Drugi jesenski ispitni rok iz Matematičke analize 2
07.09.2020.

1. **(7 bodova)** Presjekom ploha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $x + z = 5$ dobivena je krivulja C.

   (a) **(1b)** Skicirajte i imenujte plohu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (b) **(2b)** Odredite neku parametrizaciju krivulje C.

   (c) **(4b)** Odredite sve točke $T(x_T, y_T, z_T)$ krivulje C za koje vrijedi da tangenta na krivulju u točki T ujedno siječe x-os u nekoj točki A.

2. **(7 bodova)** Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i točka $P \in \mathbb{R}^2$ takva da je $\nabla f(P) \neq \vec{0}$. Za navedene tvrdnje napišite jesu li istinite ili lažne. Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom.

   T1: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$.

   T2: Ako je $\vec{v} \in V^2 \setminus \{\vec{0}\}$ vektor smjera tangente na nivo krivulju od f u točki P, onda je $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = 0$.

   T3: Ako su $\vec{h}_1, \vec{h}_2 \in V^2 \setminus \{\vec{0}\}$ kolinearni vektori, onda je $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{h}_1}(P) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{h}_2}(P)$.

3. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Iskažite nužan uvjet koji mora zadovoljavati točka T da bi bila točka uvjetnog lokalnog ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uz uvjet $\varphi(x, y) = 0$.

   (b) **(7b)** Metodom Lagrangeovih multiplikatora nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ uz uvjet $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$.

4. **(7 bodova)**

   (a) **(1b)** Iskažite Fubinijev teorem za dvostruki integral.

   (b) **(3b)** Skicirajte područje integracije i promijenite poredak integracije za

   $$\int_0^2 x\,dx \int_2^{2+\sqrt{4-x^2}} dy.$$

   (c) **(3b)** Izračunajte integral pod (b).

Okrenite!

5. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Dokažite da vrijedi: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, za $|q| < 1$.

   (b) **(2b)** Iskažite teorem o derivaciji reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ zajedno s tvrdnjom o polumjeru konvergencije R.

   (c) **(4b)** Izračunajte sumu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^{3n}}.$$

6. **(6 bodova)**

   (a) **(3b)** Izvedite formulu za opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe
$$y' + f(x)y = g(x).$$

   (b) **(3b)** Koristeći (a), pronađite opće rješenje jednadžbe
$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

7. **(8 bodova)**

   (2b) Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(x)$ diferencijalne jednadžbe $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, te odredite uvjet uz koji on postoji.

   (6b) Nađite Eulerov multiplikator oblika $\mu(x)$ i riješite pripadni Cauchjev problem:
$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

8. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Pronađite $a, b \in \mathbb{R}$ takve da su funkcije $y_1(x) = e^{3x}$ i $y_2(x) = \cos(x)$ rješenja diferencijalne jednadžbe $y''' + ay'' + y' + 3by = f(x)$ gdje je $f(x) \equiv 0$.

   (b) **(6b)** Za dobivene a i b te za $f(x) = 3x^2 + 2e^{3x}$ riješite diferencijalnu jednadžbu iz (a).

Ispit se piše 150 minuta i nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala osim službenog podsjetnika iz Matematičke analize 2.