Završni ispit iz Matematičke analize 2
01.07.2019.

1. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Neka je $f : [1, \infty\rangle \to [0, \infty\rangle$ neprekidna i padajuća funkcija takva da nepravi integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergira. Dokažite da tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, gdje je $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

   (b) **(3b)** U ovisnosti o parametru $r \in \mathbb{R}$ ispitajte konvergenciju generaliziranog harmonijskog reda
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}.$$

   (c) **(4b)** U ovisnosti o parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ispitajte konvergenciju reda
   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[4]{n^4-1} \right).$$

2. **(6 bodova)**

   (a) **(2b)** Razvijte u red potencija oko točke $x_0 = 0$ funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$ koristeći se poznatim razvojima.

   (b) **(2b)** Odredite područje konvergencije i ispitajte ponašanje na rubu tog područja za red dobiven u (a).

   (c) **(2b)** Pomoću dobivenog razvoja iz (a) izračunajte sumu
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

3. **(7 bodova)**

   (a) **(4b)** Odredite sve krivulje sa sljedećim svojstvom: duljina odsječka na osi Oy koji isijeca tangenta na krivulju u točki (x_0, y_0) jednak je y_0^2.

   (b) **(3b)** Pokažite da su familije krivulja
   $$2x^2 + 5y^2 = C_1,\ C_1 > 0,$$
   $$y = C_2\sqrt{x^5},\ C_2 \in \mathbb{R},$$
   međusobno ortogonalne familije.

Okrenite!

4. **(9 bodova)**

   (a) **(3b)** Izvedite formulu za Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$ diferencijalne jednadžbe
   $$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$
   te odredite uvjet uz koji taj multiplikator postoji.

   (b) **(6b)** Riješite Cauchyjev problem
   $$\begin{cases} (\cos x + y)\, dx + \left(3x + \dfrac{2}{y}\sin x\right) dy = 0, \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

5. **(9 bodova)**

   (a) **(3b)** Koje su od sljedećih tvrdnji istinite? Istinite dokažite, a neistinite opovrgnite protuprimjerom ili obrazložite.

   (T1) Ako $W(y_1, \ldots, y_n)$ nije identički nula, tada su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisne funkcije.

   (T2) Ako je $\{y_1, y_2\}$ baza rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda, tada postoji x takav da je $W(y_1, y_2)(x) = 0$.

   (b) **(6b)** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe
   $$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

6. **(10 bodova)**

   (a) **(2b)** Dokažite da su funkcije
   $$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = \cos(3x),\ y_4(x) = \sin(3x)$$
   linearno nezavisne.

   (b) **(2b)** Odredite homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu najmanjeg mogućeg reda čija su rješenja funkcije iz (a).

   (c) **(6b)** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe
   $$y''' - 2y'' + 5y' = xe^x.$$

Napomena: Ispit se piše 120 minuta i dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala.