

Zadaci za vježbu, drugi dio

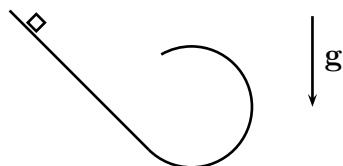
- 1 Zadatak:** Da bi se automobil kretao vodoravnom cestom brzinom iznosa $v_0 = 60 \text{ km h}^{-1}$ njegov motor mora raditi snagom $P_0 = 5 \text{ kW}$. Pretpostavljajući da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine automobila odredi najveću brzinu koju automobil može postići na vodoravnoj cesti ako je najveća snaga njegovog motora $P_{\max} = 50 \text{ kW}$.

$$\mathbf{Rj:} \quad v_{\max} = v_0(P_{\max}/P_0)^{1/3} \simeq 129.3 \text{ km h}^{-1}$$

- 2 Zadatak:** Sitno tijelo mase $m = 1 \text{ kg}$ obješeno je s pomoću tanke bezmasene niti o čvrsto uporište, otklonjeno je iz ravnotežnog položaja tako da nit zatvara kut $\alpha_0 = 45^\circ$ s uspravnim pravcem, te je pušteno u gibanje iz mirovanja (njihanje). Odredi napetost niti u trenutku u kojem tijelo prolazi ravnotežnim položajem. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.)

$$\mathbf{Rj:} \quad T = mg(3 - 2 \cos \alpha_0) \simeq 15.56 \text{ N}$$

- 3 Zadatak:** Sitno tijelo klizi bez trenja niz kosinu koja u svom podnožju prelazi u kružnu petlju polumjera zakriviljenosti R . Po ulasku u petlju tijelo nastavlja kliziti po njenoj unutrašnjoj strani. Odredi najmanju visinu u odnosu na najnižu točku petlje s koje valja pustiti tijelo da klizi niz kosinu želimo li da pri prolasku kroz najvišu točku petlje ono ne izgubi kontakt s podlogom.



$$\mathbf{Rj:} \quad H_{\min} = 5R/2.$$

- 4 Zadatak:** Tijelo miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj može klizati bez trenja, a vodoravnom oprugom konstante $k = 50 \text{ N m}^{-1}$ je povezano s čvrstim uporištem. U nekom trenutku na tijelo počne djelovati vodoravna sila stalnog iznosa $F_0 = 3 \text{ N}$ usmjerenata tako da rasteže oprugu. Odredi maksimalnu kinetičku energiju koju će tijelo postići prije nego što se zaustavi.

$$\mathbf{Rj:} \quad E_{\text{kin.}} = F_0^2/2k = 0.09 \text{ J}$$

5 Zadatak: Tijelo mase $m = 1 \text{ kg}$ leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja $\mu = 0.1$ i vodoravnom oprugom konstante $k = 100 \text{ N m}^{-1}$ je pričvršćeno za uporište. Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja iz točke u kojoj je opruga sabijena tako da djeluje silom iznosa $F_0 = 10 \text{ N}$. Odredi duljinu puta koji će tijelo prevaliti do trenutka u kojem će se ono po prvi puta zaustaviti. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.)

$$\mathbf{Rj:} \quad s = (2/k)(F_0 - \mu mg) = 0.180 \text{ m}$$

6 Zadatak: Na vodoravnu transportnu traku koja se kreće stalmom brzinom iznosa $v_0 = 0.6 \text{ m s}^{-1}$ odozgo sipi pjesak stalnim masenim tokom $\mu = 30 \text{ kg s}^{-1}$. Odredi snagu motora potrebnu za održavanje trake u gibanju zanemarujući sve sile otpora.

$$\mathbf{Rj:} \quad P = \mu v_0^2 \simeq 10.8 \text{ W.}$$

7 Zadatak: Vlak mase $m = 500 \text{ t}$ se u početnom trenutku gibao brzinom iznosa $v_0 = 10 \text{ km h}^{-1}$, a narednih ga je $\Delta t = 30 \text{ s}$ lokomotiva ubrzava u duž vodoravne pruge djelujući stalmom snagom $P = 2 \text{ MW}$. Odredi duljinu prevaljenog puta u tom intervalu vremena te iznos konačne brzine. Učinak svih sila otpora smatramo zanemarivim.

