Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

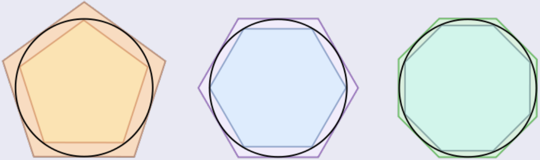


Figure: Quelle: Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes_pi.svg

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

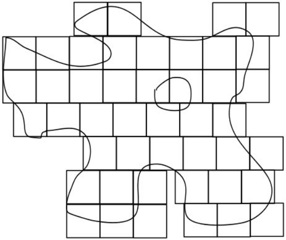


Figure: Grobe Überdeckung

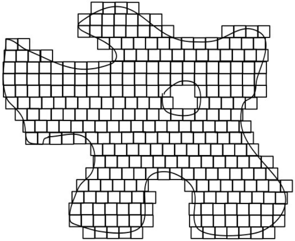


Figure: Feinere Überdeckung

Quader

Für abgeschlossene Intervalle $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ nennen wir

$$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

einen *n*-dimensionalen Quader und

$$\overset{\circ}{I} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

sein Inneres. Wir definieren das Volumen

$$\mathrm{vol}(I) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \; .$$

Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen Quader.

Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein k}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen degenerierten Quader.

Meßbare Mengen

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jeden Punkt $x \in U$ ein Radius $\epsilon > 0$ existiert, so dass der Ball $B_\epsilon(x)$ in U enthalten ist, also $B_\epsilon(x) \subset U$ gilt. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist.

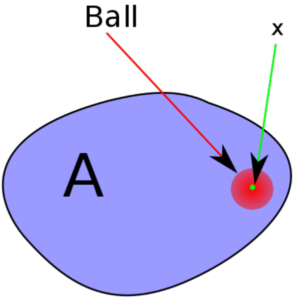


Figure: Quelle: Wikipedia

Hüllquader

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir eine Menge von Quadern $\{I_j \mid I_j \in \mathbf{I}(n)\}$ mit $A \subset \bigcup_j I_j$ als Hüllquader für A.

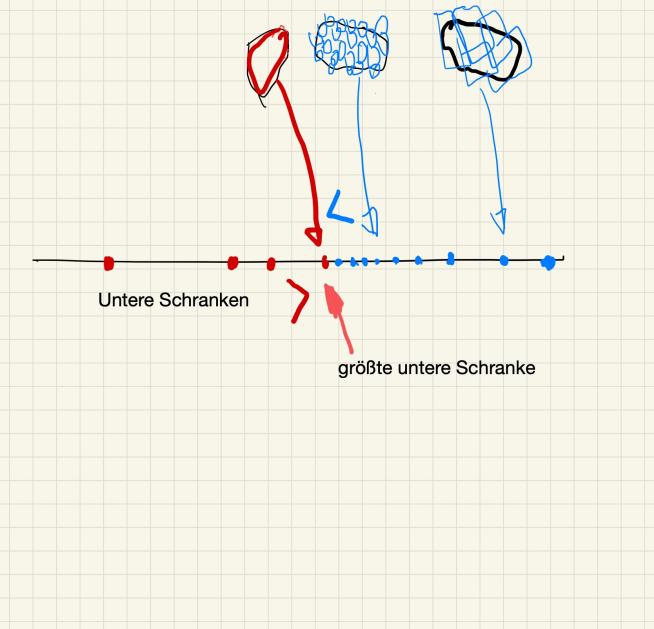
Lebesguesche äußere Maß

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j)\ ;\ I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$$

Infimum

Größte untere Schranke.


Untere Schranken
größte untere Schranke

Monotonie

Für $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis

Da $A \subset B$ Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit $\mu(A) \leq \mu(B)$.

σ-subadditivität

Sei $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu(\bigcup_{j}^{\infty} A_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Beweis

Für jedes A_j und $\epsilon > 0$ können wir eine geeignete Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k K_{j,k}$ mit Hüllquadern $K_{j,k}$ finden, so dass $\sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Da $\bigcup_j A_j \subset \bigcup_j \bigcup_k K_{j,k}$ eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup A_j\right) \leq \sum_j \sum_k \mathrm{vol}(K_{j,k}) \leq (\sum_j \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}})$$
$$= (\sum_j \mu(A_j)) + \epsilon$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Meßbare Menge

Für einen Quader I gilt $\mu(I) = \mathrm{vol}(I)$.

