Dekanski ispitni rok iz Matematičke analize 2
15.09.2020.

1. **(7 bodova)** Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$
Može li se f proširiti do funkcije $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tako da
   (a) **(3b)** F bude neprekinuta?
   (b) **(4b)** F bude diferencijabilna?

   Svoje odgovore dokažite i detaljno obrazložite.

2. **(8 bodova)** Funkcija $z = z(x,y)$ zadana je implicitno jednadžbom
$$e^{z-x} + e^{z-y} = 1.$$
   (a) **(3b)** Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)$.
   (b) **(2b)** Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf te funkcije u točki $(0,0,z)$.
   (c) **(3b)** Dokažite da je tangencijalna ravnina povučena u bilo kojoj točki grafa ove funkcije okomita na ravninu $x+y+z=0$.

3. **(7 bodova)**
   (a) **(2b)** Nadopunite tvrdnju:
   Funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na omeđenom i zatvorenom skupu D poprima __________ minimum i __________ maksimum. Točke u kojima se ti ekstremi mogu postići su __________ i __________ .
   (b) **(5b)** Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = 4x + 6z$ na kugli $x^2+y^2+z^2 \leq 52$. Koliko iznosi minimalna i maksimalna vrijednost te funkcije na zadanoj kugli?

4. **(8 bodova)**
   (a) **(1b)** Definirajte Jakobijan preslikavanja $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$.
   (b) **(7b)** Zamjenom varijabli izračunajte integral
$$\iint_P \frac{\ln(3x+y)}{9x^2-y^2}\, dxdy,$$
   gdje je P paralelogram određen pravcima $3x+y=3$, $3x+y=9$, $3x-y=3$, $3x-y=9$.

Okrenite!

5. **(8 bodova)**

   (a) **(4b)** Ispitajte konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ u ovisnosti o parametru $p \in \mathbb{R}$.

   (b) **(2b+2b)** Ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 2n + 1} - n\sqrt{n}\,\right) \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

6. **(7 bodova)** Promatramo diferencijalnu jednadžbu

$$(Ax + By)\,dx + (Cx + Dy)\,dy = 0,$$

   gdje su barem jedna od konstanti A i B, te barem jedna od konstanti C i D različite od nule.

   (a) **(2b)** Pokažite da je ovo diferencijalna jednadžba homogenog stupnja i odredite joj stupanj homogenosti.

   (b) **(1b)** Ako je $C \neq 0$ i $D = 0$, pokažite da je ovo također linearna diferencijalna jednadžba prvog reda.

   (c) **(4b)** Riješite jednadžbu iz (b) metodom po vlastitom izboru.

7. **(7 bodova)** Odredite familiju krivulja sa svojstvom da tangenta u bilo kojoj točki $T(x_0, y_0)$ te krivulje, presjeca pozitivni dio osi y u točki S koja je jednako udaljena od ishodišta i točke T.

8. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Ispitajte linearnu nezavisnost funkcija $y_1 = e^{2x}$ i $y_2 = \operatorname{sh} 2x$.

   (b) **(6b)** Riješite diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - 4y = \operatorname{sh} 2x.$$

Ispit se piše 150 minuta i nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala osim službenog podsjetnika iz Matematičke analize 2.