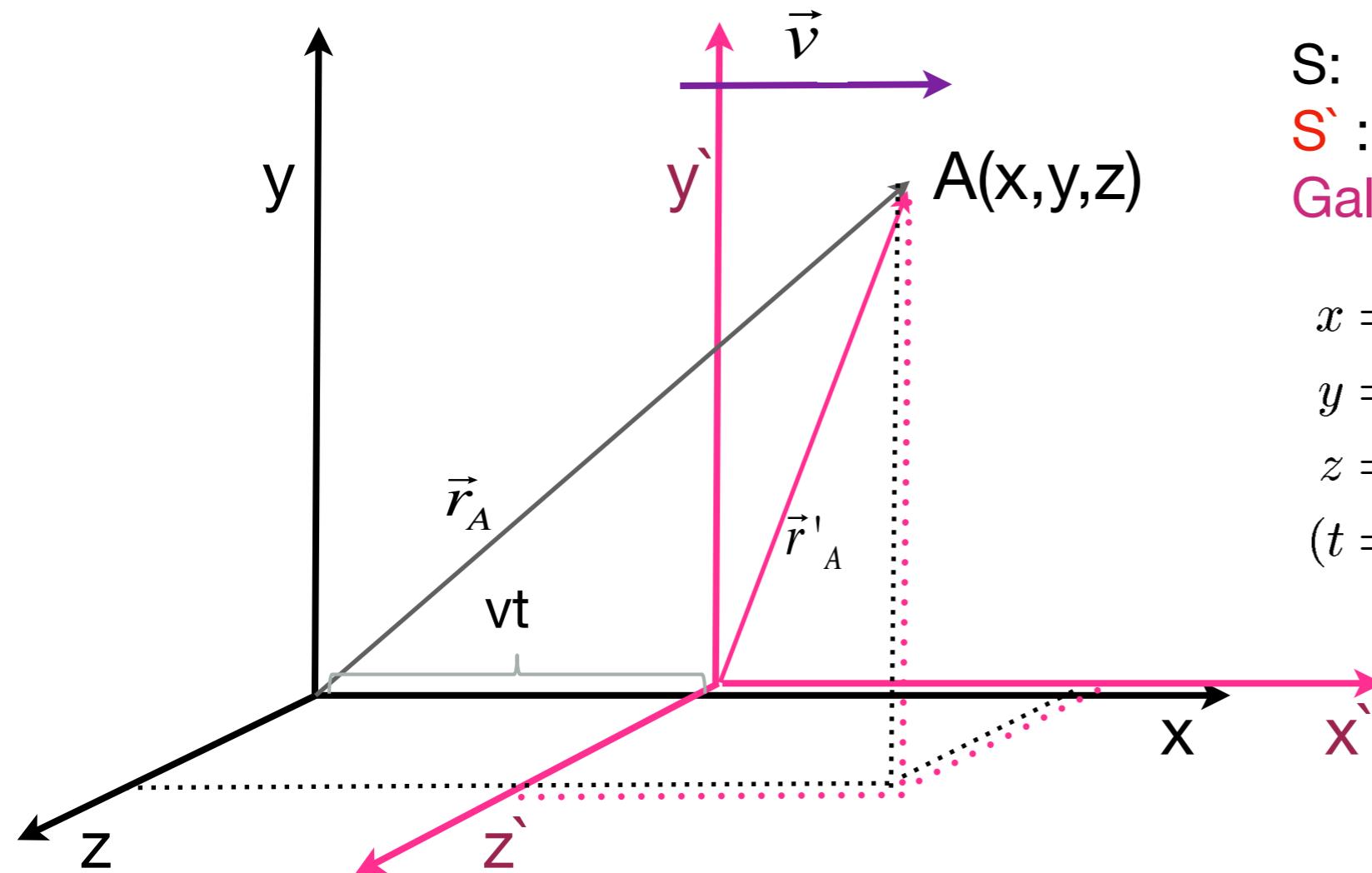


Specijalna teorija relativnosti

Galileieve transformacije



S: miruje

S' : giba se brzinom v u odnosu na S

Galileieve transformacije:

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$(t = t')$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

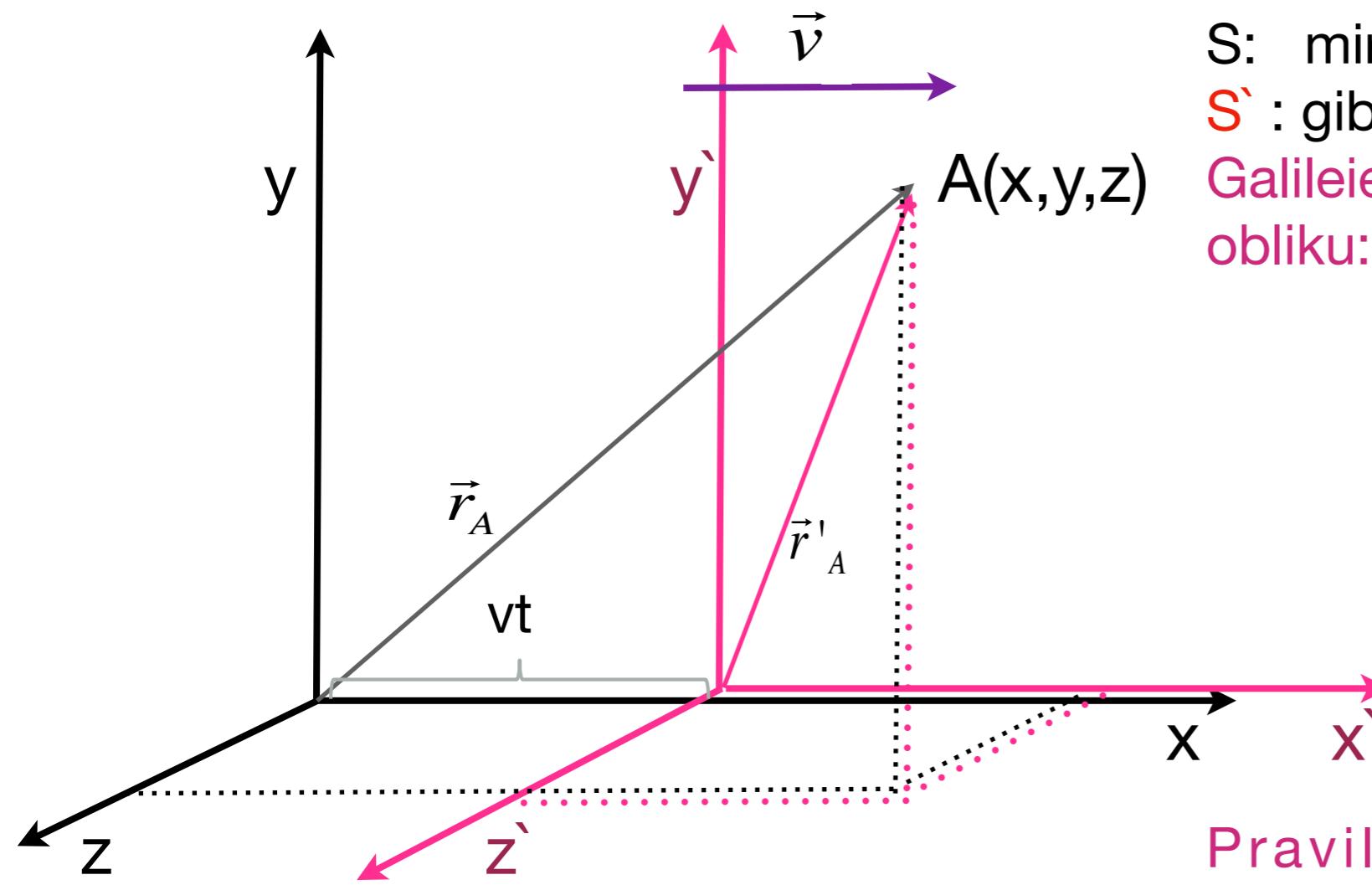
$$(t' = t)$$

ili

Zakoni mehanike mogu se proučavati u sustavima koji se jedan u odnosu na drugi gibaju jednoliko po pravcu (INERCIJALNI SUSTAVI).

