

Stochastik für Informatiker



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $U(a, b)$ auf einem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^x \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$$

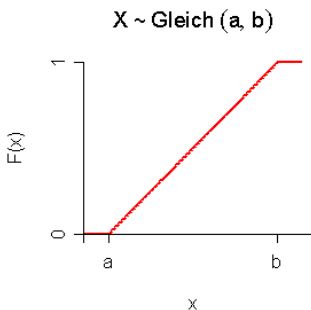
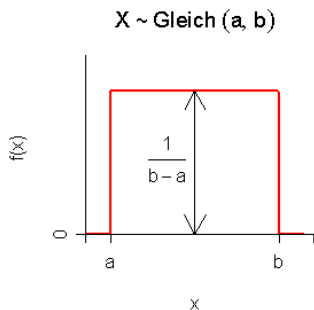


Figure: Quelle: Wikipedia

Gleichverteilung

Sei $X \sim U(a, b)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \cdot 1 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \cdot 1 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\&= \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\&= \frac{1}{12} (4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2) = \frac{1}{12} (b-a)^2\end{aligned}$$

Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ auf \mathbb{R} ist definiert durch

Dichte: $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

\Rightarrow Verteilung: $F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

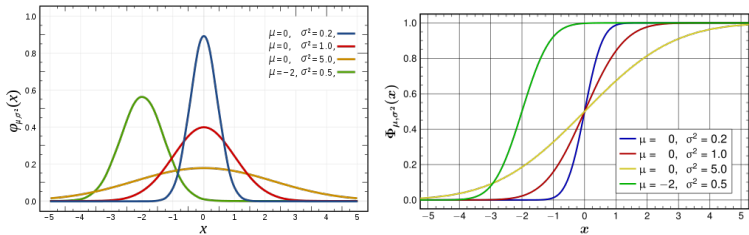


Figure: Quelle: Wikipedia

Normalverteilung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung $Pois(\lambda)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 0}$ ist definiert durch

$$P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow F_{\lambda}(n) = \sum_{k=0}^n P_{\lambda}(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$$

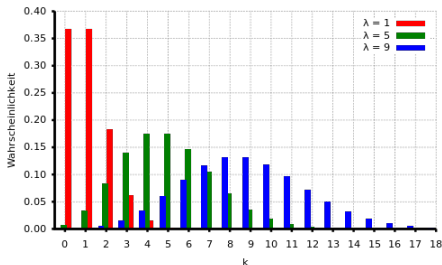


Figure: Quelle: Wikipedia

Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung beschreibt das Auftreten von seltenen Ereignissen und spielt bei Zählprozessen eine wichtige Rolle.

Poisson Verteilung

$$X \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

Bernoulliverteilung

Die Bernoulliverteilung Für $\Omega = \{0, 1\}$ und $p \in [0, 1]$ ist definiert durch

$$P(\omega) = p^{\omega}(1 - p)^{1-\omega}$$

Beispiele

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), $p = 1/2$, und Zahl (Misserfolg), $q = 1/2$.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine 6 als Erfolg gewertet wird: $p = 1/6$, $q = 5/6$.
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein ($p \gtrapprox 0$), tritt nicht ein ($q \lesssim 1$).

Verteilungen

Binomialverteilung

$$B(k, p, n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Binomialverteilung

$$X_1, \dots, X_n \sim B \Rightarrow \sum X_i \sim B$$

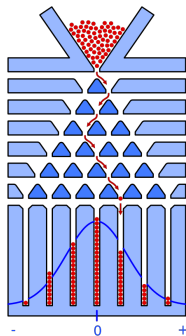


Figure: Quelle: Wikipedia

Motivation

Welche Verteilung hat das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ für $n \rightarrow \infty$?

Motivation

Wie und gegen was konvergiert P_{S_n} für $n \rightarrow \infty$?

Konvergenz von W-Maßen

Was bedeutet Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen?

Inspiration: Gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

Eine Folge von Funktionen $f_n : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion f , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

für alle $x \in A$.

Konvergenz von W-Maßen

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ eine Folge von Wahrscheinlichkeits-Maßen. Die Folge konvergiert gegen das Wahrscheinlichkeits-Maß $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f dP_n = \int_{\Omega} f dP$$

für alle messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.



Zentraler Grenzwertsatz

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter, reeller Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ und $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$. Dann gilt für das arithmetische Mittel $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$P_{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)} \rightarrow P_{N(0,1)}$$

wobei $P_{N(0,1)}$ das Wahrscheinlichkeits-Maß mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist.

Erzeugende Funktion

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

erzeugende Funktion zu X bzw. P_X .

Stetigkeitssatz von Lévy

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum so wie X und $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Zufallsvariablen mit erzeugenden Funktionen ψ und ψ_n . Dann gilt:

$$\psi_n \rightarrow \psi \Rightarrow P_{X_n} \rightarrow P_X$$

Stetigkeitssatz von Levy

Mit $\varphi_X := \mathbb{E}(e^{itx})$ ist $\varphi_X(-it) = \psi_X(t)$ und der Stetigkeitssatz von Levy folgt aus dem Umkehrsatz.

Eigenschaften erzeugender Funktionen

- $\psi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$ für $|t| \leq \delta$ (Taylor).
- $e^{\frac{t^2}{2}}$ ist die erzeugende Funktion von $P_{N(0,1)}$.
- $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

- $|t| \leq \delta$
- $\psi(t)$ erzeugende Funktion von X_n .
- $Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$. Dann ist $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = 1$.
- $\psi^*(t)$ erzeugende Funktion von Y_n .
- $\psi_n(t)$ erzeugende Funktion von $\frac{Y_n}{\sqrt{n}}$. Dann ist $\psi_n(t) = \psi^*\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \psi^*\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k) \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{\sum_{k=3}^n \frac{t^k}{k! \sqrt{n}^k} \mathbb{E}(Y_i^k)}_{=: R_n}\end{aligned}$$

Beweis Zentraler Grenzwertsatz

$$R_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}(\psi^*(\delta) + \psi^*(-\delta)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Für $T_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(S_n - \mu)$ erhält man damit

$$\psi_{T_n}(t) = (\psi_n(t))^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + R_n(t)\right)^n \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Levy folgt der zentrale Grenzwertsatz.

Umkehrsatz

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und \hat{f} integrierbar, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy,$$

fast überall.



Sensorrauschen

Wir können annehmen, dass das Rauschen eines Sensor N_S aus vielen kleinen, stochastisch unabhängigen Effekten N_1, \dots, N_k Beruht, die sich aufsummieren, also $N_S = N_1 + \dots + N_k$. Wenn wir annehmen, dass jeder Effekt Gleichverteilt ist, ist diese Summe nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise Normalverteilt.