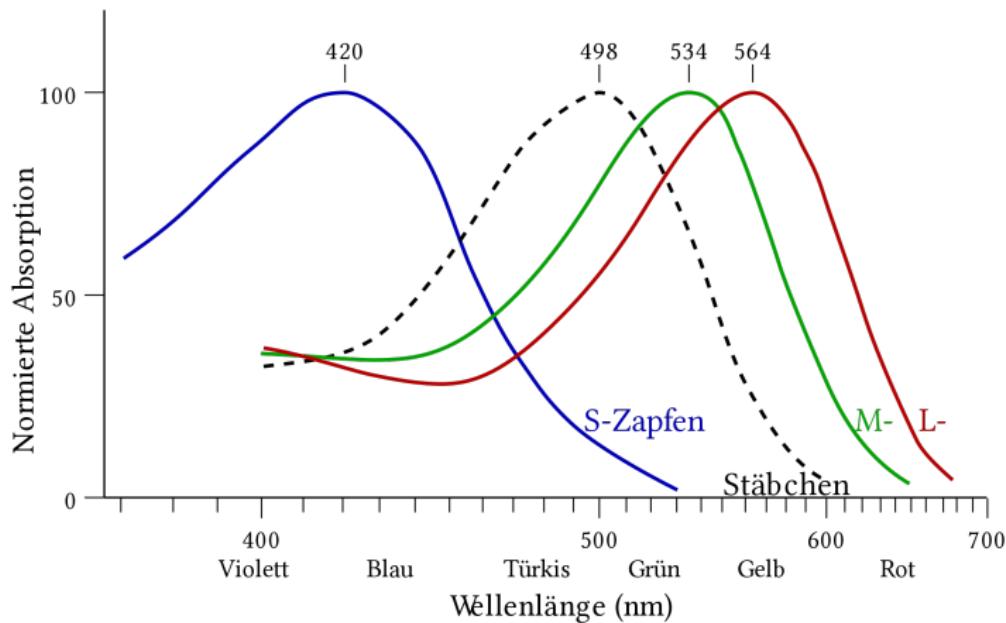




## Farbwahrnehmung

Trifft ein Photon mit passender Energie auf das Retinal-Molekül, so ändert es seine räumliche Struktur. Diese Strukturveränderung wird als primäre photochemische Reaktion bezeichnet. Sie dauert etwa  $2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$  und löst mehrere nachgeordnete Prozesse in der Sinneszelle aus, die das Signal erheblich verstärken und schließlich in einer Veränderung ihres Membranpotentials münden, welches dann eine nervliche Signalkette auslöst.

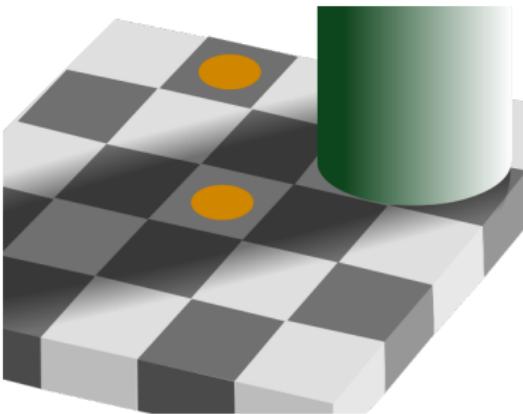
# Lichtmodelle



## Farbwahrnehmung

Das sichtbare Licht liegt zwischen 380 nm und 780 nm.

