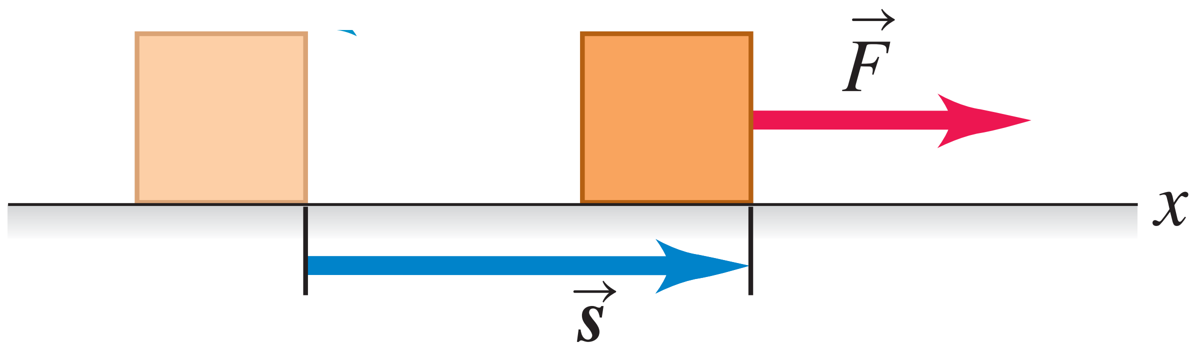
Rad

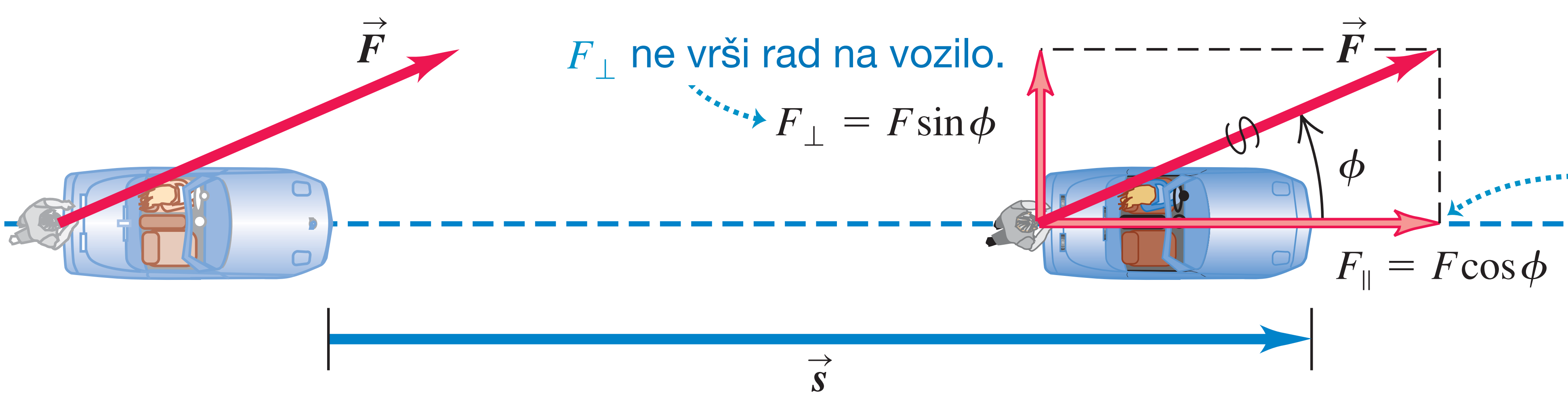
- Ako se tijelo pomiče pod utjecajem neke rezultantne sile, kaže se da ta **sila obavlja rad**
- Najjednostavniji slučaj nastaje kada se smjer pomaka tijela podudara sa smjerom djelovanja sile:



$$W = Fs$$

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m}$$

- Što ako sila djeluje pod nekim kutom u odnosu na pomak?



$$W = Fs\cos\phi$$

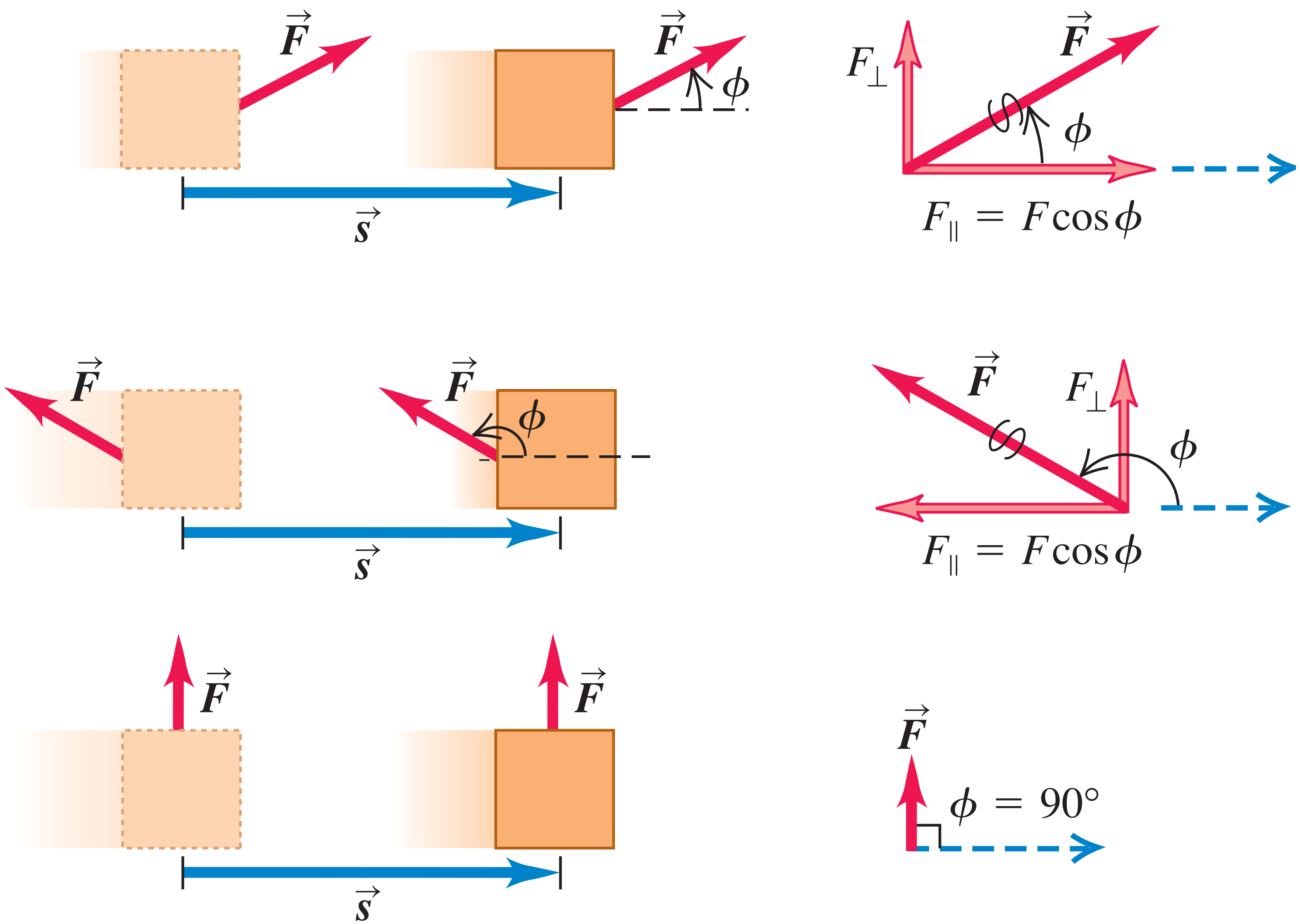
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

Samo sila $F_\parallel$ vrši rad na vozilo:
$W = F_\parallel s = (F \cos\phi)\, s$

Young & Freedman University Physics

Rad

- Rad je skalarna veličina i s obzirom na kut između vektora **F** i **s**, mogu nastupiti slijedeći slučajevi:



Rad je pozitivan (sila ima komponentu u smjeru gibanja)

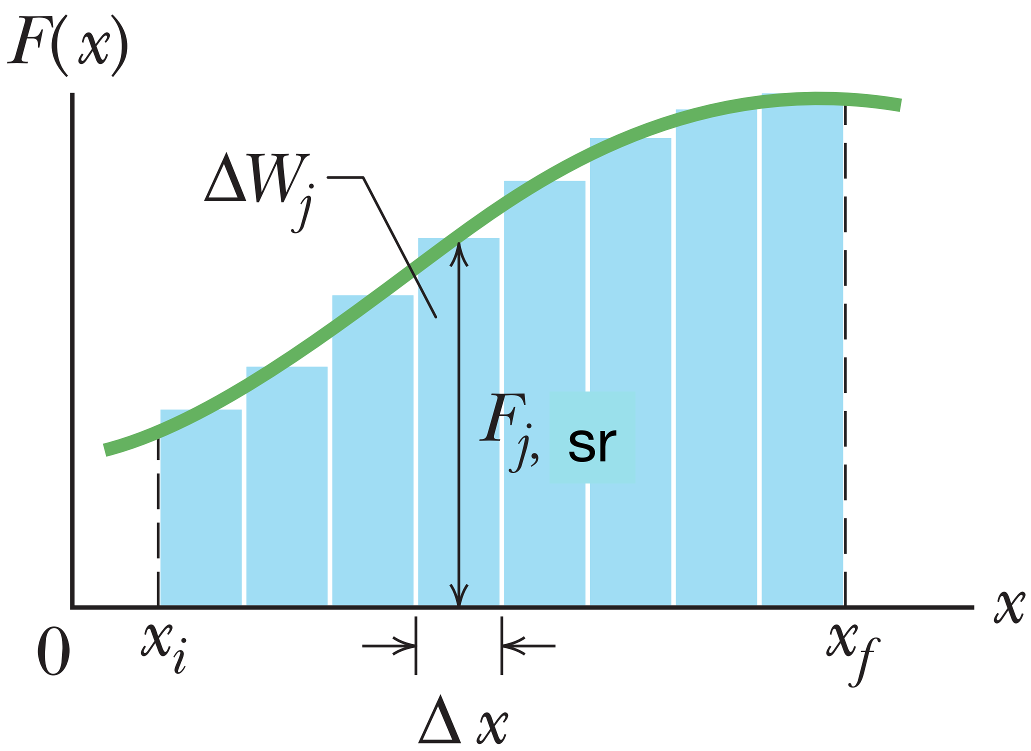
Rad je negativan (sila ima komponentu u suprotnom smjeru od smjera gibanja): $90^0 < \phi < 180^0$

