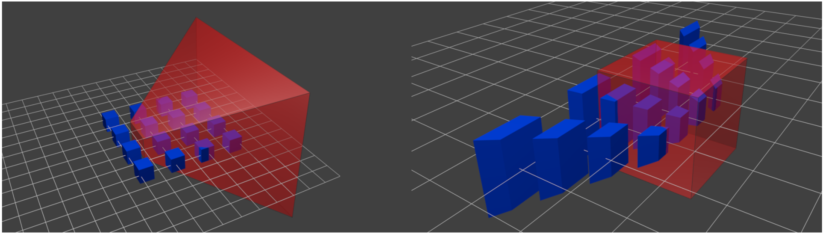
Computergrafik

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Perspektive



Basis

Sind b_1, b_2, b_3 linear unabhängig, dann heisst das Tupel $B = (b_1, b_2, b_3)$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

Basisdarstellung

Für $v \in \mathbb{R}^3$ heisst

$$\theta_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\theta_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 = v$$

Darstellung von v bezüglich der Basis B.

Basiswechsel

Basiswechsel berechnen

$$\theta_B(v) = M_B \cdot v, \quad M_B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^{-1} \text{(column major)}$$

Basiswechsel

Seien $B := (b_1, b_2, b_3)$ und $B' := (b'_1, b'_2, b'_3)$ zwei Basen des $\mathbb{R}^3$. Dann heißt $M_B^{B'} := M_{B'} \cdot M_B^{-1}$ die Basiswechselmatrix von B nach B'. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[d, "I_n"] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "M_B^{-1}"'] \arrow[d, "M_B^{B'}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "M_{B'}"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Skalarprodukt

Skalarproduktt

$\langle v, w\rangle := v^t \cdot w = \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot w_i$
Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ heißen orthogonal, falls $< u, v >= 0$ ist.

Norm

$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle} := v^t \cdot v = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$
Ein Vektor v heißt normal, falls $||v|| = 1$ ist. Ist w ein beliebiger Vektor, so heißt $\frac{1}{||w||}w$ die Normalisierung von w, denn er ist normal.

Satz

Für den von zwei Vektoren u, v eingeschlossenen Winkel φ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}$$

Kreuzprodukt

Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$u \times v := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von u und v. Es gilt

- $< u \times v, u >=< u \times v, v >= 0$
- $u \times v = -(v \times u)$
- $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Orthonormalbasis

Orthonormalbasis

Eine Basis $B := (b_1, b_2, b_3)$ heißt Orthonormalbasis (kurz ONB), falls

$$< b_i, b_j >= \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt. Insbesondere sind alle b_i normal.

Orthonormalbasis

Basis-Wechsel-Matrix

Ist $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine ONB, so gilt

$$M_B^{-1} = M_B^t$$

Drehungen

Eine Matrix $O \in \mathbb{M}^{n\times n}$ heißt orthogonal, falls $O^{-1} = O^t$ ist. Sie ist genau dann orthogonal, falls

$$\det(O) \in \{-1, 1\} \, .$$

Ist $\det(O) = 1$, so nennen wir O eine Drehung und $SO(n) := \{O \in \mathbb{M}^{n\times n} | \det(O) = 1\}$ die Drehgruppe (oder auch spezielle orthogonale Gruppe).

Orthonormalbasis

Basis-Wechsel-Matrix

Sei $O \in \mathbb{M}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$< O \cdot v \ , \ O \cdot w >=< v \ , \ w >$$

und somit insbesondere

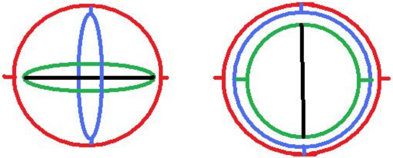
$$||O \cdot v|| = ||v|| \ .$$

Eulerwinkel

Jede Drehung $O \in SO(3)$ lässt sich zerlegen in ein Produkt

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \pm\sin(\phi) \\ 0 & \mp\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\xi) & \sin(\xi) & 0 \\ -\sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Winkel ϕ, ψ, ξ heißen Eulerwinkel.



Eulerwinkel

Die Zerlegung $O \in SO(3)$ einer Drehung in obiges Produkt ist nicht eindeutig. Ein anschauliches Beispiel dafür liefert der sogenannte "Gimbal lock". $SO(3)$ ist also nicht das Produkt von drei Intervallen sondern es ist $SO(3) = S^3/\{\pm 1\}$.

Affiner Raum

Der Affine Raum $\mathbb{A}^3$ ist ein Tupel $\left(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, +, \cdot)\right)$ zusammen mit den Abbildung

$$
\begin{aligned}
\overline{} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\
\overline{PQ} &:= Q - P
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
+ : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^3, +, \cdot) &\to \mathbb{R}^3 \\
\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_3 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_1 + v_1 \\ \vdots \\ P_3 + v_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Affiner Raum

Affiner Raum

Die Elemente (Vektoren) aus $\mathbb{R}^3$ nennt man auch Punkte in Abgrenzung zu den Vektoren aus $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Für Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ ist also $\overline{PQ}$ ein Vektor, auch Verbindungsvektor genannt.

Affiner Raum

Affine basis

Ist $B := (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ und $P \in \mathbb{A}$ ein Punkt, so nennen wir das Tupel (P, B) eine affine Basis. Für jeden Punkt Q gibt es dann also Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$Q = P + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \cdot b_i \ .$$

Der Punkt $\theta_{(P,B)}(Q) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ heißt die Darstellung von Q bezüglich der affinen Basis (P, B).

Affiner Raum

Affine Abbildung

Abbildungen der Form

$$\phi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$$
$$\phi(P) := A \cdot P + t$$

mit $A \in M^{3\times 3}$ und $t \in (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ heißen affine Abbildungen. Insbesondere heißt eine affine Abbildung mit $A = I_3$ und $t \neq 0$ Translation.

Abstand

Der Abstand von $P, Q \in \mathbb{A}$ ist definiert durch

$$d : \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3 \to \mathbb{R}$$
$$d(P, Q) := ||\overline{PQ}|| \, .$$

Affiner Basiswechsel

Sind $(P, B := \{b_1, \dots, b_n\})$ und $(P', B' := \{b'_1, \dots, b'_n\})$ zwei affine Basen und definieren wir die Abbildung

$$\theta_{(P,B)} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$
$$\theta_{(P,B)}(Q) := M_B \cdot Q - M_B \cdot P = M_B(Q - P),$$

so erhalten wir analog zu der Situation in Vektorräumen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbb{A}^n \arrow[l, "\theta^{-1}_{(P,B)}"'] \arrow[d, "\theta^{(P',B')}_{(P,B)}"] \\
\mathbb{A}^n \arrow[r, "\theta_{(P',B')}"] & \mathbb{A}^n
\end{tikzcd}$$

mit $\theta^{(P',B')}_{(P,B)}(Q) := \theta_{(P',B')}\left(\theta^{-1}_{(P,B)}(Q)\right)$.