Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.). Mit einem eingeschriebenen und einem umschriebenen 96-Eck berichnete er

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

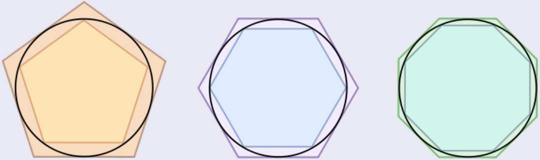


Figure: Quelle: Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

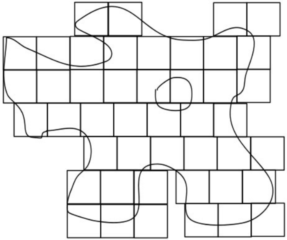


Figure: Grobe Überdeckung

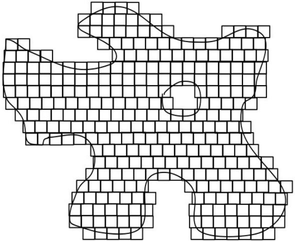


Figure: Feinere Überdeckung

Quader

Für abgeschlossene Intervalle $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir

$$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

einen *n*-dimensionalen Quader und

$$\overset{\circ}{I} := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

sein Inneres. Wir definieren das Volumen

$$\mathrm{vol}(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \; .$$

Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen Quader.

Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein k}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen degenerierten Quader.

Hüllquader

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern $\{I_j \mid I_j \in \mathbf{I}(n)\}$ mit $A \subset \bigcup_j I_j$ als Hüllquader für A.

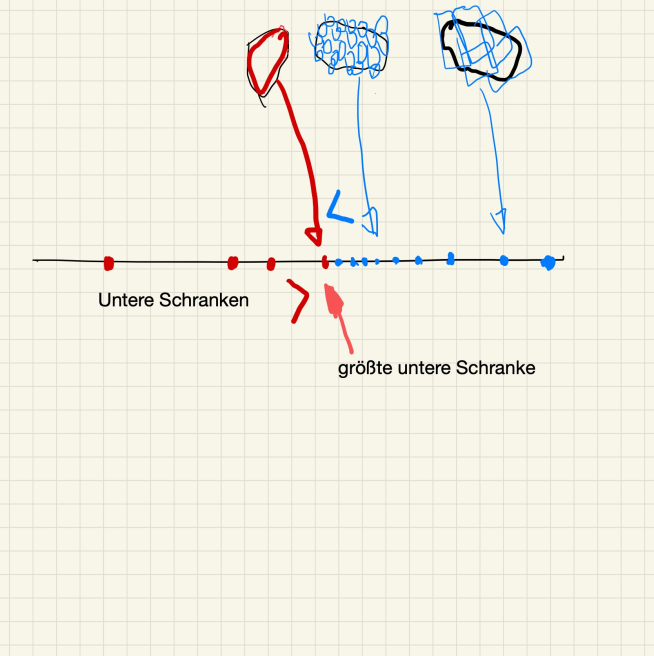
Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j)\ ;\ I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$$

Infimum

Größte untere Schranke.


Untere Schranken
größte untere Schranke

Monotonie

Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis

Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$.

σ-subadditivität

Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Beweis

Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadern $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$\mu\Big(\bigcup A_j\Big) \leq \sum_j \sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq \Big(\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\Big) = \Big(\sum_j \mu(A_j)\Big) + \epsilon$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Meßbare Menge

Für einen Quader I gilt $\mu(I) = \text{vol}(I)$.

Da I eine Überdeckung von I mit Hüllquadern ist, folgt $\mu(I) \leq \text{vol}(I)$.
Müssen also noch $\mu(I) \geq \text{vol}(I)$ zeigen:
Dazu Sei $I' := \{I_k\}_k$ eine abzählbare überdeckung von I mit Hüllquadern. Vergrößere die Quader I_k etwas, so dass man I_k^* erhält mit $I_k \subset \mathring{I}_k^*$ und $\text{vol}(I_k^*) \leq (1+\epsilon)\text{vol}(I_k)$.
Da I kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), gibt es eine endliche Auswahl mit

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i^*$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(I) &\le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(I_i^*) \\
&\le (1+\epsilon) \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(I_i) \\
&\le (1+\epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_i) \\
&= (1+\epsilon)\mu(S)
\end{aligned}
$$

Maßproblem

Es gibt disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$. Konstruiert werde diese mit Hilfe der Vitali Mengen. Hierfür wird das Auswahlaxiom benötigt.