Sila je okomita na smjer gibanja: sila ne vrši rad na objekt

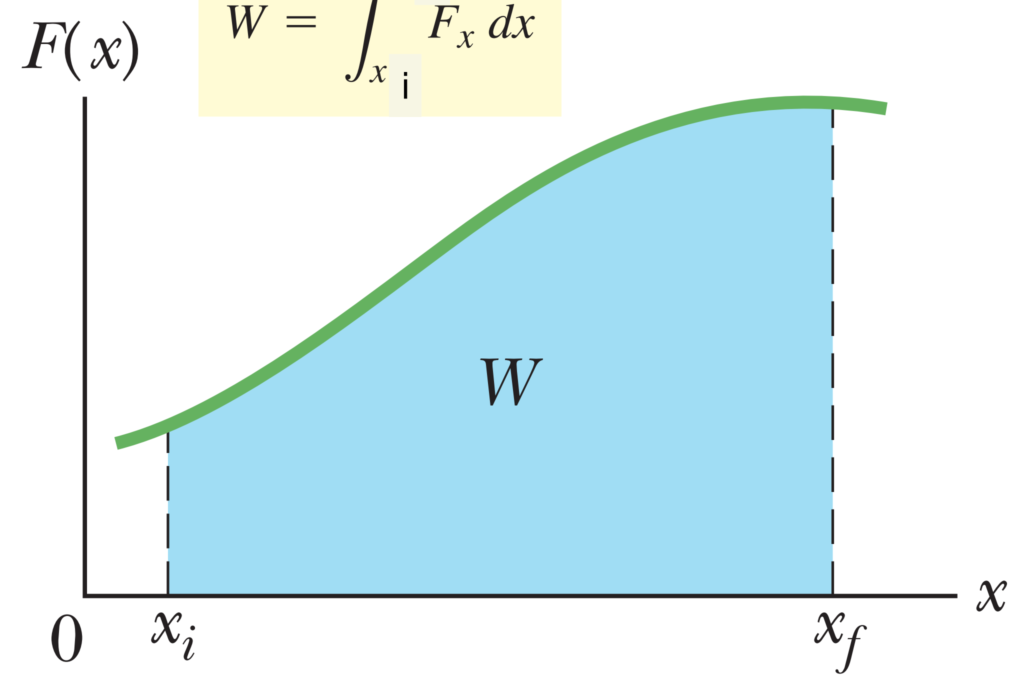
Young & Freedman University Physics

Rad promjenljive sile

- Općenito, sila može biti promjenljiva na krivocrtnom putu
- U jednoj dimenziji:



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

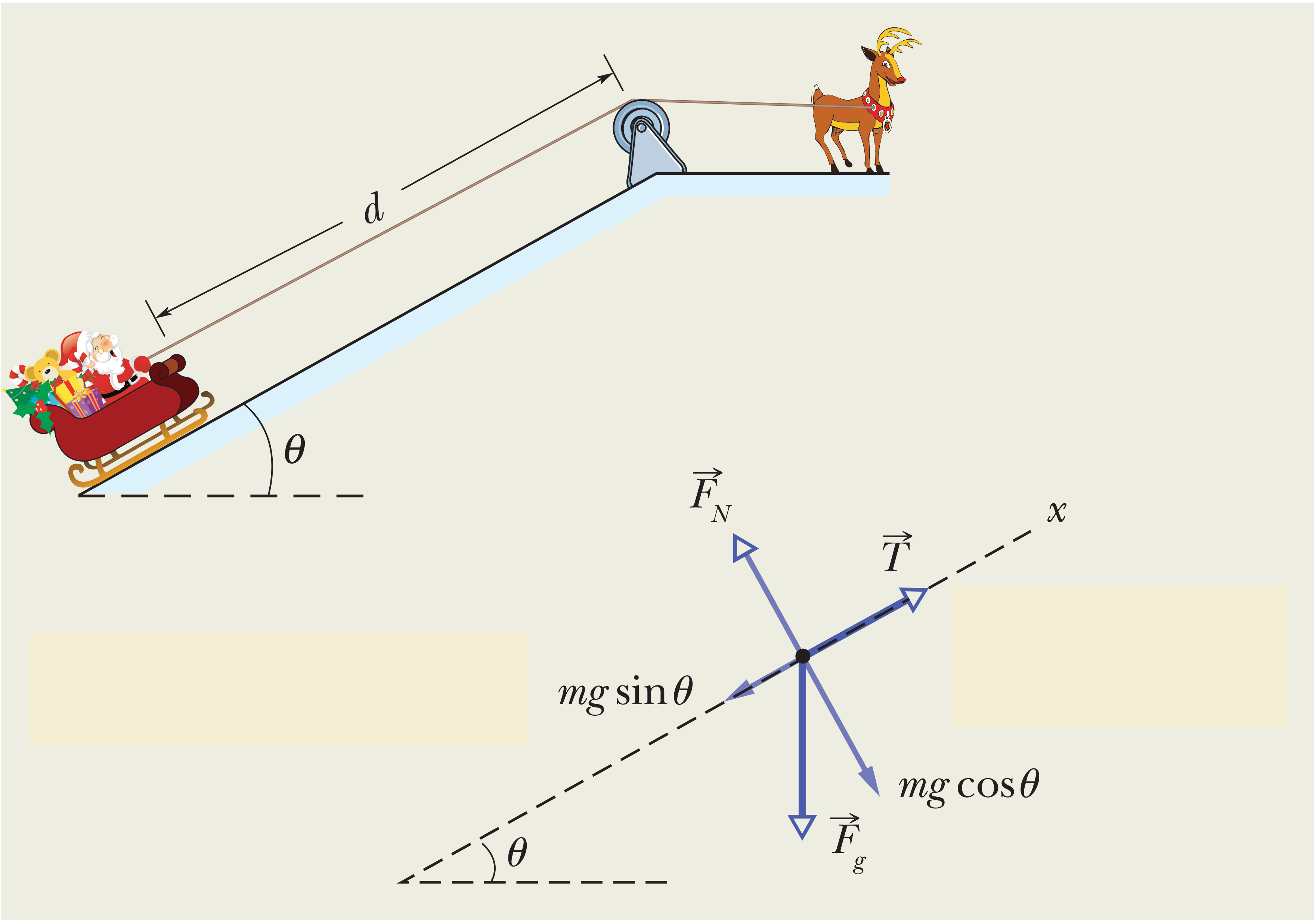


- Za tri dimenzije: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$

Halliday, Resnick & Walker:
Fundamentals of Physics

Zadatak

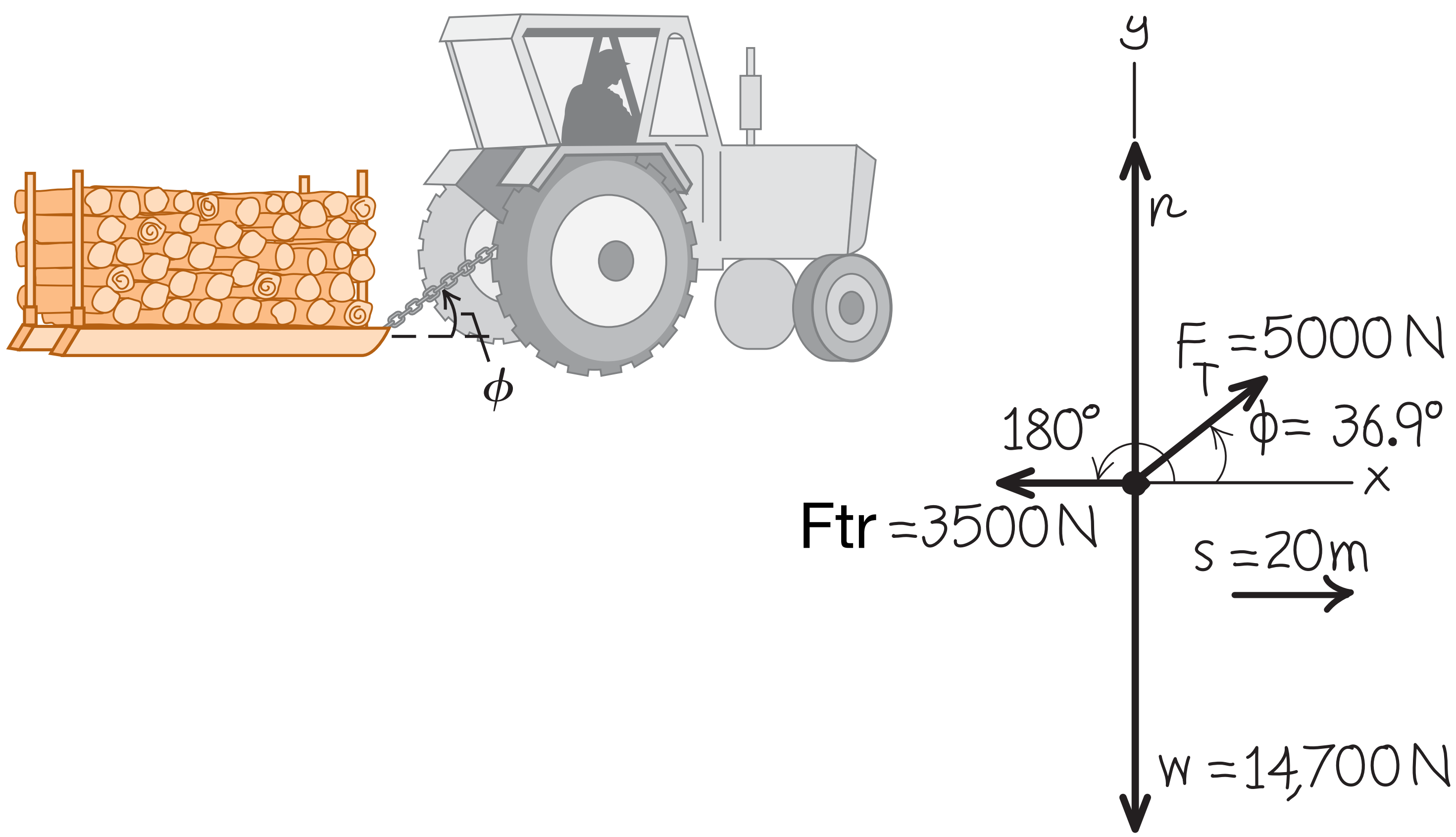
- Sanjke težine 200 kg su vučene užetom uz kosinu nagiba 30^0, duž udaljenosti d = 20 m. Gibanje je jednoliko i možemo zanemariti silu trenja. Koliki rad vrši svaka sila na sanjke?



Halliday, Resnick & Walker:
Fundamentals of Physics

Zadatak

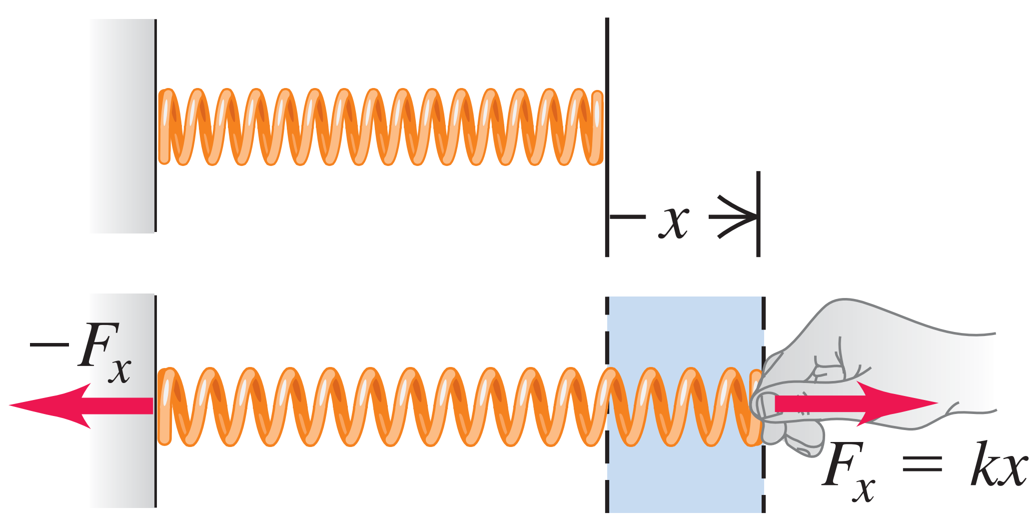
- Traktor vuče drva natovarena na sanjke čija je ukupna težina 14700 N duž udaljenosti 20m, djelujući konstantnom silom od 5000 N pod kutom 36.9^0 u odnosu na horizontalu. Sila trenja iznosi 3500 N i opire se gibanju sanjki. Odredi rad svake sile na sanjke i ukupan rad svih sila.