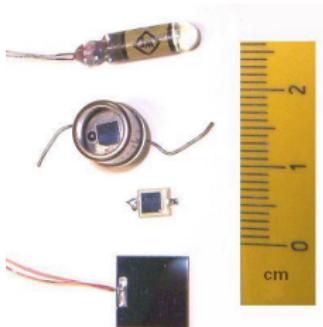




## Farbwahrnehmung

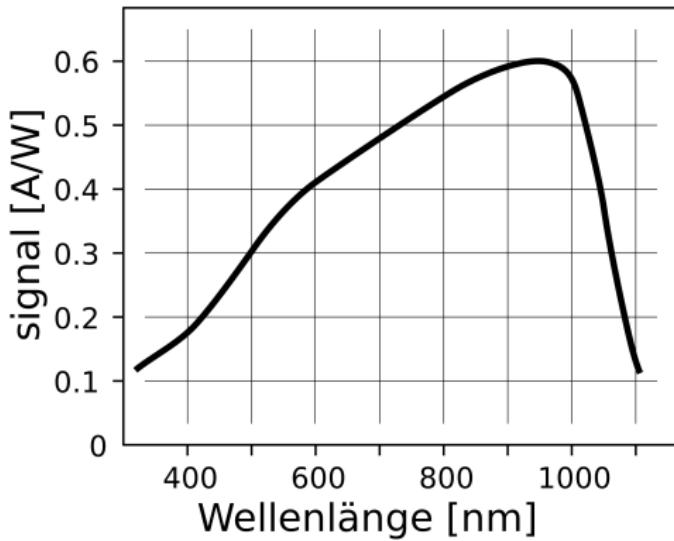
Farbwahrnehmung ist ein physiologisches Phänomen. Eine elektromagnetische Welle mit einer bestimmten Frequenz ist physikalisch eindeutig beschreibbar. Eine Farbe ist keine absolute physikalische Größe, sondern ein empfundener Sinnesreiz. Beispiel: Beide orangenen Kreise haben die gleiche physikalische Eigenschaft.

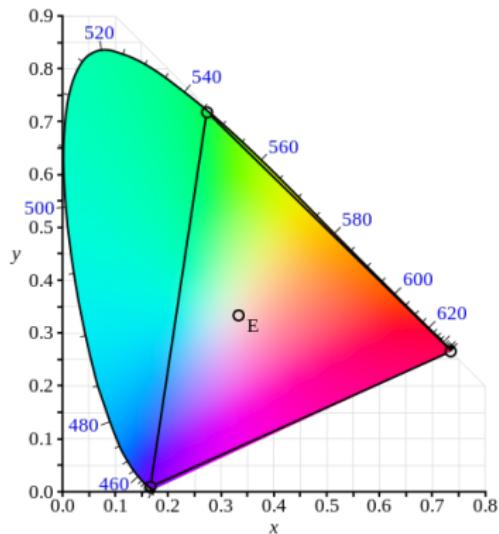




## Photodioden

Photodioden werden aus Elementhalbleitern hergestellt. Treffen Photonen ausreichender Energie auf das Material der Diode, so werden Ladungsträger (Elektron-Loch-Paare) erzeugt. In der Raumladungszone driften die Ladungsträger schnell entgegen der Diffusionsspannung in die gleichartig dotierten Zonen und führen zu einem Strom.

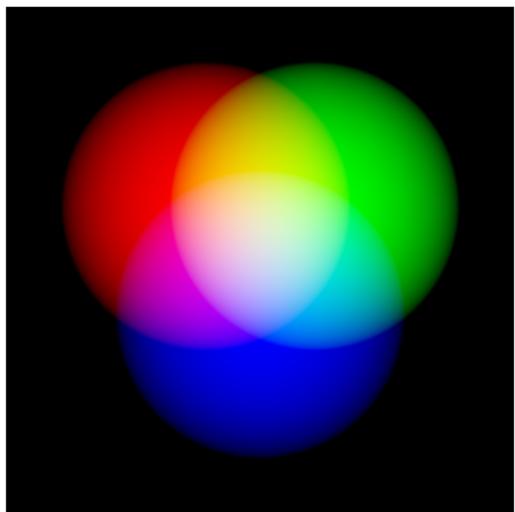




## CIE-Farbmodell

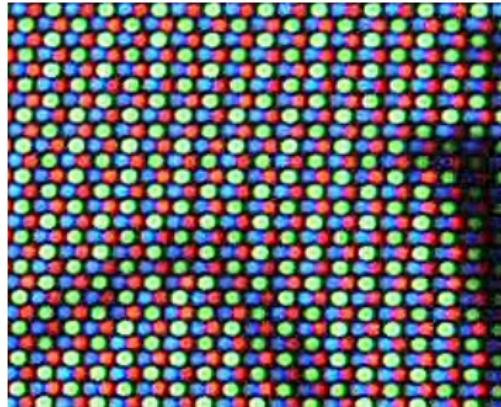
Mit CIE basierten Farbmodellen lassen sich beliebig genau alle Farben darstellen. Nicht praktikabel wegen vielen benötigten einzelnen Farben.





