Prigušeno titranje

- APERIODIČKO PRIGUŠENJE

$$\mu_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad \mu_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \omega_0^2 \quad \mu_1 > \delta > \omega_0; \quad \mu_2 < \omega_0$$

$$\rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}$$

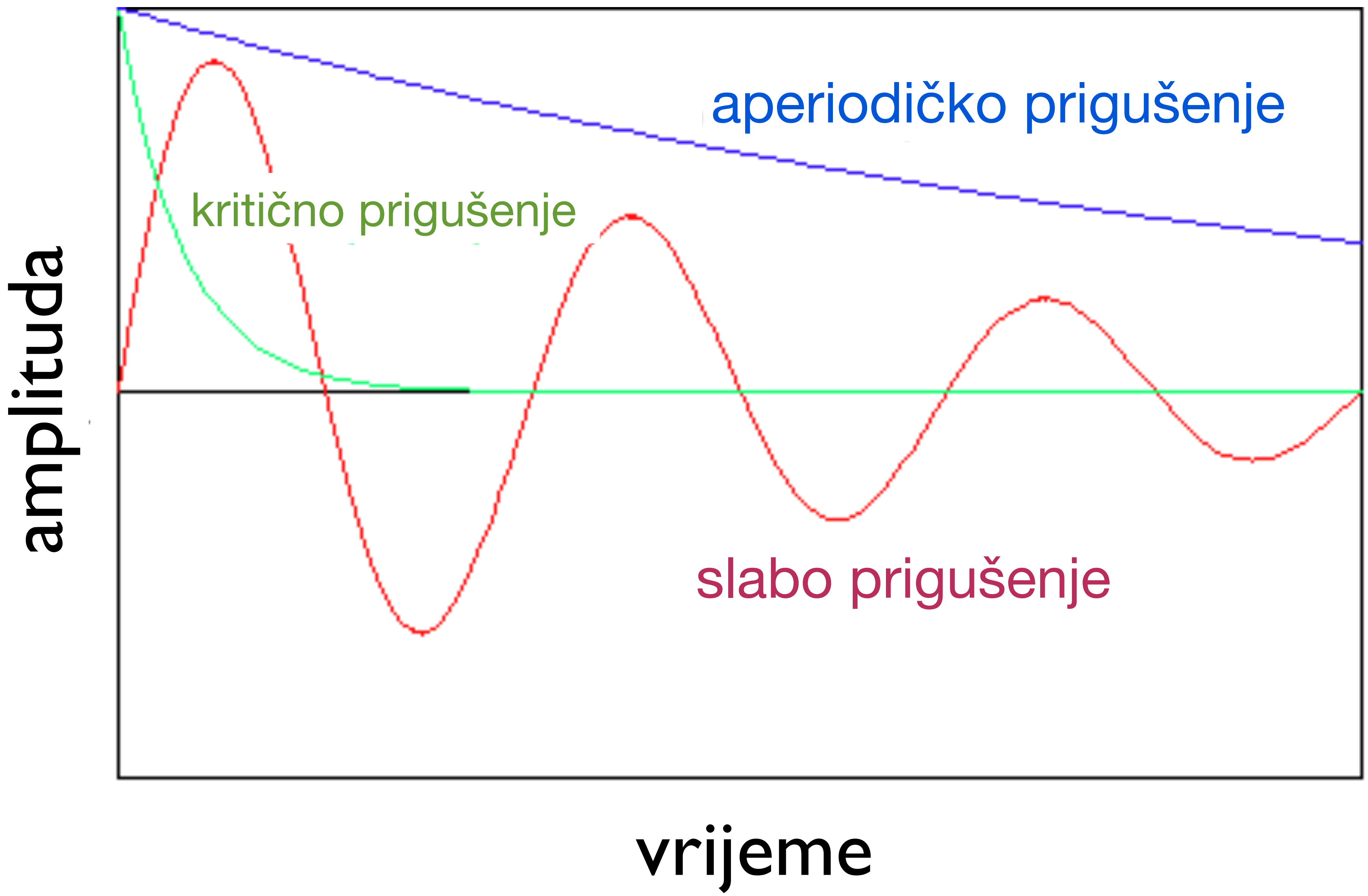
Početni uvjeti: $x(0) = A_0 = C_1 + C_2 \text{ i } \dot{x}(0) = -C_1\mu_1 - C_2\mu_2 = 0$

$$x(t) = \frac{A_0}{\mu_1 - \mu_2}\left(\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}\right)$$

Možemo zanemariti ovaj član jer je $\mu_1 > \mu_2$, pa je $\exp(-\mu_1 t) < \exp(-\mu_2 t)$

$$x(t) \simeq \frac{A_0 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 t}$$

Prigušeno titranje



KRITIČNO PRIGUŠENJE

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta = -\mu_1 = -\mu_2 = -\omega_0$$

Ranije rješenje postaje neodređeno: $$x(t) \xrightarrow[\mu_1 \to \mu_2]{} \frac{0}{0}$$

Ispravno rješenje možemo pronaći pomoću l'Hôpitalovog pravila za račun graničnih vrijednosti neodređenih izraza. Uzmimo da je $\mu_1 = \omega_0$:

$$\lim_{\mu_2 \to \omega_0} x(t) = \lim_{\mu_2 \to \omega_0} A_0 \frac{\omega_0(-t)e^{-\mu_2 t} - e^{-\omega_0 t}}{-1} = A_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

→ Sustav se pri kritičnom prigušenju vraća u položaj ravnoteže u najkraćem vremenu!

Energija kod prigušenog titranja

- Za idealni harmonički oscilator pokazali smo da je energija konstatna u vremenu. Ovdje se mehanička energija sustava smanjuje, tj. pretvara se u toplinsku energiju.
- Transformaciju energije uzrokuju nekonzervativne sile, koje zovemo i disipativnim silama.
- Brzina promjene energije u vremenu je dana sa:

$$\begin{aligned}\frac{dE_{uk}}{dt} &= \frac{d}{dt}(E_k(\dot{x}) + E_p(x)) = \frac{d\dot{x}}{d\dot{x}}\frac{d}{dt}E_k + \frac{dx}{dx}\frac{d}{dt}E_p \\ &= \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{d}{d\dot{x}}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2) + \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}kx^2) = m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x \\ &= (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -b\dot{x}^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dE_{uk}}{dt} = -b\dot{x}^2}$$

Prigušeno titranje

U sustavima koji titraju s malim prigušenjem, JAKOST PRIGUŠENJA može biti opisana sa slijedećim veličinama:

1. Logaritamski dekrement prigušenja
   - mjera jakosti prigušenja je odnos amplitude u nekom vremenu t i amplitude nakon jednog perioda T

