

Valovi

- poremećaj koji se širi (sredstvom) i prenosi energiju
- **Mehanički valovi:**
valovi nastali u elastičnom sredstvu i koji se gibaju kroz elastično sredstvo
- **Elektromagnetski valovi:** ne trebaju sredstvo za širenje

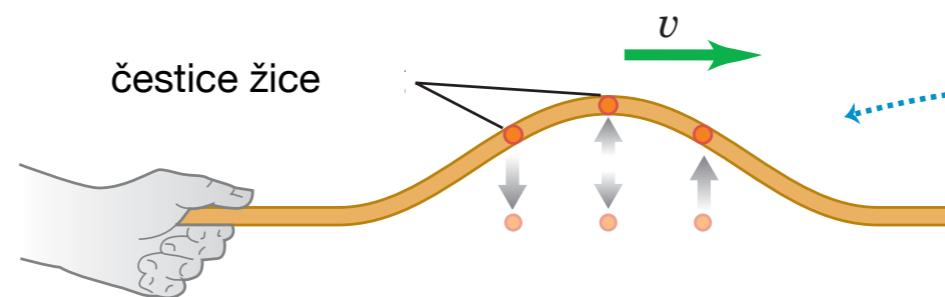
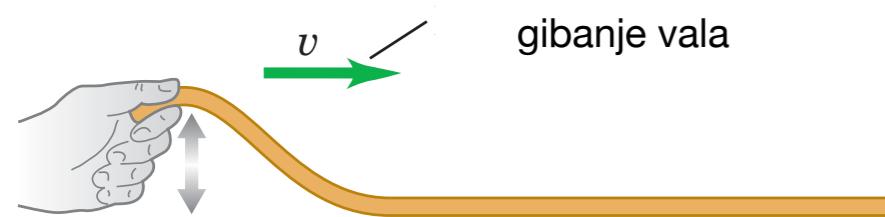
Prema načinu kako titraju čestice sredstva kroz koje se širi val, valove možemo podijeliti na:

- **Longitudinalne valove ->**
čestice sredstva koje prenosi val titraju u smjeru širenja vala
- **Transverzalne valove ->**
čestice titraju okomito na smjer širenja vala

Valovi

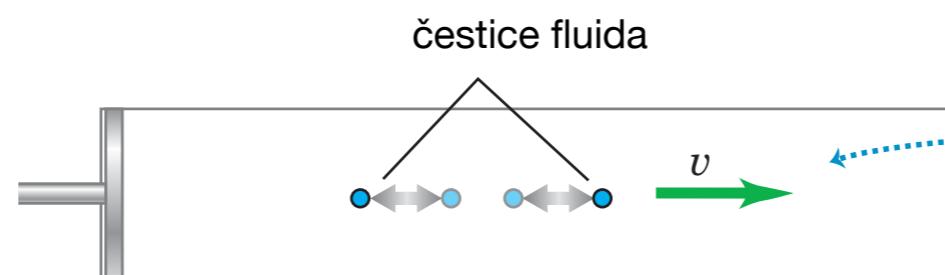
* nastanak vala koji se širi u desno:

(a) Transverzalni val na žici



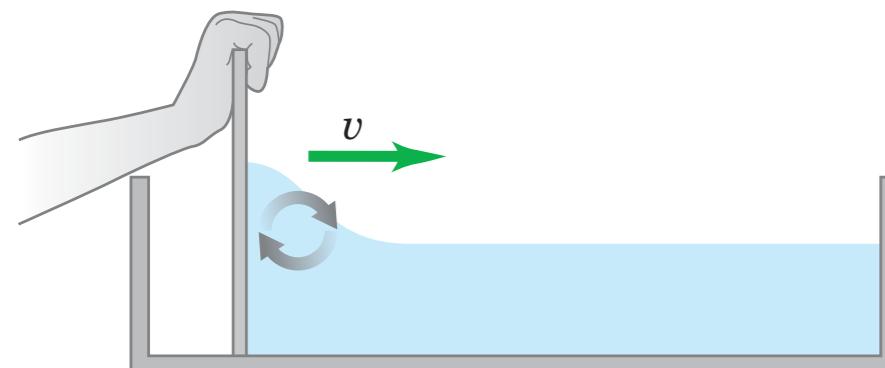
Kako val prolazi, svaka čestica žice se giba gore-dolje, transverzalno na gibanje samog vala

(b) Longitudinalni val u fluidu



Kako val prolazi, svaka čestica fluida se giba naprijed-nazad, paralelno sa gibanjem samog vala

(c) Valovi na površini tekućine: ploča se pomiče naprijed i onda vraća unazad, stvarajući kombinaciju longitudinalnih i transverzalnih valova