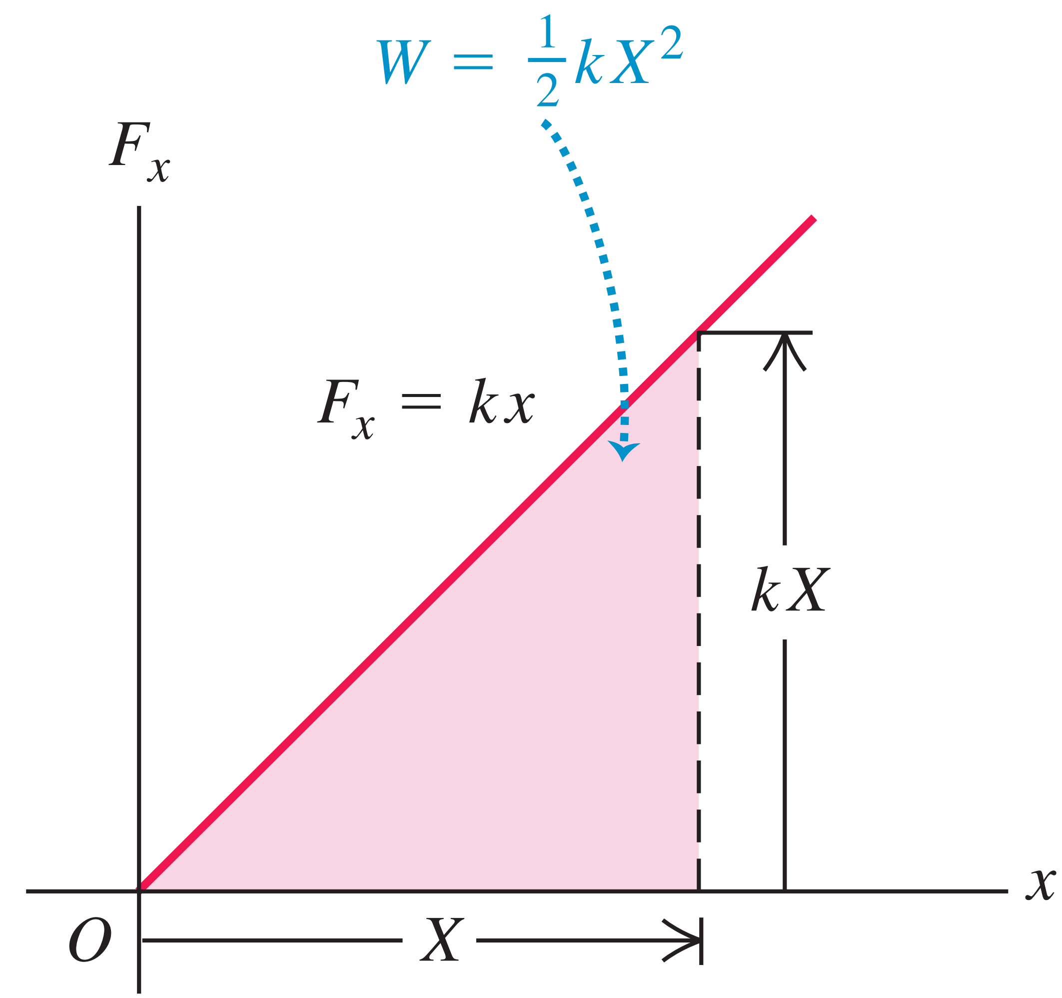


Young & Freedman University Physics

Primjer: rad promjenljive sile

- Da bismo rastegnuli oprugu za x, trebamo **primijeniti** silu $F_x = kx$
- k je **konstanta opruge**. Jedinica: N/m
- *Hookeov zakon*: sila je direktno proporcionalna elongaciji (ovdje: produženju opruge) kada elongacija nije jako velika
- Da bismo rastegnuli oprugu, trebamo izvršiti rad





$$W = \int_0^X F_x\,dx = \int_0^X kx\,dx = \tfrac{1}{2}kX^2$$

Young & Freedman University Physics

Zadatak

- Automobil na vodoravnoj cesti razvija brzinu v_0 i zatim nastavlja vožnju isključenim motorom. Nakon koliko vremena mu se brzina smanji na $v_0/2$, ako je otpor gibanju proporcionalan kvadratu brzine? Izračunajte rad sila otpora za to vrijeme.

Zadatak

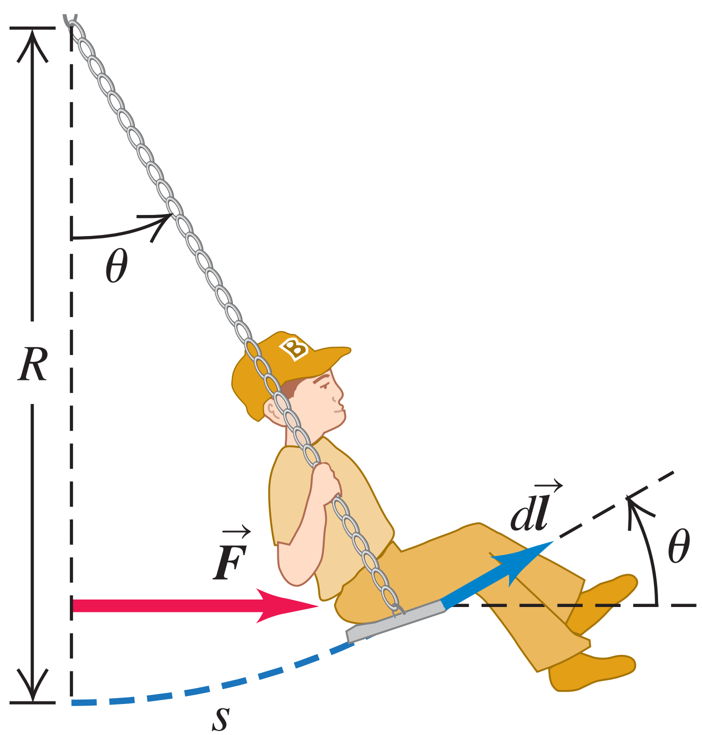
- Da bi se dječak njihao na njihaljci potrebno je primijeniti horizontalnu silu F, koja počinje od vrijednosti nula i postepeno se povećava. Sila je upravo takva da se dječak njiše vrlo polagano i ostaje blizu ravnoteže tokom djelovanja sile. Težina djecaka je w, a duljina užeta je R. Koliki je rad vanjske sile F?

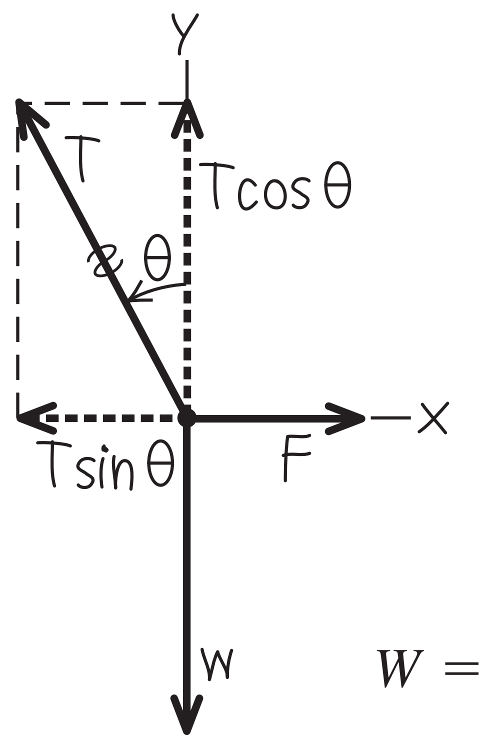
$$\sum F_x = F + (-T\sin\theta) = 0$$

$$\sum F_y = T\cos\theta + (-w) = 0$$

$$s = R\theta \qquad dl = ds = R\, d\theta$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\, ds$$





$$W = \int_0^{\theta_0} (w\tan\theta)\cos\theta\,(R\, d\theta) = wR\int_0^{\theta_0} \sin\theta\, d\theta$$

$$= wR(1 - \cos\theta_0)$$

Young & Freedman University Physics

Snaga

- Snaga je rad podijeljen s vremenom u kojem se taj rad obavlja:

$$P_{\text{sr}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Zadatak

- Dizalo mase 500 kg ubrza se akceleracijom 1 m/s^2 iz mirovanja do brzine 4 m/s, a zatim se nastavlja uspinjati jednoliko po pravcu. Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja 1000 N. Kolika je:

a) prosječna snaga;
b) maksimalna snaga potrebna motoru da ubrza dizalo iz mirovanja do 4 m/s?
c) Koliku snagu razvija motor pri jednolikom dizanju?
d) Koliki je rad motora za vrijeme 7s od početka dizanja?

