Motivation

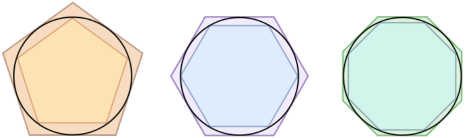
$$\Omega = \{B, W\}$$

$$P(W) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$1_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega = B, \\ 0 & \text{wenn } \omega = W. \end{cases}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_B(\omega_i) = ?$$

Archimedes von Syrakus um 287 v. Chr. vermutlich in Syrakus; † 212 v. Chr. ebenda) war ein griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike. Seine Werke waren auch noch im 16. und 17. Jahrhundert bei der Entwicklung der höheren Analysis von Bedeutung.



Maßraum

Ein Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist ein Tupel bestehend aus der Grundmenge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

Maß

Ein Maß auf einem Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Wahrscheinlichkeitsmaß

Ein Maß mit $\mu(\Omega) = 1$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

erzeugte Sigma-Algebra

Sei X eine Menge und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem.

Die von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra ist definiert als

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{F} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

- $\mathcal{P}(X)$ selbst ist eine σ-Algebra und enthält $\mathcal{C}$.
- Daher ist die Menge aller σ-Algebren, die $\mathcal{C}$ enthalten, nicht leer.
- Der Schnitt beliebig vieler σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra.
- Damit existiert und ist eindeutig die kleinste σ-Algebra mit $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.
- $\sigma(\mathcal{C})$ enthält genau diejenigen Mengen, die aus $\mathcal{C}$ gewonnen werden können durch
- Komplementbildung,
- abzählbare Vereinigungen,
- (und folglich abzählbare Durchschnitte).

Borellsche Sigma-Algebra auf $\mathbb{R}$

Die *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{\text{offene Teilmengen von } \mathbb{R}\}\big).$$

Äquivalent:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{(a, b) : a < b\}\big) = \sigma\big(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}\big).$$

Inklusion 2: offene Intervalle

Jede offene Menge U lässt sich darstellen als

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k), \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q}.$$

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap ((-\infty, a])^c$$

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \tfrac{1}{n}) \in \sigma(\mathcal{H})$$

Meßbare Abbildung

Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen zwei Maßräumen $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ heißt meßbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

Meßbare Abbildung

Das Urbild jedes Ereignisses ist ein Ereignis

Beispiel

Bei endlichen Mengen mit der Potenzmenge als Sigma-Algebra ist jede Funktion Meßbar.

Meßbare Funktionen

Die Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_\Omega$ oder einfach $\mathcal{M}$ wenn der Kontext klar ist. Mit $\mathcal{M}^+$ bezeichnen wir die meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(\omega) \geq 0$.

Messbarkeit von Abbildungen

Sei (X, Σ) ein Messraum, Y eine Menge und

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y), \quad \mathcal{T} = \sigma(\mathcal{E})$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra auf Y. Dann ist

$$f : (X, \Sigma) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$$

genau dann messbar, wenn

$$f^{-1}(E) \in \Sigma \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.

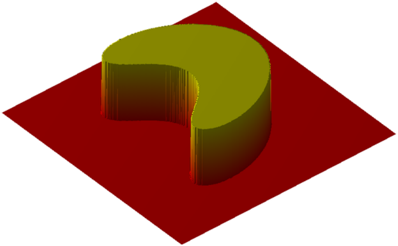


Figure: Quelle: Wikipedia:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Indicator_function_illustration.png

Stochastik

Treppenfunktion

Eine meßbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

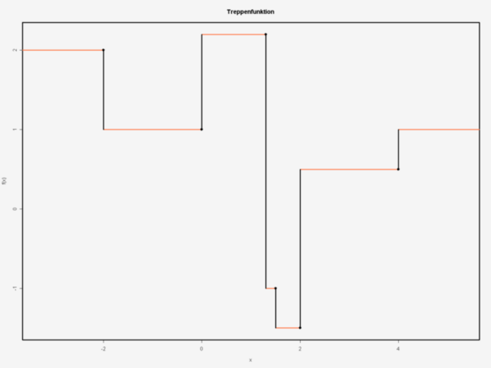


Figure: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png

Beispiel einer Treppenfuntkion

$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1_{A_i}(x)$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist eine Treppenfunktion.