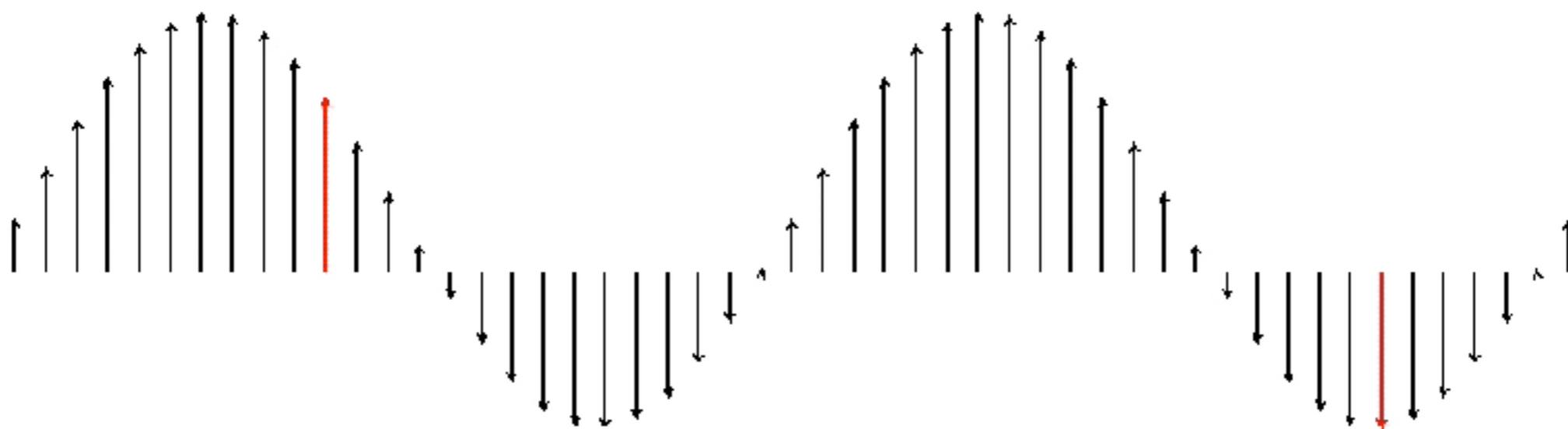


Kako val prolazi, svaka čestica na površini fluida se giba kružno

Transverzalni val



© L.Perera

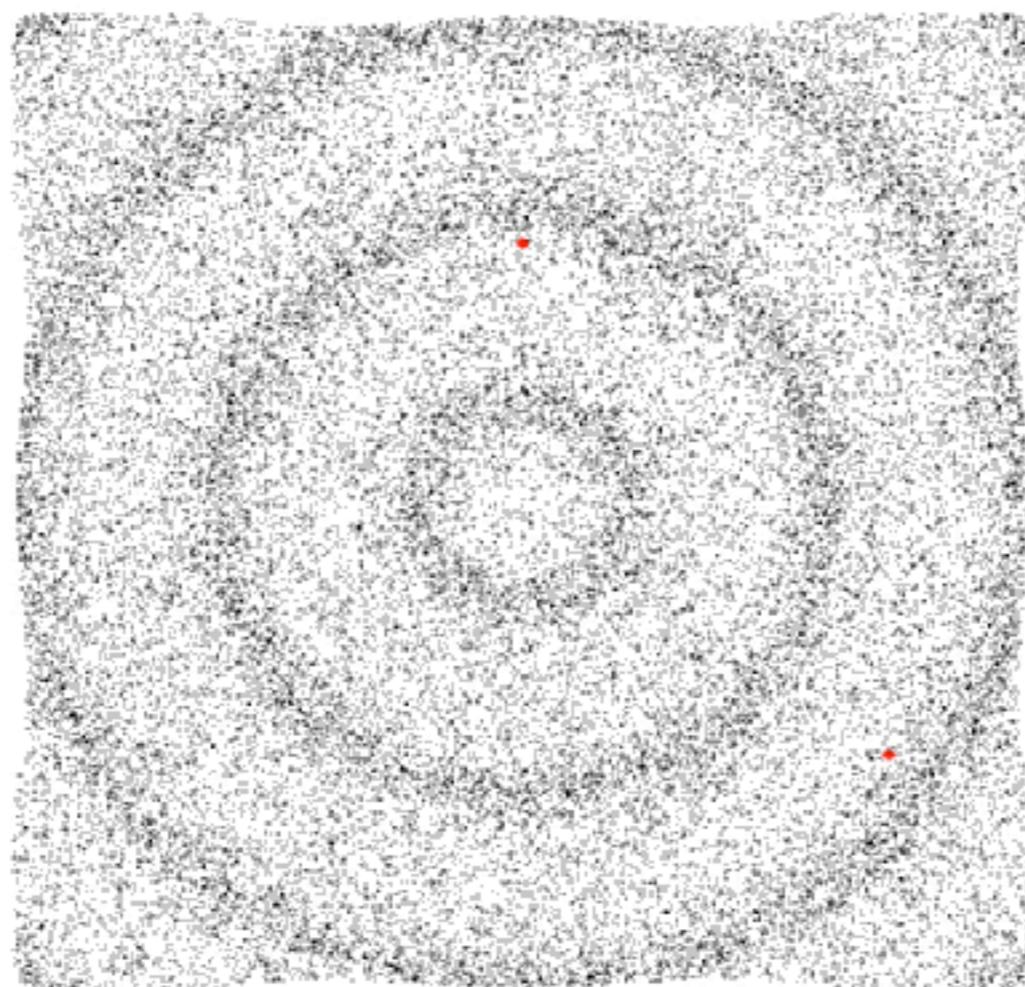


©L.Perera

Longitudinalni val



© L. Perera



© L. Perera

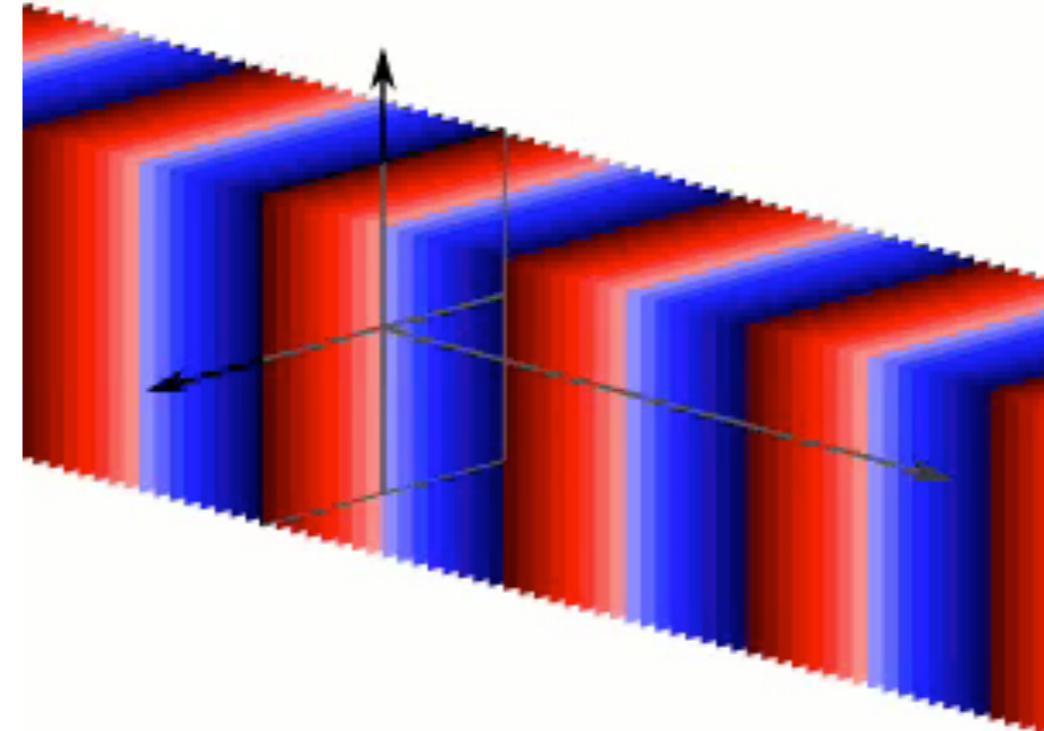
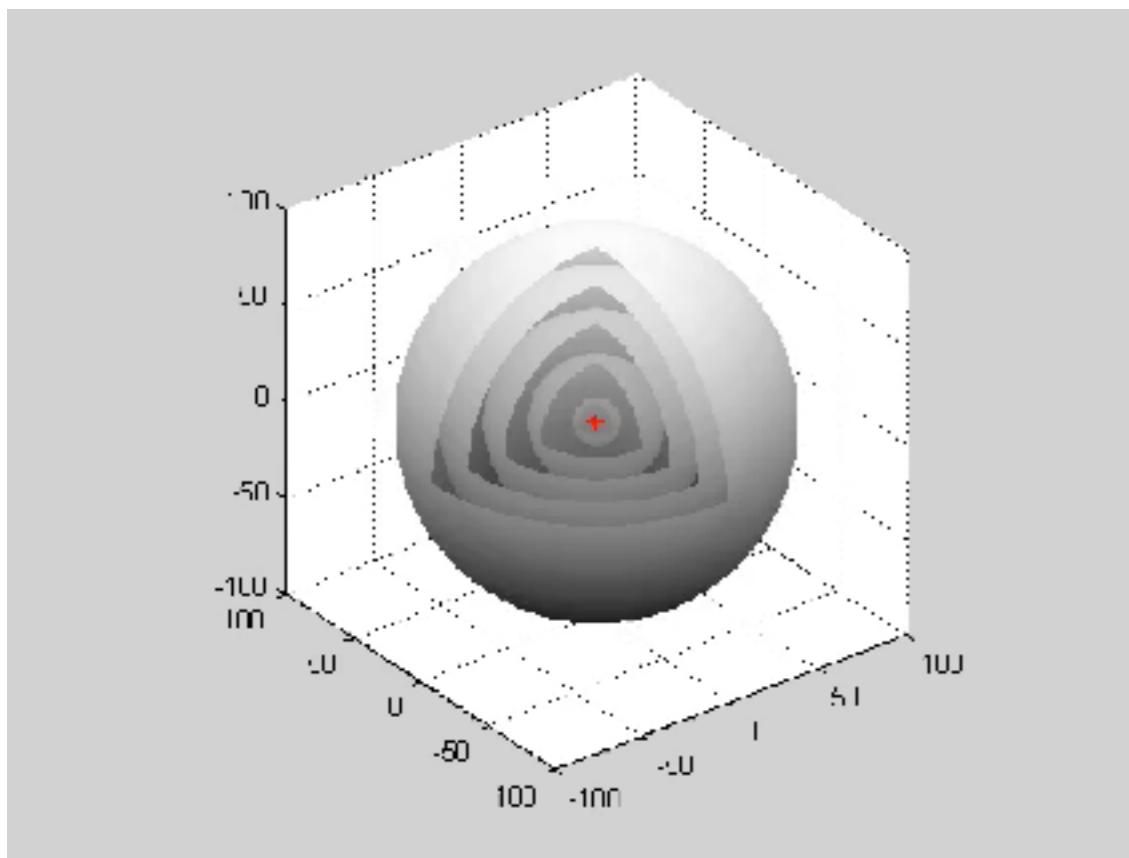
Valovi

- * Pravci po kojima se širi poremećaj su **valne zrake**.

Ako valne zrake polaze iz jedne točke, tada je izvor valova točkast i **valne fronte su kugline plohe**

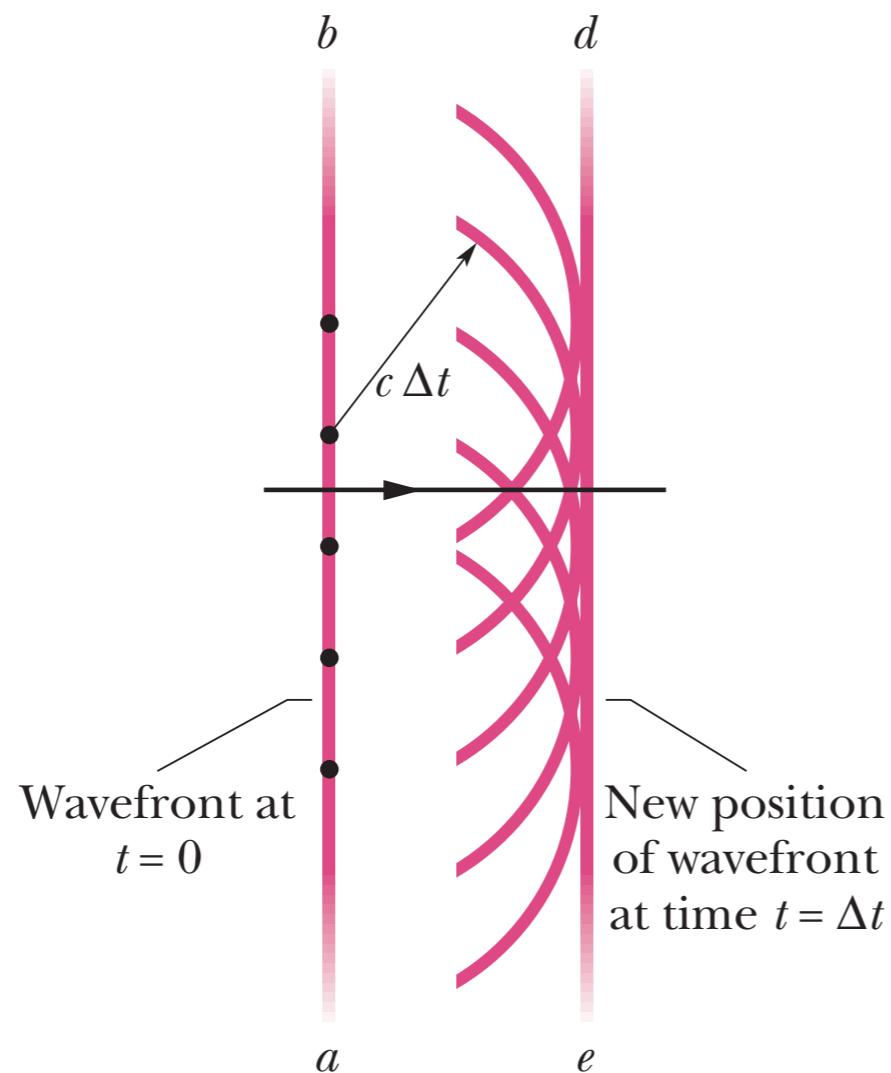
Ako su valne zrake paraleleni pravci, tada je izvor valova ravninski i nalazi se u beskonačnosti. **Valne fronte su tada ravnine.**

- * Razmak između dviju susjednih valnih fronta je **valna duljina**



Valovi

- Faze svih točaka **valne fronte** su jednake (koherentne).
- **Huygensov princip:** valovi se prostiru kroz sredstvo tako da svaka čestica na valnoj fronti postaje izvor sekundarnih elementarnih valova.
Nakon vremena t , nova pozicija valne fronte je tangenta na površinu sekundarnih valova
<https://www.youtube.com/watch?v=gliLaaeZHwg>



Jednadžba progresivnog vala

Neka je izvor valova oscilator opisan jednadžbom:

$$y(t) \Big|_{\text{izvor}} = y(t, 0) = A \cos \omega t$$

Oscilator je povezan sa elastičnim sredstvom i svojim titranjem pobuđuje elastično sredstvo na gibanje. Sredstvom se počinje širiti val.

Na udaljenosti x od izvora promjena faze titranja ωt je

$$\omega t \rightarrow \omega t + \Delta\phi(x)$$

$$\Delta\phi(x) \propto x$$

Nazovimo konstantu proporcionalnosti k :

$$y(t, x) = A \cos(\omega t - kx).$$

Negativan predznak dolazi zbog zakašnjenja za titranjem izvora.

Nakon period $t=T$ titranje izvora se ponovi, a pri tome se sredstvom proširi jedan cijeli val, čija je duljina jednaka λ i tu veličinu zovemo **VALNOM DULJINOM**.

Jednadžba progresivnog vala

Za $t = T$ i na mjestu $x = \lambda$ titranje sredstva je isto kao i titranje izvora:

$$y(T, x = 0) = A \cos \omega T = y(T, x = \lambda) = A \cos(\omega T - k\lambda)$$

$$\boxed{k\lambda = 2\pi}$$

k je **VALNI VEKTOR** ili **VALNI BROJ** i pokazuje smjer širenja vala!

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{K}$$

Npr. za širenje vala duž osi x: $\hat{K} = \hat{i}$

FAZNA BRZINA = brzina širenja vala u sredstvu

Val za jedan period T prijeđe udaljenost jednaku jednoj valnoj duljini:

