

Međuispit iz Kvantnih računala (21. studenog 2019.)

Ime, prezime i JMBAG:

Uputa:

- Ispit se sastoji od 10 zadataka u obliku pitanja s ponuđenim odgovorima.
- Odgovore koje smatrate točnima označite (zacrnite) na posebnom obrascu. Mogu se pojaviti zadaci u kojima je potrebno označiti više od jednog ponuđenog odgovora.
- U praznom prostoru pored zadatka ili na dodatnim papirima napišite obrazloženje ili računski postupak koji vas je doveo do rješenja koje smatrate točnim.
- Točno riješeni zadatak donosi 4 boda. Kazneni (negativni) bodovi se ne obračunavaju.

Notacija i terminologija:

- Vektori $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$.
- Pri realizaciji qubita stanjima polarizacije fotona, vektori $|0\rangle = |x\rangle$ i $|1\rangle = |y\rangle$ odgovaraju stanjima linearne polarizacije u x -smjeru i u y -smjeru, bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ obilježavamo simbolom \oplus , a bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm |y\rangle)\}$ obilježavamo simbolom \otimes .
- Pri realizaciji qubita projekcijom spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z -os uzimamo da $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju projekcijama $\hbar/2$ i $-\hbar/2$.
- Računalnu bazu u prostoru stanja dvaju qubitova obilježavamo s $\{|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle; i, j = 0, 1\}$.

1 Koji od navedenih vektora *nije* jedinični vektor?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

(b) $\frac{2}{3}|0\rangle + \frac{3}{4}|1\rangle$ **točno**

(c) $\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}i|1\rangle$

(d) $\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle$

(e) $\frac{5}{13}|0\rangle - \frac{12}{13}i|1\rangle$

2 Koji od ponuđenih vektora predstavlja stanje kvantnog bita koje je različito od sva četiri preostala stanja?

(a) $i\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

(b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

(d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ **točno**

(e) $-i\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

3 Qubit se nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Amplituda vjerojatnosti nalaženja tog qubita u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

je:

(a) 0 **točno**

(b) 1

(c) -1

(d) i

(e) -i

4 Kvantni bit nalazi se u stanju

$$\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\alpha} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle, \quad \vartheta, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vjerojstnost da taj kvantni bit bude izmjeren u stanju

$$\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\beta} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

(zaokruži istinitu tvrdnju)

- (a) ovisi o kutovima α i β , a ne ovisi o kutu ϑ .
- (b) ovisi o kutu ϑ , a ne ovisi o kutovima α i β .
- (c) može se izraziti kao funkcija kuta ϑ i zbroja kutova α i β .
- (d) može se izraziti kao funkcija kuta ϑ i razlike kutova α i β **točno**.
- (e) — ništa od gore navedenog nije istinito.

5 Očekivana vrijednost operatora

$$|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|$$

u sustavu koji se nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

je:

- (a) 1
- (b) $1/\sqrt{2}$
- (c) 0 **točno**
- (d) $-1/\sqrt{2}$
- (e) -1

6 Alice i Bob uspostavljaju tajni ključ protokolom BB84. Ako Alice za neki bit ključa odabere bazu \oplus , a Bob odabere bazu \otimes , kolika je vjerojatnost da će Bob za vrijednost tog bita dobiti vrijednost 0?

- (a) 0
- (b) $1/4$
- (c) $1/2$ **točno**
- (d) $3/4$
- (e) 1

- 7 Neka su stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ svojstvena stanja operatora energije (hamiltonijana) qubita pri čemu stanju $|0\rangle$ odgovara energija $\hbar\omega$, a stanju $|1\rangle$ odgovara energija 0. Ako se qubit početno nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

on će se u istom stanju po prvi puta naći nakon vremena

- (a) $2\pi/\omega$ **točno**
- (b) $\sqrt{2}\pi/\omega$
- (c) π/ω
- (d) $\pi/(2\omega)$
- (e) ∞ (neće se naći u tom stanju)

- 8 Izbacimo li jedan od pet ponuđenih vektora, preostala četiri čine ortonormiranu bazu u prostoru \mathcal{H}^4 . Koji vektor treba izbaciti?

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + i|11\rangle)$
- (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)$
- (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ **točno**
- (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$
- (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

9 Ako se sustav dvaju qubitova početno nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

te ako mjerenjem prvog qubita dobijemo vrijednost 0, kolika je vjerojatnost da nakon toga mjerenjem drugog qubita dobijemo vrijednost 1?

(a) 0 **točno**

(b) 1/4

(c) 1/2

(d) 3/4

(e) 1

10 Matrica

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prikazuje operator projekcije na stanje

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ **točno**

(e) — nijedno od navedenih.