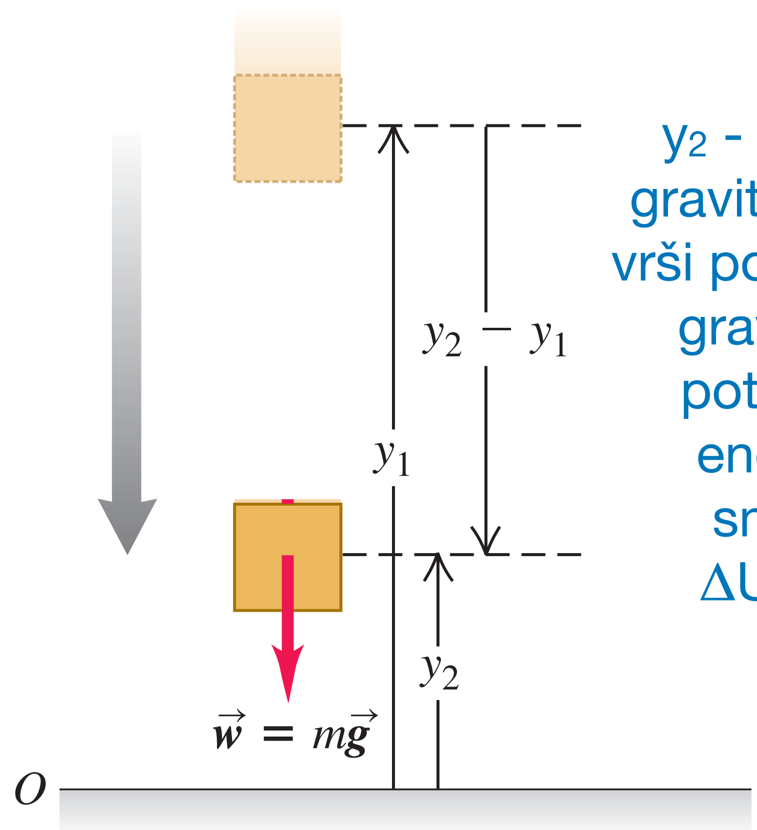
Potencijalna enegija

Young & Freedman University Physics

- Tijelo može imati energiju i zbog svog položaja u odnosu na druga tijela

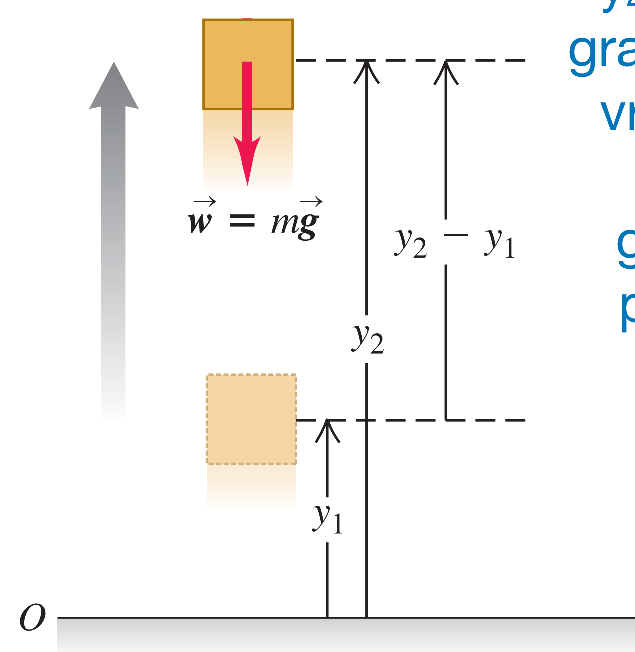
$$U_{\text{grav}} = mgy$$

Tijelo se giba prema dolje:



$y_2 - y_1 < 0$, pa gravitacijska sila vrši pozitivan rad i gravitacijska potencijalna energija se smanjuje: $\Delta U_{\text{grav}} < 0$.

Tijelo se giba prema gore:



$y_2 - y_1 > 0$, pa gravitacijska sila vrši negativan rad i gravitacijska potencijalna energija se povećava: $\Delta U_{\text{grav}} > 0$.

$$W_{\text{grav}} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

$$U_{\text{grav},1} = mgy_1 \qquad U_{\text{grav},2} = mgy_2$$

$$\Delta U_{\text{grav}} = U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1}$$

$$W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2} = -(U_{\text{grav},2} - U_{\text{grav},1}) = -\Delta U_{\text{grav}}$$

Promjena *gravitacijske potencijalne energije* sistema jednaka je negativnom radu koji vrši gravitacijska sila:

$$\Delta U = -W$$

Potencijalna enegija

- Teorem o radu i kinetičkoj energiji kaže da je ukupan rad na tijelo jednak promjeni kinetičke energije tijela: $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$

- Ako je jedina sila koja djeluje na tijelo gravitacijska:

$$W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}.$$

Gravitacijska sila vrši negativan rad. Kinetička energija se smanjuje

Gravitacijska sila vrši pozitivan rad. Kinetička energija se povećava.

$$\Delta K = -\Delta U_{grav}$$

$$K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

$$E = K + U_{grav} = \text{constant}$$

Ukupna mehanička energija (E = K+U) je sačuvana!

Potencijalna enegija

- Tijelo može imati energiju i zbog svog položaja u odnosu na druga tijela

Gravitacijska sila vrši negativan rad. Kinetička energija se smanjuje

Gravitacijska sila vrši pozitivan rad. Kinetička energija se povećava.

Promjena *gravitacijske potencijalne energije* sistema jednaka je negativnom radu koji vrši gravitacijska sila:

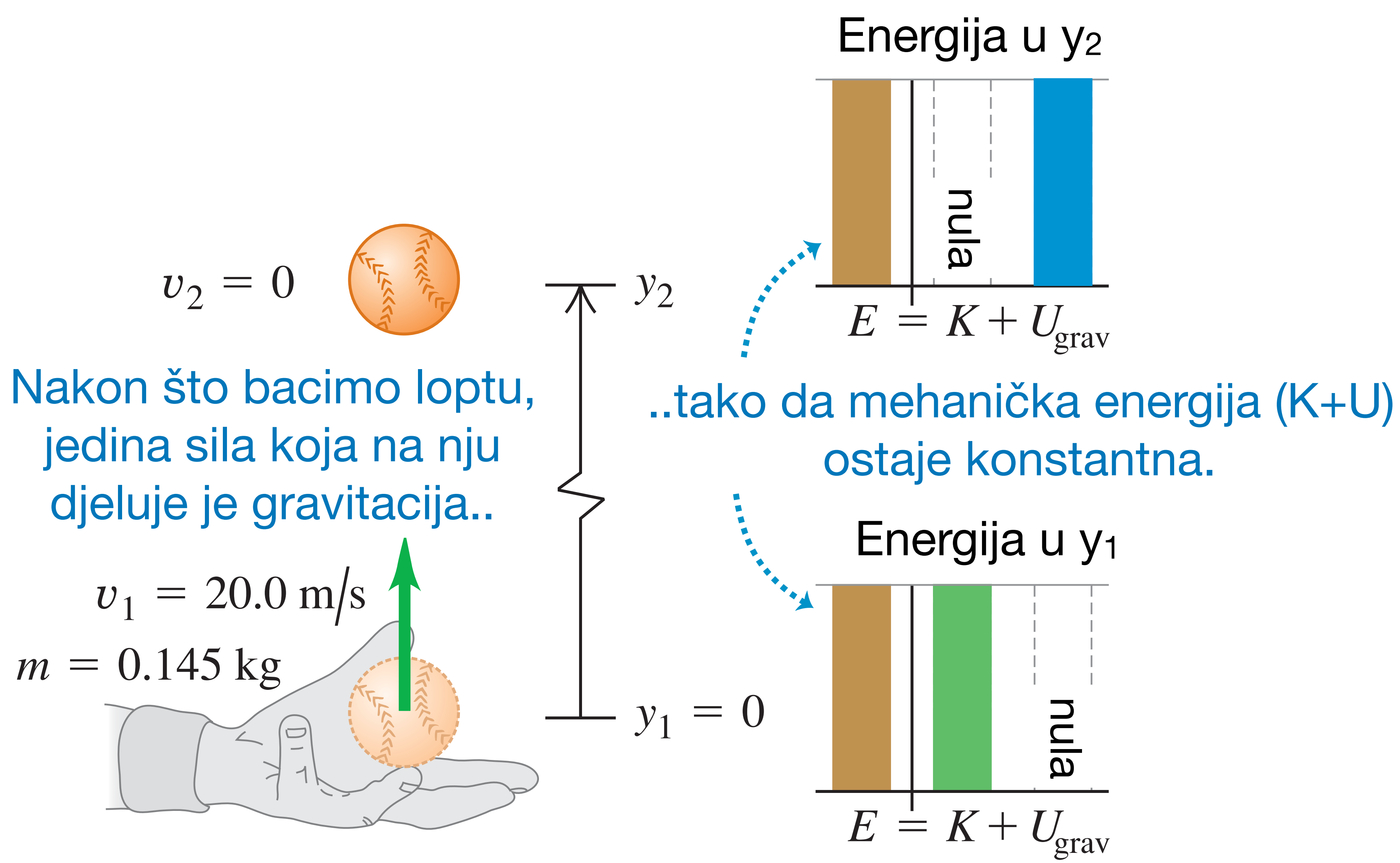
$$\Delta U = -W$$

Ukupna mehanička energija (E = K+U) je sačuvana!

Zakon očuvanja mehaničke energije

$$E_{mec} = K + U$$

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

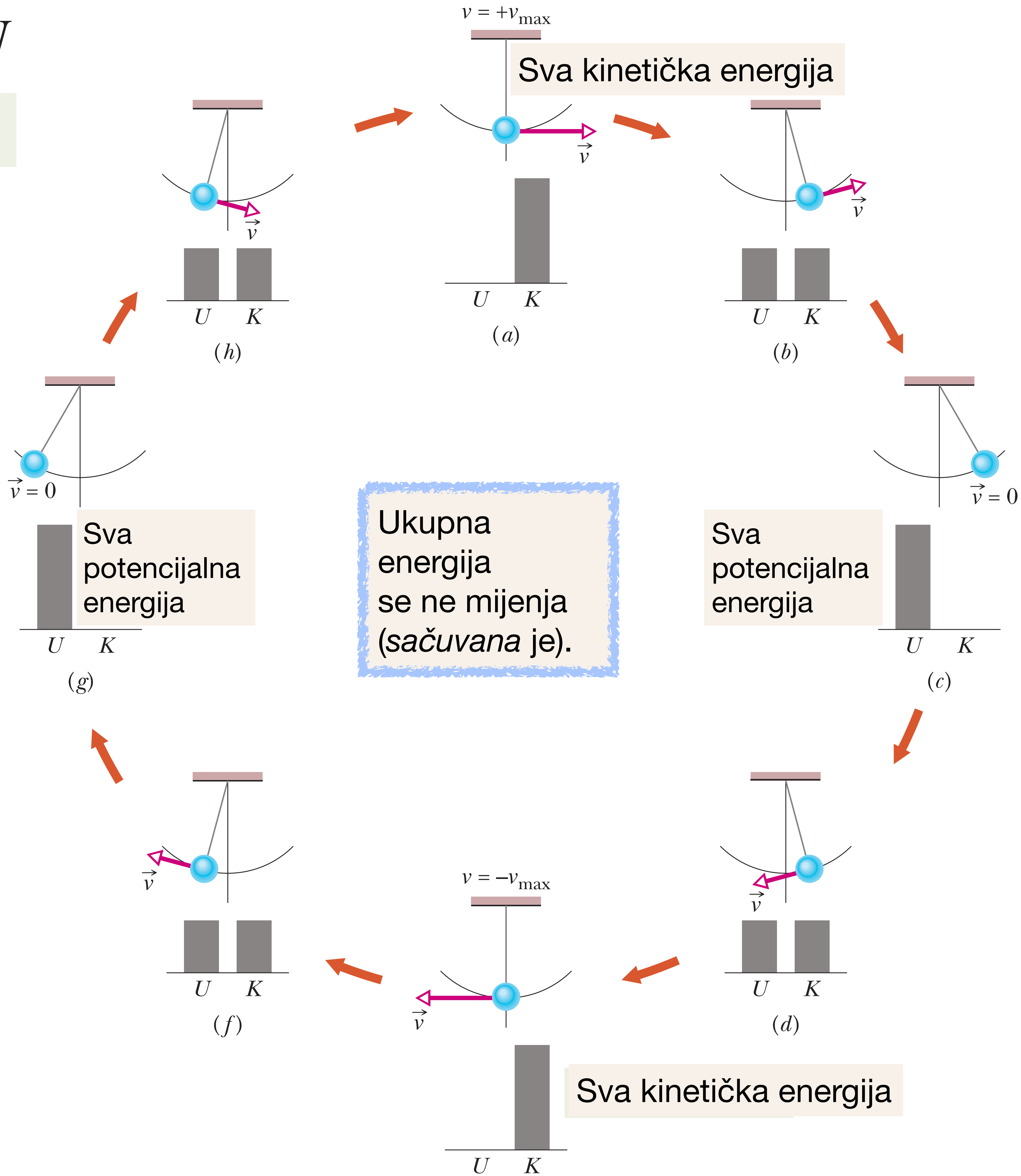


Halliday, Resnick & Walker:
Fundamentals of Physics

Zakon očuvanja mehaničke energije

$$E_{mec} = K + U$$

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$



Halliday, Resnick & Walker: Fundamentals of Physics

Konzervativne sile

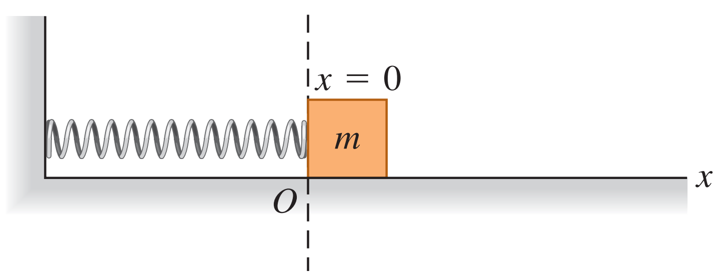
Gravitacijska potencijalna energija: $U(y) = mgy$

