Highlight

$$\Omega = \{B, W\}$$

$$P(W) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$1_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega = B, \\ 0 & \text{wenn } \omega = W. \end{cases}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_B(\omega_i) =?$$

Maßraum

Ein Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist ein Tupel bestehend aus der Grundmenge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Maß

Ein Maß auf einem Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein Maß mit $\mu(\Omega) = 1$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

erzeugte Sigma-Algebra

Sei X eine Menge und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem.

Die von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra ist definiert als

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{F} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

- $\mathcal{P}(X)$ selbst ist eine σ-Algebra und enthält $\mathcal{C}$.
- Daher ist die Menge aller σ-Algebren, die $\mathcal{C}$ enthalten, nicht leer.
- Der Schnitt beliebig vieler σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra.
- Damit existiert und ist eindeutig die kleinste σ-Algebra mit $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.
- $\sigma(\mathcal{C})$ enthält genau diejenigen Mengen, die aus $\mathcal{C}$ gewonnen werden können durch
- Komplementbildung,
- abzählbare Vereinigungen,
- (und folglich abzählbare Durchschnitte).

Borellsche Sigma-Algebra auf $\mathbb{R}$

Die *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{\text{offene Teilmengen von } \mathbb{R}\}\big).$$

Äquivalent:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{(a, b) : a < b\}\big) = \sigma\big(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}\big).$$

Inklusion 2: offene Intervalle

Jede offene Menge U lässt sich darstellen als

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k), \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q}.$$

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap ((-\infty, a])^c$$

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \tfrac{1}{n}) \in \sigma(\mathcal{H})$$

Meßbare Abbildung

Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen zwei Maßräumen $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ heißt meßbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

Meßbare Abbildung

Das Urbild jedes Ereignisses ist ein Ereignis

Beispiel

Bei endlichen Mengen mit der Potenzmenge als Sigma-Algebra ist jede Funktion Meßbar.

Meßbare Funktionen

Die Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_\Omega$ oder einfach $\mathcal{M}$ wenn der Kontext klar ist. Mit $\mathcal{M}^+$ bezeichnen wir die meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(\omega) \geq 0$.

Messbarkeit von Abbildungen

Sei (X, Σ) ein Messraum, Y eine Menge und

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y), \quad \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra auf Y. Dann ist

$$f : (X, \Sigma) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$$

genau dann messbar, wenn

$$f^{-1}(E) \in \Sigma \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

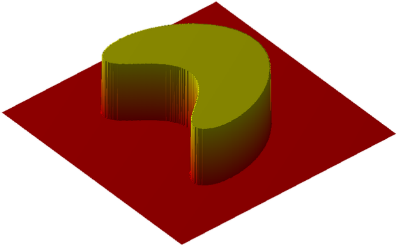

Figure: Quelle: Wikipedia:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indicator_function_illustration.png

Treppenfunktion

Eine meßbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

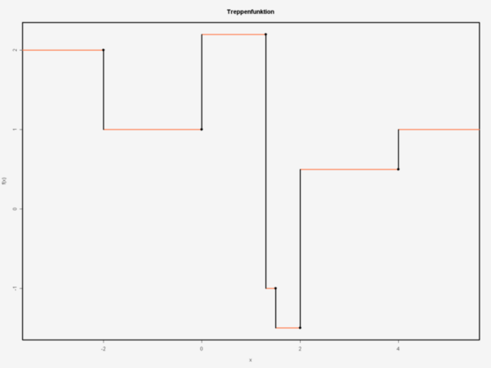

Figure: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png

Beispiel einer Treppenfuntkion

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1_{A_i}(x)$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist eine Treppenfunktion.

Treppenfuntkion

Eine Treppenfunktion u hat eine Darstellung $u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1_{A_i}(x)$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist eine Treppenfunktion.

Treppenfuntkion

Die Menge der Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$ und die Treppenfunktionen mit $a_i > 0$ mit $\mathcal{T}^+$.

Eindeutigkeit der Darstellung

Sind $u = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}$ zwei verschiedene Darstellungen einer Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ so ist $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$

Integral einer Treppenfunktion

Für eine Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ definieren wir

$$\int_\Omega u \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

Diese ist unabhängig von der Darstellung.

Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Sind u und v zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

- $\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_\Omega \alpha u + \beta v d\mu = \alpha \int_\Omega u d\mu + \beta \int_\Omega v d\mu$
- Ist $u(x) \leq v(x)$ für alle x, so ist $\int_\Omega u d\mu \leq \int_\Omega v d\mu$

Integral nicht negativer meßbarer Funktionen

Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ definieren wir

$$\int_\Omega f \; d\mu := sup\left\{ \int_\Omega u \; d\mu \mid u \in \mathcal{T}^+, u(x) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \Omega \right\}$$

Eigenschaften des Integrals nicht negativer meßbarer Funktionen

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ meßbar. Dann gilt:

- Ist $f \leq g$ punktweise, dann ist $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$
- Ist $f_n \in \mathcal{T}^+$ eine punktweise konvergente Folge $f_n \uparrow f$, dann konergierten die Integrale $\int_\Omega f d\mu \uparrow \int_\Omega g d\mu$

Meßbare Abbildungen

Eine nicht negative messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge $f_n \in \mathcal{T}^+$ gibt mit $f_n \uparrow f$.