Galileieve transformacije pokazuju da su zakoni mehanike nepromijenjivi s obzirom na prijelaz iz jednog inercijalnog sustava u drugi. $\vec{F} = \vec{F}'$

Galileieve transformacije



S: miruje

S' : giba se brzinom v u odnosu na S

Galileieve transformacije u vektorskem obliku:

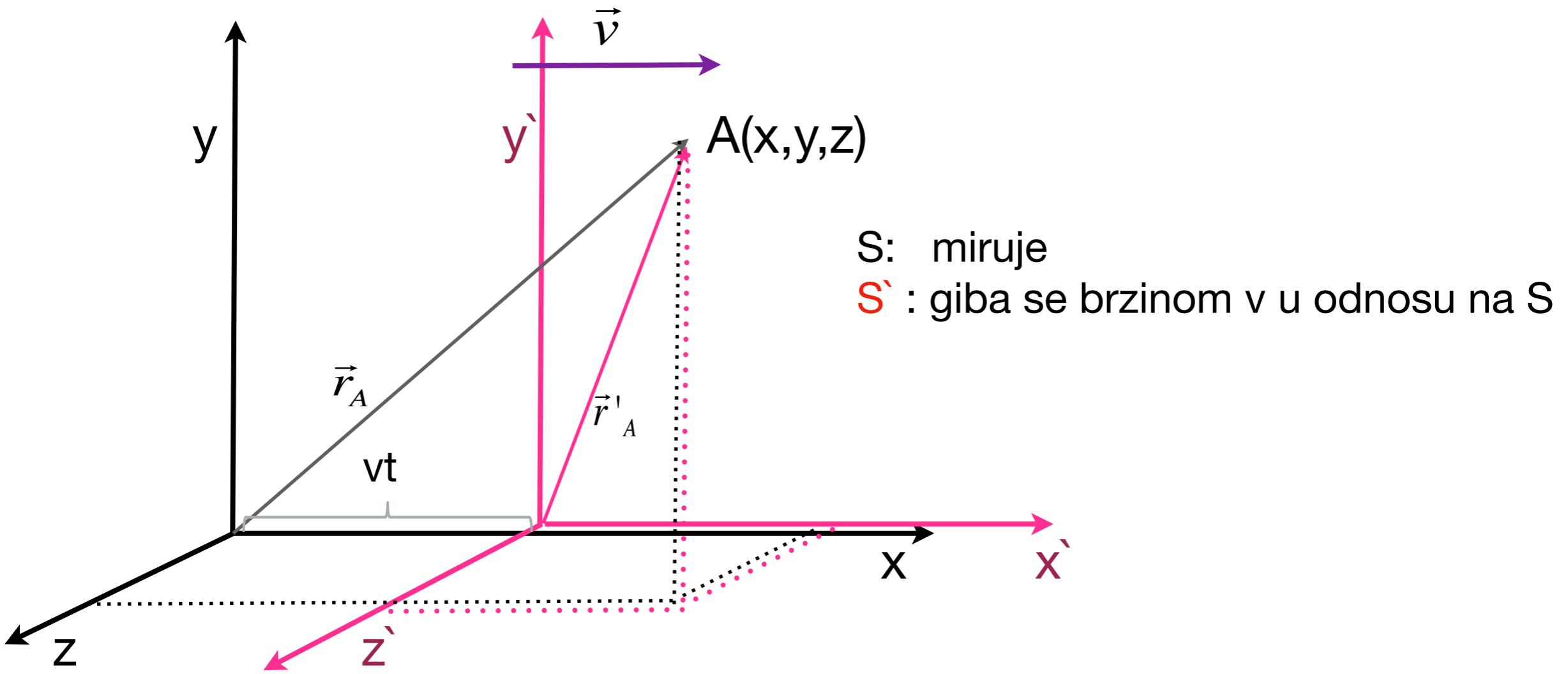
$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

$$(t = t') \quad (t' = t)$$

Pravilo transformacije brzina u sustavima S i S':

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \quad \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}.$$

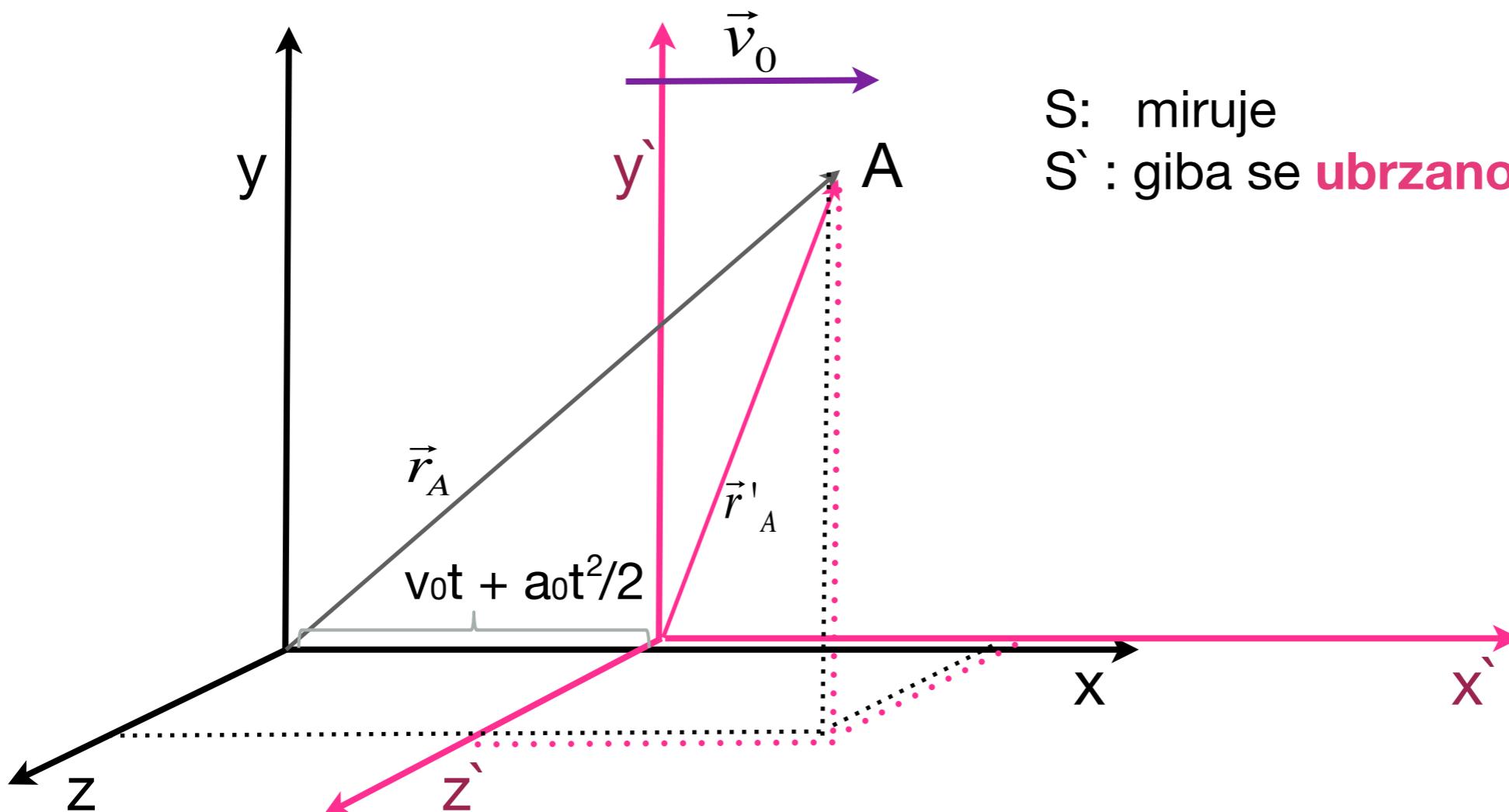
Galileieve transformacije



INVARIJANTNOST

- * veličine koje se ne mijenjaju pri nekoj transformaciji su INVARIJANTNE na tu transformaciju
 - * koordinate koje su **okomite na smjer gibanja** su INVARIJANTNE S OBZIROM NA GALILEJEVE TRANSFORMACIJE
- <https://www.youtube.com/watch?v=mkQYSkioO98>

Ubrzani sustavi. Inercijalne sile i translatorno gibanje



S: miruje
S': giba se **ubrzano** u odnosu na S

INERCIJSKA SILA

- posljedica je ubrzavanja sustava, a ne međudjelovanja
- drugi Newtonov zakon ima formalno isti oblik i u ubrzanim (neinercijskom) sustavu
ako silama koje nastaju zbog međudjelovanja tijela dodamo i inercijsku silu

Zadatak

- U sustavu S nalaze se 2 mirna promatrača. Prvi izmjeri koordinate početka štapa $x_a = 10 \text{ m}$, $y_a = 0$, $z_a = 0$, u trenutku $t_a = 10 \text{ s}$. Drugi izmjeri koordinate kraja štapa $x_b = 20 \text{ m}$, $y_b = 0$, $z_b = 0$, u trenutku $t_b = 15 \text{ s}$. Kolika je duljina štapa? Početak štapa neka je u trenutku $t=0$ u ishodištu.