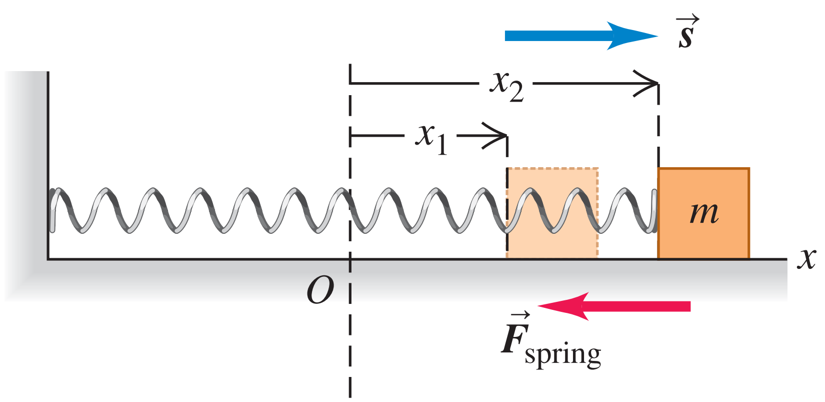
Elastična potencijalna energija: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

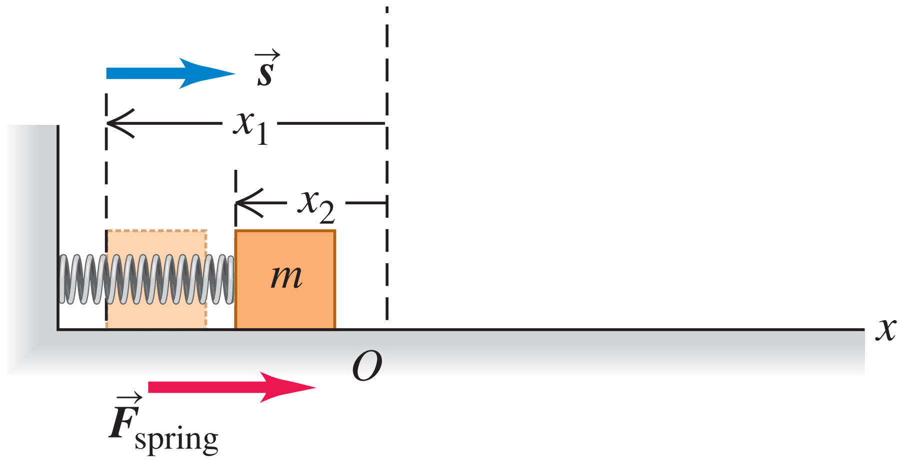
$F_x = -kx$ **sila opruge** koja vrši rad

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el}$$



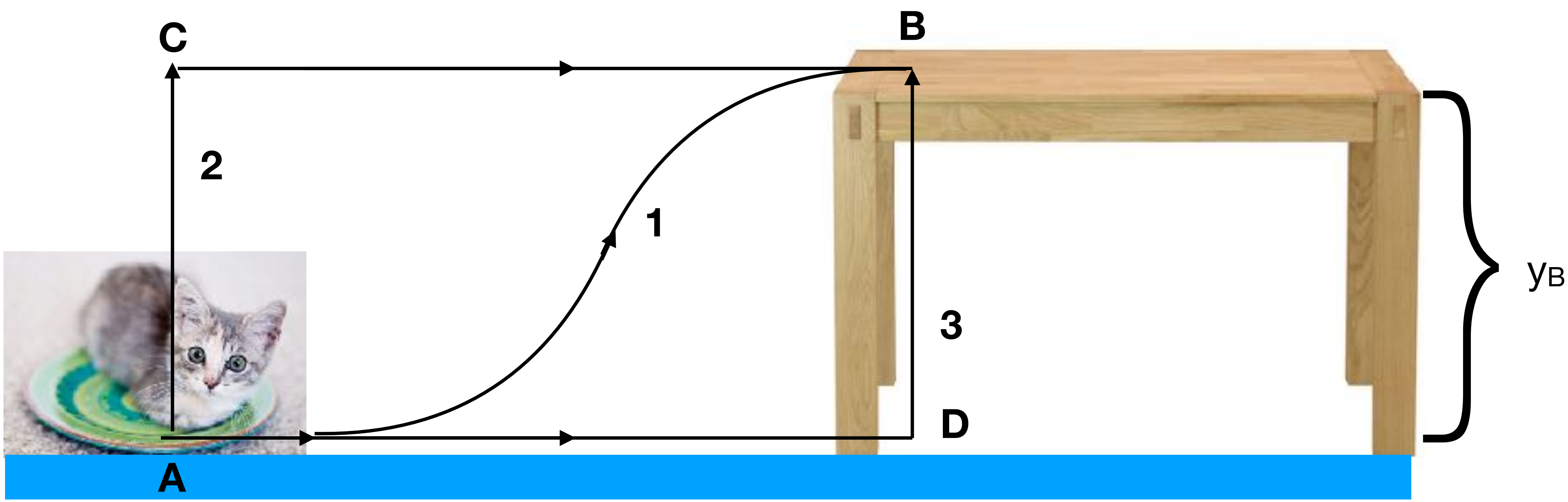




Važno: ako postoji vanjska sila koja rasteže oprugu, ona je po iznosu jednaka sili opruge, ali suprotnog smjera

Konzervativne sile

- Mačka želimo premjestiti s poda (točka A) na stol (točka B), nasuprot sile teže. Na slici su prikazana 3 od bezbroj mogućih načina kako možemo izvesti to premještanje
- u sva 3 slučaja rad koji trebamo izvršiti je jednak



- Konzervativne sile su one čiji rad ne ovisi o obliku puta od početne do konačne točke putanje! Konzervativne sile su npr. gravitacijska i elastična.
- **Potencijalnu energiju može imati samo sila koja je konzervativna!**

Konzervativne sile

Rad izvršen na svakoj od putanja:

1: sila teža **G** ima smjer prema dolje, pa je izvršeni rad sile **F** nasuprot sili teži jednak:

$$
\begin{aligned}
dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\vec{G} \cdot d\vec{s} = (+\hat{\jmath} \cdot mg) \cdot (\hat{\imath}\, dx + \hat{\jmath}\, dy) \\
&= mg \cdot dy.
\end{aligned}
$$

$$
W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot \int_0^{y_B} dy = mg \cdot y_B.
$$

2: rezultat je ponovno mgy_B . Dio puta od C do B ne doprinosi integralu jer je duž tog dijela sila okomita na pomak.

3: rezultat je ponovno mgy_B . Dio puta od A do D ne doprinosi integralu.

Konzervativne sile

Ako bismo se vratili putanjom **3** natrag od B do A, sila bi imala kao i prije smjer prema gore, no pomak je u suprotnom smjeru.

Rad bi bio negativan, ali istog iznosa!

UKUPNI RAD pri premještanju tijela od A putanjom **1** do B, pa natrag putanjom **3** do A je jednak nuli!

$$W_{\text{ukupni}} = \int\limits_{A \to C}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{B \to D}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

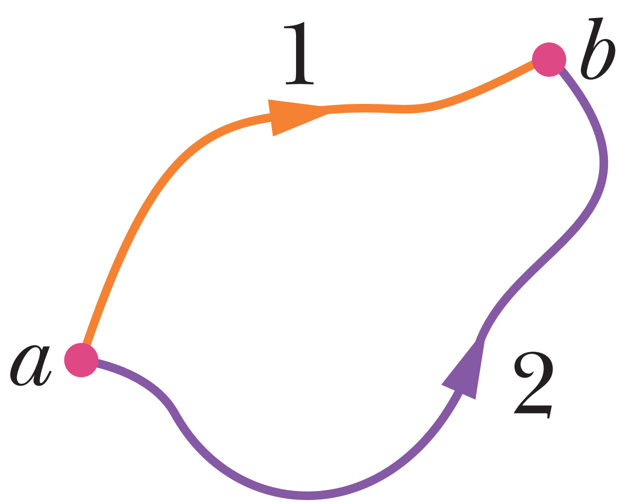
$$= \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{A \to C}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int\limits_{B \to D}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{A \to C}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{A \to D}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Rad izvršen protiv sile teže po zatvorenoj krivulji jednak je nuli.
Rad izvršen protiv sile teže ne ovisi o putu, već ovisi samo o početnoj i konačnoj točki! Za takvu silu kažemo da je KONZERVATIVNA sila.

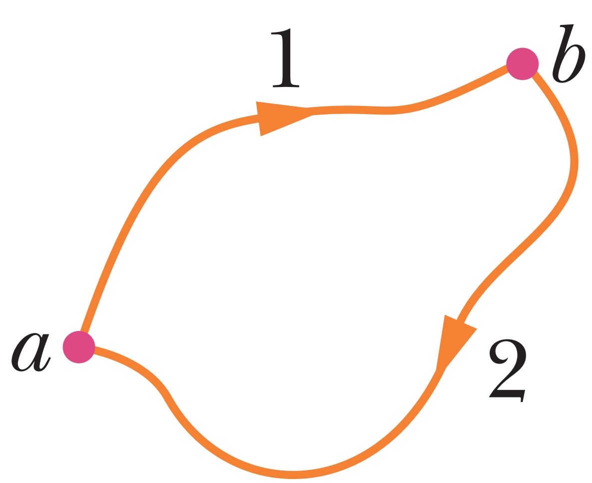
Konzervativne sile

Rad konzervativne sile na česticu ne ovisi o izboru puta:



$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

Ukupan rad konzervativne sile na česticu na zatvorenom putu je 0:



$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

Prisutnost nekonzervativnih sila

- **Kad uz konzervativne sile na česticu djeluju i nekonzervativne sile (npr. rad vanjske sile pri gibanju tijela uz kosinu), mehanička energija čestice više nije očuvana**