Sei $f \in \mathcal{M}^+$ meßbar:
definiere

$$A_{j,n} := \begin{cases} \{\frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n}\} \text{ für } j = 0, \ldots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\} \text{ für } j = n \cdot 2^n \end{cases}$$

und damit

$$f_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} 1_{A_{j,n}}$$

Damit gilt für festes x immer $f_n(x) \leq f(x)$ und man kann n immer so wählen, dass $f(x) \leq f_n(x) + 2^{-n}$ gilt.

Sei

$$f_n(x) \;=\; \sum_{i=1}^{k_n} a_{n,i}\, \mathbf{1}_{A_{n,i}}(x),$$

eine punktweise konvergente folge $f_n \uparrow f$ von Treppenfunktionen.

1. *Treppenfunktionen sind messbar.*
   Für feste n und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

   $$\{x : f_n(x) < \alpha\} = \bigcup_{\substack{1 \le i \le k_n \\ a_{n,i} < \alpha}} A_{n,i} \;\in\; \Sigma,$$

   da endliche und abzählbare Vereinigungen sowie Komplemente in Σ liegen. Also ist f_n messbar.
2. *Charakterisierung der Messbarkeit.*
   Eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

   $$\{x : g(x) < \alpha\} \;\in\; \Sigma.$$

Da $f_n(x) \to f(x)$ punktweise, gilt für jedes $x \in X$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x) < \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k\, \forall\, n \geq k : \; f_n(x) < \alpha.$$

Daher

$$\{x : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : f_n(x) < \alpha\}.$$

Integral für meßbare Funktionen

Für eine meßbare Funktion $f \in \mathcal{M}$ setzen wir

$$\int_\Omega f \; d\mu = \int_\Omega f^+ \; d\mu - \int_\Omega -f^- \; d\mu$$

wobei $f^+(x) := \max(0, f(x))$ und $f^-(x) := \min(0, f(x))$

Integral für meßbare Funktionen

Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, falls ihr Integral endlich ist.

Eigenschaften des Integrals

Sind f und g zwei meßbare Funktionen, dann gilt:

- $\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_\Omega \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu$
- Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle x, so ist $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$
- $\left| \int_\Omega f \; d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \; d\mu$

Zufallssvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(R, \mathcal{B})$ ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung $X : \Omega \to R$.

Reelle Zufallssvariable

Definition des Bildmaßes

Bildmaß

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum, $X : \Omega \to E$ eine messbare Abbildung. Dann definiert man das *Bildmaß* $\mathbb{P}_X$ von $\mathbb{P}$ unter X durch

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{E}.$$

Erwartungswert

Transformationsformel

Für eine reelle Zufallsvariablen $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(g \circ X) := \int_{\mathbb{R}^n} g \circ X \; dP = \int_{\mathbb{R}^m} g \; dP_X \; .$$

Ist $f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Dichte für P_X , so ist

$$\mathbb{E}(g \circ X) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) \cdot f(x) \; d\mu$$

.

Transformationsformel

Für $g = 1_A$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int 1_A \, dP_X = P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \int 1_{X^{-1}(A)} \, dP$$
$$= \int 1_A \circ X \, dP$$

Für eine Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$folgt das Ergebnis aus der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen. Für integrierbares g folgt das Resultat mit Hilfe von Konvergenzsätzen für das Integral.

Verteilung und Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(R, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\{X_i\}_{i=1}^n$ ein Folge von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to R$. Die Zufallsvariablen heißen identisch verteilt, falls $P_{X_i} = P_{X_j}$ für alle i, j und stochastisch unabhängig, falls $P_{(X_1,\cdots,X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$ gilt.

Erwartungswert

Für eine reelle integrierbare Zufallsvariableist ihr Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \, dP \, .$$

Erwartungswert

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable, so ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

Erwartungswert

Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$X(x) \leq Y(x) \; \forall x \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$

Varianz

Für eine reelle Zufallsvariable ist die Varianz definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)\ .$$

Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Kovarianz

Für reelle Zufallsvariable X, Y ist die Kovarianz definiert durch

$$\mathcal{C}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \, .$$

Kovarianz

Per Definition ist

$$\mathcal{C}(X, X) := \mathbb{V}(X).$$

Beispiel

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\},\ P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$,
$X(\text{Kopf}) = 0, X(\text{Zahl}) = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X^{-1}(0)) + 1 \cdot P(X^{-1}(1)) \\ &= 0 \cdot P(\text{Kopf}) + 1 \cdot P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Markov Ungleichung

Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle, integrierbare Zufallsvariable und $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ mit $f(\epsilon) > 0$

$$P(|Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f \circ |Y|)}{f(\epsilon)}$$

Beweis

Da $f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}} \leq f \circ |Y|$ folgt

$$\begin{aligned} f(\epsilon)P(|Y| \geq \epsilon) =& f(\epsilon)\mathbb{E}(1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) = \mathbb{E}(f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) \\ \leq& \mathbb{E}(f \circ |Y|) \end{aligned}$$

Tschebyscheff-Ungleichung

Für eine reelle, integrierbare und quadratintegrierbare Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\epsilon^2}$$

Beweis

Folgt direkt aus der Markov-Ungleichung mit $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$ und $f(x) = x^2$

Highlight

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen (uiv, iid(englisch)) mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$, dann gilt

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(stochastische Konvergenz).

Erwartungswert

Beweis

Mit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu$ ist $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i - \mu) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma}{n}$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt die Behauptung.

Erwartungswert