Treppenfuntkion

Eine Treppenfunktion u hat eine Darstellung $u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1_{A_i}(x)$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ ist eine Treppenfunktion.

Treppenfuntkion

Die Menge der Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$ und die Treppenfunktionen mit $a_i > 0$ mit $\mathcal{T}^+$.

Eindeutigkeit der Darstellung

Sind $u = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}$ zwei verschiedene Darstellungen einer Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ so ist $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$

Beweis

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$$

Integral einer Treppenfunktion

Für eine Treppenfunktion $u \in \mathcal{T}^+$ definieren wir

$$\int_\Omega u \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

Diese ist unabhängig von der Darstellung.

Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Sind u und v zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

- $\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_\Omega \alpha u + \beta v d\mu = \alpha \int_\Omega u d\mu + \beta \int_\Omega v d\mu$
- Ist $u(x) \leq v(x)$ für alle x, so ist $\int_\Omega u d\mu \leq \int_\Omega v d\mu$

Integral nicht negativer meßbarer Funktionen

Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}^+$ definieren wir

$$\int_\Omega f \, d\mu := sup\left\{ \int_\Omega u \, d\mu \mid u \in \mathcal{T}^+, u(x) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \Omega \right\}$$

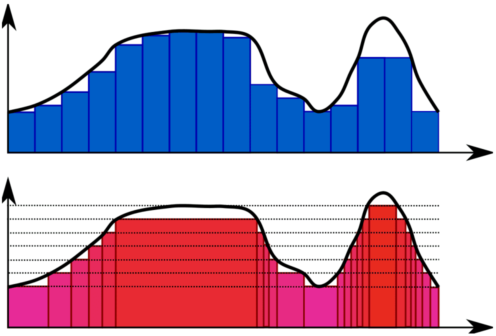
Eigenschaften des Integrals nicht negativer meßbarer Funktionen

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ meßbar. Dann gilt:

- Ist $f \leq g$ punktweise, dann ist $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$
- Ist $f_n \in \mathcal{T}^+$ eine punktweise konvergente Folge $f_n \uparrow f$, dann konergierten die Integrale $\int_\Omega f d\mu \uparrow \int_\Omega g d\mu$

Meßbare Abbildungen

Eine nicht negative messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge $f_n \in \mathcal{T}^+$ gibt mit $f_n \uparrow f$.



Sei $f \in \mathcal{M}^+$ meßbar:
definiere

$$A_{j,n} := \begin{cases} \{\frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n}\} \text{ für } j = 0, \ldots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\} \text{ für } j = n \cdot 2^n \end{cases}$$

und damit

$$f_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} 1_{A_{j,n}}$$

Damit gilt für festes x immer $f_n(x) \leq f(x)$ und man kann n immer so wählen, dass $f(x) \leq f_n(x) + 2^{-n}$ gilt.

Sei

$$f_n(x) \;=\; \sum_{i=1}^{k_n} a_{n,i}\, \mathbf{1}_{A_{n,i}}(x),$$

eine punktweise konvergente folge $f_n \uparrow f$ von Treppenfunktionen.

1. *Treppenfunktionen sind messbar.*
   Für feste n und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

   $$\{x : f_n(x) < \alpha\} = \bigcup_{\substack{1 \le i \le k_n \\ a_{n,i} < \alpha}} A_{n,i} \;\in\; \Sigma,$$

   da endliche und abzählbare Vereinigungen sowie Komplemente in Σ liegen. Also ist f_n messbar.
2. *Charakterisierung der Messbarkeit.*
   Eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

   $$\{x : g(x) < \alpha\} \;\in\; \Sigma.$$

Da $f_n(x) \to f(x)$ punktweise, gilt für jedes $x \in X$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x) < \alpha \quad \iff \quad \exists\, k\; \forall\, n \geq k : \; f_n(x) < \alpha.$$

Daher

$$\{x : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : f_n(x) < \alpha\}.$$

Integral für meßbare Funktionen

Für eine meßbare Funktion $f \in \mathcal{M}$ setzen wir

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega -f^- \, d\mu$$

wobei $f^+(x) := \max(0, f(x))$ und $f^-(x) := \min(0, f(x))$

Integral für meßbare Funktionen

Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, falls ihr Integral endlich ist.