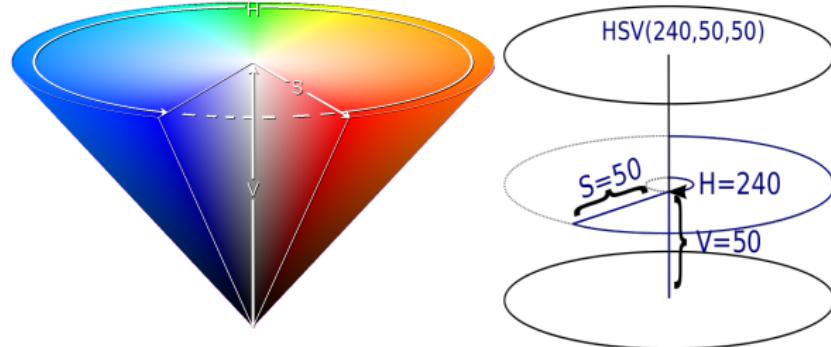
## RGB-Farbmodell

Man wählt feste Grundfrequenzen  $R$ ,  $G$  und  $B$ . Jede Farbe wird durch Angabe der Anteile dieser Frequenzen erzeugt.



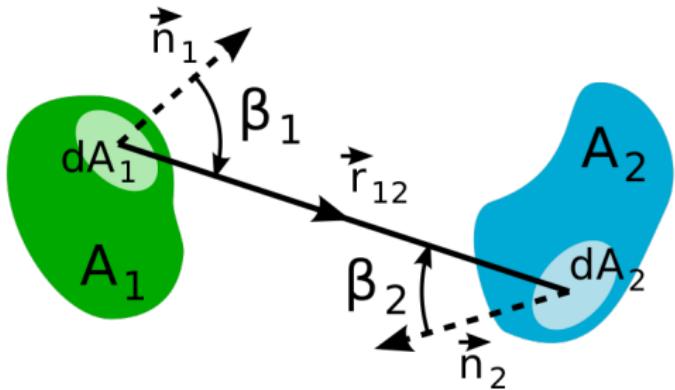
## RGB-Farbmodell

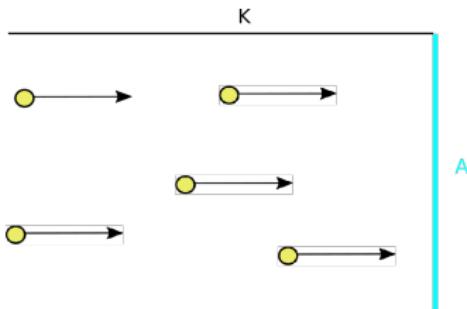
Besonders geeignet für Ausgabegeräte.



## HSV-Farbmodell

Farben werden aus diskreten Farbwerten (hue), Sättigungen (saturation) und Helligkeiten (value) zusammengesetzt.

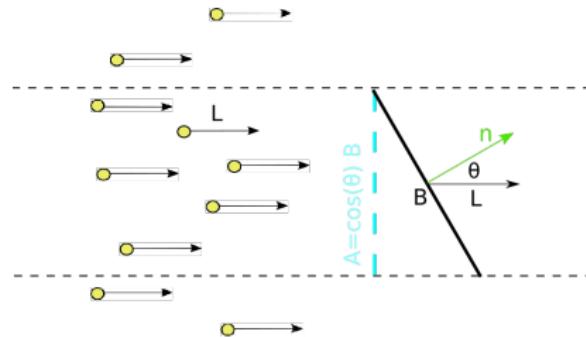




## Strahldichte

Durch einen Kanal  $K$  bewegen sich Teilchen mit gleichförmiger Geschwindigkeit  $L$  (Lichtgeschwindigkeit) und Dichte  $\eta$ . Die Anzahl der Teilchen  $N$ , die die Fläche  $A$  bezüglich eines Zeitintervall  $[0, t]$  passieren, ist gegeben durch

$$N_A([0, t]) := \eta * ||L|| * \text{Flächeninhalt}(A) * t \quad (1)$$



## Strahldichte

Betrachtet man die allgemeinere Situation eines Flächenstückes  $B$ , so ist die Anzahl gegeben durch

$$N_B([0, t]) := \eta * \|L\| * \cos(\theta) * \text{Flächeninhalt}(B) * t \quad (2)$$