Da I eine Überdeckung von I mit Hüllquadern ist, folgt $\mu(I) \leq \text{vol}(I)$.
Müssen also noch $\mu(I) \geq \text{vol}(I)$ zeigen:
Dazu Sei $I' := \{I_k\}_k$ eine abzählbare überdeckung von I mit Hüllquadern. Vergrößere die Quader I_k etwas, so dass man I_k^* erhält mit $I_k \subset \overset{\circ}{I_k^*}$ und $\text{vol}(I_k^*) \leq (1+\epsilon)\text{vol}(I_k)$.
Da I kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), gibt es eine endliche Auswahl mit

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i^*$$

Damit erhlten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(I) &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(I_i^*) \\
&(1+\epsilon) \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(I_i) \\
&\leq (1+\epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_i) \\
&= (1+\epsilon)\mu(S)
\end{aligned}
$$

Maßproblem

Es gibt disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(A \cup B) \neq \mu(A) + \mu(B)$. Konstruiert werde diese mit Hilfe der Vitali Mengen. Hierfür wird das Auswahlaxiom benötigt.

Lösung

μ Einschränken auf "kleinere" σ-Algebren.

Meßbare Menge

Eine Menge A heißt Lebesgue meßbar, wenn für alle $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt. Die Menge der Lebesgue meßbaren Mengen wird mit $\mathcal{L}^n$ bezeichnet.

Meßbare Menge

$\mathcal{L}^n$ ist eine σ-Algebra und für zwei Lebesgue meßbare Mengen $A, B \in \mathcal{L}^n$ ist

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Aufgrund der σ-subadditivität gilt immer

$$\mu(Q) = \mu(Q \cap A \cup Q \cap A^c) \leq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

Um zu zeigen, dass eine Menge mesßbar ist, reicht es also zu zeigen, dass

$$\mu(Q) \geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)$$

gilt.

$\mathcal{L}^n$ ist eine σ-Algebra:
Ist A messbar, so ist A^c messbar, da die Bedingung symmetrisch ist in A und A^c.
Sind $A, B \in \mathcal{L}^n$ messbar, so gilt

$$
\begin{aligned}
\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c) \\
&\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c \cap B) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\
&\quad [\text{Messbarkeit von B angew. auf } Q \cap A^c] \\
&\geq \mu((Q \cap A) \cup (Q \cap A^c \cap B)) + \mu(Q \cap A^c \cap B^c) \\
&\quad [\sigma\text{-subadditivität}] \\
&= \mu(Q \cap (A \cup B)) + \mu(Q \cap (A \cup B)^c) \\
&\quad [\text{Mengenlehre}]
\end{aligned}
$$

σ-additivität:
Für $M, N \in \mathcal{L}^n$ mit $M \cap N = \emptyset$ folgt aus Meßbarkeitsbedingung für $Q' = Q \cap (M \cup N)$

$$\mu(Q \cap (M \cup N)) = \mu(Q \cap M) + \mu(Q \cap N)$$

und via Induktion für eine Folge disjunkter, messbarer Mengen A_j

$$\mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) = \sum_j \mu(Q \cap A_j)$$

σ-additivität:
Wir erhalten

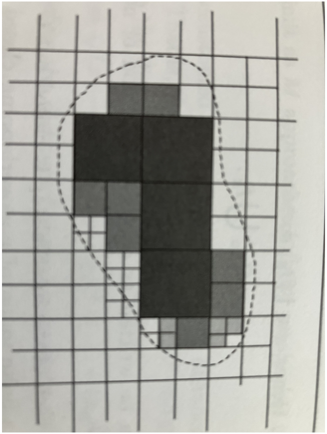
$$\begin{aligned}
\mu(Q) &\geq \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)) + \mu(Q \cap (\bigcup_j A_j)^c) \\
&\geq \sum_j \mu(Q \cap A_j) + \mu(Q \cap A_j^c) \\
&\geq \mu(Q \cap A) + \mu(Q \cap A^c)
\end{aligned}$$

[σ-subadditivität]

Meßbare Menge

Offene Mengen sind meßbar.

Wir zeigen: Jede offene Menge U ist abzählbare Vereinigung nicht überlappender Quader.



Meßbare Menge

Eine Menge A ist genau dann Lebesgue meßbar, wenn es für bel. $\epsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge C und eine offene Menge U gibt mit $C \subset A \subset U$ und $\mu(U \setminus C) < \epsilon$

Borel'sche Sigma-Algebra

Die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$über $\mathbb{R}^n$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen $\mathcal{U}$ enthält, also

$$A_\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n);\ \mathcal{U} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

Existenz

Die Borel'sche σ-Algebra existiert, da die Potenzmenge eine σ-Algebra ist.

Messbarkeit

Die Borel'sche σ-Algebra ist in der σ-Algebra der Lebesgue messbaren Mengen enthalten.