W_{nk} = rad nekonzervativnih sila

$W_{nk} + W_k = \Delta E_k$

Rad konzervativne sile: $W_k = - \Delta U$

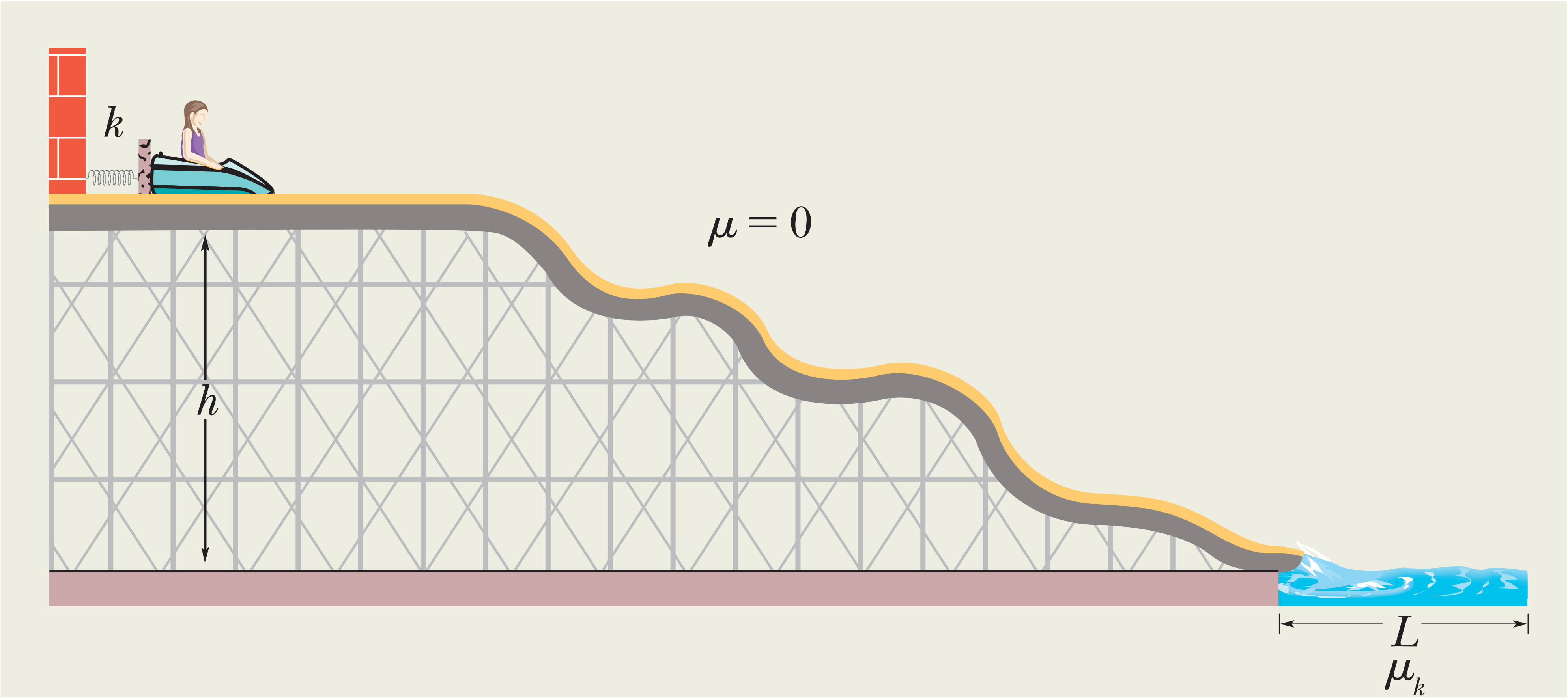
$\Rightarrow \Delta E_k + \Delta U = W_{nk}$ (jedan od izraza za zakon sačuvanja energije)

Ukupna energija ne može se uništiti niti iz ničega stvoriti, ona se može samo pretvarati iz jednog oblika u drugi oblik.

- Nekonzervativne sile: npr. sila trenja ili otpor fluida
- **Rad nekonzervativne sile ne može se prikazati funkcijom potencijalne energije**
- Neke nekonzervativne sile, kao sto su trenje ili otpor fluida uzrokuju gubitak ili disipaciju mehaničke energije (**disipativne sile)**
- Neke nekonzervativne sile mogu *povećati* mehaničku energiju

Primjer

- Prikazana je skica vožnje u zabavnom parku u kojoj se vozilo lansira pomoću opruge (koja je u početku sabijena), klizi po tračnicama bez trenja, te dolazi na razinu vode gdje ga trenje s vremenom zaustavi. Ukupna masa vozila i čovjeka je 200 kg, opruga konstante 3200 N/m je u početku sabijena 5 m, početna visina vozila iznad vode je 35 m, a koeficijent trenja na vodoravnom (donjem) dijelu je 0.8. Koliko daleko dospije vozilo na horizontalnom dijelu puta prije nego što se zaustavi?



Halliday, Resnick & Walker:
Fundamentals of Physics

$$E_{\text{mec},1} = K_1 + U_{e1} + U_{g1}$$
$$= 0 + \tfrac{1}{2}kd^2 + mgh.$$

$$E_{\text{mec},2} = K_2 + U_{e2} + U_{g2}$$
$$= 0 + 0 + 0.$$

$$\Delta E_{\text{th}} = \mu_k mgL.$$

gubitak mehaničke energije zbog svladavanja sile trenja na putu L

$$E_{\text{mec},2} = E_{\text{mec},1} - \Delta E_{\text{th}}.$$

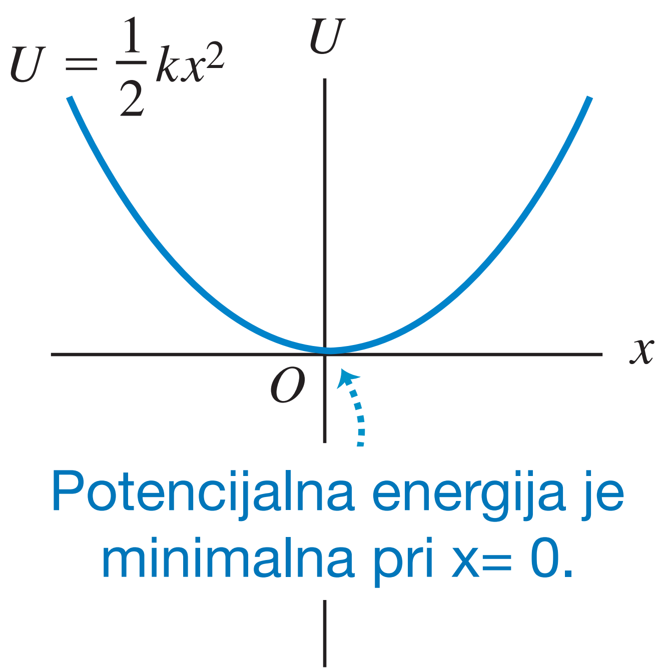
$$0 = \tfrac{1}{2}kd^2 + mgh - \mu_k mgL,$$

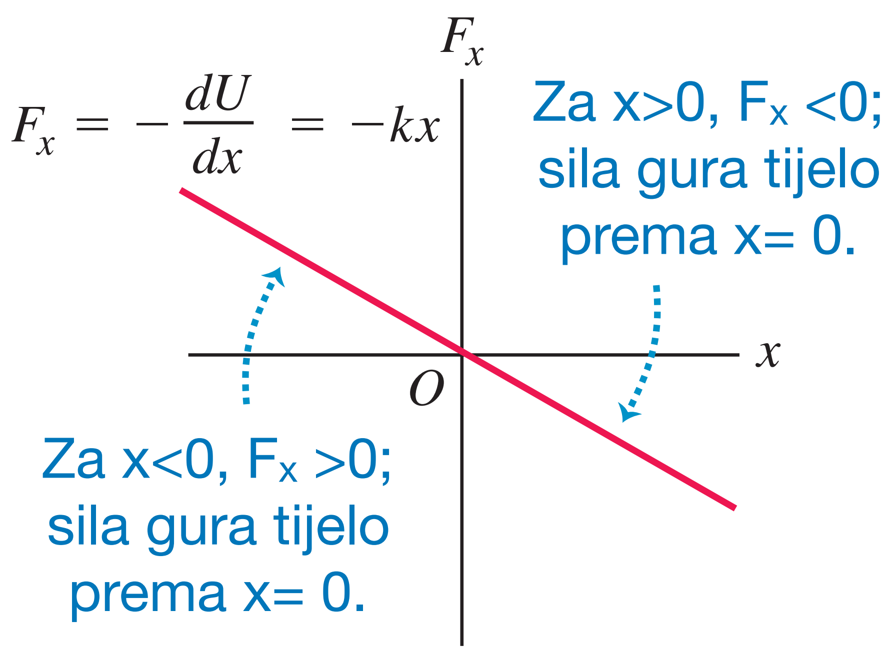
$$L = \frac{kd^2}{2\mu_k mg} + \frac{h}{\mu_k}$$
$$= \frac{(3.20 \times 10^3\ \text{N/m})(5.00\ \text{m})^2}{2(0.800)(200\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)} + \frac{35\ \text{m}}{0.800}$$
$$= 69.3\ \text{m}.$$

Sila i potencijalna energija

- Kako možemo iz potencijalne energije kao funkcije pozicije odrediti odgovarajuću silu:

