Maßraum

Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist ein Tupel bestehend aus der Grundmenge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Maß

Ein Maß auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein Maß mit $\mu(\Omega) = 1$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Meßbare Abbildung

Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen zwei Maßräumen $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ heißt meßbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

Meßbare Abbildung

Das Urbild jedes Ereignisses ist ein Ereignis

Beispiel

Bei endlichen Mengen und Potenzmenge als Sigma-Algebra ist jede Funktion Meßbar. Jede stetige Funktion ist meßbar bezüglich Borellscher Sigma-Algebra.

Konvention

Ab jetzt steht $\mathbb{R}^n$ immer für den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borellsche Sigma-Algebra und μ das Lebesgue Maß ist.

Eindeutigkeit

Später wichtig: Das Lebesgue Maß ist durch seine Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Die Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$. Mit $\mathcal{M}^+$ bezeichnen wir die meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(\omega) \geq 0$.

Treppenfunktion

Eine meßbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

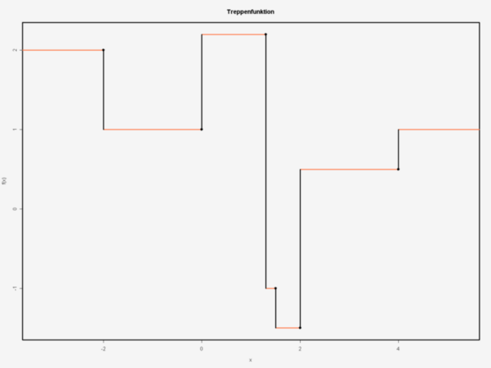


Figure: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

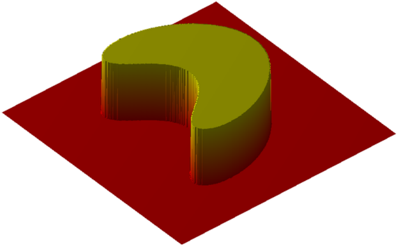


Figure: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indicator_function_illustration.png

Darstellung von Treppenfuntkion

Eine Treppenfunktion hat eine Darstellung $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1_{A_i}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Treppenfuntkion

Die Menge der Treppenfunktionen bezweichnen wir mit $\mathcal{T}$ und die Treppenfunktionen mit $a_i > 0$ mit $\mathcal{T}^+$.

Eindeutigkeit der Darstellung

Sind $u = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}$ zwei verschiedene Darstellungen einer Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ so ist $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$

Integral einer Treppenfunktion

Für eine Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ definieren wir

$$\int_\Omega u = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

Diese ist unabhängig von der Darstellung.

Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Sind u und v zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

- $\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_\Omega \alpha u + \beta v d\mu = \alpha \int_\Omega u d\mu + \beta \int_\Omega v d\mu$
- Ist $u(x) \leq v(x)$ für alle x, so ist $\int_\Omega u d\mu \leq \int_\Omega v d\mu$

Meßbare Abbildungen

Eine nicht negative Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge $u_n \in \mathcal{T}^+$ gibt mit $u_n \uparrow f$.

Sei $u_n \in \mathcal{T}^+$:
Müssen zeigen, dass Grenzwert auch in $\mathcal{T}^+$ liegt. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass der Limes ein inf-sup ist und dieser Vereinigung von meßbaren Mengen ist.
Sei nun umgekehrt $f \in \mathcal{M}^+$ meßbar:
definiere

$$A_{j,n} := \begin{cases} \{\frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n}\} \text{ für } j = 0, \ldots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\} \text{ für } j = n \cdot 2^n \end{cases}$$

und damit

$$u_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} 1_{A_{j,n}}$$

Damit gilt $u_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x) + 2^{-n}$.

Integral nicht negativer meßbarer Funktionen

Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ definieren wir

$$\int_\Omega f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int_\Omega u_n \, d\mu$$

wobei $u_n \in \mathcal{T}^+$ eine Folge von Treppenfunktionen ist mit $u_n \uparrow f$.

!!

Müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig ist von der Treppenfunktion.

Für jede wachsende Folge $(u_n) \in \mathcal{T}^+$ und jedes $v \in \mathcal{T}^+$ mit $v \le \lim_{n\to\infty} u_n$ gilt

$$\int_\Omega v \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu$$

Sei $v = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_j}$. Für festes $\beta > 1$ setze $B_n := \{\beta u_n \geq v\}$. Damit gilt $B_n \uparrow \Omega$ und $\beta u_n \geq v \cdot 1_{B_n}$ und man erhält

$$\int_\Omega v \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v \cdot 1_{B_n} \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \beta \int_\Omega u_n \, d\mu = \beta \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu$$

Mit $\beta \to 1$ folgt die Behauptung.

Sind nun $u_n, v_n \in \mathcal{T}^+$ zwei wachsende Folgen mit $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$ so gilt $\int_\Omega v_k \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_k \, d\mu$ und damit $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega v_k \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_k \, d\mu$. Aus Symmetriegründen folgt die Unabhängikeit der Definition von der Wahl der Folgen von Treppenfunktionen.

Integral für meßbare Funktionen

Für eine meßbare Funktion $f \in \mathcal{M}$ setzen wir

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu$$

wobei $f^+(x) := \max(0, f(x))$ und $f^-(x) := \min(0, f(x))$

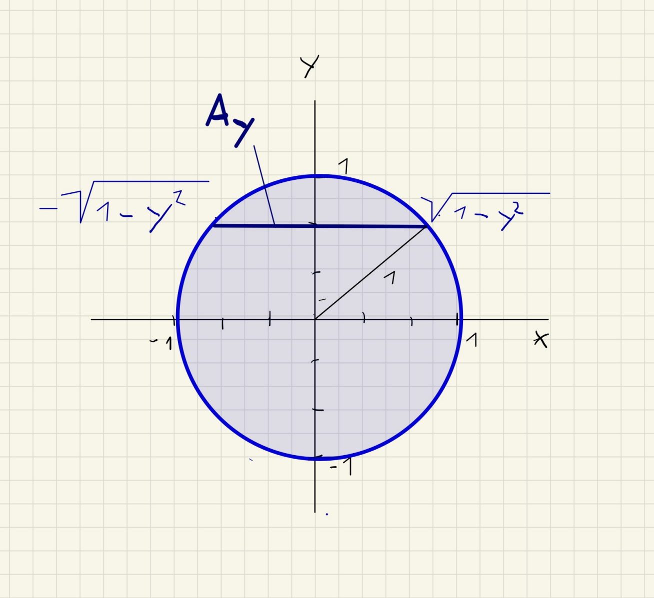
Integral für meßbare Funktionen

Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, falls ihr Integral endlich ist.

Eigenschaften des Integrals

Sind f und g zwei meßbare Funktionen, dann gilt:

- $\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_\Omega \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu$
- Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle x, so ist $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$
- $\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$



y
A_y
1
$-\sqrt{1-y^2}$
$\sqrt{1-y^2}$
1
-1
1
x
-1

Beispiel

Sei $K := B_1^2(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$. Anschaulich ist

$$\mu_2(K) = \int_K 1 d\mu = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$(substitution\ y = sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\, du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Fubini

Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f \, d\mu_{n-k} \, d\mu_k$$

Beweisidee:

Schnittmenge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^k$ heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (x,y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von A zu y.

Schnittmenge

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ erhält man ein Maß

$$\mu(A)' := \int_{\mathbb{R}^k} \mu_{n-k}(A_y) d\mu_k$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue Maßes folgt die Behauptung.