

Maßraum

Ein Maßraum (Ω, \mathcal{A}) ist ein Tupel bestehend aus der Grundmenge Ω und einer σ -Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Maß

Ein Maß auf einem Maßraum (Ω, \mathcal{A}) ist Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein Maß mit $\mu(\Omega) = 1$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Meßbare Abbildung

Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ zwischen zwei Maßräumen (Ω, \mathcal{A}) und (Ω', \mathcal{A}') heißt meßbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

Meßbare Abbildung

Das Urbild jedes Ereignisses ist ein Ereignis

Beispiel

Bei endlichen Mengen und Potenzmenge als Sigma-Algebra ist jede Funktion Meßbar. Jede stetige Funktion ist meßbar bezüglich Borellscher Sigma-Algebra.

Konvention

Ab jetzt steht \mathbb{R}^n immer für den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borellsche Sigma-Algebra und μ das Lebesgue Maß ist.

Eindeutigkeit

Später wichtig: Das Lebesgue Maß ist durch seine Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Die Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit \mathcal{M} . Mit \mathcal{M}^+ bezeichnen wir die meßbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\omega) \geq 0$.

Treppenfunktion

Eine meßbare Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

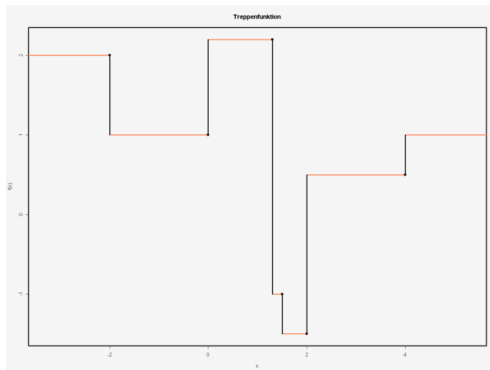


Figure: Quelle: Wikipedia:
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png>

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

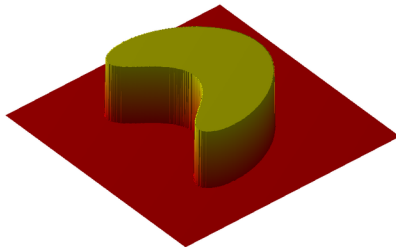


Figure: Quelle: Wikipedia:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indicator_function_illustration.png

Darstellung von Treppenfunktion

Eine Treppenfunktion hat eine Darstellung $u = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Treppenfunktion

Die Menge der Treppenfunktionen bezeichnen wir mit \mathcal{T} und die Treppenfunktionen mit $a_i > 0$ mit \mathcal{T}^+ .

Eindeutigkeit der Darstellung

Sind $u = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}$ zwei verschiedene Darstellungen einer Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ so ist

$$\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j)$$

Integral einer Treppenfunktion

Für eine Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ definieren wir

$$\int_{\Omega} u \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

Diese ist unabhängig von der Darstellung.

Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Sind u und v zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

- $\int_{\Omega} 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_{\Omega} \alpha u + \beta v d\mu = \alpha \int_{\Omega} u d\mu + \beta \int_{\Omega} v d\mu$
- Ist $u(x) \leq v(x)$ für alle x , so ist $\int_{\Omega} u d\mu \leq \int_{\Omega} v d\mu$

Meßbare Abbildungen

Eine nicht negative Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge $u_n \in \mathcal{T}^+$ gibt mit $u_n \uparrow f$.

Sei $u_n \in \mathcal{T}^+$:

Müssen zeigen, dass Grenzwert auch in \mathcal{T}^+ liegt. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass der Limes ein inf-sup ist und dieser Vereinigung von meßbaren Mengen ist.

Sei nun umgekehrt $f \in \mathcal{M}^+$ meßbar:
definiere

$$A_{j,n} := \begin{cases} \left\{ \frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n} \right\} & \text{für } j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\} & \text{für } j = n \cdot 2^n \end{cases}$$

und damit

$$u_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} 1_{A_{j,n}}$$

Damit gilt $u_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x) + 2^{-n}$.

Integral nicht negativer meßbarer Funktionen

Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ definieren wir

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \, d\mu$$

wobei $u_n \in \mathcal{T}^+$ eine Folge von Treppenfunktionen ist mit $u_n \uparrow f$.

!!

Müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig ist von der Folge der Treppenfunktionen.

Für jede wachsende Folge $(u_n) \in \mathcal{T}^+$ und jedes $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ gilt

$$\int_{\Omega} v \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \, d\mu$$

Sei $v = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}$. Für festes $\beta > 1$ setze $B_n := \{\beta u_n \geq v\}$.
Damit gilt $B_n \uparrow \Omega$ und $\beta u_n \geq v \cdot 1_{B_n}$ und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \, d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v \cdot 1_{B_n} \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \int_{\Omega} u_n \, d\mu = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \, d\mu \end{aligned}$$

Mit $\beta \rightarrow 1$ folgt die Behauptung.

Sind nun $u_n, v_n \in \mathcal{T}^+$ zwei wachsende Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ so gilt $\int_{\Omega} v_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k d\mu$ und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k d\mu$. Aus Symmetriegründen folgt die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Folgen von Treppenfunktionen.

Integral für meßbare Funktionen

Für eine meßbare Funktion $f \in \mathcal{M}$ setzen wir

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^{+} \, d\mu - \int_{\Omega} -f^{-} \, d\mu$$

wobei $f^{+}(x) := \max(0, f(x))$ und $f^{-}(x) := \min(0, f(x))$

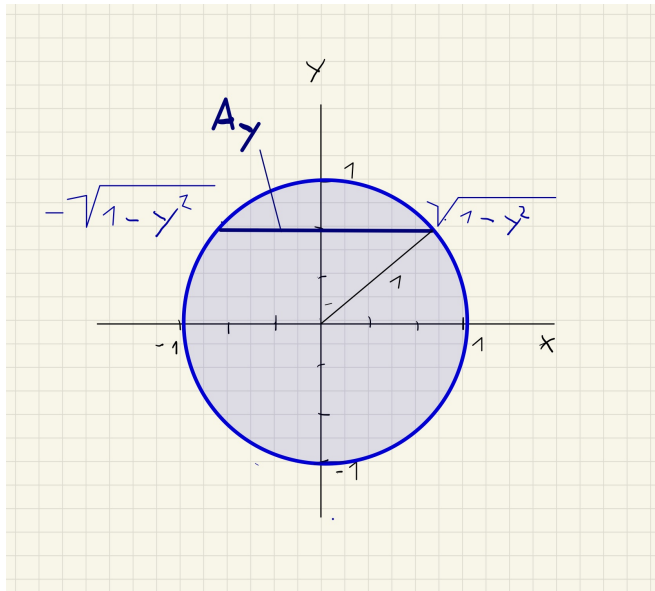
Integral für meßbare Funktionen

Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, falls ihr Integral endlich ist.

Eigenschaften des Integrals

Sind f und g zwei meßbare Funktionen, dann gilt:

- $\int_{\Omega} 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_{\Omega} \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \beta \int_{\Omega} g d\mu$
- Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle x , so ist $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$
- $\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$



Beispiel

Sei $K := B_1^2(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. Anschaulich ist

$$\begin{aligned}\mu_2(K) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_K d\mu = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy\end{aligned}$$

$$(\text{substitution } y = \sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Fubini

Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f \, d\mu_{n-k} \, d\mu_k$$

Beweisidee:

Schnittmenge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^k$ heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (x, y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von A zu y .

Schnittmenge

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ erhält man ein Maß

$$\mu'(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \mu_{n-k}(A_y) d\mu_k$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue Maßes folgt die Behauptung.