

### Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

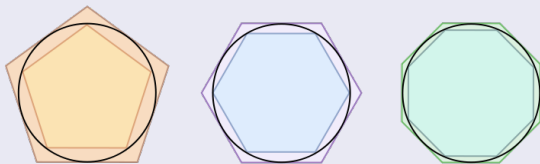


Figure: Quelle: Wikipedia:

[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes\\_pi.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg)

### Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

### Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

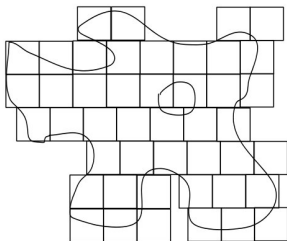


Figure: Grobe Überdeckung

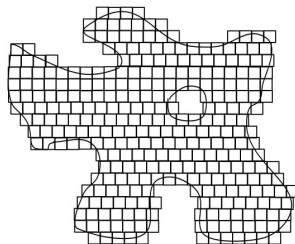


Figure: Feinere Überdeckung

### Quader

Für abgeschlossene Intervalle  $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$  mit  $a_i \leq b_i$  nennen wir

$$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

einen  $n$ -dimensionalen Quader und

$$I^\circ := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

sein Inneres. Wir definieren das Volumen

$$\text{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

### Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller  $n$ -dimensionalen Quader.

### Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein } k\}$$

bezeichnen wir die Menge aller  $n$ -dimensionalen degenerierten Quader.

# Meßbare Mengen

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt offen, falls für jeden Punkt  $x \in U$  ein Radius  $\epsilon > 0$  existiert, so dass der Ball  $B_\epsilon(x)$  in  $U$  enthalten ist, also  $B_\epsilon(x) \subset U$  gilt. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

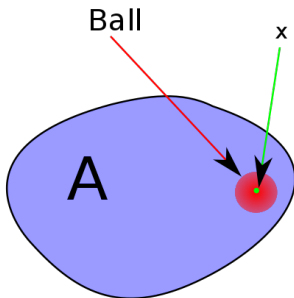


Figure: Quelle: Wikipedia

### Hüllquader

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir eine Menge von Quadern  $\{I_j \mid I_j \in \mathbb{I}(n)\}$  mit  $A \subset \bigcup_j I_j$  als Hüllquader für  $A$ .

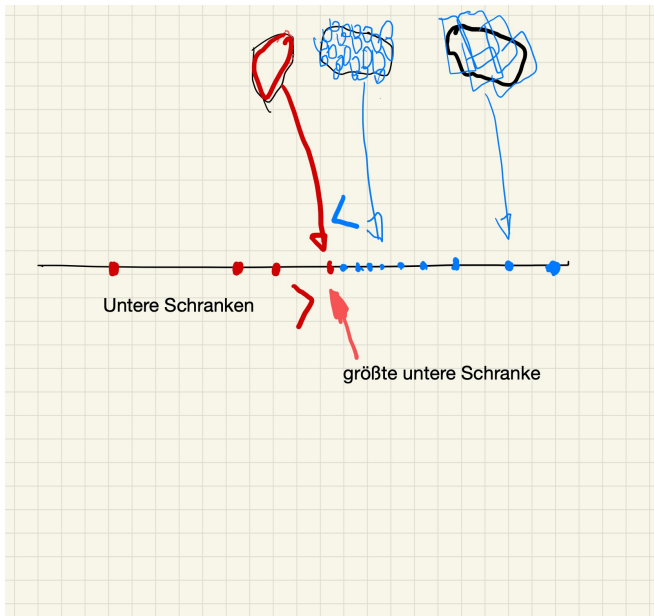
### Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) ; I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

### Infimum

Größte untere Schranke.





### Monotonie

Für  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$  ist  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

### Beweis

Da  $A \subset B$  Teilmenge ist, sind Hüllquader von  $B$  auch Hüllquader von  $A$  und damit  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

## $\sigma$ -subadditivität

Sei  $A_j \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

### Beweis

Für jedes  $A_j$  und  $\epsilon > 0$  können wir eine geeignete Überdeckung  $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$  mit Hüllquadraten  $K_{j,k}$  finden, so dass  $\sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$ . Da  $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$  eine Überdeckung mit Hüllquadraten ist, folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup A_j\right) &\leq \sum_j \sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \left(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &= \left(\sum_j \mu(A_j)\right) + \epsilon\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt, folgt die Behauptung.

## Meßbare Menge

Für einen Quader  $I$  gilt  $\mu(I) = \text{vol}(I)$ .

Da  $I$  eine Überdeckung von  $I$  mit Hüllquadrern ist, folgt  $\mu(I) \leq \text{vol}(I)$ .

