Digitale Bildverarbeitung

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Fourier-Reihe

Für eine 2π periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

$$Sf_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \cdot e^{ikx}$$

die Fourier-Reihe von f vom Grad n mit den den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) \cdot e^{-ikt}\, dt$$

Fourier-Reihe

Ist f 2π-periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe gleichmässig gegen f, es gilt dann also

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x} |Sf_n(x) - f(x)| = 0$$

Fourier-Reihe - Interpretation

Es ist $e^{-ikt} := \cos(kt) + i\sin(kt)$ und

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e^{-ilt} \cdot e^{-ikt}\, dt = \begin{cases} 1 \text{ für k} = \text{l} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen e^{-ikt} bilden bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(t)\cdot g(t)\, dt$ eine orthonormalbasis der 2π-periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen.

Fourier-Reihe einer rellen Funktion

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, so gilt

$$Sf_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

mit den Koeffizienten

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx$$
$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\ dx$$

Beweisidee

Ersetze $e^{-ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$ und setze $a_k := \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$ und $b_k := i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))$.

Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} h, & \text{wenn } 0 \leq t < T/2 \\ -h, & \text{wenn } T/2 \leq t < T \end{cases} \qquad f(t+T) = f(t)$$

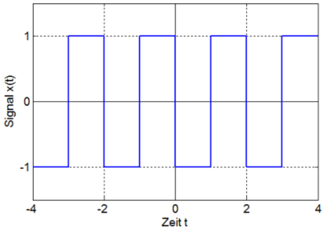

Figure: Quelle: Wikipedia

Beispiel

$$Sf(t) = \frac{4h}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \cdots\right]$$
$$= \frac{4h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)\omega t\right)}{2k-1}$$
$$\omega = 2\pi \cdot f$$

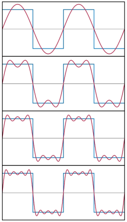

Figure: Quelle: Wikipedia

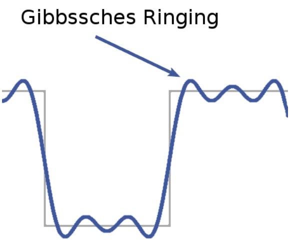

Figure: Quelle: Wikipedia

Fouriertransformation

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte ist definiert durch

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i<y,x>}\, dx,$$

(Verallgemeinerung der Fourierkoeffizienten für nicht ganzzahlige Frequenzanteile).

Schnelle Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte lässt sich approximativ und effizient auf dem Computer berechnen: LINK!

Umkehrsatz

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\hat{f}$ integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{i<x,y>}\, dy,$$

fast überall.

Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Fouriertransformierte $\hat{f}$ außerhalb des intervals $(-b, b)$ verschwindet (bandbeschränkt), kann für jedes $T < \frac{\pi}{b}$ aus ihren Werten $f(kT),\ k \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden, denn es gilt:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot sinc\left(\frac{\pi}{T}(x - kT)\right)$$

$$sinc(x) := \frac{\sin x}{x}$$

Beweisidee

Die Fouriertransformierte ist periodisch fortsetzbar, da bandbeschränkt. Daher existiert die Fourierreihe der Fouriertransformierten. Der Umkehrsatz angewendet auf diese Reihe liefert das Ergebnis.

Abtastrate

Ein bandbeschränktes Signal mit höchster Frequenz $f = 2\pi b$, kann mit einer Abtastrate von mindestens $\frac{1}{2f}$ vollständig rekonstruiert werden.

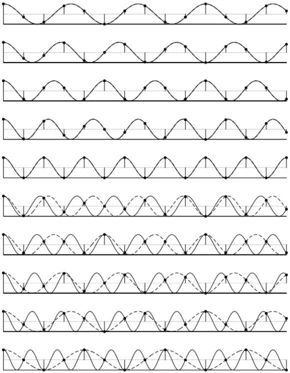

Figure: Quelle: Wikipedia

Frequenz- und Skalenraummethoden

Alias Effekt

Ist die Abtastfrequenz zu niedrig, kommt es zum sogenannten Alias Effekt.

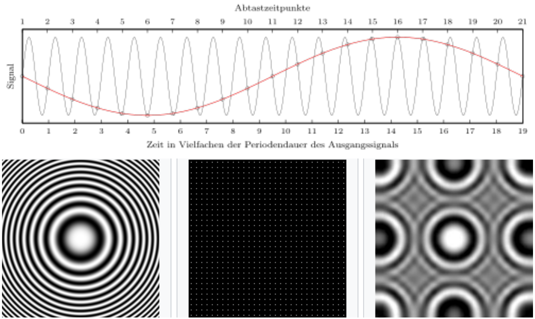

Figure: Quelle: Wikipedia

Frequenz-Filter

Gegeben ist eine Funktion f und eine Filter-Funktion g. Die mit g gefilterte Funktion erhält man durch Rücktransformationen der mit g Multiplizierten Fouriertransformierten Funktion

$$f_g := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \hat{f}(y)\, e^{i<x,y>}\, dy,$$