

Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

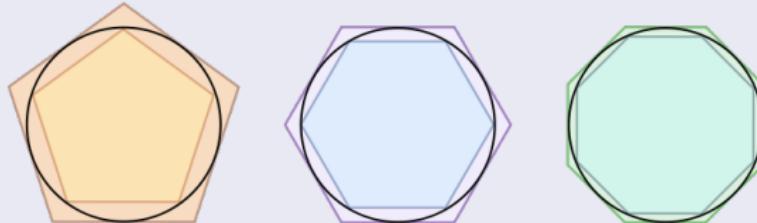


Figure: Quelle: Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg

Idee

- Überdecke komplexe Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

Idee

- Überdecke komplexe Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

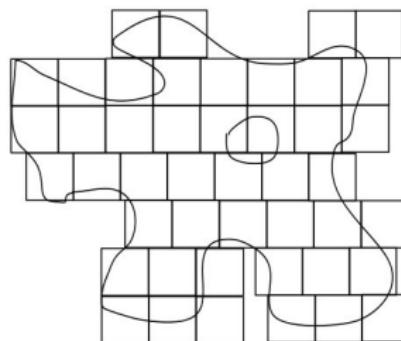


Figure: Grobe Überdeckung

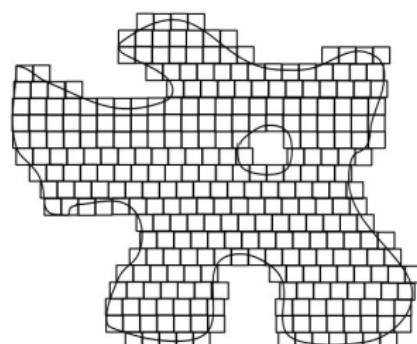


Figure: Feinere Überdeckung

Quader

Für abgeschlossene Intervalle $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir

$$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

einen n -dimensionalen Quader und

$$\overset{\circ}{I} := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

sein Inneres. Wir definieren das Volumen

$$\text{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n -dimensionalen Quader.

Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein } k\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n -dimensionalen degenerierten Quader.

Hüllquader

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern $\{I_j \mid I_j \in \mathbb{I}(n)\}$ mit $A \subset \bigcup_j I_j$ als Hüllquader für A .

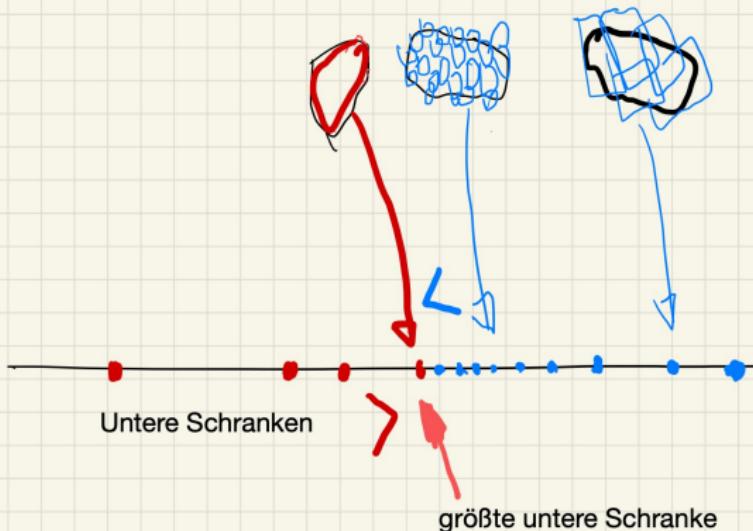
Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) ; I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

Infimum

Größte untere Schranke.



Monotonie

Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis

Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$.

σ -subadditivität

Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_j^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$$

Beweis

Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadern $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup A_j\right) &\leq \sum_j \sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \left(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &= \left(\sum_j \mu(A_j)\right) + \epsilon\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Meßbare Menge

Für einen Quader I gilt $\mu(I) = \text{vol}(I)$.