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta t - \delta T}} = e^{\delta T} \quad \Rightarrow \quad \delta T = ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$

2. "Vrijeme poluraspada"
   - vrijeme za koje amplituda padne na polovinu početne vrijednosti

$$A(t) \xrightarrow{\tau} A(t+\tau) = \frac{1}{2}A(t) \quad \Rightarrow \quad A_0 e^{-\delta\tau} = \frac{1}{2}A_0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{ln\ 2}{\delta}$$

3. Q - faktor ili faktor kvalitete

Prigušeno titranje

- **Q - faktor ili faktor kvalitete:** mjera gubitka energije pri prigušenom titranju

- Definicija Q - faktora: omjer energije E(t) i (apsolutne vrijednosti) energije izgubljene kada sustav prijeđe 1 radijan

- Vrijeme τ za koje sustavu padne energija za faktor e =
(Q- faktor) x (vrijeme za koje sustav prijeđe 1 radijan)

- Sustavi bez prigušenja : Q - faktor je beskonačan

- Veliku vrijednost faktora Q imaju sustavi u kojima je disipacija mala. Male vrijednosti odgovaraju velikom prigušenju

Malo prigušenje: Q-faktor

Smanjenje energije za vrijeme jednog perioda (T) ili kada sustav prijeđe 2π radijana:

$$\Delta E = \int_0^T \frac{dE(t)}{dt}\,dt = -b\int_0^T \dot{x}^2\,dt$$

$$v(t) = -A_0 e^{-\delta t}[\delta\cos(\omega t+\phi) + \omega\sin(\omega t+\phi)]$$
$$= A_0 e^{-\delta t}\omega_0\cos(\omega t+\phi-\psi+\pi),$$

$$\sin\psi = \omega/\omega_0 \ \text{ i } \ \cos\psi = \delta/\omega_0 \qquad \alpha = \omega t+\phi-\psi+\pi$$

$$dt = d\alpha/\omega$$

$$\Delta E = -\frac{2m\delta A_0^2\omega_0^2}{\omega}\int_0^{2\pi} e^{-2\delta t}\cos^2\alpha\,d\alpha$$

ovaj faktor se malo mijenja kroz jedan period za malo prigušenje!

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2-\delta^2} = \omega_0\sqrt{1-\delta^2/\omega_0^2} \simeq \omega_0$$

$$\Delta E = -\frac{2\pi}{\omega}m\delta A_0^2\omega_0^2 e^{-2\delta t} = -m\delta A_0^2\omega_0^2 T e^{-2\delta t}$$

Malo prigušenje: Q-faktor

Energija izgubljena po jednom radijanu je 2π puta manja, tj. jednaka je $\Delta E/2\pi$.

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\delta t}$$

$$\left|\frac{E(t)}{\Delta E}\right| = \frac{1}{2\delta T}$$

$$Q \equiv \left|\frac{E(t)}{\Delta E/(2\pi)}\right| = 2\pi \cdot \left|\frac{E(t)}{\Delta E}\right| = 2\pi \cdot \frac{1}{2\delta T} \qquad \boxed{Q = \frac{\omega}{2\delta}.}$$

Vrijeme τ za koje sustavu energija padne za faktor e (tj. E padne na E/e):

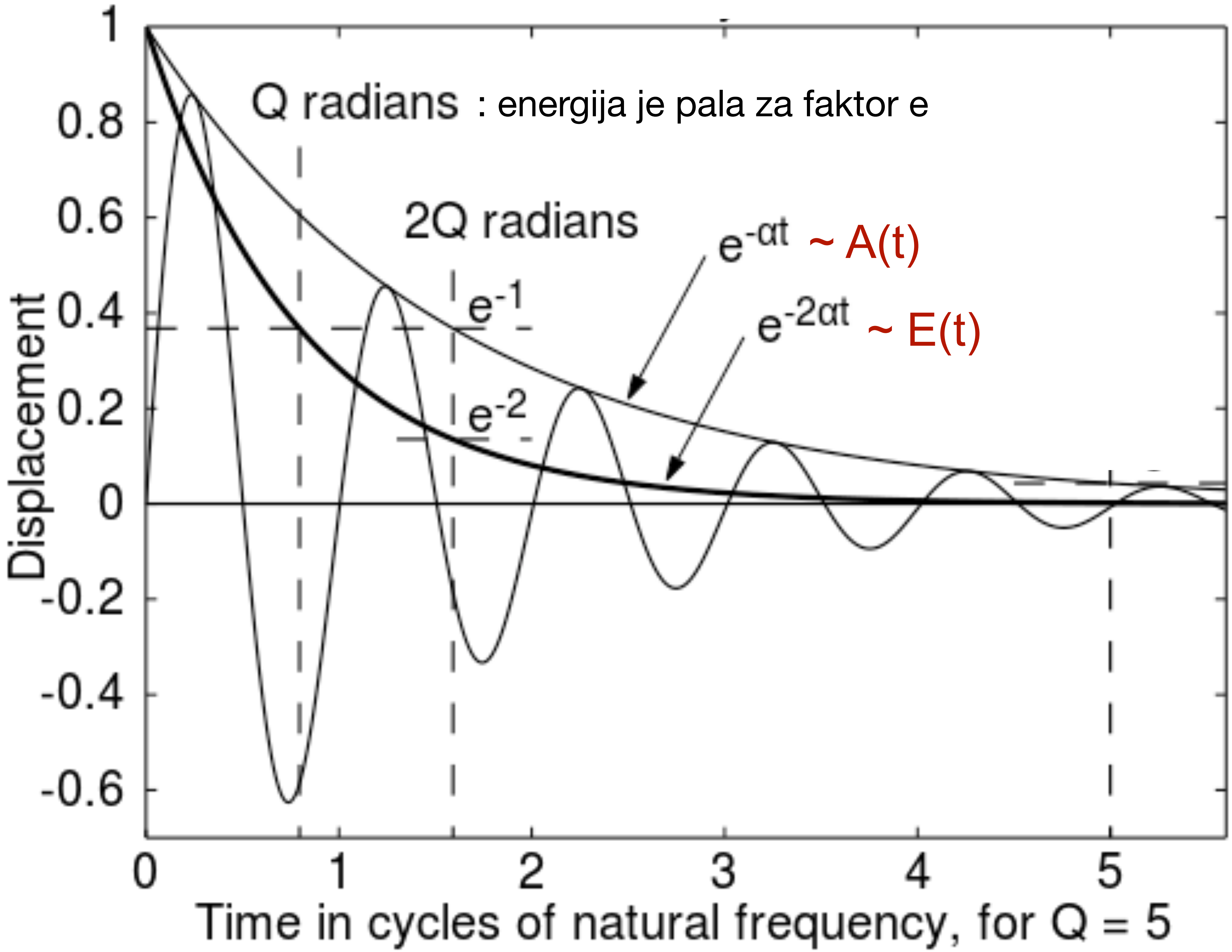
$$E(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\delta t} \qquad E(t+\tau) = \frac{E(t)}{e} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{2\delta}$$

Ako uvedemo vrijeme t_1 potrebno da sustav prijeđe 1 radijan, $t_1 = T / 2\pi$, vidimo da je:

$$\tau = Q \cdot t_1 = Q\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{2\delta} \quad \Rightarrow$$

Q-faktor je mjera gubitka energije pri prigušenom titranju!

