

# Elektromagnetizam: Maxwellove jednadzbe

## 1. Gaussov zakon za elektricitet

(povezuje ukupan električni tok sa ukupnim nabojem)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}/\epsilon_0$$

## 2. Gaussov zakon za magnetizam

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

## 3. Faradayev zakon

(povezuje inducirano električno polje sa promjenama magnetskog toka)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

## 4. Ampere-Maxwellov zakon

(povezuje inducirano magnetsko polje za promjenama električnog toka i strujom)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{\text{enc}}$$

Prijelaz iz integralnog u diferencijalni oblik: Gaussov teorem & Stokesov teorem



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

# Elektromagnetski valovi

- kada se polja ne mijenjaju u vremenu, npr. električno polje naboja koji miruje ili magnetsko polje stalne struje, možemo analizirati električna i magnetska polja neovisno jedno o drugom
- **kada se polja mijenjaju u vremenu, više nisu neovisna**
- **Faradayev zakon:** vremenska promjena magnetskog polja djeluje kao izvor električnog polja
- **Amperov zakon:** električno polje koje se mijenja u vremenu djeluje kao izvor magnetskog polja

- ako se odmaknemo od područja gdje se nalaze struje i naboji, dolazimo do dijela prostora gdje djeluju samo polja (tzv. polja zračenja)
- Maxwell: razmatrao je mogućnost da se elektromagnetski poremećaj, koji se sastoji od vremenski promjenjivih električnih i magnetskih polja, širi kroz prostor čak i kada nije prisutna materija u prostoru ->

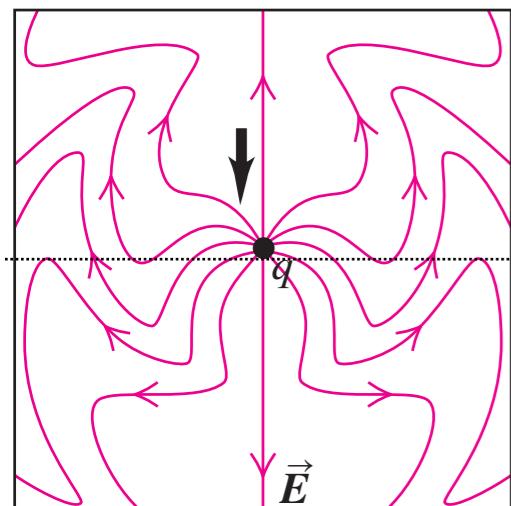
**ELEKTROMAGNETSKI VAL**

# Elektromagnetski valovi

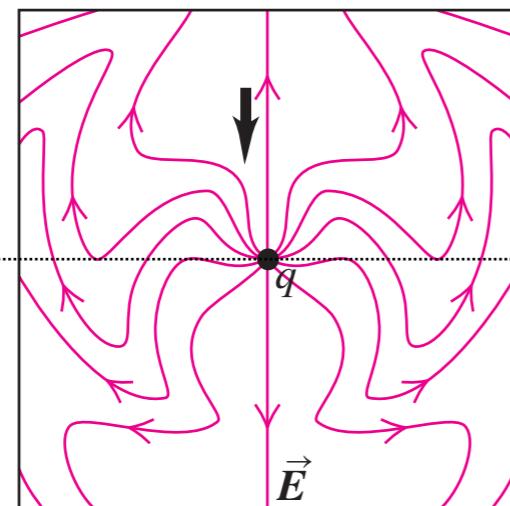
\* Kako točkasti naboј može emitirati EM valove?

