Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

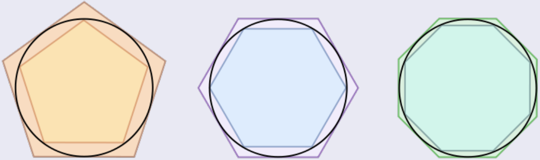


Figure: Quelle: Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

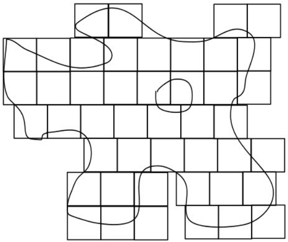


Figure: Grobe Überdeckung

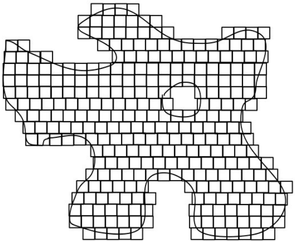


Figure: Feinere Überdeckung

Quader

Für offene Intervalle $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir

$$I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

einen n-dimensionalen Quader und

$$\overline{I} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

seinen Abschluss. Wir definieren das Volumen

$$\mathrm{vol}(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \; .$$

Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen Quader.

Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein k}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen degenerierten Quader.

Hüllquader

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern $\{I_j \mid I_j \in \mathbf{I}(n)\}$ mit $A \subset \bigcup_j I_j$ als Hüllquader für A.

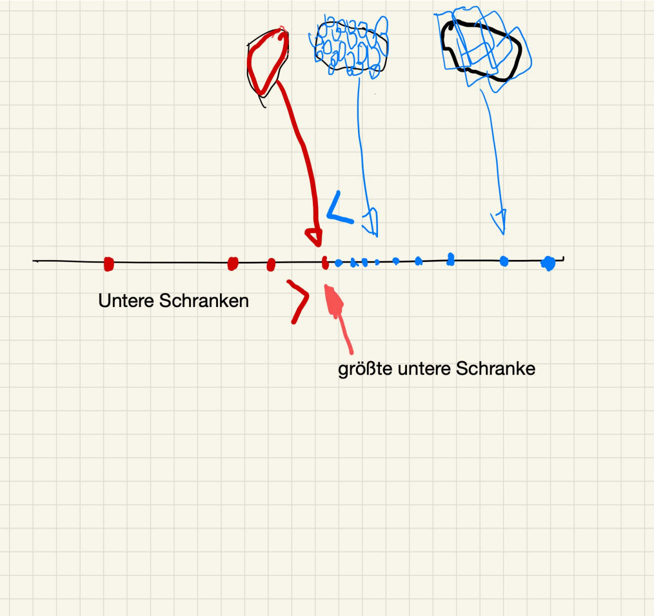
Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j)\ ;\ I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$$

Infimum

Größte untere Schranke.


Untere Schranken
größte untere Schranke

Monotonie

Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis

Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$.

σ-subadditivität

Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu(\bigcup_{j}^{\infty} A_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Beweis

Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadern $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$
\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup A_j\Big) &\leq \sum_j \sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq \big(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\big) \\
&= \big(\sum_j \mu(A_j)\big) + \epsilon
\end{aligned}
$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Maßproblem

Das Maßproblem ist nicht lösbar auf $\mathbb{R}^n$. –Vitali Mengen

Lösung

μ Einschränken auf "kleinere" σ-Algebren.