

## Završni ispit iz Kvantnih računala (1. veljače 2017.)

Ime i prezime:

**Uputa:** Odgovore označite (zaokružite) *na ovom papiru*, a u praznom prostoru pored ponuđenih odgovora ili na dodatnim praznim papirima, za svaki zadatak napišite *kratko obrazloženje ili računski postupak*. Točno riješeni zadaci donose tri boda (nema "negativnih bodova").

**Notacija i terminologija:** Vektori  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  čine ortonormiranu bazu u  $\mathcal{H}^{(2)}$ . Pri realizaciji qubita stanjima polarizacije fotona,  $|0\rangle = |x\rangle$  i  $|1\rangle = |y\rangle$  odgovaraju linearnoj polarizaciji u  $x$ -smjeru i u  $y$ -smjeru, bazu  $\{|x\rangle, |y\rangle\}$  obilježavamo simbolom  $\oplus$ , a bazu  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm |y\rangle)\}$  obilježavamo simbolom  $\otimes$ . Pri realizaciji qubita projekcijom spina čestice spinskog kvantnog broja  $s = 1/2$  na  $z$ -os uzimamo da  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  odgovaraju projekcijama  $\hbar/2$  i  $-\hbar/2$ . Računalnu bazu u sustavu dvaju qubitova obilježavamo s  $\{|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle; i, j = 0, 1\}$ , a u prikazu vektor-stupcem imamo npr.  $|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Pojam *entanglement* prevodimo sa *spregnutost*.

### Zadaci:

- 1 Neka su stanja  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  svojstvena stanja operatora energije (hamiltonijana) qubita pri čemu stanju  $|0\rangle$  odgovara energija  $\hbar\omega$ , a stanju  $|1\rangle$  odgovara energija 0. Ako se qubit početno nalazi u stanju  $|0\rangle$ , on će se u stanju  $|1\rangle$  naći nakon vremena

- (a)  $2\pi/\omega$
- (b)  $\sqrt{2}\pi/\omega$
- (c)  $\pi/\omega$
- (d)  $\pi/(2\omega)$
- (e)  $\infty$  (neće se naći u tom stanju) **točno**

- 2 Neka su stanja  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  svojstvena stanja operatora energije (hamiltonijana) qubita pri čemu stanju  $|0\rangle$  odgovara energija  $\hbar\omega/2$ , a stanju  $|1\rangle$  odgovara energija  $-\hbar\omega/2$ . Ako se qubit početno nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

on će se u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

naći nakon vremena

- (a)  $2\pi/\omega$
- (b)  $3\pi/(2\omega)$
- (c)  $\pi/\omega$
- (d)  $\pi/(2\omega)$  **točno**
- (e)  $\infty$  (to se neće dogoditi)

3 U kojem od navedenih stanja sustava dvaju qubitova su stanja qubitova spregnuta ( $A$  je normalizacijska konstanta, a  $\alpha$  i  $\beta$  su koeficijenti različiti od nule)?

- (a)  $A(\alpha|01\rangle + \beta|11\rangle)$
- (b)  $A(\alpha|00\rangle + \alpha|11\rangle)$  **točno**
- (c)  $A(\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle)$
- (d)  $A(\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \alpha|10\rangle + \beta|11\rangle)$
- (e)  $A(\alpha|00\rangle - \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle - \beta|11\rangle)$

4 Matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

odgovara tenzorskom produktu

- (a)  $\sigma_1 \otimes \sigma_1$
- (b)  $\sigma_1 \otimes \sigma_2$
- (c)  $\sigma_2 \otimes \sigma_2$
- (d)  $\sigma_2 \otimes \sigma_3$
- (e)  $\sigma_3 \otimes \sigma_3$  **točno**

5 Koji od navedenih operatora je hermitski operator koji opisuje zbroj projekcija spinova dviju čestica ( $s = 1/2$ ) na  $z$ -os?

- (a)  $\hbar|01\rangle\langle 01| + \hbar|10\rangle\langle 10|$
- (b)  $\hbar|01\rangle\langle 01| - \hbar|10\rangle\langle 10|$
- (c)  $\hbar|01\rangle\langle 10| + \hbar|10\rangle\langle 01|$
- (d)  $\hbar|00\rangle\langle 00| + \hbar|11\rangle\langle 11|$
- (e)  $\hbar|00\rangle\langle 00| - \hbar|11\rangle\langle 11|$  **točno**

6 Sustav dvaju qubitova je realiziran projekcijama spinova čestica na  $z$ -os, a nalazi se u stanju

$$\frac{1}{2} |00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |11\rangle.$$

Operator stanja prvog qubita glasi

(a)  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$  **točno**

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$

(e)  $\begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

7 Stanje qubita je opisano operatorom stanja

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Očekivana vrijednost operatora prikazanog matricom  $\sigma_z$  je

(a)  $-1$

(b)  $-1/3$  **točno**

(c)  $0$

(d)  $1/3$

(e)  $1$

8 Koji od navedenih operatora je Hadamardov operator  $H$ ?

(a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$

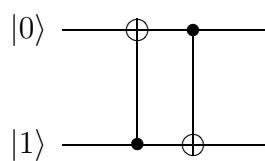
(b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$

(c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|)$

(d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}((|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| - (|0\rangle + |1\rangle)\langle 1|)$

(e)  $\frac{1}{\sqrt{2}}((|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|)$  **točno**

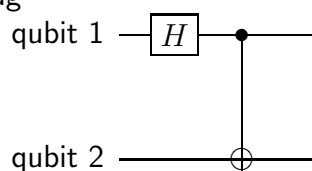
9 Stanje sustava na izlaznoj (desnoj) strani kvantnog logičkog kruga



je

- (a)  $|01\rangle$
- (b)  $|10\rangle$  **točno**
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$
- (d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$
- (e)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

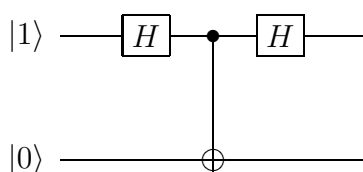
10 Shvatimo li kvantni logički krug



kao jedan operator, njegov matrični prikaz je

- (a)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  **točno**
- (b)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (d)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (e)  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

11 Na desnoj (izlaznoj) strani kvantnog logičkog kruga



dobivamo stanje

(a)  $\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$

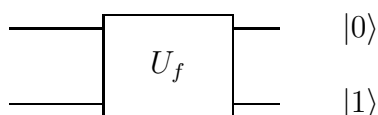
(b)  $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$

(c)  $\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$

(d)  $\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$  **točno**

(e)  $\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$

12 Ako vrata  $U_f$  predstavljaju implementaciju funkcije  $f$  sa svojstvom  $f(0) = f(1) = 1$  te ako na izlaznoj (desnoj) strani kvantnog logičkog kruga



imamo stanje  $|01\rangle$ , možemo zaključiti da na ulazu u krug imamo stanje

(a)  $|00\rangle$  **točno**

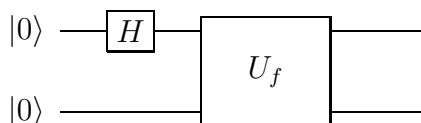
(b)  $|01\rangle$

(c)  $|10\rangle$

(d)  $|11\rangle$

(e) situacija sa slike nije moguća

13 U kvantnom logičkom krugu na slici vrata  $U_f$  predstavljaju implementaciju konstantne funkcije  $f(0) = f(1) = 0$ .



Stanje prvog (gornjeg) qubita na izlaznoj (desnoj) strani je

(a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  **točno**

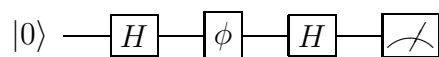
(b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

(c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$

(d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

(e) nije moguće prikazati vektorom stanja

14 Razmatramo kvantni logički krug



gdje je operator  $\phi$  definiran s  $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$  i  $|1\rangle \rightarrow e^{i\phi}|1\rangle$  pri čemu je faza  $\phi$  realan broj. Kolika je vjerojatnost da u mjerenju dobijemo vrijednost 0 tj. da qubit bude izmjeren u stanju  $|0\rangle$ ? (Podsjetnik:  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ )

- (a)  $\cos \phi$
- (b)  $\cos^2 \phi$
- (c)  $\frac{1}{2}(1 + \cos \phi)$  **točno**
- (d)  $\frac{1}{2}(1 - \cos \phi)$
- (e) 0