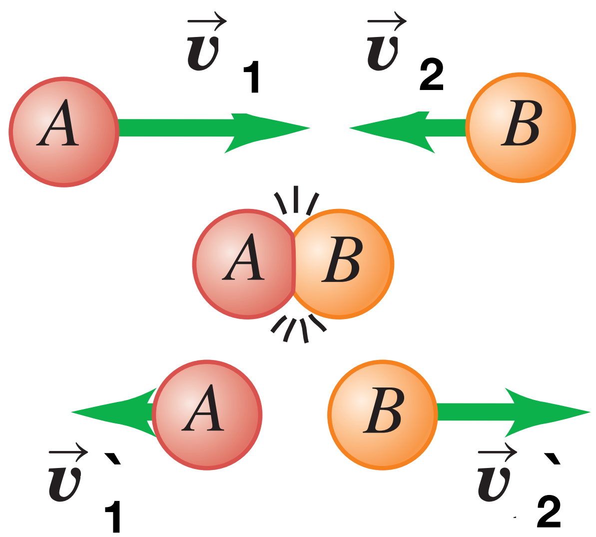
Sudari

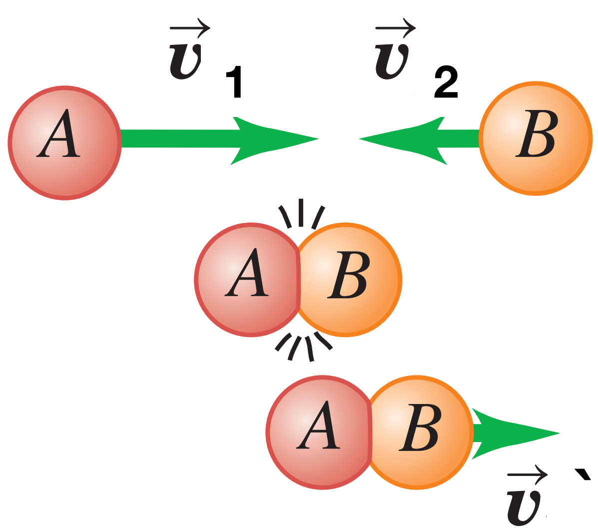
- Pretpostavka: nema vanjskih sila, tako da je sistem izoliran
- Vrijedi *zakon očuvanja količine gibanja*
- *Zakon očuvanja energije svodi se na očuvanje kinetičkih energija* (jer potencijalne energije među česticama izvan područja međudjelovanja nema), uz moguć gubitak dijela energije na unutarnju energiju (toplinu Q)



Općenito **neelastičan sudar:**
očuvana je količina gibanja, a **kinetička energija nije očuvana već je jedan njen dio pretvoren u toplinu**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2 (v_2')^2 + Q$$

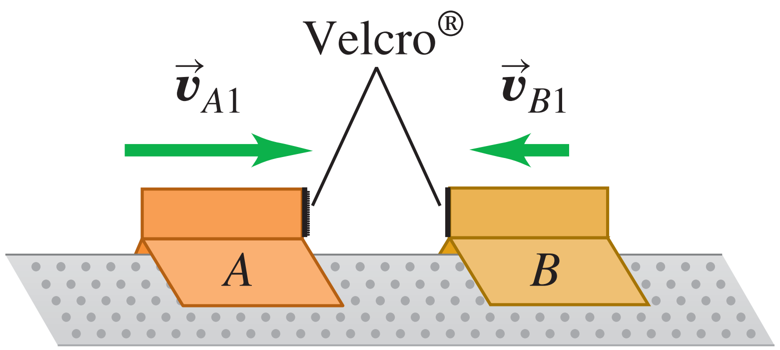


Savršen neelastičan sudar:
prilikom sudara mase se "slijepe" i nastave gibanje kao jedno tijelo mase m_1+m_2

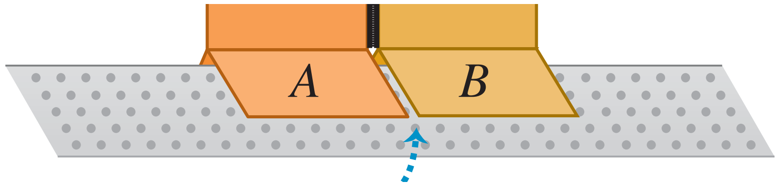
Young & Freedman University Physics

Sudari: potpuno neelastičan sudar

Prije sudara:



Potpuno neelastičan sudar:

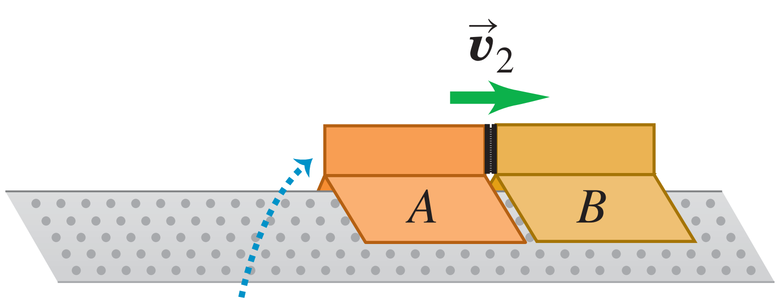


Dva tijela se gibaju zajedno.

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

Nakon sudara:



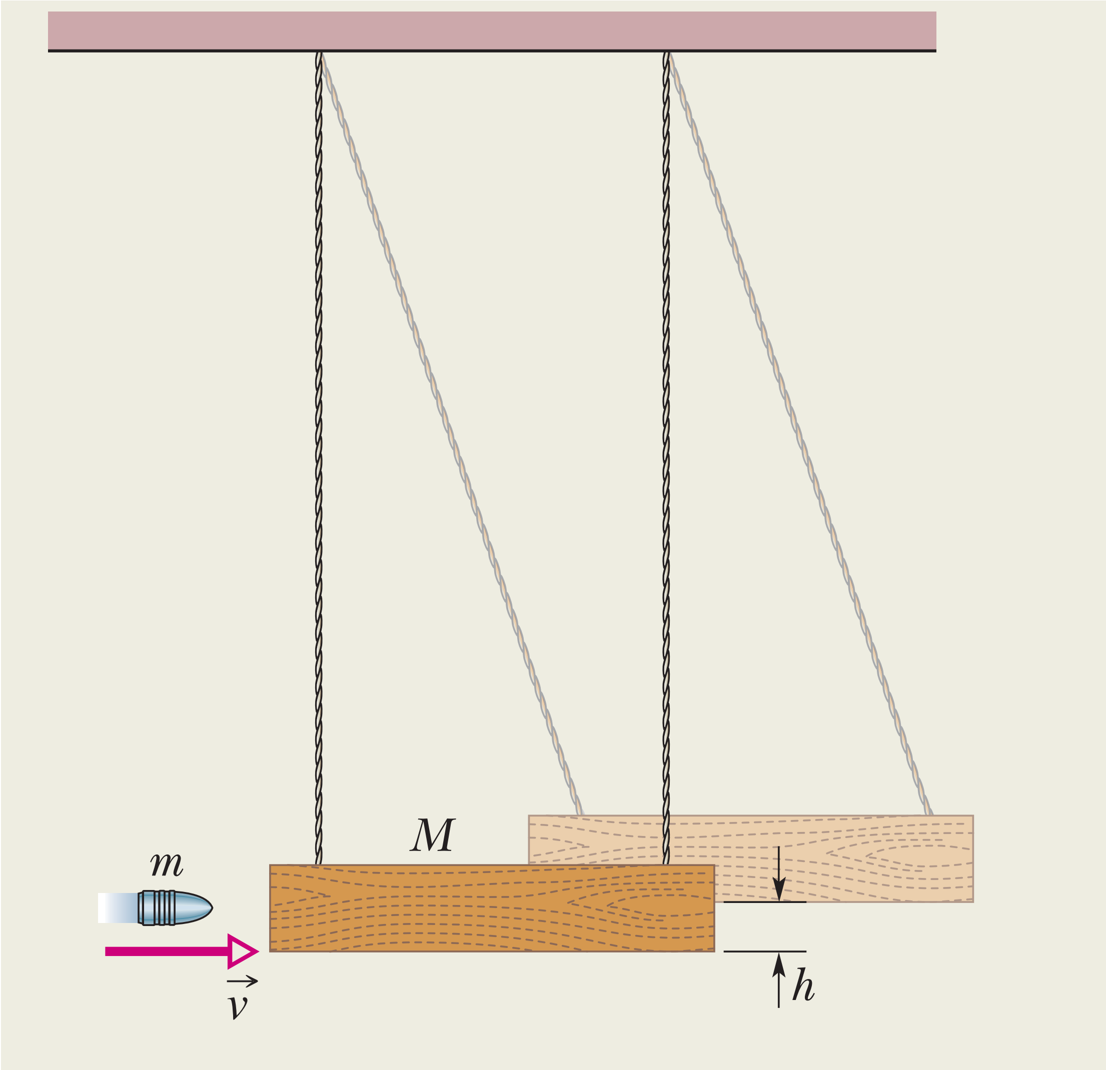
Sistem ima manju kinetičku energiju nakon sudara.

Ako pretpostavimo da tijelo B početno miruje:

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

Zadatak: balističko njihalo

- Balističko njihalo sastoji se od velikog utega od drveta mase M = 5.4 kg, koji visi na dva duga užeta. Metak mase m = 9.5 g naleti na uteg od drveta, i tamo se zaustavi. Sustav (uteg od drveta + metak) se zanjiše prema naprijed, sa centrom mase koji se podigne na veritkalnu udaljenost h = 6.3 m prije no što se njihalo zaustavi na kraju luka. Kolika je brzina metka upravo prije sudara?

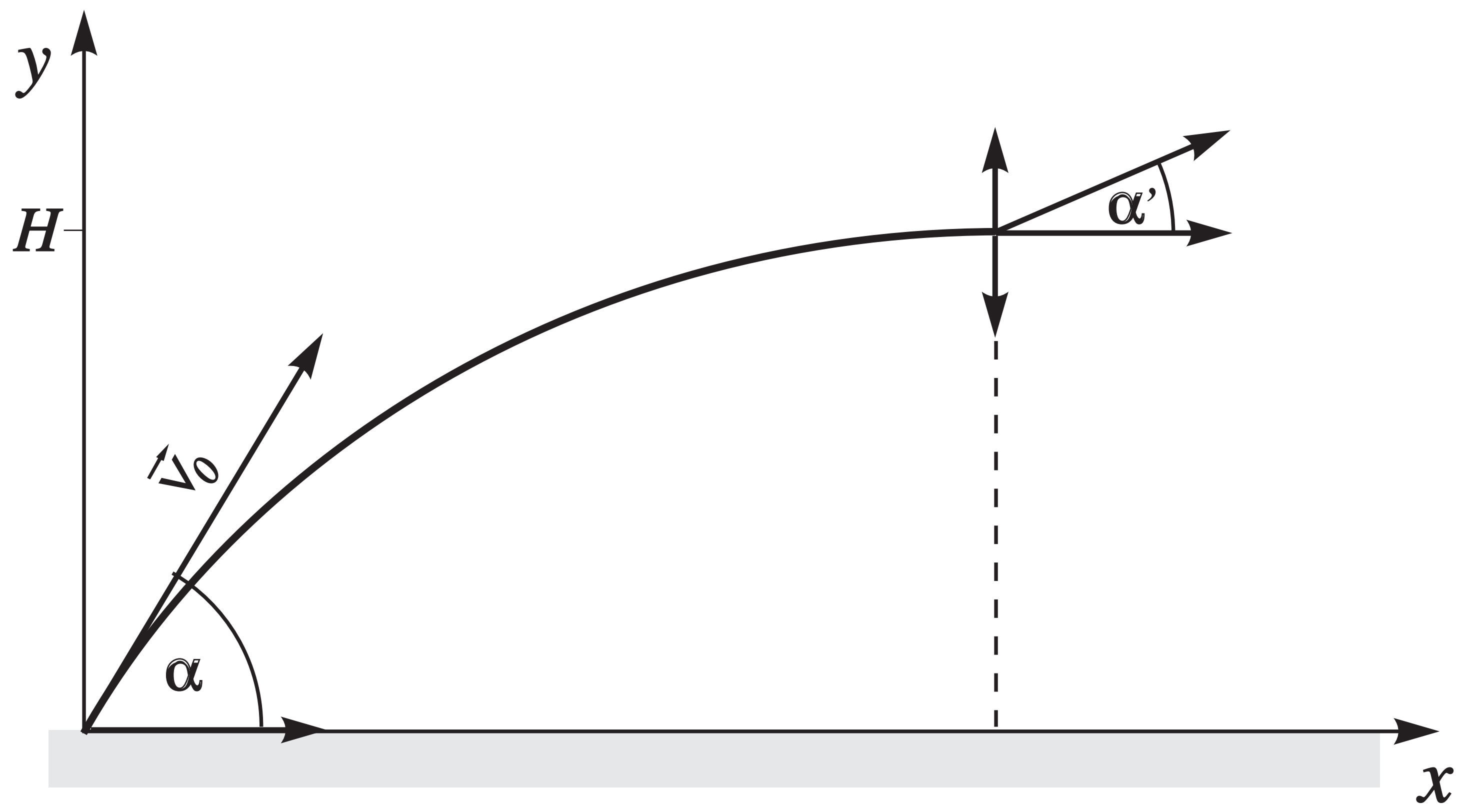


$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh.$$

$$V = \frac{m}{m + M}v.$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{m + M}{m}\sqrt{2gh} \\ &= \left(\frac{0.0095\ \text{kg} + 5.4\ \text{kg}}{0.0095\ \text{kg}}\right)\sqrt{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.063\ \text{m})} \\ &= 630\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

