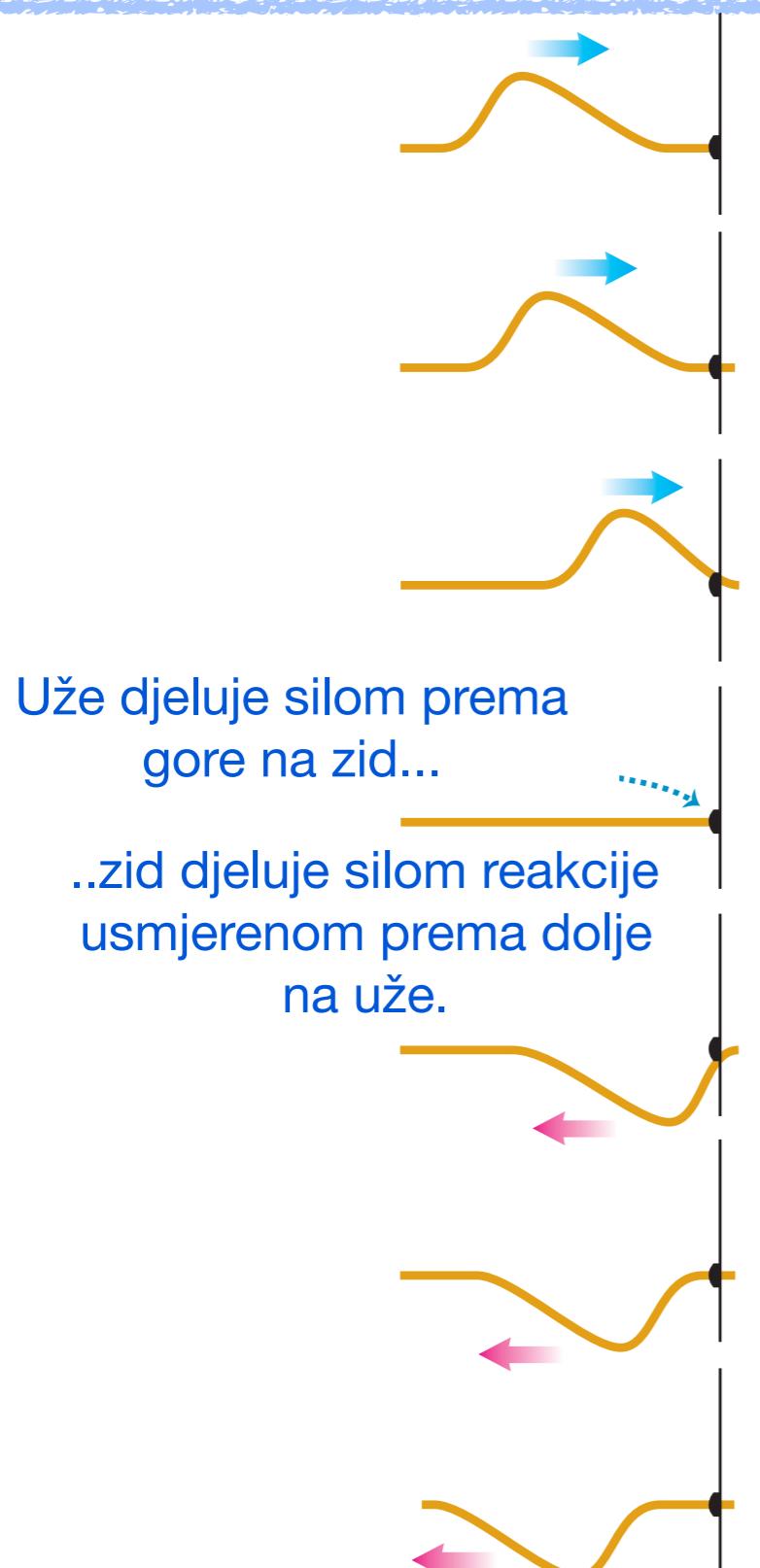


Refleksija (odbijanje) i transmisija (prijenos) valova

* val se reflektira na čvrstom kraju

<https://www.youtube.com/watch?v=X1OGiWPq5j8>



Uže djeluje silom prema gore na zid...

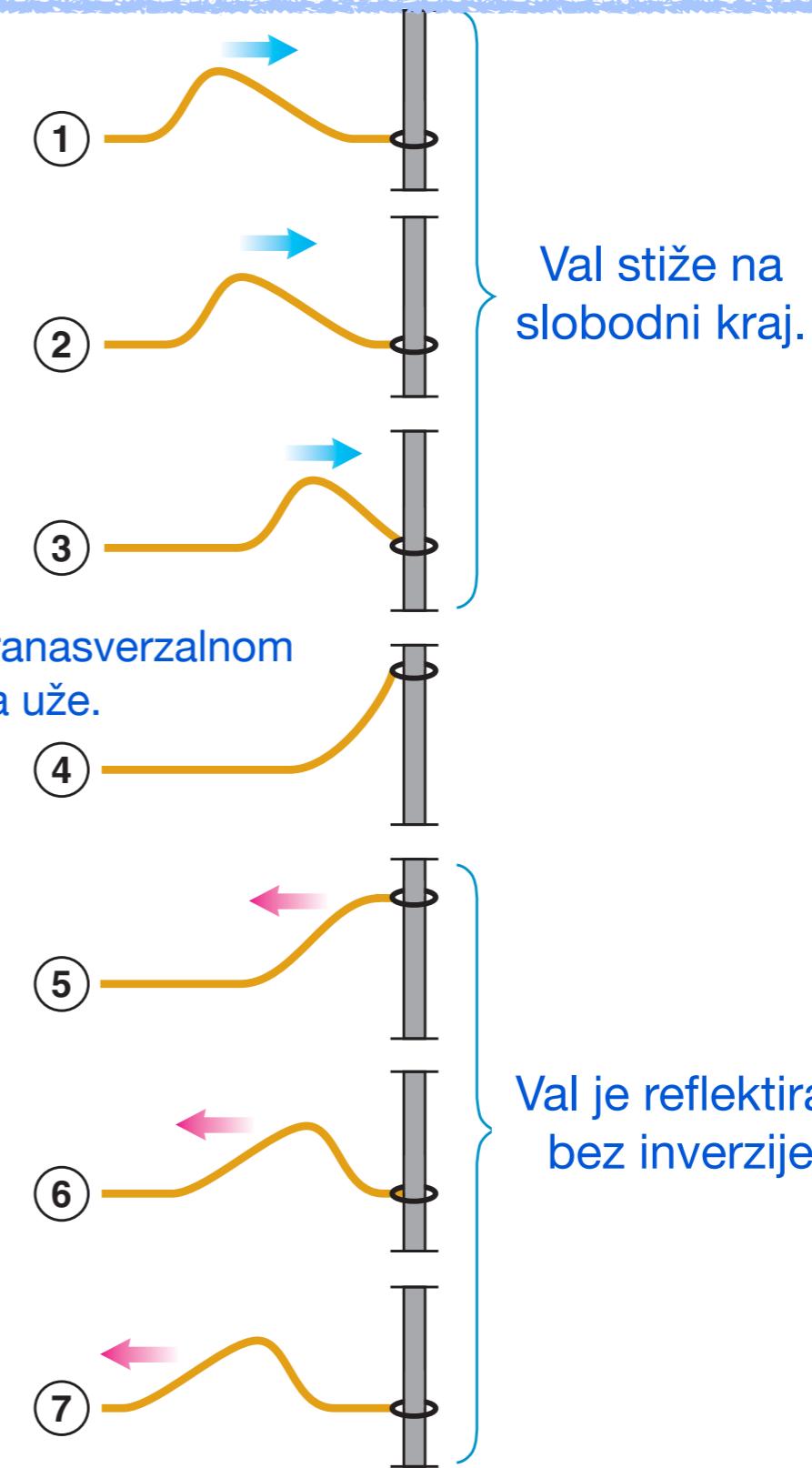
..zid djeluje silom reakcije usmjerenom prema dolje na uže.

Val stiže na učvršćeni kraj.

Šipka ne djeluje transverzalnom silom na uže.

Val je invertiran pri refleksiji.

* val se reflektira na slobodnom kraju



Refleksija (odbijanje) i transmisija (prijenos) valova

Za opis **refleksije na čvrstom kraju**, možemo zamisliti da u suprotnom smjeru od gibanja vala nailazi drugi val, koji se po principu superpozicije zbraja s upadnim valom.

Dolazeći val: $y_{\rightarrow}(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$

Reflektirani val: $y_{\leftarrow}(t, x) = -A \cos(\omega t + kx) = A \cos(\omega t + kx + \pi)$

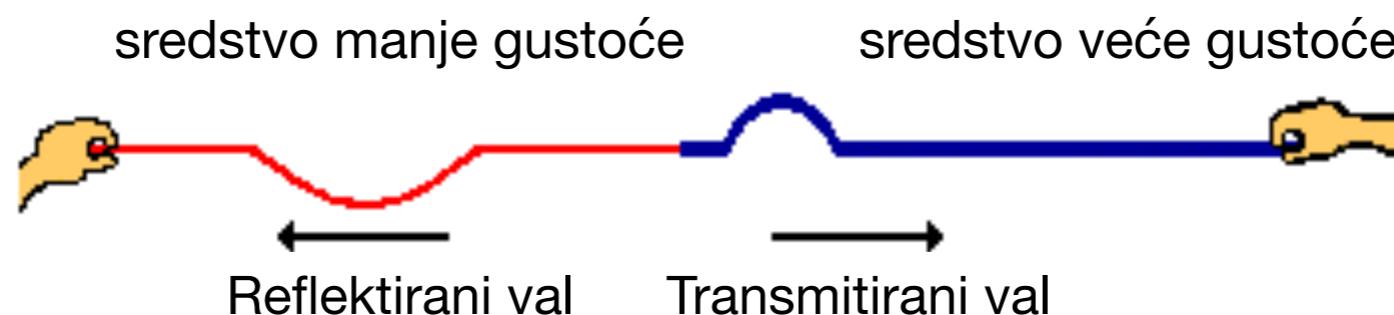
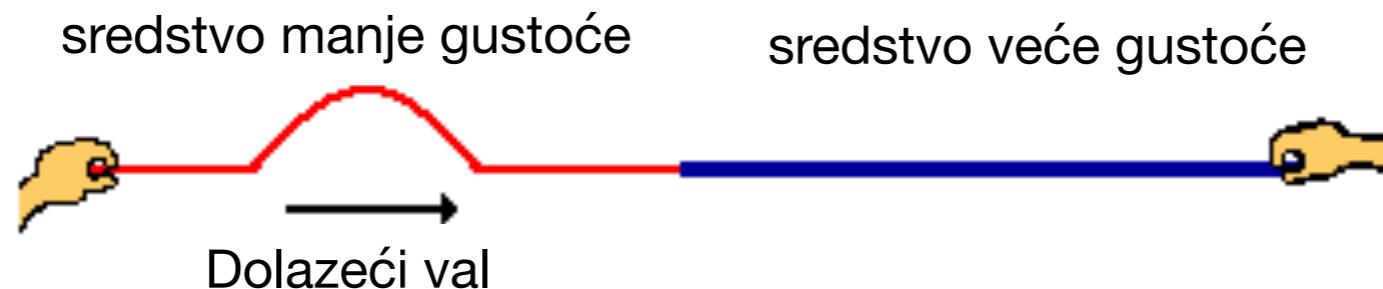
Za slučaj **refleksije na slobodnom kraju**, reflektirani val nije invertiran:

$$y_{\leftarrow}(t, x) = A \cos(\omega t + kx)$$

Refleksija (odbijanje) i transmisija (prijenos) valova

Kada val prelazi iz jednog sredstva u drugo, dolazi do djelomične transmisije i djelomične refleksije valova:

Val koji putuje iz sredstva manje gustoće u sredstvo veće gustoće..

