

Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

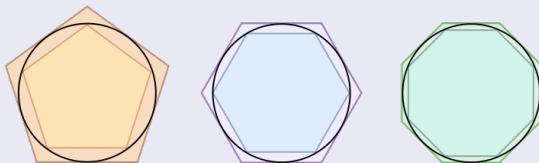


Figure: Quelle: Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

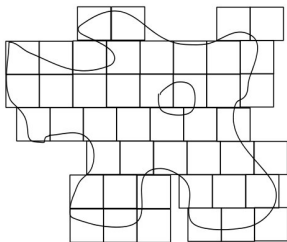


Figure: Grobe Überdeckung

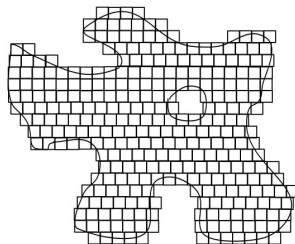


Figure: Feinere Überdeckung

Quader

Für abgeschlossene Intervalle $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir

$$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

einen n -dimensionalen Quader und

$$I^\circ := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

sein Inneres. Wir definieren das Volumen

$$\text{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n -dimensionalen Quader.

Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein } k\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n -dimensionalen degenerierten Quader.

Meßbare Mengen

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

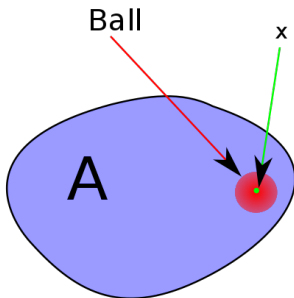


Figure: Quelle: Wikipedia

Hüllquader

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern $\{I_j \mid I_j \in \mathbb{I}(n)\}$ mit $A \subset \bigcup_j I_j$ als Hüllquader für A .

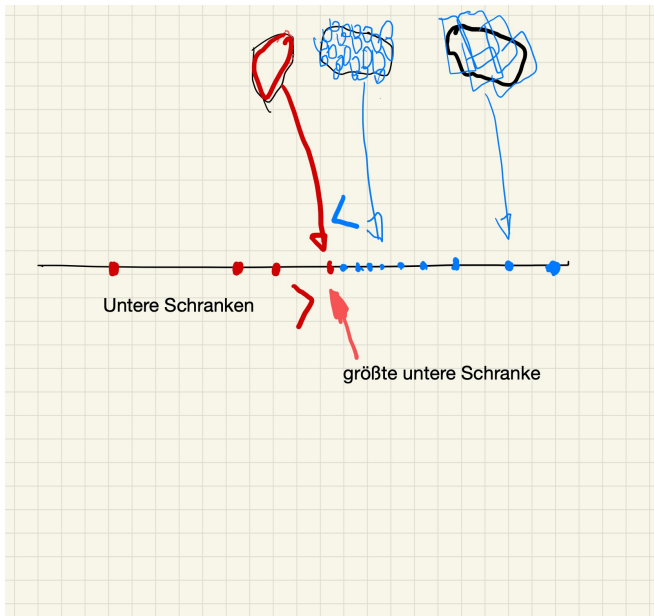
Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(I_j) ; I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

Infimum

Größte untere Schranke.



Monotonie

Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis

Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$.

σ -subadditivität

Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Beweis

Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadraten $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadraten ist, folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup A_j\right) &\leq \sum_j \sum_k \text{vol}(K_{j,k}) \leq \left(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &= \left(\sum_j \mu(A_j)\right) + \epsilon\end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Meßbare Menge

Für einen Quader I gilt $\mu(I) = \text{vol}(I)$.

Da I eine Überdeckung von I mit Hüllquadrern ist, folgt $\mu(I) \leq \text{vol}(I)$.

Müssen also noch $\mu(I) \geq \text{vol}(I)$ zeigen:

Dazu Sei $I' := \{I_k\}_k$ eine abzählbare Überdeckung von I mit Hüllquadrern. Vergrößere die Quader I_k etwas, so dass man I_k^* erhält mit $I_k \subset \overset{\circ}{I}_k^*$ und $\text{vol}(I_k^*) \leq (1 + \epsilon)\text{vol}(I_k)$.