Primjer: linije električnog polja za naboј koji jednostavno harmonički oscilira

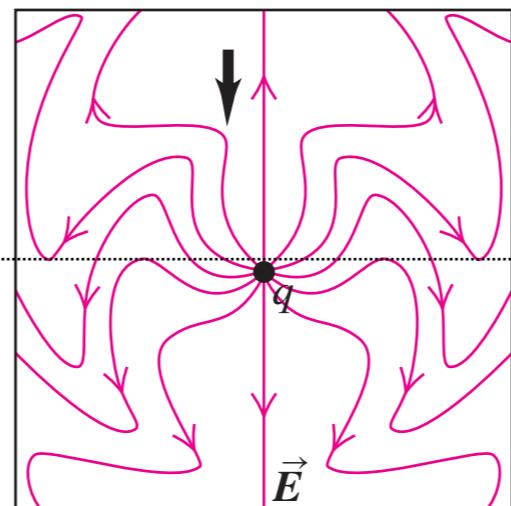
(a)  $t = 0$



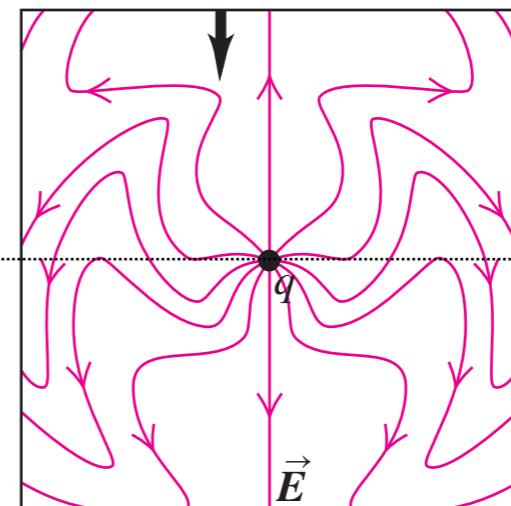
(b)  $t = T/4$



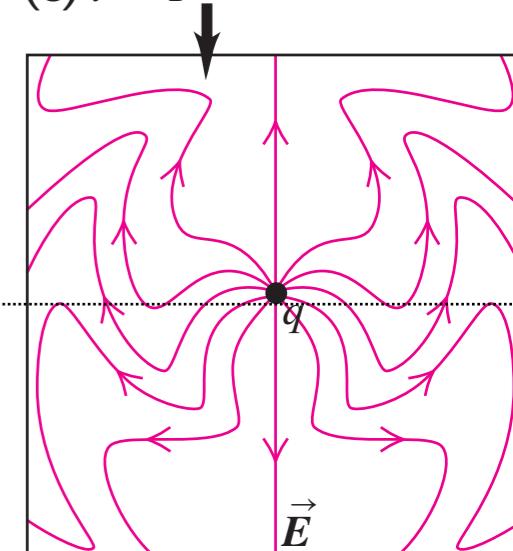
(c)  $t = T/2$



(d)  $t = 3T/4$



(e)  $t = T$



\* valovi nisu jednaki u svim smjerovima

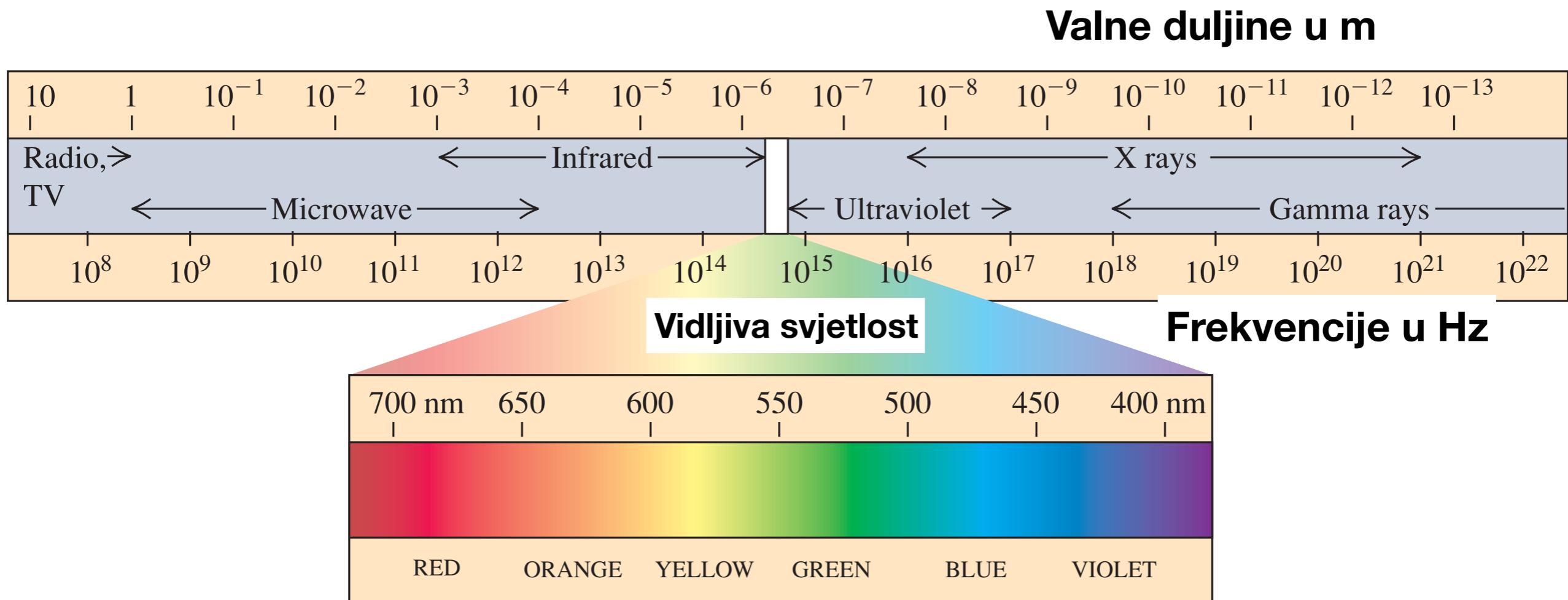
\* najjači su pod kutem 90 stupnjeva u odnosu na os gibanja naboja

\* magnetsko polje čini koncentrične kružnice (koncentrične u odnosu na os osciliranja) koje leže u ravninama okomitim na ravninu slike

# Elektromagnetski valovi

<https://www.youtube.com/watch?v=cfXzwh3KadE&list=PLCOpGooOtUP1NSucjZMJjtQMovQfmFpkS>

Spektar frekvencija i valnih duljina elektromagnetskih valova:

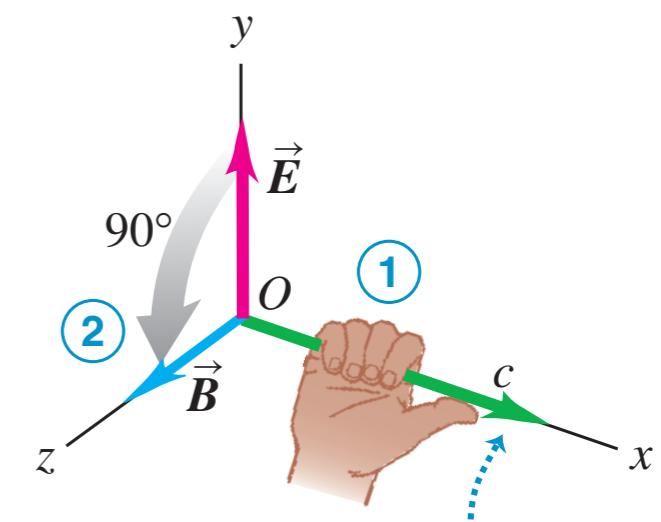
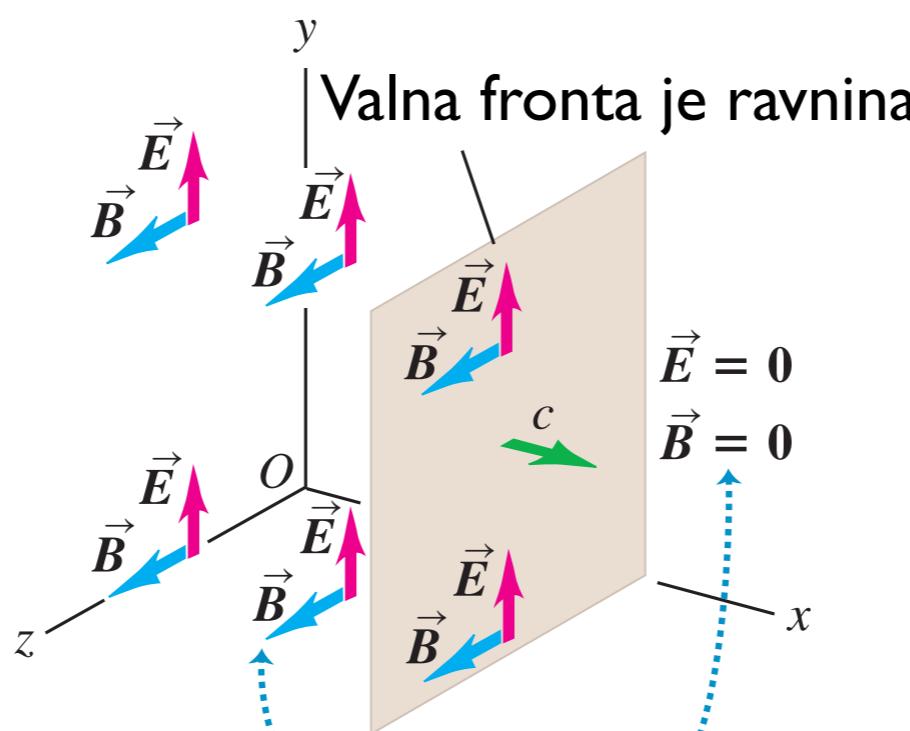


$$c = 299,792,458 \text{ m/s} \quad c = \lambda f$$

# Maxwellove jednadžbe za EM val u ravnini

Maxwellove jednadžbe opisuju elektromagnetsko polje u svakoj točki prostora; iz njih možemo izvesti valnu jednadžbu za EM valove, i odrediti kako se magnetsko i električno polje šire kroz prostor.