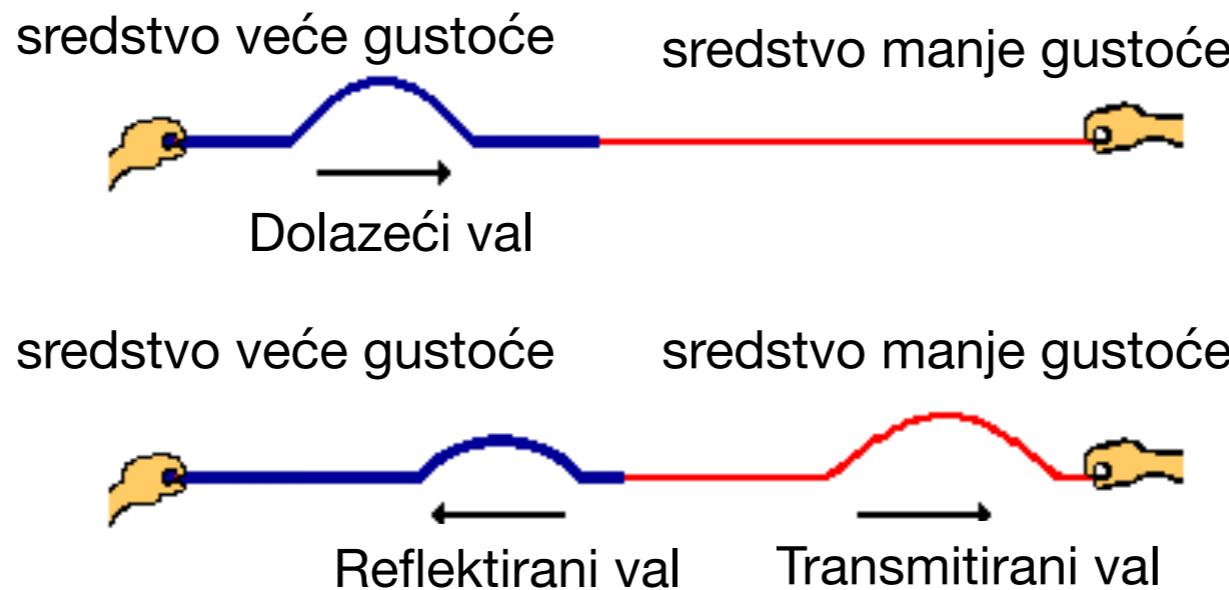


..biti će reflektiran na granici i transmitiran preko granice u novo sredstvo. Reflektirani val je invertiran.

Refleksija (odbijanje) i transmisija (prijenos) valova

Kada val prelazi iz jednog sredstva u drugo, dolazi do djelomične transmisije i djelomične refleksije valova.

Val koji putuje iz sredstva veće gustoće u sredstvo manje gustoće..

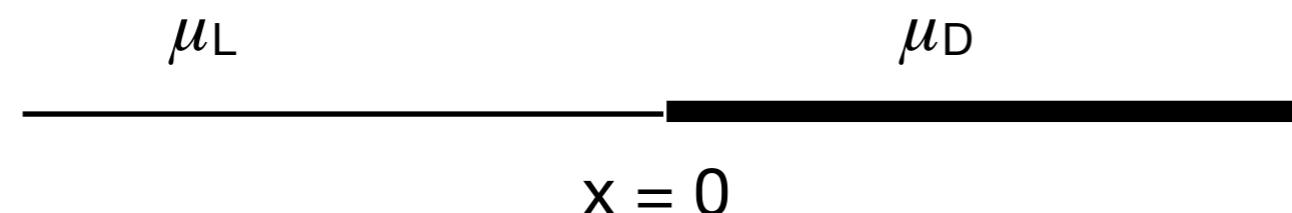


**..biti će reflektiran na granici i transmitiran preko granice
u novo sredstvo. Nema inverzije.**

Refleksija (odbijanje) i transmisija (prijenos) valova

Po žici određene linearne gustoće μ_L (L - lijevo) širi se harmonički transverzalni val. Žica je napeta silom T i spojena je s drugom žicom koja je drugačije debljine i njezina linearna gustoća je μ_D (D - desno).

Spojište žica stavimo u ishodište koordinatnog sustava, $x = 0$. Na spojištu će doći do djelomične refleksije vala, i zato ćemo lijevo također imati reflektirane valove koji se šire zdesna nalijevo. Transmitirani valovi se šire u sredstvu D i gibanju se slijeva nadesno:



$$U = \text{upadni val} \quad y_U(t, x) = y_{\rightarrow}(t, x)_L = y_U^{(0)} \cos(\omega t - k_L x)$$

$$R = \text{reflektirani val} \quad y_R(t, x) = y_{\leftarrow}(t, x)_L = y_R^{(0)} \cos(\omega t + k_L x)$$

$$T = \text{transmitirani val} \quad y_T(t, x) = y_{\rightarrow}(t, x)_D = y_T^{(0)} \cos(\omega t - k_D x)$$

Frekvencija širenja valova po žici je jednaka (ona je određena generatorom valova, a ne sredstvom kojim se valovi šire)!

$$k_L = \frac{2\pi}{\lambda_L}, \quad v_L = \lambda_L \nu = \frac{\lambda_L 2\pi \nu}{2\pi} = \frac{2\pi \nu}{2\pi/\lambda_L} = \omega/k_L \quad v = \sqrt{T/\mu}$$

Refleksija (odbijanje) i transmisijska (prijenos) valova

Na mjestu $x = 0$ valovi se neprekinuto šire iz jednog sredstva u drugo:

$$y_{\rightarrow}(t, x = 0) + y_{\leftarrow}(t, 0) = y_{\rightarrow}(t, 0)$$
$$y_U^{(0)} \cos(\omega t) + y_R^{(0)} \cos(\omega t) = y_T^{(0)} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow y_U^{(0)} + y_R^{(0)} = y_T^{(0)} \quad *$$

Žice su glatko spojene, tj. derivacije su na spoju jednake:

$$y'_U(t, x)|_{x=0} + y'_R(t, x)|_{x=0} = y'_T(t, x)|_{x=0}$$
$$k_L y_U^{(0)} \sin(\omega t) - k_L y_R^{(0)} \sin(\omega t) = k_D y_T^{(0)} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{k_L}{\omega} y_U^{(0)} - \frac{k_L}{\omega} y_R^{(0)} = \frac{k_D}{\omega} y_T^{(0)} \quad * \quad *$$

$$v_L = \omega/k_L \quad v_D = \omega/k_D$$

Kombinacijom * i ** može se izvesti relacija za amplitudu reflektiranog i transmitiranog vala:

$$y_R^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{v_D - v_L}{v_D + v_L}$$

$$y_T^{(0)} = y_U^{(0)} \cdot \frac{2v_D}{v_D + v_L}$$

Refleksija (odbijanje) i transmisijski prijenos valova

Provjera:

1. ako je desna žica teža tako da $\mu_D \rightarrow \infty$, pa $v_D \rightarrow 0$:

$$y_T(t, x) = 0$$

$$y_R^{(0)} = -y_U^{(0)}$$

$$y_R(t, x) = -y_U^{(0)} \cos(\omega t + k_L x) = y_U^{(0)} \cos(\omega t + k_L x + \pi)$$

Došlo je do promjene u fazi za π reflektiranog vala na čvrstom kraju.

2. ako desno od $x = 0$ nema nastavka žice (tj. žica na $x = 0$ je slobodna i može titrati), dešava se refleksija na slobodnom kraju: $v_D \rightarrow \infty$

$$y_R^{(0)} = y_U^{(0)}$$

$$y_R(t, x) = y_U^{(0)} \cos(\omega t + k_L x)$$

Koeficijenti refleksije i transmisije

Kako se snaga koju prenosi val raspoređuje pri dolasku vala na granicu dvaju sredstava?

Srednja snaga ulaznog vala:

$$\bar{P}_U = \frac{1}{2} \mu_L \omega^2 (y_U^{(0)})^2 v_L$$

Zbroj reflektirane i transmitirane snage:

$$\begin{aligned}\bar{P}_R + \bar{P}_T &= \frac{1}{2} \mu_L \omega^2 (y_R^{(0)})^2 v_L + \frac{1}{2} \mu_R \omega^2 (y_T^{(0)})^2 v_D \\ &= \frac{1}{2} T \omega^2 \left[\frac{1}{v_L} (y_U^{(0)})^2 \frac{(v_D - v_L)^2}{(v_D + v_L)^2} + \frac{1}{v_D} (y_U^{(0)})^2 \frac{4v_D^2}{(v_D + v_L)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{T}{v_L^2} \omega^2 (y_U^{(0)})^2 v_L = \bar{P}_U,\end{aligned}$$

KOEFICIJENT REFLEKSIJE

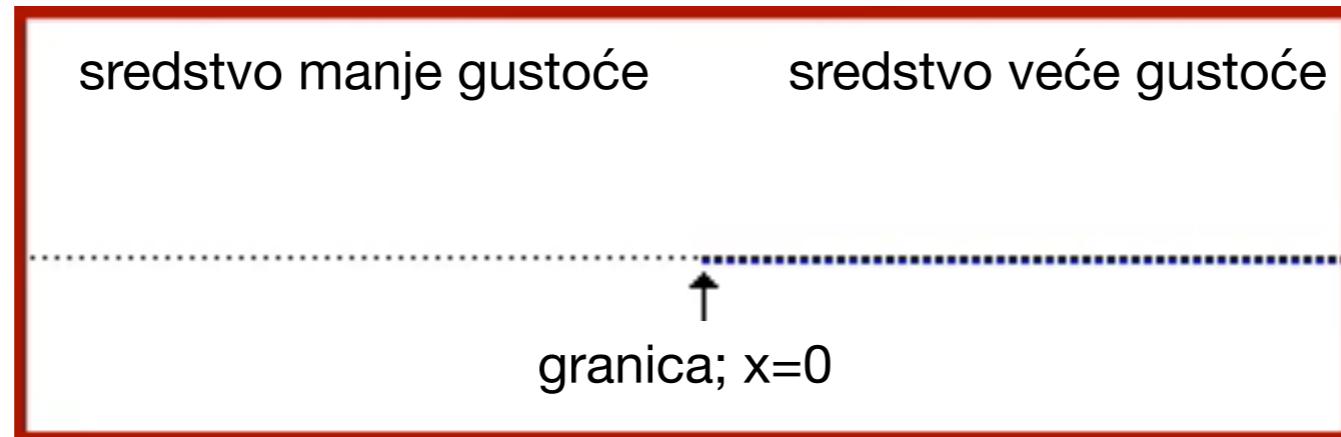
$$\mathcal{R} = \frac{P_R}{P_U}$$

KOEFICIJENT TRANSMISIJE

$$\mathcal{T} = \frac{P_T}{P_U}$$

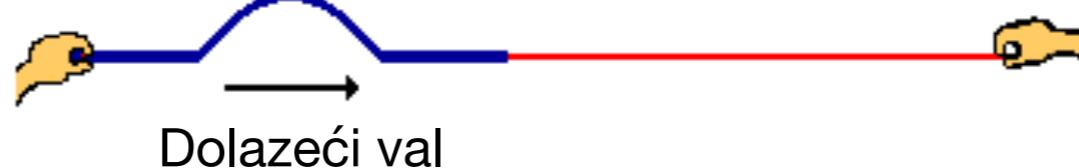
Refleksija (odbijanje) i transmisija (prijenos) valova

Kada val prelazi iz jednog sredstva u drugo, dolazi do djelomične transmisije i djelomične refleksije valova:

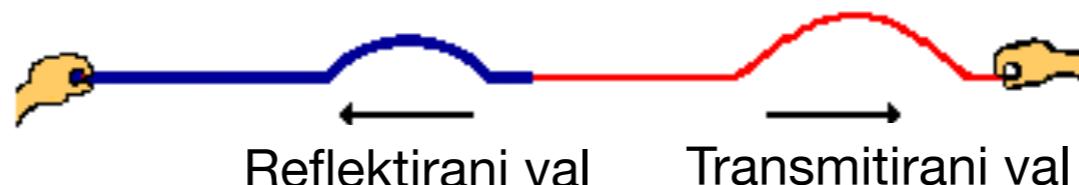


Val koji putuje iz sredstva veće gustoće u sredstvo manje gustoće..

sredstvo veće gustoće sredstvo manje gustoće



sredstvo veće gustoće sredstvo manje gustoće



..biti će reflektiran na granici i transmitiran preko granice
u novo sredstvo. Nema inverzije.

