

Međuispit iz Kvantnih računalā (30. studenog 2017.)

Ime, prezime i JMBAG:

Uputa: Odgovore označite (zaokružite) *na ovom papiru*, a u praznom prostoru pored ponuđenih odgovora ili na dodatnim praznim papirima, za svaki zadatak napišite *kratko obrazloženje ili računski postupak*. Točno riješeni zadaci donose tri boda (nema “negativnih bodova”).

Notacija i terminologija: Vektori $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$. Pri realizaciji qubita stanjima polarizacije fotona, vektori $|0\rangle = |x\rangle$ i $|1\rangle = |y\rangle$ odgovaraju stanjima linearne polarizacije u x -smjeru i u y -smjeru, bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ obilježavamo simbolom \oplus , a bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm |y\rangle)\}$ obilježavamo simbolom \otimes . Pri realizaciji qubita projekcijom spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z -os uzimamo da $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovarju projekcijama $\hbar/2$ i $-\hbar/2$. Računalnu bazu u prostoru stanja dvaju qubitova obilježavamo s $\{|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle; i, j = 0, 1\}$. Pojam *entanglement* prevodimo sa *spregnutost*.

Zadaci:

1 Koji od navedenih vektora su jedinični vektori?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ **točno**

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}(|0\rangle + \frac{1}{2}i|1\rangle)$

(c) $\frac{1}{3}|0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}|1\rangle$ **točno**

(d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2|0\rangle + |1\rangle)$ **točno**

(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}(|0\rangle - \frac{1}{2}i|1\rangle)$

2 Koja dva od pet navedenih vektora čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}(1+i)|1\rangle$ **točno**

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}(1-i)|1\rangle$

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2}(1+i)|1\rangle$ **točno**

3 Neka se qubit nalazi u stanju $|\Phi\rangle = \frac{1}{5}(3|0\rangle + 4i|1\rangle)$. U kojem od pet navedenih stanja je vjerojatnost nalaženja tog qubita najmanja?

(a) $\frac{1}{13}(12i|0\rangle + 5|1\rangle)$

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2|0\rangle - i|1\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle - \sqrt{2}|1\rangle)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}|0\rangle + 2i|1\rangle)$

(e) $\frac{1}{3}(\sqrt{5}|0\rangle - 2i|1\rangle)$ **točno**

4 Vektor

$$\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle$$

opisuje stanje qubita. Stanje koje je ortogonalno tom stanju dobivamo zamjenom

(a) $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi, \quad \vartheta \rightarrow 2\pi - \vartheta$

(b) $\varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad \vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ **točno**

(c) $\varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad \vartheta \rightarrow \vartheta + \pi$

(d) $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi, \quad \vartheta \rightarrow \vartheta + \pi$

(e) $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi, \quad \vartheta \rightarrow \vartheta + 2\pi$

5 Koja dva od pet navedenih operatora su hermitski operatori?

(a) $i|1\rangle\langle 1|$

(b) $|0\rangle\langle 1|$

(c) $|1\rangle\langle 1|$ **točno**

(d) $i(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$

(e) $|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$ **točno**

6 Koja od pet navedenih jednakosti *ne* vrijedi?

(a) $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$

(b) $[\sigma_2, \sigma_1] = -2i\sigma_3$

(c) $[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1$

(d) $[\sigma_3, \sigma_2] = -2i\sigma_1$

(e) $[\sigma_3, \sigma_1] = -2i\sigma_2$ **točno**

7 Koji od navedenih vektora su svojstveni vektori operatora prikazanog Paulijevom matricom σ_2 ?

(a) $|0\rangle + |1\rangle$

(b) $|0\rangle - |1\rangle$

(c) $|0\rangle + i|1\rangle$ **točno**

(d) $i|0\rangle + |1\rangle$ **točno**

(e) $|0\rangle$

8 Alice i Bob uspostavljaju tajni ključ protokolom BB84, a Eve prisluškuje komunikaciju. Ako Alice za neki bit ključa odabere vrijednost 0 i bazu \oplus te Bob također odabere bazu \oplus , kolika je vjerojatnost da će Bob za vrijednost tog bita dobiti vrijednost 1?

- (a) 0
- (b) $1/4$ **točno**
- (c) $1/2$
- (d) $3/4$
- (e) 1

9 Hamiltonijan nekog qubita dan je s $H = \hbar\omega |0\rangle\langle 0|$, gdje je $\omega > 0$ konstanta. Ako je početno stanje sustava

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

on će se nakon vremena π/ω naći u stanju

- (a) $|0\rangle$
- (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$
- (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ **točno**
- (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$
- (e) $|1\rangle$

10 Sustav dvaju qubitova je realiziran projekcijama spinova dviju čestica ($s = 1/2$) na z -os, a nalazi se u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle).$$

Očekivana vrijednost projekcije spina prve čestice na z -os iznosi

- (a) $-\hbar$
- (b) $-\hbar/2$
- (c) 0
- (d) $+\hbar/2$ **točno**
- (e) $+\hbar$

11 Operator kojim u sustavu dvaju qubitova realiziranih orijentacijama spinova čestica ($s = 1/2$) na z -os opisujemo zbroj projekcija spinova na z -os je ($\sigma_0 = I$)

- (a) $\frac{\hbar}{2}(\sigma_3 + \sigma_3)$
- (b) $\frac{\hbar^2}{4}\sigma_3 \otimes \sigma_3$
- (c) $\frac{\hbar}{2}(\sigma_3 \otimes \sigma_0 + \sigma_0 \otimes \sigma_3)$ **točno**
- (d) $\frac{\hbar}{2}(\sigma_3 \otimes \sigma_0 - \sigma_0 \otimes \sigma_3)$
- (e) $\frac{\hbar^2}{4}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}$

12 Operator koji opisuje stanje nekog qubita glasi (matrica gustoće)

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Stanje tog qubita također možemo opisati s

- (a) $\frac{1}{2}(|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle)$.
- (b) $\frac{1}{2}(|0\rangle + i\sqrt{3}|1\rangle)$. **točno**
- (c) $\frac{1}{2}(|0\rangle - i\sqrt{3}|1\rangle)$.
- (d) Stanje tog qubita nije moguće opisati vektorom stanja.
- (e) Ništa od gore navedenog nije istinito.

13 Koji od navedenih operatora stanja (matrica gustoće) opisuju qubit koji se nalazi u miješanom stanju?

- (a) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ **točno**
- (c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **točno**
- (d) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

14 Matrični prikaz operatora M je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix},$$

gdje ϕ realan broj. Koje od navedenih tvrdnji su istinite?

- (a) M je hermitski operator.
- (b) M je unitaran operator. **točno**
- (c) M je mogući operator stanja qubita koji opisuje čisto stanje.
- (d) M je mogući operator stanja qubita koji opisuje miješano stanje.
- (e) Ništa od gore navedenog nije istinito.