Prigušeno titranje



Razumijevanje

Amplituda slabo prigušenog oscilatora smanji se za 3% za vrijeme svakog perioda. Koji postotak mehaničke energije oscilatora je izgubljen u svakom ciklusu?

A. 3%
B. 6%
C. 97%
D. 94%
E. mehanička energija je nepromijenjena

Prisilno titranje: Amplituda i faza pri prisilnom titranju

Pojava rezonancije

Prisilno titranje

- u realnoj situaciji postoje disipativne sile koje prigušuju titranje, pa tijelo nakon nekog vremena prestaje titrati. Ako na tijelo djeluje vanjska periodička sila, sustav će titrati frekvencijom vanjske sile **nakon prijelaznog vremena**
- Periodička sila ima frekvenciju ω_P:

$$F(t) = F_P \cos \omega_P t$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_P \cos \omega_P t$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_P}{m} \cos \omega_P t \equiv f_P \cos \omega_P t}$$

$$b/m = 2\delta \qquad , \omega_0^2 = k/m$$

frekvencija slobodnog H.O.
(bez smetnje i prisile)

opće rješenje nehomogene jednadžbe = opće rješenje homogene jednadžbe + partikularno rješenje nehomogene jednadžbe

Prisilno titranje

Partikularno rješenje će ovisiti o ϕ, faznom kutu koji opisuje "zakašnjenje" odgovora sustava na vanjsku prisilu.

Problem možemo riješiti pomoću kompleksnih brojeva:

$$F_0(t) = F_P \cos \omega_P t + i F_P \sin \omega_P t = F_P e^{i\omega_P t}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{z} + 2\delta \dot{z} + \omega_o^2 z = f_P e^{i\omega_P t} \qquad f_P = F_P / m$$

Kada nađemo rješenje za z(t), onda ćemo rješenje x(t) dobiti jednostavno uzimajući realni dio kompleksne funkcije z(t).

Pretpostavimo oblik rješenja:

$$z(t) = C e^{i\omega_P t}$$

$$(-\omega_P^2 + 2i\delta\omega_P + \omega_0^2) C e^{i\omega_P t} = f_P e^{i\omega_P t}$$

$$C = \frac{f_P}{\omega_0^2 - \omega_P^2 + 2i\delta\omega_P}.$$

Prisilno titranje

Nazivnik možemo zapisati kao: $\omega_0^2 - \omega_P^2 + 2i\delta\omega_P = Re^{i\phi} = R\,(\cos\phi + i\sin\phi)$

$R\cos\phi = \omega_0^2 - \omega_P^2$ /^{2}
$R\sin\phi = 2\delta\omega_P$ /^{2}

$R^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = R^2 = (\omega_0^2 - \omega_P^2)^2 + (2\delta\omega_P)^2$
$\mathrm{tg}\,\phi = 2\delta\omega_P / (\omega_0^2 - \omega_P^2)$

$$z(t) = Ce^{i\omega_P t} = A(\omega_P)e^{i(\omega_P t - \phi)}$$

$$\frac{f_P}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_P^2)^2 + 4\delta^2\omega_P^2}} = A(\omega_P)$$

$$x(t) = \Re e[z(t)] = A(\omega_P)\cos(\omega_P t - \phi)$$

Opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe:

$$\boxed{x_{ON}(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi_0) + A(\omega_P)\cos(\omega_P t - \phi)}$$

Prisilno titranje: rezonancija

Amplituda titranja je funkcija od ω_P, pa možemo istražiti kakvo je ponašanje amplitude s obzirom na promjenjivu (kružnu) frekvenciju vanjske sile.

Q: za koju frekvenciju vanjske sile je amplituda maksimalna?

$$A(\omega_P) = f_P / \sqrt{g(\omega_P)}$$

Amplituda ima maksimalnu vrijednost kada g(ω_P) ima minimum.

0 = d g(ω_P) / dt

$$\omega_{P/1} = 0$$

$$\omega_{P/1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\boxed{\omega_{P/0} = \omega_{\text{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

rezonantna frekvencija koja vodi na maksimalne vrijednosti amplitude!

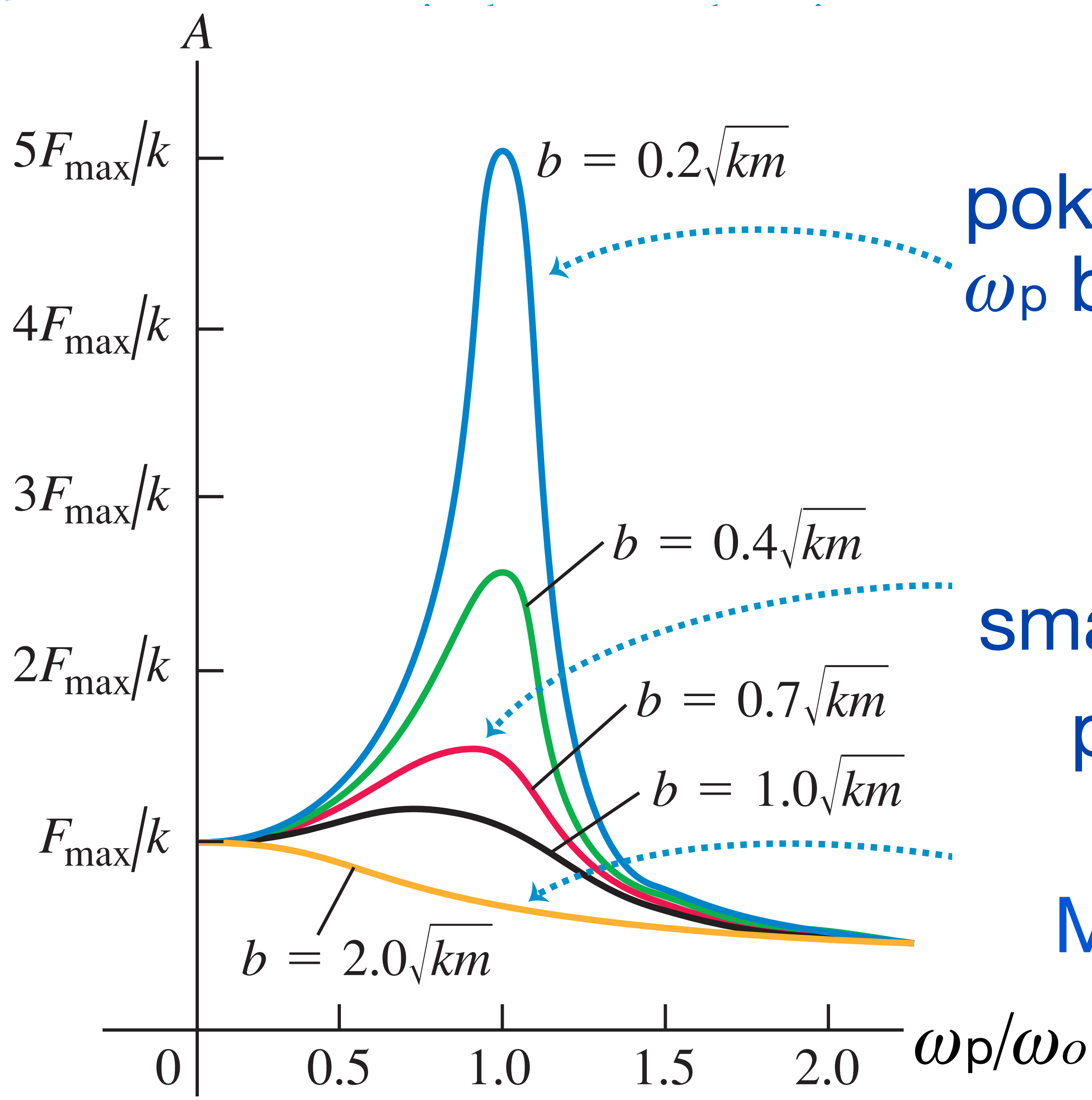
$$A_m \equiv A(\omega_{P/0}) = \frac{f_P}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \xrightarrow[\text{za } \delta \to 0]{} \infty$$