Refleksija (odbijanje) i transmisijski prijenos valova

Zadatak: Dva identična sinusoidalna vala, koji se gibaju u istom smjeru duž napete žice, interferiraju međusobno. Amplituda y_m svakog od valova je 9.8 mm, a fazna razlika između njih je 100 stupnjeva.

- (a) Kolika je amplituda rezultantnog vala nakon interferencije?
- (b) Kolika fazna razlika će dati rezultantan val amplitude 4.9 mm?

$$y'_m = |2y_m \cos \frac{1}{2}\phi| = |(2)(9.8 \text{ mm}) \cos(100^\circ/2)| \\ = 13 \text{ mm.}$$

$$4.9 \text{ mm} = (2)(9.8 \text{ mm}) \cos \frac{1}{2}\phi,$$

$$\phi = 2 \cos^{-1} \frac{4.9 \text{ mm}}{(2)(9.8 \text{ mm})} \\ = \pm 2.636 \text{ rad} \approx \pm 2.6 \text{ rad}$$

Stojni valovi

- elastično uže mase m i duljine l **pričvršćeno je na oba kraja** i napeto silom N . Na jednom njegovom kraju stvaraju se valni signali koji se brzinom v šire po užetu.
- signali koji dolaze na desni kraj se reflektiraju. Reflektirani invertirani valovi putuju zdesna na lijevo.
- **reflektirani valovi se zbrajaju s originalnim valovima koji putuju slijeva nadesno**
- **https://www.walter-fendt.de/html5/phen/standingwavereflection_en.htm**

$$\begin{aligned}y(t, x) &= y_{\rightarrow}(t, x) + y_{\leftarrow}(t, x) \\&= A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \pi) \\&= 2A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \cos(kx + \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

$$y(t, x) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

- ovo nije progresivan val, jer nema ovisnosti oblika $(\omega t - kt)$
- odvojene su ovisnosti vremenske varijable t i prostorne varijable x
- možemo shvatiti ovaj izraz uz pomoć $\mathcal{A} = 2 A \sin kx$, tj. amplituda ovisi o varijabli x
- **stojni val: određene točke - čvorovi - uvijek miruju. Između čvorova se nalaze trbusi stojnog vala, gdje je amplituda titranja maksimalna**

Stojni val

Rubni uvjet koji mora zadovoljiti val: na krajevima je uže učvršćeno, pa vrijedi

$$y(t, 0) = 0 \quad \text{i} \quad y(t, x = \ell) = 0$$

$$\rightarrow y(t, \ell) = 0 = 2A \sin(k\ell) \sin(\omega t) \Rightarrow k_n \cdot \ell = n\pi, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{2\pi\ell}{\lambda_n} = n\pi \quad \lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

n=1 OSNOVNI stojni val na užetu ($\lambda = 2\ell$)

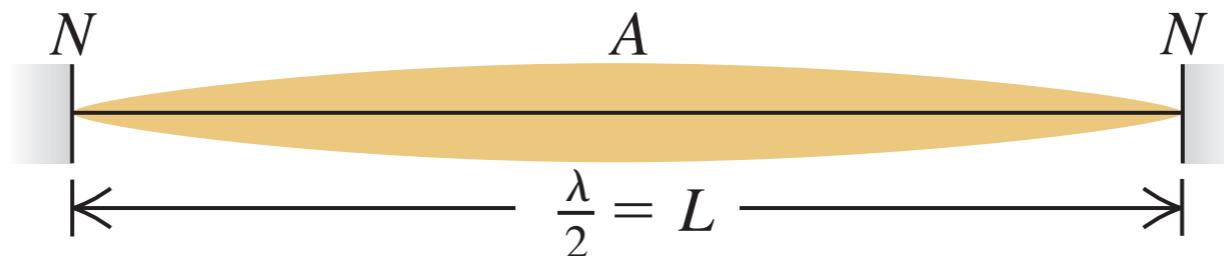
n= 2,3,4,... VIŠI HARMONICI

Stojni val, za razliku od progresivnog, ne prenosi energiju s jednog kraja na drugi!

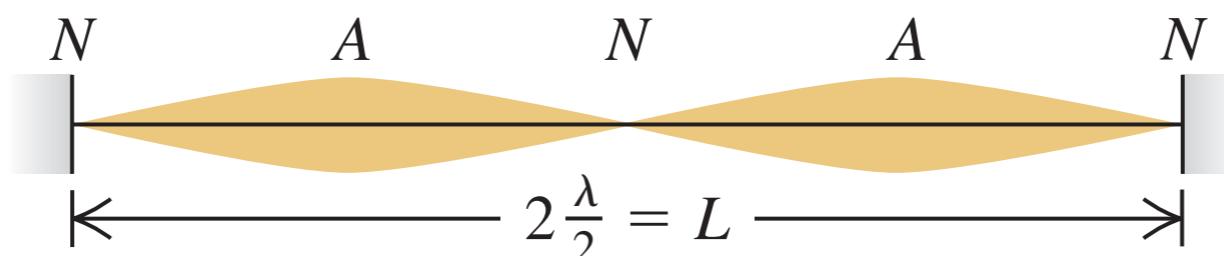
$$\nu_1 = \frac{v}{2\ell}, \quad \nu_2 = \frac{2v}{2\ell}, \quad \nu_3 = \frac{3v}{2\ell}, \quad \dots, \quad \nu_n = \frac{nv}{2\ell} = n\nu_1$$

Stojni valovi

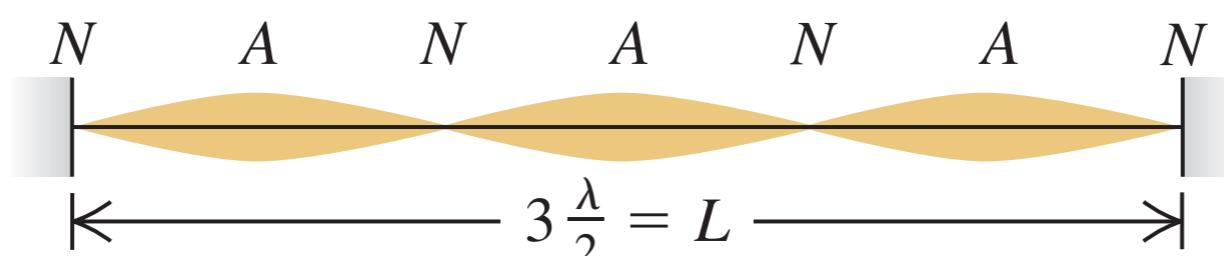
(a) $n = 1$: fundamentalna frekvencija, f_1



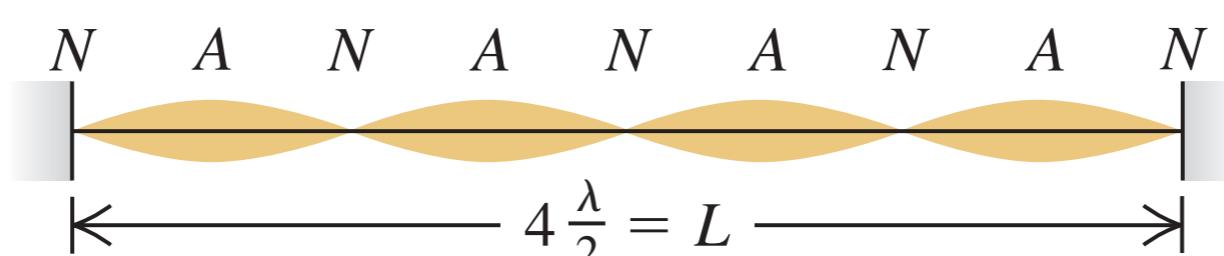
(b) $n = 2$: drugi harmonik, f_2



(c) $n = 3$: treći harmonik, f_3

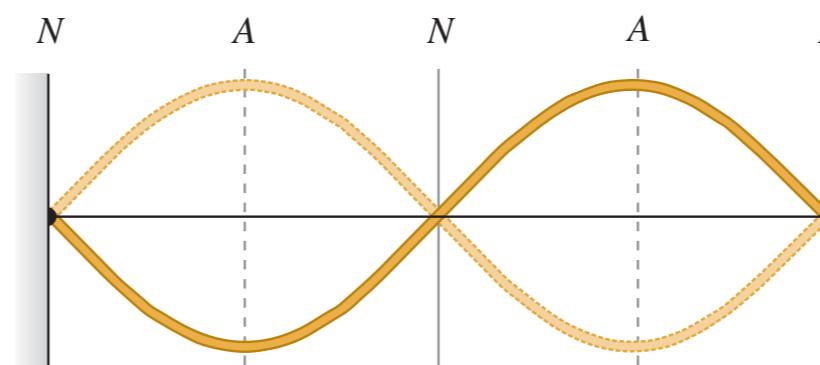
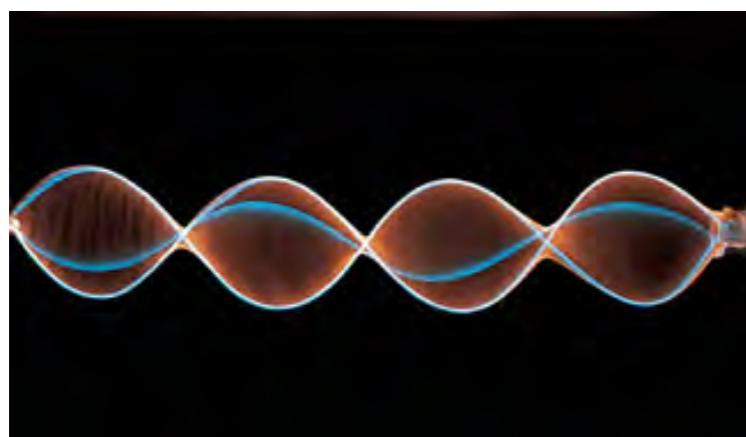
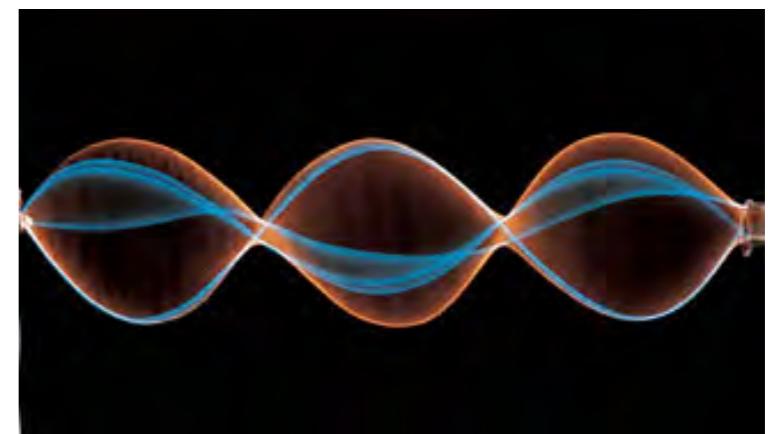
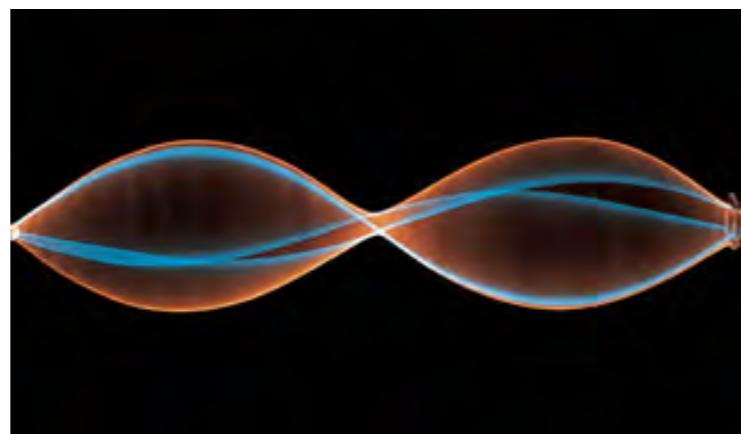


