# Angewandte Mathematik

## Wie kann man Inhalte messen?

Archimedes approximierte den Flächeninhalt einer Kreisscheibe durch Vielecke, deren Flächeninhalt man leicht berechnen kann (250 v. Chr.).

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$



Figure: Quelle: Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Archimedes\_pi.svg

### Idee

• Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.

#### Idee

- Überdecke komplizierte Mengen mit einfachen Mengen, deren Inhalt man leicht berechnen kann.
- Mit Hilfe eines Grenzwertprozesses konstruiert man eine beliebig genaue Überdeckung.

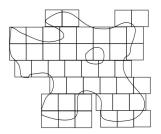


Figure: Grobe Überdeckung

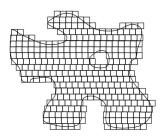


Figure: Feinere Überdeckung

#### Quader

Für offene Intervalle  $(a_i,b_i)\subset\mathbb{R}$  mit  $a_i\leq b_i$  nennen wir

$$I := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

einen n-dimensionalen Quader und

$$\bar{I} := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

seinen Abschluss. Wir definieren das Volumen

$$\operatorname{vol}(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \ .$$

## Quader

Mit

$$\mathbb{I}(n) := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}\}\$$

bezeichnen wir die Menge aller n-dimensionalen Quader.

#### Degenerierte Quader

Mit

$$\mathbb{I}^0(n) := \{(a_1,b_1) imes \cdots imes (a_n,b_n) \mid (a_i,b_i) \subset \mathbb{R} \text{ und } a_k = b_k \text{ für ein k} \}$$

bezeichnen wir die Menge aller *n*-dimensionalen degenerierten Quader.

#### Hüllquader

Für eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir eine Menge von Quadern  $\{I_j \mid I_j \in \mathbf{I}(n)\}$  mit  $A \subset \bigcup_j I_j$  als Hüllquader für A.

### Lebesguesche äußere Maß

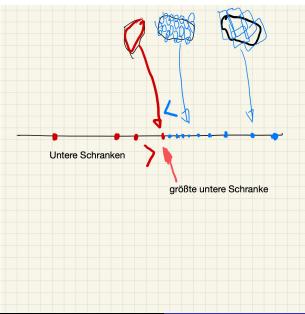
Für eine Menge  $A\subset\mathbb{R}^n$  definieren wir das Lebesguesche äußere Maß durch

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_j) \; ; \; I_j \in \mathbb{I}(n); A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

#### Infimum

Größte untere Schranke.

# Angewandte Mathematik



### Monotonie

Für  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$  ist  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

#### **Beweis**

Da  $A \subset B$  Teilmenge ist, sind Hüllquader von B auch Hüllquader von A und damit  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

#### $\sigma$ -subadditivität

Sei  $A_j \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Mengen. Dann gilt

$$\mu(\bigcup_{j}^{\infty}A_{j})\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_{j})$$

#### **Beweis**

Für jedes  $A_j$  und  $\epsilon>0$  können wir eine geeignete Überdeckung  $A_j\subset\bigcup_k K_{j,k}$  mit Hüllquadern  $K_{j,k}$  finden, so dass  $\sum_k \operatorname{vol}(K_{j,k})\leq \mu(A_j)+\frac{\epsilon}{2^{j+1}}.$  Da  $\bigcup_j A_j\subset\bigcup_j\bigcup_k K_{j,k}$  eine Überdeckung mit Hüllquadern ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup A_{j}\right) \leq \sum_{j} \sum_{k} \operatorname{vol}(K_{j,k}) \leq \left(\sum_{j} \mu(A_{j}) + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}\right)$$
$$= \left(\sum_{j} \mu(A_{j})\right) + \epsilon$$

(Die letzte Gleichung beruht auf dem Wert der geometrischen Reihe). Da die letzte Aussage für beliebiges  $\epsilon>0$  gilt, folgt die Behauptung.

# Angewandte Mathematik Messbare Mengen

## Maßproblem

Das Maßproblem ist nicht lösbar, d.h  $\mu$  ist kein Maß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . –Vitali Mengen

### Lösung

 $\mu$  Einschränken auf "kleinere"  $\sigma$ -Algebren.