**Međuispit iz Diskretne matematike 1**
**30.11.2021.**

**1. (8 bodova)** Odredite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$a + b + c + 3d + 5e + 7f = 2021$$

uz uvjete $0 \leqslant a \leqslant 2$, $0 \leqslant b \leqslant 4$, $0 \leqslant c \leqslant 6$, $d \geqslant 0$, $e \geqslant 0$, $f \geqslant 0$.

**2. (8 bodova)** Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je zadan rekurzivno

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 1, \quad n \geqslant 2,$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$.

**(a)** Odredite $a_n$.

**(b)** Odredite funkciju izvodnicu tog niza.

**3. (8 bodova)** Koliko postoji nizova slova $A$, $B$ i $C$ duljine $n$ u kojima se ne javljaju kombinacije $BA$ i $CA$?

**4. (8 bodova)** Neka je $G$ jednostavan povezan graf sa zadanim nizom stupnjeva $(1, 1, 1, 2, 2, 2, x)$.

Odredite koje sve vrijednosti $x$ može poprimiti te za svaku od njih odredite do na izomorfizam sve grafove s tim nizom stupnjeva.

**5. (8 bodova)**

**(a)** Iskažite Oreov teorem.

**(b)** Pokažite protuprimjerom da obrat Oreovog teorema ne vrijedi.

**(c)** Dokažite matematičkom indukcijom da je kocka $Q_n$, $n \geqslant 2$, hamiltonovski graf.

*Ispit se piše 120 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!*

## Rješenja

**1.** Ekvivalentno je naći broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2021,$$

gdje je $x_1 \in \{0,1,2\}$, $x_2 \in \{0,1,2,3,4\}$, $x_3 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $x_4 \in \{0,3,6,\ldots\}$, $x_5 \in \{0,5,10,\ldots\}$, $x_6 \in \{0,7,14,\ldots\}$.

Pripadna funkcija izvodnica glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+\ldots+x^6)\cdot \\ &\quad \cdot (1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^7+x^{14}+\ldots) \\ &= \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1-x^7}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7} \\ &= \frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{k}x^k. \end{aligned}$$

Tražimo

$$\langle x^{2021}\rangle f(x) = \binom{2023}{2021} = 2023\cdot 1011 = 2\,045\,253.$$

**2.** **(a)** $a_n = 2^n + n$.

**(b)** $f(x) = \dfrac{1-x-x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$.

**3.** Označimo sa $a_n$ broj traženih nizova. Za jedan takav niz postoje ukupno tri mogućnosti za posljednje slovo:

1° Posljednje slovo je $A$.
Zbog uvjeta zadatka vidimo da u tom slučaju na predzadnjem mjestu također može biti samo slovo $A$, a uzastopnom primjenom istog argumenta vidimo da i na svim preostalim mjestima jedino može biti slovo $A$. Dakle, postoji samo jedan takav niz.

2° Posljednje slovo je $B$.
U ovom slučaju na prvih $n-1$ mjesta možemo staviti bilo koji niz duljine $n-1$ koji zadovoljava uvjet zadatka pa takvih nizova ukupno ima $a_{n-1}$.

3° Posljednje slovo je $C$.
Identičnim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju dobivamo da ovakvih nizova također ima $a_{n-1}$.

Dakle, niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geqslant 2,$$

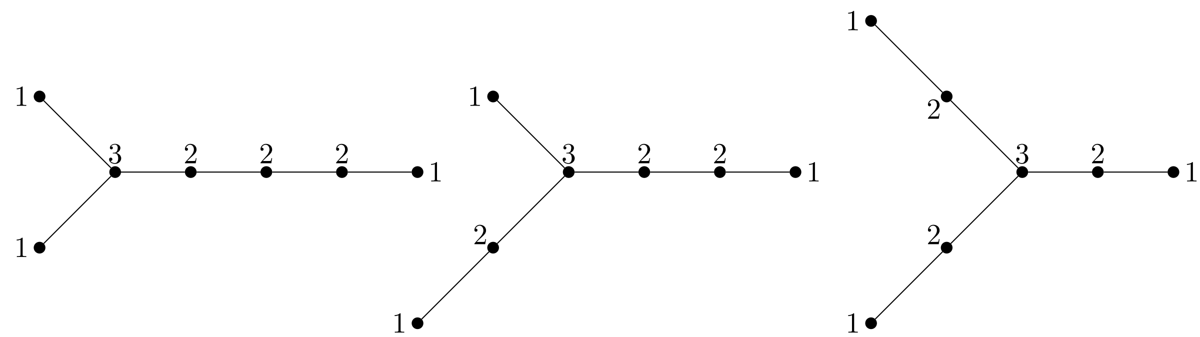
uz početni uvjet $a_1 = 3$ pa zato imamo $a_n = 2^{n+1} - 1$.

