Kvantna računala

Teorija za MI

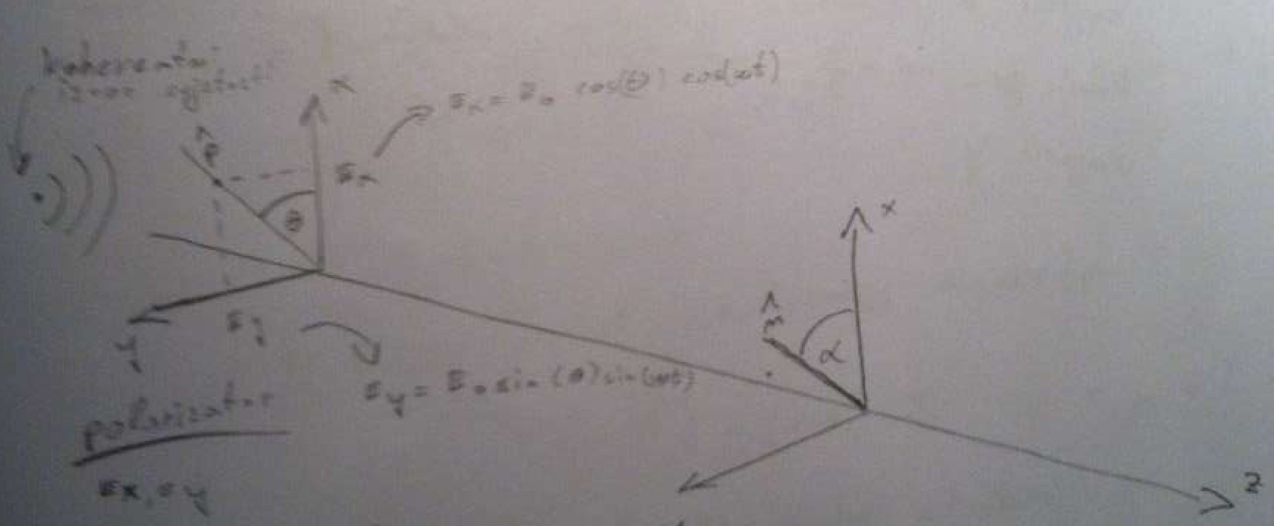
1. Definicija qbita

1.1 Polarizacija svjetlosti

- 1809. g. Chevalier Malus - demonstrirao polarizaciju svjetlosti kroz kristal

- električno polje svjetlosti je ortogonalno u odnosu na smjeru kretanja
  ($\uparrow$ okomitost (nepreklapajući))

- prirodna svjetlost je nepolarizirana jer dolazi iz nekoherentnog izvora svjetlosti



polarizator

E_x, E_y

$\hat{p} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\vec{E} = E_0 \hat{p} \cos(\omega t)$

projekcija polja u zadanom smjeru

$\vec{E}' = (\vec{E} \cdot \hat{a}) \hat{a}$

plohu na koju projiciramo

analizator

$\hat{m} = (\cos\alpha, \sin\alpha) = \cos\alpha\, \hat{x} + \sin\alpha\, \hat{y}$

izlaz iz analizatora je projekcija polja na $\hat{m}$:

$$\vec{E}' = (\vec{E} \cdot \hat{m})\, \hat{m} = E_0 \cos\omega t\, (\hat{p} \cdot \hat{m}) \cdot \hat{m}$$

$$= E_0 \cos\omega t\, (\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha) \cdot \hat{m}$$

$$= E_0 \cos\omega t \cos(\theta - \alpha)\, \hat{m}$$

polarizator - optički filter koji propušta svjetlost određene polarizacije a blokira valove ostalih polarizacija.

analizator - analizira svjetlost

Malusov zakon

početni intenzitet svjetlosti

$$I' = I_0 \cos^2 (\theta - \alpha)$$

intenzitet svjetlosti koji prolazi kroz analizator

$$I_{E'} = \underbrace{(E_0 \cos \omega t)^2}_{I_{E_0}} \cos^2 (\theta - \alpha) = I_{E_0} \cos^2 (\theta - \alpha)$$

napomena

kada je $\theta = 0$ onda je svjetlost polarizirana u smjeru x

kada je $\theta = \frac{\pi}{2}$ onda je svjetlost polarizirana u smjeru y

2. Vektorski prostor

def = matematička struktura koju tvori kolekcija elemenata koji se zovu vektori koji se mogu zbrajati i množiti skalarima.