(d) $n = 4$: četvrti harmonik, f_4



Stojni valovi

- elastično uže mase m i duljine ℓ pričvršćeno je na oba kraja i napeto silom N . Na jednom njegovom kraju stvaraju se valni signali koji se brzinom v šire po užetu.
- signali koji dolaze na desni kraj se reflektiraju. Reflektirani invertirani valovi putuju zdesna na lijevo.
- reflektirani valovi se zbrajaju s originalnim valovima koji putuju slijeva nadesno

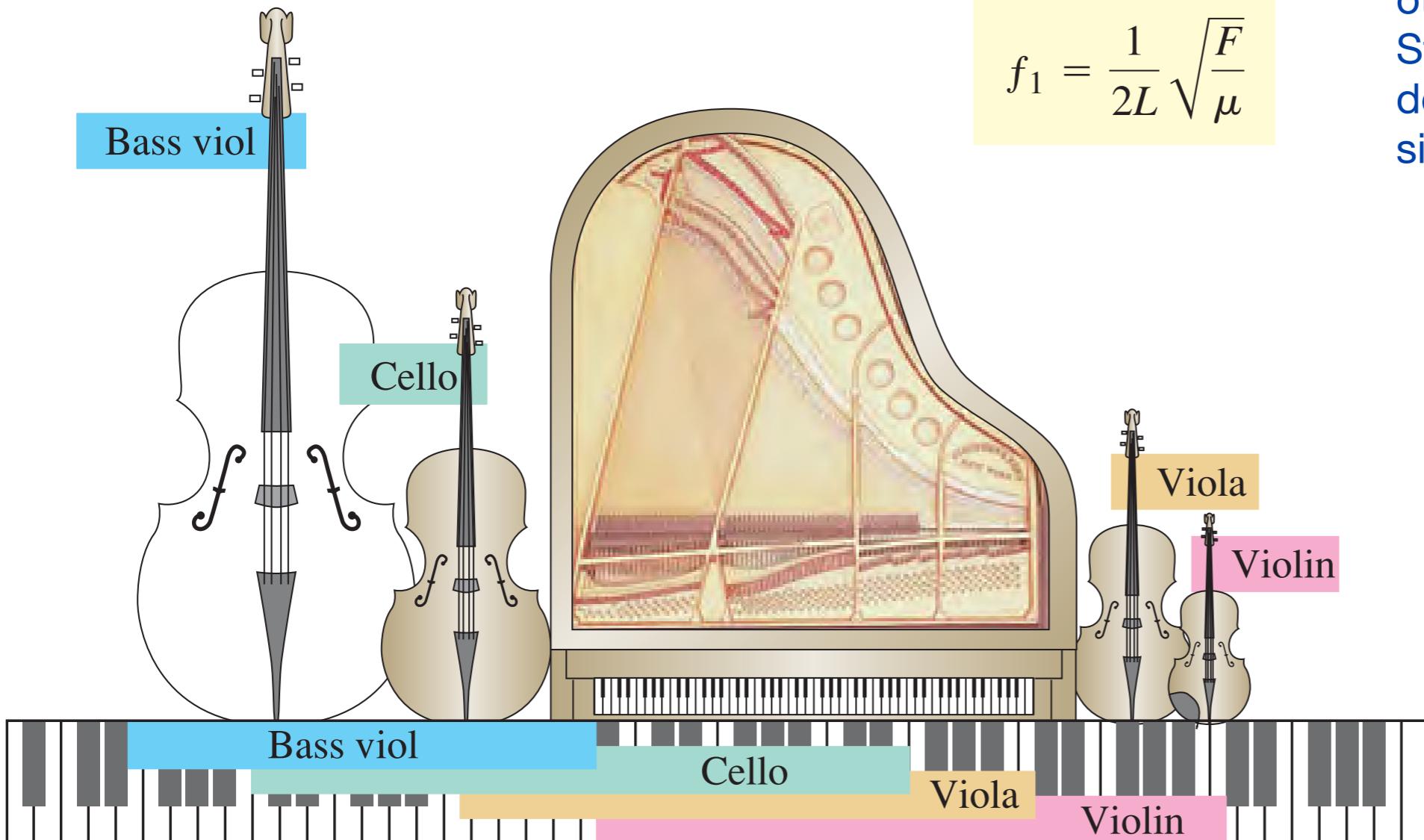


N = čvorovi: točke u kojima se uže nikad ne pomiče
 A = trbusi; točke u kojima je amplituda titranja najveća

Stojni valovi

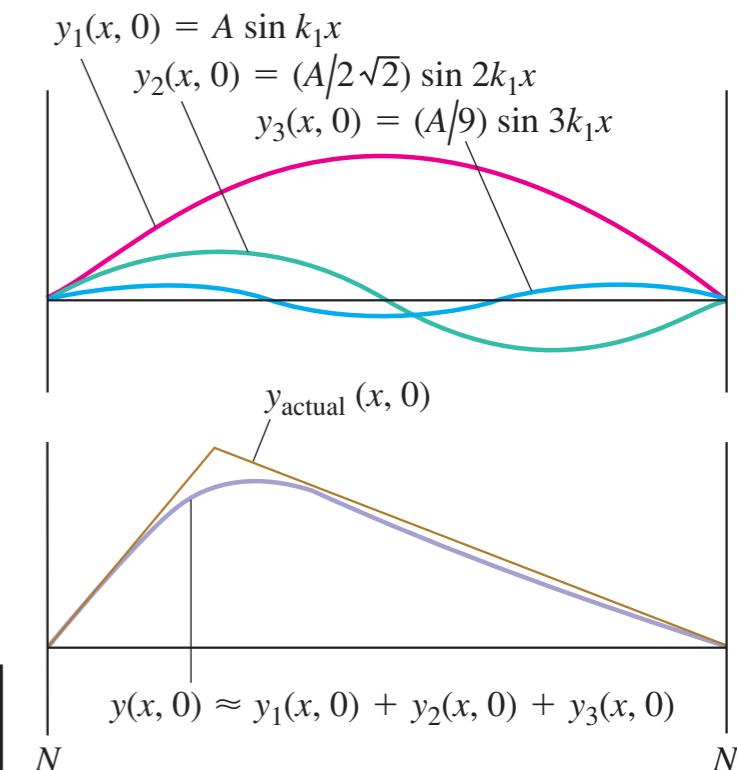
- muzički instrumenti pokazuju kako f_1 ovisi o svojstvima žice: inverzna ovisnost frekvencije o duljini ℓ se vidi kod dugih žica (nižih frekvencija) ili kraćih žica (viših frekvencija) na klaviru
- nota na violini ili gitari se mijenja kad pritisnemo na žicu i mijenjamu duljinu ℓ vibrirajućeg dijela žice

https://www.youtube.com/watch?v=eEu-f7Ni_Uw



$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Kada je žica gitare povučena i otpuštena, stvara se stojni val. Stojni val je u ovom primjeru dobro opisan sa sumom 3 sinusoidalne funkcije:



Zadatak

Dok gitarska žica titra, pritisnemo srednju točku na žici da bismo spriječili vibracije u toj točki. Koji harmonici ne mogu biti prisutni na žici u tom slučaju?

ODGOVOR: $n = 1, 3, 5, \dots$

Kada dodirnemo žicu u centru, namećemo čvor u centar. Dakle, samo stojni valovi sa čvorom u $x = L/2$ su dozvoljeni.

Zadatak

Na slici je prikazana rezonantna oscilacija žice mase $m=2.5 \text{ g}$ i duljine $L=0.80 \text{ m}$ na koju djeluje sila napetosti $T = 325 \text{ N}$. Kolika je valna duljina transverzalnog vala koji stvara stojni val, i koji je broj harmonika n ? Kolika je frekvencija transverzalnih valova i oscilacija elemenata žice? Koliki je maksimalni iznos transverzalne brzine elementa koji oscilira na poziciji $x = 0.18 \text{ m}$?

$$2\lambda = L,$$

$$\lambda = \frac{L}{2}.$$

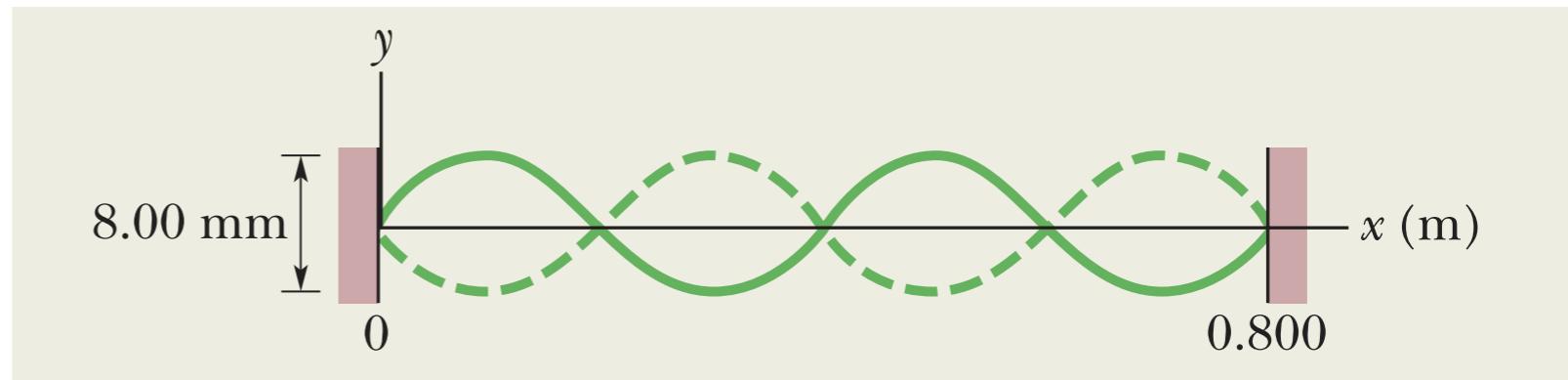
$$= \frac{0.800 \text{ m}}{2} = 0.400 \text{ m.}$$