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

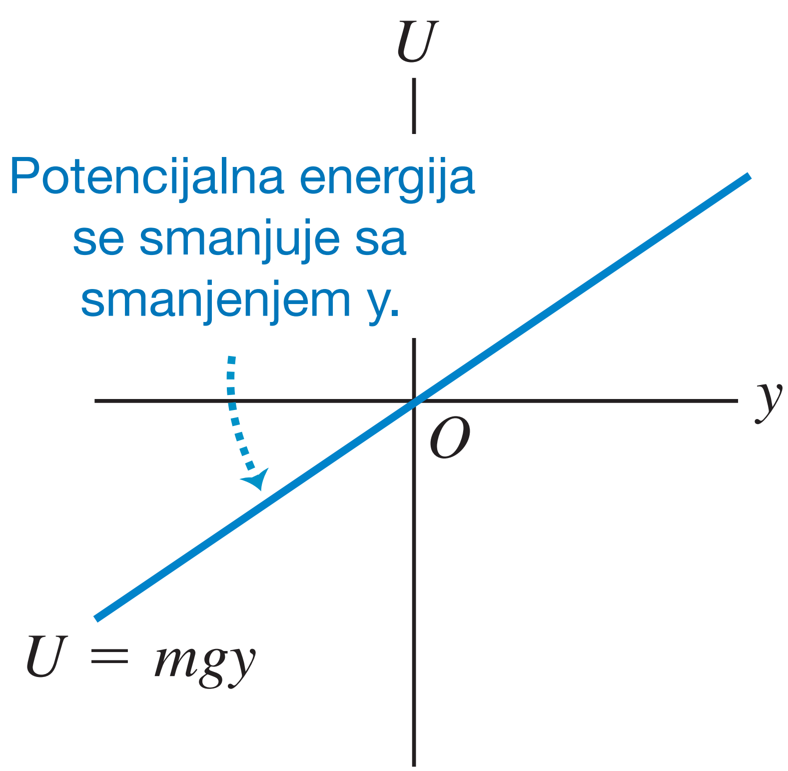


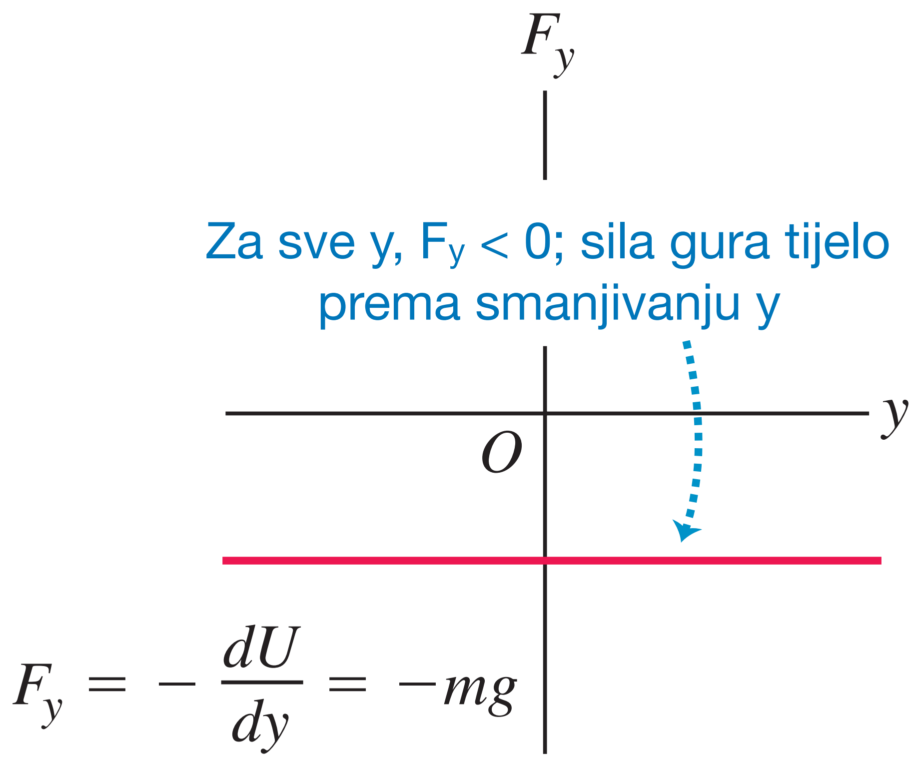


Sila i potencijalna energija

- Kako možemo iz potencijalne energije kao funkcije pozicije odrediti odgovarajuću silu:

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$





Sila i potencijalna energija

- Kako možemo iz potencijalne energije kao funkcije pozicije odrediti odgovarajuću silu:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right)$$

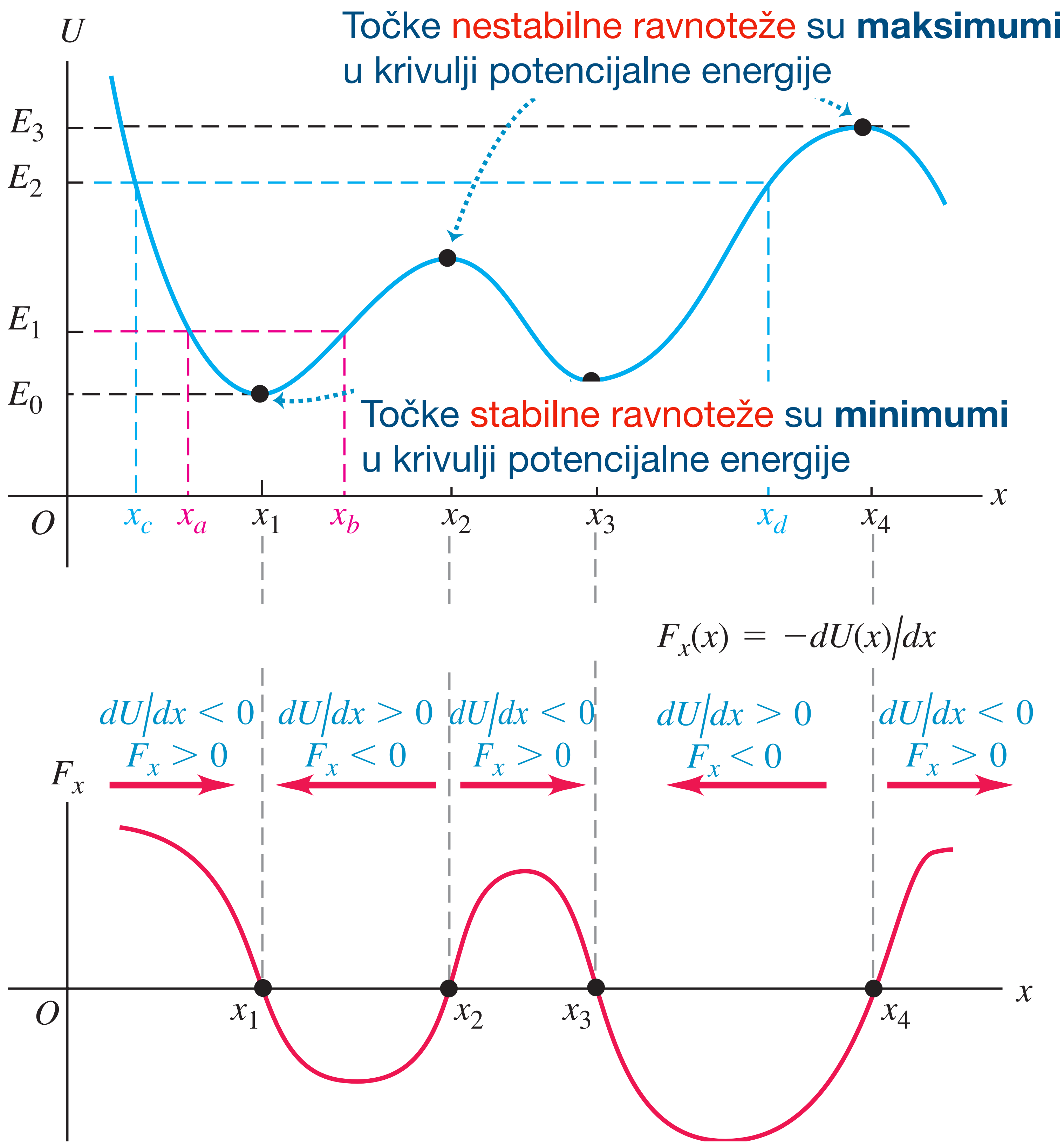
- Primjer: gravitacijska potencijalna enegija

$$U(y) = mgy \qquad F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$$

- Primjer: elastična potencijalna energija

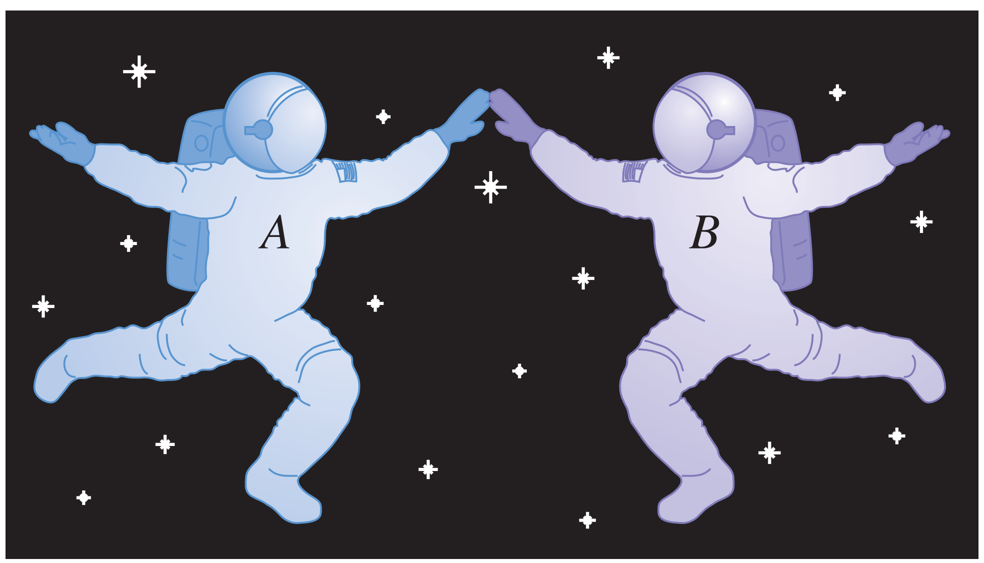
$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \qquad F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

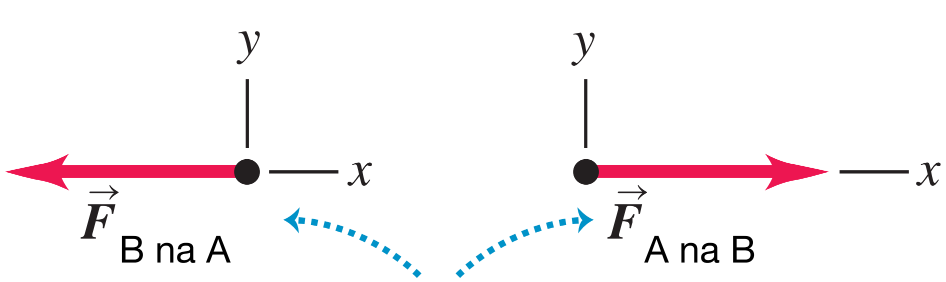
Stabilna i nestabilna ravnoteža



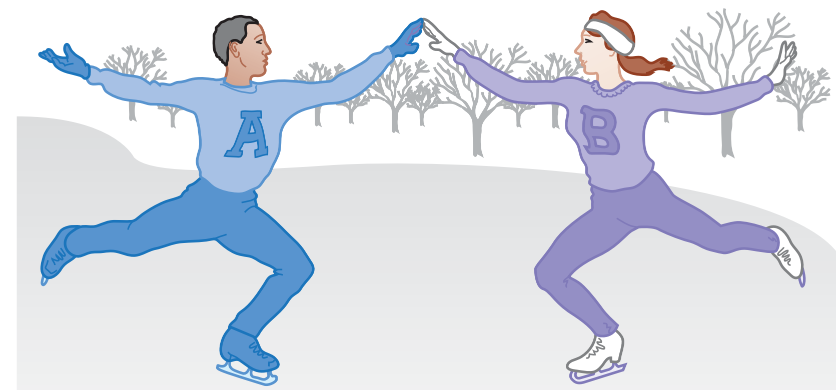
Sustav 2 čestice: zakoni gibanja i zakoni održanja

- **unutarnje sile:** sile kojima čestice u sistemu djeluju jedna na drugu
- **vanjske sile:** sile kojima vanjski objekt djeluje na neki dio sistema.
- *kada vanjske sile nisu prisutne, sistem je* ***izoliran***

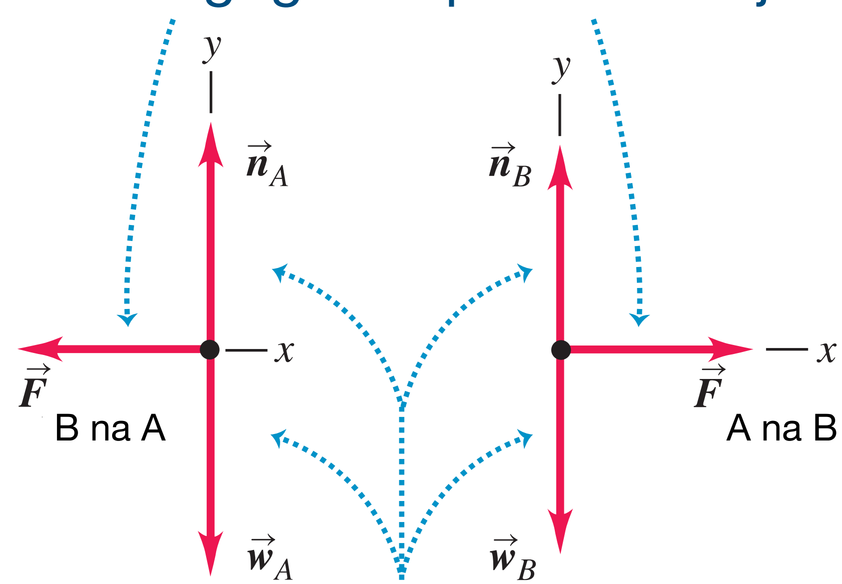




Sile kojima astronauti djeluju jedan na drugog čine par sila akcija/reakcija.