Müssen also noch  $\mu(I) \geq \text{vol}(I)$  zeigen:

Dazu Sei  $I' := \{I_k\}_k$  eine abzählbare Überdeckung von  $I$  mit Hüllquadrern. Vergrößere die Quader  $I_k$  etwas, so dass man  $I_k^*$  erhält mit  $I_k \subset \overset{\circ}{I}_k^*$  und  $\text{vol}(I_k^*) \leq (1 + \epsilon)\text{vol}(I_k)$ .

Da  $I$  kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), gibt es eine endliche Auswahl mit

$$I \subset \bigcup_{i=1}^n I_i^*$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{vol}(I) &\leq \sum_{i=1}^n \text{vol}(I_i^*) \\ &(1 + \epsilon) \sum_{i=1}^n \text{vol}(I_i) \\ &\leq (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) \\ &= (1 + \epsilon) \mu(S)\end{aligned}$$

## Maßproblem

Es gibt disjunkte Mengen  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$ . Konstruiert werde diese mit Hilfe der Vitali Mengen. Hierfür wird das Auswahlaxiom benötigt.

## Lösung

$\mu$  Einschränken auf "kleinere"  $\sigma$ -Algebren.

### Meßbare Menge

Eine Menge  $A$  heißt Lebesgue meßbar, wenn für alle  $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt. Die Menge der Lebesgue meßbaren Mengen wird mit  $\mathcal{L}^n$  bezeichnet.

### Meßbare Menge

$\mathcal{L}^n$  ist eine  $\sigma$ -Algebra und für zwei Lebesgue meßbare Mengen  $A, B \in \mathcal{L}^n$  ist

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$



Aufgrund der  $\sigma$ -subadditivität gilt immer

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A \cup Q \cap A^c) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

Um zu zeigen, dass eine Menge meßbar ist, reicht es also zu zeigen, dass

$$\mu(Q) \geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt.

$\mathcal{L}^n$  ist eine  $\sigma$ -Algebra:

Ist  $A$  messbar, so ist  $A^c$  messbar, da die Bedingung symmetrisch ist in  $A$  und  $A^c$ .

Sind  $A, B \in \mathcal{L}^n$  messbar, so gilt

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\ &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad [\text{Messbarkeit von } B \text{ angew. auf } Q \cap A^c] \\ &\geq \mu((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c \cap B)) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad [\sigma\text{-subadditivitat}] \\ &= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \cap (A \cup B)^c) \\ &\quad [\text{Mengenlehre}]\end{aligned}$$

$\sigma$ -additivität:

Für  $M, N \in \mathcal{L}^n$  mit  $M \cap N = \emptyset$  folgt aus Meßbarkeitsbedingung für  $Q' = Q \cap (M \cup N)$

$$\mu(Q \cap (M \cup N)) = \mu(Q \cap M) + \mu(Q \cap N)$$

und via Induktion für eine Folge disjunkter, messbarer Mengen  $A_j$

$$\mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) = \sum_j \mu(Q \cap A_j)$$

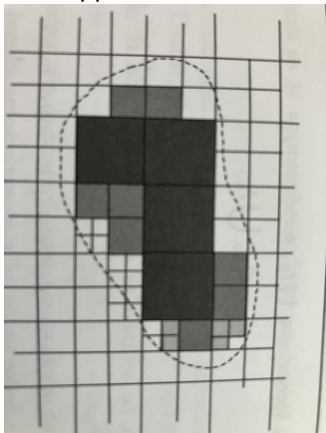
$\sigma$ -additivität:  
Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) + \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)^c) \\ &\geq \sum_j \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A_j^c) \\ &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\ &[\sigma\text{-subadditivität}]\end{aligned}$$

## Meßbare Menge

Offene Mengen sind meßbar.

Wir zeigen: Jede offene Menge  $U$  ist abzählbare Vereinigung nicht überlappender Quader.



### Meßbare Menge

Eine Menge  $A$  ist genau dann Lebesgue meßbar, wenn es für bel.  $\epsilon > 0$  eine abgeschlossene Menge  $C$  und eine offene Menge  $U$  gibt mit  $C \subset A \subset U$  und  $\mu(U \setminus C) < \epsilon$

## Borel'sche Sigma-Algebra

Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  über  $\mathbb{R}^n$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen  $\mathcal{U}$  enthält, also

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \mathcal{U} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

## Existenz

Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra existiert, da die Potenzmenge eine  $\sigma$ -Algebra ist.

## Messbarkeit

Die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra ist in der  $\sigma$ -Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.