Primjer 3.5 *Projektil je ispaljen pod kutom od* 60^o *brzinom od* $600\,m/s$*. Kada se projektil nalazi u najvišoj točki putanje, on eksplodira i jedna njegova polovina okomito padne na tlo nakon* $36\,s$*. Na koje se maksimalnu visinu iznad tla popne drugi dio projektila?*



Titranje

Primjer jednostavnog periodičkog gibanja

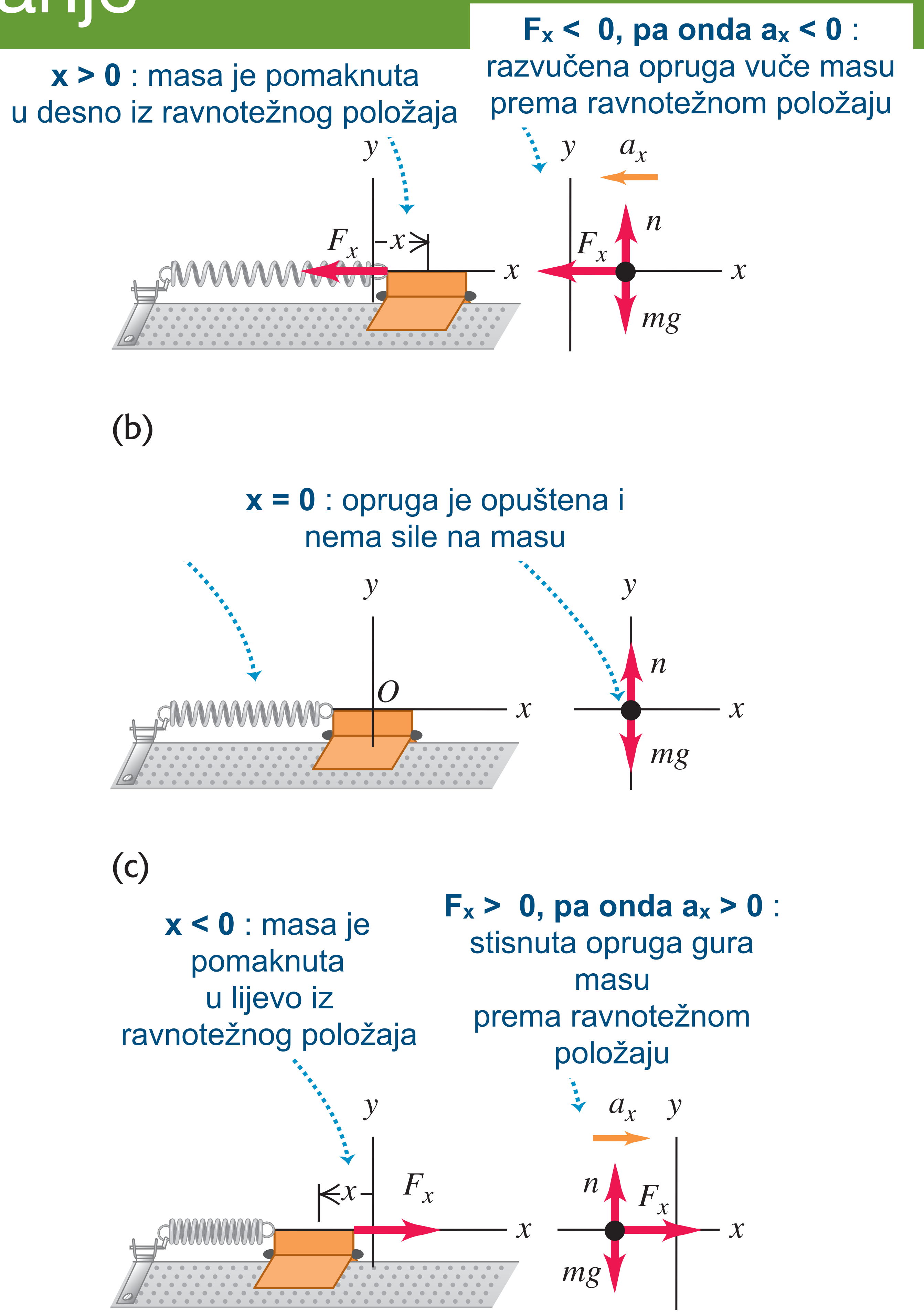
* masa m leži na horizontalnoj podlozi i može se gibati duž x-osi

* trenje je zanemarivo

* ishodište sustava je u točki 0 (ravnotežni polozaj), u kojem opruga nije niti rastegnuta niti komprimirana

* x = pomak tijela iz ravnotežnog položaja (= promjena duljine opruge)

* **oscilacija je moguća samo kada postoji sila koja tijelo vraća u ravnotežni polozaj**



Young & Freedman University Physics

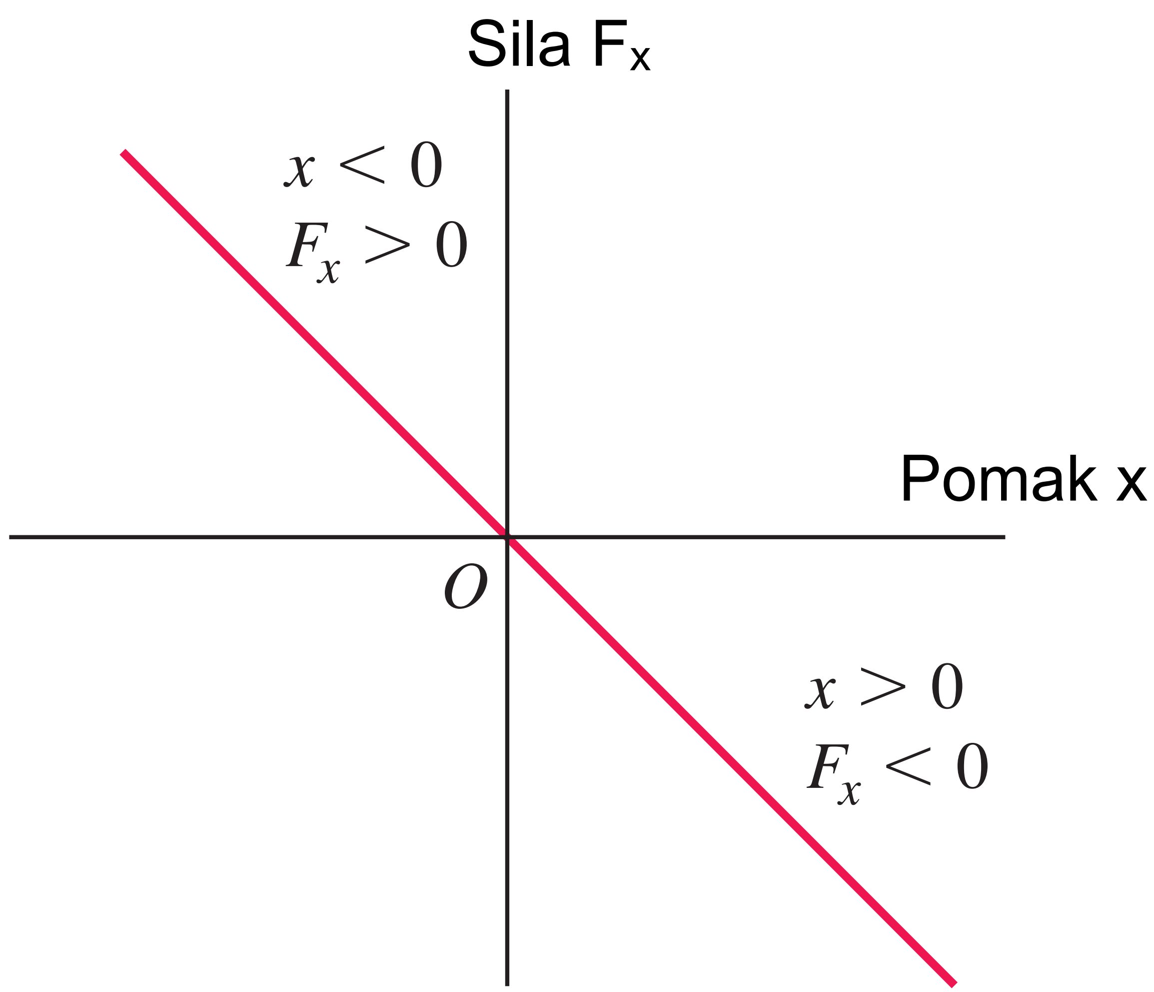
Jednostavno harmonijsko gibanje

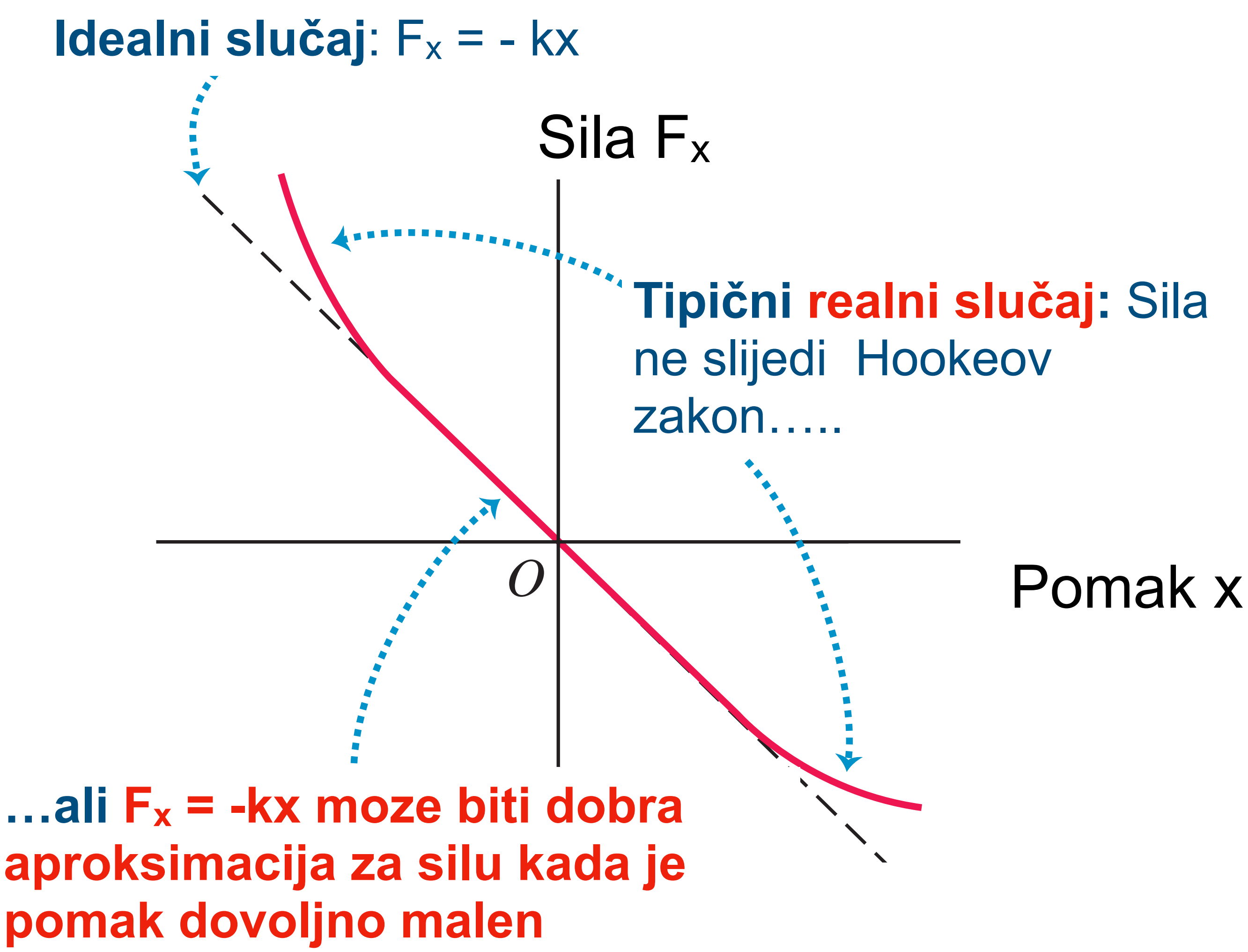
- najjednostavnije oscilacije pojavljuju se kada je sila koja vraća tijelo u ravnotežni položaj direktno proporcionalna pomaku iz ravnoteže x :

$$F_x = -kx$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

- akceleracija nije konstantna!

