Ljetni ispitni rok iz Matematičke analize 2
9.7.2020.

1. (**9 bodova**)

   (a) (**4b**) Neka je $f(x,y) = \sin(2x+3y)$. Izračunajte usmjerenu derivaciju funkcije f iz točke $T(-6,4)$ u smjeru vektora $\vec{h} = \sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}$. Zatim odredite jedinični vektor u smjeru kojeg funkcija f najbrže pada iz točke T te odredite pripadnu minimalnu vrijednost usmjerene derivacije funkcije f iz točke T.

   (b) (**3b**) Neka je $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom i konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^2$. Iskažite i dokažite teorem srednje vrijednosti za funkciju f.

   (c) (**2b**) Ako za funkciju f iz (b) dijela dodatno vrijedi da je $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ za sve $(x,y) \in U$, dokažite da je tada f konstantna funkcija na U.

2. (**7 bodova**)

   (a) (**3b**) Odredite prvi diferencijal funkcije $f(x,y) = e^{x^2} + \ln\frac{1}{xy}$ u točki $T(1,1)$ te pomoću dobivenog diferencijala aproksimirajte vrijednost $f(1.02, 0.9)$.

   (b) (**4b**) Odredite Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $f(x,y) = e^{x^2} + \ln\frac{1}{xy}$ oko točke $T(1,1)$ te pomoću dobivenog polinoma aproksimirajte vrijednost $f(1.02, 0.9)$.

3. (**8 bodova**) Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = xy + y^3 - z^2$ uz uvjete $y - z = 1$ i $y - x = 5$.

4. (**7 bodova**)

   (a) (**2b**) Izvedite Jacobijan transformacije iz pravokutnih u cilindrične koordinate.

   (b) (**5b**) Skicirajte i izračunajte volumen tijela određenog nejednadžbama

   $$z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}, \quad z \leqslant 2 - x^2 - y^2.$$

5. (**8 bodova**)

   (a) (**3b**) Iskažite i dokažite Leibnizov kriterij konvergencije reda brojeva.

   (b) (**5b**) Odredite područje konvergencije reda potencija

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n(n+2)}$$

   te ispitajte konvergenciju tog reda u rubovima dobivenog područja.

Okrenite!

6. (**5 bodova**) Odredite ortogonalnu familiju familije krivulja zadanih jednadžbom

$$xy = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

7. (**8 bodova**)

   (a) (**2b**) Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ diferencijalne jednadžbe $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

   (b) (**6b**) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{1}{x+y}dx + \left(\frac{2\ln(x+y)}{y} + \frac{1}{x+y}\right)dy = 0.$$

8. (**8 bodova**)

   (a) (**2b**) Neka je $Ly = f$ nehomogena operatorska jednadžba. Ako je y_h bilo koje rješenje pripadne homogene jednadžbe, pokažite da je tada $y_h + y_p$ rješenje pripadne nehomogene jednadžbe, gdje je y_p partikularno rješenje.

   (b) (**6b**) Riješite sljedeću Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = -\dfrac{1}{x^2}e^x, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Ispit se piše 150 minuta. *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje i službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 2.*