## Strahldichte

Bezeichnen wir mit

$$L(B) = \frac{d}{dt \cdot \cos(\theta)} N_B([0, t]) = \eta * ||L|| * \text{Flächeninhalt}(B),$$

so erhalten wir die Strahldichte als Grenzwert

$$L(x, n) := \lim_{B \rightarrow x} L(B)$$

bei dem die Fläche  $B$  zu einem Punkt  $x$  zusammengezogen wird.  
Die Strahlungsleistung aus einer Richtung  $n$  am Punkt  $x$  berechnet sich demnach durch  $I(x, n) = L(x, n) \cdot \cos(\theta)$ , was auch als Lambertsches Cosinusgesetz bezeichnet wird.

## Strahlungsleistung

Die Strahlungsleistung  $\phi = \frac{dQ}{dt}$  ist die von einem Photonenstrom übertragenen Energie  $Q$  pro Zeit. Für monochromes Licht mit der Frequenz  $f$  und Teilchenstrom  $\frac{dN}{dt}$  ergibt sich mit obigen Überlegungen  $\phi = h \cdot \frac{dN}{dt} \cdot f$ .

## Fläche

Ein Fläche (Parametrisierung) ist eine Abbildung

$$s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

bei der die Abbildungen  $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Sie heißt differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} y(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} z(u, v) \end{pmatrix}$$

existieren.

## Tangentialraum

Die Ebene

$$T_s(u, v) := \{s(u, v) + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

heißt Tangentialebene am Punkt  $(u, v)$  und der Vektor

$$n(u, v) := \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v),$$

welcher Senkrecht auf dieser Ebene steht, die Normale.

## Oberflächenintegral

Das OberflächenIntegral ist definiert durch

$$\int_S d\omega := \int_U ||n(u, v)|| dU .$$

und analog

$$\int_S f d\omega := \int_U f(s(u, v)) \cdot ||n(u, v)|| dU .$$

für eine Funktion  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Man nennt  $d\omega$  beziehungsweise  $||n(u, v)||$  das infinitessimale Flächenelement.

## Fubini

Ist  $U = U_1 \times U_2 \in \mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_U f \, d(U_1 \times U_2) = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_2 dU_1 = \int_{U_1} \int_{U_2} f \, dU_1 dU_2 .$$

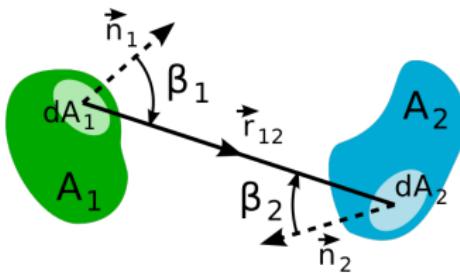
## Die Sphäre $S^2$

$$s : [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s(u, v) := \begin{pmatrix} \sin(u) \cos(v) \\ \sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} s(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \sin(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} s(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} s(u, v) \right\| = \sin(u)$$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} d\omega &= \int_{[0,\pi) \times [0,2\pi)} \sin(u) d(u \times v) = \int_{[0,2\pi)} \int_{[0,\pi)} \sin(u) du dv \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

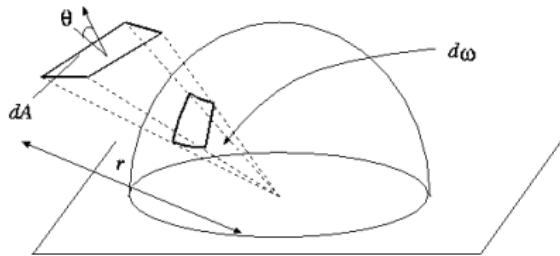


## Photometrisches Grundgesetz

Die Strahlungsleistung  $\phi := \frac{\partial Q}{\partial t}$ , die von einer abstrahlenden Fläche  $A_2$  auf eine Fläche  $A_1$  übertragen wird, berechnet sich durch

$$\phi = \int_{A_1} \int_{\pi_s(A_2)} L(x, \omega) \cdot \cos(\beta_1) d\omega dA_1 , \quad (3)$$

wobei  $\beta_1$  der Winkel zwischen der Flächennormale am Punkt  $x$  und der Richtung  $\omega$  ist und  $\pi_s(A_2)$  das sphärische Bild von  $A_2$  ist.