Lösung

μ Einschränken auf "kleinere" σ-Algebren.

Meßbare Menge

Eine Menge A heißt Lebesgue meßbar, wenn für alle $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt. Die Menge der Lebesgue meßbaren Mengen wird mit $\mathcal{L}^n$ bezeichnet.

Meßbare Menge

$\mathcal{L}^n$ ist eine σ-Algebra und für zwei disjunkte, Lebesgue meßbare Mengen $A, B \in \mathcal{L}^n$ ist

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Aufgrund der σ-subadditivität gilt immer

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A \cup Q \cap A^c) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

Um zu zeigen, dass eine Menge mesßbar ist, reicht es also zu zeigen, dass

$$\mu(Q) \geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt.

$\mathcal{L}^n$ ist eine σ-Algebra:
Ist A messbar, so ist A^c messbar, da die Bedingung symmetrisch ist in A und A^c.
Sind $A, B \in \mathcal{L}^n$ messbar, so gilt

$$\begin{aligned}
\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\
&\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\
&\quad \text{[Messbarkeit von B angew. auf } Q \cap A^c\text{]} \\
&\geq \mu((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c \cap B)) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\
&\quad [\sigma\text{-subadditivität}] \\
&= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \cap (A \cup B)^c) \\
&\quad \text{[Mengenlehre]}
\end{aligned}$$

σ-additivität:
Für $M, N \in \mathcal{L}^n$ mit $M \cap N = \emptyset$ folgt aus Meßbarkeitsbedingung für $Q' = Q \cap (M \cup N)$

$$\mu(Q \cap (M \cup N)) = \mu(Q \cap M) + \mu(Q \cap N)$$

und via Induktion für eine Folge disjunkter, messbarer Mengen A_j

$$\mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) = \sum_j \mu(Q \cap A_j)$$

σ-additivität:
Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) + \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)^c) \\
&\geq \sum_j \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A_j^c) \\
&\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)
\end{aligned}
$$

[σ-subadditivität]

Meßbare Mengen

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

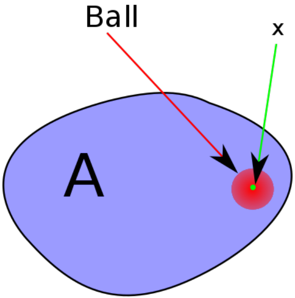
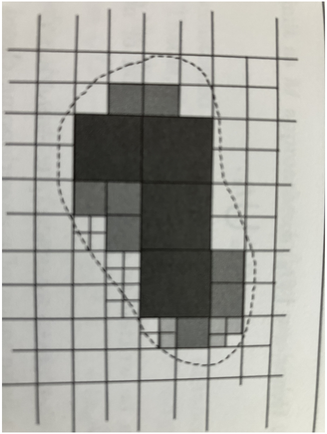


Figure: Quelle: Wikipedia

Meßbare Menge

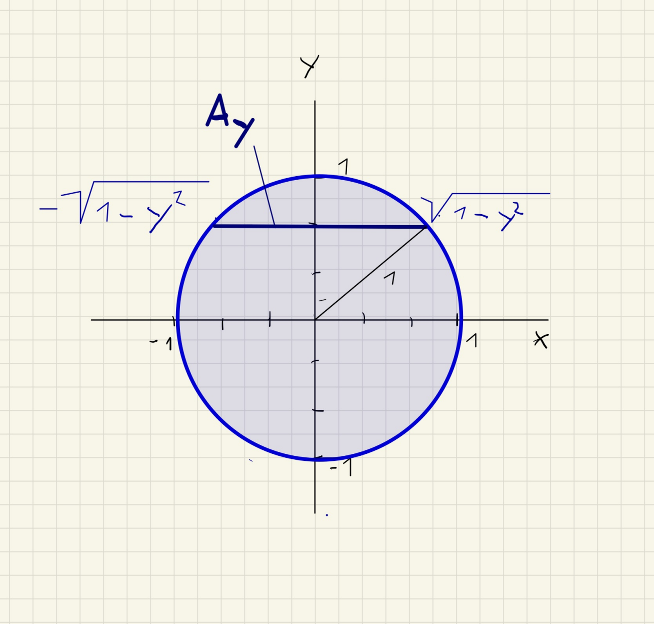
Offene Mengen sind meßbar.