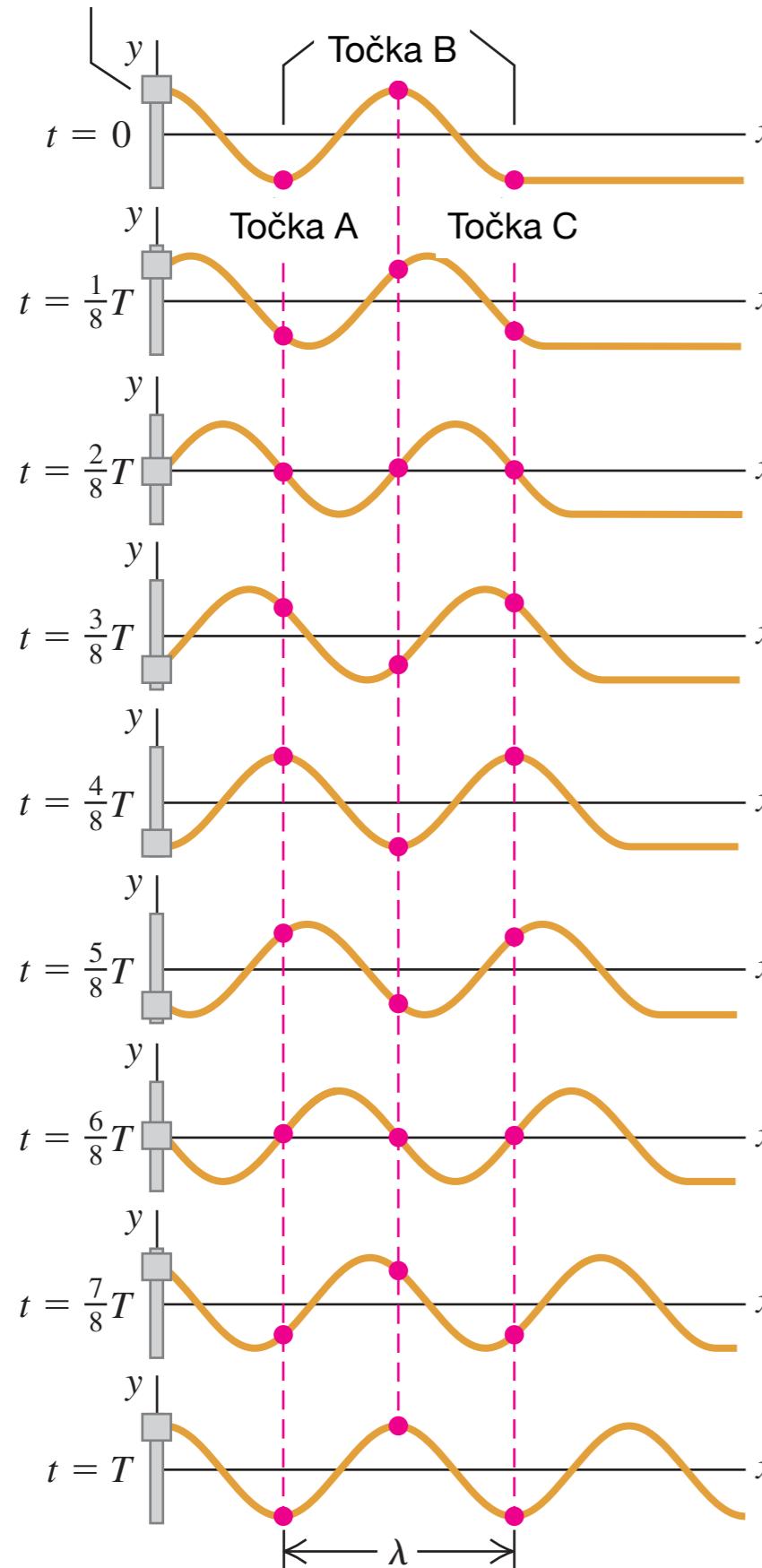
$$\lambda = v_f \cdot T \quad \text{i} \quad T = 1/\nu$$

$$\boxed{v_f = \lambda \cdot \nu.}$$

Jednadžba progresivnog vala

Oscilator koji generira val

Tri točke na žici, na razmaku $\lambda/2$



* **progresivni val:** val kojim se širi poremećaj i prenosi energiju

* **stojni val:** čestice titraju ali nema transporta energije

Nakon jednog perioda $t = T$, titranje se ponovi, a pri tome se sredstvom proširi jedan cijeli val čija je duljina jednaka λ i tu veličinu zovemo **valnom duljinom**.

Valna duljina je najmanja udaljenost izmedju dviju točaka na valu koje se ponašaju identično.

Fazna brzina je brzina širenja vala u sredstvu:

$$\lambda = v_f T$$

Jednadžba progresivnog vala

Jednadžbu ravnog, progresivnog vala možemo napisati na više načina:

$$y(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y(t, x) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$y(t, x) = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right]$$

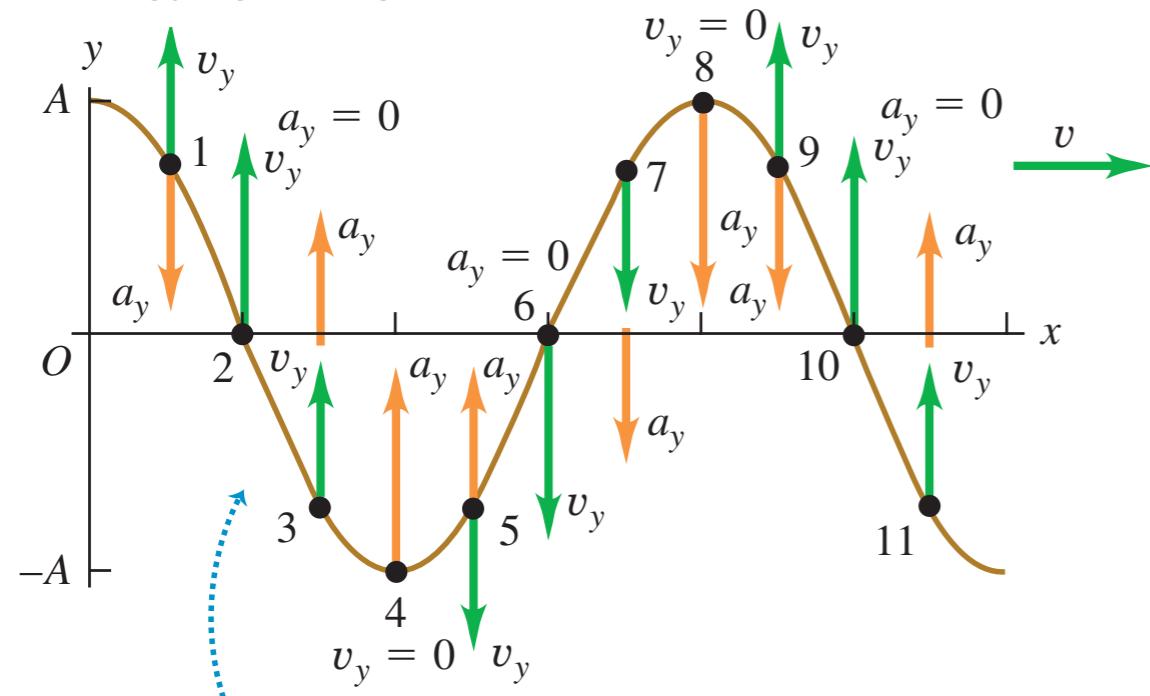
$$y(t, x) = Ae^{i(\omega t - kx)}.$$

Val koji se giba s desna na lijevo duž osi x:

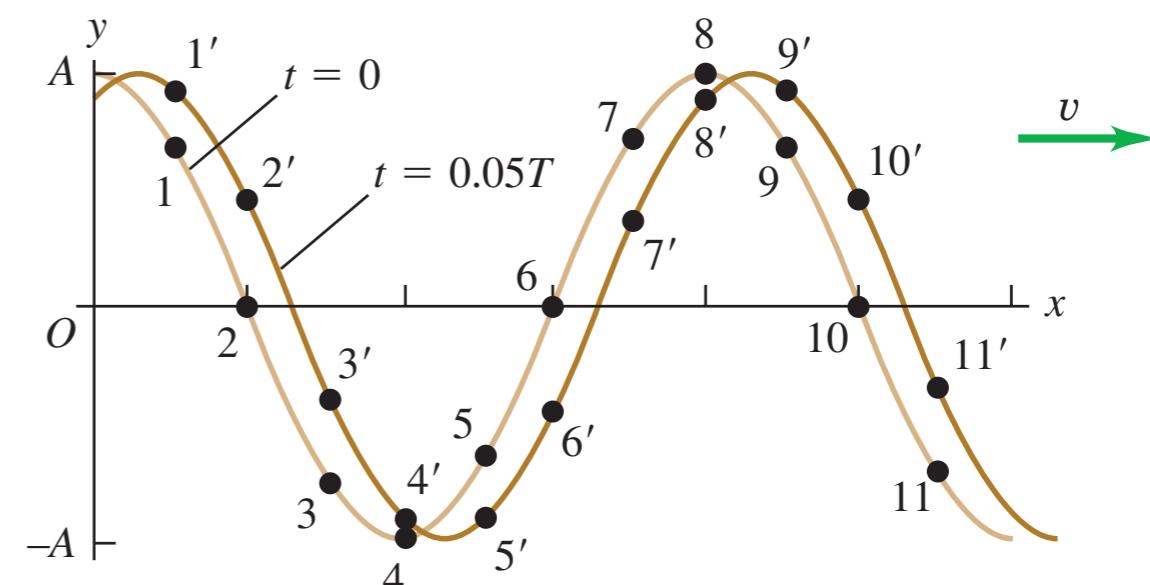
$$y(t, x) = A \cos(\omega t + kx).$$

Valovi

(a) Val u $t=0$



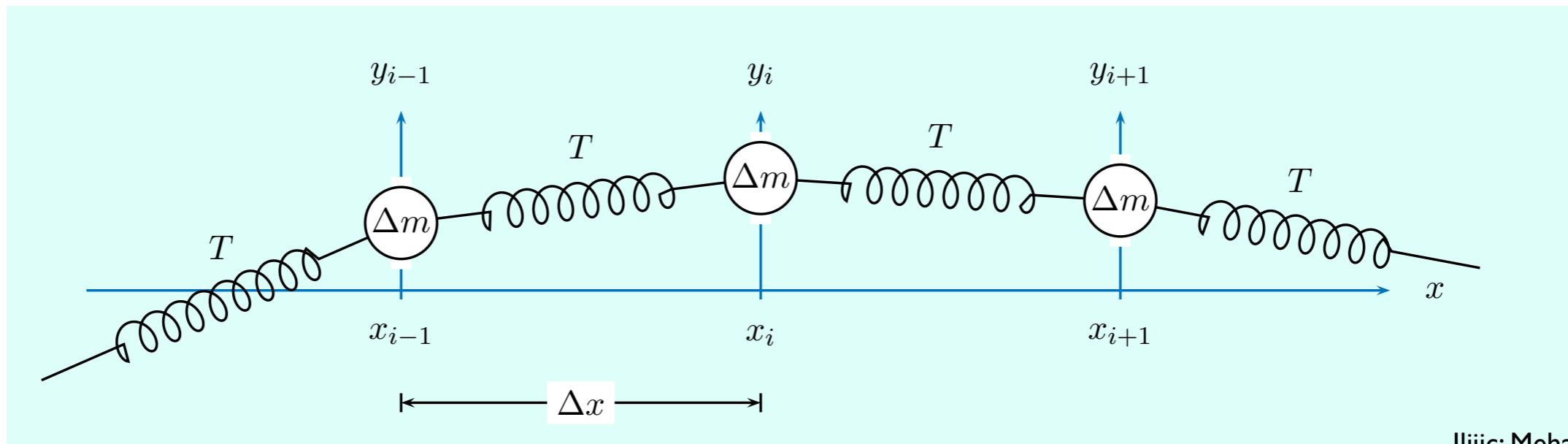
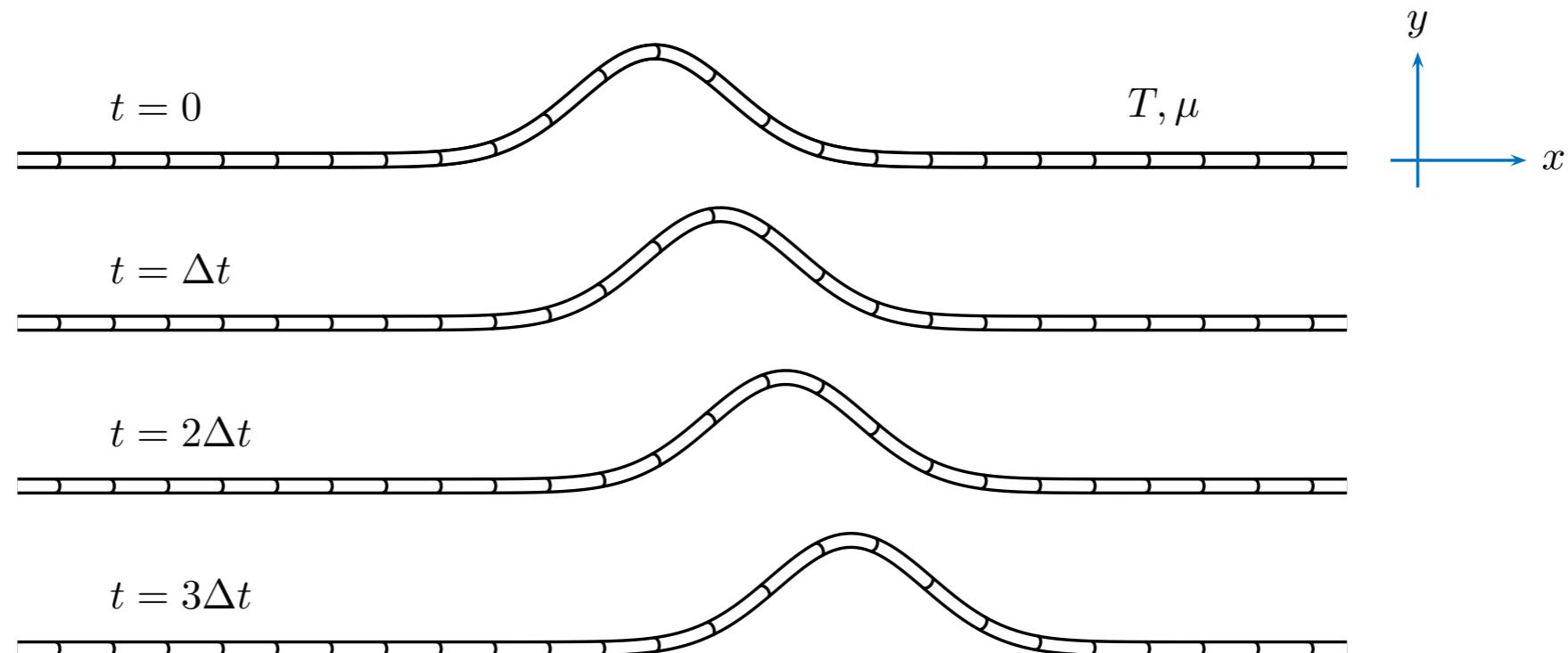
(b) Isti val u $t=0$ i $t = 0.05T$