Rezonancija znači da je došlo do maksimalnog prenošenja energije titranja.

Prisilno titranje

* u realnoj situaciji postoje disipativne sile koje prigušuju titranje, pa tijelo nakon nekog vremena prestaje titrati. Ako na tijelo djeluje vanjska periodička sila, sustav će titrati frekvencijom vanjske sile **nakon prijelaznog vremena**

* *rješenja homogenog problema (prigušeni harmonički oscilator) "trnu" nakon prijelaznog vremena (koje ovisi o jakosti prigušenja) i nakon toga ostaje samo titranje zbog nametnute sile*



Slabo prigušeni oscilator pokazuje jaku rezonanciju kada je ω_p blizu frekvencije oscilatora bez prigušenja.

Jače gušenje širi krivulju, smanjuje maksimum i pomiče ga prema nižim frekvencijama.

Maksimum potpuno nestaje.

Young & Freedman University Physics

Zadatak

Tijelo obješeno na opruzi odmaknuto je iz položaja ravnoteže i ostavljeno da titra. Nakon 4 puna titraja amplituda se smanjila na polovinu. Koliko je titrajno vrijeme (period) prigušenog titranja, ako bi bez prigušenja tijelo titralo dva puta u sekundi?

$A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ amplituda prigušenog titranja

$t = 0 \quad A(0) = A_0$

$t = 4T \quad A(4T) = A_0 e^{-\delta 4T} = A_0/2 \qquad 4\delta T = \ln 2$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \qquad \frac{4\delta 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \ln 2$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi \cdot 2\,\mathrm{s}^{-1} \qquad T = 0,5002\,\mathrm{s}$$

Snaga i vanjska prisila

Da bi se održalo titranje, vanjska periodička sila mora pri svakom ciklusu (periodu) sustavu predati energiju koju je izgubio zbog disipativnih sila.

Trenutačna snaga predana sustavu:

$$P(t) = F(t) \cdot v(t) = -F_P \cos \omega_P t \frac{(F_P/m)\omega_P}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_P^2)^2 + 4\delta^2\omega_P^2}} \sin(\omega_P t - \phi)$$
$$= F_P A(\omega_P)\omega_P[\cos^2 \omega_P t \sin \phi - \sin \omega_P t \cos \omega_P t \cos \phi].$$

Srednja snaga (snaga predana sustavu tokom jednog perioda) je po definiciji :

$$\overline{P(t)} = < P(t) >_T = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt$$

$$< \cos^2 \omega t >_T = 1/2 \text{ i } < \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) >_T = 0$$

Snaga i vanjska prisila

$$\overline{P(t)} \equiv < P > = \frac{1}{2} F_P A(\omega_P)\omega_P \sin\phi$$
$$= m\omega_P^2 \delta A^2(\omega_P)$$
$$= m\omega_P^2 \delta \frac{(F_P/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega_P^2)^2 + 4\delta^2\omega_P^2} = m\delta(F_P/m)^2 \frac{\omega_P^2}{(\omega_0^2 - \omega_P^2)^2 + 4\delta^2\omega_P^2}$$

Srednja snaga ima maksimum kada je frekvencija vanjske prisile jednaka frekvenciji slobodnog sustava.