Pretpostavimo da el. polje **E** ima samo y-komponentu, a mag. polje **B** samo z-komponentu, te neka se oba polja gibaju zajedno u  $+x$  smjeru brzinom  $c$  koja je nepoznata:



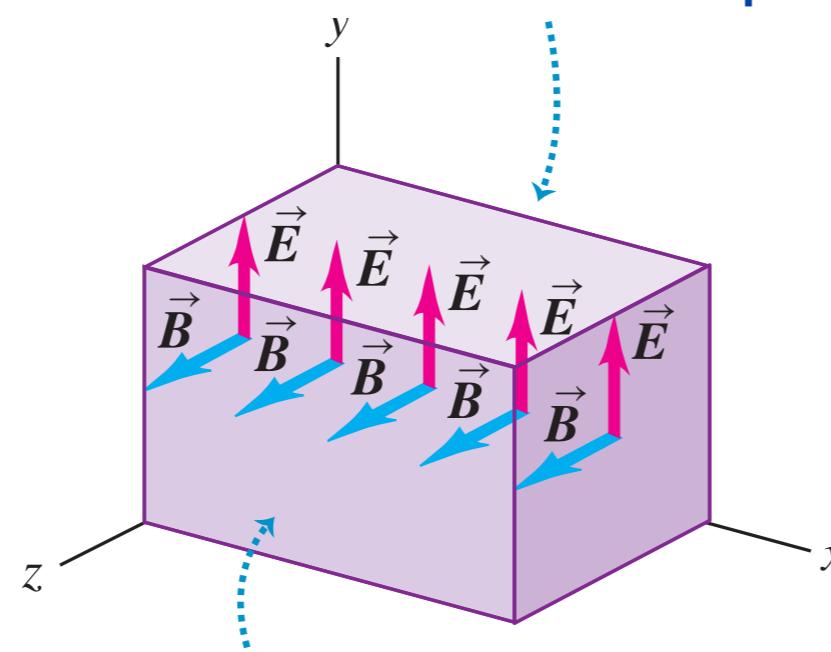
Električno i magnetsko polje su uniformni iza valne fronte  
i nula ispred valne fronte

# Maxwellove jednadžbe za EM val u ravnini

Provjerimo da li ovakav val zadovoljava 1. i 2. Maxwellovu jednadžbu (Gaussov zakon za el. i mag. polje).

Gaussova površina na slici ne uključuje el. naboј. Ukupni el. i mag. tok kroz površinu su nula:

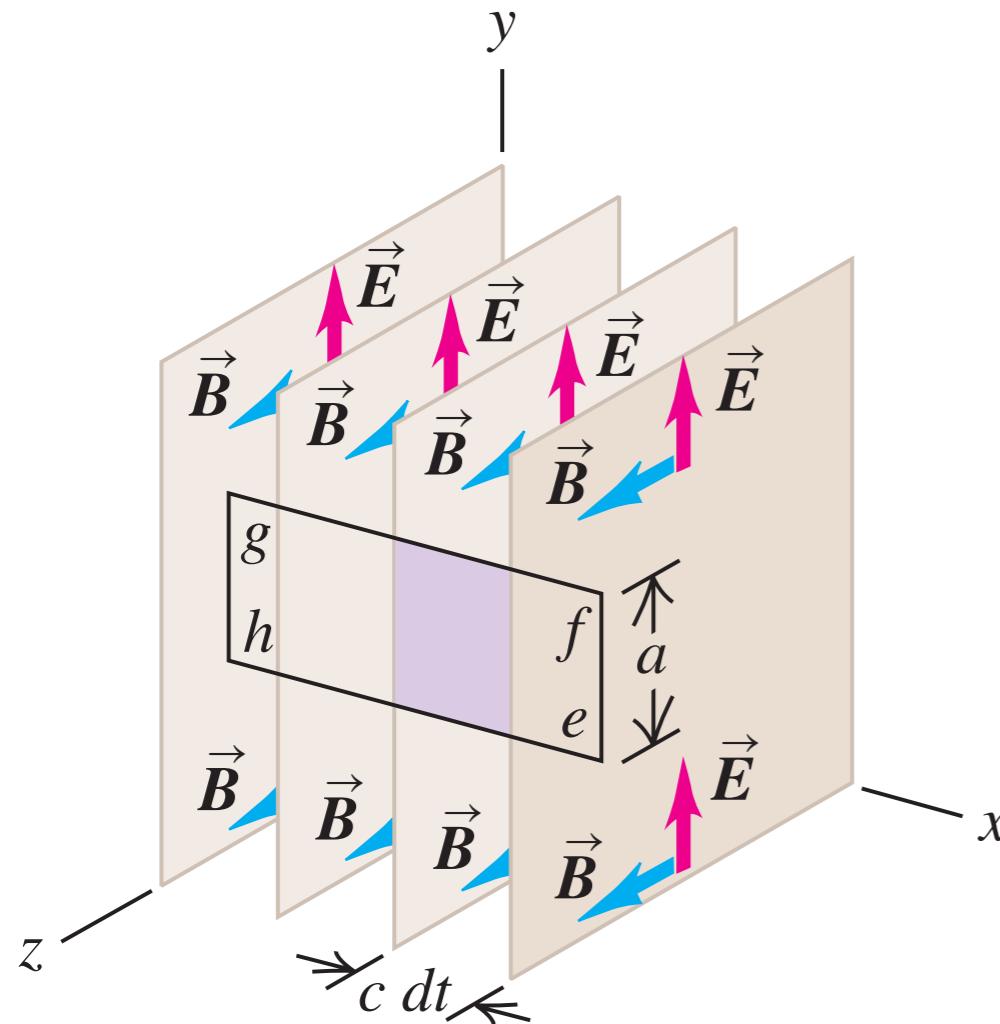
El. polje je jednak na donjoj i na gornjoj strani  
Gaussove površine



Gaussova površina za transverzalni planarni EM val;  
mag. polje je jednak na lijevoj i na desnoj strani površine

# Maxwellove jednadžbe za EM val u ravni

Faradayev zakon za transverzalni planarni EM val:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

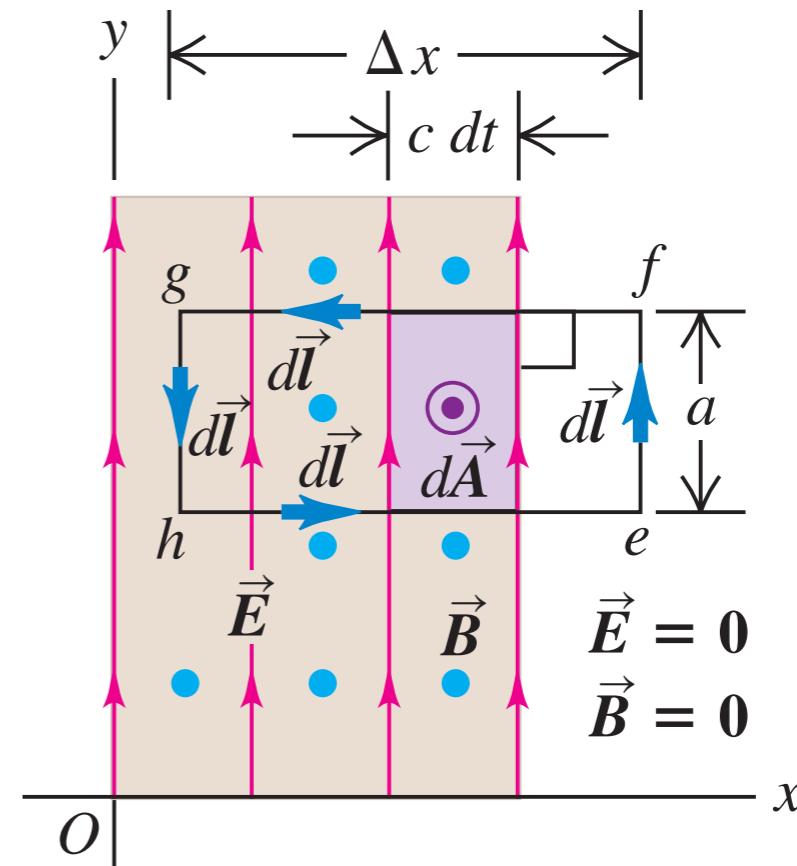


Integriramo duž pravokutnika  $efgh$ .