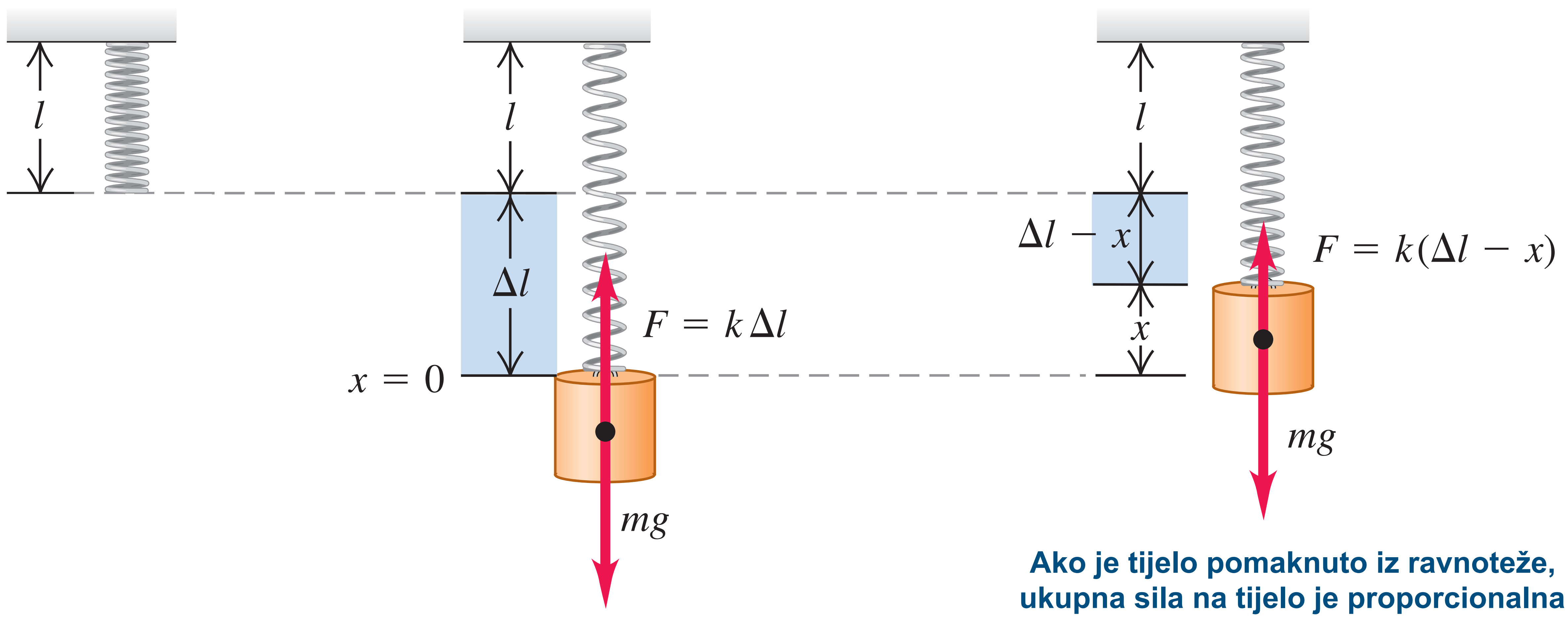




Young & Freedman University Physics

Harmonički oscilator

- vertikalni harmonički oscilator: na oprugu konstante k je obješeno tijelo mase m
- kada je tijelo u ravnoteži, opruga je rastegnuta za $\Delta\ell$:



$$k\,\Delta l = mg$$

Ako je tijelo pomaknuto iz ravnoteže, ukupna sila na tijelo je proporcionalna pomaku

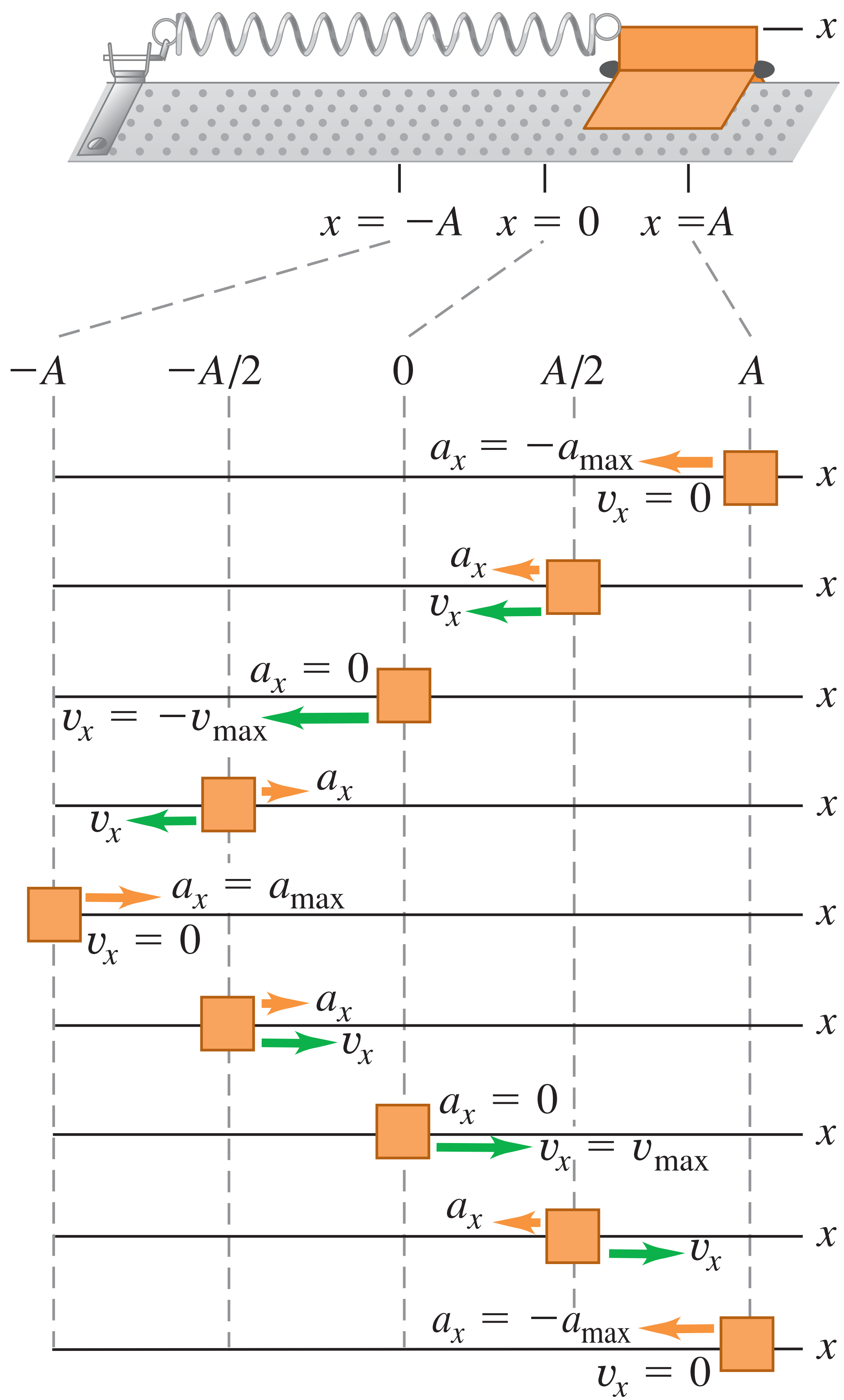
$$F_{\text{net}} = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$$

Young & Freedman University Physics

Jednostavno harmonijsko gibanje

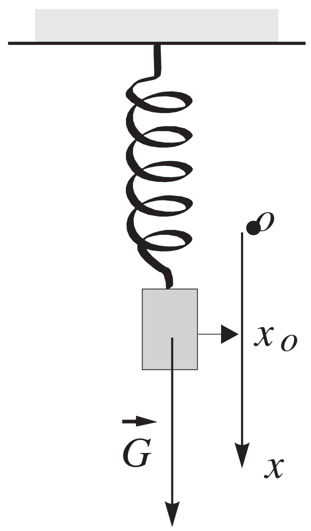
$$F_x = -kx$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$



Young & Freedman University Physics

Jednostavno harmonijsko gibanje: jednadžba gibanja



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 = mg\hat{\imath} - kx_0\hat{\imath}.$$ → u položaju ravnoteže (x_0)

Stavimo ishodište koordinatne osi x u položaj x_0; onda je sila u svakom trenutku jednaka F = -kx i jednadžba gibanja je

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$$

→ $$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

diferencijalna jednadžba 2. reda koja za potpuno rješenje zahtjeva dva fizikalna uvjeta koji npr. opisuju gdje se tijelo nalazilo u početnom trenutku i kolika mu je bila brzina u početnom trenutku.

Početni uvjeti: tijelo je u trenutku t = 0 bilo za A udaljeno od ravnotežnog položaja (x_0), a brzina mu je bila jednaka nuli:

$$\boxed{x(0) = A, \qquad \dot{x}(0) = 0}$$

Jednostavno harmonijsko gibanje: jednadžba gibanja

Diferencijalnu jednadžbu mozemo riješiti tako da PRETPOSTAVIMO rješenje oblika:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t + \phi_1)$$

C (amplitudu) i ϕ_1 (početnu fazu) određujemo iz početnih uvjeta:

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= C\cos(\omega_0 \cdot 0 + \phi_1) = A \\ \dot{x}(0) &= -C\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \phi_1) = 0 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi_1 = 0 \text{ i } C = A}$$

Možemo napisati općenito rješenje oblika: $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \phi)$; $\quad x(0) = X_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$

Ako uvrstimo općenite početne uvjete u izraz za x(0) i $\dot{x}(0)$, te iskoristimo činjenicu da je $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$, možemo izvesti:

$$C = \sqrt{X_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}, \qquad \mathrm{tg}\,\phi = -\frac{v_0}{\omega_0 X_0}.$$

Gibanje je *periodičko*, a to znači da se nakon vremena T koje zovemo *period* ili *titrajno vrijeme* gibanje ponavlja:

$$\omega_0 T = 2\pi \qquad \text{ili} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{x(t+T) = x(t)}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

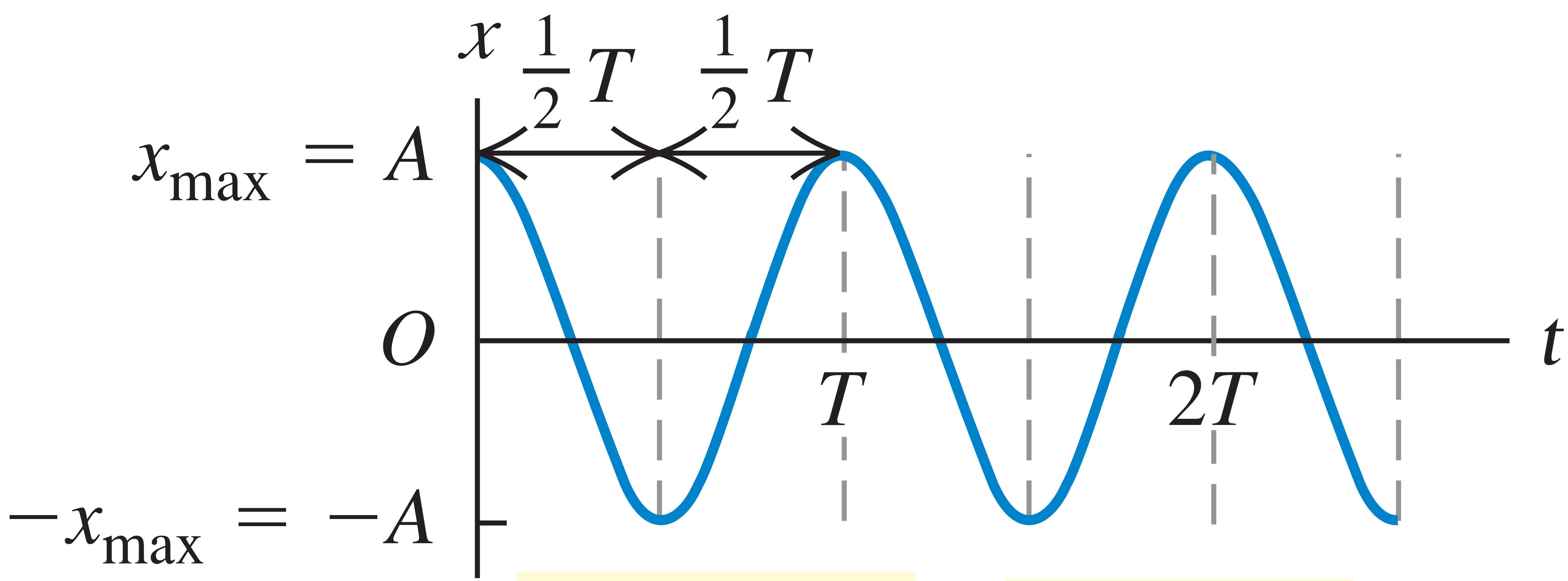
Titranje

- AMPLITUDA gibanja A: maksimalna veličina otklona iz ravnoteže (tj. maksimalna vrijednost | x | . Ukupan raspon gibanja je 2A.

