Beispiele Integration

a)

Berechnen Sie das Integral $\int_M f\ d\mu$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

über der Menge $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1\}$.

Lösung

$$\int_M f\ d\mu = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1 x_2\ dx_2 dx_1 = \int_0^1 [x_1 \frac{1}{2}(x_2^2)]_0^{1-x_1} dx_1$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 \dot{(}1 - x_1)^2\ dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 - 2x_1^2 + x_1^3\ dx_1$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}$$

b)

Berechnen Sie das Integral $\int_N h\ d\mu$ der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

über der Menge $N := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_2 + 2x_1 - 1\}$ (Tipp: Transformationsformel).

Lösung Die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_2 + 2x_1 - 1$ lässt sich umformen zu

$$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 \leq -1 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq -1$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1$$

Es handelt sich bei der Menge N also um eine um den Vektor $(1, 1)$ verschobene Kreisscheibe $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ mit Radius 1. Somit definiert

$$T : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to N$$
$$T(r, \varphi) := (r \cos(\varphi) + 1, r \sin(\varphi) + 1)$$

einen Diffeomorphismus (Polarkoordinaten + Verschiebung). Da $\det(T'(r, \varphi)) = r$ erhalten wir mit dem Transformationssatz

$$
\begin{aligned}
&\int_N x_1^2 + x_2^2 \; d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ((r\cos(\varphi)+1)^2 + (r\sin(\varphi)+1)^2) r \; dr \; d\,\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2(\varphi) + 2r^2 \cos(\varphi) + r + r^3 \sin(\varphi)^2 + 2r^2 \sin(\varphi) + r \; dr \; d\,\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 + 2r^2 \cos(\varphi) + 2r^2 \sin(\varphi) + 2r \; dr \; d\,\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cos(\varphi) + \frac{2}{3}\sin(\varphi) + 1 \; d\,\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}
\end{aligned}
$$