

### Quader und lineare Abbildungen

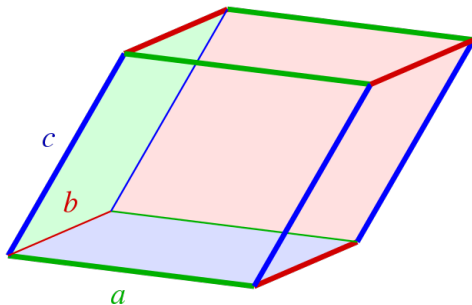
Seien  $U$  und  $V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ,  $T' : U \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $Q \in \mathbb{I}(n)$  ein Quader. Dann gilt:

$$\text{vol}(T'(Q)) = \det(T') \cdot \text{vol}(Q) .$$

Für Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  im  $\mathbb{R}^n$  heißt die Menge

$$P(a_1, \dots, a_n) := \left\{ x = \sum_{k=1}^n t_k a_k \mid t_1, \dots, t_n \in [0, 1] \right\}$$

Parallelotop.



Es gilt

$$\text{vol}(P(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|.$$

Ausführlicher Beweis

### Diffeomorphismus

Seien  $U$  und  $V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $T : U \rightarrow V$  heißt Diffeomorphismus, wenn eine Umkehrfunktion  $T^{-1} : V \rightarrow U$  existiert, also  $T^{-1}(T(u)) = u$  gilt für alle  $u \in U$ , die ebenfalls differenzierbar ist.

Für eine invertierbare Matrix  $A$  ist  $T(x) := Ax$  ein Diffeomorphismus.

### Transformationssatz

Seien  $U$  und  $V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ,  $T : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_V f(y) d\mu = \int_U f(T(x)) \cdot |\det(T'(x))| d\mu .$$

Seien  $I_k \in \mathbb{I}(n)$  Quader,  $J_k := T(I_k)$  und  $b_k = T(c_k)$ . Dann ist

$$\sum_{k=1}^n b_k \operatorname{vol}(J_k) \approx \sum_{k=1}^n T(c_k) \cdot |\det T'(c_k)| \operatorname{vol}(I_k) .$$

Die Behauptung folgt dann (nicht trivial) durch den Übergang zu Grenzwerten mit entsprechenden Konvergenzsätzen.

### Beispiel

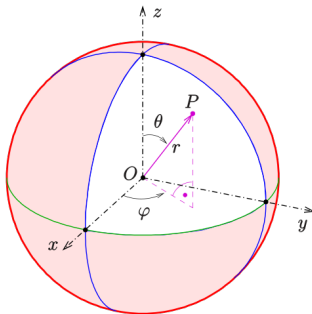
Wir betrachten den Ball  $B_r^3(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq r\}$ , den Quader  $I := [0, r] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und die Abbildung

$$T : I \rightarrow B_1^3(0)$$
$$T(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ r \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ r \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

### Beispiel

$$\det T'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos(\psi)$$

$$\int_{B_r^3(0)} 1 d\mu = \int_{[0,r]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^2 \cos(\psi) d\psi d\varphi dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$





## Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum. Eine Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \Omega'$$

D.h. für alle Ereignisse  $A' \in \mathcal{A}'$  ist

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

ein Ereignis in  $\mathcal{A}$ . Urbilder von Ereignissen sind also Ereignisse.

## Beispiel (Münzwurf)

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ ,  $\Omega' = \{0, 1\}$  mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und

$$X(\text{Kopf}) = 0$$

$$X(\text{Zahl}) = 1$$

## Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  
 $\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  mit jeweils Potenzmenge als Sigma-Algebra und  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ ;  $X(a, b) := a + b$ .

## Bildmaß

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein Messraum und  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  Eine Zufallsvariable. Durch

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A'))$$

für  $A' \in \mathcal{A}'$  wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega', \mathcal{A}')$  definiert. Es wird Bildmaß genannt. Anstelle von  $P_X(A')$  wird auch die Schreibweise  $P(X \in A') := P_X(A')$  verwendet.

## Beispiel (Summe zweier Würfel)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$   
 $\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  und  
 $X : \Omega \rightarrow \Omega'; X(a, b) := a + b.$  Dann ist  
 $P_X(3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

## Verteilungsfunktion

Für eine reelle Zufallsvariable heißt

$$F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

$$F_X(x) := P(X \leq x) := P_X((-\infty, x)) = P(X^{-1}(-\infty, x))$$

Verteilungsfunktion von  $X$ .

## Dichte

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Dichte, falls für ihr Lebesgue-Integral  $\int_{\Omega} f d\mu = 1$  gilt.

## Dichte

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Dichte der Verteilungsfunktion  $F_X : \Omega \rightarrow [0, 1]$  falls für ihr Lebesgue-Integral  $\int_{\Omega} f d\mu = 1$  ist und  $F_X(x) = \int_{\{X \leq x\}} f d\mu$

## Beispiel

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  ist eine Dichte auf  $\mathbb{R}$ .

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r^2 = x^2 + y^2 \text{ (da } \cos^2 + \sin^2 = 1)$$

LINK: Polarkoordinatentransformation

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

## Beispiel

Analog beweist man, dass für alle  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  die Funktion  $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$  eine Dichte auf  $\mathbb{R}$  ist.

