Digitale Bildverarbeitung

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

2 dimensionale Filtermasken

Für ein diskretes Bild $U : Z^2 \to R$ und eine Filtermaske

$$H := \begin{bmatrix} H_{-r,-s} & \cdots & H_{-r,s} \\ \vdots & H_{0,0} & \vdots \\ H_{r,-s} & \cdots & H_{r,s} \end{bmatrix}$$

ist die Faltung in Anlehnung an den 1 dimensionalen Fall definiert durch

$$(U * H)_{i,j} := \sum_{k=-r}^{r} \sum_{l=-s}^{s} H_{k,l} U_{i+k,j+l}$$

Fortsetzung am Bildrand

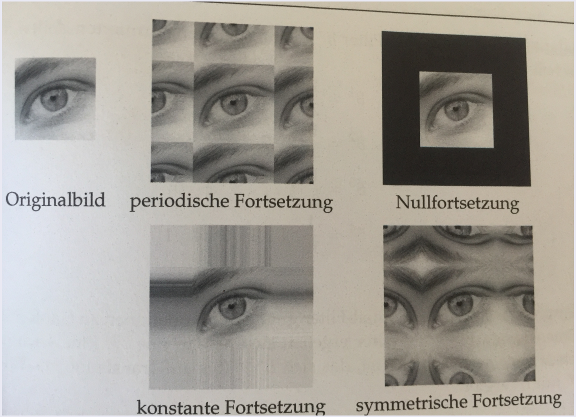

Figure: Quelle: Mathematische Bildverarbeitung; Breies, Lorenz

Fortsetzung am Bildrand

Periodische Fortsetzung $\tilde{U}_i = U_{i \bmod N}$

Nullfortsetzung $\tilde{U}_i = U_i$ für $0 \leq i \leq N$; 0 sonst

Konstante Fortsetzung $\tilde{U}_i = U_{P_N(i)}$; $P_N(i) = max(min(N-1, i), 0)$

Symmetrische Fortsetzung (spiegeln + periodisch)

$\tilde{U}_i = U_{Z_N(i \bmod 2N)}$; $Z_N(i) = min(i, 2N - 1 - i)$

Schachtelung von Filtermasken

$$(U * H) * G = U * (H \cdot G)$$

Gleitendes Mittel

Das gleitende Mittel ist definiert durch

$$(M^n)^t \cdot M^n$$

mit $M^n = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & \dots 1\end{bmatrix}$.

Gauß-Filter

Der Gauß-Filter G^σ mit Varianz $\sigma > 0$ ist definiert durch

$$\hat{G}^\sigma{}_{k,l} = \exp\left(\frac{-(k^2 + l^2)}{2\sigma^2}\right), \; G^\sigma = \frac{\hat{G}^\sigma}{\sum_{k,l} \hat{G}^\sigma{}_{k,l}}$$

Binomial-Filter

Der Binomial-Filter B^n ist definiert durch $(B^n)^t \cdot B^n$ mit $B^n := \frac{1}{2^n}P(n)$, wobei $P(n)$ die n-te Reihe des Pascalschen Dreiecks ist.

$$
\begin{aligned}
B^1 &:= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\\
B^2 &:= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\\
B^3 &:= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\\
B^4 &:= \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Differenzenquoienten

Wir approximieren eine eindimensionale Ableitung durch Differenzenquotient

$$\text{(Vorwärts) } f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\text{(Rückwärts) } f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$
$$\text{(Zentral) } f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Lineare Filter

Partielle Ableitungen

$$D_x^+ := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};\; D_x^- := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};\; D_x := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_y^+ := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\; D_y^- := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\; D_y := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prewitt Filter

Der Prewitt Filter ist die Kombination einer partiellen Ableitung mit einer Mittelung

$$P_x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_y = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Sobel Filter

Der Sobel Filter ist die Kombination einer partiellen Ableitung mit einem Gauß-Filter

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Laplace Filter

Die zweite Ableitung lässt sich mit einem Vorwärts- und einem Rückwärts-Differenzenquotient approximieren und man erhält damit $D_{x^2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ und $D_{y^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Der Laplace Filter ist analog zum Laplace-Operator definiert durch

$$\triangle = D_{x^2} + D_{y^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$