- ELONGACIJA: pomak točke od ravnotežnog položaja

- kad materijalna točka prijeđe trajektoriju u jednom, a zatim i u suprotnom smjeru, učinjen je jedan titraj

- PERIOD T: vrijeme nakon kojeg se gibanje ponavlja



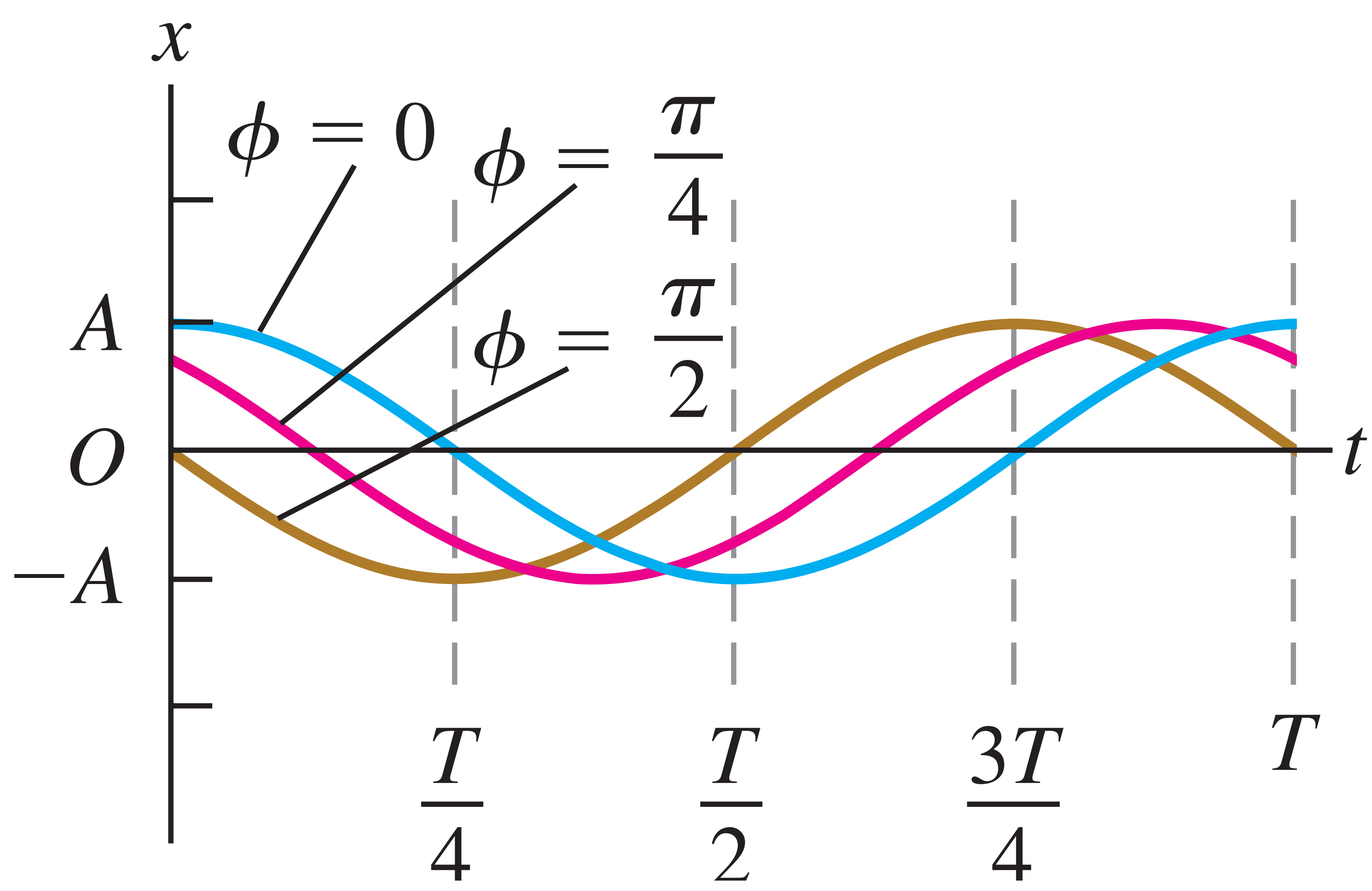
$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Young & Freedman University Physics

Harmonički oscilator

* tri krivulje pokazuju jednostavno harmonijsko titranje istog perioda T i amplitude A, ali različitih faznih kuteva ϕ:



Young & Freedman University Physics

Harmonički oscilator

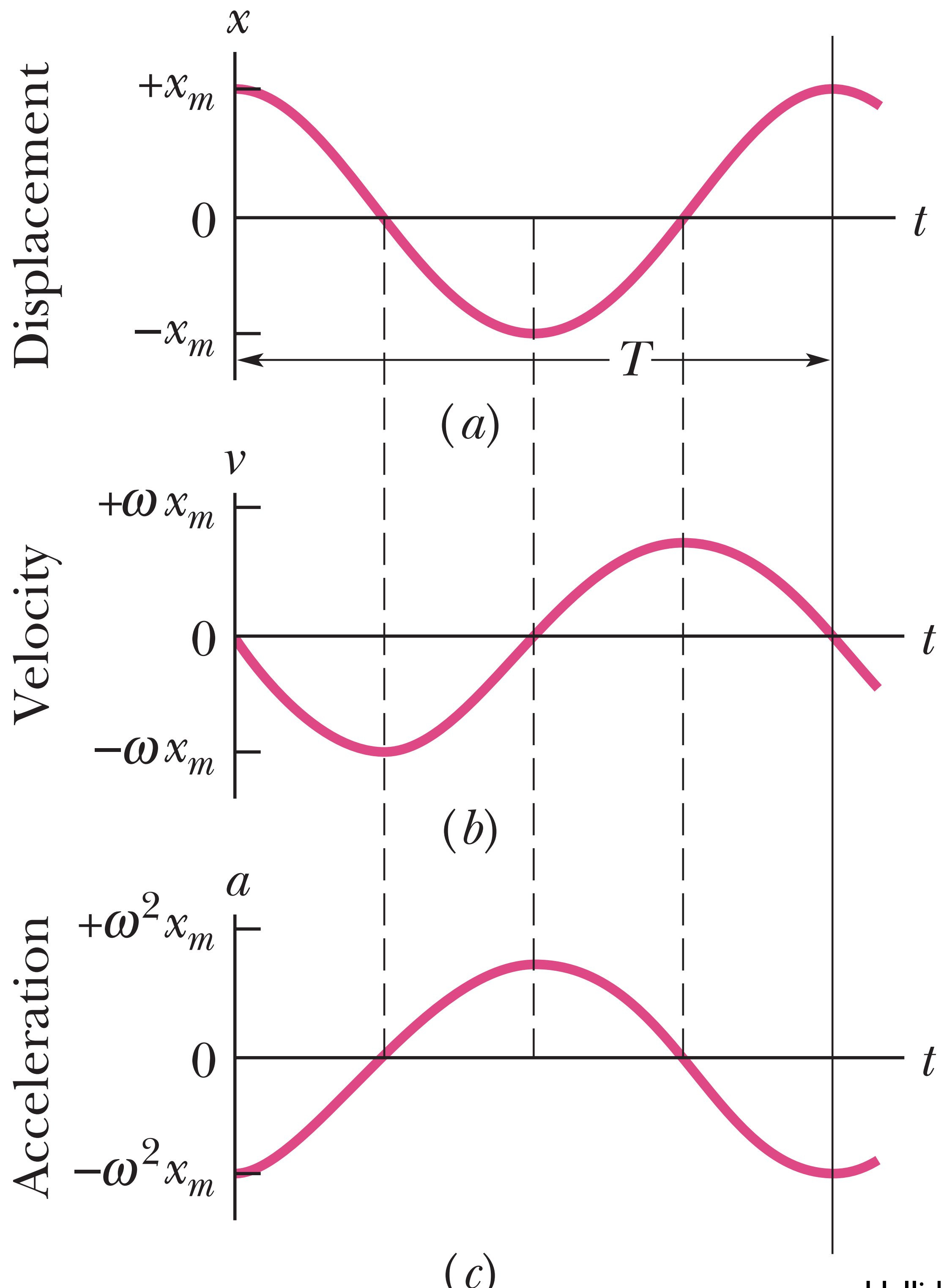
* titranje za $\phi = 0$:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

A = x_m

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$



Halliday, Resnick, Walker: Fundamentals of Physics

Test

2. Dvije identične idealne opruge, svaka sa konstantom k, obješene su u seriju kao na slici. Kada je masa m obješena na ovaj sistem dvije opruge, uzrokuje pomak x iz opuštenog položaja opruga. Koji od slijedećih izraza odgovara kutnoj frekvenciji mase kada masa oscilira vertikalno?

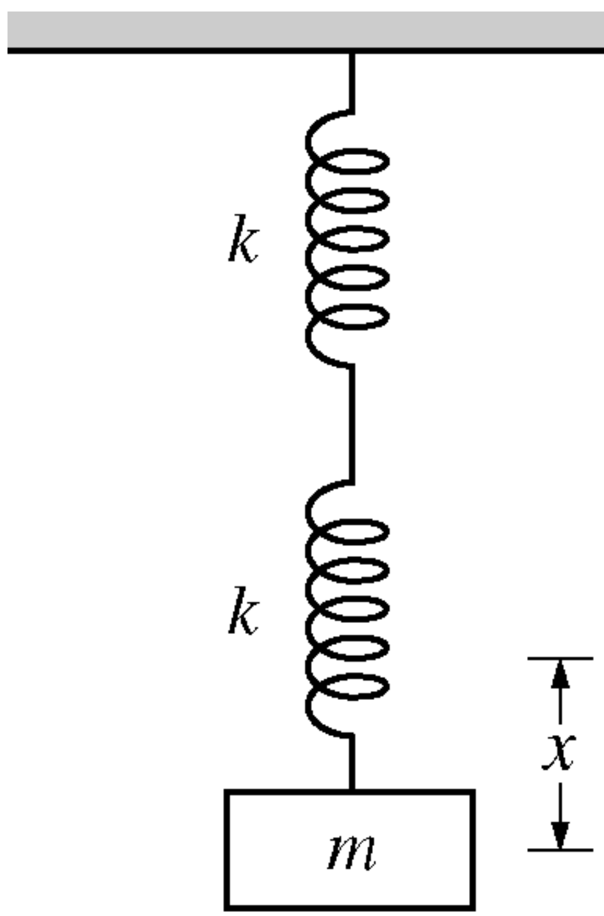
A. $\sqrt{\frac{2k}{m}}$

B. $\sqrt{\frac{k}{m}}$

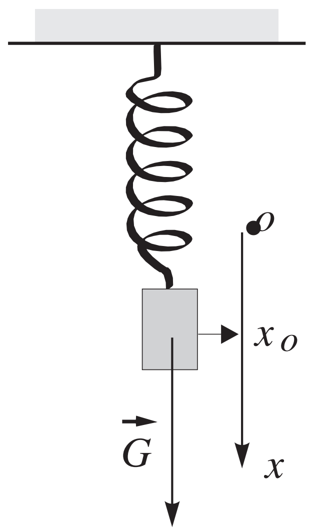
C. $\sqrt{\frac{k}{2m}}$

D. $2\pi\sqrt{\frac{k}{x}}$

E. $2\pi\sqrt{\frac{2k}{x}}$



Jednostavno harmonijsko gibanje: jednadžba gibanja



$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 = mg\hat{\imath} - kx_0\hat{\imath}.$$ → u položaju ravnoteže (x_0)

Stavimo ishodište koordinatne osi x u položaj x_0; onda je sila u svakom trenutku jednaka F = -kx i jednadžba gibanja je

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$$

→ $$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

diferencijalna jednadžba 2. reda koja za potpuno rješenje zahtjeva dva fizikalna uvjeta koji npr. opisuju gdje se tijelo nalazilo u početnom trenutku i kolika mu je bila brzina u početnom trenutku.

