

Međuispit iz Kvantnih računalā (1. prosinca 2016.)

Ime i prezime:

Uputa: Odgovore označite (zaokružite) na ovom papiru. Osim toga, u praznom prostoru pored ponuđenih odgovora ili na dodatnim praznim papirima, za svaki zadatak *napišite kratko obrazloženje ili računski postupak*. Točno riješeni zadaci donose tri boda (nema “negativnih bodova”).

Notacija: Uzimamo da vektori $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$. Kad se radi o stanjima polarizacije fotona, koristimo $|0\rangle \rightarrow |x\rangle$, $|1\rangle \rightarrow |y\rangle$, bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ obilježavamo simbolom \oplus , a bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm |y\rangle)\}$ obilježavamo simbolom \otimes .

Zadaci:

- 1 Neka vektori $|\Phi\rangle$ i $|\Psi\rangle$ prikazuju stanja nekog kvantnog sustava. Koja od navedenih tvrdnji je istinita?
 - (a) Veličina $\langle\Psi|\Phi\rangle$ je uvijek realan broj u intervalu $[0, 1]$.
 - (b) $\langle\Psi|\Phi\rangle$ je općenito kompleksan broj čiji modul može biti proizvoljno velik.
 - (c) $\langle\Psi|\Phi\rangle$ je općenito kompleksan broj čiji je modul u intervalu $[0, 1]$. **točno**
 - (d) Ako $\langle\Psi|\Phi\rangle = 0$, onda $\langle\Phi|\Psi\rangle = 1$.
 - (e) $\langle\Psi|\Phi\rangle = i \langle\Psi|\Phi\rangle^*$.
- 2 Kvantni sustav može iz stanja opisanog vektorom $|\alpha\rangle$ stići u stanje $|\gamma\rangle$ jedino ako pritom prođe kroz stanje $|\beta\rangle$. Ako je sustav početno u stanju $|\alpha\rangle$, vjerojatnost da sustav bude izmjeren u stanju $|\gamma\rangle$ je:
 - (a) $|\langle\gamma|\beta\rangle|^2$
 - (b) $|\langle\gamma|\alpha\rangle|^2$
 - (c) $|\langle\gamma|\beta\rangle|^2 + |\langle\beta|\alpha\rangle|^2$
 - (d) $|\langle\gamma|\beta\rangle + \langle\beta|\alpha\rangle|^2$
 - (e) $|\langle\gamma|\beta\rangle \langle\beta|\alpha\rangle|^2$ **točno**
- 3 Koji od navedenih vektora *nije* “normiran na jedinicu”?
 - (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$
 - (b) $\frac{4}{5}|0\rangle - \frac{3}{5}i|1\rangle$
 - (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2i|0\rangle + |1\rangle)$
 - (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}(|0\rangle + \frac{1}{2}i|1\rangle)$ **točno**
 - (e) $\frac{1}{3}|0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}|1\rangle$

4 Koja dva od pet navedenih vektora čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$?

(a) $\frac{4}{5}|0\rangle - \frac{3}{5}i|1\rangle$ **točno**

(b) $\frac{4}{5}|0\rangle + \frac{3}{5}i|1\rangle$

(c) $\frac{3}{5}|0\rangle - \frac{4}{5}|1\rangle$

(d) $\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}i|1\rangle$ **točno**

(e) $\frac{4}{5}|0\rangle - \frac{3}{5}|1\rangle$

5 Qubit se nalazi u stanju

$$\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle.$$

Amplituda vjerojatnosti nalaženja tog qubita u stanju

$$\frac{1}{3}|0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}i|1\rangle$$

je:

