Stochastik für Informatiker

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $U(a, b)$ auf einem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} \text{ für } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ für } x \geq b \end{cases}$$

Verteilungen

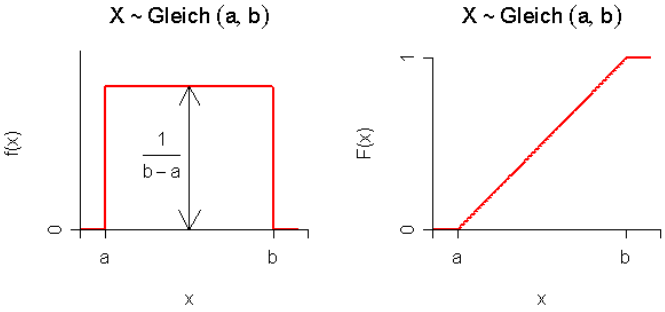

Figure: Quelle: Wikipedia

Gleichverteilung

Sei $X \sim$U(a,b).

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \cdot 1\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Verteilungen

Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Verteilungen

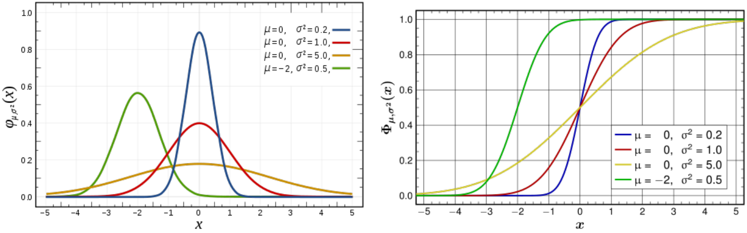

Figure: Quelle: Wikipedia

Normalverteilung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung $Pois(\lambda)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 0}$ ist definiert durch

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow F_\lambda(n) = \sum_{k=0}^{n} P_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

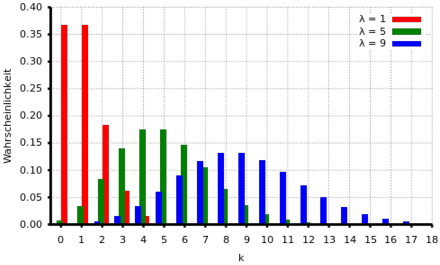

Figure: Quelle: Wikipedia

Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung beschreibt das Auftreten von seltenen Ereignissen und spielt bei Zählprozessen eine wichtige Rolle.

Poisson Verteilung

$X \sim Pois(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

Bernoulliverteilung

Die Bernoulliverteilung Für $\Omega = \{0, 1\}$ und $p \in [0, 1]$ ist definiert durch

$$P(\omega) = p^\omega (1 - p)^{1-\omega}$$

Beispiele

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), $p = 1/2$, und Zahl (Misserfolg), $q = 1/2$.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine 6 als Erfolg gewertet wird: $p = 1/6, q = 5/6$.
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein ($p \gtrapprox 0$), tritt nicht ein ($q \lessapprox 1$).

Verteilungen

Binomialverteilung

$$B(k, p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomialverteilung

$$X_1, \cdots, X_n \sim B \Rightarrow \sum X_i \sim B$$

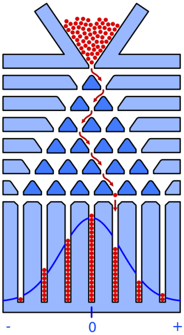

Figure: Quelle: Wikipedia

Zentraler Grenzwertsatz

Motivation

Welche Verteilung hat das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ für $n \to \infty$?

Motivation

Wie und gegen was konvergiert P_{S_n} für $n \to \infty$?

Konvergenz von W-Maßen

Was bedeutet Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen?

Inspiration: Gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

Eine Folge von Funktionen $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)|| = 0$$

für alle $x \in A$.

Konvergenz von W-Maßen

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P_n : \Omega \to [0, 1]$ eine folge von Wahrscheinlichkeits-Maßen. Die Folge konvergiert gegen das Wahrscheinlichkeits-Maß $P : \Omega \to [0, 1]$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f dP_n = \int_\Omega f dP$$

für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Highlight

Zentraler Grenzwertsatz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter, reeller Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ und $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$. Dann gilt für das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)} \to P_{N(0,1)}$$

wobei $P_{N(0,1)}$ das Wahrscheinlichkeits-Maß mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist.

Zentraler Grenzwertsatz

Erzeugende Funktion

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}),\ t \in I \subset \mathbb{R}$$

erzeugende Funktion zu X bzw. P_X.

Stetigkeitssatz von Lévy

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum so wie X und $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen mit erzeugenden Funktionen ψ und ψ_n. Dann gilt:

$$\psi_n \to \psi \Rightarrow P_{X_n} \to P_X$$

Stetigkeitssatz von Levy

Mit $\varphi_X := \mathbb{E}(e^{itx})$ ist $\varphi_X(-it) = \psi_X(t)$ und der Stetigkeitssatz von Levy folgt aus dem Umkehrsatz.

Eigenschaften erzeugender Funktionen

- $\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$ für $|t| \leq \delta$ (Taylor).
- $e^{\frac{t^2}{2}}$ ist die erzeugende Funktion von $P_{N(0,1)}$.
- $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$

Zentraler Grenzwertsatz

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

- $|t| \leq \delta$
- $\psi(t)$ erzeugende Funktion von X_n.
- $Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$. Dann ist $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = 1$.
- $\psi^*(t)$ erzeugende Funktion von Y_n.
- $\psi_n(t)$ erzeugende Funktion von $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$. Dann ist $\psi_n(t) = \psi^*(\frac{t}{\sqrt{n}})$

$$\begin{aligned}\psi_n(t) = \psi^*(\frac{t}{\sqrt{n}}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!\sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k) \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!\sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)}_{=:R_n}\end{aligned}$$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

$$R_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}(\psi^*(\delta) + \psi^*(-\delta)) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Für $T_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)$ erhält man damit

$$\psi_{T_n}(t) = (\psi_n)(t))^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R_n(t)\right)^n \to e^{\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \to \infty$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Levy folgt der zentrale Grentzwertsatz.

Umkehrsatz

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\hat{f}$ integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{i<x,y>}\, dy,$$

fast überall.

Highlight

Zentraler Grenzwertsatz

Sensorrauschen

Wir können annehmen, dass das Rauschen eines Sensor N_S aus vielen kleinen, stochastisch unabhängigen Effekten $N_1, \cdots N_k$ Beruht, die sich aufsummieren, also $N_S = N_1 + \cdots + N_k$.Wenn wir annehmen, dass jeder Effekt Gleichverteilt ist, ist diese Summe nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise Normalverteilt.