Početak štapa: $x_1(t) = vt$

Kraj štapa: $x_2(t) = vt + \ell$ $x_2(0) = \ell$

$$x_1(10) = x_A = 10v \quad \text{tj.} \quad 10 = 10v \quad \text{i}$$

$$x_2(15) = x_B = 15v + \ell \quad \text{tj.} \quad 20 = 15v + \ell \quad \text{pa je}$$

$$v = 1 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad \ell = 5 \text{ m.}$$

Specijalna teorija relativnosti

Osnovna pretpostavka:

APSOLUTNO VRIJEME - jedan događaj u referentnom sustavu S će se istodobno desiti i u svim sustavima S' povezanim sa S Galilejevim transformacijama

- Maxwellova teorija elektromagnetizma (1860): svjetlost se giba brzinom c

Maxwellove jednadžbe nisu invarijantne na Galileieve transformacije

Primjer: sferni elektromagnetski val koji se emitira iz ishodišta koordinatnog sustava $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$.

Invarijantnost znači da bi taj isti val u S' imao ovakav zapis:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Ali, Galileieve transformacije daju: $(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$

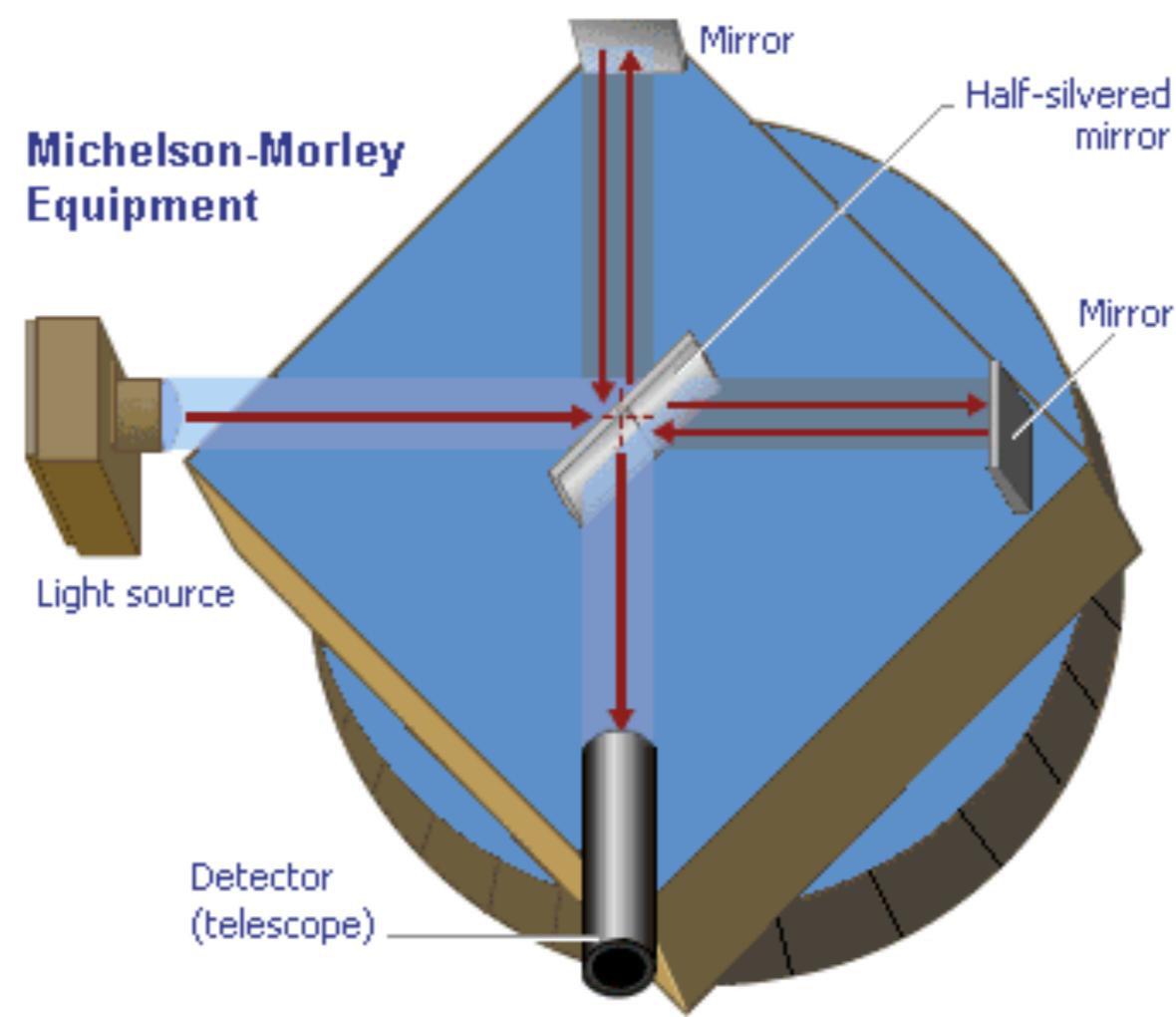
Specijalna teorija relativnosti

- Moguće rješenje ovog problema:
Postoji apsolutni sustav u kojem vrijede Maxwellove jednadžbe
- Apsolutni sustav je ispunjen tvari (eterom) koja svojim zgušnjenjima i razrijednjima omogućava širenje EM valova
- Svjetlost bi u odnosu prema eteru imala konstantnu brzinu c , dok bi promatrači koji se relativno gibaju u odnosu prema eteru, trebali imati različite brzine svjetlosti ovisno o svojoj brzini.
- Galileieve transformacije vrijede samo za mehaniku, a za elektromagnetizam postoji poseban sustav u kojem je eter na miru i u kojem vrijede Maxwellove jednadžbe