Početni uvjeti: tijelo je u trenutku t = 0 bilo za A udaljeno od ravnotežnog položaja (x_0), a brzina mu je bila jednaka nuli:

$$\boxed{x(0) = A, \qquad \dot{x}(0) = 0}$$

Energija titranja

- u mehaničkom sustavu u kojem vladaju konzervativne sile, ukupna energija jednaka je zbroju kinetičke i potencijalne energije. Kako se tijelo giba zbog djelovanja elastične sile opruge, onda je rad koji izvrši tijelo na opruzi između nekog početnog (p) i konačnog (k) stanja jednak:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_p^k (-F)\, dx = -\int_p^k m\frac{dv}{dt}\, dx = -m\int_p^k \frac{dv}{dt} v\, dt \\
&= -m\int_{v_p}^{v_k} v\, dv = -\frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_p}^{v_k} = -\frac{1}{2}m(v_k^2 - v_p^2) \\
&= E_{k/p} - E_{k/k}
\end{aligned}
$$

$$
E_k(t) = \frac{1}{2}m\big(v(t)\big)^2 = \frac{1}{2}m(A\omega_0)^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi).
$$

Energija titranja

* potencijalna energija definira se kao rad koji valja izvršiti da bi se tijelo vratilo iz bilo kojeg položaja x_1 u ravnotežni polozaj:

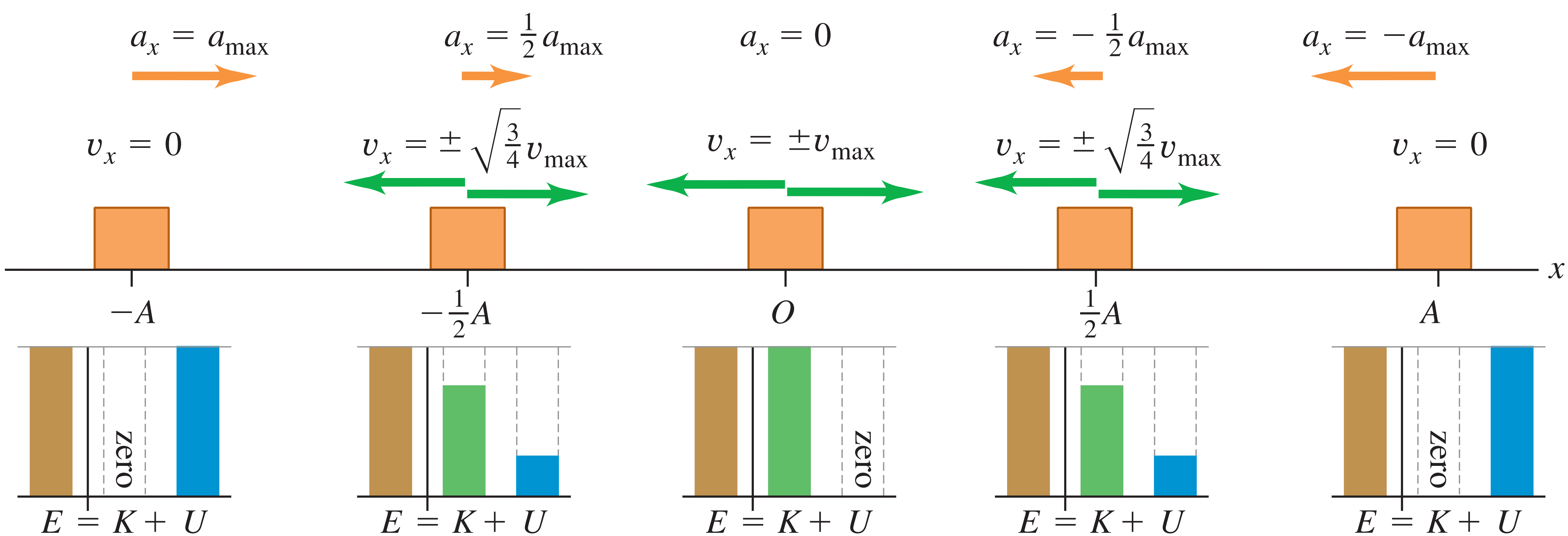
$$E_p = \int_{x_1}^{0} (-kx)\, dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{0} = \frac{1}{2}kx_1^2,$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi).$$

* ukupna energija:

$$\begin{aligned} E = E_k(t) + E_p(t) &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)] = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

Energija titranja



E je jednako potencijalnoj energiji.

E je djelomično potencijalna, djelomično kinetička energija.

E je jednako kinetičkoj energiji.

E je djelomično potencijalna, djelomicno kinetička energija.

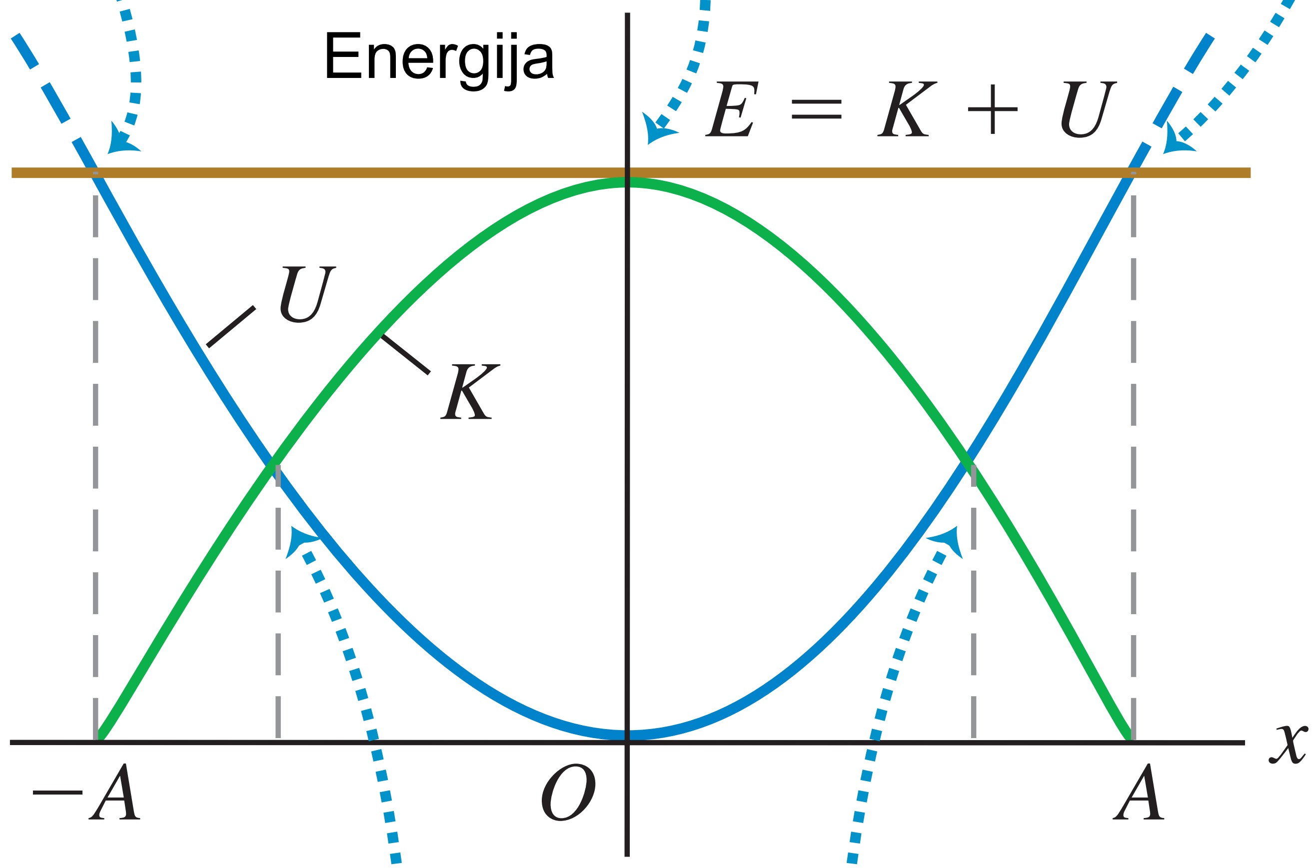
E je jednako potencijalnoj energiji.

Young & Freedman University Physics

Energija titranja

Kada je x = ± A, sva energija je potencijalna; kinetička energija je nula

Kada je x = 0, sva energija je kinetička; potencijalna energija je nula



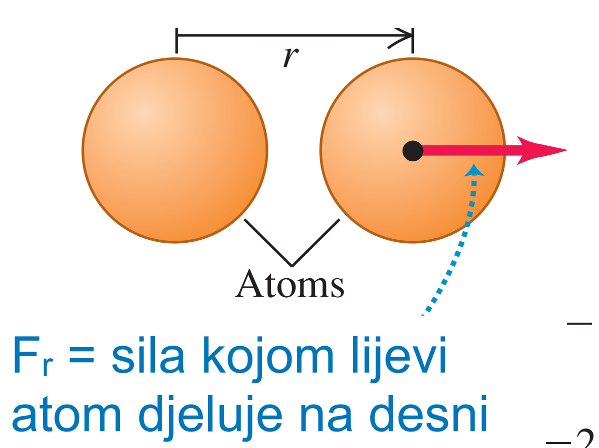
U ovim točkama pola energije je kinetičko, pola potencijalno.

Young & Freedman University Physics

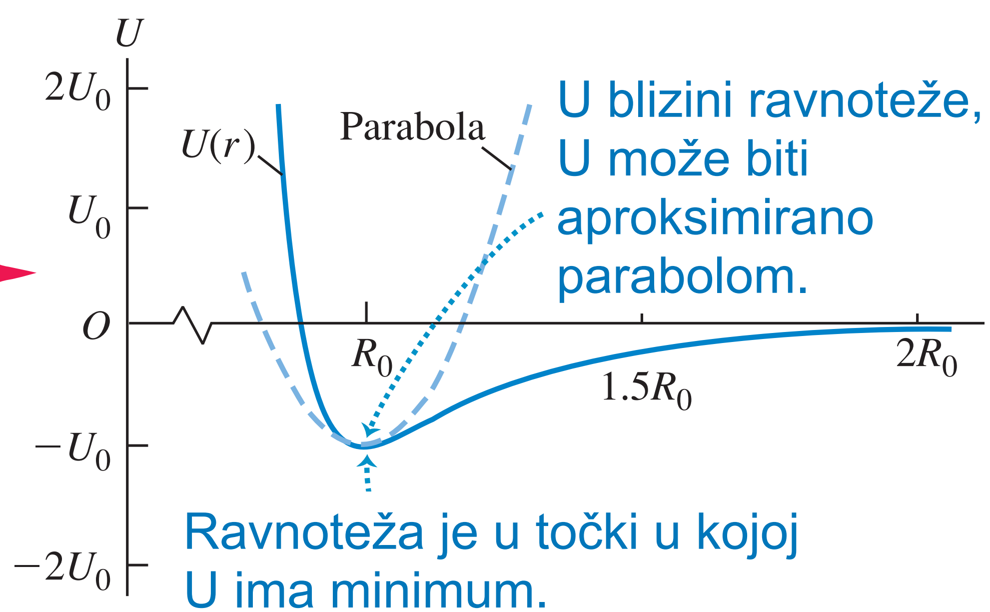
Vibracije molekula: titranje malim amplitudama

- kada se 2 atoma nalaze na udaljenosti od nekoliko atomskih dijametara, djeluju jedan na drugoga privlačnim silama
- ako su na manjim udaljenostima, sila među atomima je odbojna
- između ovih granica, postoji ravnotežna udaljenost na kojoj 2 atoma formiraju molekulu
- ako se atomi malo pomaknu iz ravnoteže, početi će oscilirati