- Akceleracija a_y u svakoj točki zice je proporcionalna pomaku y u toj točki
- Akceleracija je usmjerena prema gore kada je žica zakrivljena prema gore, odnosno prema dolje kada je žica zakrivljena prema dolje

Transverzalni val na napetom užetu

- * napeto uže možemo prikazati kao niz elemenata duljine Δx i mase Δm
- * linijska gustoća mase užeta: $\mu = \Delta m / \Delta x$
- * u ravnotežnom stanju je uže napeto silom iznosa T



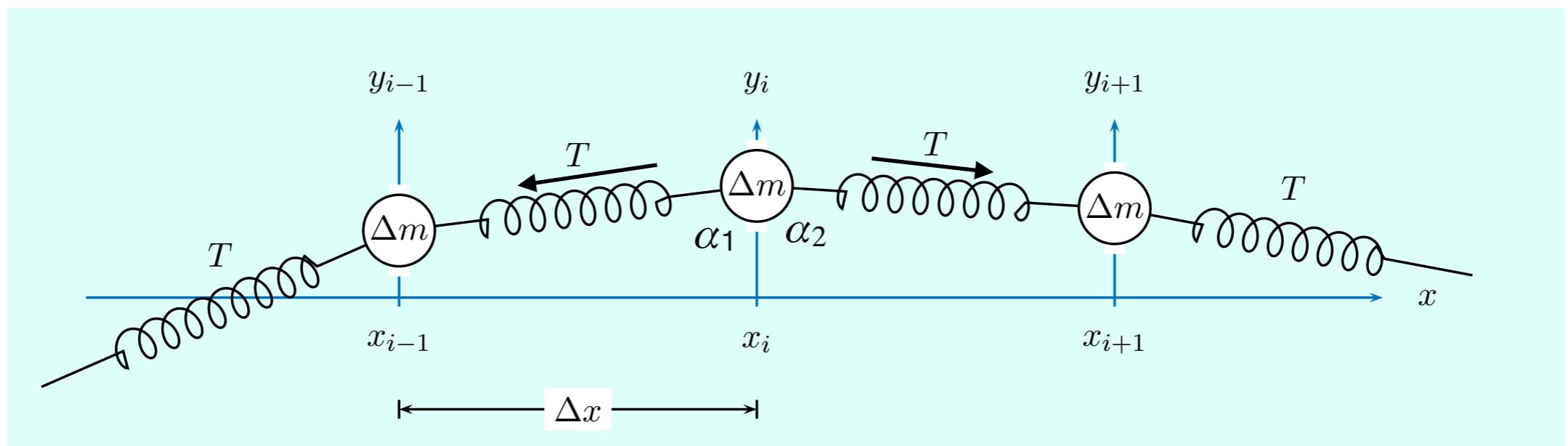
Transverzalni val na napetom užetu

- * napeto uže možemo prikazati kao niz elemenata duljine Δx i mase Δm
- * linijska gustoća mase užeta: $\mu = \Delta m / \Delta x$
- * u ravnotežnom stanju je uže napeto silom iznosa T

$$\Delta m \ddot{y}_i = -T \cos \alpha_1 - T \cos \alpha_2$$

$$\cos \alpha_1 = (y_i - y_{i-1}) / ((\Delta x)^2 + (y_i - y_{i-1})^2)^{1/2}$$

$$\cos \alpha_2 = (y_i - y_{i+1}) / ((\Delta x)^2 + (y_i - y_{i+1})^2)^{1/2}$$



Transverzalni val na napetom užetu

- * napeto uže možemo prikazati kao niz elemenata duljine Δx i mase Δm
- * linijska gustoća mase užeta: $\mu = \Delta m / \Delta x$
- * u ravnotežnom stanju je uže napeto silom iznosa T

Za male pomake iz ravnoteže: $y_i \ll \Delta x$

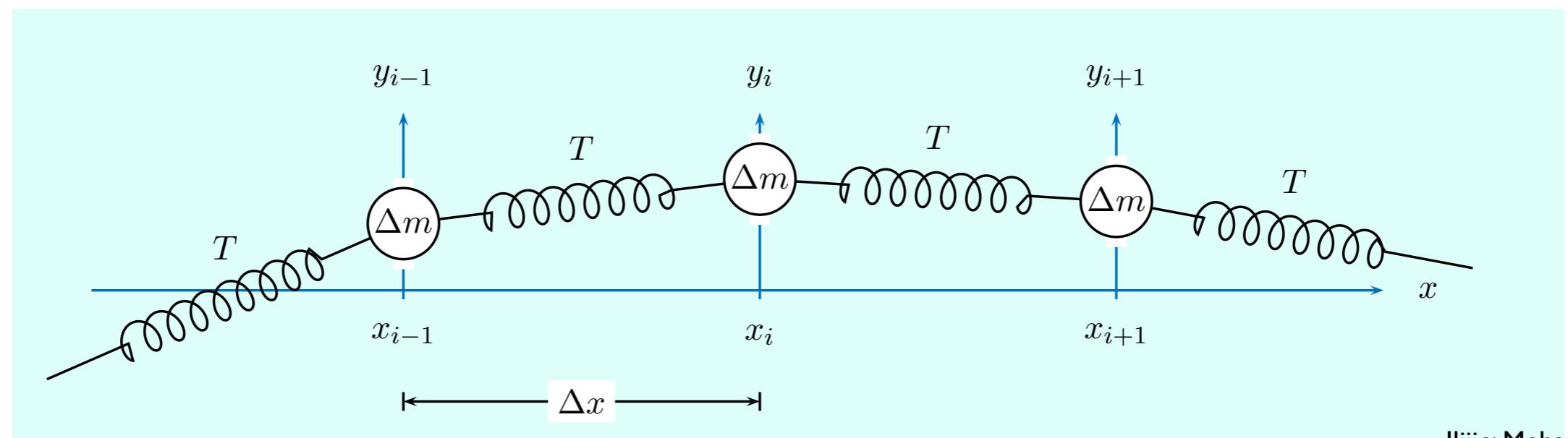
$$(y_i - y_{i-1}) / ((\Delta x)^2 + (y_i - y_{i-1})^2)^{1/2} = (y_i - y_{i-1}) / (\Delta x (1 + ((y_i - y_{i-1})/\Delta x)^2)^{1/2}) \approx (y_i - y_{i-1}) / \Delta x$$

$$\Delta m \ddot{y}_i = T \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + T \frac{y_{i-1} - y_i}{\Delta x}$$

Prepostavimo da se transverzalni otklon čestice iz lanca može opisati glatkom funkcijom $y(x,t)$:

$$y_i \rightarrow y(x) \quad y_{i+1} \rightarrow y(x+\Delta x) \quad y_{i-1} \rightarrow y(x-\Delta x)$$

te uvrstimo $\mu = \Delta m / \Delta x$.



Transverzalni val na napetom užetu

- * napeto uže možemo prikazati kao niz elemenata duljine Δx i mase Δm
- * linijska gustoća mase užeta: $\mu = \Delta m / \Delta x$
- * u ravnotežnom stanju je uže napeto silom iznosa T

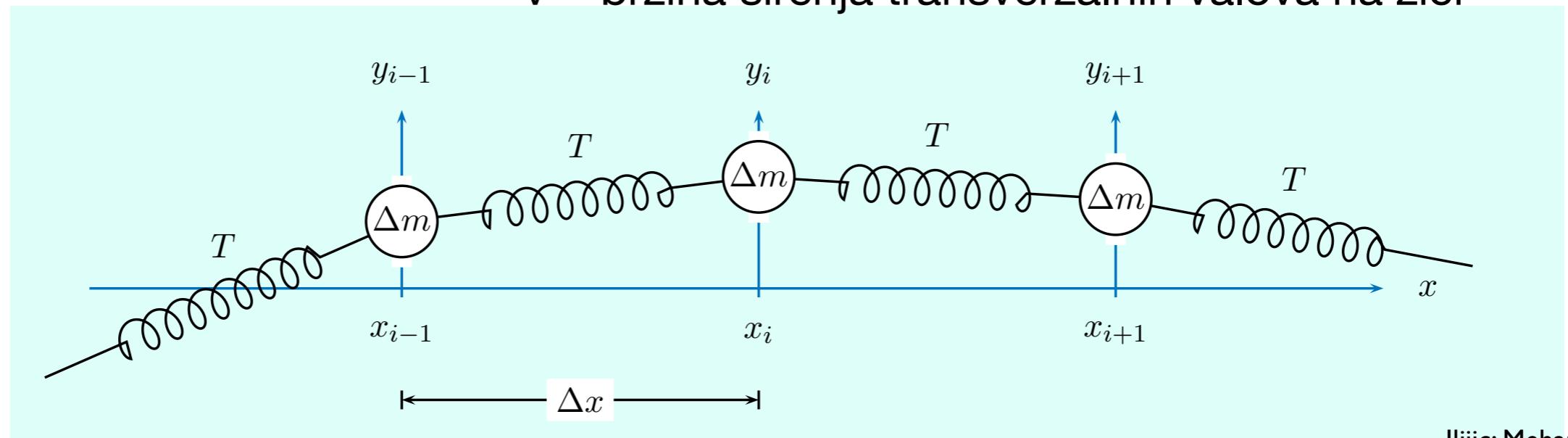
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y[x_i, t] = \frac{T}{\mu} \frac{y[x_i + \Delta x, t] - 2y[x_i, t] + y[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}$$

U ovoj jednadžbi prepoznamo definiciju druge derivacije funkcije, te možemo pisati za valnu jednadžbu čije rješenje opisuje gibanje transverzalnog vala po žici:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y[x, t] - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}y[x, t] = 0$$

$$v^2 = \frac{T}{\mu}, \quad \mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

v = brzina širenja transverzalnih valova na žici



Jednadžba progresivnog vala

Svaka derivabilna funkcija od kombinacije prostorno-vremenskih varijabli oblika ($x-vt$) je rješenje valne jednadžbe. To možemo pokazati na slijedeći način.