$$\begin{aligned} \mathbf{Rj:} \quad s &= (m/3P)((v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{3/2} - v_0^3) \simeq 323.1 \text{ m}, \\ v_1 &= (v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{1/2} \simeq 56.7 \text{ km h}^{-1} \end{aligned}$$

8 Zadatak: Dvije čestice se gibaju duž dva usporedna pravca razmagnuta a u suprotnim smjerivima. Mase čestica su m_1 i m_2 , a iznosi njihovih brzina su v_1 i v_2 . Odredi iznos ukupne kutne količine gibanja čestica u referentnom sustavu središta mase.

$$\mathbf{Rj:} \quad L_{\Sigma}^* = m_1 m_2 a (v_1 + v_2) / (m_1 + m_2)$$

9 Zadatak: U vreću pjeska mase $M = 20 \text{ kg}$ koja mirno visi na užetu tako da je udaljenost njena težišta od objesišta $\ell = 5 \text{ m}$ vodoravno se prema težištu ispali puščano zrno mase $m = 15 \text{ g}$. Zrno se “zaustavi” u vreći, a vreća se (sa zrnom u sebi) nastavi njihati s kutom maksimalnog otklona $\alpha = 4^\circ$. Odredi brzinu puščanog zrna prije nego što se ono zabilo u vreću. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.)

$$\mathbf{Rj:} \quad v = ((M + m)/m)(2g\ell(1 - \cos \alpha))^{1/2} \simeq 652.3 \text{ m s}^{-1}$$

10 Zadatak: Dva tijela čije su mase m_1 i m_2 mogu slobodno (bez trenja) klizati duž vodoravne tračnice. Ako se tijelo m_1 savršeno elastično sudari s tijelom mase m_2 koje je do tada mirovalo, tijela se nakon sudara gibaju u suprotnim smjerovima brzinama jednakih iznosa. Odredi omjer masa $q = m_1/m_2$.

$$\mathbf{Rj:} \quad q = 1/3$$

11 Zadatak: Bilijarska kugla nalijeće na mirnu bilijarsku kuglu jednake mase. Ako se prva kugla odbije pod kutom θ_1 u odnosu na smjer svog gibanja prije sudara, odredi kut koji zatvara smjer gibanja druge kugle nakon sudara sa smjerom gibanja prve kugle prije sudara. Sudar smatramo savršeno elastičnim.

$$\mathbf{Rj:} \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1$$

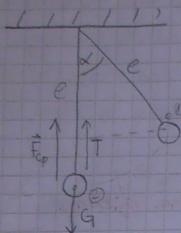
12 Zadatak: Tijelo mase $m_1 = 1 \text{ kg}$ brzinom iznosa $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$ udara u mirno tijelo mase $m_2 = 4 \text{ kg}$ te se od njega odbija unazad brzinom iznosa v'_1 . U sudaru se oslobađa toplina u iznosu od 20 J . Odredi iznos brzine v'_1 .

$$\mathbf{Rj:} \quad k^2 = 1 - 2(E_{\text{kin.}} - E'_{\text{kin.}})(m_1 + m_2)/(m_1 m_2 v_1^2) = 0.5,$$

$$v'_1 = |m_1 - km_2|v_1/(m_1 + m_2) \simeq 3.66 \text{ m s}^{-1}.$$

Auditorne (Maschine)

2)



$$\alpha = 45^\circ$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$F_{cp} = \frac{mv_0^2}{e} = T - Mg$$

$$T = \frac{mv_0^2}{e} + mg = m\left(\frac{v_0^2}{e} + g\right)$$

$$E_{tot} = E_{pot} + E_{kin}$$

$$-mgh + \frac{mv^2}{2}$$

① no se mov. pol. en.

