G — группа порядка 24.

i) Найти все подгруппы G порядка 3 и 4.

ii) Выбрать одну из ненормальных подгрупп порядка 3 (если они есть) и выписать задаваемое ей разбиение G на левые и правые классы смежности.

В случае, если все подгруппы G порядка 3 являются нормальными, найти ненормальную подгруппу порядка 4 и выписать задаваемое ей разбиение G на левые и правые классы смежности.

iii) Выбрать одну из нормальных подгрупп G порядка 3 (если они есть), построить таблицу Кэли для соответствующей факторгруппы и определить, какой из перечисленных в приложении групп порядка 8 она изоморфна.

В случае, если все подгруппы G порядка 3 являются ненормальными, найти нормальную подгруппу порядка 2, построить таблицу Кэли для соответствующей факторгруппы и определить, какой из перечисленных в приложении групп порядка 12 она изоморфна.

В случае, если все подгруппы G порядка 2 и 3 являются ненормальными, найти нормальную подгруппу порядка 4 и построить таблицу Кэли для соответствующей факторгруппы. Кроме того, в этом случае необходимо выбрать произвольную подгруппу G порядка 8 и определить, какой из перечисленных в приложении групп она изоморфна.

iv) Описать явно изоморфизм между соответствующими группами из предыдущего пункта и доказать, что это изоморфизм. (В случае представления совпадающий таблиц Кэли необходимо продемонстрировать, каким образом происходил поиск соответствующего упорядочивания).

v) Найти коммутант G.

Приложение

Группы порядка 8: $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_4$, группа кватернионов Q_8

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с операцией $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$

Группы порядка 12: $\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, D_6, A_4, T$

$T = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ с операцией $(b_1, c_1)(b_2, c_2) = (b_1 + (-1)^{c_1} b_2, c_1 + c_2)$

1) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)/K$, где $K = \{I_2, -I_2\}$ (Можно считать, что G состоит из матриц $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ таких, что либо $a_{11} = \overline{1}$, либо $a_{11} = \overline{0}, a_{12} = \overline{1}$);
2) $G = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{11}) : AA^T = I_2\}$;
3) G — группа самосовмещений тетраэдра;
4) $G = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \overline{1}\}$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -\overline{1}, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$;
5) $G = \mathbb{Z}_3 \times Q_8$ с операцией $(b_1, s_1)(b_2, s_2) = (b_1 + \psi(s_1) b_2, s_1 s_2)$, где $\psi(\pm 1) = \psi(\pm i) = 1, \psi(\pm j) = \psi(\pm k) = -1$;
6) $G = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_6) : a_{12} = \overline{0}\}$;
7) $G = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq \overline{0}\}/K$, где $K = \{1, -1\}$ и $i^2 = j^2 = k^2 = -\overline{1}, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ (Можно считать, что G состоит из элементов $a + bi + cj + dk$ таких, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq \overline{0}$ и первый ненулевой элемент из набора $\{a, b, c, d\}$ равен 1);

8) $G=\{ax+b : a,b\in\mathbb{Z}_{12}; a=\overline{1},\overline{5}\}$ с операцией композиция;

9) $G=\{A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{12}) : A\left(\begin{smallmatrix}\overline{1}\\-\overline{1}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\overline{1}\\-\overline{1}\end{smallmatrix}\right), \det A=\pm\overline{1}\}$;

10) $G=\mathbb{Z}_4\times S_3$ с операцией $(c_1,\sigma_1)(c_2,\sigma_2)=(c_1+(\mathrm{sign}\sigma_1)c_2,\sigma_1\sigma_2)$;

11) $G=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$;

12) $G=\left\{A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_{14}) : A\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0}\\ \overline{0} & -\overline{1}\end{pmatrix}A^T=\begin{pmatrix}\overline{1} & \overline{0}\\ \overline{0} & -\overline{1}\end{pmatrix}\right\}$;