Eigenschaften des Integrals

Sind f und g zwei meßbare Funktionen, dann gilt:

- $\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A)$
- $\int_\Omega \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu$
- Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle x, so ist $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$
- $\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$

Zufallsvariablen

Zufallssvariable

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(R, \mathcal{B})$ ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung $X : \Omega \to R$.

Reelle Zufallssvariable

Die Zufallsvariable heisst reell, falls $R = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

Definition des Bildmaßes

Bildmaß

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum, $X : \Omega \to E$ eine Zufallssvariable. Dann definiert man das *Bildmaß* $\mathbb{P}_X$ von $\mathbb{P}$ unter X durch

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{E}.$$

$\mathbb{P}_X$ heißt auch Verteilung von X.

Dichte

Ist $(E, \mathcal{E}, \mu)$ zusätzlich ein Maßraum, so heißt eine Messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ dichte für $\mathbb{P}_X$, falls

$$\mathbb{P}_X(E) = \int_E f \, d\mu$$

für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt.

Bildmaß

Ist X eine reelle Zufallsvariable, so heißt $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ Verteilungsfunktion.

Erwartungswert

Transformationsformel

Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to E$ und eine reelle, integrierbare Funktion $g : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(g \circ X) := \int_\Omega g \circ X \, dP = \int_\mathcal{E} g \, dP_X \, .$$

Ist $f(x)$ eine Dichte für P_X , so ist

$$\mathbb{E}(g \circ X) = \int_\mathcal{E} g(x) \cdot f(x) \, d\mu$$

.

Transformationsformel

Für $g = 1_A$ mit $A \in \mathcal{E}$ ist

$$\int 1_A \, dP_X = P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \int 1_{X^{-1}(A)} \, dP$$
$$= \int 1_A \circ X \, dP$$

Für eine Treppenfunktion $g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$ folgt das Ergebnis aus der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen. Für integrierbares g folgt das Resultat mit Hilfe von Konvergenzsätzen für das Integral.

Verteilung und Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(R, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\{X_i\}_{i=1}^n$ ein Folge von Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to R$. Die Zufallsvariablen heißen identisch verteilt, falls $P_{X_i} = P_{X_j}$ für alle i, j und stochastisch unabhängig, falls $P_{(X_1,\cdots,X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$ gilt.

Erwartungswert

Erwartungswert

Für eine reelle integrierbare Zufallsvariable ist ihr Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \, dP \, .$$

Erwartungswert

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable, so ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

Eigenschaften

Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ reelle, integrierbare Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$ konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$X(x) \leq Y(x)\ \forall x \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$

Erwartungswert

Varianz

Für eine reelle Zufallsvariable ist die Varianz definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)\ .$$

Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

Kovarianz

Für reelle Zufallsvariable X, Y ist die Kovarianz definiert durch

$$\mathcal{C}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))\ .$$

Kovarianz

Per Definition ist

$$\mathcal{C}(X, X) := \mathbb{V}(X).$$

Kovarianz

X, Y stoch. unabhängig $\Rightarrow \mathcal{C}(X, Y) = 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}[X\,Y] \;-\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].\\ &= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \;-\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0.\end{aligned}$$

Kovarianz

$\mathcal{C}(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y$ stoch. unabhängig.

- Sei X eine Zufallsvariable mit
$$\mathbb{P}(X=0) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \tfrac{1}{2}.$$
- Sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable mit
$$\mathbb{P}(Y=-1) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y=1) = \tfrac{1}{2}.$$
- Definiere
$$U = X\,Y.$$

Behauptung: U und X haben Nullkovarianz (sind also unkorreliert), sind aber nicht unabhängig.