$$n = 4.$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

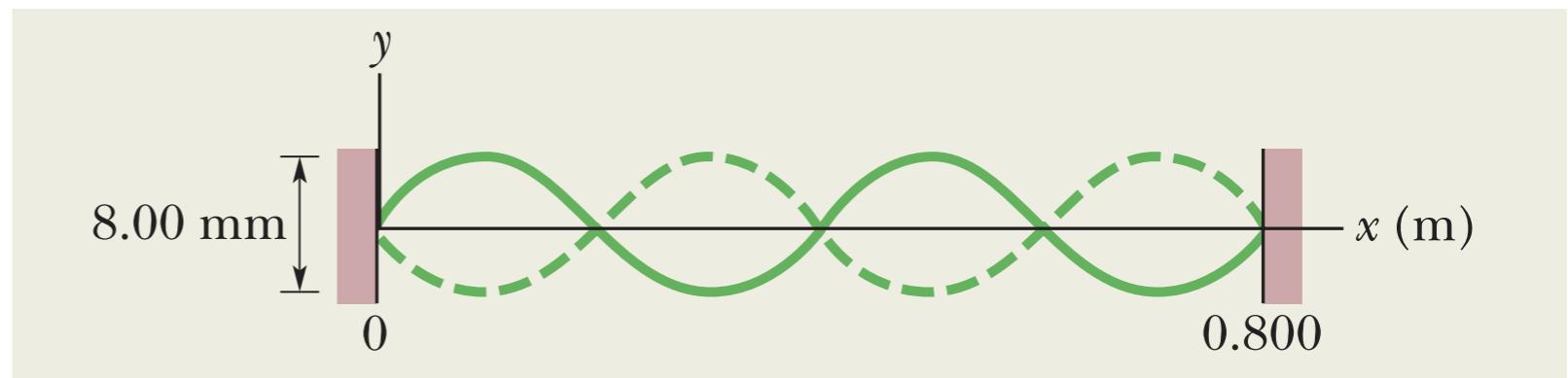
$$= \sqrt{\frac{(325 \text{ N})(0.800 \text{ m})}{2.50 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 322.49 \text{ m/s.}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{322.49 \text{ m/s}}{0.400 \text{ m}}$$



Zadatak

Na slici je prikazana rezonantna oscilacija žice mase $m=2.5$ g i duljine $L=0.8\text{m}$ na koju djeluje sila napetosti $T = 325$ N. Kolika je valna duljina transverzalnog vala koji stvara stojni val, i koji je broj harmonika n ? Kolika je je frekvencija transverzalnih valova i oscilacija elemenata žice? Koliki je maksimalni iznos transverzalne brzine elementa koji oscilira na poziciji $x = 0.18\text{ m}$?



$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [(2y_m \sin kx) \cos \omega t] \\ &= [-2y_m \omega \sin kx] \sin \omega t. \end{aligned}$$

$$u_m = |-2y_m \omega \sin kx|$$

$$y_m = 2.00 \text{ mm}, \quad k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(0.400 \text{ m})$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(806.2 \text{ Hz})$$

$$\begin{aligned} u_m &= \left| -2(2.00 \times 10^{-3} \text{ m})(2\pi)(806.2 \text{ Hz}) \right. \\ &\quad \left. \times \sin\left(\frac{2\pi}{0.400 \text{ m}}(0.180 \text{ m})\right) \right| \\ &= 6.26 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Zadatak

Na slici je prikazana aluminijска žica, duljine $L_1 = 60$ cm, površine poprečnog presjeka 1.25×10^{-2} cm 2 i gustoće 2.6 g/cm 3 , koja je spojena na čeličnu žicu gustoće 7.8 g/cm 3 istog poprečnog presjeka. Složena žica je napeta pomoću utega mase $m = 10$ kg i postavljena tako da je udaljenost L_2 od spoja do koloture 86.6 cm. Na žici su uspostavljeni vanjski valovi pomoću vanjskog izvora promjenjive frekvencije. Jedan čvor se nalazi na položaju koloture. (a) Odredite najnižu frekvenciju koja generira stojni val sa čvorom na spoju žica. (b) Koliko je čvorova na žici pri ovoj frekvenciji?

Rješenje: (a) 289.6 Hz; (b) 8

Halliday, Resnick & Walker: Fundamentals of Physics

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

$$T = mg$$

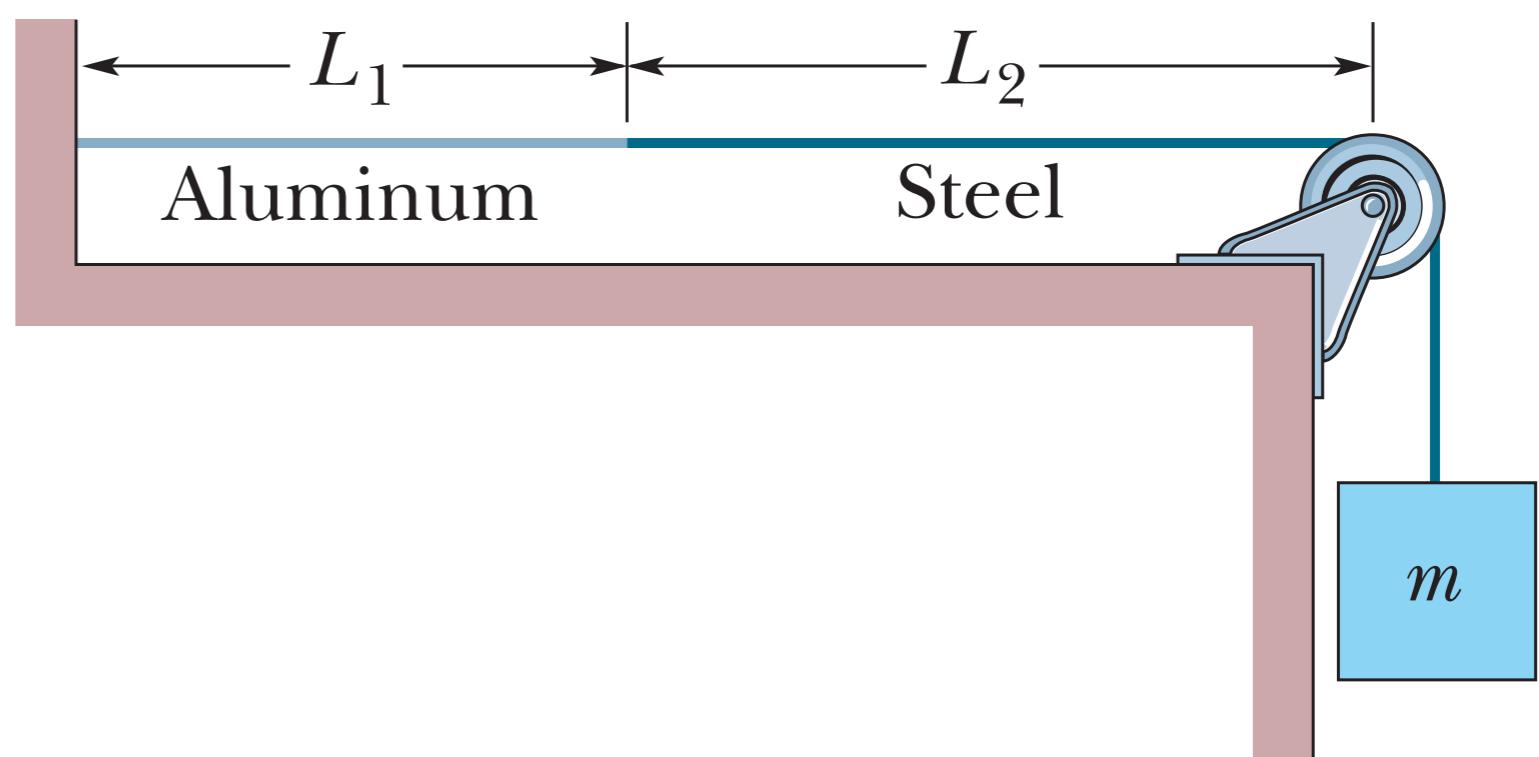
$$v_1 = 173.7 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 100.3 \text{ m/s}$$

$$\lambda_1 = v_1 / f$$

$$\lambda_2 = v_2 / f$$

$$\rightarrow \lambda_1/\lambda_2 = 1.73$$



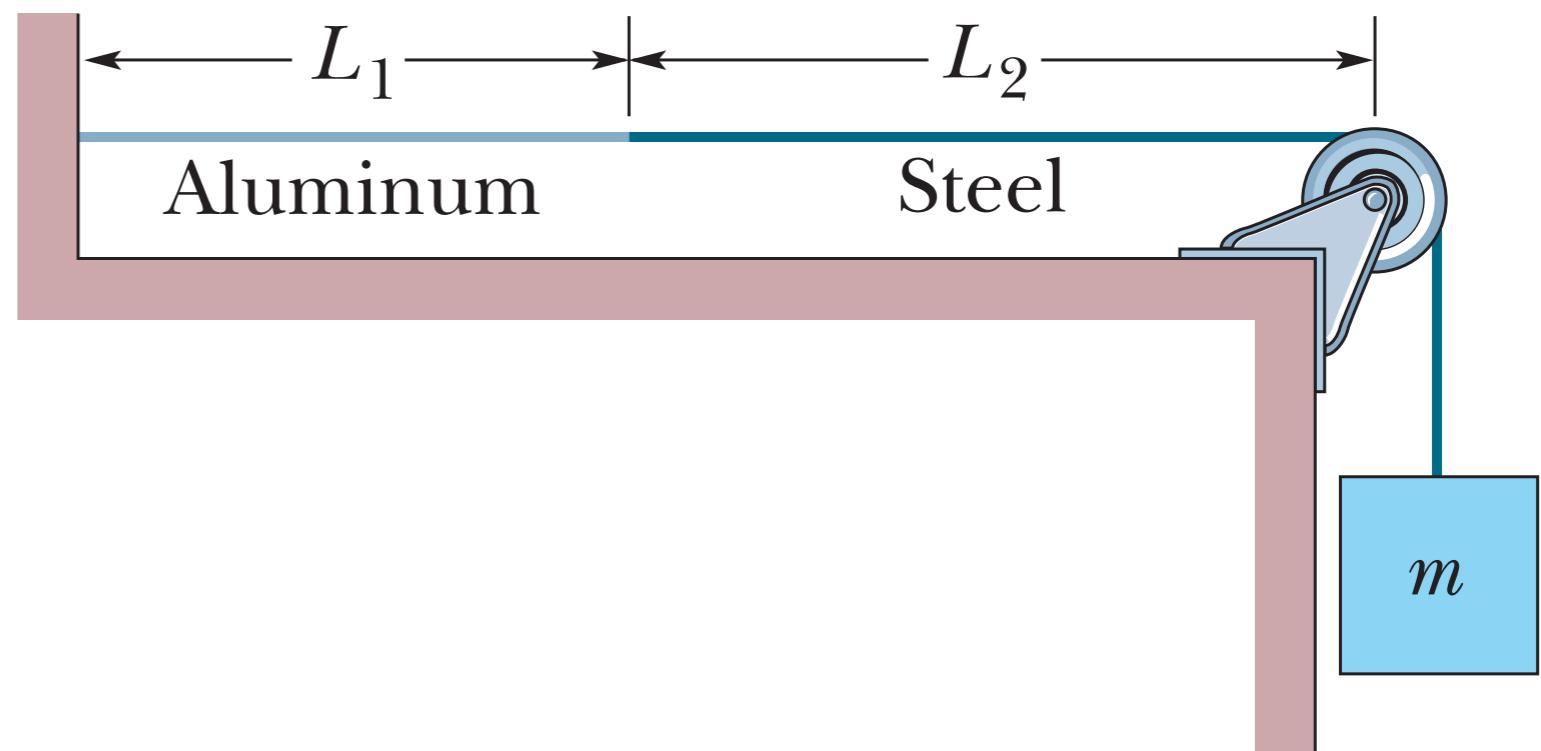
Ako je čvor na spoju: $L_1 = N_1 \lambda_1/2$ $L_2 = N_2 \lambda_2/2$ $N_2 / N_1 = (\lambda_1/\lambda_2) (L_2/L_1)$

$$N_2/N_1 = 2.5 \rightarrow N_2 = 5 \quad N_1 = 2$$

Zadatak

Na slici je prikazana aluminijска žica, duljine $L_1 = 60$ cm, površine poprečnog presjeka 1.25×10^{-2} cm 2 i gustoće 2.6 g/cm 3 , koja je spojena na čeličnu žicu gustoće 7.8 g/cm 3 istog poprečnog presjeka. Složena žica je napeta pomoću utega mase $m = 10$ kg i postavljena tako da je udaljenost L_2 od spoja do koloture 86.6 cm. Na žici su uspostavljeni vanjski valovi pomoću vanjskog izvora promjenjive frekvencije. Jedan čvor se nalazi na položaju koloture. (a) Odredite najnižu frekvenciju koja generira stojni val sa čvorom na spoju žica. (b) Koliko je čvorova na žici pri ovoj frekvenciji?

Rješenje: (a) 289.6 Hz; (b) 8



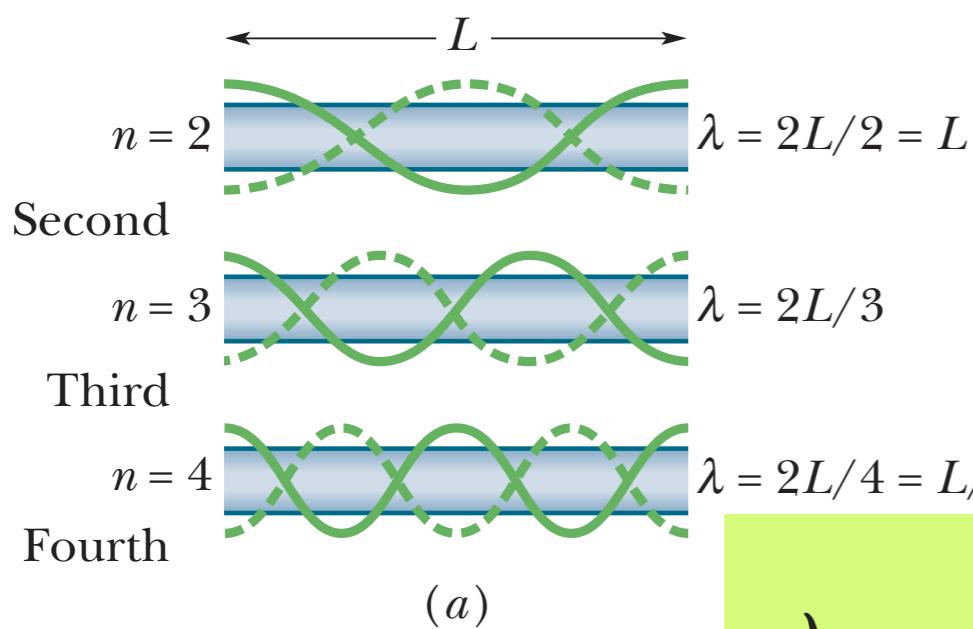
$$L_1 = N_1 \lambda_1 / 2 \quad N_1 = 2$$

$$f = v_1 / \lambda_1 = 289.6 \text{ Hz}$$

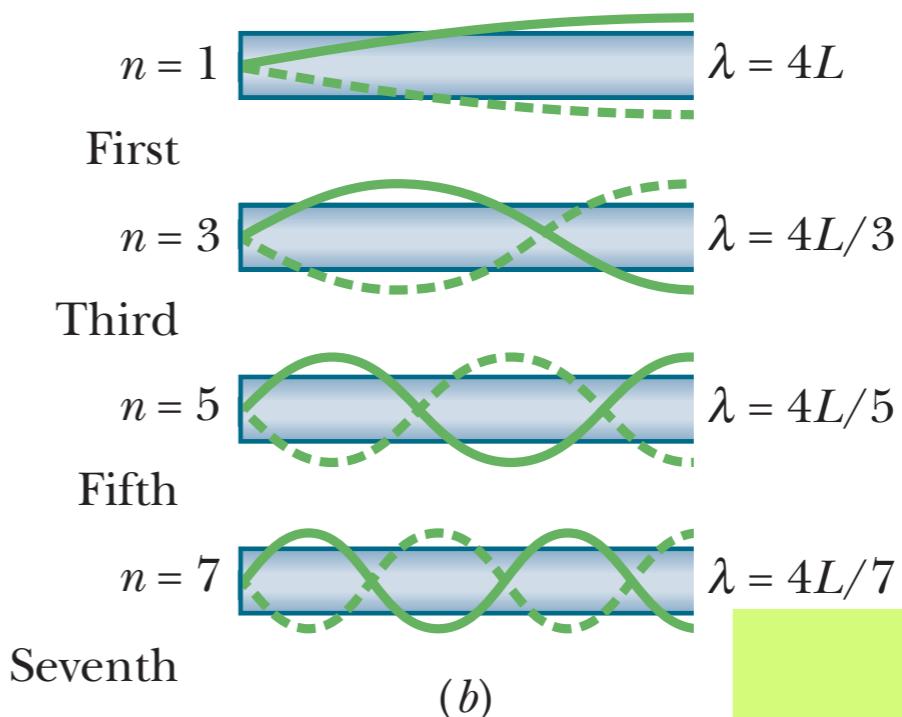
Stojni valovi

Stojni valovi u cijevima: na otvorenim krajevima se pojavljuje maksimalna oscilacija

- (a) kada su oba kraja cijevi otvorena, moguć je bilo koji harmonik
- (b) kada je samo jedan kraj cijevi otvoren, mogući su samo neparni brojevi harmonika



$$\lambda = \frac{2L}{n}$$



$$\lambda = \frac{4L}{n}$$

Dopplerov efekt

✧ <https://www.youtube.com/watch?v=h4OnBYrbCjY>

Za opažača koji se nalazi ispred auta (lijevo) svakom novom valu treba nešto manje vremena nego prethodnom da stigne do njega. **Vrijeme dolaska valnih fronti je reducirano, što daje višu frekvenciju. Valna duljina je prostorni razmak između valnih fronti.**

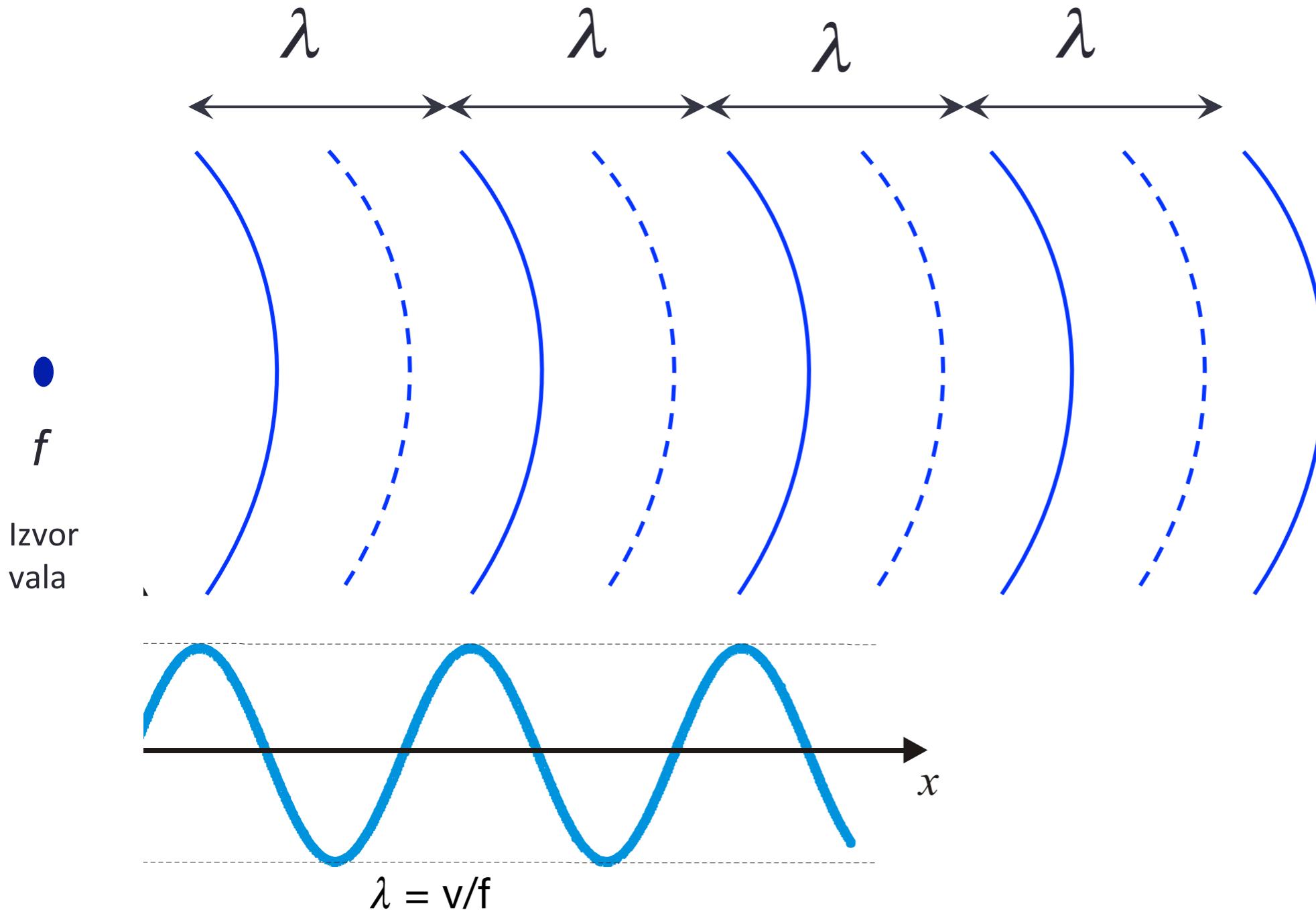
Kada stojimo i približava nam se stalni izvor zvuka, stalne frekvencije, onda možemo čuti da visina tona raste kako izvor ide prema nama.



Dopplerov efekt

- Dopplerov efekt: promjena visine tona pri relativnom gibanju slušatelja i izvora

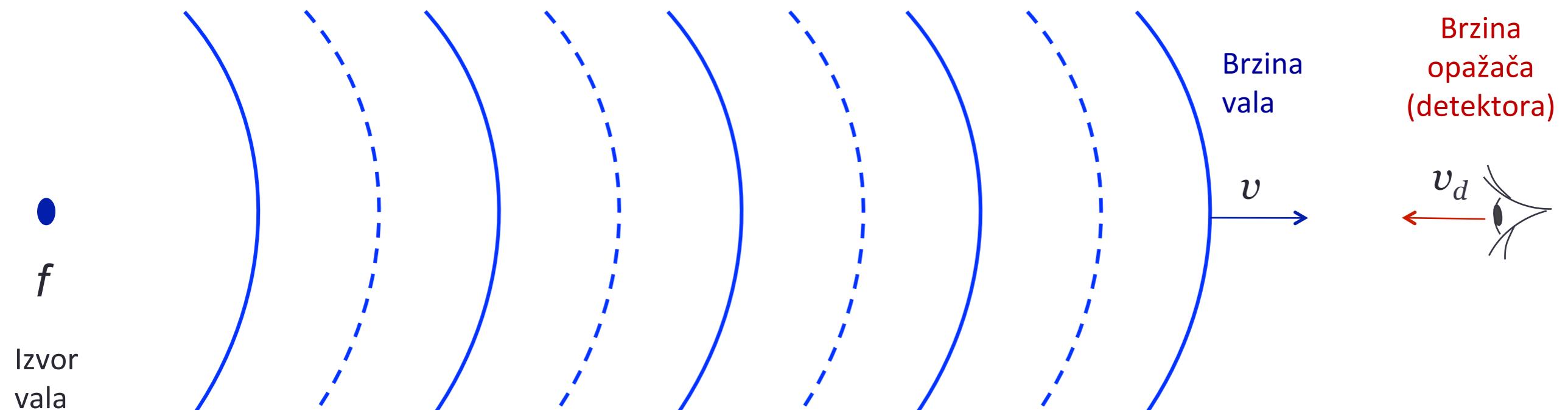
1. izvor vala miruje, opažač se giba



Dopplerov efekt

- Dopplerov efekt: promjena visine tona pri relativnom gibanju slušatelja i izvora

1. izvor vala miruje, opažač se giba



Brzina kojom se valne fronte približavaju opažaču

$$v' = v + v_d$$

Frekvencija koja se čuje na mjestu opažača: $f' = v'/\lambda = (v + v_d)f/v$

Dopplerov efekt

- Dopplerov efekt: promjena visine tona pri relativnom gibanju slušatelja i izvora

1. izvor vala miruje, opažač se giba

Dakle:

Kad izvor vala miruje, a opažač mu se približava, opažač mjeri veću frekvenciju
a opažač se od njega udaljuje, opažač mjeri manju frekvenciju

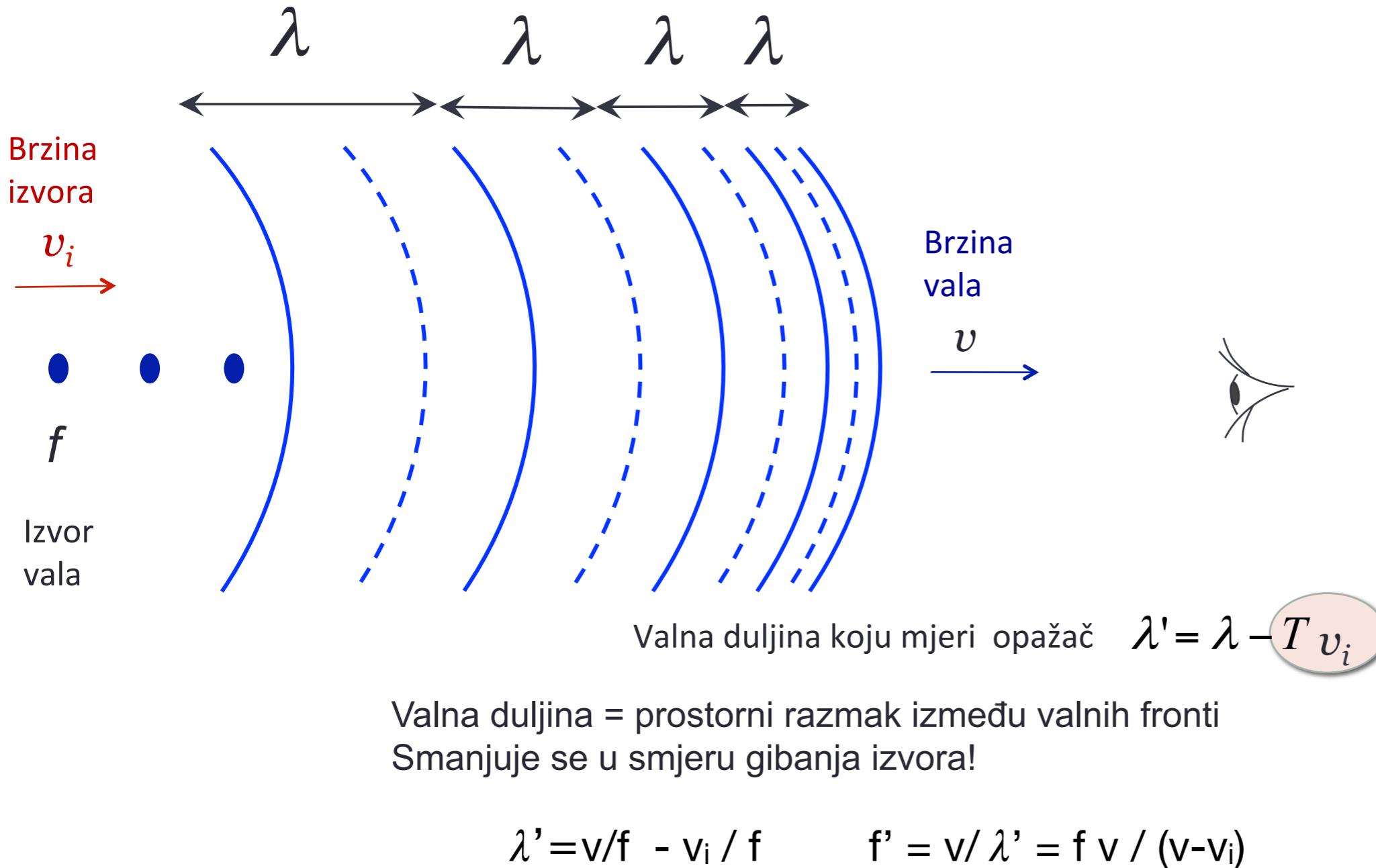
Zajednička relacija

$$f' = \frac{v \pm v_d}{v} f$$

Dopplerov efekt

- Dopplerov efekt: promjena visine tona pri relativnom gibanju slušatelja i izvora

2. opažač miruje, izvor vala se giba



Dopplerov efekt

- Dopplerov efekt: promjena visine tona pri relativnom gibanju slušatelja i izvora

2. opažač miruje, izvor vala se giba

Dakle:

Kad opažač miruje, a izvor vala mu se **približava**, opažač mjeri **veću** frekvenciju
a izvor vala se od njega **udaljuje**, opažač mjeri **manju** frekvenciju

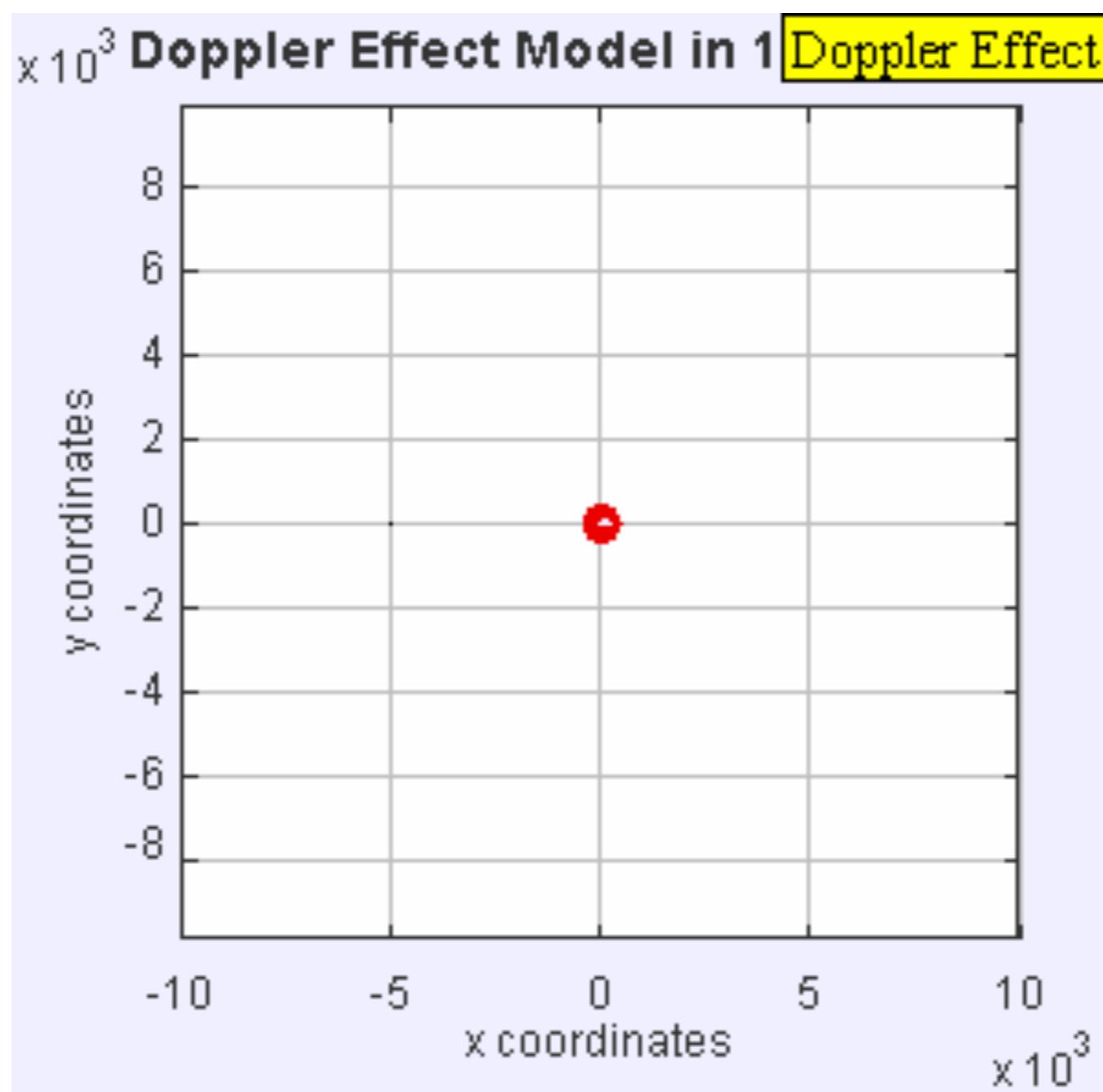
Zajednička relacija

$$f' = \frac{v}{v \pm v_i} f$$

Dopplerov efekt

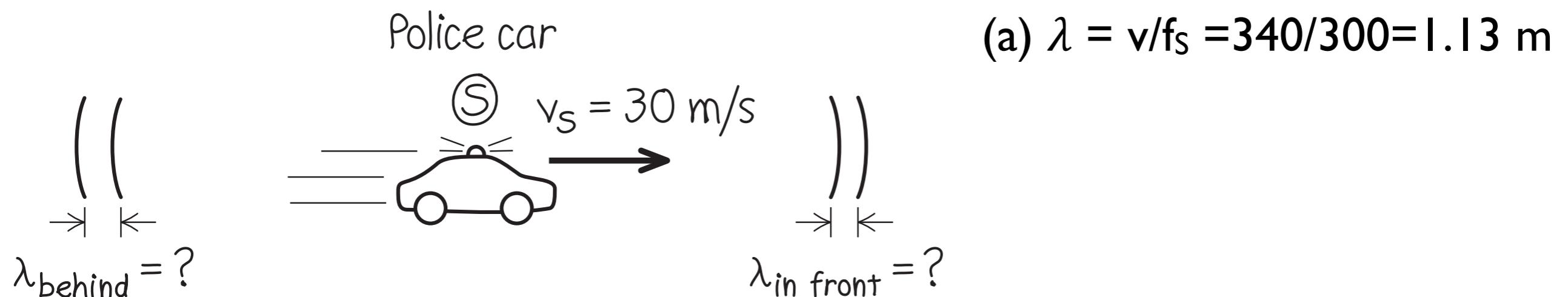
- Dopplerov efekt: promjena visine tona pri relativnom gibanju slušatelja i izvora

2. opažač miruje, izvor vala se giba



Zadatak

Sirena policijskog auta emitira sinusoidalan val frekvencije 300 Hz. Brzina zvuka je 340 m/s. (a) Odredi valnu duljinu valova ako je sirena u mirovanju. (b) Odredi valnu duljinu valova ispred i iza sirene ako se auto giba brzinom 30 m/s.

