

### Maßraum

Ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist ein Tupel bestehend aus der Grundmenge  $\Omega$  und einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

### Maß

Ein Maß auf einem Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

### Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein Maß mit  $\mu(\Omega) = 1$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

### Meßbare Abbildung

Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  zwischen zwei Maßräumen  $(\Omega, \mathcal{A})$  und  $(\Omega', \mathcal{A}')$  heißt meßbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

### Meßbare Abbildung

Das Urbild jedes Ereignisses ist ein Ereignis

### Beispiel

Bei endlichen Mengen und Potenzmenge als Sigma-Algebra ist jede Funktion Meßbar. Jede stetige Funktion ist meßbar bezüglich Borellscher Sigma-Algebra.

### Konvention

Ab jetzt steht  $\mathbb{R}^n$  immer für den Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ , wobei  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  die Borellsche Sigma-Algebra und  $\mu$  das Lebesgue Maß ist.

### Eindeutigkeit

Später wichtig: Das Lebesgue Maß ist durch seine Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Die Menge der meßbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}$ . Mit  $\mathcal{M}^+$  bezeichnen wir die meßbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(\omega) \geq 0$ .

## Treppenfunktion

Eine meßbare Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

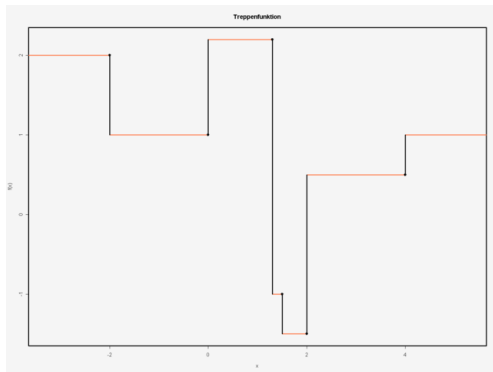


Figure: Quelle: Wikipedia:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png>

## Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

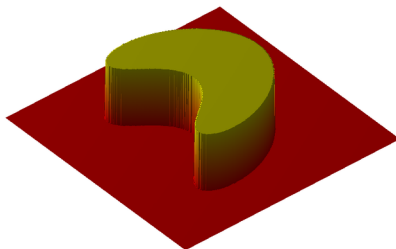


Figure: Quelle: Wikipedia:

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indicator\\_function\\_illustration.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indicator_function_illustration.png)

## Darstellung von Treppenfunktion

Eine Treppenfunktion hat eine Darstellung  $u = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

## Treppenfunktion

Die Menge der Treppenfunktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}$  und die Treppenfunktionen mit  $a_i > 0$  mit  $\mathcal{T}^+$ .

## Eindeutigkeit der Darstellung

Sind  $u = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$  zwei verschiedene Darstellungen einer Treppenfunktion  $u \in \mathcal{T}^+$  so ist  $\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j)$

## Integral einer Treppenfunktion

Für eine Treppenfunktion  $u \in \mathcal{T}^+$  definieren wir

$$\int_{\Omega} u = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

Diese ist unabhängig von der Darstellung.



## Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Sind  $u$  und  $v$  zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

- $\int_{\Omega} 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_{\Omega} \alpha u + \beta v d\mu = \alpha \int_{\Omega} u d\mu + \beta \int_{\Omega} v d\mu$
- Ist  $u(x) \leq v(x)$  für alle  $x$ , so ist  $\int_{\Omega} u d\mu \leq \int_{\Omega} v d\mu$

## Meßbare Abbildungen

Eine nicht negative Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge  $u_n \in \mathcal{T}^+$  gibt mit  $u_n \uparrow f$ .

Sei  $u_n \in \mathcal{T}^+$ :

Müssen zeigen, dass Grenzwert auch in  $\mathcal{T}^+$  liegt. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass der Limes ein inf-sup ist und dieser Vereinigung von meßbaren Mengen ist.

Sei nun umgekehrt  $f \in \mathcal{M}^+$  meßbar:  
definiere

$$A_{j,n} := \begin{cases} \{ \frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n} \} & \text{für } j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{ f \geq n \} & \text{für } j = n \cdot 2^n \end{cases}$$

und damit

$$u_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} 1_{A_{j,n}}$$

Damit gilt  $u_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x) + 2^{-n}$ .

## Integral nicht negativer meßbarer Funktionen

Für eine Funktion  $f \in \mathcal{M}^+$  definieren wir

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \, d\mu$$

wobei  $u_n \in \mathcal{T}^+$  eine Folge von Treppenfunktionen ist mit  $u_n \uparrow f$ .

!!

Müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig ist von der Treppenfunktion.

Für jede wachsende Folge  $(u_n) \in \mathcal{T}^+$  und jedes  $v \in \mathcal{T}^+$  mit  $v \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  gilt

$$\int_{\Omega} v \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \, d\mu$$

Sei  $v = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}$ . Für festes  $\beta > 1$  setze  $B_n := \{\beta u_n \geq v\}$ .  
Damit gilt  $B_n \uparrow \Omega$  und  $\beta u_n \geq v \cdot 1_{B_n}$  und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \, d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v \cdot 1_{B_n} \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \int_{\Omega} u_n \, d\mu = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \, d\mu \end{aligned}$$

Mit  $\beta \rightarrow 1$  folgt die Behauptung.

Sind nun  $u_n, v_n \in \mathcal{T}^+$  zwei wachsende Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  so gilt  $\int_{\Omega} v_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k d\mu$  und damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k d\mu$ . Aus Symmetriegründen folgt die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Folgen von Treppenfunktionen.

## Integral für meßbare Funktionen

Für eine meßbare Funktion  $f \in \mathcal{M}$  setzen wir

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^{+} \, d\mu - \int_{\Omega} f^{-} \, d\mu$$

wobei  $f^{+}(x) := \max(0, f(x))$  und  $f^{-}(x) := \min(0, f(x))$

## Integral für meßbare Funktionen

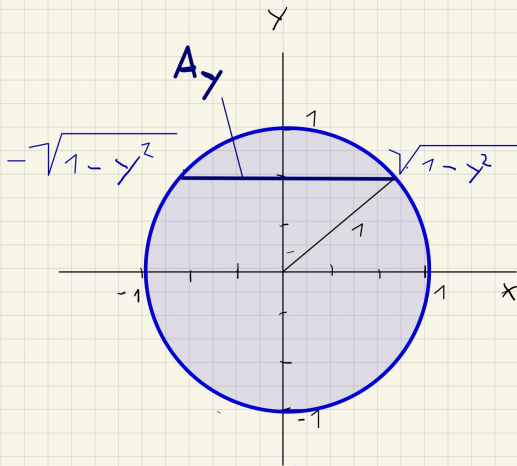
Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, falls ihr Integral endlich ist.



## Eigenschaften des Integrals

Sind  $f$  und  $g$  zwei meßbare Funktionen, dann gilt:

- $\int_{\Omega} 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_{\Omega} \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \beta \int_{\Omega} g d\mu$
- Ist  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x$ , so ist  $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$
- $\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$



## Beispiel

Sei  $K := B_1^2(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ . Anschaulich ist

$$\mu_2(K) = \int_K 1 d\mu = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

$$(\text{substitution } y = \sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

## Fubini

Für eine integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f \, d\mu_{n-k} \, d\mu_k$$

Beweisidee:

## Schnittmenge

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Für  $y \in \mathbb{R}^k$  heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (x, y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von  $A$  zu  $y$ .

## Schnittmenge

Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  erhält man ein Maß

$$\mu'(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \mu_{n-k}(A_y) d\mu_k$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue Maßes folgt die Behauptung.