JESENSKI ISPITNI ROK: *MATEMATIKA 2*
7.9.2015.

1) **[4 boda]**
   - **a) [1 bod]** Definiraj skalarnu projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.
   - **b) [3 boda]** Nađite skalarnu projekciju vektora $\vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ na vektor $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 3, |\vec{n}| = 2,\ \measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

2) **[5 bodova]**
   - **a) [3 boda]** Zadan je pravac $\boldsymbol{p}$ u vektorskom obliku $\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r_0}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{c}},\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ i točka $\mathbf{T_1}$ svojim radijvektorom $\vec{r_1}$. Izvedite formulu za udaljenost točke $\mathbf{T_1}$ od pravca $\boldsymbol{p}$, te skicirajte sliku.
   - **b) [2 boda]** Zadan je trokut ΔABC ; $A(3, 0, 1), B(5, 2, 3), C(3, 5, 2)$. Odredite duljinu visine $\boldsymbol{v_c}$ iz vrha **C**.

3) **[5 bodova]** Zadana je ploha $\boldsymbol{z = k(x^2 + y^2)}$ gdje je $\boldsymbol{k}$ neki realan broj.
   - **a) [3 boda]** Odredite $\boldsymbol{k_0}$ takav da je presjek plohe $\boldsymbol{z = k_0(x^2 + y^2)}$ s ravninom $\boldsymbol{z = 2}$ kružnica radijusa 1. Imenujte i skicirajte tu plohu.
   - **b) [2 boda]** Skicirajte nivo krivulje plohe pod **a)** za $\boldsymbol{c = 0}$, $\boldsymbol{2}$ i $\boldsymbol{4}$, te odredite nivo krivulju koja prolazi stacionarnom točkom te plohe.

4) **[4 boda]** Visina pravilnog valjka se smanjuje brzinom od 3 mm/s dok se radijus povećava brzinom 2 mm/s. Kolika je brzina $\frac{dV}{dt}$ promjene volumena V u trenutku kada je radijus $r = 50\ mm$, a visina $v = 100\ mm$? ***Uputa:*** Izrazite volumen V kao funkciju radijusa i visine.

5) **[7 bodova]**
   - **a) [5 bodova]** Nađite i ispitajte točke lokalnih ekstrema funkcije
   $$\boldsymbol{z = arctg(x + y)}$$
   uz uvjet $x^2 + y^2 = 8$.

   - **b) [2 boda]** Neka je $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija i neka je $\boldsymbol{\varphi(x, y) = 0}$ zadana ploha. Dokažite da za Langrangeovu funkciju $\boldsymbol{L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)}$ vrijedi:
   $$\boldsymbol{\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(T_0)\, dx + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(T_0)\, dy = 0}$$
   pri čemu je $\boldsymbol{T_0}$ proizvoljna točka na plohi $\varphi(x, y) = 0$.

6) [5 bodova]

a) **[1 bod]** Definirajte apsolutnu konvergenciju reda brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

b) **[2 boda]** Koje su od slijedećih tvrdnji istinite, a koje nisu:

(T1) Ako je red konvergentan, onda je i apsolutno konvergentan.

(T2) Ako je red apsolutno konvergentan, onda je i konvergentan.

Za neistinite tvrdnje navedite protuprimjer.

c) **[2 boda]** Ispitajte konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\mathbf{3}\boldsymbol{n} + \sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

7) [5 bodova]

a) **[4 boda]** Funkciju

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{3} + \mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}})^{\mathbf{2}}$$

razvijte u Taylorov red oko $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ te odredite pripadni radijus konvergencije.

b) **[1 bod]** Izračunajte koeficijent koji u Taylorovom razvoju funkcije f stoji uz potenciju $\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$.

8) [5 bodova] Nađite krivulju koja prolazi točkom (2, 1) i u svakoj točki (x_0, y_0) te krivulje njena normala ima koeficijent smjera jednak $\frac{2x_0y_0}{{y_0}^2-{x_0}^2}$.

9) [5 bodova] Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\mathbf{2}\boldsymbol{y}'' + \mathbf{4}\boldsymbol{y}' + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$$

10) [5 bodova]

a) **[1 bod]** Definirajte Wronskijan $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{y}_{\mathbf{2}})(\boldsymbol{x})$ funkcija $y_1(x)$ i $y_2(x)$.

b) **[1 bod]** Dokažite da $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{y}_{\mathbf{2}})(\boldsymbol{x}) \not\equiv \mathbf{0}$ povlači da su y_1 i y_2 linearno nezavisne funkcije.

c) **[3 boda]** Neka su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadžbe

$$\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{q}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}$$

Odredite rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ za slučajeve $\boldsymbol{q} < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{q} > \mathbf{0}$ te pokažite da Wronskijan $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{y}_{\mathbf{2}})(\boldsymbol{x})$ u sva tri slučaja ne ovisi o $\boldsymbol{x}$.