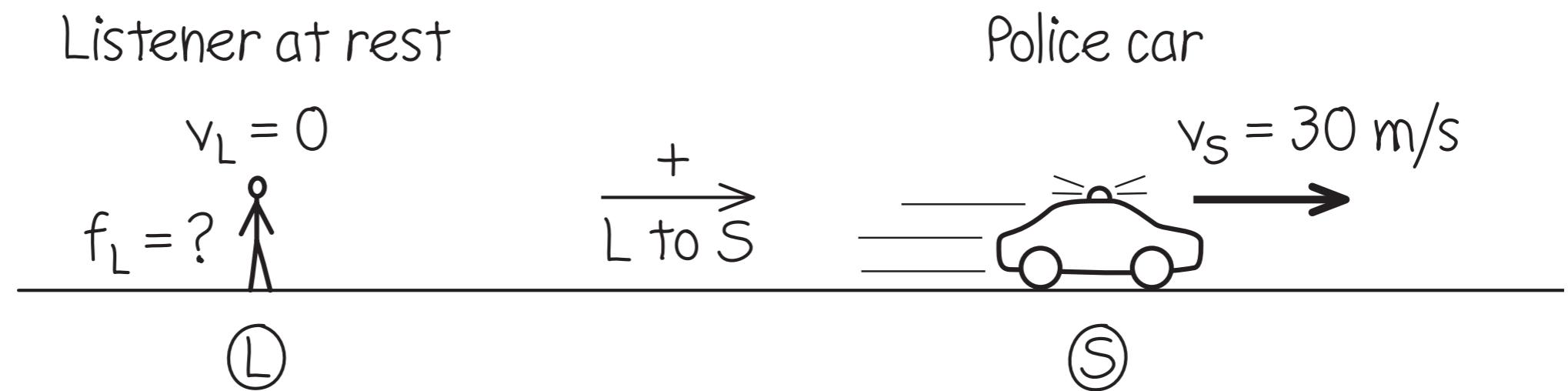


$$\lambda_{\text{in front}} = \frac{v - v_s}{f_s} = \frac{340 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}}{300 \text{ Hz}} = 1.03 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{behind}} = \frac{v + v_s}{f_s} = \frac{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}}{300 \text{ Hz}} = 1.23 \text{ m}$$

Zadatak

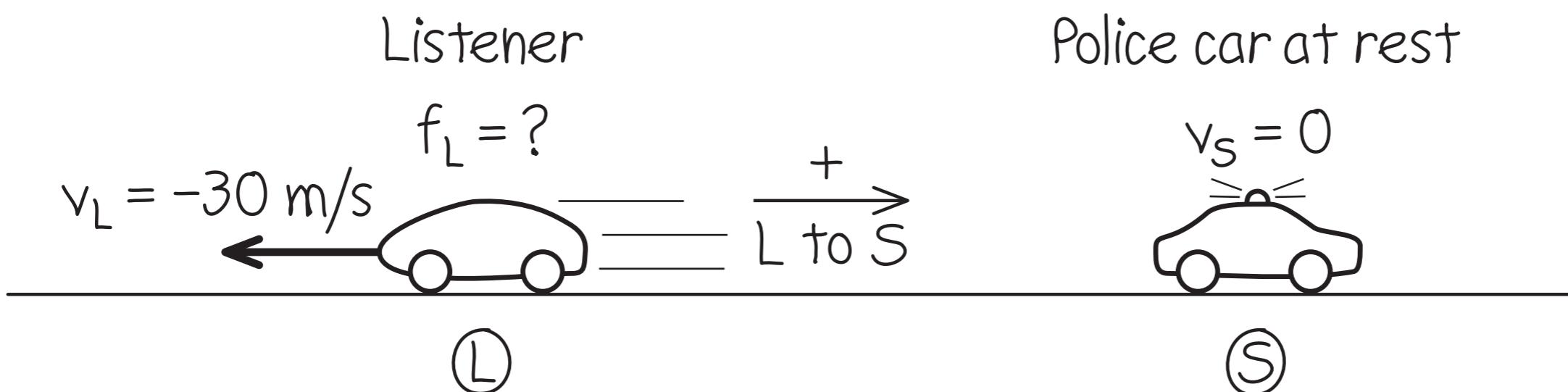
Ako je opažač u mirovanju u točki L, a sirena policijskog auta se udaljava od točke L sa 30 m/s, koju frekvenciju čuje opažač?



$$f_L = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 276 \text{ Hz}$$

Zadatak

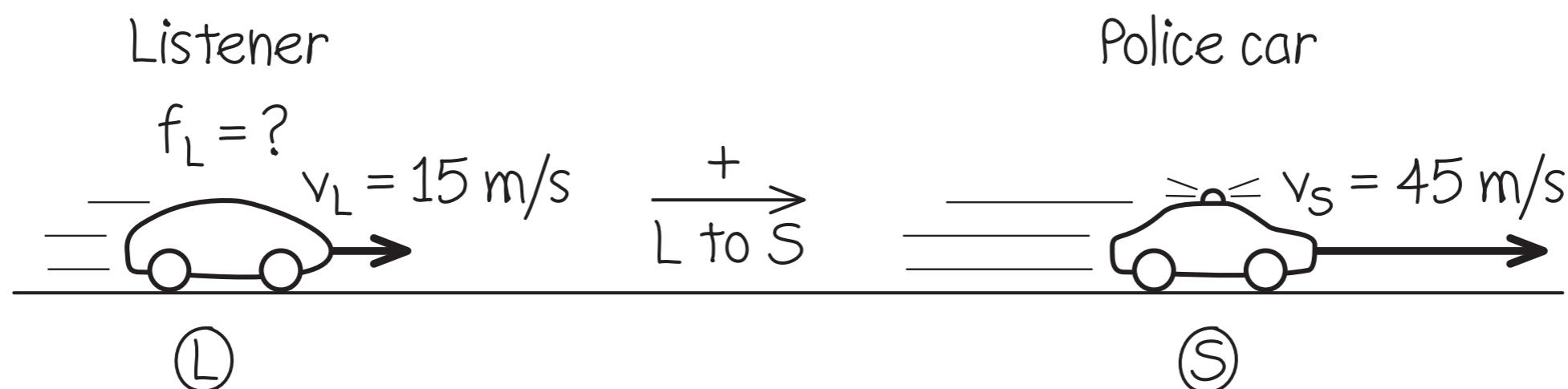
Ako je sirena automobila u mirovanju, a opažač se udaljava od sirenе brzinom 30 m/s, koju frekvenciju će čuti opažač?



$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + (-30 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 274 \text{ Hz}$$

Zadatak

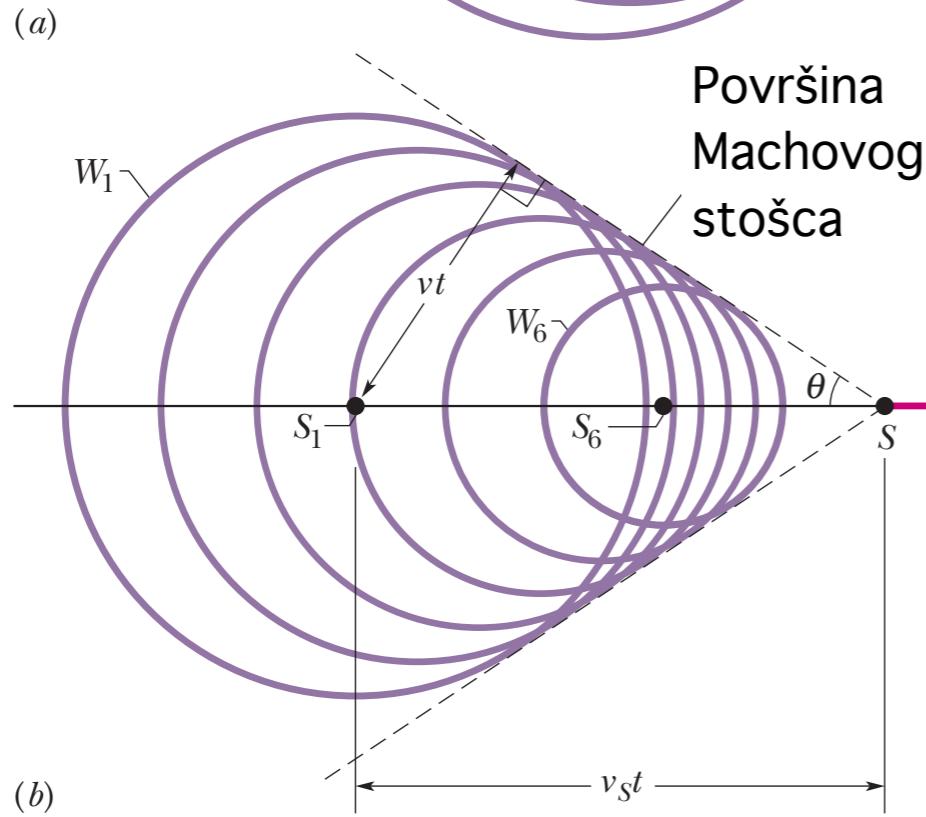
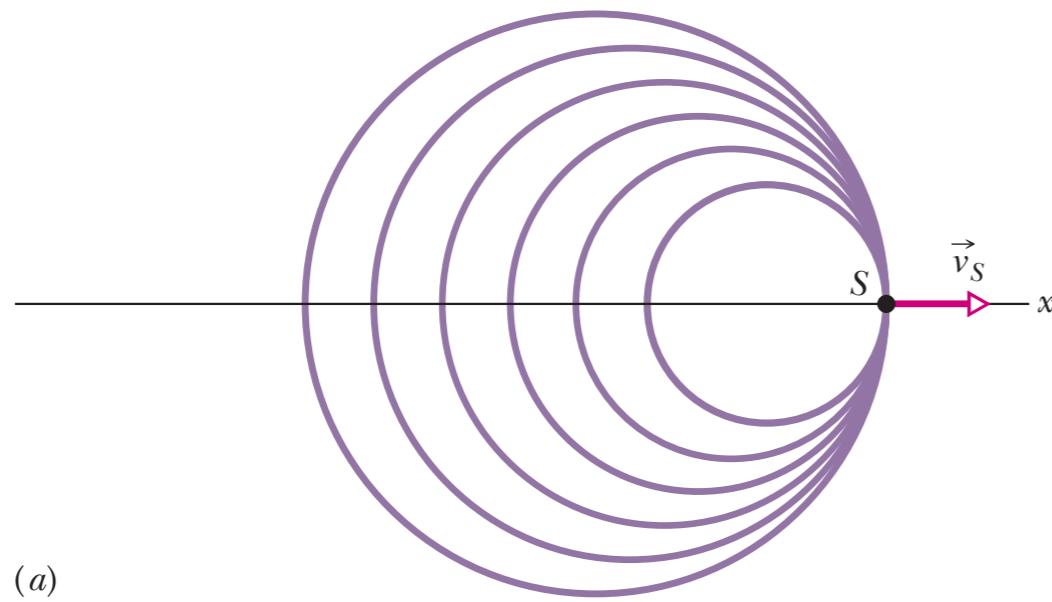
Sirena se udaljuje od opažača sa brzinom 45 m/s u odnosu na zrak, a opažač se giba prema sirenii brzinom 15 m/s u odnosu na zrak. Koju frekvenciju čuje opažač?



$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + 15 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 45 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 277 \text{ Hz}$$

Udarni val

Što se dešava kada se izvor giba prema stacionarnom detektoru brzinom $v_s > v$ (v je brzina zvuka)?



$$\sin \theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S}$$



U.S. Navy photo by Ensign John Gay