Specijalna teorija relativnosti

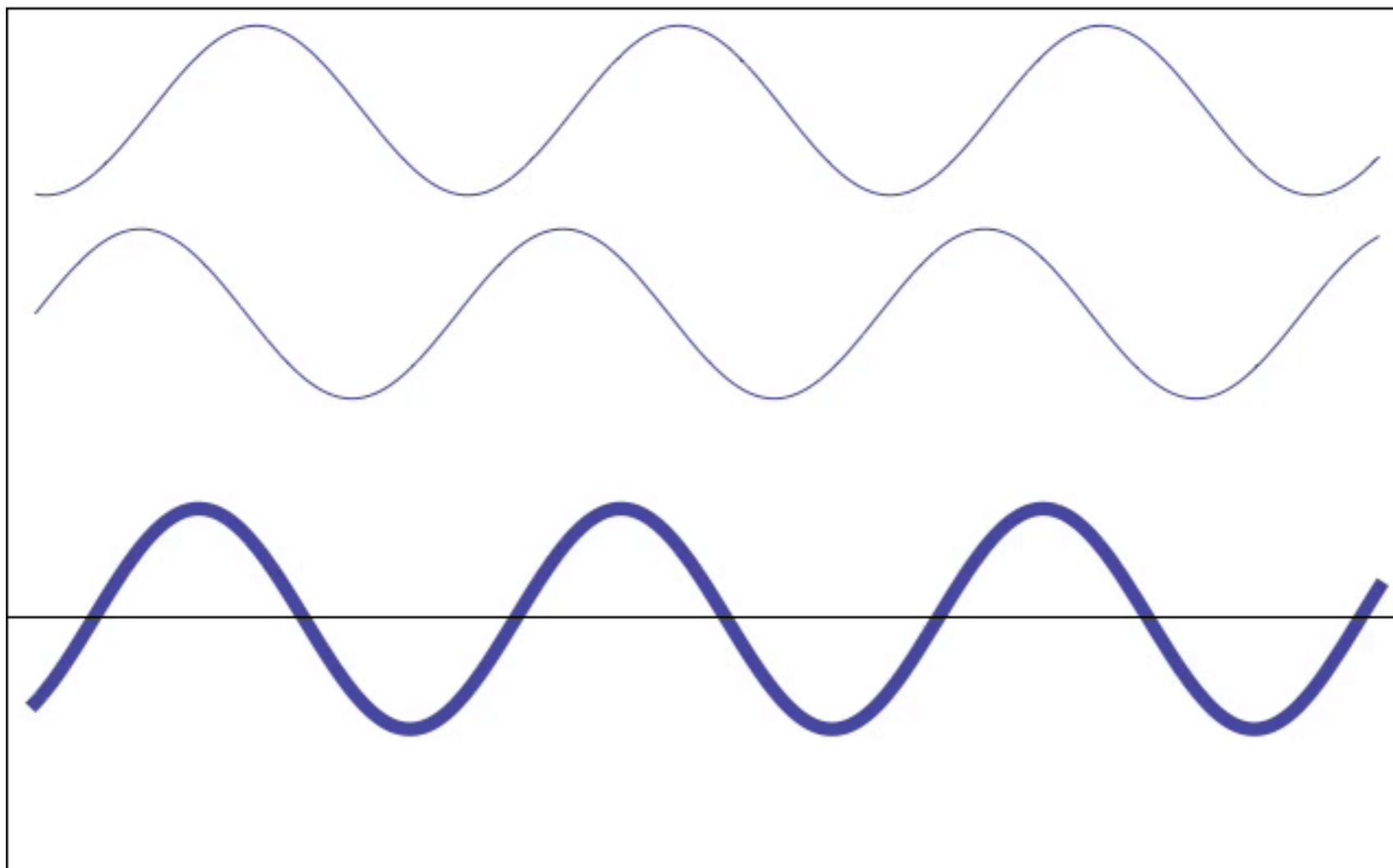
- Eter ispunjava cijeli Svemir, a Zemlja se giba u odnosu na eter
- Michelson i Morley (1887) su htjeli pokazati da postoji razlika u brzini svjetlosti kada se izvor giba u odnosu na eter

<https://www.youtube.com/watch?v=ig5VylozjW8>



Superpozicija valova

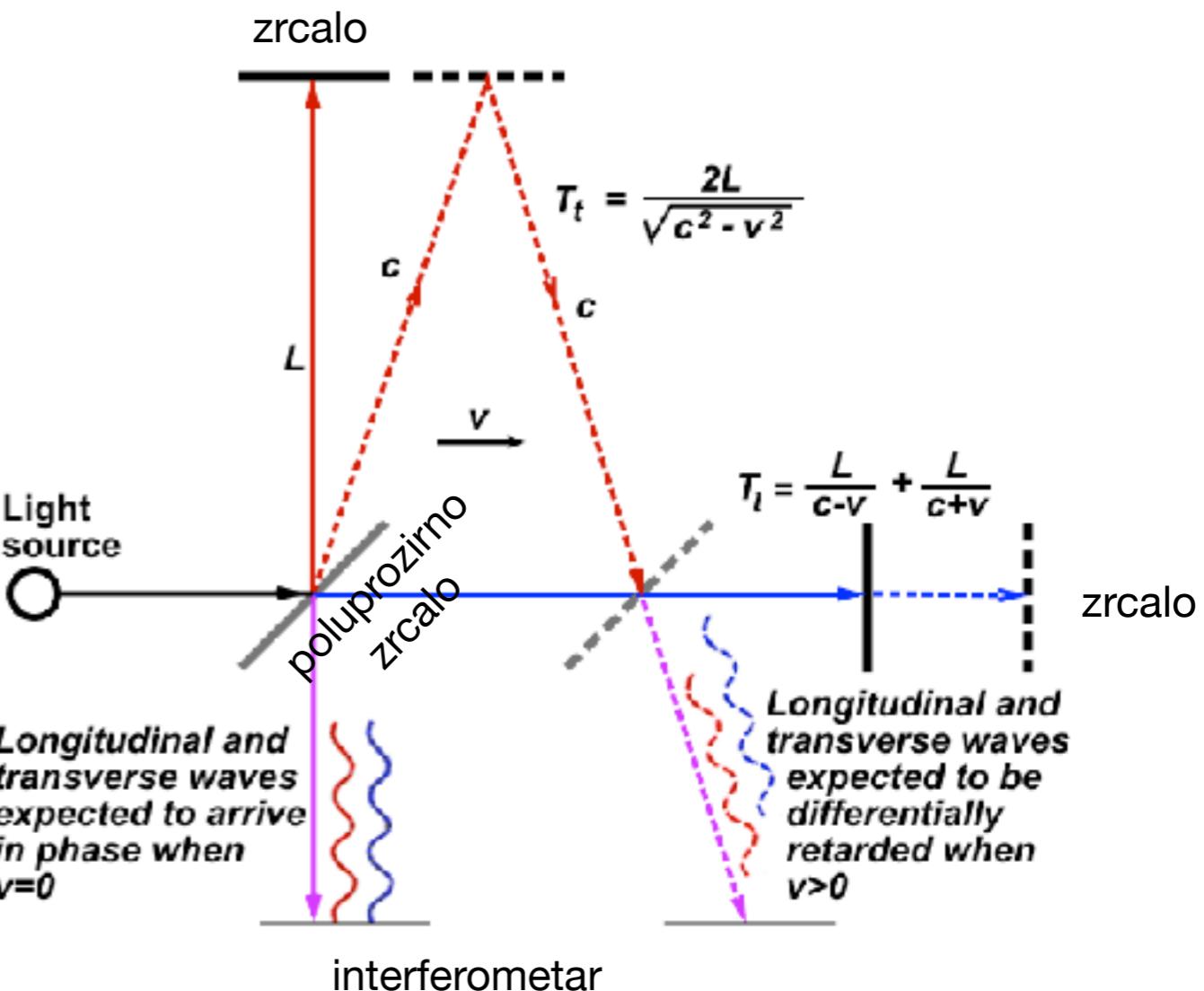
- interferometar: <https://www.youtube.com/watch?v=UA1qG7Fjc2A>



Michelson-Morley eksperiment (1887)

• <https://www.youtube.com/watch?v=ig5VylozjW8>

- Kada bi uređaj mirovao u odnosu na Svemir (eter), brzina svjetlosti bi u svim smjerovima bila c
- Međutim, uređaj se giba zajedno sa Zemljom u smjeru brzinom v
- Michelson & Morley pretpostavili: **postoji razlika u brzini svjetlosti kada se izvor giba u odnosu na eter**