Prepostavimo da je vektor površine  $d\mathbf{A}$  usmjeren je u  $+z$  smjeru. Zbog pravila desne ruke, u tom slučaju integraciju  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  vršimo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Samo stranica  $gh$  pridonosi integralu:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea$$



$$d\Phi_B = B(ac dt)$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bac$$

$$-Ea = -Bac$$

$$E = cB$$

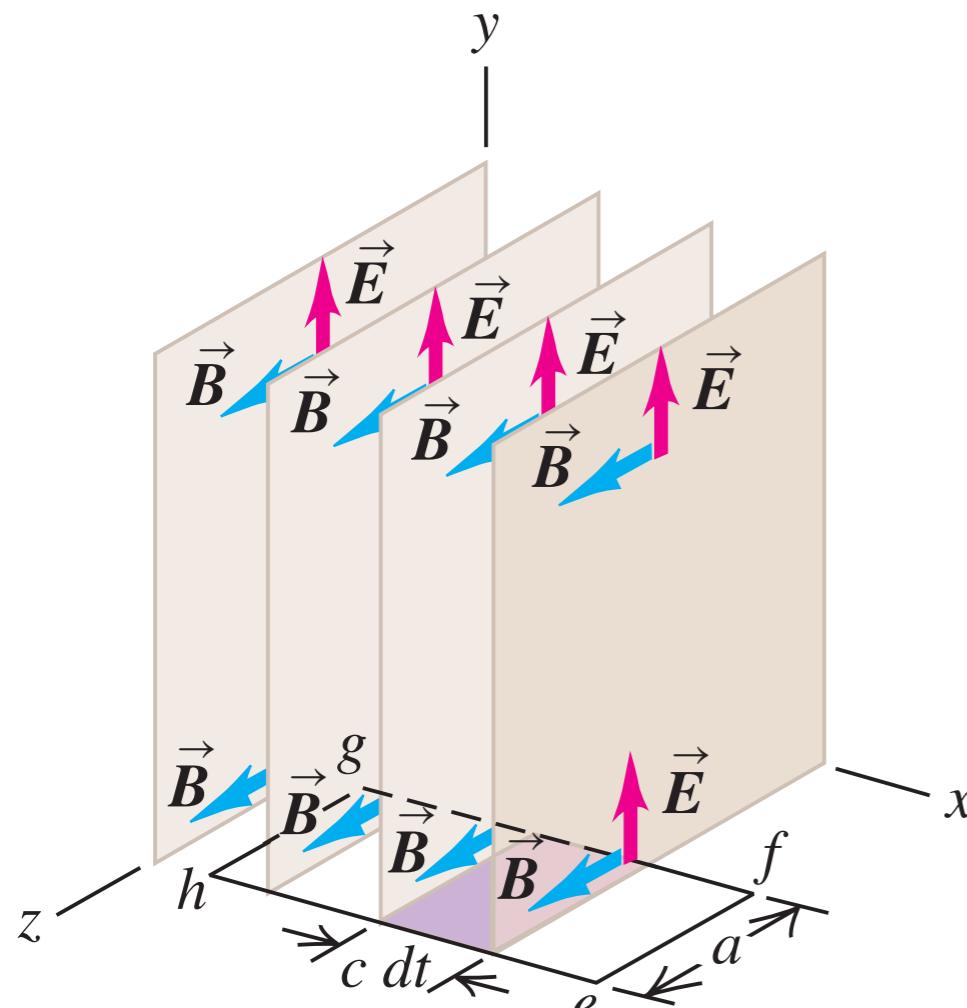
# Maxwellove jednadžbe za EM val u ravni

Young & Freedman University Physics

Ampereov zakon za transverzalni planarni EM val:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$i_C = 0$

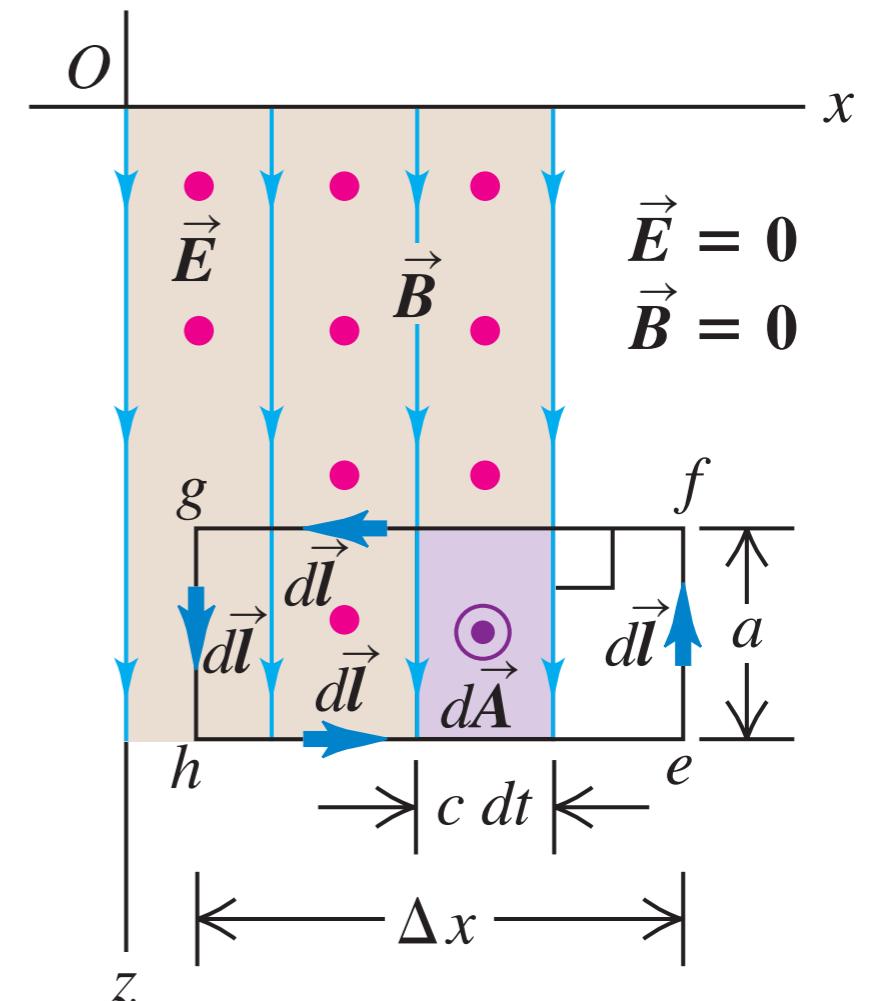


Samo stranica  $gh$   
pridonosi integralu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Ba$$

$$Ba = \epsilon_0 \mu_0 E a c$$

$$B = \epsilon_0 \mu_0 c E$$



$$d\Phi_E = E(a c dt)$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = Eac$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