$$E_{tot} = E_{pot} = mgh \quad (h = e - e \cos\alpha) \\ = mg(e - e \cos\alpha)$$

② no se bin. en.

$$E_{tot} = E_k = \frac{mv_0^2}{2}$$

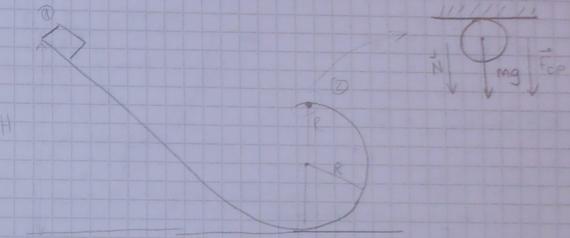
$$mg(e(1-\cos\alpha)) = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$v_0^2 = 2g e(1-\cos\alpha)$$

$$T = m \cdot \left(\frac{v_0^2}{e} + g \right)$$

$$= m \left(\frac{(2g e(1-\cos\alpha))}{e} + g \right) = 15,56 \text{ N}$$

3)



$$F_{cp} = \frac{mv^2}{R} = N + Mg$$

$$E = E_{pot} + E_{kin}$$

$$① E_1 = E_{pot} + 0 = mgH$$

$$② E_2 = E_{pot} + E_{kin} = mgH + \frac{1}{2}mv^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2$$

$$2gH = 4gR + v^2$$

$$v^2 = 2gH - 4gR$$

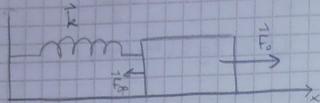
$$N = \frac{mv^2}{R} - g = m \frac{(2gH - 4gR)}{R} - gm = \frac{mg}{R}(2H - 5R) = 0$$

$$2H - 5R = 0$$

$$\boxed{H = \frac{5R}{2}}$$

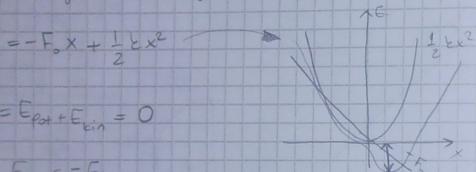
$$5) k=50 \text{ N/m}$$

$$F_0 = 3 \text{ N}$$



$$F(x) = F_0 - F_{op} = F_0 - kx$$

$$E_{pot} = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (F_0 - kx) dx =$$



$$E = E_{pot} + E_{kin} = 0$$

$$E_{kin} = -E_{pot}$$

maximum je u minimumu

$$\frac{d}{dx} E_{pot} = -F_0 + kx = 0$$

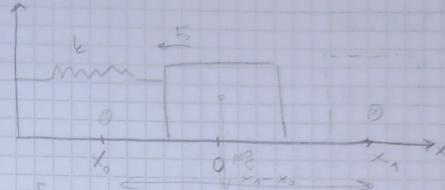
$$x = \frac{F_0}{k}$$

$$E_{kin} = F_0 \cdot \frac{F_0}{k} - \frac{1}{2} k \left(\frac{F_0}{k} \right)^2 = \frac{F_0^2}{2k}$$

$$5) m=1 \text{ kg}$$

$$k=100 \text{ N/m}$$

$$M=0,1$$



$$F_{op} = -kx \Rightarrow x_0 = -\frac{F_0}{k}$$

$$② E - E_{pot} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$E = \mu mg$$

$$E = \mu mg x$$

$$\mu mg dx = \mu mg (x_1 - x_0)$$

$$③ E_1 = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} k x_1^2 + \mu mg (x_1 - x_0)$$

2.O.E.