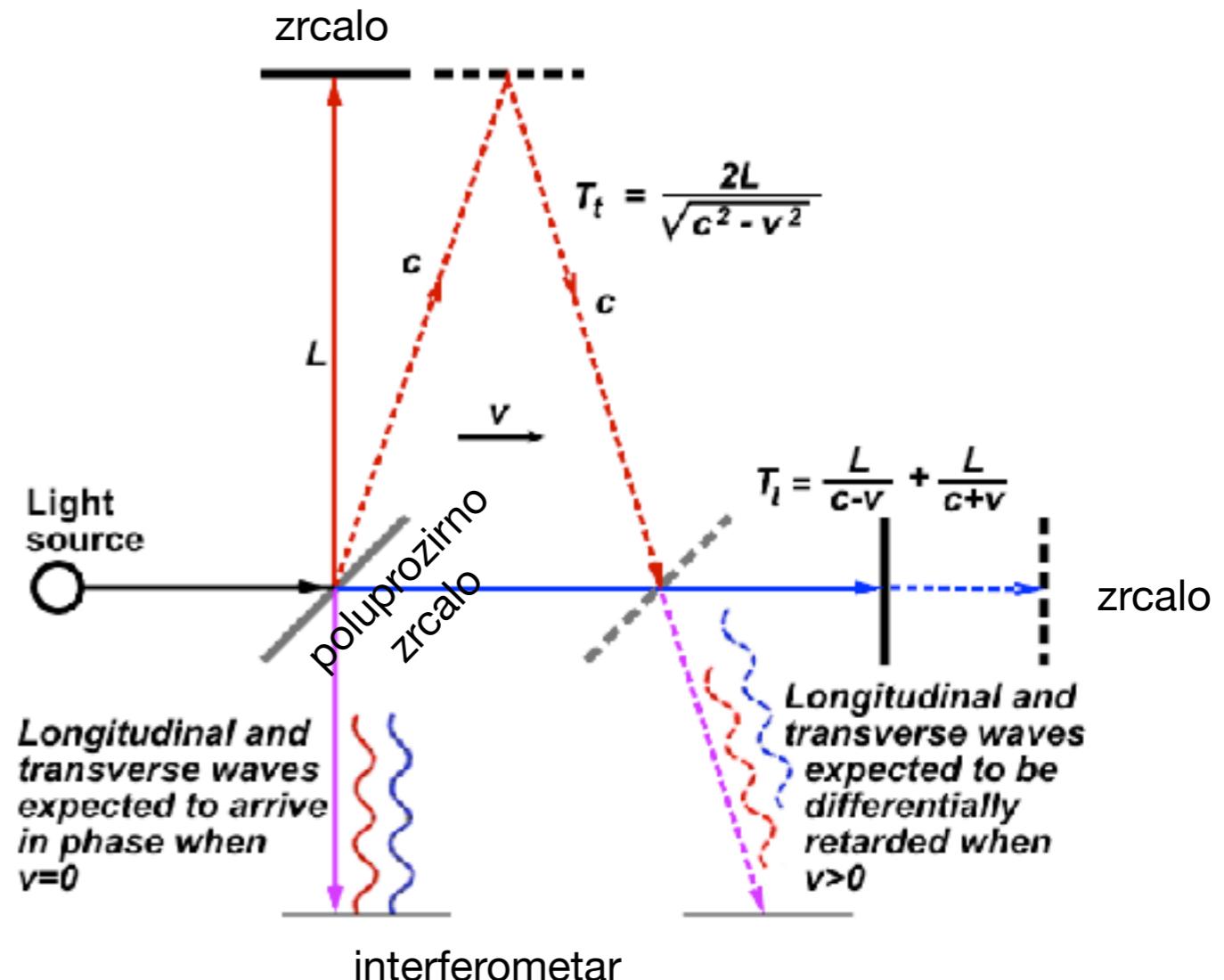


Michelson-Morley eksperiment (1887)

- Rezultat eksperimenta: kada je uređaj zarotiran za 90° nema razlike u interferencijskoj slici

→ brzina svjetlosti je ista u sustavu S (vezanom za Svemir) i u sustavu S' (vezanom za Zemlju)

→ valja konstruirati nove transformacije koje će ostavljati brzinu svjetlosti nepromjenjivu, te koje će ostavljati Maxwellove jednadžbe nepromijenjene



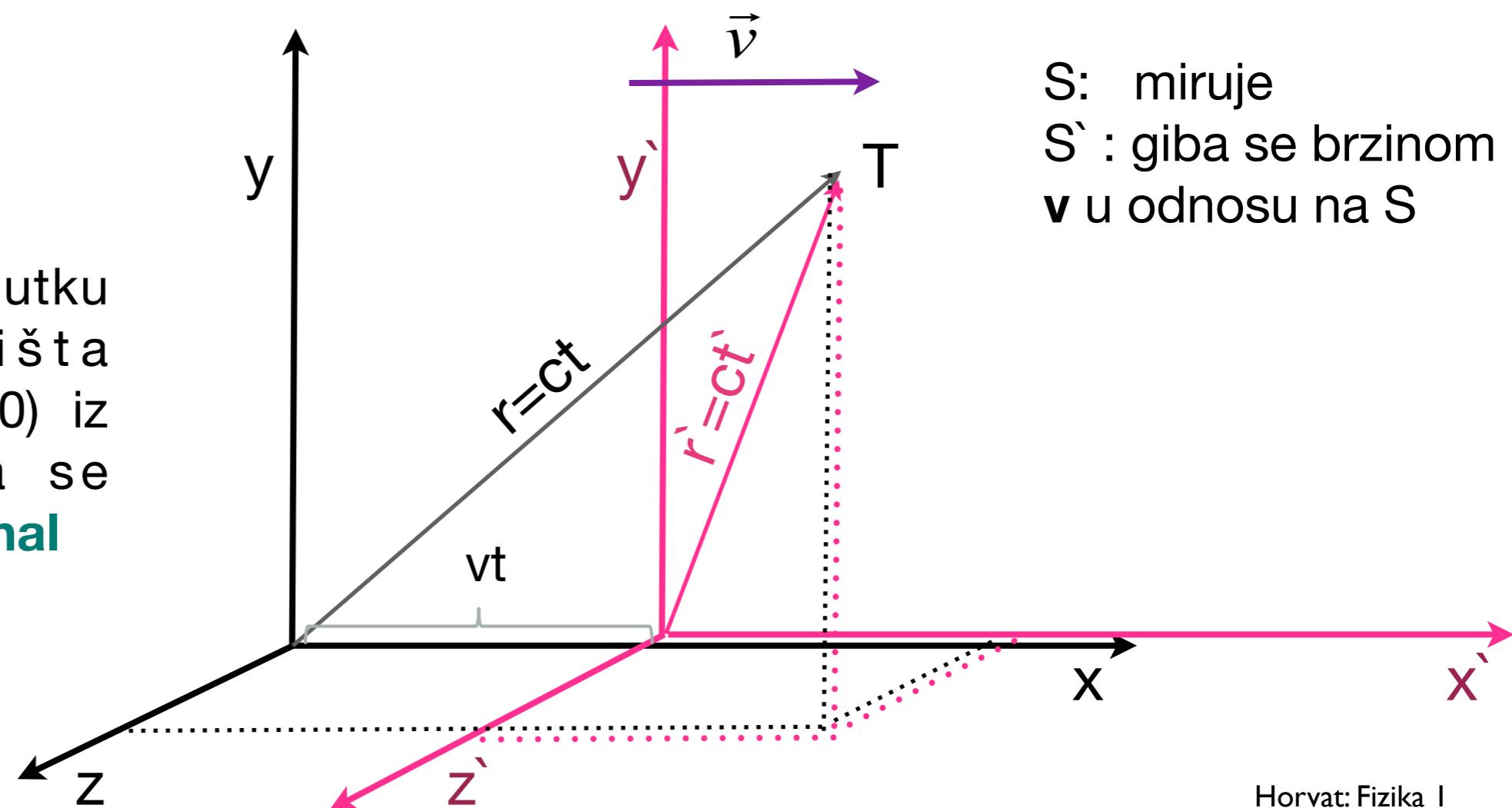
Specijalna teorija relativnosti

* Osnove specijalne teorije relativnosti su **Einsteinovi postulati:**

- (1) Svi fizikalni zakoni imaju isti oblik i daju iste fizikalne rezultate u svim koordinatnim sustavima koji se jedan u odnosu na drugog gibaju jednoliko po pravcu
- (2) Brzina svjetlosti je ista u svim sustavima: ona ne ovisi o brzini izvora ili promatrača i uvijek je jednaka c

Lorentzove transformacije:

* u početnom trenutku (kada se ishodišta poklapaju, $t = t' = 0$) iz ishodišta sustava se pošalje **svjetlosni signal**