# Maxwellove jednadžbe za EM val u ravnini

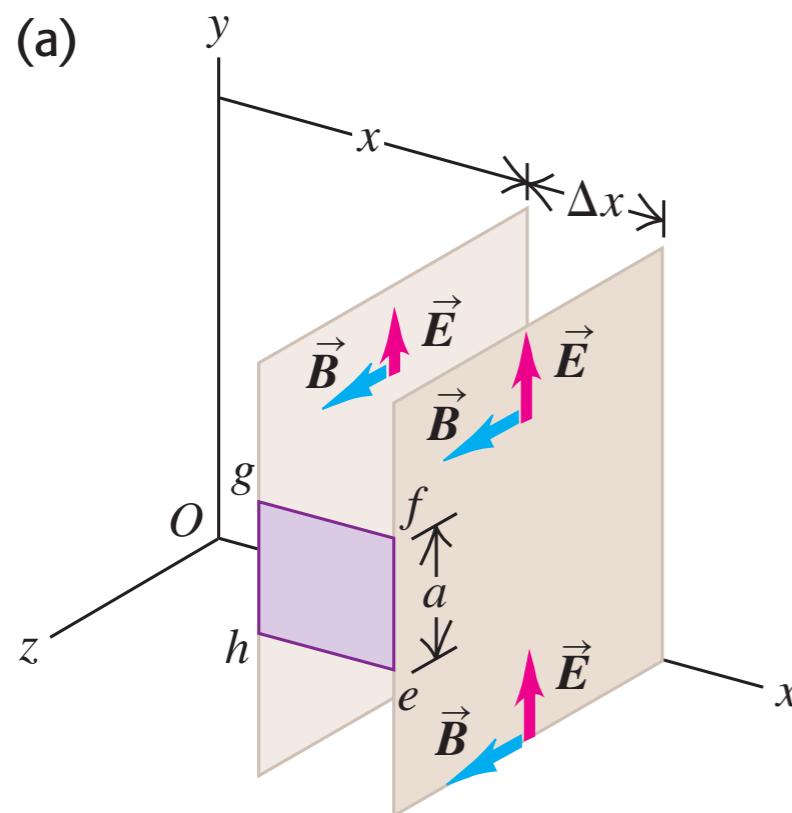
Ako se val ne širi u vakuumu, nego u prozirnom sredstvu čija su električna i magnetska svojstva opisana sa  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  i  $\mu = \mu_r \mu_0$ :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\mu_r\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}. \end{aligned} \quad n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}.$$

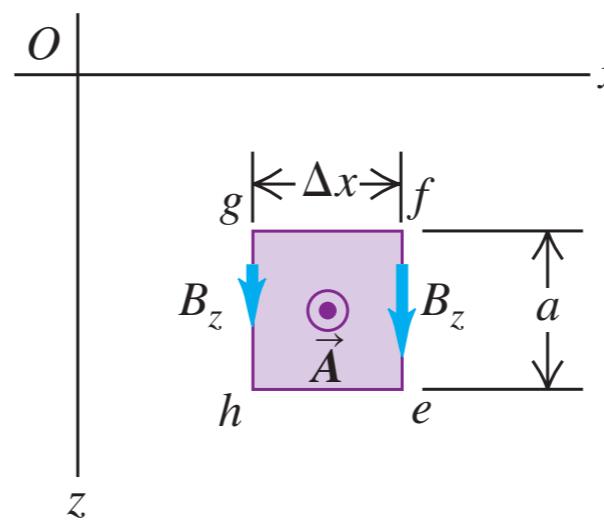
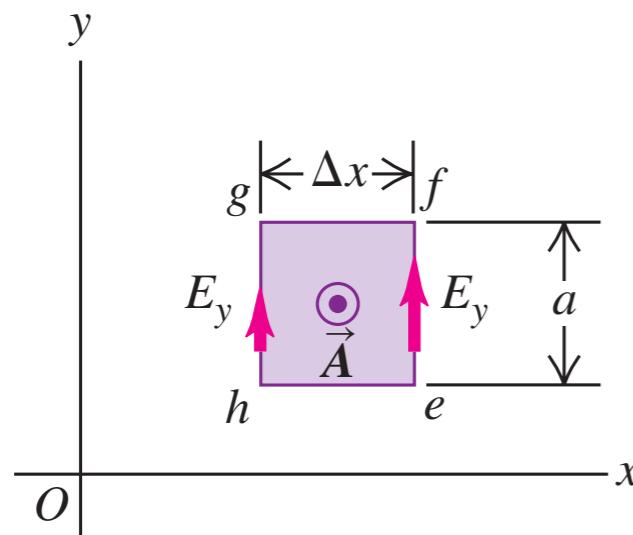
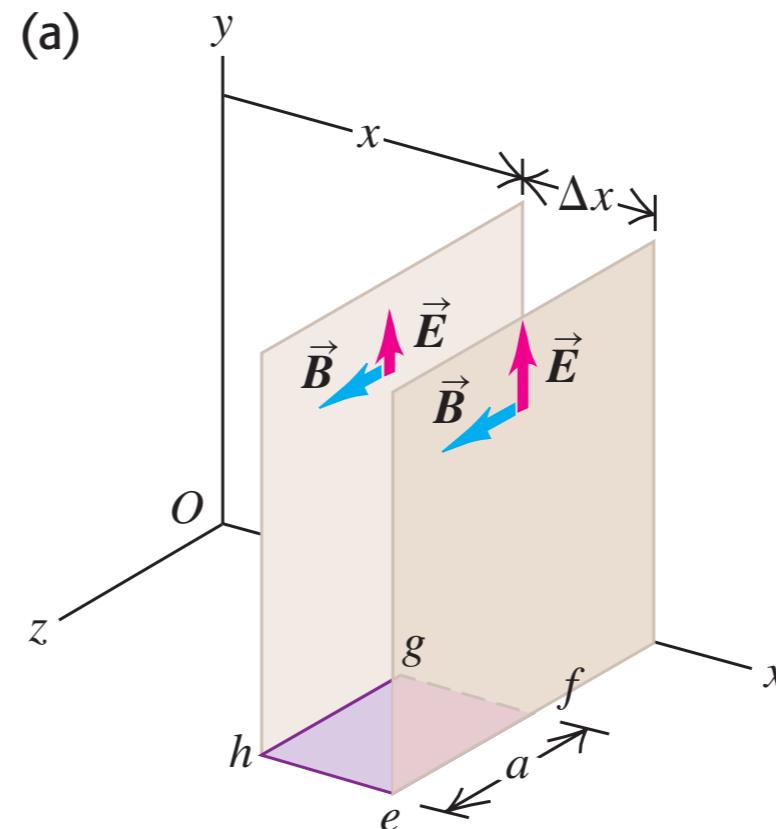
n je indeks loma.

# Izvod valne jednadžbe za EM val

## Faradayev zakon



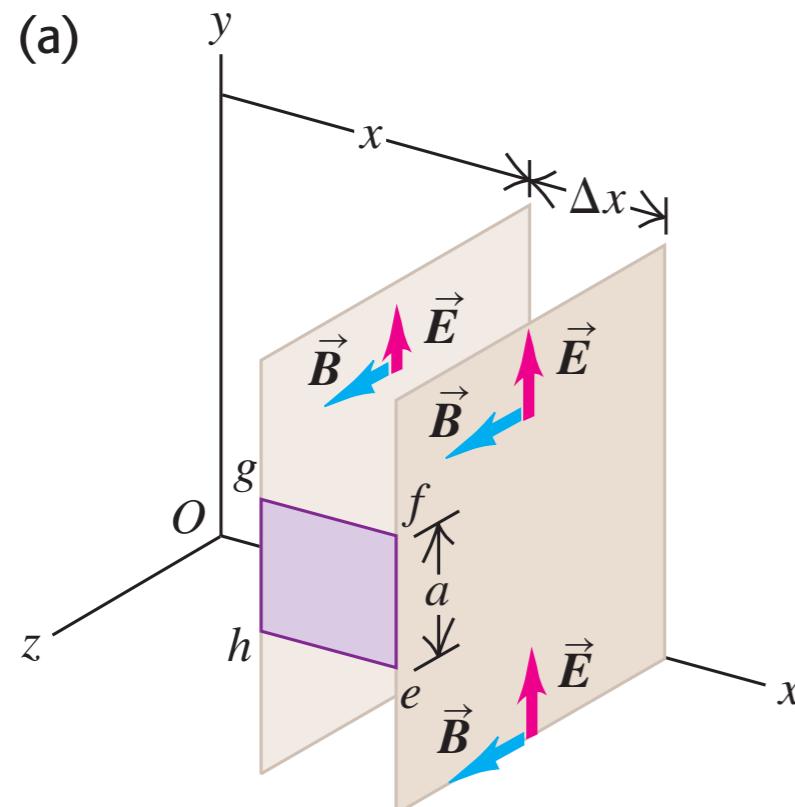
## Ampereov zakon



# Izvod valne jednadžbe za EM val

Razmotrimo ponovno val u ravnini, ali neka se sada  $E_y$  i  $B_z$  mijenjaju kontinuirano duž x-osi (tj. polja su funkcije  $x$  i  $t$ ):