Wir zeigen: Jede offene Menge U ist abzählbare Vereinigung nicht überlappender Quader.



Meßbare Menge

Eine Menge A ist genau dann Lebesgue meßbar, wenn es für bel. $\epsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge C und eine offene Menge U gibt mit $C \subset A \subset U$ und $\mu(U \setminus C) < \epsilon$



y
A_y
1
$-\sqrt{1-y^2}$
$\sqrt{1-y^2}$
1
-1
1
x
-1

Beispiel

Sei $K := B_1^2(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$. Anschaulich ist

$$\mu_2(K) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_K \, d\mu = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} \, dy$$

$$(substitution\ y = sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 \, du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Fubini

Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k} f \; d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f \; d\mu_{n-k} \; d\mu_k$$

Beweisidee:

Schnittmenge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^k$ heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (x, y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von A zu y.

Schnittmenge

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ erhält man ein Maß

$$\mu'(A) := \int_{\mathbb{R}^k} \mu_{n-k}(A_y) d\mu_k$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue Maßes folgt die Behauptung.

Quader und lineare Abbildungen

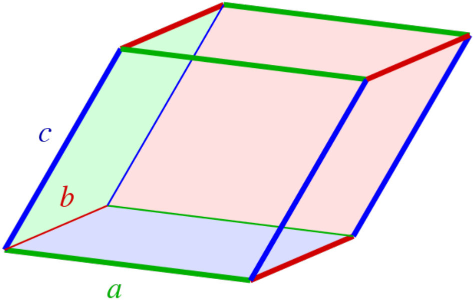
Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $T' : U \to V$ ein lineare Abbildung und $Q \in \mathbb{I}(n)$ ein Quader. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(T'(Q)) = \det(T') \cdot \mathrm{vol}(Q)\ .$$

Für Vektoren $a_1, \cdots a_n$ im $\mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$P(a_1, \cdots, a_n) := \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \mid t_1, \cdots, t_n \in [0,1] \right\}$$

Parallelotop.



Es gilt

$$\mathrm{vol}\big(P(a_1, \cdots, a_n)\big) = |det(a_1, \cdots, a_n)| \ .$$

Ausfürlicher Beweis

Diffeomorphismus

Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt Diffeomorphismus, wenn eine Umkehrfunktion $T^{-1} : V \to U$ existiert, also $T^{-1}(T(u)) = u$ gilt für alle $u \in U$, die ebenfalls differenzierbar ist.

Für eine invertierbare Matrix A ist $T(x) := Ax$ ein Diffeomorphismus.

Transformationssatz

Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_V f(y)d\mu = \int_U f(T(x)) \cdot |\det(T'(x))| d\mu \ .$$

Seien $I_k \in \mathbb{I}(n)$ Quader, $J_k := T(I_k)$ und $b_k = T(c_k)$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \mathrm{vol}(J_k) \approx \sum_{k=1}^{n} T(c_k) \cdot |\det T'(c_k)| \mathrm{vol}(I_k)\ .$$

Die Behauptung folgt dann (nicht trivial) durch den Übergang zu Grenzwerten mit entsprechenden Konvergenzsätzen.

Beispiel

Wir betrachten den Ball $B_r^3(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| \leq r\}$, den Quader $I := [0, r] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und die Abbildung

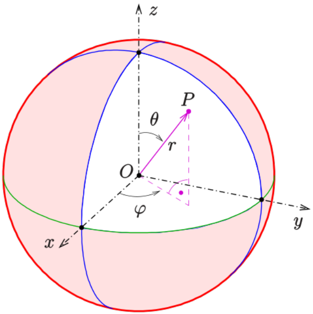
$$T : I \to B_1^3(0)$$

$$T(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Beispiel

$\det T'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos(\psi)$

$$\int_{B_r^3(0)} 1 d\mu = \int_{[0,r]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^2 \cos(\psi) d\psi \; d\varphi \; dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ ist eine Dichte auf $\mathbb{R}$.

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ (da } \cos^2 + \sin^2 = 1)$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr$$

$$= -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$