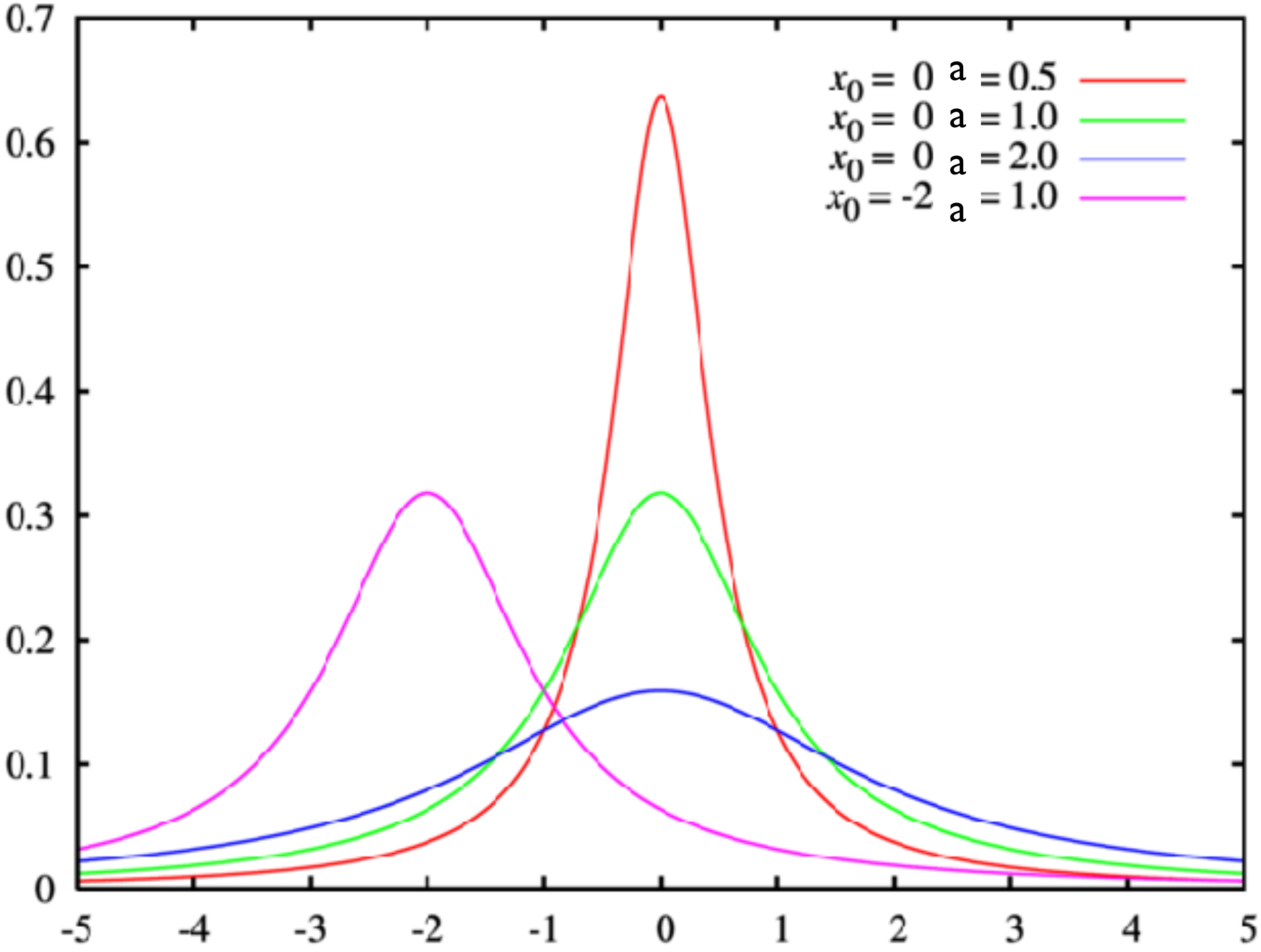
Uz aproksimaciju slabog prigušenja:

$$\omega_0^2 - \omega_P^2 = (\omega_0 - \omega_P)(\omega_0 + \omega_P) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega_P)$$

$$< P > \simeq \frac{F_P^2}{4m\delta} \frac{\delta^2}{(\omega_0 - \omega_P)^2 + \delta^2}$$

Dobivena ovisnost (za malo prigušenje) odgovara *Lorentzovoj krivulji*.

Lorentzova krivulja



$$f(x; x_0, a) = \frac{1}{\pi a \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2\right]}$$

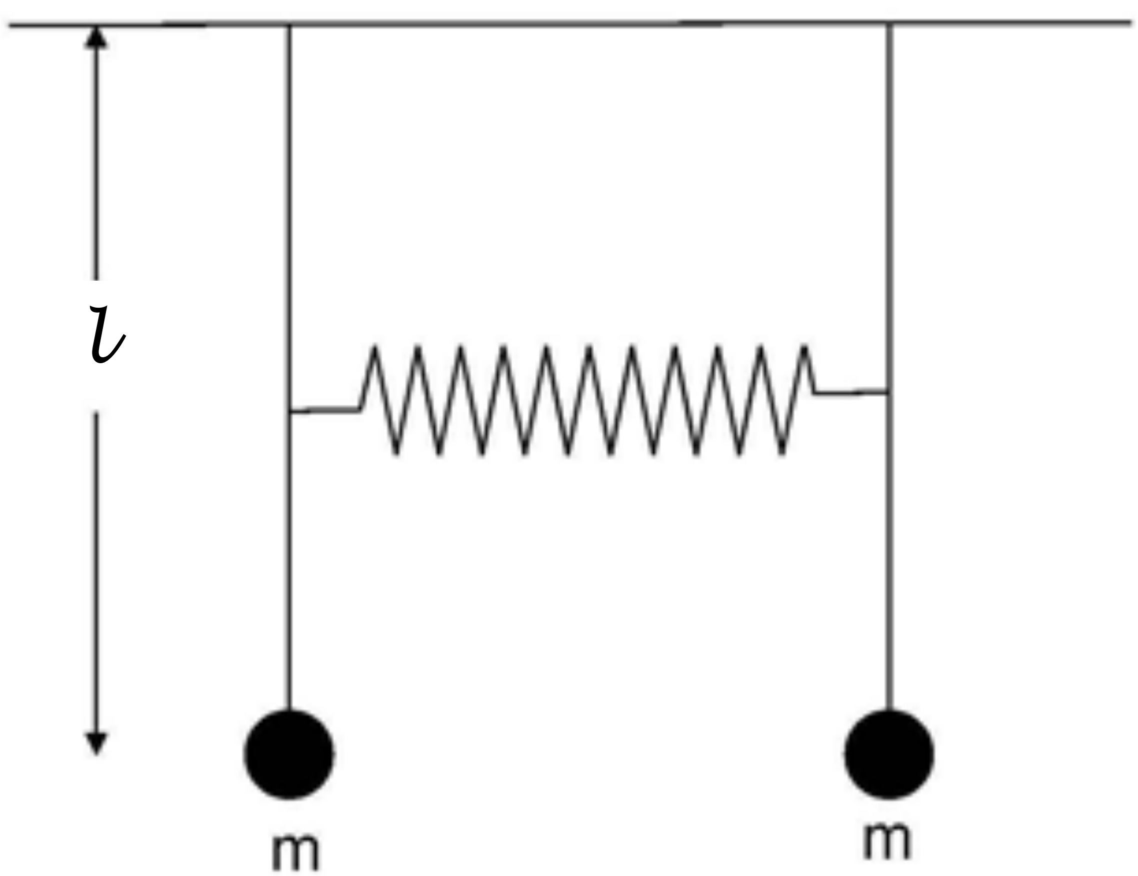
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{(x-x_0)^2 + a^2}\right]$$

Vezani titrajni sustavi. Normalni modovi titranja.

Slaganje titranja: Oberbeckova njihala

* **Kako titraju dva titrajna sustava između kojih postoji elastična veza?**

Problem: razmotrimo 2 fizička njihala (tanka šipka bez mase na čijem je kraju pričvršćena masa) između kojih se nalazi opruga konstante K. Razmak između šipki jednak je duljini nerastegnute opruge.