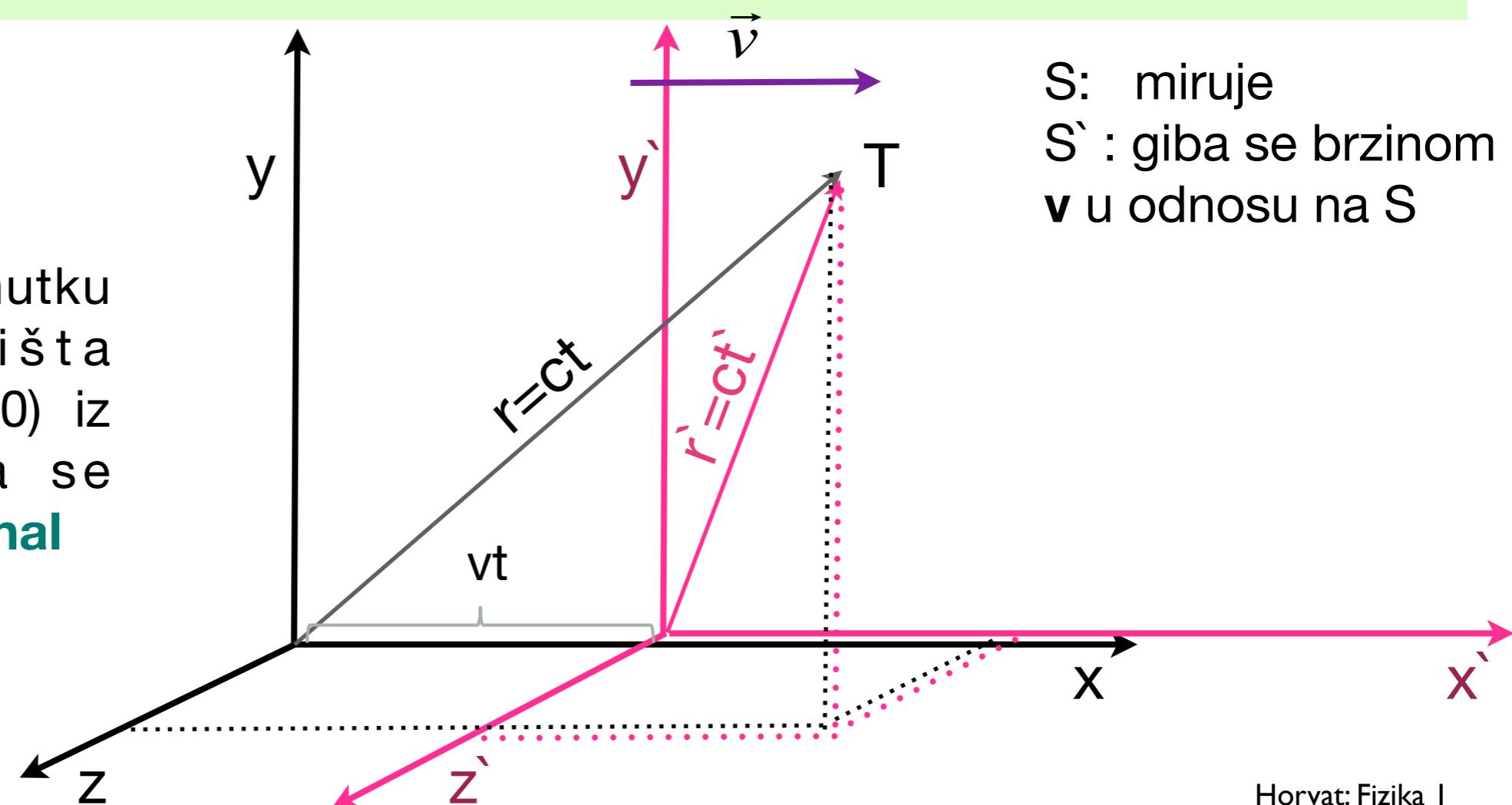


Specijalna teorija relativnosti: svojstva novih transformacija

1. moraju prijeći u Galilejeve kada $v \ll c$
2. moraju biti simetrične kada $v \rightarrow -v$, jer su relativni sustavi ekvivalentni i ne možemo utvrditi tko se giba, a tko miruje
3. moraju biti linearne funkcije koordinata i vremena jer je prostor izotropan (ima u svim smjerovima ista svojstva) i homogen (sve točke prostora imaju ista svojstva)
4. moraju dati takvo pravilo slaganja brzina da u svim sustavima brzina svjetlosti ostane c !

Lorentzove transformacije:

* u početnom trenutku (kada se ishodišta poklapaju, $t = t' = 0$) iz ishodišta sustava se pošalje **svjetlosni signal**



Lorentzove transformacije

$$(3) \Rightarrow x = ax' + bt' = a[x' + (b/a)t'] = a(x' + vt') = \gamma(x' + vt')$$

$$(2) \Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

Ishodišta se podudaraju u $t=t'=0$. U tom trenutku se sustav S' pokrene brzinom v udesno, i istodobno pošaljemo svjetlosni signal duž osi x . Nakon vremena t u sustavu S signal će proći udaljenost $x = ct$, a u sustavu S' ta će udaljenost biti $x' = ct'$. Brzine svjetlosti su iste!

$$x = ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v)$$

$$x' = ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v).$$

$$t' = \frac{\gamma t}{c}(c - v) \quad \Rightarrow$$

$$ct = \gamma \left[\frac{\gamma t}{c}(c - v) \right] (c + v)$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}.$$

Lorentzove transformacije

$$x = \gamma(x' + vt') = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$x' = \gamma[\gamma(x' + vt') - vt] = \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma vt,$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$\begin{aligned}y &= y' \quad \text{i} \\z &= z'.\end{aligned}$$

Lorentzove transformacije

Za prijelaz iz S' u S :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Za prijelaz iz S u S' :

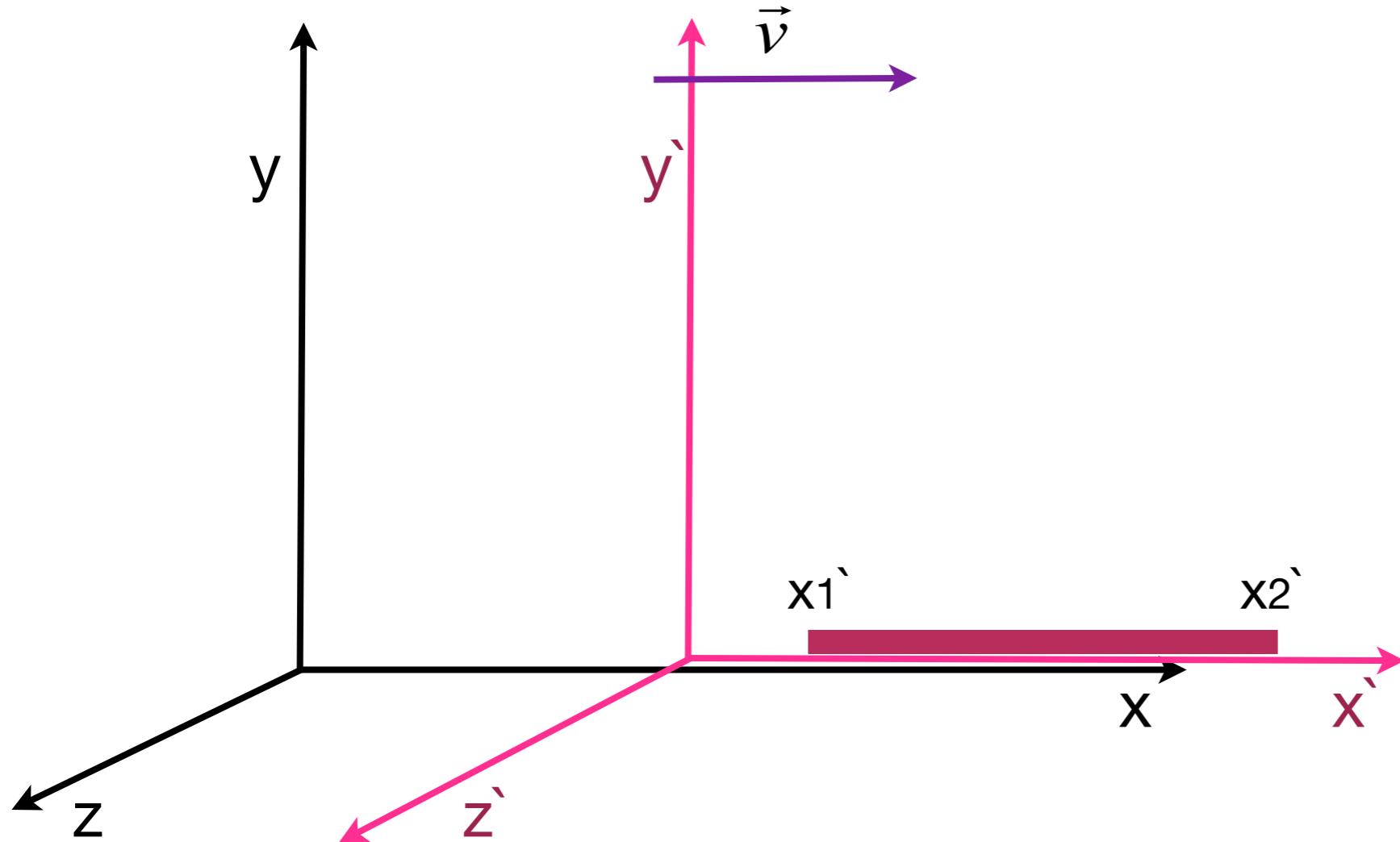
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Kontrakcija dužine