Stochastik

Meßbare Mengen

Da I eine Überdeckung von \mathcal{I} mit Hüllquadern ist, folgt
 $\mu(I) \leq \text{vol}(I)$.

Müssen also noch $\mu(I) \geq \text{vol}(I)$ zeigen:

Dazu Sei $I' := \{I_k\}_k$ eine abzählbare Überdeckung von I mit Hüllquadern. Vergrößere die Quader I_k etwas, so dass man I_k^* erhält mit $I_k \subset I_k^*$ und $\text{vol}(I_k^*) \leq (1 + \epsilon)\text{vol}(I_k)$.

Da I kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), gibt es eine endliche Auswahl mit

$$I \subset \bigcup_{i=1}^n I_i^*$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{vol}(I) &\leq \sum_{i=1}^n \text{vol}(I_i^*) \\ & (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^n \text{vol}(I_i) \\ &\leq (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) \\ &= (1 + \epsilon)\mu(S)\end{aligned}$$

Maßproblem

Es gibt disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$. Konstruiert werde diese mit Hilfe der Vitali Mengen. Hierfür wird das Auswahlaxiom benötigt.

Lösung

μ Einschränken auf "kleinere" σ -Algebren.

Meßbare Menge

Eine Menge A heißt Lebesgue meßbar, wenn für alle $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt. Die Menge der Lebesgue meßbaren Mengen wird mit \mathcal{L}^n bezeichnet.

Meßbare Menge

\mathcal{L}^n ist eine σ -Algebra und für zwei disjunkte, Lebesgue meßbare Mengen $A, B \in \mathcal{L}^n$ ist

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Aufgrund der σ -subadditivität gilt immer

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A \cup Q \cap A^c) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

Um zu zeigen, dass eine Menge mesßbar ist, reicht es also zu zeigen, dass

$$\mu(Q) \geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt.

Stochastik

Meßbare Mengen

\mathcal{L}^n ist eine σ -Algebra:

Ist A messbar, so ist A^c messbar, da die Bedingung symmetrisch ist in A und A^c .

Sind $A, B \in \mathcal{L}^n$ messbar, so gilt

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\ &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad [\text{Messbarkeit von } B \text{ angew. auf } Q \cap A^c] \\ &\geq \mu((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c \cap B)) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad [\sigma\text{-subadditivität}] \\ &= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \cap (A \cup B)^c) \\ &\quad [\text{Mengenlehre}]\end{aligned}$$

σ -additivität:

Für $M, N \in \mathcal{L}^n$ mit $M \cap N = \emptyset$ folgt aus Meßbarkeitsbedingung für $Q' = Q \cap (M \cup N)$

$$\mu(Q \cap (M \cup N)) = \mu(Q \cap M) + \mu(Q \cap N)$$

und via Induktion für eine Folge disjunkter, messbarer Mengen A_j

$$\mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) = \sum_j \mu(Q \cap A_j)$$

σ -additivität:

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) + \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)^c) \\ &\geq \sum_j \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A_j^c) \\ &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)\end{aligned}$$

[σ -subadditivität]

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

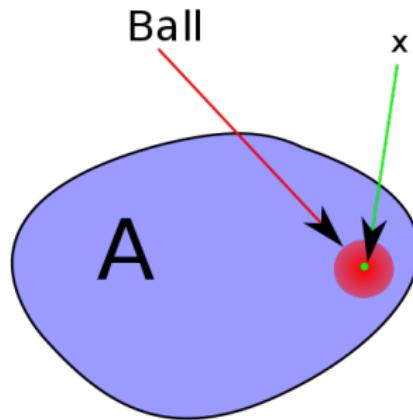
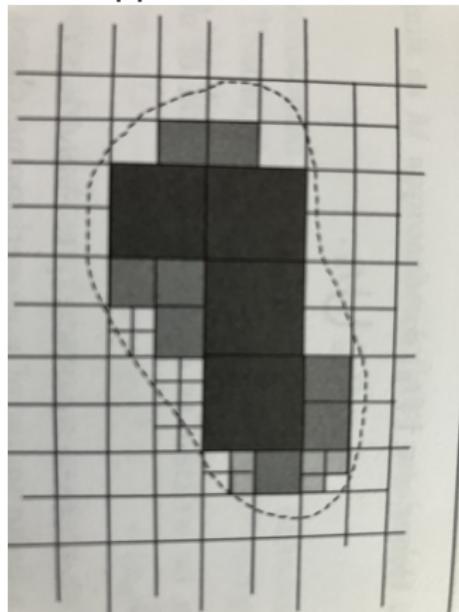


