Quader und lineare Abbildungen

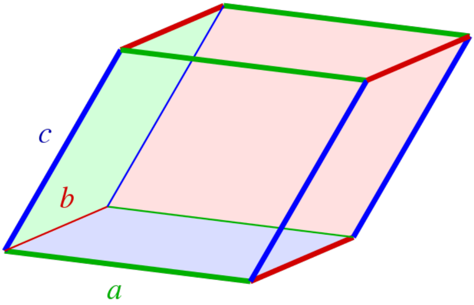
Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $T' : U \to V$ ein lineare Abbildung und $Q \in \mathbb{I}(n)$ ein Quader. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(T'(Q)) = \det(T') \cdot \mathrm{vol}(Q) \; .$$

Für Vektoren $a_1, \cdots a_n$ im $\mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$P(a_1, \cdots, a_n) := \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \mid t_1, \cdots, t_n \in [0,1] \right\}$$

Parallelotop.



Es gilt

$$\text{vol}\big(P(a_1, \cdots, a_n)\big) = \big|det(a_1, \cdots, a_n)\big| \; .$$

Ausfürlicher Beweis

Diffeomorphismus

Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt Diffeomorphismus, wenn eine Umkehrfunktion $T^{-1} : V \to U$ existiert, also $T^{-1}(T(u)) = u$ gilt für alle $u \in U$, die ebenfalls differenzierbar ist.

Für eine invertierbare Matrix A ist $T(x) := Ax$ ein Diffeomorphismus.

Transformationssatz

Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_V f(y) d\mu = \int_U f(T(x)) \cdot |\det(T'(x))| d\mu \ .$$

Seien $I_k \in \mathbb{I}(n)$ Quader, $J_k := T(I_k)$ und $b_k = T(c_k)$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \mathrm{vol}(J_k) \approx \sum_{k=1}^{n} T(c_k) \cdot |\det T'(c_k)| \mathrm{vol}(I_k) \; .$$

Die Behauptung folgt dann (nicht trivial) durch den Übergang zu Grenzwerten mit entsprechenden Konvergenzsätzen.

Beispiel

Wir betrachten den Ball $B_r^3(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| \leq r\}$, den Quader $I := [0, r] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und die Abbildung

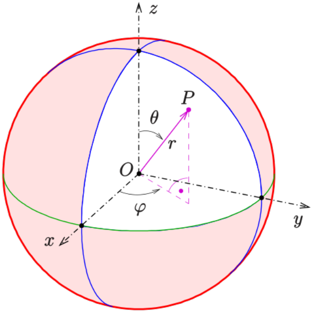
$$T : I \to B_1^3(0)$$

$$T(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Beispiel

$\det T'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos(\psi)$

$$\int_{B_r^3(0)} 1 d\mu = \int_{[0,r]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^2 \cos(\psi) d\psi \; d\varphi \; dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Zufallsvariablen

Messraum

Ein Messraum ist ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bestehend aus einer Menge Ω und einer Sigma-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

so dass für alle Ereignisse $A' \in \mathcal{A}'$

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in $\mathcal{A}$ ist. Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $\Omega' = \{0, 1\}$ mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und

$$X(\text{Kopf}) = 0$$
$$X(\text{Zahl}) = 1$$

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und $X : \Omega \to \Omega'; X(a, b) := a + b$.

Bildmaß

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $X : \Omega \to \Omega'$ Eine Zufallsvariable. Durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A'))$$

für $A' \in \mathcal{A}'$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ definiert. Es wird Bildmaß genannt. Anstelle von $P_X(A')$ wird auch die Schreibweise $P(X \in A') := P_X(A')$ verwendet.

Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$,
$\Omega' = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ und
$X : \Omega \to \Omega'; X(a,b) := a+b$. Dann ist
$P_X(3) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Reelle Zufallsvariablen

Unter einer reellen Zufallsvariable verstehen wir eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$
$$X(\omega) := \Big(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\Big) ,$$

wobei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist und $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ der $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der Borel'schen Sigma-Algebra ist. Das Integral ist komponentenweise definiert durch

$$\int_\Omega X dP := \left(\int_\Omega X_1 dP, \cdots, \int_\Omega X_n dP\right)$$

Verteilungsfunktion

Für eine reelle Zufallsvariable heißt

$$F_X : \Omega \to [0,1]$$
$$F_X(x) := P(X \leq x) := P_X((-\infty, x)) = P(X^{-1}(-\infty, x))$$

Verteilungsfunktion von X.

Dichte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, wobei alle $A \in \mathcal{A}$ Lebesgue-messbar sind. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Dichte, falls für ihr Lebesgue-Integral $\int_\Omega f d\mu = 1$ gilt.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ ist eine Dichte auf $\mathbb{R}$.

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ (da } \cos^2 + \sin^2 = 1)$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r \cdot e^{-r^2}\, dr$$

$$= -\frac{\pi}{4}[e^{-r^2}]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Beispiel

Analog beweist man, dass für alle $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ die Funktion $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ eine Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.