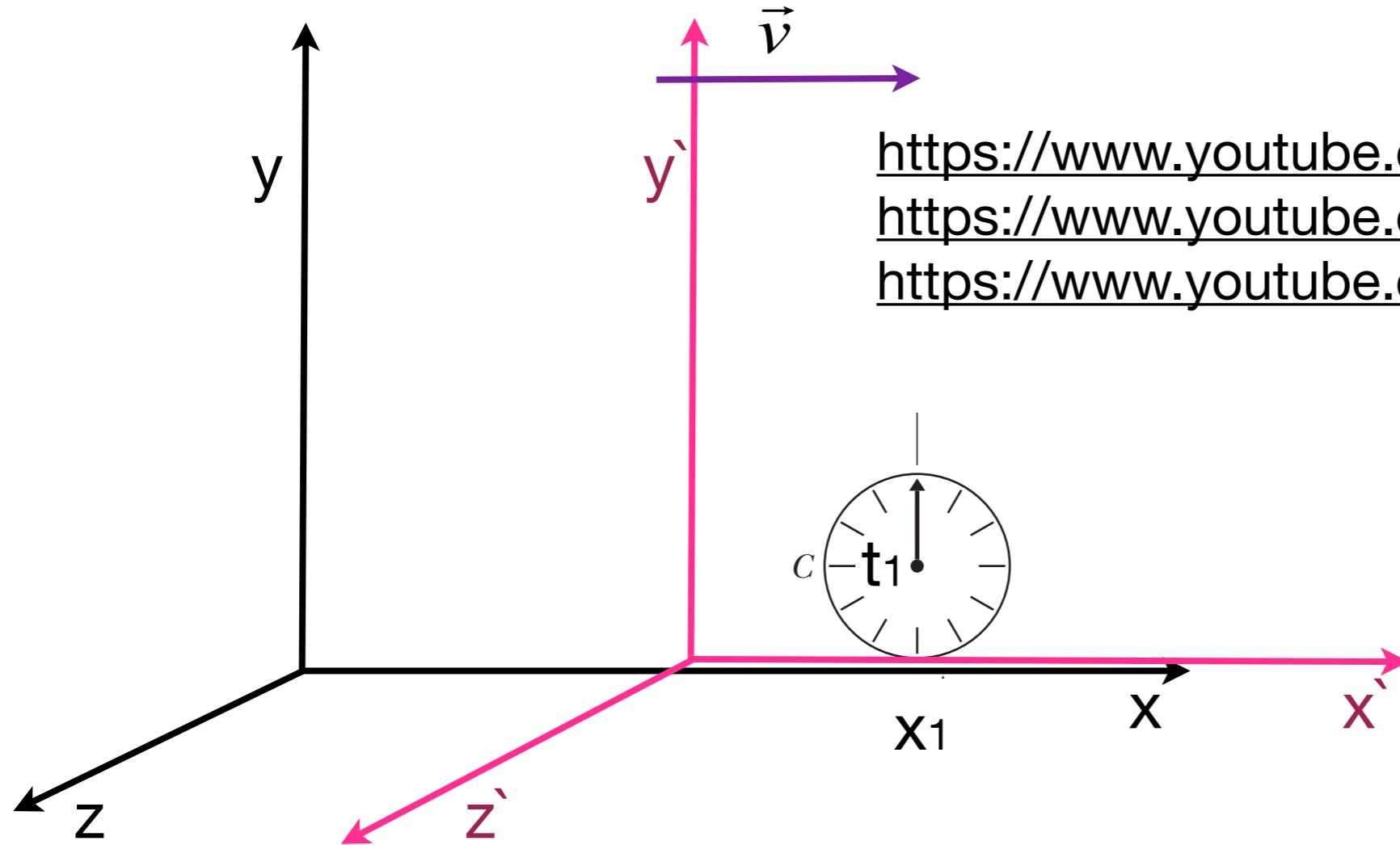


$L_0 = x_2' - x_1'$
“vlastita dužina”
 $L_0 = \gamma L$
 $L < L_0$ tj. u
sustavu S se
izmjeri kraći štap!

- * Štap duljine L_0 je smješten duž osi x' u S' . Njegova duljina je $L_0 = x_2' - x_1'$. Koliku će dužinu L izmjeriti promatrač u S ?
- * **Mjeri se razlika koordinata u istom vremenskom trenutku ($t_1 = t_2$):**

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad \text{i} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$
$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1) = \gamma(x_2 - x_1) =$$
$$L_0 = \gamma L.$$

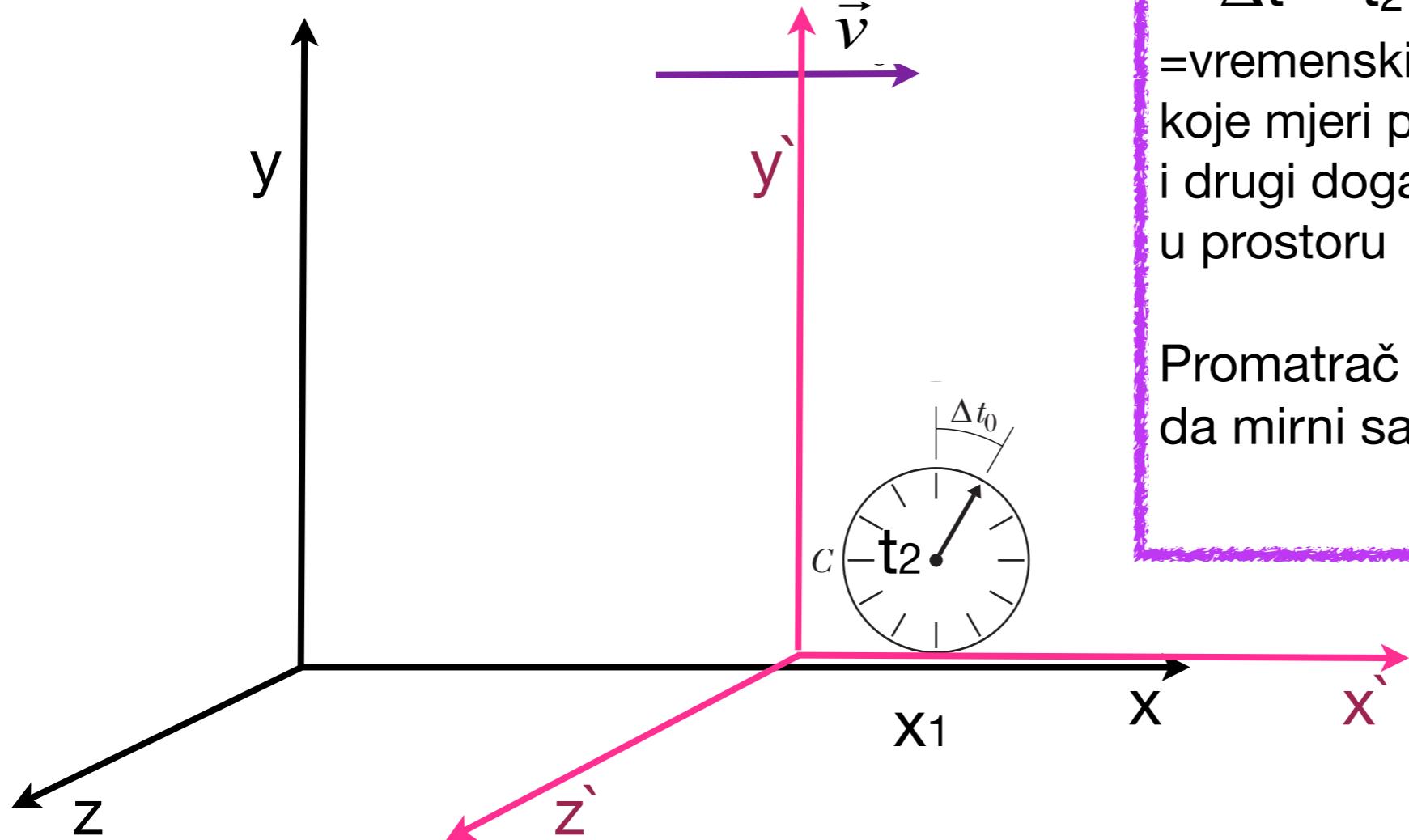
Dilatacija vremena



- * u sustavu S se stavi sat u točku x_1 . Promatrač u sustavu S mjeri vrijeme t_1
- * Koje će vrijeme izmjeriti promatrač u S' ?