$$E_0 = E_1$$

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \mu mg (x_1 - x_0)$$

$$x_0 = 0,1$$

$$x_1, x_2$$

$$S = x_1 - x_0$$

7)

$$V_0 = 10 \text{ km/h}$$

$$\Delta t = 30 \text{ s}$$

$$P = 2 \text{ MW}$$

$$V_0 = ?, d = ?$$

$$W = P(t - t_0) = \Delta E_k =$$

$$= E_k(t) - E_k(t_0)$$

$$= \frac{m V^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2}$$

$$P(t - t_0) = \frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$$

$$V(t) = \sqrt{V_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)}$$

$$V = V(t_0 + \Delta t) = \sqrt{V_0^2 + \frac{2P}{m}(V_0 \cdot \Delta t - t_0)} = \\ = \sqrt{V_0^2 + \frac{2P}{m} \Delta t} = 56.7 \text{ km/h}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \sqrt{V_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)} dt = \\ = \left| \frac{t - t_0 - t_0}{dt - dt} \right| = \int_0^{\Delta t} \sqrt{V_0^2 + \frac{2P}{m} t'} dt' = \frac{3}{2} \frac{m}{2P} \left(V_0 + \frac{2P}{m} t' \right) \Big|_0^{\Delta t}$$

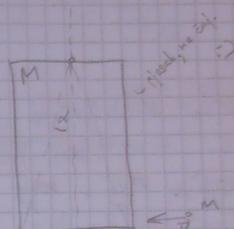
$$= \frac{m}{3P} \left(\left(V_0^2 + \frac{2P}{m} \Delta t \right) - V_0^2 \right)$$

$$2) M = 20 \text{ kg}$$

$$l = 5 \text{ m}$$

$$m = 15 \text{ g}$$

$$\alpha = 45^\circ$$



proj:

$$P = m \sin \alpha \cdot F \cdot l$$

E. O. G.

nach oben:

$$\vec{F} = (m+M) \cdot \vec{g} \quad \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{m+M}$$

$$m \vec{v} = (m+M) \vec{v} \quad \vec{v} = l(1-\cos\alpha)$$

$$\frac{1}{2} (m+M) \vec{v}^2 = (m+M) g l (1-\cos\alpha)$$

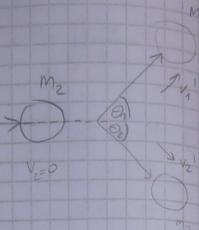
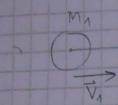
$$\frac{1}{2} (m+M) \vec{v}^2 = (m+M) g l (1-\cos\alpha)$$

$$\frac{1}{2} (m+M) \cdot \frac{(m \vec{v})^2}{(m+M)} = (m+M) g l (1-\cos\alpha)$$

$$(m \vec{v})^2 = 2(m+M)^2 g l (1-\cos\alpha)$$

$$v^2 = \frac{2(m+M)^2}{m^2} g l (1-\cos\alpha)$$

M.) Sustavno elastičan



$$p\vec{v}_1 = p\vec{v}_1' + p\vec{v}_2' \quad \leftarrow 20 \text{ KG}$$

2.O.E. ← energije uzmimo samo modul brzine

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 0$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' / 2$$

$$(\vec{v}_1)^2 = (\vec{v}_1')^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_2')^2$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 0$$

$$v_1' \cdot v_2' = 0 \quad \leftarrow \text{mora biti } 90^\circ$$

$$\boxed{\Omega_2 = \frac{\pi}{2} - \Omega_1}$$

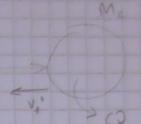
12) $m_1 = 1 \text{ kg}$

$$v_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$m_2 = 4 \text{ kg}$$

$$v_1' = ?$$

$$Q = 20 \text{ J}$$



$$\begin{aligned} E_{\text{kin, poč}} - E_{\text{kin, posle}} &= (1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{m_1 m_2 |v_1 - v_2|^2}{2(m_1 + m_2)} \\ &\quad \leftarrow \text{zute točki!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= 1 - \frac{2(E_{\text{kin}} - E_{\text{kin}}')}{m_1 m_2 |v_1 - v_2|^2} = 1 - \frac{2(E_{\text{kin}} - E_{\text{kin}}') (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v_1^2} = \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

$$v_1' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} - \varepsilon \cdot \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \quad \leftarrow \text{zute točki, } \varepsilon$$

$$= \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} - \varepsilon \cdot \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$