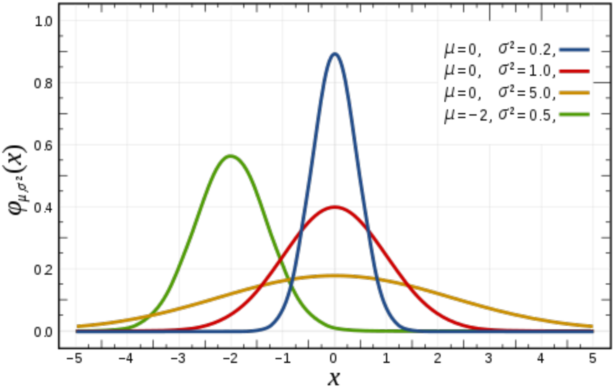


Figure: Quelle: Wikipedia

Normalverteilung

Eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt, wenn $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ gilt. Man schreibt auch $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

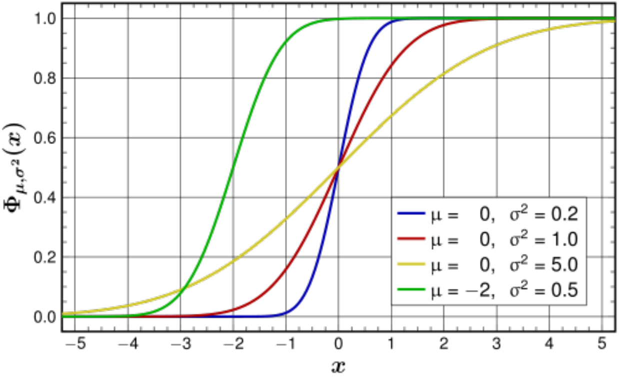


Figure: Quelle: Wikipedia

Zufallsvariablen

Verteilung und Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(R, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\{X_i\}_{i=1}^n$ ein Folge von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to R$. Die Zufallsvariablen heißen identisch verteilt, falls $P_{X_i} = P_{X_j}$ für alle i, j und stochastisch unabhängig, falls $P_{(X_1, \cdots, X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$ gilt.

Erwartungswert

Eine reelle Zufallsvariable ist integrierbar und ihr Erwartungswert wird definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \, dP \, .$$

Erwartungswert

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine eindimensionale reelle Zufallsvariable, so ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

Transformationsformel

Für eine reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(g \circ X) := \int_\Omega g \circ X \; dP = \int_{\mathbb{R}^n} g \; dP_X \; .$$

Ist insbesondere $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Dichte für P_X , so ist

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot f(x) \; d\mu$$

das Lebesgue-Integral der Funktion $x \cdot f(x)$.

Transformationsformel

Für $g = 1_A$ mit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int 1_A \, dP_X = P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \int 1_{X^{-1}(A)} \, dP$$
$$= \int 1_A \circ X \, dP$$

Für eine Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$ folgt das Ergebnis aus der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen. Für integrierbares g folgt das Resultat mit Hilfe von Konvergenzsätzen für das Integral.

Erwartungswert

Beispiel

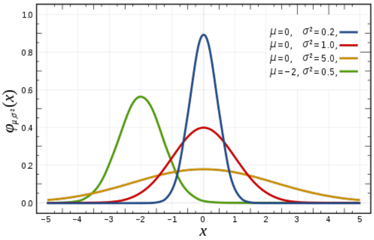
$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$,
$X(\text{Kopf}) = 0, X(\text{Zahl}) = 1$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot P(X^{-1}(0)) + 1 \cdot P(X^{-1}(1))$$
$$= 0 \cdot P(\text{Kopf}) + 1 \cdot P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$$

Beispiel

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &:= \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (y+\mu) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} \, dy \\
&= \mu \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} \, dy + \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} \, dy = \mu
\end{aligned}$$



Erwartungswert

Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$X(x) \leq Y(x) \ \forall x \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$

Markov Ungleichung

Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle, integrierbare Zufallsvariable und $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ mit $f(\epsilon) > 0$

$$P(|Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f \circ |Y|)}{f(\epsilon)}$$

Beweis

Da $f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}} \leq f \circ |Y|$ folgt

$$\begin{aligned} f(\epsilon)P(|Y| \geq \epsilon) =& f(\epsilon)\mathbb{E}(1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) = \mathbb{E}(f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) \\ \leq& \mathbb{E}(f \circ |Y|) \end{aligned}$$

Varianz

Für eine reelle Zufallsvariable ist die Varianz definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \ .$$

Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(xe^{-\frac{x^2}{2}}) \; dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x(e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx \right) = 0 + 1 = 1$$

LINK: Partielle Integration. Mit "Verschiebungstrick"
$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Erwartungswert

Tschebyscheff-Ungleichung

Für eine reelle, integrierbare und quadratintegrierbare Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\epsilon^2}$$

Beweis

Folgt direkt aus der Markov-Ungleichung mit $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$ und $f(x) = x^2$

Highlight

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen (uid, iid(englisch)) mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$, dann gilt

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(stochastische Konvergenz).

Beweis

Mit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu$ ist $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - \mu) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma}{n}$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt die Behauptung.

Erwartungswert