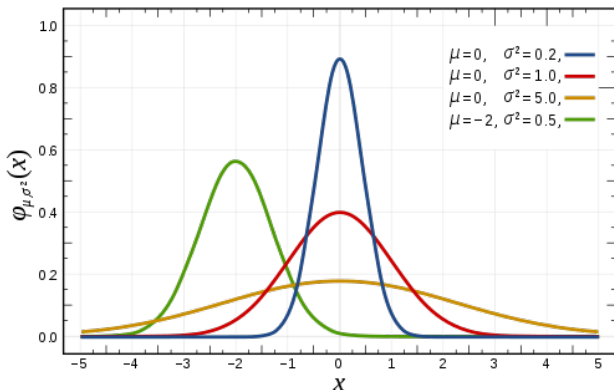


Figure: Quelle: Wikipedia



## Normalverteilung

Eine reelle Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt normalverteilt, wenn  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$  mit  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  gilt. Man schreibt auch  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

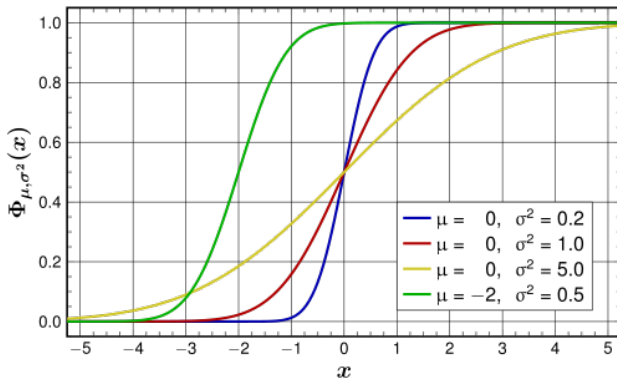


Figure: Quelle: Wikipedia

## Verteilung und Unabhängigkeit

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(R, \mathcal{B})$  ein Messraum und  $\{X_i\}_{i=1}^n$  ein Folge von Zufallsvariablen  $X_i : \Omega \rightarrow R$ . Die Zufallsvariablen heißen identisch verteilt, falls  $P_{X_i} = P_{X_j}$  für alle  $i, j$  und stochastisch unabhängig, falls  $P_{(X_1, \dots, X_n)} = \prod_{i=1}^n P_{X_i}$  gilt.

## Erwartungswert

Für eine reelle integrierbare Zufallsvariable ist ihr Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X \, dP .$$

## Erwartungswert

Ist  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Zufallsvariable, so ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

## Transformationsformel

Für eine reelle Zufallsvariable  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine integrierbare Funktion  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}(g \circ X) := \int_{\mathbb{R}^n} g \circ X \, dP = \int_{\mathbb{R}^m} g \, dP_X .$$

Ist  $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine Dichte für  $P_X$ , so ist

$$\mathbb{E}(g \circ X) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) \cdot f(x) \, d\mu$$

.

## Transformationsformel

Für  $g = 1_A$  mit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  ist

$$\begin{aligned}\int 1_A dP_X &= P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \int 1_{X^{-1}(A)} dP \\ &= \int 1_A \circ X dP\end{aligned}$$

Für eine Treppenfunktion  $g = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$  folgt das Ergebnis aus der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen. Für integrierbares  $g$  folgt das Resultat mit Hilfe von Konvergenzsätzen für das Integral.

## Beispiel

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ ,  $P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$ ,  
 $X(\text{Kopf}) = 0$ ,  $X(\text{Zahl}) = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X^{-1}(0)) + 1 \cdot P(X^{-1}(1)) \\ &= 0 \cdot P(\text{Kopf}) + 1 \cdot P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## Beispiel

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &:= \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\&= \int_{\mathbb{R}} (y + \mu) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy \\&= \mu \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy + \int_{\mathbb{R}} y \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} dy = \mu\end{aligned}$$

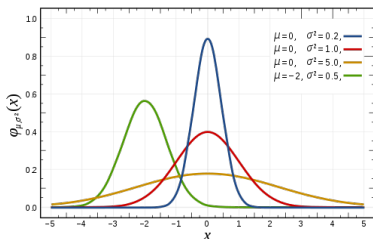


Figure: Quelle: Wikipedia

## Eigenschaften

Sind  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  reelle, integrierbare Zufallsvariablen und  $a, b \in \mathbb{R}$  konstant, so gilt:

$$\mathbb{E}(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$X(x) \leq Y(x) \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

$$X, Y \text{ stoch. unabhängig} \Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(1_A) = P(A)$$



## Markov Ungleichung

Sei  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle, integrierbare Zufallsvariable und  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton wachsend. Dann gilt für alle  $\epsilon > 0$  mit  $f(\epsilon) > 0$

$$P(|Y| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(f \circ |Y|)}{f(\epsilon)}$$

## Beweis

Da  $f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}} \leq f \circ |Y|$  folgt

$$\begin{aligned} f(\epsilon)P(|Y| \geq \epsilon) &= f(\epsilon)\mathbb{E}(1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) = \mathbb{E}(f(\epsilon)1_{\{|Y| \geq \epsilon\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(f \circ |Y|) \end{aligned}$$

## Varianz

Für eine reelle Zufallsvariable ist die Varianz definiert durch

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) .$$

## Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\end{aligned}$$

## Beispiel

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(xe^{-\frac{x^2}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ x(e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

LINK: Partielle Integration. Mit "Verschiebungstrick"

$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \sigma^2$ .

## Tschebyscheff-Ungleichung

Für eine reelle, integrierbare und quadratintegrierbare Zufallsvariable  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$P(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\epsilon^2}$$

## Beweis

Folgt direkt aus der Markov-Ungleichung mit  $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$  und  $f(x) = x^2$



## Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  unabhängige, reelle Zufallsvariablen (iid, iid(englisch)) mit  $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$  und  $\mathbb{V}(X_i) = \sigma < \infty$ , dann gilt

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma}{n \cdot \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(stochastische Konvergenz).

## Beweis

Mit  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu$  ist  $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i - \mu) = 0$  und  $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma}{n}$ . Aus der Tschebyscheff-Ungleichung folgt die Behauptung.

# Erwartungswert