**Faradayev zakon:**



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_y(x, t)a + E_y(x + \Delta x, t)a$$

$$\Phi_B = B_z(x, t)A = B_z(x, t)a \Delta x$$

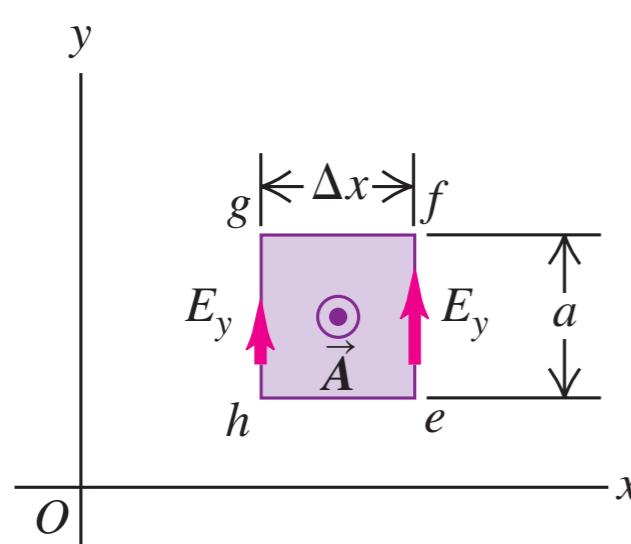
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} a \Delta x$$

$$a[E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)] = -\frac{\partial B_z}{\partial t} a \Delta x$$

$$\frac{E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t}}$$



# Izvod valne jednadžbe za EM val

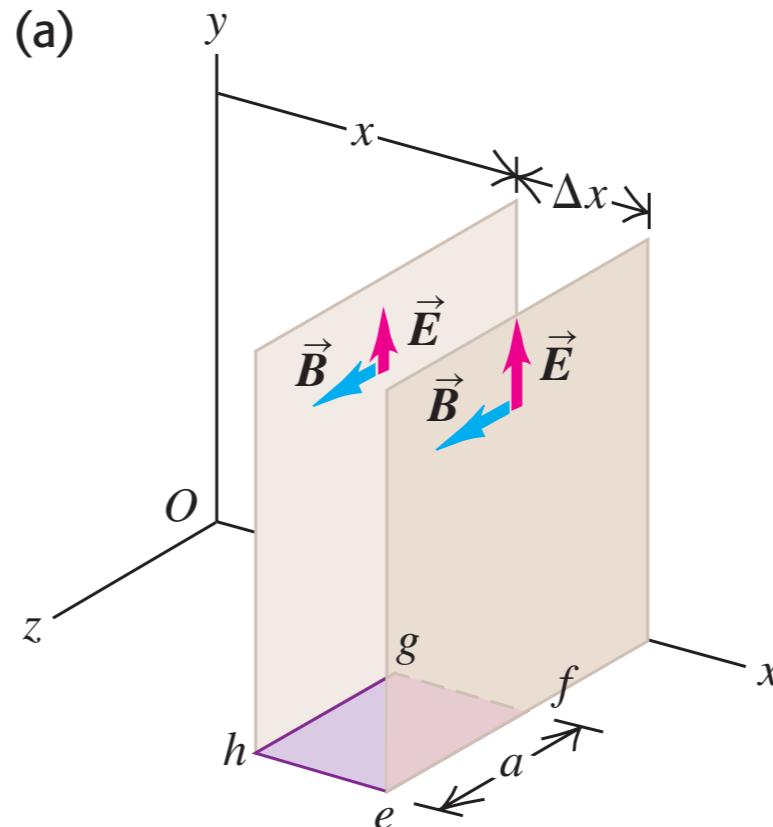
## Ampereov zakon

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a$$

$$\Phi_E = E_y(x, t)A = E_y(x, t)a \Delta x$$

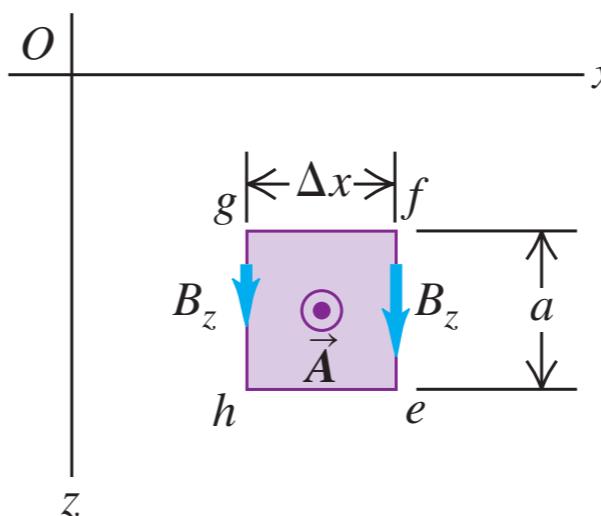
$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} a \Delta x$$