vektorski

- velika slova - vektori, mala slova skalari

2.1 Aksiomi

1. komutativnost

$$x + y = y + x \quad , \quad x, y \in V \leftarrow \text{skup vektora}$$

2. asocijativnost

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad , \quad x, y, z \in V$$

3. Neutralni element (postojanost)

$$0 + x = x \quad , \quad 0, x \in V$$

neutralni element se zove nulti vektor

4. Postojanost zbrojnog inverza

$$\forall x \in V \text{ postoji } -x \text{ tako da je}$$

$$x + (-x) = 0$$

5. Asocijativnost skalarnog množenja

$$r(sX) = (rs)X \quad , \quad r, s \in F \leftarrow \text{skup skalara}$$

6. Distributivnost zbrajanja skalara

$$(r + s)X = rX + sX \quad , \quad r, s \in F \quad , \quad x \in V$$

7. Distributivnost zbrajanja vektora

$$r(X + Y) = rX + rY \quad , \quad r \in F \quad , \quad x, y \in V$$

8. Jedinični element skalarnog umnoška (postojanje)

$$1 \cdot X = X \quad , \quad x \in V \quad , \quad 1 \in F$$

2.2. Skalarni produkt

("dot product", "inner product")

- umnožak 2 vektora je skalar

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$$

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot \cos\theta$$

θ - kut između vektora

$|x|$, $|y|$ - norme vektora $\left(|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \right)$

svojstva:

$x \cdot y = 0$, x, y su okomiti

vrijedi:

Komutativnost

Asocijativnost

Distributivnost

<u>Unitarni prostor</u> - norma $|a| = \sqrt{(a, a)}$

vektorski prostor koji sadrži skup kompleksnih brojeva ($\mathbb{C}$) nad kojim je definiran skalarni produkt vektora ($(-,-)$ ← predstavlja operaciju skalarnog produkta) i zadovoljava aksiome:

1) $(a, b) = \overline{(b, a)}$; i: $(a, b) = (b, a)^*$

2) $(\alpha a, b) = \alpha (a, b)$

3) $(a + b, c) = (ac, bc)$

4) $a \neq 0$ onda je $(a, a) > 0$

skalarni kvadrat od broja koji nije 0 je pozitivan

- u takav prostor se mogu uvesti koncepti ortogonalnost i ortonormirani sustav vektora

2.3. Hilbertov prostor

- generalizacija Euklidskog prostora koji proširuje operacije vektorske algebre i razumanja na proizvoljan broj dimenzija
- omogućava mjerenje dužine i kuta
- def.
  - vektorski prostor sa definiranim skalarnim produktom oblika $(-,-)$ koji je potpun $^{(1)}$ metrički prostor
  - (1) Potpun prostor je prostor u kojem svaki Cauchy-ev niz konvergira

ta da je norma definirana sa:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2}$$

- baza Hilbertovog prostora

$\mathfrak{B} = \{ \ldots \}$ - familija vektora
  - svi vektori koji čine bazu moraju biti međusobno ortogonalni
  - svaki element familije ima normu (dužina im je 1)
    $\|e_k\| = 1$
  - svi podskupovi baze su određeni

- ortogonalizacija vektora
  - pronalazak familije vektora u kojoj su svi vektori međusobno ortogonalni
  - kada se radi sa unit vektorima onda se taj proces zove ortonormalizacija
  - proces:
    1) provjeriti da li su nezavisni (uvesti i izrazunati α, β)
    2) Gram - Schmidt postopak

- Gram - Schmidtov postupak

$$u_1 = v_1 \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2) \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$proj_a(b) = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a$$

2.4. Operator
- funkcija koja predstavlja matematičku operaciju
- zapis:

$$\overset{\text{operator}}{A} m = v \quad , A : \mathcal{H}^{(n)} \to \mathcal{H}^{(n)} \quad , m, v \in \mathcal{H}^{(n)}$$

- svojstva:

Linearnost:

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2$$

- Matrična reprezentacija

$$\mathcal{B} = \{\hat{e}_i\} \qquad \mathcal{B} = \{\hat{f}_i\}$$

$$A \hat{e}_i = \hat{f}_j \Rightarrow \sum_j \alpha_{ji} \hat{e}_i = \hat{f}_i$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \circ \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

$$A_{kl} = \hat{e}_k \cdot A \cdot \hat{e}_l$$

- Hermitski operator

$$\langle A \rangle = \int \varphi^*(r) \hat{A} \varphi(r) \, dr$$

- mora vrijediti

$$A = A^{+} \leftarrow \text{Hermitska konjugacija}$$

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle^*$$

$$\int \varphi_1^*(r) \hat{A} \varphi_2(r) \, dr = \int (\hat{A} \varphi_1(r))^* \varphi_2(r) \, dr \quad \rightarrow$$

svojstva:

1. imaju realne eigenvalues (vlastite vrijednosti)
2. vlastiti vektori koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima su ortogonalni
3. vlastiti vektori čine bazu vektorskog prostora

- unitarni operator
  - operacija prelaska iz jedne baze u drugu (predstavljat će logičke operatore pa ćemo pomoću njih graditi logička vrata)
- def.
  - linearni operator u Hilbertovom prostoru koji zadovoljava

$$\boxed{A^* A = A A^* = I}$$

$*$ - kompleksna konjugacija

- problem vlastitih vrijednosti
  - eigenvalue (vlastite vrijednosti)
    - skup skalara povezan sa linearnim sustavom jed.
    - matrica ima rješenje ako joj je determinanta 0
    - matrica $n \times n$ ima n vlastitih vrijednosti