Općenito rješenje valne jednadžbe je linearna kombinacija funkcija $h(x-vt)$ i $g(x+vt)$, npr.
 $y(x,t) = A h(x-vt) + B g(x+vt)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = h' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = h'$$
$$(u = x - vt; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (h') \\ &= 1 \cdot h'' \cdot 1 = h''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u} h(u) = -v \cdot h' \quad \text{i} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u} (-v \cdot h') = (-v) \cdot (-v) \cdot h'' = v^2 \cdot h''.\end{aligned}$$

Ovo uvrstimo u jednadžbu

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.}$$

i dobijemo da je jednakost ispunjena kada je

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Jednadžba progresivnog vala

Kako ćemo odrediti smjer širenja vala? Pogledajmo iste faze vala u trenutku t_1 i u trenutku $(t_1 + \Delta t)$, za dva slučaja:

$$1. f(x_1 - vt_1) = f(x_2 - v(t_1 + \Delta t))$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 + v\Delta t \quad \rightarrow \quad x_2 > x_1 \text{ (tj. udesno od } x_1)$$

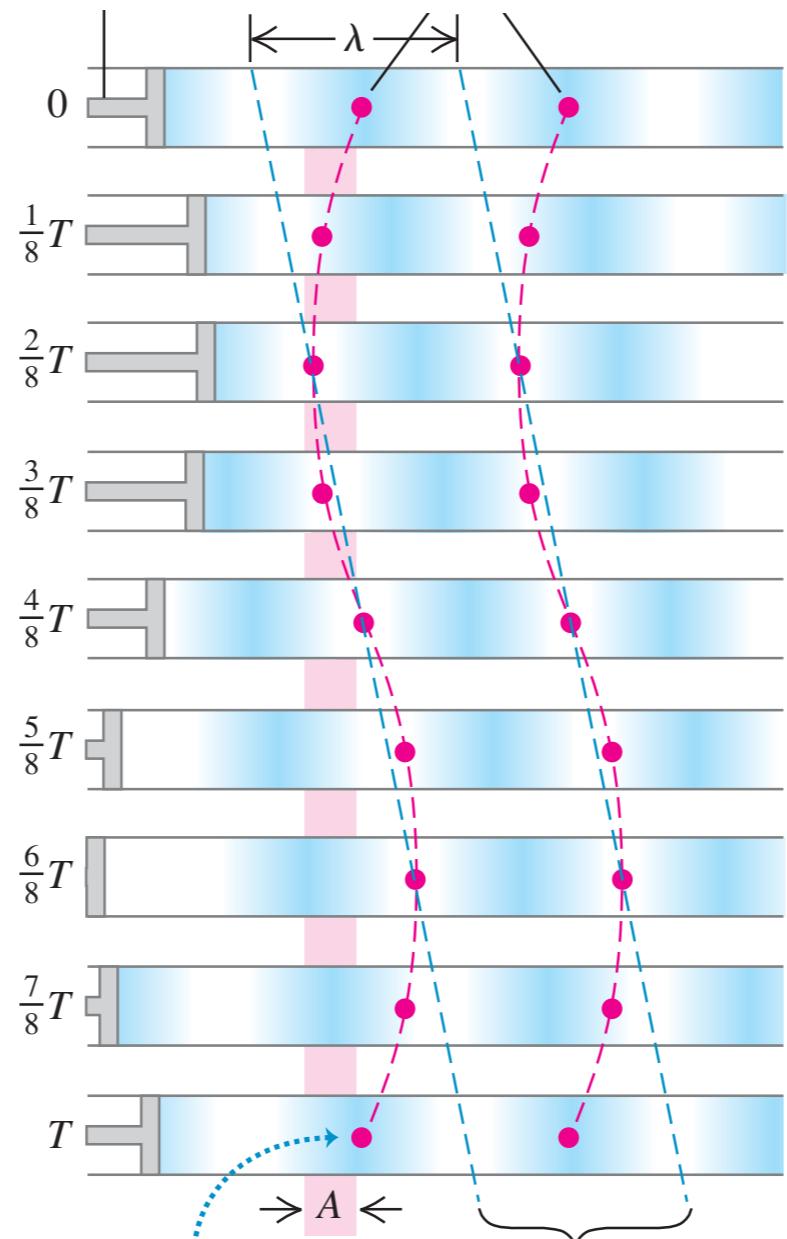
$$2. f(x_1 + vt_1) = f(x_2 + v(t_1 + \Delta t))$$

$$\rightarrow x_2 = x_1 - v\Delta t \quad \rightarrow \quad x_2 < x_1 \text{ (tj. ulijevo od } x_1)$$

Valna jednadžba longitudinalnih valova

- longitudinalni val može putovati npr. duž tankog elastičnog štapa ili fluidom (plinom ili stlačivom tekućinom) u krutoj cijevi

Pomični klip Dvije čestice u mediju, na udaljenosti λ



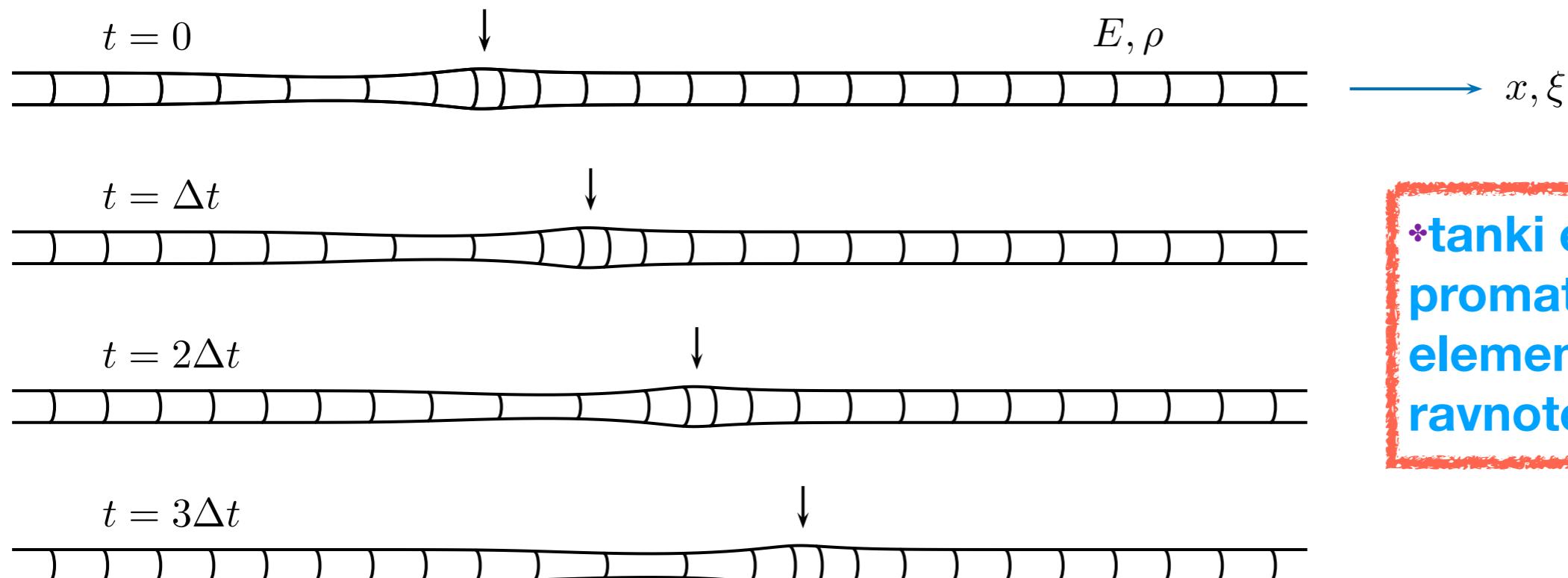
Čestice osciliraju sa amplitudom A

Val napreduje za jednu valnu duljinu za vrijeme perioda T

Valna jednadžba longitudinalnih valova

- * longitudinalni val može putovati npr. duž tankog elastičnog štapa ili fluidom (plinom ili stlačivom tekućinom) u krutoj cijevi

TANKI ELASTIČNI ŠTAP



S = površina poprečnog presjeka štapa

Δm = masa elementa štapa = $\rho S \Delta x$

Pri longitudinalnom sažimanju i rastezanju element štapa se ponaša kao opruga konstante k (E u formuli je Youngov modul):

$$k = \frac{SE}{\Delta x}$$

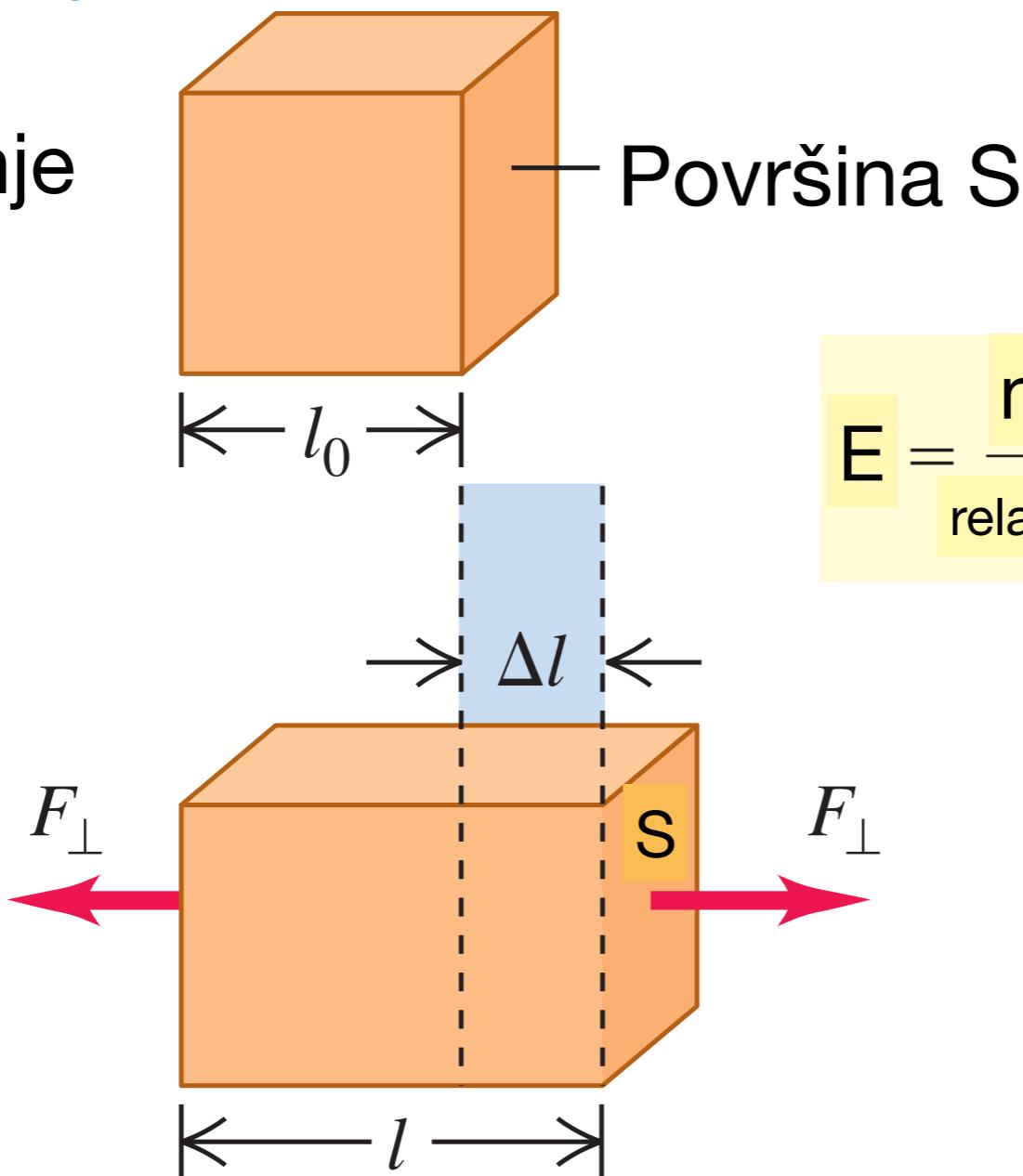
*tanki elastični štap promatramo kao niz elemenata jednake ravnotežne duljine Δx