## Transformationsformel

$$d\omega = \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) dA, \quad \pi(x) := \frac{x}{\|x\|} \quad (4)$$

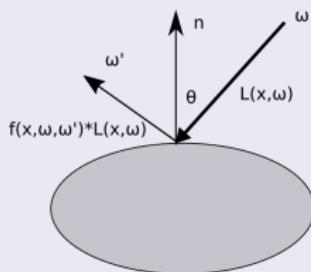
$$V(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{xy} \cap (A - \{x, y\}) = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_{\pi(A)} f \cdot d\omega = \int_A f \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos(\theta) \cdot V(a, 0) dA, \quad (6)$$

## Reflektionsgesetz

$$\underbrace{L_r(x, \omega_r)}_{\text{Reflektierte Strahlung in Richtungen } \omega_r} = \int_{H^2} \underbrace{f_r(x, \omega, \omega_r)}_{\text{Reflektionseigenschaft des Materials}} \cdot \underbrace{L_i(x, \omega) \cdot \cos(\theta)}_{\text{Eingehende Strahlung aus Richtung } \omega} d\omega$$

Summation über alle eingehenden Richtungen  $\omega$

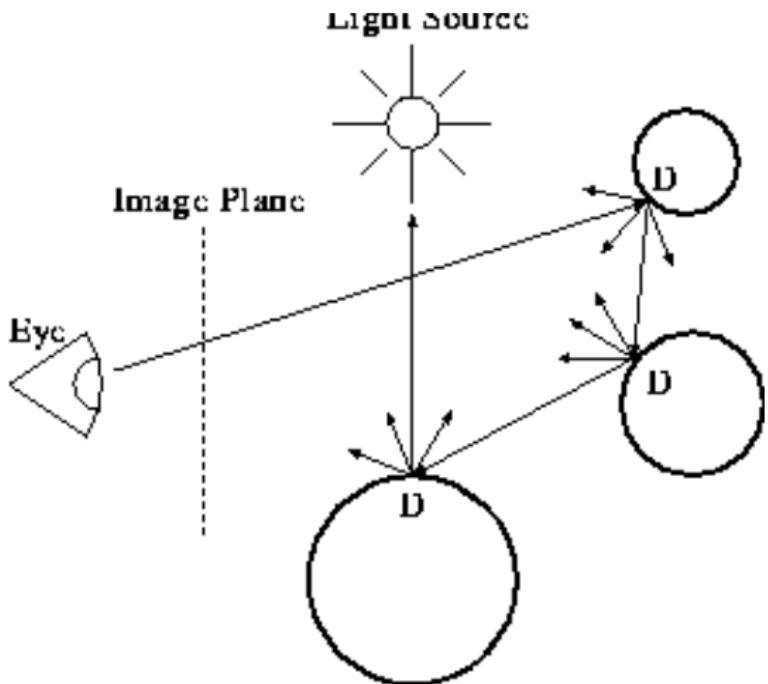


## Rendergleichung

$$L_o(x, \omega_o) = L_e(x, \omega_o) + \int_{H^2} f_r(x, \omega, \omega_0) \cdot L_i(x, \omega) \cdot \cos(\theta) d\omega , \quad (7)$$

Ausgehend (**out**) = Emission (**emission**) + Reflektion

# Raytracing



## Rendergleichung 2-te Form

$\Omega$  Menge aller Flächen in der Szene.