Da

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U] &= \mathbb{E}[X\,Y] \\ &= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit auf der Unabhängigkeit von X und Y

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(U,X) &= \mathbb{E}\big[(U-\mathbb{E}[U])\,(X-\mathbb{E}[X])\big] = \mathbb{E}\big[U\,(X-\tfrac{1}{2})\big] && (1)\\
&= \mathbb{E}\big[X^2Y-\tfrac{1}{2}\,XY\big] = \mathbb{E}\big[(X^2-\tfrac{1}{2}X)\,Y\big] && (2)\\
&= \mathbb{E}\big[X^2-\tfrac{1}{2}X\big]\,\mathbb{E}[Y] = 0. && (3)
\end{aligned}
$$

Somit sind U und X unkorreliert.
Für Unabhängigkeit müsste gelten

$$
\mathbb{P}(U=a \mid X=b) = \mathbb{P}(U=a) \quad \forall\, a,b,
$$

was z. B. für $a=1$, $b=0$ versagt, da

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=1 \mid X=0) = \mathbb{P}(XY=1 \mid X=0) = 0,\\
\mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(XY=1) = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathbb{P}(U=1 \mid X=0) \neq \mathbb{P}(U=1)$ und somit U und X nicht unabhängig.

Beispiel

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, $P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$,
$X(\text{Kopf}) = 0, X(\text{Zahl}) = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X^{-1}(0)) + 1 \cdot P(X^{-1}(1)) \\ &= 0 \cdot P(\text{Kopf}) + 1 \cdot P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $U(a,b)$ auf einem Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Dichte: } f(x) := \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|}$$

$$\Rightarrow \text{Verteilung: } F(x) = P_f((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1_{(a,b)}}{|b-a|} dt$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq a \\ \frac{x-a}{|b-a|} \text{ für } a \leq x \leq b \\ 1 \text{ für } x \geq b \end{cases}$$

Verteilungen

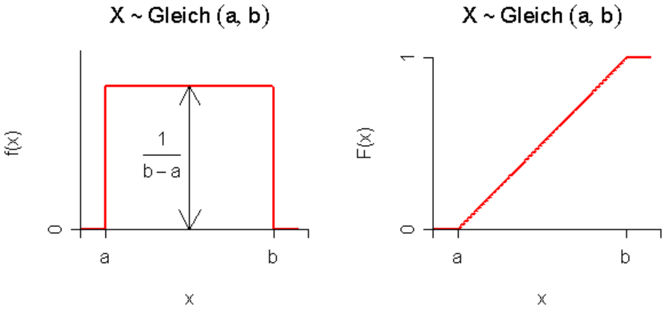


Figure: Quelle: Wikipedia

Gleichverteilung

Sei X ~U(a,b).

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} x \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} x^2 \cdot 1\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch

Dichte: $f(x) := \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

$\Rightarrow$ Verteilung: $F(x) = N(\mu, \sigma^2)(-\infty, x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt$

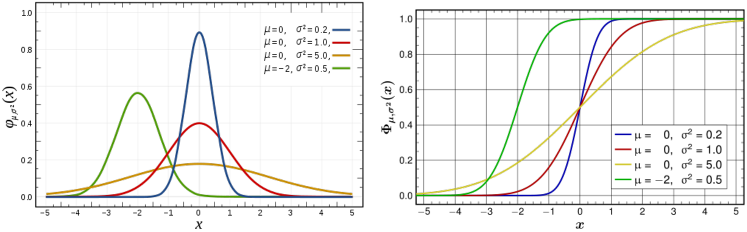


Figure: Quelle: Wikipedia

Normalverteilung

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung $Pois(\lambda)$ auf $\mathbb{N}_{\geq 0}$ ist definiert durch

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow F_\lambda(n) = \sum_{k=0}^{n} P_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

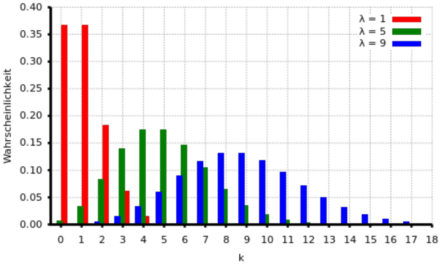


Figure: Quelle: Wikipedia

Poisson Verteilung

Die Poisson Verteilung beschreibt das Auftreten von seltenen Ereignissen und spielt bei Zählprozessen eine wichtige Rolle.