$$-B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} a \Delta x$$



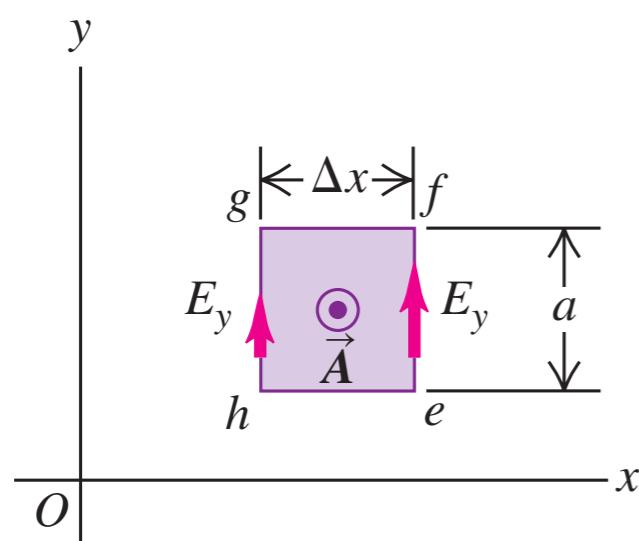
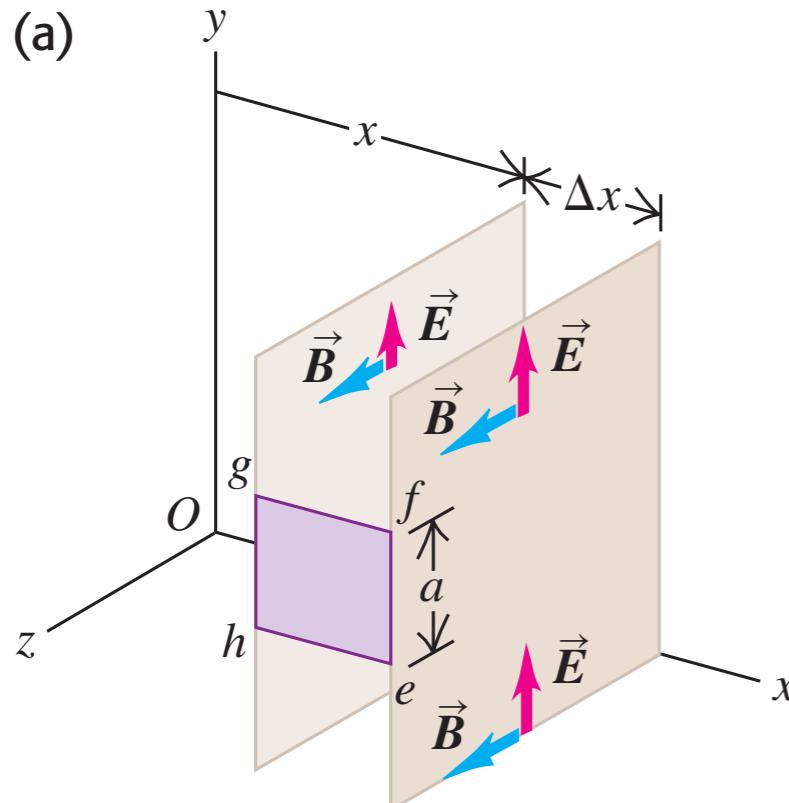
$\Delta x \rightarrow 0$

$$-\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}$$

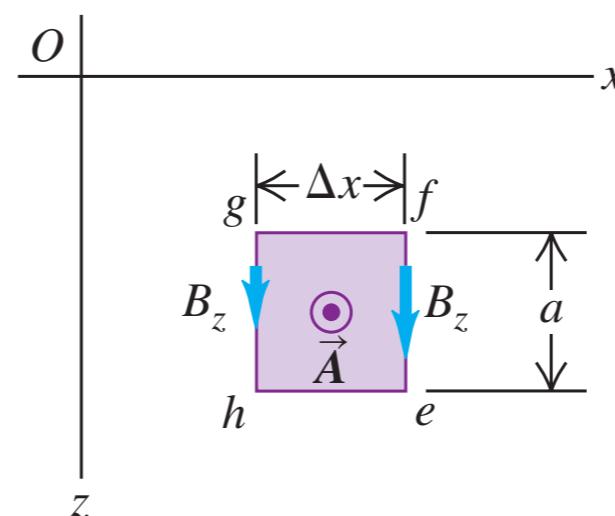
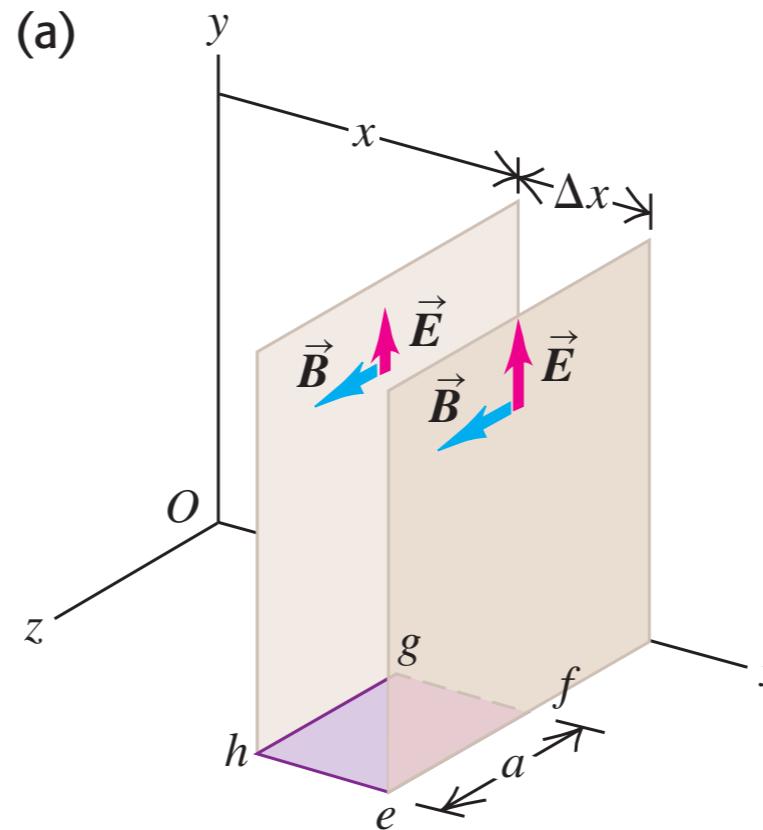


# Izvod valne jednadžbe za EM val

## Faradayev zakon



## Ampereov zakon



$$-\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x \partial t}$$

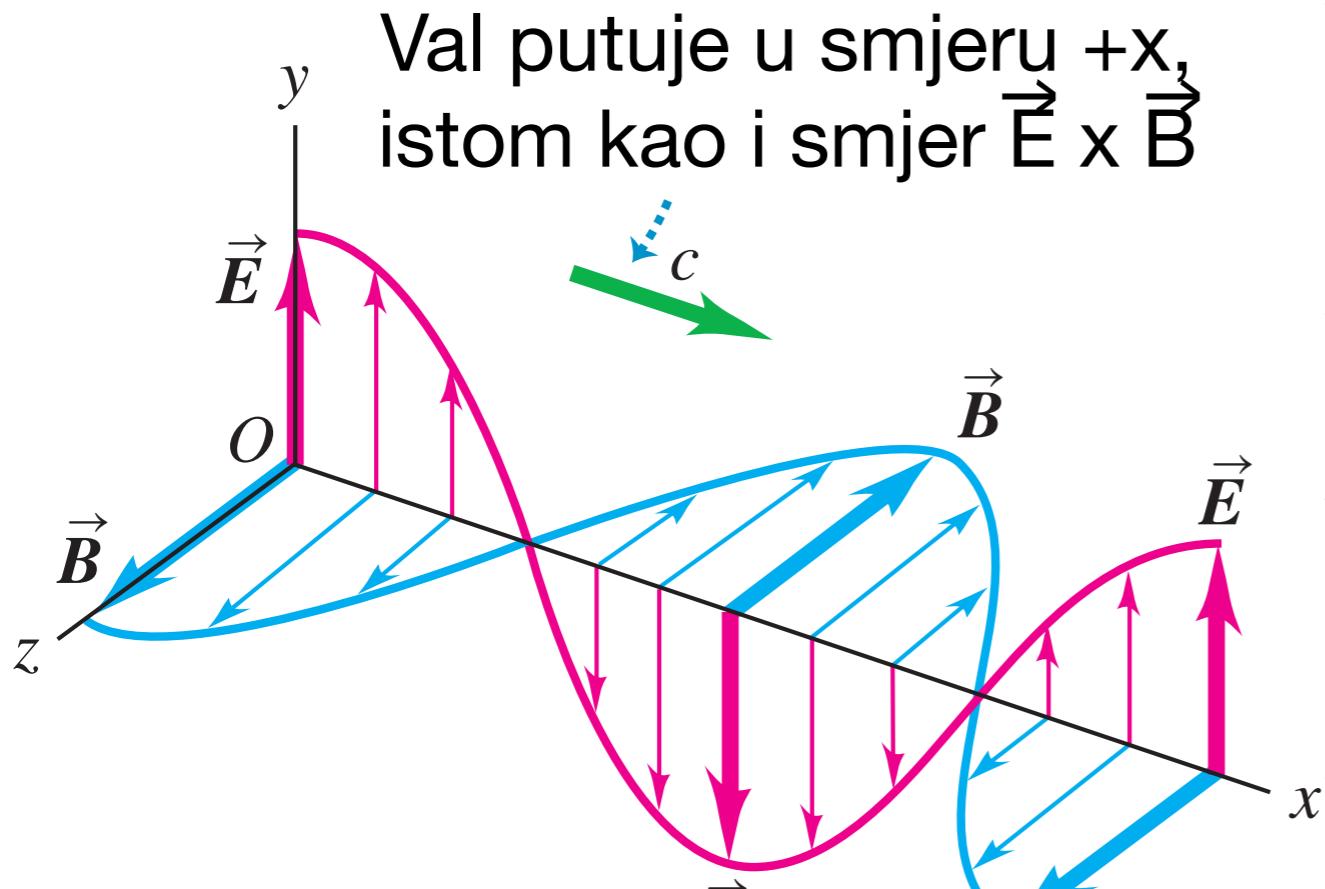
$$-\frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2} = \epsilon_0 \mu_0}$$