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

λ - za 2×2 matricu

$$\lambda_{+/-} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{4 a_{12} a_{21} + (a_{11} - a_{22})^2}\right]$$

⊖ nalaze se na dijagonali dijagonalizirane matrice

- eigenvector (vlastiti vektor)
  - desni vektor

$$\det(A - \lambda_R I) = 0$$

  - lijevi vektor

$$\det(A^T - \lambda_L I) = 0$$

  - čine bazu tog vektorskog prostora

RA

- Diracova notacija (Bra - ket notacija)

$\langle \_ |$ - Bra

$| \_ \rangle$ - ket

$\langle \_ |$ - Bra

- redni vektor, $\langle A | = \sum_j \beta_j \langle a_j |$

$\langle A | = (A_1^* \; A_2^* \; \dots \; A_m^*)$

$| \_ \rangle$ - ket

- stupčasti vektor, $| B \rangle = \sum_i \alpha_i | b_i \rangle$

$$| B \rangle = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

- zapisi i značenje

$| A \rangle^{+} = \langle A |$

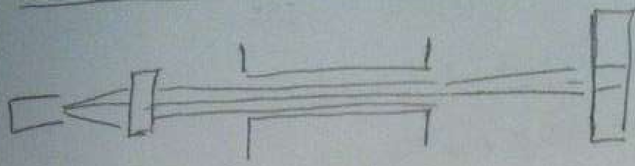
$\langle A | B \rangle = A_x^* B_x + A_y^* B_y + A_z^* B_z = \sum_i A_i^* B_i$

(skalarni produkt)

$\langle A | A \rangle = |A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2 = \sum_i |A_i|^2$

3. Uvod u QM

3.1. Stern - Gerlachov pokus



- opis
  - pustanje zrake čestica kroz nehomogeno magnetsko polje i proučavanje njihovog skretanja
  - kvantni kutni moment ima diskretan spektar
  - elektron, proton i neutron imaju samo dvije vrijednosti za spin

3.2. "Izvod" Schrödingerove jed.

- rješenje Sch. jed. za slobodnu česticu

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{E_p(x)}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = E\,\psi(x)$$

$$\psi(x) = Ae^{ax}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}a^2\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$a^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$$

$$a = i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^2 = 2mE$$

$$a = i\frac{p}{\hbar}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$a = i\frac{h}{\hbar\lambda} = i\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\psi(x) = A e^{i\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Postulati QM

P1. ψ potpuno opisuje kvantno-mehanički sustav

$\psi \in \mathcal{H}^\infty$

$\psi \in \mathcal{L}^{(n)}$ ← kvantno integrabilna

$\int \psi^* \psi \, dv =$ konačan broj

P2. ψ je određena Sch. jed. i rubnim uvjetima

P3. mjerljivim fizikalnim veličinama pridružujemo observable, hermitske operatore

$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$

P4. srednje vrijednost operatora može se dobiti integriranjem sa valnom funkcijom

$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^* A \psi \, dv$

$\langle \hat{A} \rangle = a$

$A \to \hat{A}$

$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$

Komutator

$$[A, B] = AB - BA$$

Svojstva:

$$[A, A] = 0$$

$$[A, B] = -[B, A]$$

$$[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

Relacija neodređenosti

$$|\sigma_x \sigma_p| \geq \frac{\hbar}{2}$$

pozicija

moment

- postoji granica preciznosti do koje možemo znati poziciju i moment čestice

Projektor

$\rightarrow \mathrm{proj}_v a = \frac{(a, v)}{(v, v)} v$

$$P_i = |v_i\rangle \langle v_i|$$

$$P_i |\psi\rangle = \sum_j a_j |v_j\rangle \overbrace{\langle v_i | v_j\rangle}^{\delta_{ij}} = \sum_j a_j |v_j\rangle \delta_{ij} = a_i |v_i\rangle$$

spektralna reprezentacija operatora

$$V_\lambda = (v \in V : Av = \lambda v)$$

$$A = \lambda_1 P_{\lambda 1} + \dots + \lambda_m P_{\lambda m}$$

ortogonalna projekcija

↳ zahtjeva $P = P^+$

$$\langle Px, y - Py \rangle = (Px)^T (y - Py) = x^T (P^T - P^T P) y = x^T (P - P^T P)^T y$$

vrijedi za x i y ako i samo ako $P = P^T$ i $P = P^2$

Tenzorski produkt ($\otimes$)

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

5. Spin
   - predstavlja intrinzični kutni impuls
   - može poprimiti strogo određene vrijednosti

$$L^2 = \hbar^2 s(s+1)$$

Paulijeve matrice

- Hermitske matrice koje predstavljaju observable spina po σ_k k-toj osi

vlastite vrijednosti

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{x\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{y\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \psi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- svojstva:

$$\det(\sigma_i) = 1$$