$$V(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{xy} \cap (\Omega - \{x, y\}) = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$L_i(x, \omega_y) = V(x, y) \cdot L_o(y, \omega_x) \text{ (Energieerhaltung)}$$

$$d\omega = \frac{1}{||x - y||^2} \cdot \cos(\theta_y) dA_y$$

$$G(x, y) := V(x, y) \frac{\cos(\theta_x) \cdot \cos(\theta_y)}{||x - y||^2}$$

$$L_o(x, \omega_o) = L_e(x, \omega_o) + \int_{\Omega} f_r(x, \overline{xy}, \omega_o) \cdot L_o(y, \overline{xy}) \cdot G(x, y) \cdot dA_y .$$

## Pfadformulierung

$$(T \circ L)(x, \omega) := \int_{H^2} f_r(x, \omega, \omega_0) \cdot L(x, \omega) \cdot \cos(\theta) d\omega ,$$

$$L_e = (id - T) \circ L .$$

$$L = (id - T)^{-1} \circ L_e$$

$$(id - T)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} T^i .$$

## Wahrscheinlichkeitsraum

- Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  deren Teilmengen Ereignisse genannt werden.
- Funktion  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int_{\Omega} \rho(\omega) d\omega = 1$  welche auch Wahrscheinlichkeitsdichte genannt wird.
- Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wird Zufallsvariable genannt.

Ist  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable, dann heißt

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) \cdot \rho(\omega) d\omega \quad (8)$$

Erwartungswert.

## Gesetz der großen Zahlen

Ist  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$  und  $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  eine Stichprobe für  $\rho$ , so gilt:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X(\omega_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X] \text{ (in Wahrscheinlichkeit)} \quad (9)$$

## Stochastische Integration

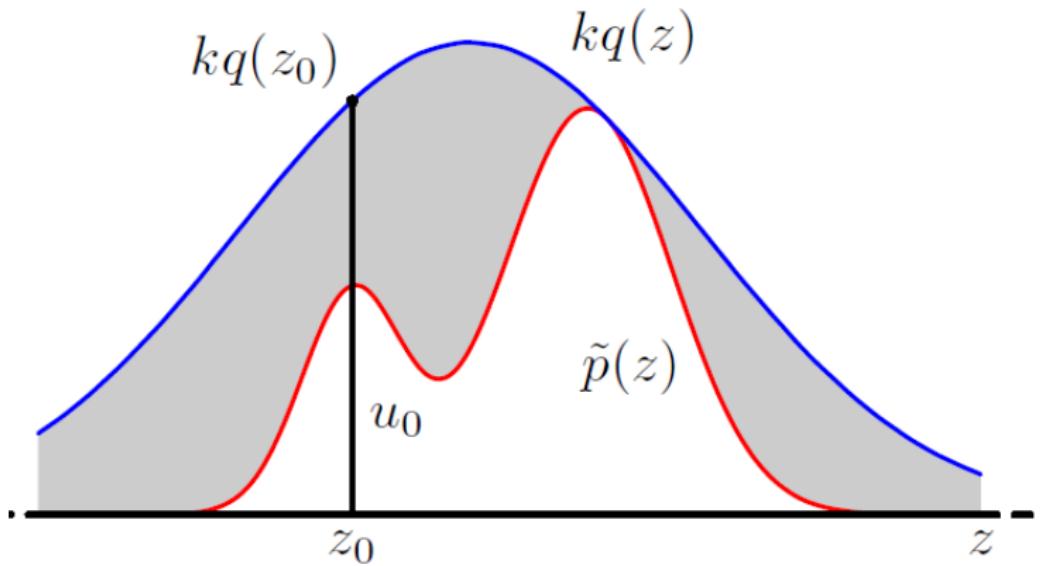
Ist  $f : S \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so gilt für eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$  und eine Stichprobe  $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \frac{f(\omega_i)}{\rho(\omega_i)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\omega) d\omega \text{ (in Wahrscheinlichkeit).} \quad (10)$$

## Stochastische Integration

Das Problem der Integration reduziert sich im Wesentlichen darauf viele Stichproben  $\omega$  aus einer komplizierten Verteilung  $\rho$  zu ziehen.

# Rejectionsampling



## Pathtracing

Die Anwendung der Monte Carlo Integration auf die Pfadformulierung der Rendergleichung wird Pathtracing genannt.

Wenige und viele samples im Vergleich