Youngov modul E: definicija

- longitudinalni val može putovati npr. duž tankog elastičnog štapa ili fluidom (plinom ili stlačivom tekućinom) u krutoj cijevi

TANKI ELASTIČNI ŠTAP

Početno stanje objekta



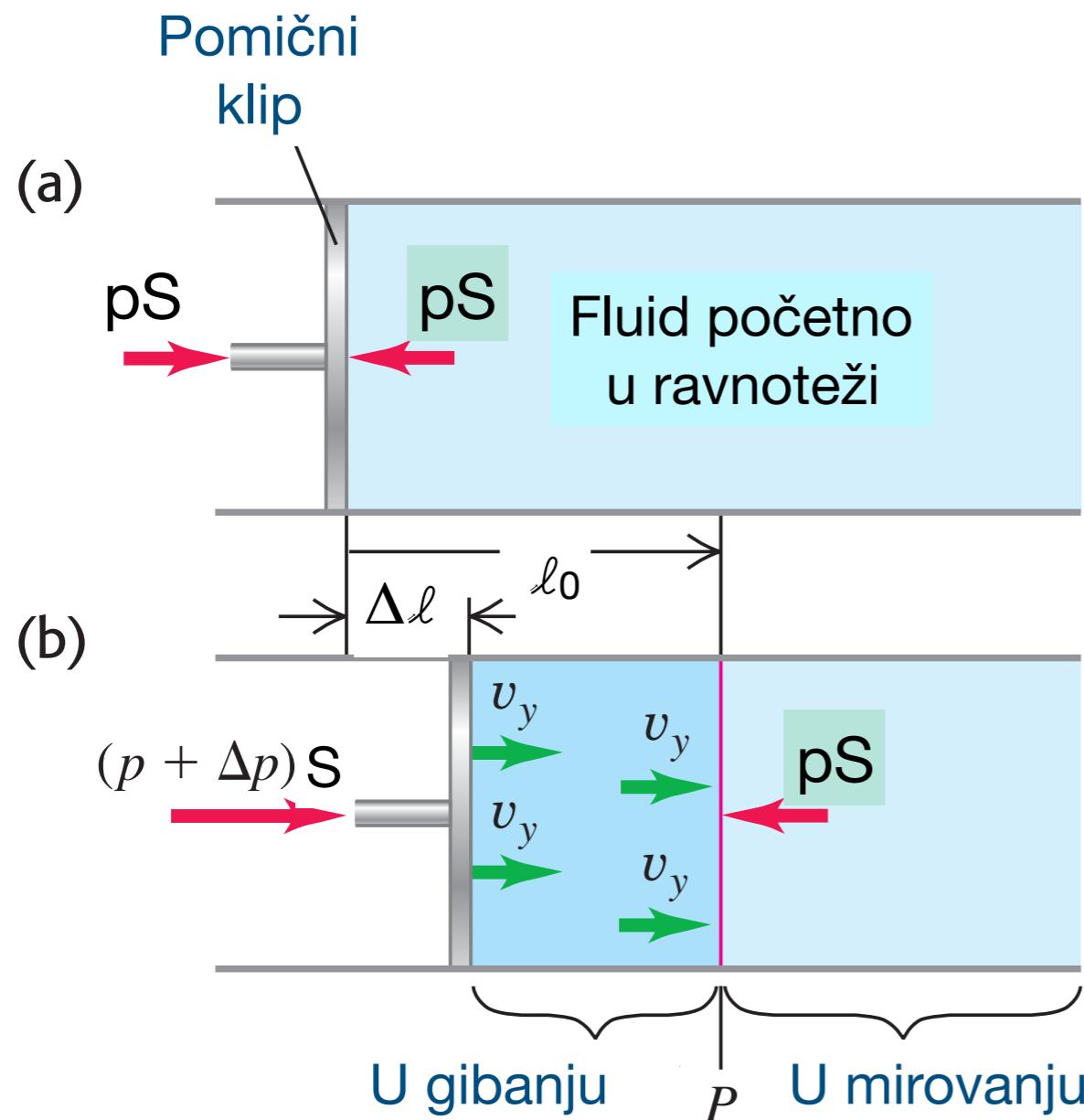
$$E = \frac{\text{naprezanje}}{\text{relativna deformacija}} = \frac{F_{\perp}/S}{\Delta l/l_0} = \frac{F_{\perp}}{S} \frac{l_0}{\Delta l}$$

Objekt pod naprezanjem

Longitudinalni val u fluidu

- * longitudinalni val može putovati npr. duž tankog elastičnog štapa ili **fluidom (plinom ili stlačivom tekućinom)** u krutoj cijevi

FLUID



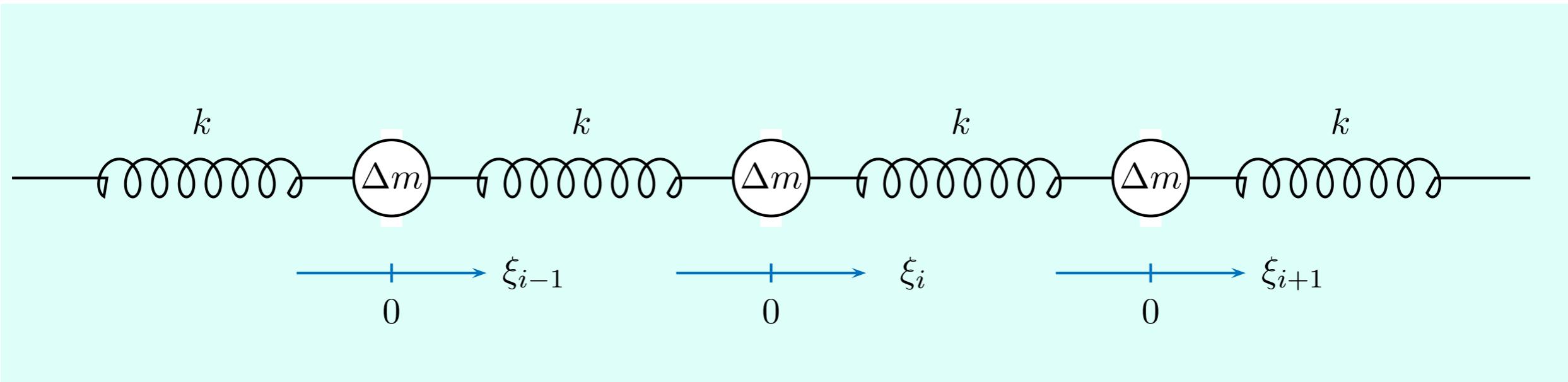
U slučaju fluida se **k** definira preko **volumnog modula stlačivosti fluida, B:**

$$k = \frac{SB}{\Delta x}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$$

Valna jednadžba longitudinalnih valova

- Elastični štap ili stupac stlačivog fluida gustoće ρ i površine poprečnog presjeka S duž kojeg putuje longitudinalni val prikazujemo kao lanac čestica koje su u ravnotežnom stanju razmaknute za Δx , čije su mase $\Delta m = \rho S \Delta x$ i koje su povezane oprugama konstante k (dane prethodnim izrazima, ovisno o tome radi li se o štalu ili o stupcu fluida)
- Otklon i -te čestice od njenog ravnotežnog položaja opisujemo koordinatom ξ_i :



$$\Delta m \ddot{\xi}_i = -k(\xi_i - \xi_{i+1}) - k(\xi_i - \xi_{i-1})$$

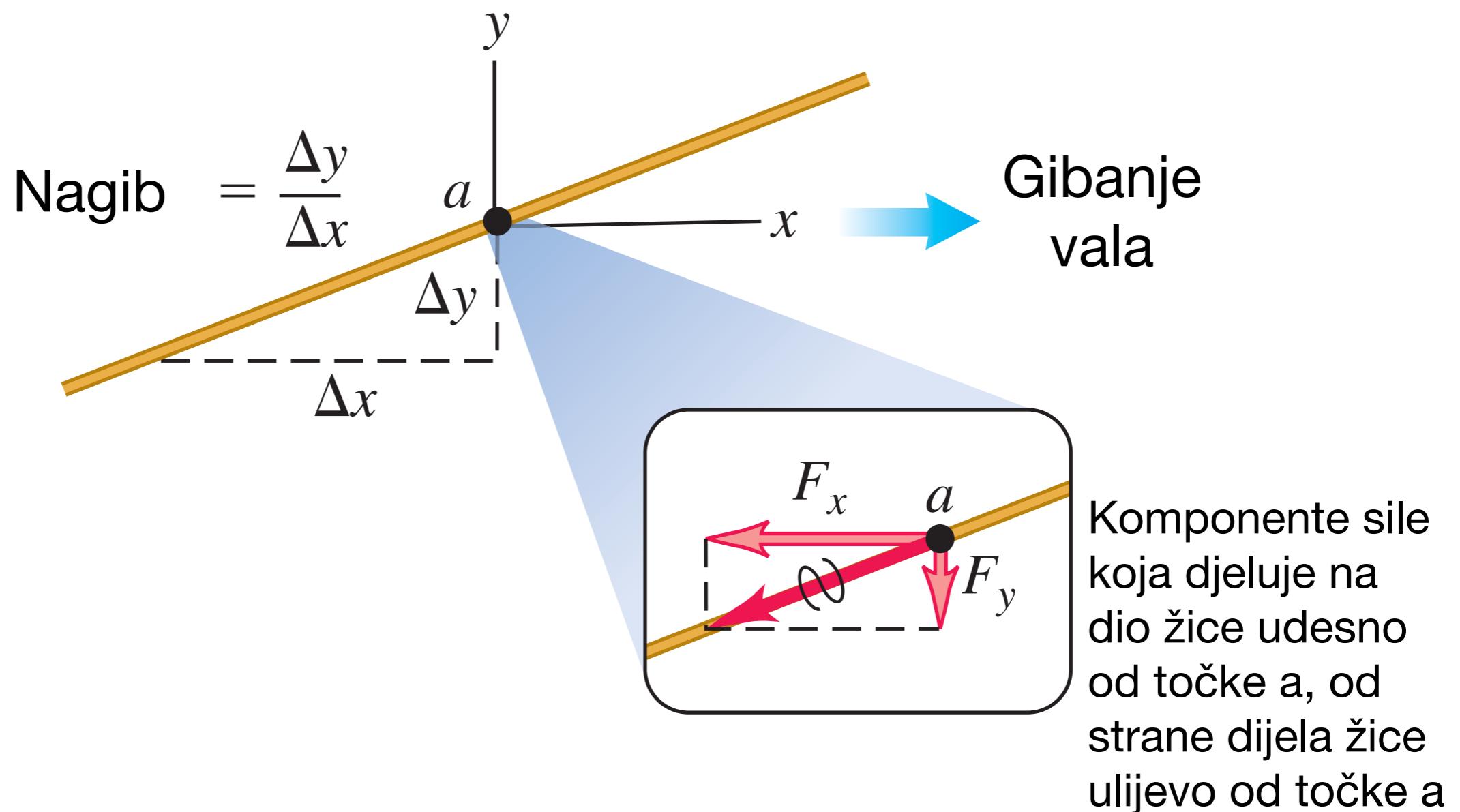
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x, t] = \frac{E}{\rho} \frac{\xi[x_i + \Delta x, t] - 2\xi[x_i, t] + \xi[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x, t] - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi[x, t] = 0$$

$$v^2 = \frac{E}{\rho}$$

Energija i snaga kod valova

- Da bi se stvorilo valno gibanje, trebamo primjeniti silu na dio medija u kojem se širi val (vršimo **rad** na sistem!)
- Kako se val propagira, svaki dio medija djeluje silom i vrši rad na susjedni dio
- Val prenosi energiju iz jednog dijela prostora u drugi!