$B_z$  zadovoljava istu valnu jednadžbu kao i  $E_y$ .

# Valna jednadžba za EM val



Val putuje u smjeru  $+x$ ,  
istom kao i smjer  $\vec{E} \times \vec{B}$

$\vec{E}$ : samo  $y$ -komponenta  
 $\vec{B}$ : samo  $z$ -komponenta

- smjer polarizacije elektromagnetskog polja određen je (dogovorno) smjerom polarizacije električnog vektora
- vektori  $E$  i  $B$  su međusobno okomiti
- oba su rješenja transverzalna; električno polje polarizirano je u smjeru  $y$ -osi
- polja su u fazi, tj. u istom trenutku iščezavaju i u istom trenutku postižu svoju amplitudu
- rješenja predstavljaju rješenja monokromatskog vala (samo jedne frekvencije  $\nu$  i valnog vektora  $\mathbf{k} = 2\pi / \lambda$ )

$$\vec{E}(x, t) = \hat{j}E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$E_{\max} = cB_{\max}$$

# Razumijevanje

Električno polje elektromagnetskog vala u ravnini valnog broja  $k$  i kutne frekvencije  $\omega$  dano je sa izrazom:

$$\vec{E} = E_0 (\hat{i} + \hat{j}) \sin(kz - \omega t).$$

Koji od slijedećih izraza daje smjer pridruženog magnetskog polja  $\vec{B}$ :

(a)  $\hat{k}$

(b)  $-\hat{i} + \hat{j}$

(c)  $-\hat{i} - \hat{j}$

(d)  $\hat{i} - \hat{k}$

(e)  $\hat{j} - \hat{k}$

Točan odgovor: b

# Energija EM polja i Poyntingov vektor

Uz pretpostavku  $\mathbf{j} = 0$ , te  $\rho=0$ : 
$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{E} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{B} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Ove dvije jednadžbe oduzmemosmo, te uzmemo u obzir pravilo:

$$\nabla(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$$

Dobivamo:

$$-\nabla(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{E^2}{2} \mu_0 \epsilon_0 + \frac{B^2}{2} \right]$$

Poyntingov vektor (dimenzija = W/m<sup>2</sup>):

$$\boxed{\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})}$$

Smjer Poyntingovog vektora u bilo kojoj točki daje smjer vala i smjer transporta energije u toj točki. Gustoća energije EM polja:

$$\boxed{w_{EM} \equiv \left[ \frac{E^2}{2} \epsilon_0 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]}$$

Dakle:

$$\boxed{\nabla \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} w_{EM}}$$

# Intenzitet sinusoidalnog vala u vakumu

$$\begin{aligned}\vec{S}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(x, t) \times \vec{B}(x, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\hat{\mathbf{j}} E_{\max} \cos(kx - \omega t)] \times [\hat{\mathbf{k}} B_{\max} \cos(kx - \omega t)]\end{aligned}$$

$$S_x(x, t) = \frac{E_{\max} B_{\max}}{\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu_0} [1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$

Srednja vrijednost za vrijeme jednog ciklusa:

$$S_{\text{av}} = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu_0} \quad \vec{S}_{\text{av}} = \hat{\mathbf{i}} S_{\text{av}}$$

**Intenzitet** je definiran kao:

$$I = S_{\text{av}} = \frac{E_{\max} B_{\max}}{2\mu_0} = \frac{E_{\max}^2}{2\mu_0 c}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\max}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\max}^2$$

# Zadatak

Ravni elektromagnetski val frekvencije 40 MHz širi se zrakom (vakuumom). U nekoj točki u jednom trenutku električno polje ima maksimalnu vrijednost od  $750 \text{ N/C} = 750 \text{ V/m}$ .

- (a) Odredite valnu duljinu EM vala i njegov period;
- (b) Odredite amplitudu magnetskog polja;
- (c) Orijentirajte os  $z$  koordinatnog sustava u smjeru širenja EM vala i odredite komponente valnog vektora;
- (d) Napišite u vektorskom obliku električnu i magnetsku komponentu EM vala;
- (e) Izračunajte Poyntingov vektor i srednju vrijednost Poyntingovog vektora na mjestu  $z_1 = 1.333 \text{ km}$  i u trenutku  $t_1 = 1.333 \text{ s}$ .

$$c = \lambda\nu$$

$$\lambda = 7,5 \text{ m}, \quad T = 1/\nu = 2,5 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$B_0 = E_0/c = 2,5 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda = 4\pi/15 \text{ m}^{-1} \quad \vec{k} = \hat{k}(4\pi/15) \text{ m}^{-1}$$

$$\vec{E}(t, z) = \hat{i}E_0 \cos(\omega t - kz) = \hat{i}750 \cos\left(80\pi \cdot 10^6 t - \frac{4\pi}{15}z\right)$$

$$B_0 = E_0/c \quad \vec{B} = \hat{j}B_0 \cos(\omega t - kz) = \hat{j}2.5 \cdot 10^{-6} \cos\left(80\pi \cdot 10^6 t - \frac{4\pi}{15}z\right)$$

# Zadatak

Ravni elektromagnetski val frekvencije 40 MHz širi se zrakom (vakuumom). U nekoj točki u jednom trenutku električno polje ima maksimalnu vrijednost od  $750 \text{ N/C} = 750 \text{ V/m}$ .

- (a) Odredite valnu duljinu EM vala i njegov period;
- (b) Odredite amplitudu magnetskog polja;
- (c) Orijentirajte os  $z$  koordinatnog sustava u smjeru širenja EM vala i odredite komponente valnog vektora;
- (d) Napišite u vektorskom obliku električnu i magnetsku komponentu EM vala;
- (e) Izračunajte Poyntingov vektor i srednju vrijednost Poyntingovog vektora na mjestu  $z_1 = 1.333 \text{ km}$  i u trenutku  $t_1 = 1.333 \text{ s}$ .

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \hat{k} \cos^2(\omega t - kz).$$

$$\vec{S}(t_1 = 1,333 \text{ s}, z_1 = 1,333 \text{ km}) = \hat{k} 746,0 \text{ W/m}^2$$