* **Jednadžba gibanja matematičkog njihala izgleda kao jednadžba titranja tijela na opruzi uz "konstantu opruge" jednaku k = mg/l**

Načini titranja ovog sustava:

https://www.youtube.com/watch?v=Uo1Eu2a6iWo

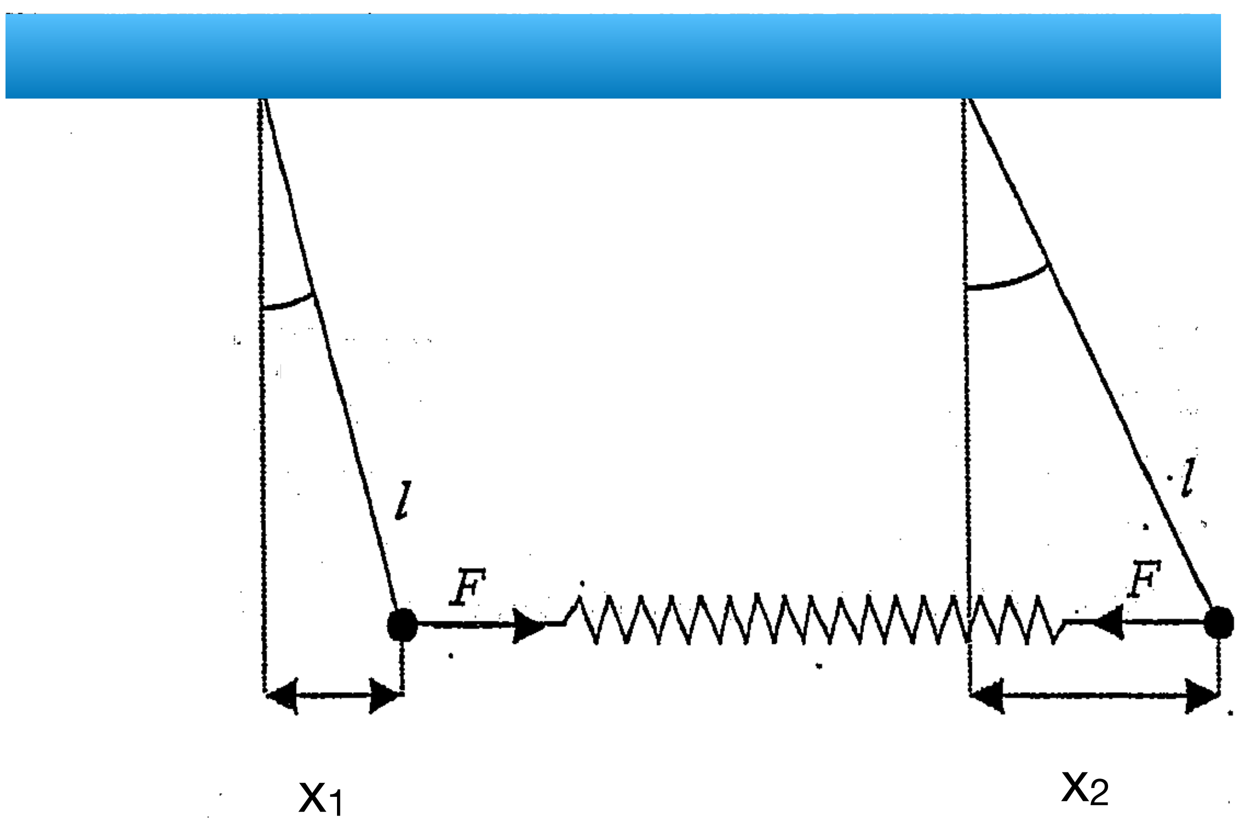
https://www.youtube.com/watch?v=9XmnB_y_gi4

https://www.youtube.com/watch?v=vuxP8uXaMM4

Slaganje titranja

✤ **Kako titraju dva titrajna sustava između kojih postoji elastična veza?**

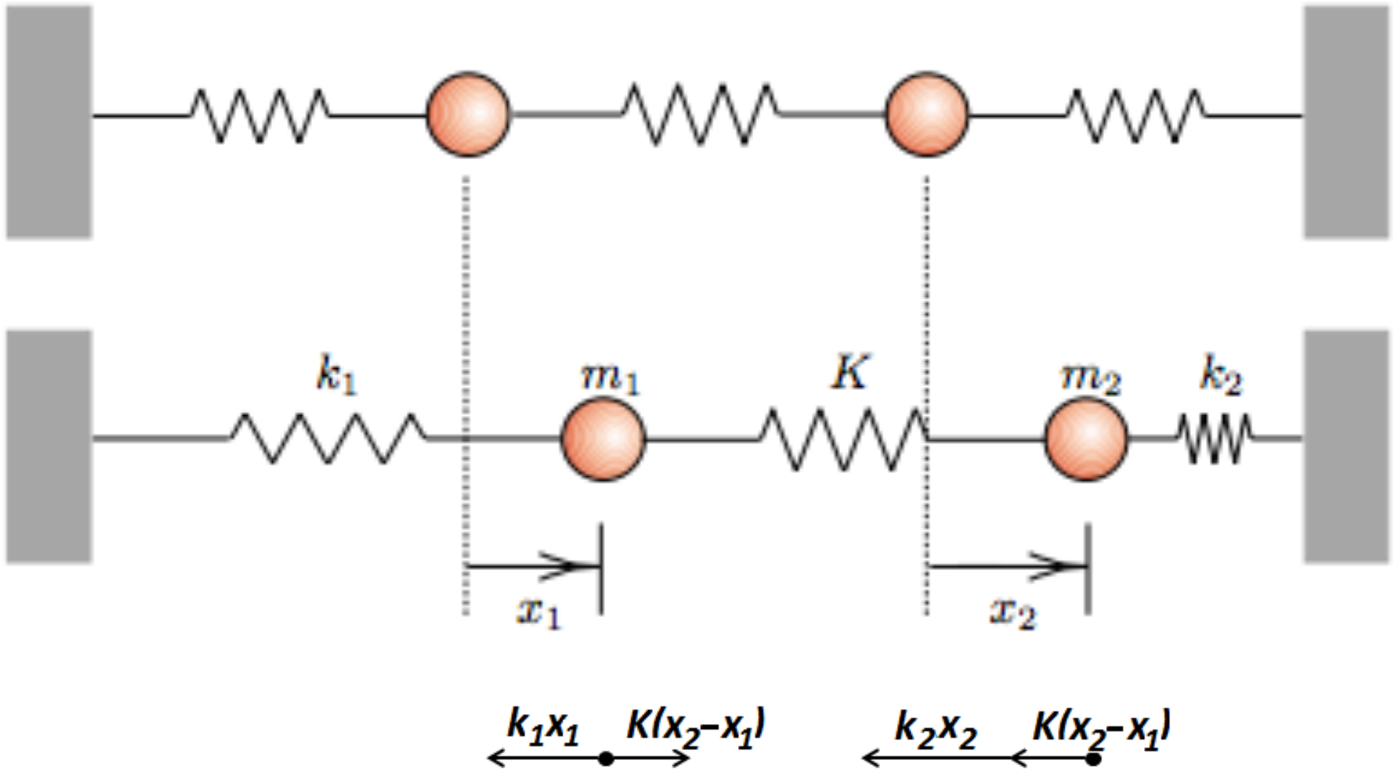
Problem: razmotrimo 2 fizička njihala (tanka šipka bez mase na čijem je kraju pričvršćena masa) između kojih se nalazi opruga konstante K. Razmak između šipki jednak je duljini nerastegnute opruge.