Energija i snaga kod valova

Neka se val na prethodnoj slici giba slijeva na desno. Dio žice na lijevo od točke a djeluje silom na dio žice koji se nalazi na desno od a , i obrnuto.

Sila kojom djeluje dio žice ulijevo opisana je komponentama F i F_y u točki a .

Kada se točka a giba u y -smjeru, sila F_y vrši rad na ovu točku, tj. prenosi energiju na dio žice udesno od a . Odgovarajuća snaga se računa na slijedeći način:

$$F_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$
$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$P(x, t) = F k \omega A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

$$\omega = v k$$

$$v^2 = F/\mu$$

$$P(x, t) = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Energija i snaga kod valova

Srednja vrijednost funkcije $\sin^2 z$ (usrednjena preko jednog perioda) je $1/2$.

<https://www.math24.net/average-value-function/#example5>

$$\rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

$$\overline{P} = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = v \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$$

Ukupna gustoća energije jednaka je zbroju gustoće kinetičke energije i gustoće potencijalne energije:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE_k}{dx} + u(x)$$

Energija i snaga kod valova

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v_y^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta x} \rightarrow \frac{dE_k}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

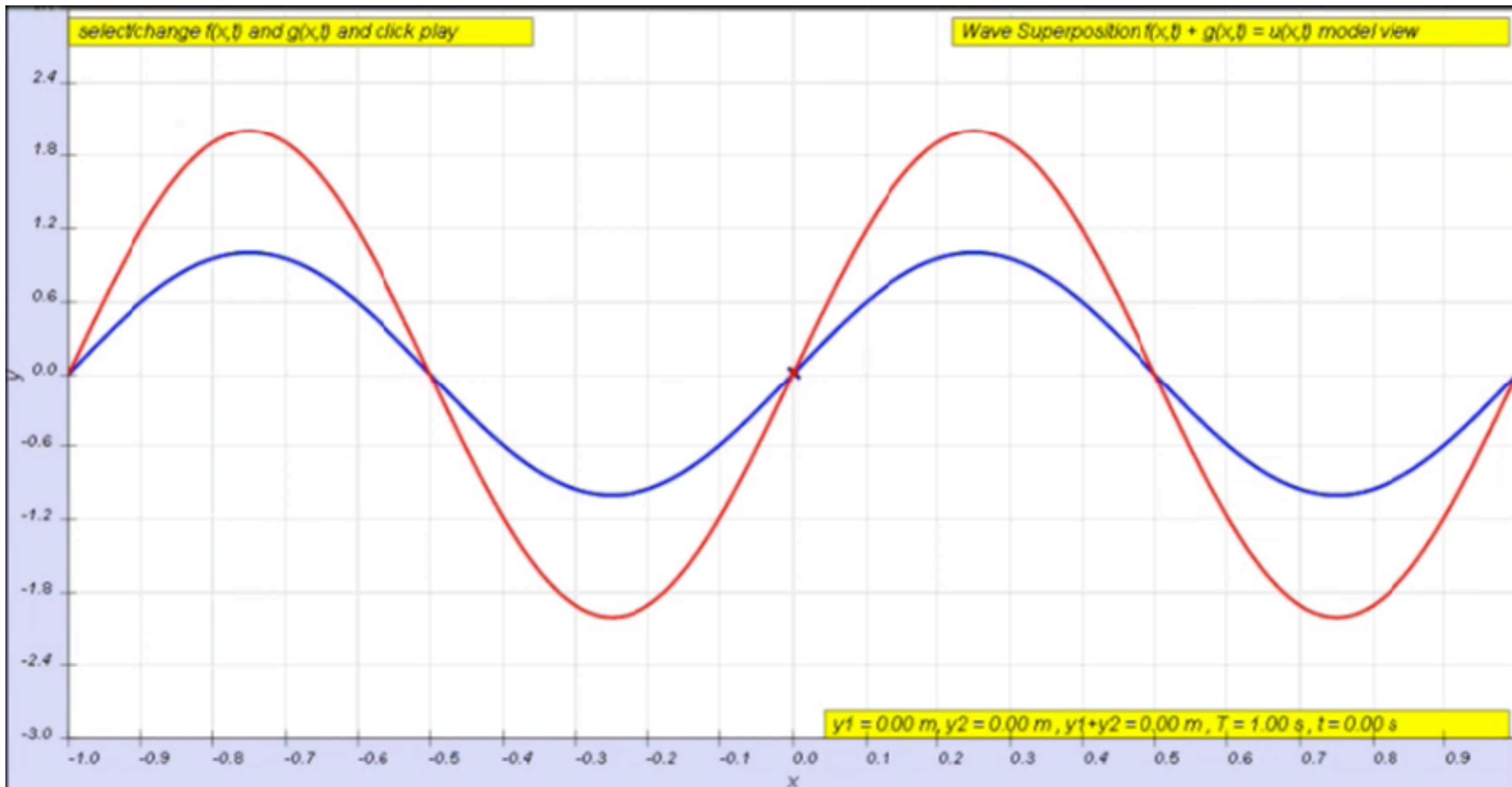
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [A \cos(\omega t - kx)] = -A \omega \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{dE_k}{dx} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\left\langle \frac{dE_k}{dx} \right\rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{dE_k}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \quad \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 = \langle u(x) \rangle$$

Superpozicija valova



val koji putuje na desno
val koji putuje u lijevo
suma elongacija dva vala

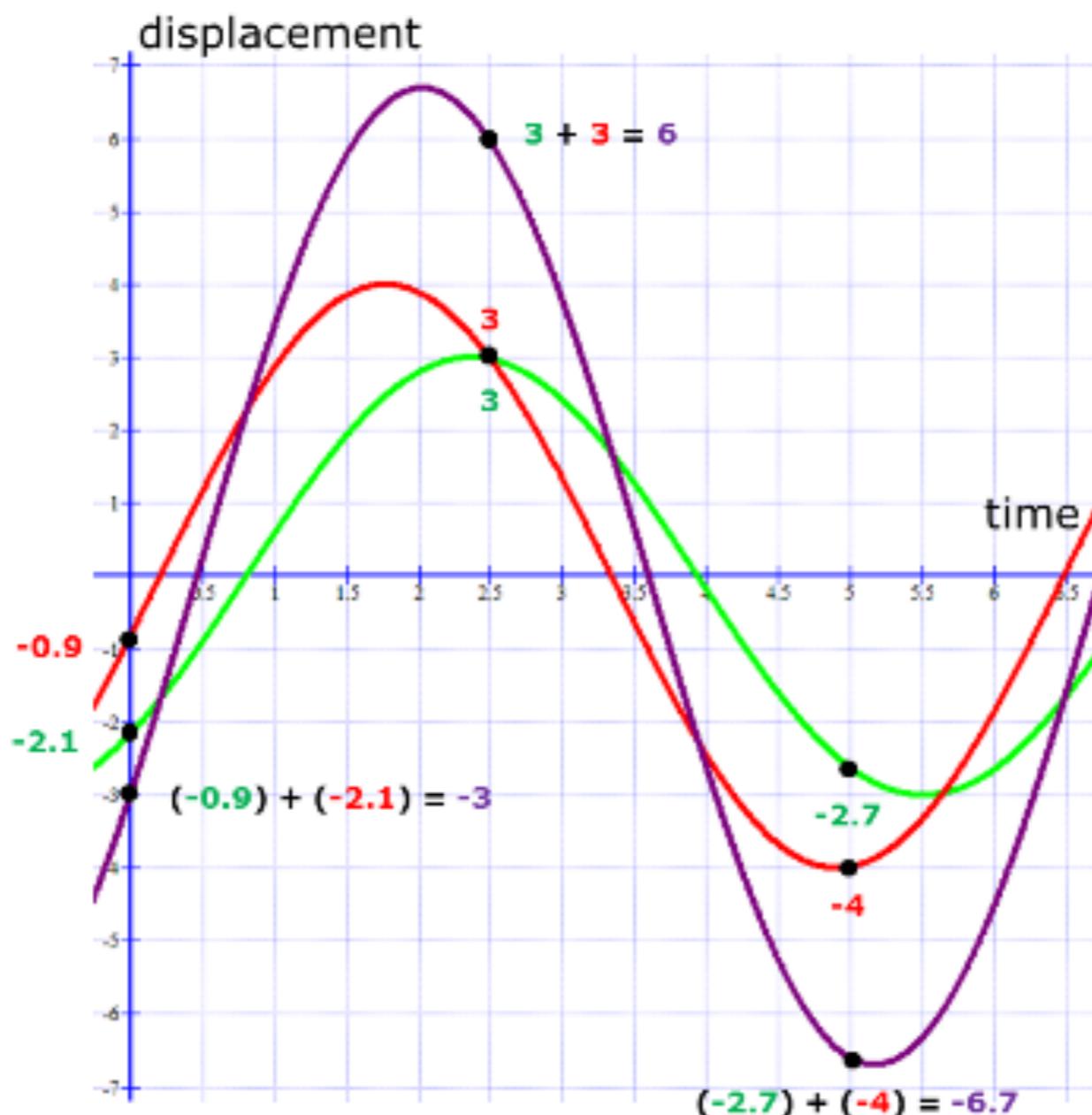
[Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International](#)

- **PRINCIP SUPERPOZICIJE:** rezultantni val je u svakoj točki algebarski zbroj individualnih valova, tj. rezultantna elongacija jednaka je zbroju elongacija komponentnih valova