Figure: Quelle: Wikipedia

Meßbare Menge

Offene Mengen sind meßbar.

Wir zeigen: Jede offene Menge U ist abzählbare Vereinigung nicht überlappender Quader.

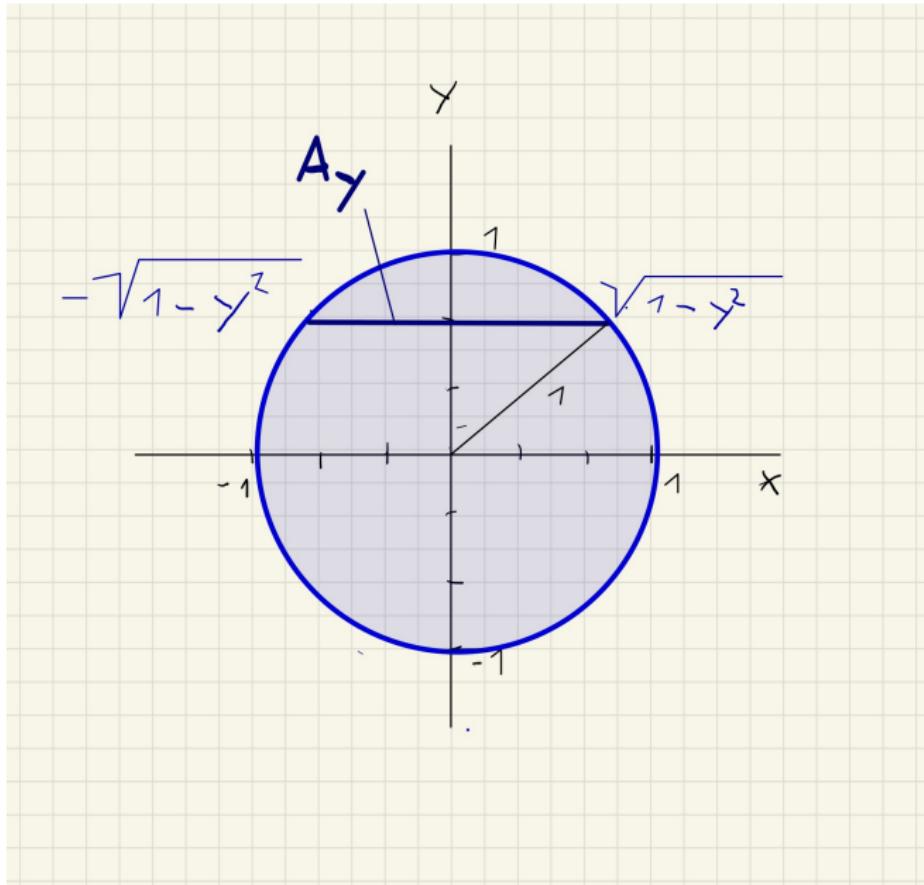


Meßbare Menge

Eine Menge A ist genau dann Lebesgue meßbar, wenn es für bel. $\epsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge C und eine offene Menge U gibt mit $C \subset A \subset U$ und $\mu(U \setminus C) < \epsilon$

Angewandte Mathematik

Fubini



Beispiel

Sei $K := B_1^2(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. Anschaulich ist

$$\begin{aligned}\mu_2(K) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_K d\mu = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy\end{aligned}$$

$$(substitution y = \sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Fubini

Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f \, d\mu_{n-k} \, d\mu_k$$

Beweisidee:

Schnittmenge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^k$ heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (x, y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von A zu y .