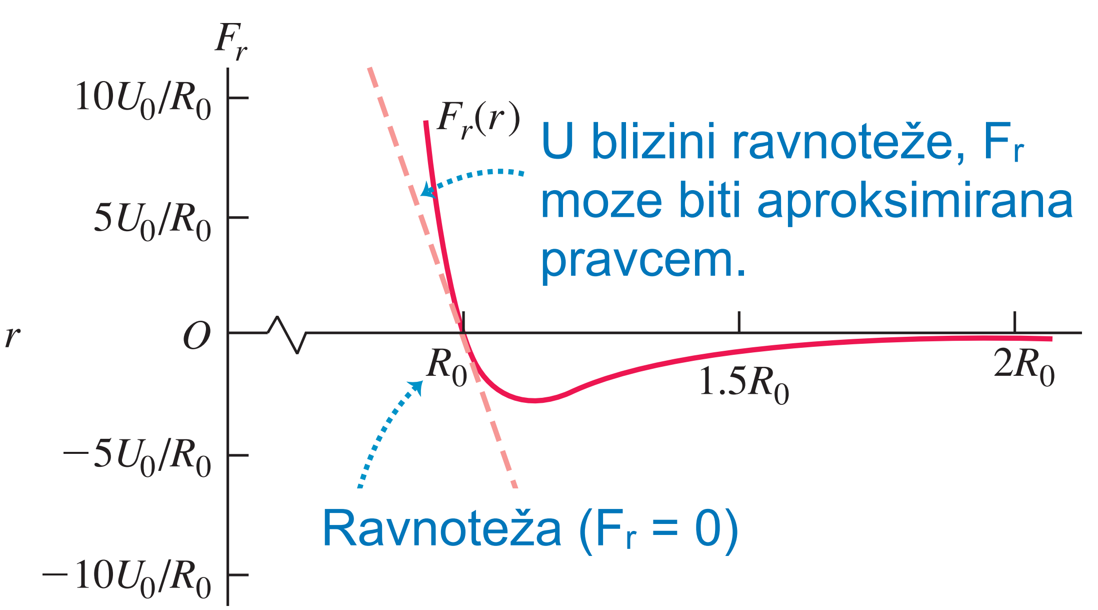
Dvoatomski sistem



Potencijalna energija sistema kao funkcija r:



Sila kao funkcija r:

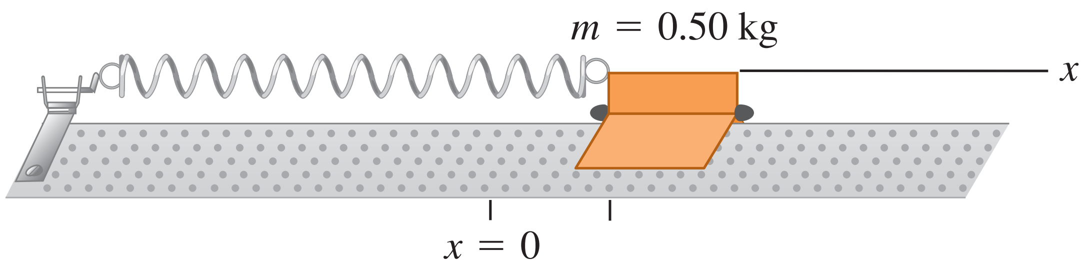


Zadatak

- Tijelo je pričvršćeno za oprugu kao na slici. Ako je početni pomak $x_o = +0.015$m i početna brzina $v_o = 0.4$ m/s, odredi amplitudu i fazu rezultirajućeg gibanja. Konstanta opruge je 200 N/m.

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_{0x}{}^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0.015\ \text{m})^2 + \frac{(0.40\ \text{m/s})^2}{(20\ \text{rad/s})^2}} = 0.025\ \text{m}$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\frac{0.40\ \text{m/s}}{(20\ \text{rad/s})(0.015\ \text{m})}\right) = -53° = -0.93\ \text{rad}$$



$$x = (0.025\ \text{m})\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$
$$v_x = -(0.50\ \text{m/s})\sin[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$
$$a_x = -(10\ \text{m/s}^2)\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]$$

Zadatak

- Cijev u obliku slova U napunjena je tekućinom mase m. Unutarnji polumjer cijevi je r. Kolika je frekvencija ω slobodnih titraja tekućine oko ravnotežnog položaja? Pretpostavite da je gustoća tekućine dana s ρ i da se zanemaruje efekt viskoznosti i napetosti površine.

Razumijevanje

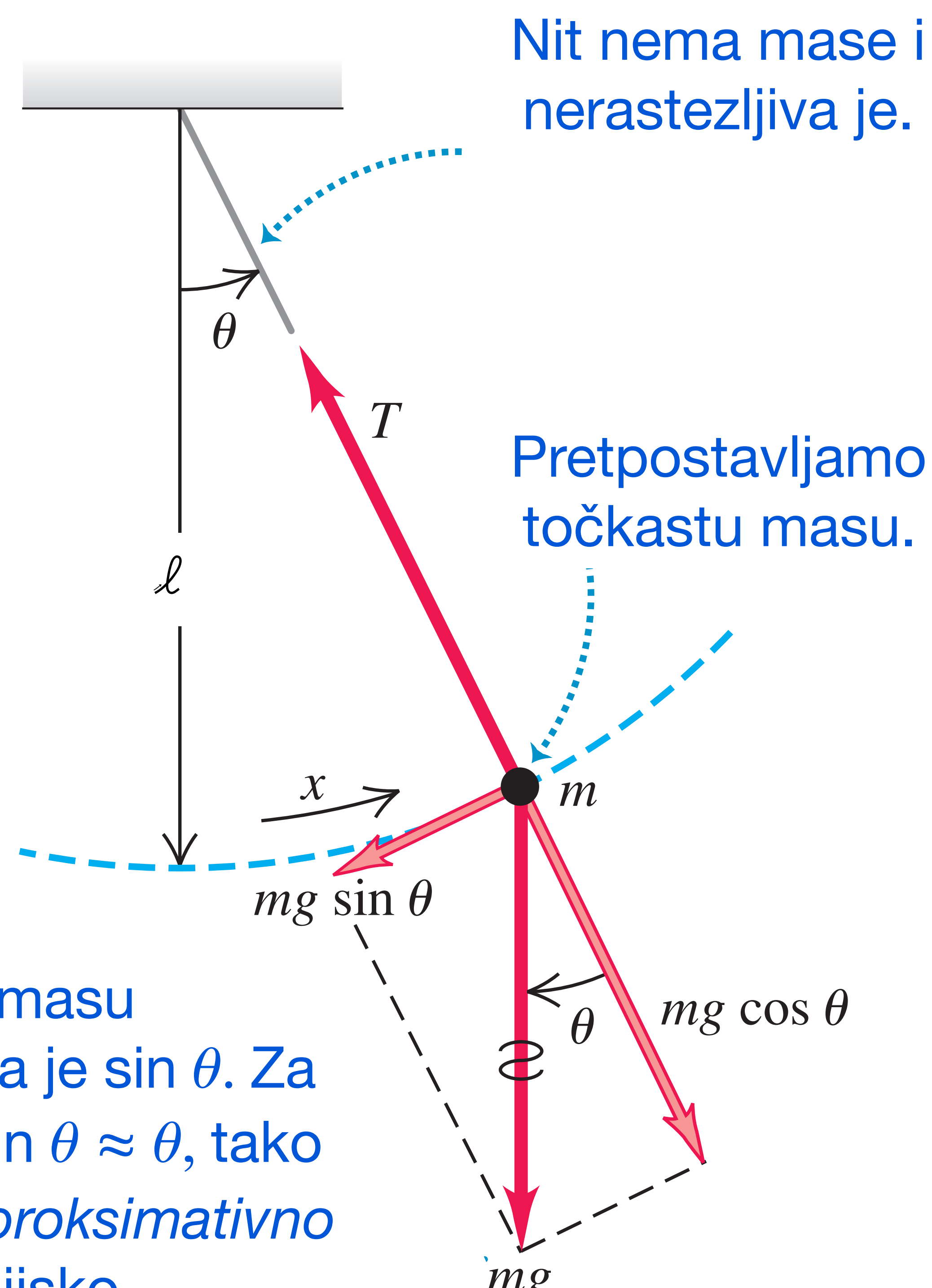
1. Opruga 1 ima konstantu k_1, a opruga 2 ima konstantu k_2, pri čemu je $k_1 > k_2$. Ako je ista vanjska sila primjenjena na obje opruge, koja od slijedećih izjava vrijedi za produljenja (Δx_1 i Δx_2) i za potencijalne energije (U_1 i U_2) ove dvije opruge:

A. $\Delta x_1 < \Delta x_2$, $U_1 < U_2$
B. $\Delta x_1 < \Delta x_2$, $U_1 > U_2$
C. $\Delta x_1 = \Delta x_2$, $U_1 < U_2$
D. $\Delta x_1 = \Delta x_2$, $U_1 = U_2$
E. $\Delta x_1 > \Delta x_2$, $U_1 = U_2$

Matematičko njihalo

Idealni fizikalni sustav

- nerastezljiva nit duljine ℓ bez mase
- na drugom kraju je obješena materijalna točka mase m



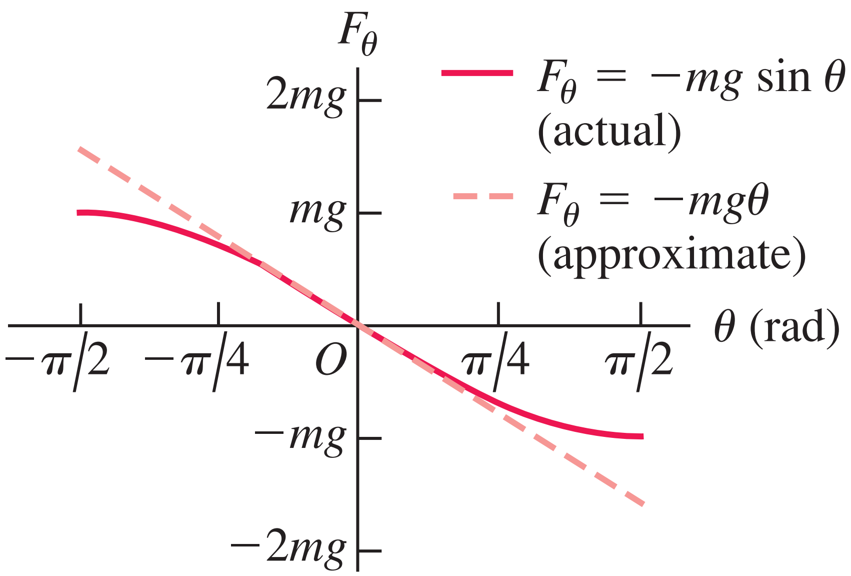
Sila na masu proporcionalna je sin θ. Za male kuteve, sin $\theta \approx \theta$, tako da je gibanje *aproksimativno* harmonijsko.

Young & Freedman University Physics

Matematičko njihalo

* sila koja vraca njihalo u ravnotezu:

$$F_\theta = -mg\sin\theta$$



* koristimo aproksimaciju malih kuteva: sin $\theta \approx \theta$ (θ u radijanima!)

$$F_\theta = -mg\theta = -mg\frac{x}{L}$$

$$k = mg/L$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Razumijevanje

3. Dva jednostavna njihala A i B sastoje se od identičnih masa koje vise na nitima duljine L_A i L_B. Dva njihala osciliraju u jednakim gravitacijskim poljima. Ako je period njihala B dvostruko veći od perioda njihala A, što od slijedećeg je istinito za duljinu dva njihala?