(a) $\frac{1}{6}(\sqrt{3} + 2i\sqrt{2})$

(b) $\frac{1}{6}(\sqrt{3} - 2i\sqrt{2})$

(c) $\frac{1}{6}(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

(d) $\frac{1}{6}(1 + 2i\sqrt{6})$

(e) $\frac{1}{6}(1 - 2i\sqrt{6})$ **točno**

6 Qubit se nalazi u stanju

$$\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle.$$

Vjerojatnost da taj qubit bude izmjeren u stanju

$$\cos \frac{\vartheta + \pi}{2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta + \pi}{2} |1\rangle$$

iznosi:

(a) 0 **točno**

(b) $1/(2\sqrt{2})$

(c) $1/\sqrt{2}$

(d) $1/2$

(e) 1

7 Vektor

$$\cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi/2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi/2} |1\rangle$$

opisuje stanje qubita. Stanje ostaje nepromijenjeno pri zamjeni

- (a) $\varphi \rightarrow \varphi + \pi/2$
- (b) $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$
- (c) $\vartheta \rightarrow \vartheta + \pi/2$
- (d) $\vartheta \rightarrow \vartheta + \pi$
- (e) $\vartheta \rightarrow \vartheta + 2\pi$ **točno**

8 Koji je od navedenih operatora jednak jediničnom operatoru I (operatoru identiteta)?

- (a) $|0\rangle\langle 1|$
- (b) $|1\rangle\langle 0|$
- (c) $|1\rangle\langle 1|$
- (d) $|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$
- (e) $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ **točno**

9 Svojstveni vektori i odgovarajuće svojstvene vrijednosti operatora

$$|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

su (dva točna odgovora):

- (a) vektor $|0\rangle + i|1\rangle$, vrijednost 1
- (b) vektor $|0\rangle - |1\rangle$, vrijednost -1 **točno**
- (c) vektor $|0\rangle - |1\rangle$, vrijednost $+1$
- (d) vektor $|0\rangle + |1\rangle$, vrijednost $+1$ **točno**
- (e) vektor $|0\rangle + |1\rangle$, vrijednost -1

10 Operator projekcije na stanje

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

je:

- (a) $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|)$
- (b) $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|)$
- (c) $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|)$
- (d) $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|)$ **točno**
- (e) $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|)$

11 Projekcija stanja qubita

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

na stanje

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

je:

- (a) $\frac{1}{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$
- (b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$
- (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}((1+i)|0\rangle + (1-i)|1\rangle)$
- (d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}((1+i)|0\rangle - (1-i)|1\rangle)$
- (e) $\frac{1}{2\sqrt{2}}((1-i)|0\rangle + (1+i)|1\rangle)$ **točno**

12 Matrični prikaz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odgovara operatoru:

- (a) $|0\rangle\langle 0|$
- (b) $|1\rangle\langle 0|$
- (c) $|0\rangle\langle 1|$ **točno**
- (d) $|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$
- (e) $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

13 Očekivana vrijednost operatora $|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ u sustavu koji se nalazi u stanju

$$\cos[\vartheta/2] e^{-i\varphi/2} |0\rangle + \sin[\vartheta/2] e^{i\varphi/2} |1\rangle$$

je:

(a) $\cos \vartheta$ **točno**

(b) $\cos^2 \vartheta$

(c) $\cos[\vartheta/2]$

(d) $\cos^2[\vartheta/2]$

(e) $\sin[\vartheta/2]$

(Može se koristiti trigonometrijski identitet $2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$.)

14 Tablica prikazuje uspostavljanje tajnog ključa protokolom BB84. Nadopunite četiri prazna mjesta u tablici.

Alice:	0	1	0	1	1	1	0	0	1	...
	⊗	⊗	⊕	⊕	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	...
	⊗	⊗	⊕	⊖	⊖	⊗	⊗	⊕	⊖	...
Eve:	⊕	⊗	⊕	⊕	⊗	⊕	⊕	⊕	⊗	...
	0	1	0	1	0	1	1	0	1	...
	⊕	⊗	⊕	⊖	⊗	⊗	⊖	⊕	⊗	...
Bob:	⊕	⊕	⊕	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	⊕	...
	0	0	0	1	0	1	1	0	1	...