Sile kojima klizači djeluju jedan na drugog čine par sila akcija/reakcija.



Iako su sila podloge i gravitacijska sila vanjske sile, njihov vektorski zbroj je 0 tako da je ukupna količina gibanja sačuvana.

Young & Freedman University Physics

Sustav 2 čestice: zakoni gibanja i zakoni održanja

$$\vec{F}_{B\text{ on }A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \qquad \vec{F}_{A\text{ on }B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$\vec{F}_{B\text{ on }A} = -\vec{F}_{A\text{ on }B}$$ 3. Newtonov zakon

$$\vec{F}_{B\text{ on }A} + \vec{F}_{A\text{ on }B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \mathbf{0}$$

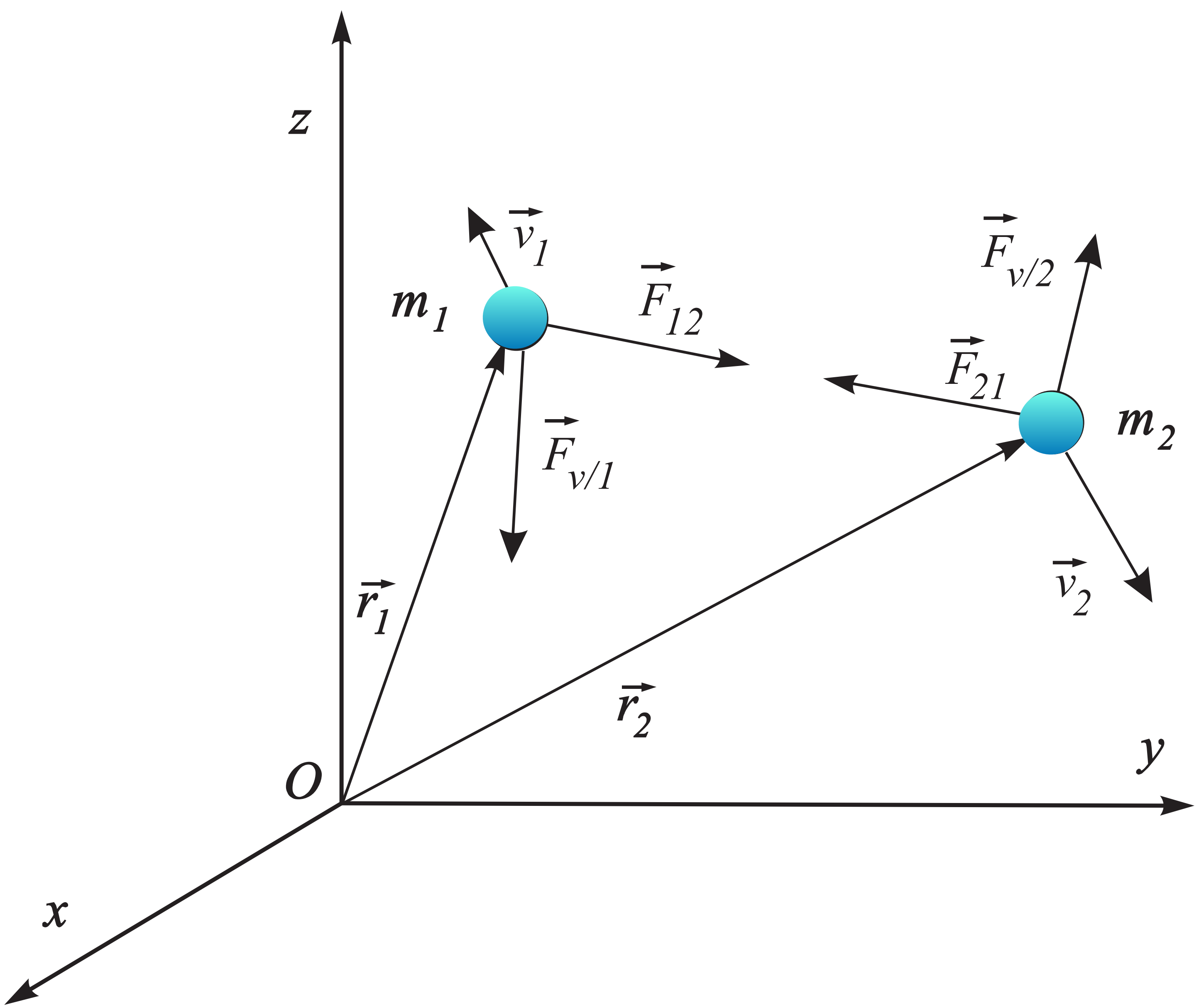
$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

$$\vec{F}_{B\text{ on }A} + \vec{F}_{A\text{ on }B} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{0}$$

ako je vektorska suma vanjskih sila na sustav 0, ukupna količina gibanja u sustavu je konstantna!

Sustav 2 čestice: što ako su prisutne vanjske sile

- Razmotrimo sustav dvije čestice m_1 i m_2 koje se u jednom trenutku nalaze na mjestima određenim vektorima $\mathbf{r}_{1,2}$ u inercijalnom sustavu. Čestice se gibaju brzinama $\mathbf{v}_{1,2}$ i na njih djeluju vanjske sile $\mathbf{F}_{v,1}$ i $\mathbf{F}_{v,2}$. Istodobno čestice međudjeluju silama $\mathbf{F}_{1,2}$ i $\mathbf{F}_{2,1}$. Pri tom oznaka $\mathbf{F}_{i,j}$ znači da čestica j djeluje na česticu i.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1 = \vec{F}_{v/1} + \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2 = \vec{F}_{v/2} + \vec{F}_{21}$$

Ove dvije jednadžbe zbrojimo i dobivamo:

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1 + m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2 = \vec{F}_{v/1} + \vec{F}_{v/2}$$

Sustav 2 čestice: što ako su prisutne vanjske sile

$$m_1 \frac{d}{dt}\vec{v}_1 + m_2 \frac{d}{dt}\vec{v}_2 = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = (m_1 + m_2)\frac{d}{dt}\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= M\frac{d}{dt}\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M} = M\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right)}_{\vec{r}_{\mathrm{CM}}}\right]$$

$$= M\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{\mathrm{CM}} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{\mathrm{CM}} = M\vec{a}_{\mathrm{CM}}.$$

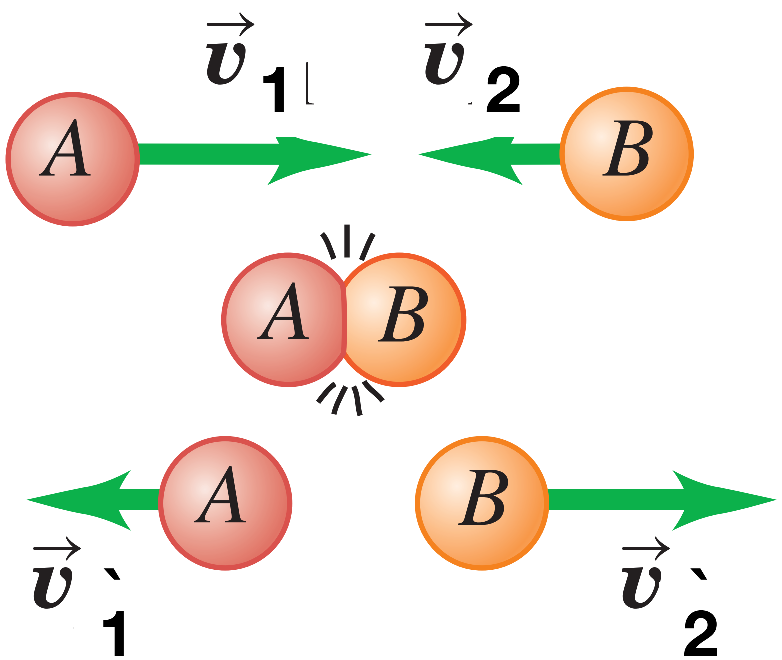
- Uveli smo ukupnu masu $M = m_1 + m_2$, **vektor položaja centra mase dvije čestice i brzinu centra mase:**

$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

→ gibanje sustava dvije čestice 'zamjenjujemo' gibanjem jedne materijalne točke čija je masa jednaka M, čiji je trenutni položaj dan vektorom r_{CM} i koja se giba pod djelovanjem sile F_v.

Sudari

- Pretpostavka: nema vanjskih sila, tako da je sistem izoliran
- Vrijedi *zakon očuvanja količine gibanja*
- *Zakon očuvanja energije svodi se na očuvanje kinetičkih energija* (jer potencijalne energije među česticama izvan područja međudjelovanja nema), uz moguć gubitak dijela energije na unutarnju energiju (toplinu Q)



Savršeno elastičan sudar:
očuvana je količina gibanja i kinetička energija
(bez transformacije kinetičke energije u toplinu)

$$\vec{p}_{\text{prije sudara}} = \vec{p}_{\text{poslije sudara}}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,'$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1\,' + m_2\vec{v}_2\,'$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(v_1\,')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2\,')^2$$

Young & Freedman University Physics

Sudari: savršeno elastičan sudar

Iz 1. jednadžbe: $m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1{}') = m_2(\vec{v}_2{}' - \vec{v}_2)$

Iz 2. jednadžbe: $m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1{}')(\vec{v}_1 + \vec{v}_1{}') = m_2(\vec{v}_2{}' - \vec{v}_2)(\vec{v}_2{}' + \vec{v}_2)$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}' + \vec{v}_2.$$

Zadnju jednadžbu pomnožimo s m_2 i u nju uvrstimo $m_2\mathbf{v_2}$ iz zakona očuvanja količine gibanja:

$$\boxed{\vec{v}_1{}' = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.}$$

Analognim postupkom:

$$\boxed{\vec{v}_2{}' = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.}$$

Sudari: savršeno elastičan sudar

- 1. primjer: čestica nalijeće na (mirni) zid

$m_2 >> m_1$ $\mathbf{v_2} = 0$

$$\vec{v}_1{}' = -\vec{v}_1 \text{ i } \vec{v}_2{}' = 0$$

čestica se odbila od zida po iznosu istom brzinom, ali suprotnog smjera!

- 2. primjer: beskonačno masivni "zid" nalijeće na mirnu česticu

$m_2 >> m_1$ $\mathbf{v_1} = 0$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 \text{ i } \vec{v}_1{}' = 2\vec{v}_2$$

masivni "zid" niti ne opaža
da je naletio na nešto, ali zato prije
mirna čestica 1 se sada giba ispred zida
relativnom brzinom $\mathbf{v_2}$, odnosno brzinom
$2\mathbf{v_2}$ u odnosu na mirnog promatrača!