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dilatacija vremena



$\Delta t = t_2 - t_1$ "vlastito vrijeme"
=vremenski interval između dva događaja
koje mjeri promatrač koji vidi da se i jedan
i drugi događaj dešavaju na istom mjestu
u prostoru

Promatrač koji se giba zaključuje
da mirni satovi idu sporije:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

- * kasnije, promatrač u S mjeri vrijeme t_2 i izračuna vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$
- * promatrač u sustavu S' mjeri vrijeme t_2' :

$$t_2' = \frac{t_2 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dilatacija vremena

Primjer: raspad miona

Visokoenergetske subatomske čestice koje dolaze iz Svemira interagiraju sa atomima u gornjem dijelu Zemljine atmosfere, i u nekim slučajevima stvaraju se nestabilne čestice koje se zovu mioni. Mioni se raspadaju sa srednjim vremenom života od $2.2 \mu\text{s}$ mjereno u referentnom sustavu u kojem mion miruje. Ako se mion giba brzinom $0.99c$ u odnosu na Zemlju, koje će srednje vrijeme miona mjeriti opažač na Zemlji?

$$\Delta t_0 = 2.20 \mu\text{s}$$

$$u = 0.990c$$

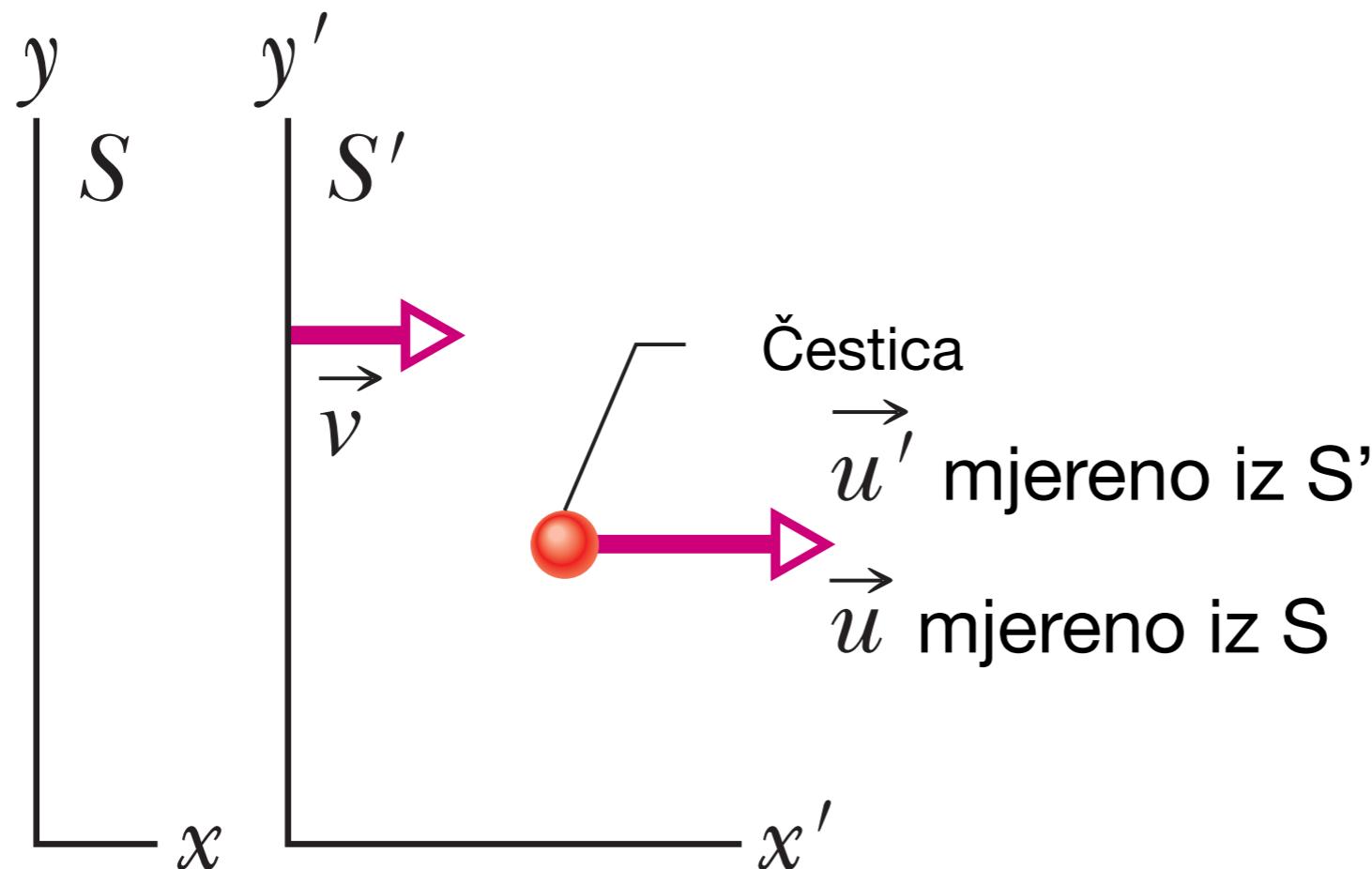
$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2.20 \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0.990)^2}} = 15.6 \mu\text{s}$$

Razumijevanje

- Svemirski brod velike brzine proleti kraj vas i pri tom ispušta impuls svjetlosti usmjeren ravnomjerno u svim smjerovima. Opažač na svemirskom brodu opaža sferni val cija se fronta siri od broda sa istom brzinom c u svim smjerovima. Koji oblik ima valna fronta koju vi opažate?
 - A. sferni
 - B. elipsoidni, sa dužom osi elipsoida usmjerenom duž smjera gibanja broda
 - C. elipsoidni, sa kraćom osi elipsoida usmjerenom duž smjera gibanja broda
 - D. nema dovoljno informacija za odgovor

Da li valna fronta ima centar u poziciji svemirskog broda?

Relativističko slaganje brzina



Relativističko slaganje brzina

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma(x' + vt')] = \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'}[\gamma(x' + vt')]$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{dt/dt'} = \frac{1}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}$$

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma(1 + vu'_x/c^2).$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}.$$

Zadatak

- Dvije se čestice gibaju brzinama $v_1 = 0.6c$, odnosno $v_2 = 0.7c$, tako da im se pravocrtnе putanje sijeku pod pravim kutom. Kolika je njihova relativna brzina?

Zadatak

- Inercijski sustav S' kreće se brzinom $v = 0.6 c$ u odnosu prema inercijskom sustavu S . U sustavu S' nalazi se štap koji zatvara kut $\theta' = 45^\circ$ sa smjerom kretanja. Koji kut zatvara taj štap sa smjerom kretanja u sustavu S ?

Relativistička dinamika

- zakon sačuvanja količine gibanja u skladu je s teorijom relativnosti ako količinu gibanja definiramo izrazom:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relativističku količinu gibanja definirali smo tako da je očuvana u izoliranim sustavima, tj. sustavima na koje ne djeluje sila.

Relativistička dinamika

$$W = \int_1^2 F dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt} dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt} v dt = \int_1^2 v dp.$$

$$1 \rightarrow v_1 = 0 \quad 2 \rightarrow v_2 = v$$

$$\begin{aligned} W &= \int_0^v d(vp) - \int_0^v p dv = vp \Big|_0^v - m \int_0^v \gamma(v)v dv = \\ &= \gamma mv^2 - m \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mv^2 + mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} \Big|_0^v = \\ &= \gamma mc^2 - mc^2 = E_k. \end{aligned}$$

E = ukupna energija E_0 = energija mirovanja = mc^2 E_k = kinetička energija

$$E = E_k + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

Zadatak

- Pokažite da za $v \ll c$ relativistički izraz za kinetičku energiju prelazi u klasični, odnosno da je tada ukupna energija jednaka $m_0c^2 + m_0v^2/2$.

Zadatak

- Odredite energiju mirovanja, ukupnu energiju, brzinu i količinu gibanja elektrona kinetičke energije 4.6 MeV.
 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$