A. $L_B = L_A / 4$
B. $L_B = L_A / 2$
C. $L_B = L_A$
D. $L_B = 2 L_A$
E. $L_B = 4 L_A$

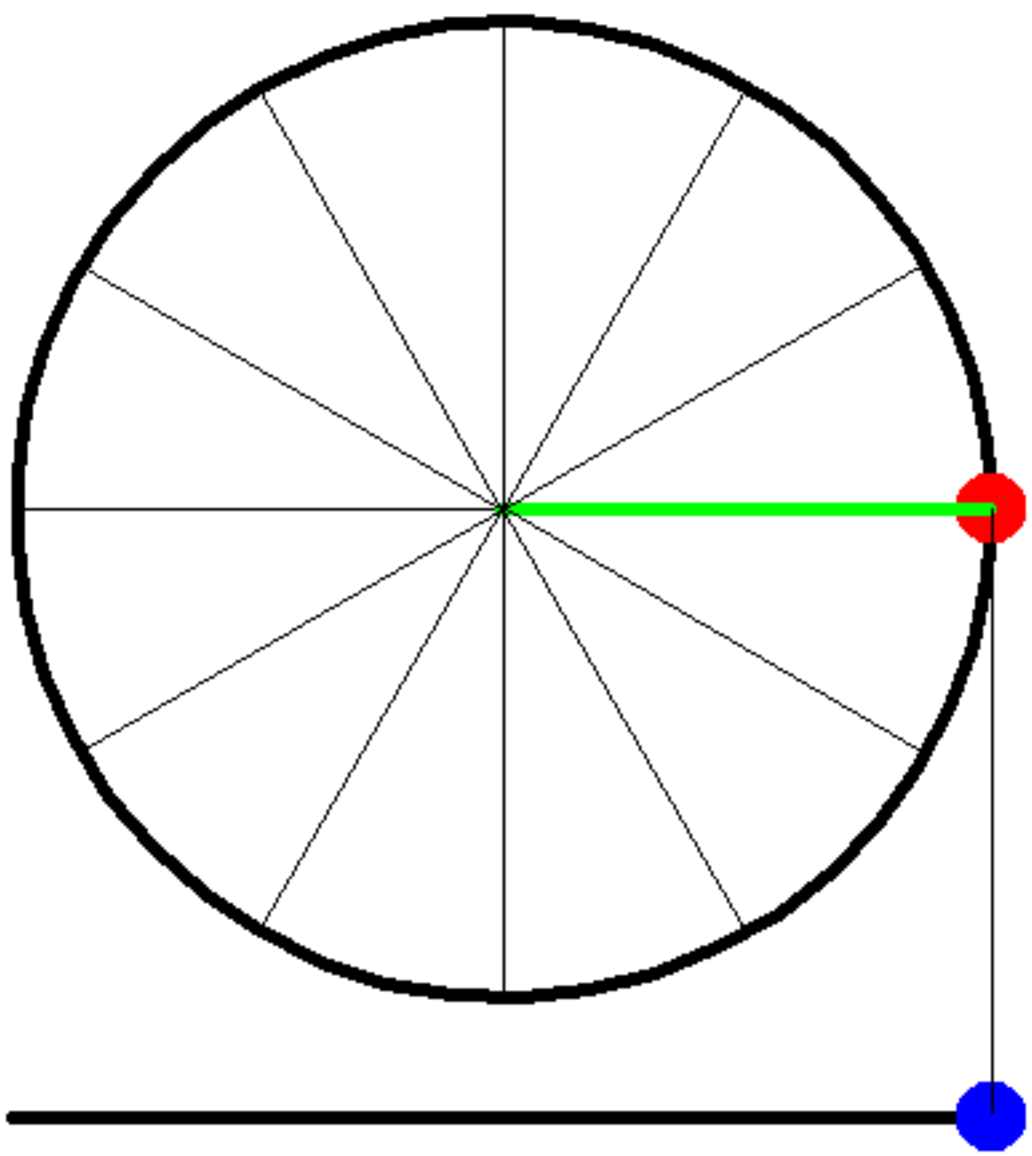
Razumijevanje

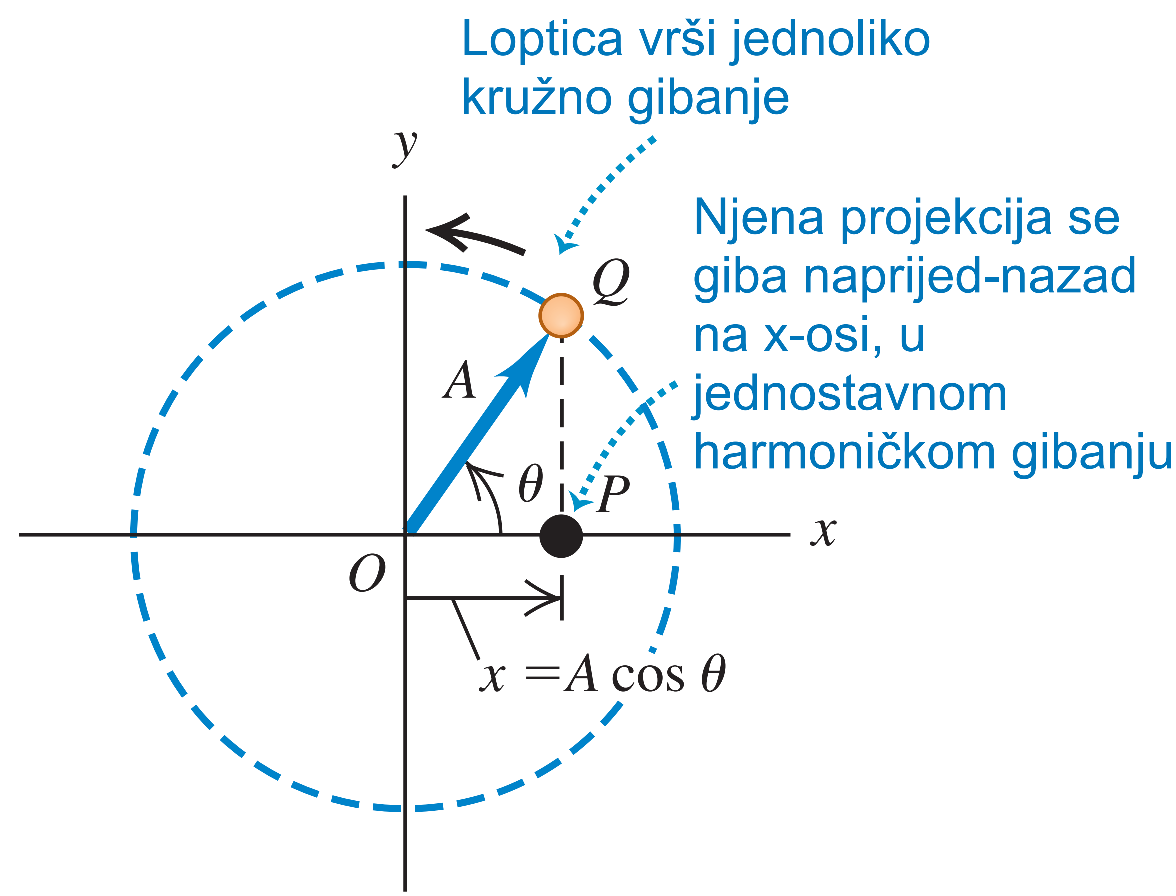
1.Kada se gibanje nekog objekta moze opisati jednostavnim harmonijskim titranjem, njegovo gibanje kroz ravnotežni polozaj opisano je sa:

A. amplitudom 0, maksimalnom akceleracijom
B. akceleracijom 0, maksimalnim iznosom brzine
C. najvećim otklonom
D. akceleracijom 0, maksimalnom amplitudom
E. brzinom 0

Kružno gibanje i jednadžba oscilatora

* jednostavno harmoničko titranje je projekcija uniformnog kružnog gibanja na dijametar