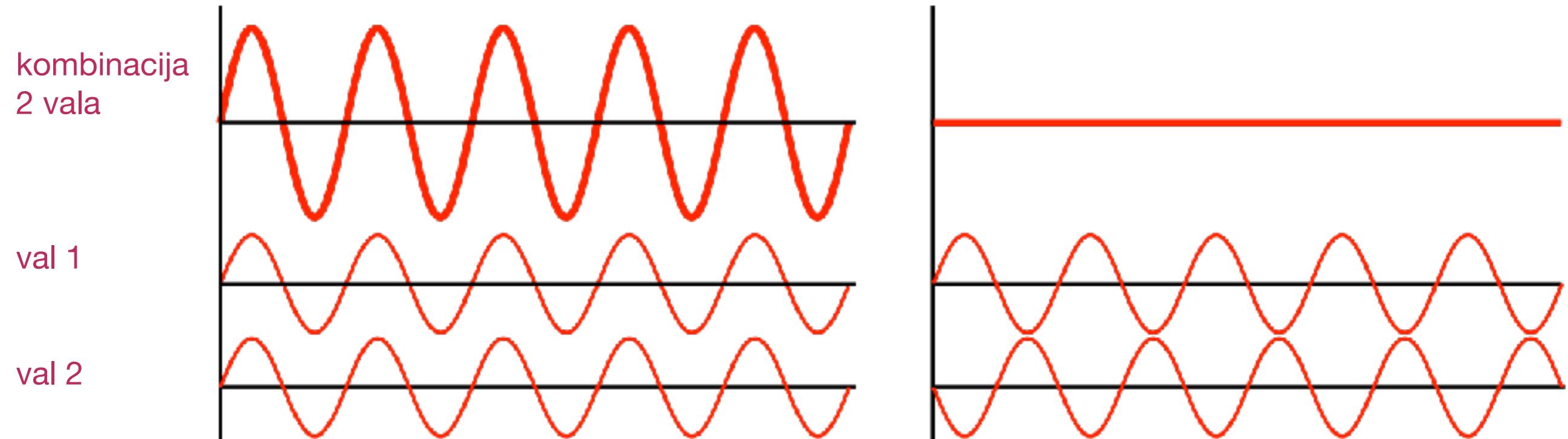
Superpozicija valova

- **PRINCIP SUPERPOZICIJE:** rezultantni val je u svakoj točki algebarski zbroj individualnih valova, tj. rezultantna elongacija jednaka je zbroju elongacija komponentnih valova

<https://www.youtube.com/watch?v=gDpvJ2jLA5I>



Superpozicija valova



* valovi su u fazi

* faza valova se razlikuje za π

Superpozicija valova

Razmotrimo 2 vala koji se gibaju u $+x$ smjeru, iste amplitude A, i izračunajmo čemu je jednak rezultantni val:

$$y_1(t, x) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1)$$

$$y_2(t, x) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2)$$

$$\begin{aligned} y(t, x) &= y_1(t, x) + y_2(t, x) \\ &= A[\sin(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1) + \sin(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t, x) &= 2A \sin\left[\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t + (\phi_1 + \phi_2)}{2}\right] \\ &\cdot \cos\left[\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)}{2}\right] \end{aligned}$$

1. slučaj: frekvencije valova su jednake ($\omega_1 = \omega_2$) i valovi su u fazi, ($\phi_1 = \phi_2$)

$$y(t, x) = 2A \sin(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1)$$

Rezultantni val ima dvostruku amplitudu!

Superpozicija valova

2. slučaj: faze se razlikuju za π , $\phi_2 = \phi_1 + \pi$

$$y(t, x) = 0$$

Rezultantni val je jednak nuli!

3. slučaj: frekvencije se malo razlikuju: $\omega_1 = \omega_2 + \delta\omega$ i $k_1 = k_2 + \delta k$

Uz uvjet $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $K = (k_1 + k_2)/2$ i $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$

$$y(t, x) = [2A \sin(Kx - \Omega t)] \cdot \cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t\right)$$

$$(\omega_1 + \omega_2)/2 \simeq \omega_1 \text{ i } (k_1 + k_2)/2 \simeq k_1$$

$$y(t, x) = 2A \sin(k_1 x - \omega_1 t) \cdot \cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t\right)$$

MODULIRANI VAL ILI UDAR koji se sastoji od VALNIH PAKETA!

Valovi unutar paketa imaju (veliku) frekvenciju Ω , a ovojnica koja modulira te valove ima (malu) frekvenciju $\delta\omega/2 = |\omega_1 - \omega_2|/2$

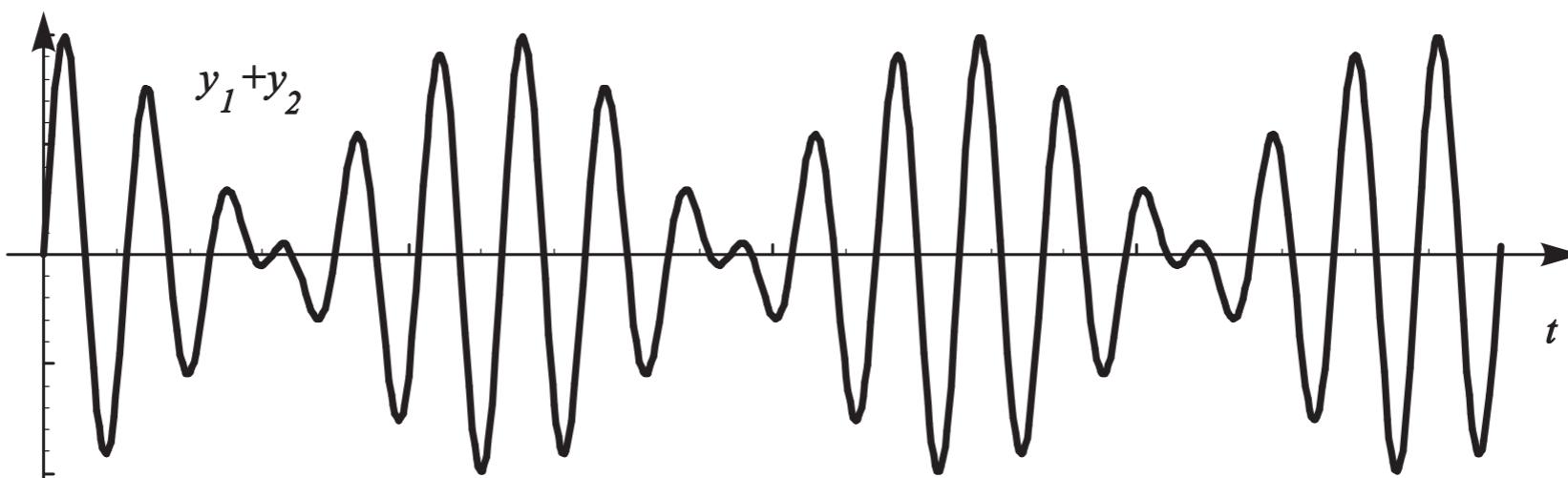
Superpozicija valova

Grupa valova čini **VALNI PAKET** i možemo izračunati grupnu brzinu s kojom se valni paket giba:

$$\cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t\right) = \cos\left[\frac{\delta k}{2}\left(x - \underbrace{\frac{\delta\omega}{2}}_{v_g} \frac{\delta k}{2} t\right)\right]$$

$$\delta\omega \rightarrow d\omega \text{ i } \delta k \rightarrow dk$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$



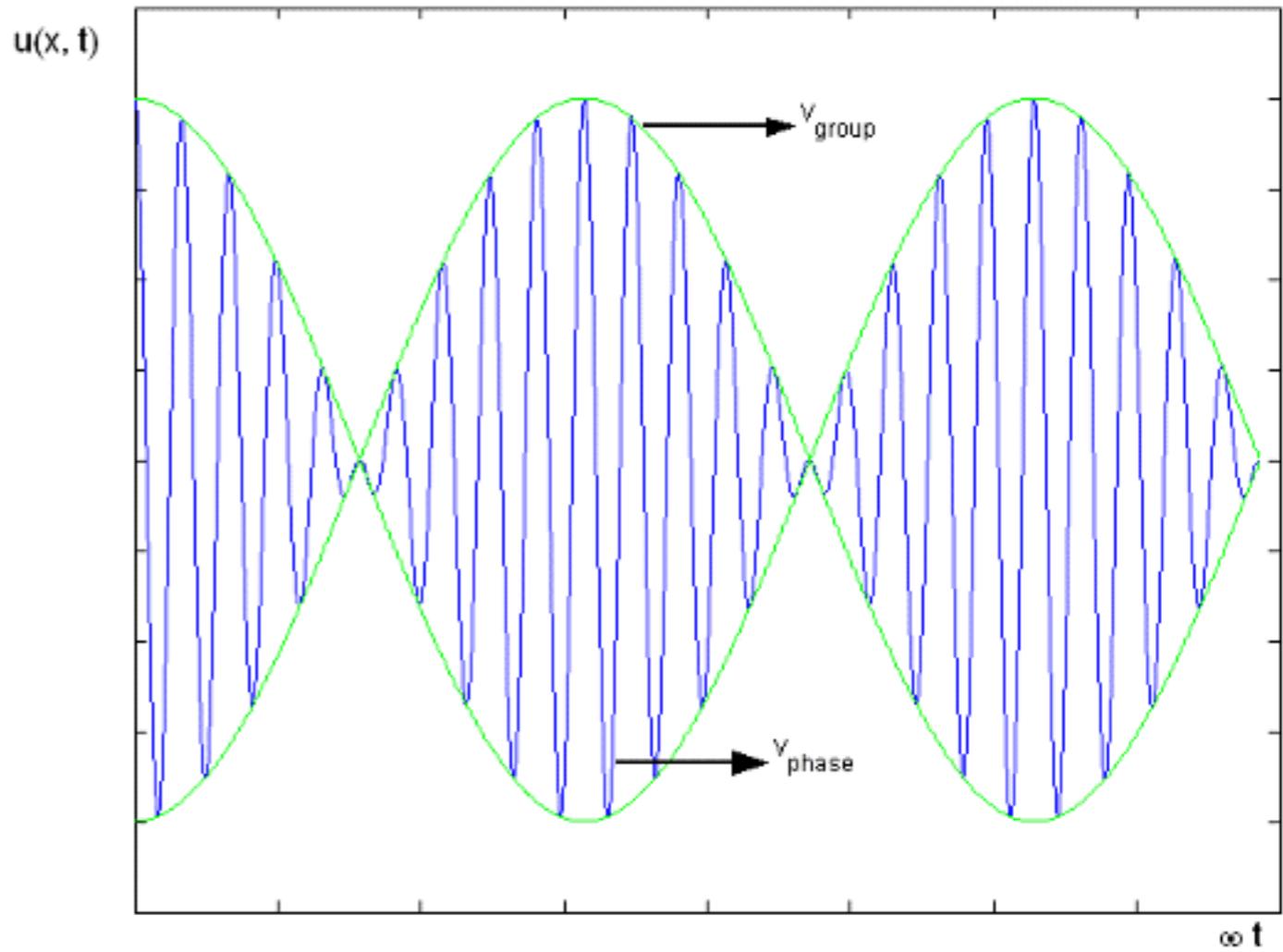
Superpozicija valova

- slučaj kada se frekvencije **malo razlikuju**: $\omega_1 = \omega_2 + \delta\omega$
- valovi unutar paketa imaju (veliku) frekvenciju Ω
- ovojnica koja modulira valove ima malu frekvenciju $\delta\omega/2$

<https://www.youtube.com/watch?v=tIM9vq-bepA>

valni paket

ovojnica valnog paketa (giba se
grupnom brzinom)



Demonstracije uz gradivo

1. Transverzalni i longitudinalni valovi

<https://www.youtube.com/watch?v=0f5iYCNNow>

2. Superpozicija valova

<https://www.youtube.com/watch?v=gDpvJ2jLA5I>

3. Valni paket

<https://www.youtube.com/watch?v=tIM9vq-bepA>