Poisson Verteilung

$X \sim Pois(\lambda)$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{V}(X) = \lambda$$

Verteilungen

Bernoulliverteilung

Die Bernoulliverteilung Für $\Omega = \{0, 1\}$ und $p \in [0, 1]$ ist definiert durch

$$P(\omega) = p^{\omega}(1-p)^{1-\omega}$$

Beispiele

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), $p = 1/2$, und Zahl (Misserfolg), $q = 1/2$.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine 6 als Erfolg gewertet wird: $p = 1/6, q = 5/6$.
- Qualitätsprüfung (einwandfrei, nicht einwandfrei).
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein ($p \gtrapprox 0$), tritt nicht ein ($q \lessapprox 1$).

Verteilungen

Binomialverteilung

$B(k,p,n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Binomialverteilung

$X_1, \cdots, X_n \sim B \Rightarrow \sum X_i \sim B$

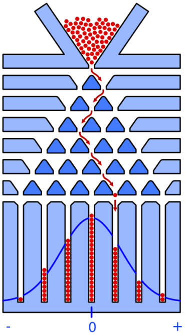


Figure: Quelle: Wikipedia

Markov Ungleichung

Sei $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle, integrierbare Zufallsvariable und $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ mit $f(\epsilon) > 0$

$$P(|Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f \circ |Y|)}{f(\epsilon)}$$

Beweis

Für $f(x) = x$ und $X > 0$

- Zerlegung in zwei Teile:

$$X = X\,\mathbf{1}_{\{X<a\}} \,+\, X\,\mathbf{1}_{\{X\geq a\}},$$

  wobei $\mathbf{1}_{\{.\}}$ die Indikatorfunktion ist.
- Beachte, dass

$$X\,\mathbf{1}_{\{X<a\}} < a, \qquad X\,\mathbf{1}_{\{X\geq a\}} \;\geq\; a\,\mathbf{1}_{\{X\geq a\}}.$$

- Daher

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[X\,\mathbf{1}_{\{X<a\}}\right] + \mathbb{E}\left[X\,\mathbf{1}_{\{X\geq a\}}\right] \\ &\geq 0 \,+\, a\,\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X\geq a\}}\right] = a\,\mathbb{P}(X \geq a).\end{aligned}$$

- Daraus folgt unmittelbar die *Markov-Ungleichung*: $\mathbb{P}(X \geq a) \;\leq\; \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Beweis

Da $f(\epsilon)1_{\{|Y|\geq\epsilon\}} \leq f \circ |Y|$ folgt

$$\begin{aligned} f(\epsilon)P(|Y| \geq \epsilon) =& f(\epsilon)\mathbb{E}(1_{\{|Y|\geq\epsilon\}}) = \mathbb{E}(f(\epsilon)1_{\{|Y|\geq\epsilon\}}) \\ \leq& \mathbb{E}(f \circ |Y|) \end{aligned}$$

Erwartungswert

Tschebyscheff-Ungleichung

Für eine reelle, integrierbare und quadratintegrierbare Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\epsilon^2}$$

Beweis

Folgt direkt aus der Markov-Ungleichung mit $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$ und $f(x) = x^2$

Highlight

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen (uiv, iid(englisch)) mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$ und $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$, dann gilt

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(stochastische Konvergenz).

Beweis

Mit $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu$ ist $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - \mu) = 0$ und $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma}{n}$. Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt die Behauptung.

Erwartungswert