Alternativno, $a_n$ možemo odrediti i kombinatornim argumentom. Uočimo da u svakom takvom nizu slova $A$ mogu biti samo na početku. Ako se ona nalaze na prvih uzastopnih $k$ mjesta u nizu, pri čemu je $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, onda preostalih $n-k$ mjesta u nizu možemo na $2^{n-k}$ popuniti slovima $B$ i $C$. Zato slijedi

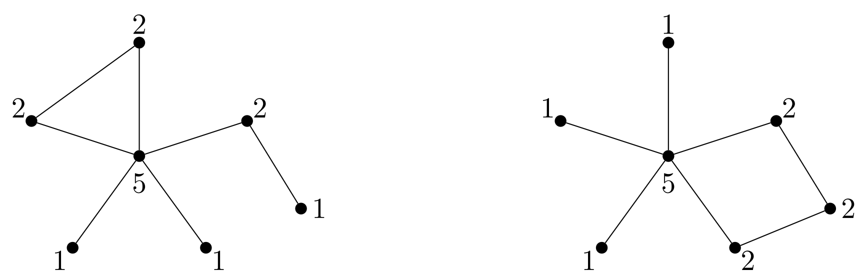
$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

**4.** Budući da je $G$ jednostavan povezan graf sa 7 vrhova, najveći mogući stupanj bilo kojeg njegovog vrha je $7-1=6$. Nadalje, prema lemi o rukovanju slijedi da $x$ mora biti neparan pa vidimo da $x$ može biti jednak 3 ili 5.

U slučaju $x=3$ do na izomorfizam postoje tri grafa s nizom stupnjeva $(1,1,1,2,2,2,3)$:



U slučaju $x=5$ do na izomorfizam dobivamo dva grafa s nizom stupnjeva $(1,1,1,2,2,2,5)$:



**5.** **(a)** Skripta, str. 94, teorem 4.10.

**(b)** Jedan protuprimjer je graf $C_6$. Svaki vrh tog grafa je stupnja 2 pa imamo $\deg(v)+\deg(w)=4<6$ za svaki par nesusjednih vrhova $v$ i $w$. S druge strane, $C_6$ je kao ciklus hamiltonovski graf.

**(c)** 1) Baza indukcije
Za $n=2$ nalazimo sljedeći hamiltonovski ciklus u 2-kocki $Q_2$:

$$(0,0)-(1,0)-(1,1)-(0,1)-(0,0).$$

Dakle, $Q_2$ je hamiltonovski graf.

2) Korak indukcije
Pretpostavimo da je $Q_n$ hamiltonovski graf za neki $n \geqslant 2$ te označimo sa $\mathcal{C}$ jedan hamiltonovski ciklus u tom grafu:

$$A_1 - A_2 - A_3 - \ldots - A_{2^n-1} - A_{2^n} - A_1,$$

pri čemu uređene $n$-torke $A_i$, $i \in \{1,2,\ldots,2^n\}$, reprezentiraju vrhove tog grafa. Sada u $Q_{n+1}$ možemo konstruirati sljedeći hamiltonovski ciklus:

$$\underbrace{(0,A_1)-\ldots-(0,A_{2^n-1})-(0,A_{2^n})}_{\simeq\mathcal{C}}-\underbrace{(1,A_{2^n})-(1,A_{2^n-1})-\ldots-(1,A_1)}_{\simeq\mathcal{C}}-(0,A_1).$$

Dakle, $Q_{n+1}$ je po definiciji hamiltonovski graf čime je korak indukcije dokazan.