✤ **Jednadžba gibanja matematičkog njihala izgleda kao jednadžba titranja tijela na opruzi uz "konstantu opruge" jednaku $k = mg/l$**

Slaganje titranja

Dakle, sustav vezanih fizičkih njihala možemo opisati ekvivalentnim sustavom dvaju tijela povezana s tri opruge:



Uzmimo: $m_1 = m_2 = m$ i $k_1 = k_2 = k$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - K(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1)$$

$$\omega_0^2 = k_1/m_1 = k_2/m_2 \text{ i } \Omega^2 = K/m$$

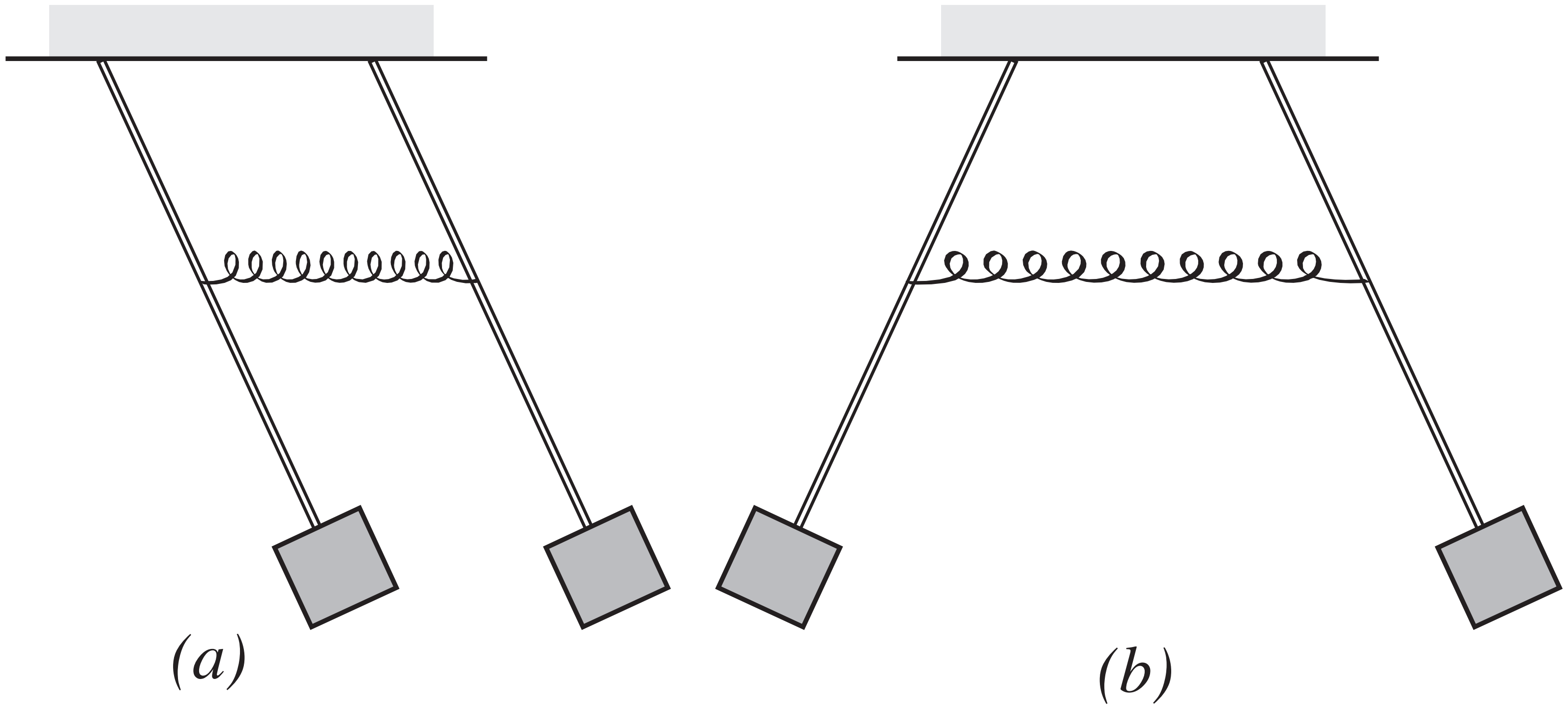
Slaganje titranja

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \Omega^2 (x_1 - x_2)$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \Omega^2 (x_2 - x_1)$$

Ako nema opruge koja veže sustave, svaki sustav za sebe predstavlja harmonički oscilator. Onda će i vezani sustav za rješenje imati $x_1(t)$ i $x_2(t)$ koji su harmoničke funkcije:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad x_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$$

x_1 i x_2 su ili u fazi (uf) ili su suprotnih faza - protufazni (pf):



Slaganje titranja

$$-\omega^2 A + (\omega_0^2 + \Omega^2)A - \Omega^2 B = 0$$
$$-\omega^2 B + (\omega_0^2 + \Omega^2)B - \Omega^2 A = 0$$

$$r = B/A$$

$$-\omega^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) - \Omega^2 r = 0$$
$$-\omega^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) - \Omega^2/r = 0$$

$$r = 1/r \text{ ili } r = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad B = \pm A$$

Titranje u fazi: $A = B \quad x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad x_2(t) = +A\cos(\omega t + \phi)$

Protufazno titranje: $A = -B \quad x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad x_2(t) = -A\cos(\omega t + \phi)$

A=B

$$\omega_{\mathrm{uf}} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A= -B

$$\omega_{\mathrm{pf}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{K}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} > \omega_{\mathrm{uf}}$$

Slaganje titranja

Treći način titranja: izmjenično titranje
Samo jedna masa se pokrene na titranje; nakon nekog vremena zatitrati će i drugo tijelo, a prvo će se postepeno zaustaviti..

