Digitale Bildverarbeitung

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Integral

Sei $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine (meßbare) Teilmenge und $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ eine (meßbare, integrierbare) Funktion. Dann können wir das Integral definieren durch

$$\int_A f \; d(x,y) \; := \int_{A_x} \left(\int_{A_y} f(x,y) \; dx \right) \; dy$$

mit den Scheibenmengen $A_y := \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$ und $A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid A = \bigcup_y A_y\}$

Integration

Integral

Induktiv definieren wir dann für eine Funktion $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Integral durch

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

Volumen

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir das Volumen durch

$$\mu(A) := \int_A 1 \, dx$$

Beispiel

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Kreisscheibe).
$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$A_y = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$

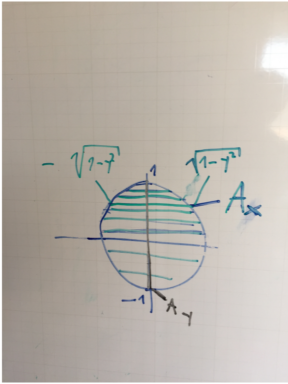

Figure: Scheibenmengen

Integration

Beispiel

$$\mu(A) = \int_A 1 \; d(x,y) \; := \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 \; dx \right) \; dy$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} \; dy$$

$$(substitution \; y = sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 \; du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Histogramm

Für ein diskretes Bild $U : \Omega \to R$ beziehungsweise für ein kontinuierliches Bild $u : \Omega \to R$ definieren wir das Histogramm

$$\begin{aligned} H_U(k) &:= \#\{i \in \Omega | U_i = k\} \\ H_u(E) &:= \mu(\{x \in \Omega | u(x) \in E\}),\ E \subset R \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion

Ebenso definieren wir die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} G_U(s) &:= \#\{i \in \Omega | u_i \leq s\} \\ G_u(s) &:= \mu(\{x \in \Omega | u(x) \leq s\}) \end{aligned}$$

Bemerkung

Für $R = [0,1]$ ist $H_u([0,1]) = \mu(\Omega)$

Histogrammausgleich

Ein Bild mit viel Kontrast hat Grauwerte im gesamten Bereich $R = [0, 1]$. Man ist daher daran interessiert, Abbildungen des Bildes zu finden, so dass das Histogramm des abgebildeten Bildes möglichst gleichmässig verteilt ist.

Einfacher Histogrammausgleich

die Abbildung

$$\phi : [0, 1] \to [0, 1]$$
$$\phi(s) = \frac{s - inf(u)}{sup(u) - inf(u)}$$

spreizt das Histogramm des Bildes auf den gesamten Bereich $[0, 1]$ und erhöht daher insgesamt den Kontrast.

Punktoperationen

Histogrammausgleich

Wir suchen eine monotone Abbildung $\psi : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} &H_{\psi \circ u}([a,b]) = (b-a)\mu(\Omega) \\ \Leftrightarrow &G_{\psi \circ u}(s) = s\mu(\Omega) \end{aligned}$$

Histogrammausgleich

Nehmen wir an, dass ψ invertierter ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} s\mu(\Omega) &= \mu(\{x \in \Omega | \psi(u(x)) \leq s\}) \\ &= \mu(\{x \in \Omega | u(x) \leq \psi^{-1}(s)\}) \\ &= G_u(\psi^{-1}(s)) \end{aligned}$$

und damit $\psi^{-1}(s) = G_u^{-1}(s\mu(\Omega))$ und also $\psi(s) = \frac{G_u(s)}{\mu(\Omega)}$.

Integration

Faltung

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x) \cdot g(y)\, dy \tag{1}$$

Beispiel 1

Link: Box

Beispiel 2

Link: Gauß

Diskrete Faltung

Für zwei diskrete Funktionen $U : [1, \ldots, N] \to R$ und $H : [1, \ldots, N] \to R$ mit stückweisen konstanten Interpolation $u(x) := \sum_{l=1}^{N} U_l \phi_j^0(x)$ und $h(x) := \sum_{m=1}^{N} H_m \phi_m^0(x)$ ergibt die Faltung

$$
\begin{aligned}
(h * u)(k) &= \int u(y) h(k-y)\, dy \\
&= \int \sum_{l=1}^{N} U_l \phi^0(y-l) \sum_{m=1}^{N} H_m \phi^0(k-y-m) \\
&= \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} U_l H_m \int \phi^0(y-l) \phi^0(k-y-m)\, dy
\end{aligned}
$$

Diskrete Faltung

Diskrete Faltung

Da für das Integral

$$\int \phi^0(y-l)\phi^0(k-y-m)\,dy = \begin{cases} 1 \text{ falls } m = k-l \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt, folgt die Darstellung

$$(u * h)(k) = \sum_l U_l H_{k-l}$$