Da I kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), gibt es eine endliche Auswahl mit

$$I \subset \bigcup_{i=1}^n I_i^*$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{vol}(I) &\leq \sum_{i=1}^n \text{vol}(I_i^*) \\ &(1 + \epsilon) \sum_{i=1}^n \text{vol}(I_i) \\ &\leq (1 + \epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) \\ &= (1 + \epsilon) \mu(S)\end{aligned}$$

Maßproblem

Es gibt disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$. Konstruiert werde diese mit Hilfe der Vitali Mengen. Hierfür wird das Auswahlaxiom benötigt.

Lösung

μ Einschränken auf "kleinere" σ -Algebren.

Meßbare Menge

Eine Menge A heißt Lebesgue meßbar, wenn für alle $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt. Die Menge der Lebesgue meßbaren Mengen wird mit \mathcal{L}^n bezeichnet.

Meßbare Menge

\mathcal{L}^n ist eine σ -Algebra und für zwei Lebesgue meßbare Mengen $A, B \in \mathcal{L}^n$ ist

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Aufgrund der σ -subadditivität gilt immer

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A \cup Q \cap A^c) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

Um zu zeigen, dass eine Menge meßbar ist, reicht es also zu zeigen, dass

$$\mu(Q) \geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt.

\mathcal{L}^n ist eine σ -Algebra:

Ist A messbar, so ist A^c messbar, da die Bedingung symmetrisch ist in A und A^c .

Sind $A, B \in \mathcal{L}^n$ messbar, so gilt

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\ &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad [\text{Messbarkeit von } B \text{ angew. auf } Q \cap A^c] \\ &\geq \mu((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c \cap B)) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\ &\quad [\sigma\text{-subadditivitat}] \\ &= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \cap (A \cup B)^c) \\ &\quad [\text{Mengenlehre}]\end{aligned}$$

σ -additivität:

Für $M, N \in \mathcal{L}^n$ mit $M \cap N = \emptyset$ folgt aus Meßbarkeitsbedingung für $Q' = Q \cap (M \cup N)$

$$\mu(Q \cap (M \cup N)) = \mu(Q \cap M) + \mu(Q \cap N)$$

und via Induktion für eine Folge disjunkter, messbarer Mengen A_j

$$\mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) = \sum_j \mu(Q \cap A_j)$$

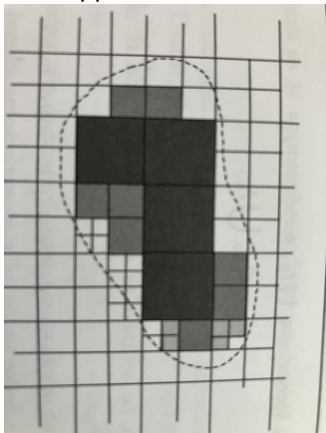
σ -additivität:
Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) + \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)^c) \\ &\geq \sum_j \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A_j^c) \\ &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\ &[\sigma\text{-subadditivität}]\end{aligned}$$

Meßbare Menge

Offene Mengen sind meßbar.

Wir zeigen: Jede offene Menge U ist abzählbare Vereinigung nicht überlappender Quader.



Meßbare Menge

Eine Menge A ist genau dann Lebesgue meßbar, wenn es für bel. $\epsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge C und eine offene Menge U gibt mit $C \subset A \subset U$ und $\mu(U \setminus C) < \epsilon$

Borel'sche Sigma-Algebra

Die Borel'sche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ über \mathbb{R}^n ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen \mathcal{U} enthält, also

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \mathcal{U} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \}$$

Existenz

Die Borel'sche σ -Algebra existiert, da die Potenzmenge eine σ -Algebra ist.

Messbarkeit

Die Borel'sche σ -Algebra ist in der σ -Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.