Schnittmenge

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ erhält man ein Maß

$$\mu'(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \mu_{n-k}(A_y) d\mu_k$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue Maßes folgt die Behauptung.

Quader und lineare Abbildungen

Seien U und V offene Teilmengen des \mathbb{R}^n , $T' : U \rightarrow V$ ein lineare Abbildung und $Q \in \mathbb{I}(n)$ ein Quader. Dann gilt:

$$\text{vol}(T'(Q)) = \det(T') \cdot \text{vol}(Q) .$$

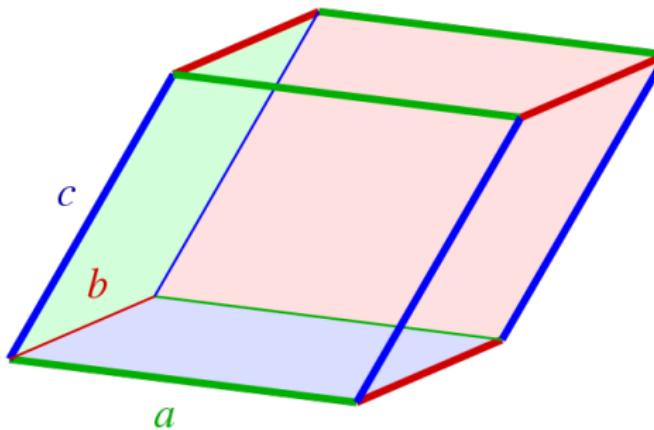
Angewandte Mathematik

Beweis

Für Vektoren a_1, \dots, a_n im \mathbb{R}^n heißt die Menge

$$P(a_1, \dots, a_n) := \left\{ x = \sum_{k=1}^n t_k a_k \mid t_1, \dots, t_n \in [0, 1] \right\}$$

Parallelotop.



Angewandte Mathematik

Beweis

Es gilt

$$\text{vol}(P(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|.$$

Ausführlicher Beweis

Diffeomorphismus

Seien U und V offene Teilmengen des \mathbb{R}^n . Eine Abbildung $T : U \rightarrow V$ heißt Diffeomorphismus, wenn eine Umkehrfunktion $T^{-1} : V \rightarrow U$ existiert, also $T^{-1}(T(u)) = u$ gilt für alle $u \in U$, die ebenfalls differenzierbar ist.

Für eine invertierbare Matrix A ist $T(x) := Ax$ ein Diffeomorphismus.

Transformationssatz

Seien U und V offene Teilmengen des \mathbb{R}^n , $T : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_V f(y) d\mu = \int_U f(T(x)) \cdot |\det(T'(x))| d\mu .$$

Angewandte Mathematik

Beweis

Seien $I_k \in \mathbb{I}(n)$ Quader, $J_k := T(I_k)$ und $b_k = T(c_k)$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^n b_k \text{vol}(J_k) \approx \sum_{k=1}^n T(c_k) \cdot |\det T'(c_k)| \text{vol}(I_k).$$

Die Behauptung folgt dann (nicht trivial) durch den Übergang zu Grenzwerten mit entsprechenden Konvergenzsätzen.

Beispiel

Wir betrachten den Ball $B_r^3(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq r\}$, den Quader $I := [0, r] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und die Abbildung

$$T : I \rightarrow B_1^3(0)$$

$$T(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ r \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ r \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\det T'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos(\psi)$$

Angewandte Mathematik

Lebesgue Integral

$$\int_{B_r^3(0)} 1 d\mu = \int_{[0,r]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^2 \cos(\psi) d\psi \, d\varphi \, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$