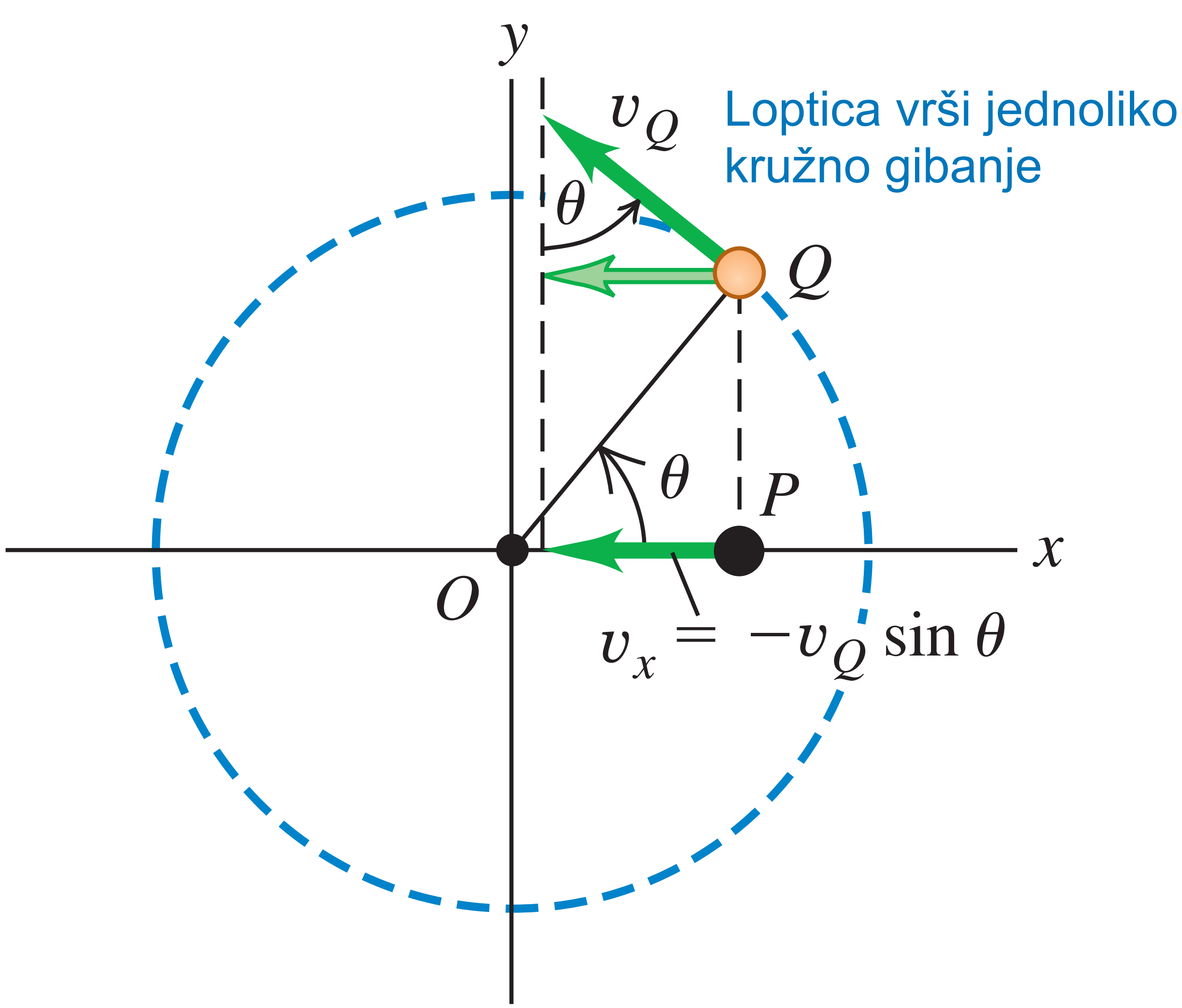


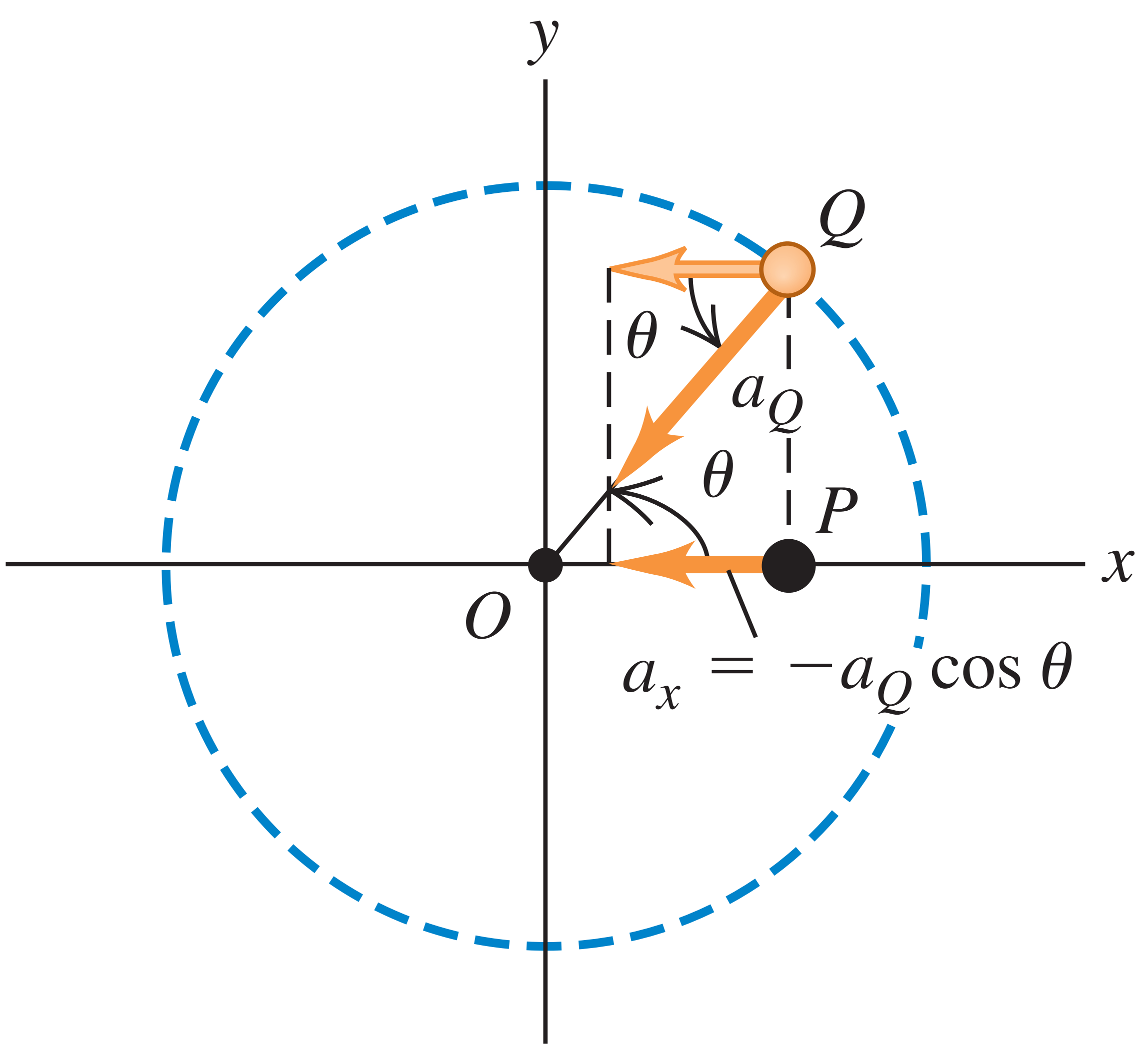


Young & Freedman University Physics

Kružno gibanje i jednadžba oscilatora

❖ jednostavno harmoničko titranje je projekcija uniformnog kružnog gibanja na dijametar

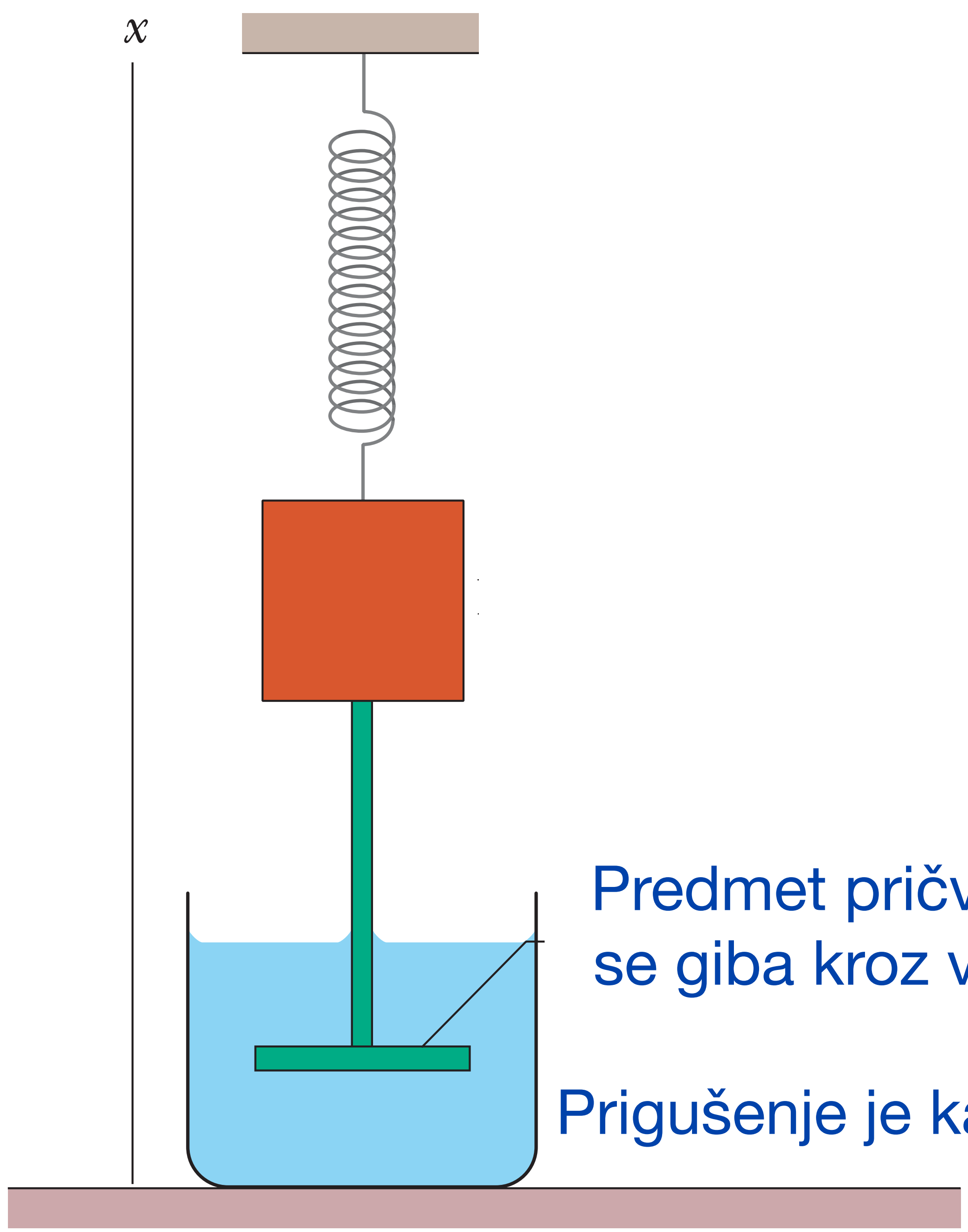




Young & Freedman University Physics

Prigušeno titranje

- u realističnoj situaciji prisutne su nezanemarive sile koje pružaju otpor gibanju
- kad sile otpora nisu prejake, amplituda titranja se u vremenu smanjuje i takvo gibanje zovemo **prigušenim titranjem**



Predmet pričvršćen na masu; pri titranju se giba kroz viskoznu tekućinu u posudi

Prigušenje je karakterizirano konstantom b

Prigušeno titranje

• Pretpostavimo da djelovanje sile otpora sredstva (npr. viskoznosti) ovisi linearno o brzini:

$$F_O = -b\dot{x}$$

(b je pozitivna konstanta prigušenja)

• Jednadžba gibanja je sada: $m\ddot{x} = F_E + F_O = -kx - b\dot{x}$

Početni uvjeti: $x(0) = A_0,\ \dot{x}(0) = 0$

$b/m = 2\delta \qquad \omega_0^2 = k/m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Uvrstimo probno rješenje: $x(t) = X_0\, e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow \quad \alpha^2 + 2\delta\,\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Prigušeno titranje

- Razmotrit ćemo tri moguća slučaja:

(1) $\delta^2 < \omega_0^2$ malo (slabo) prigušenje

(2) $\delta^2 > \omega_0^2$ aperiodičko prigušenje

(3) $\delta^2 = \omega_0^2$ kritično prigušenje

- MALO (SLABO) PRIGUŠENJE

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \equiv -\delta \pm i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = X_1 \cdot e^{(-\delta + i\omega)t} \qquad x_2(t) = X_2 \cdot e^{(-\delta - i\omega)t}$$

Najopćenitije rješenje je zbroj dvaju gornjih rješenja, i možemo ga pisati na slijedeći način:

$$x(t) = X_1 \cdot e^{(-\delta + i\omega)t} + X_2 \cdot e^{(-\delta - i\omega)t}$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi).}$$

Prigušeno titranje

- MALO (SLABO) PRIGUŠENJE

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

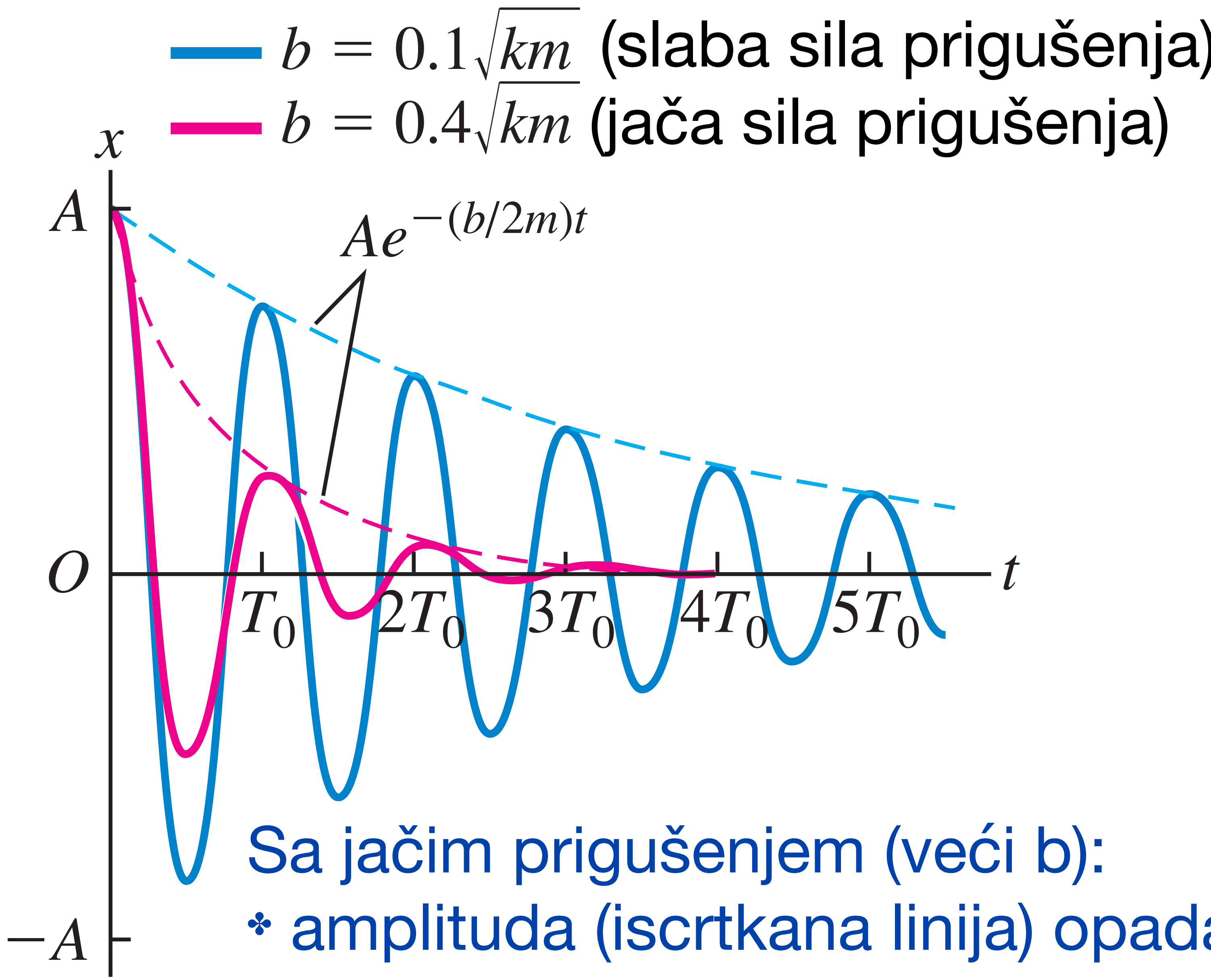
Početni uvjeti određuju A i ϕ:

$$\begin{aligned} x(0) =& A_0 = A\cos\phi \\ \dot{x}(0) =& 0 = -A\delta\cos\phi - A\omega\sin\phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\phi = -\frac{\delta}{\omega} \quad \text{i} \quad A = A_0\sqrt{1+\delta^2/\omega^2} = A_0\frac{\omega_0}{\omega}$$

Prigušeno titranje

- **Slabo prigušenje:** $\delta^2 < \omega_o^2$



Sa jačim prigušenjem (veći b):

- amplituda (iscrtkana linija) opada brže
- period T se povećava (To = period bez prigušenja)

Young & Freedman University Physics