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \Omega^2 (x_1 - x_2)$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \Omega^2 (x_2 - x_1)$$

Ove jednadžbe prvo zbrojimo, a zatim oduzmemo:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\omega_{uf}^2 (x_1 + x_2)$$

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\omega_{pf}^2 (x_2 - x_1)$$

$$x_1 + x_2 = Q_1 \cos(\omega_{uf} t + \phi_1)$$

$$x_2 - x_1 = Q_2 \cos(\omega_{pf} t + \phi_2)$$

Slaganje titranja

Oduzimanjem:

$$x_1 = \frac{Q_1}{2}\cos(\omega_{uf}t + \phi_1) - \frac{Q_2}{2}\cos(\omega_{pf}t + \phi_2)$$

Zbrajanjem:

$$x_2 = \frac{Q_1}{2}\cos(\omega_{uf}t + \phi_1) + \frac{Q_2}{2}\cos(\omega_{pf}t + \phi_2)$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta koji odgovaraju otklonu samo jednog od njihala u početnom trenutku: $x_1(0) = a, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$, dobivamo:

$$x_1(t) = \frac{a}{2}\cos(\omega_{uf}t) + \frac{a}{2}\cos(\omega_{pf}t)$$

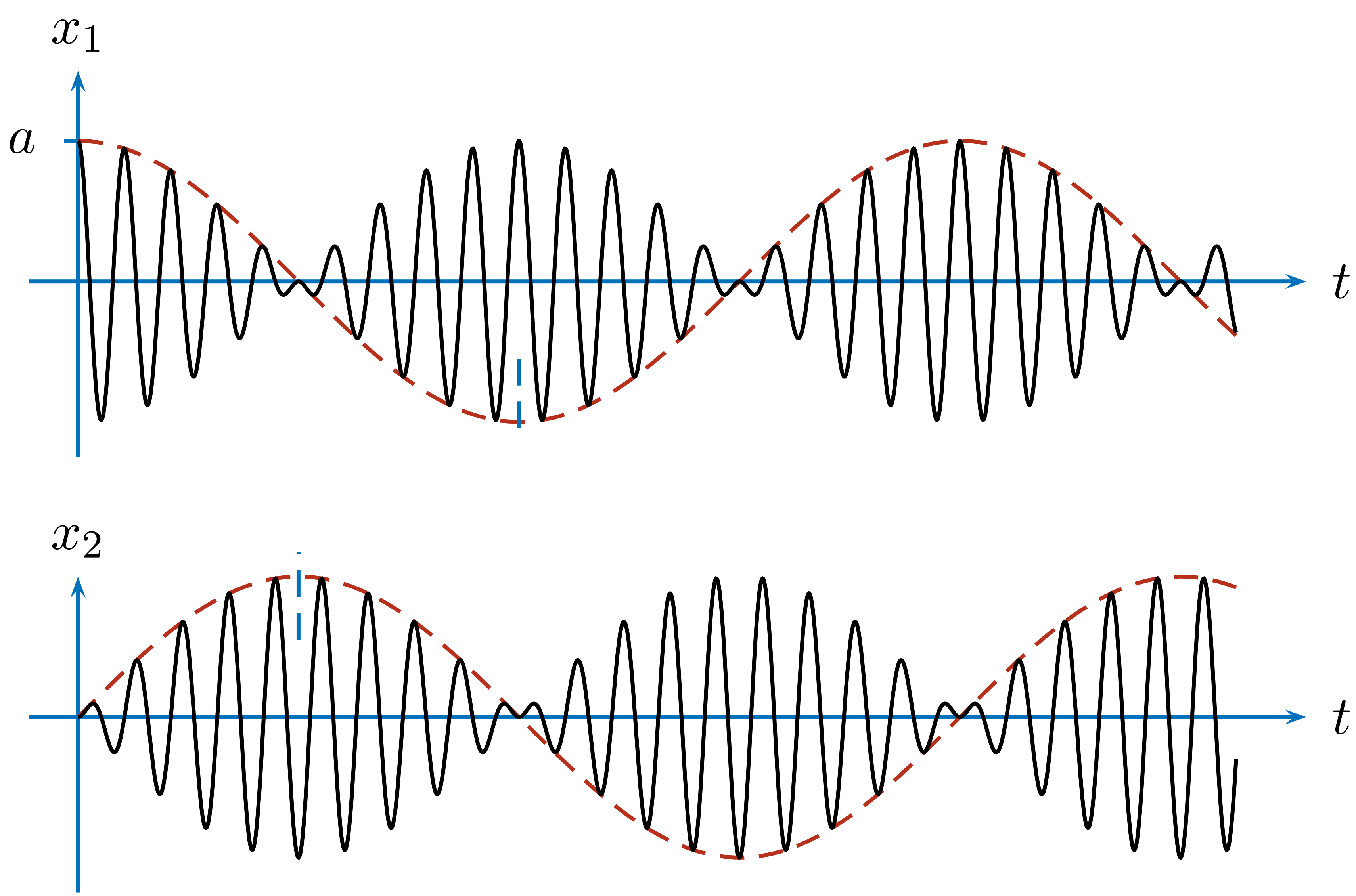
$$x_2(t) = \frac{a}{2}\cos(\omega_{uf}t) - \frac{a}{2}\cos(\omega_{pf}t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= a\ \cos(\frac{\omega_{uf} + \omega_{pf}}{2}t)\cos(\frac{\omega_{pf} - \omega_{uf}}{2}t) \\ x_2(t) &= a\ \sin(\frac{\omega_{uf} + \omega_{pf}}{2}t)\sin(\frac{\omega_{pf} - \omega_{uf}}{2}t) \end{aligned}}$$

Slaganje titranja

* **Kako titraju dva titrajna sustava između kojih postoji elastična veza?**

Izmjenično titranje: jedna masa se pokrene na titranje. Nakon nekog vremena, zatitrati će i drugo tijelo, a prvo će se postepeno zaustaviti.
https://www.youtube.com/watch?v=_Q1gNjwCIP0



Slaganje titranja

Prvo tijelo je “pokretač” gibanja. Ono predaje energiju drugom tijelu i smiri se, te je zatim pokrenuto na gibanje u protufazi, sve dok ne postigne početno stanje gibanja. Ovo se dešava nakon vremena:

$$\Omega_{\pm} \equiv (\omega_{\mathrm{pf}} \pm \omega_{\mathrm{uf}})/2$$

$$\boxed{T_{\mathrm{udar}} = \frac{\pi}{\Omega_-} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{pf}} - \omega_{\mathrm{uf}}}}$$

Odgovarajuća frekvencija zove se frekvencija udara

$$\nu_{\mathrm{udar}} = \nu_{\mathrm{pf}} - \nu_{\mathrm{uf}}$$

jer odgovara frekvenciji maksimuma intenziteta.