Redovi

S_n je parcijalna suma a_n, R_n je parc. suma b_n, T_n je parc. suma a_n+b_n, P_n je parc. suma λa_n

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira prema A i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira prema B $\Rightarrow$ Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n+b_n$ konvergira i suma mu je $A+B$

sve su parcijalne sume konačne $\Rightarrow T_n = S_n + R_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n+R_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{=A} + \lim\limits_{n\to\infty} R_n^{=B} = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = A+B$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira prema $A \Rightarrow$ Red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ konvergira i suma mu je λA

sve su parcijalne sume konačne $\Rightarrow P_n = \lambda S_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lambda A$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow$ Red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ divergira za $\lambda \neq 0$

pretpostavimo da red λa_n konvergira, tada po prošlom teoremu $\frac{1}{\lambda}\lambda a_n$ konvergira $= a_n$ što je kontradiktno pretpostavci

Nužan uvjet konvergencije: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s negativnim članovima konvergira $\Leftrightarrow$ niz parcijalnih suma S_n je omeđen odozgo

Niz S_n je rastući/monoton. Ako je niz monoton i ograničen onda je konvergentan.

Ako je niz konvergentan tada je i omeđen odozgo

Poredbeni kriterij - direktni: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sa nenegativnim članovima t.d. $a_n < b_n$ za $n \geq N \in \mathbb{N}$

a) Ako a_n div $\Rightarrow b_n$ div

b) Ako b_n konv $\Rightarrow a_n$ div

pretpostavljamo $N=1$ (isto za svaki N). Po pretpostavci $S_n \leq R_n$

a) S_n nije ograničen odozgo pa nije ni R_n

b) R_n je ograničen odozgo pa je S_n

Poredbeni kriterij - limes: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sa nenegativnim članovima t.d $b_n \neq 0$ za $n \geq N$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, $0<L<\infty \Rightarrow$ oba reda div ili oba reda konv

Stavimo $\varepsilon = \frac{L}{2}$ u definiciju limesa dobivamo $\exists N \in \mathbb{N}$ t.d $\forall n \geq N$ vrijedi $\frac{1}{2}L < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L$ odnosno $\frac{1}{2}L b_n < a_n < \frac{3}{2}L b_n$, te po prethodnom teoremu:

Ako a_n konv $\Rightarrow \frac{L}{2} b_n$ konv $\Rightarrow b_n$ konv, te analogno ostale tvrdnje

D'Alambertov kriterij - a_n neneg, $a_n>0$ za $n \geq M$: 1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, $q \in [0,1]$ $\forall n \geq N \geq M \Rightarrow a_n$ konv 2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ $\forall n \geq N \geq M \Rightarrow a_n$ divergentan

Pretpostavljamo $N=M=1$

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow a_2 \leq a_1 q$, indukcijom se lako pokaže $a_{n+1} \leq a_1 q^{n-1}$ što po direktnom poredbenom kriteriju daje konvergenciju

b) Indukcijom dobivamo $a_n \geq a_1$ pa ne zadovoljava nužan uvjet konvergencije

D'Alambertov kriterij - limes: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow q<1$ konv, $q>1$ div, $q=1$ neodlučan

Stavimo $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n > N$ $a_n < q + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ što po prošlom teoremu konvergira $q<1$

Stavimo $\varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0 \Rightarrow \exists N$ t.d. $\forall n > N$ $a_n > q - \varepsilon = 1 + \varepsilon$ što po prošlom divergira $q>1$

$\frac{1}{n}$ div, $q=1$ $\quad \frac{1}{n^2}$ konv, $q=1$

Cauchyjev kriterij - a_n nenegativni: $\exists N$, $\forall n \geq N$, $0<q<1$ $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv; $\exists N$ $\forall n \geq N$, $q \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan

Pretpostavimo $N=1$

$\sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow a_n \leq q^n$, geometrijski konv. red. + poredbeni kriterij za $0<q<1$

$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ nije zadovoljen Nužni uvjet konvergencije

Cauchyjev kriterij - limes: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow q<1$ konv, $q>1$ div, $q=1$ neodlučan

$q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon < 1-q$ postoji $n(\varepsilon)$ t.d $\forall n \geq n(\varepsilon)$ vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = q_1 < 1$ pa za $N = n(\varepsilon)$ primjenjujemo prošli teorem

$q \geq 1 \Rightarrow \forall \varepsilon \leq q-1$ postoji $n(\varepsilon)$ t.d $\forall n > n(\varepsilon)$ vrijedi $\sqrt[n]{a_n} \geq q - \varepsilon = q_1 \geq 1$ pa Nužan uvjet konv daje da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira

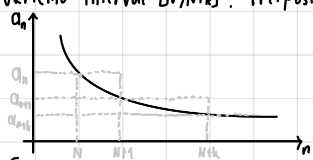
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$

Integralni kriterij

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s neneg članovima i $f(x)$ padajuća za $x>N$, integrabilna na svakom intervalu $[b,c] \subseteq [N,\infty\rangle$ i $f(n) = a_n$ za $n>N$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x)dx < \infty$

$\Rightarrow$ f integrabilna $\Leftrightarrow \exists P(a,b) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. f pozitivna $\Rightarrow$ integral jednak površini ispod grafa.

Uzmemo interval $[N, N+k]$. Pretpostavimo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv, sa sumom S.



Suma $a_N \cdot 1 + a_{N+1} \cdot 1 + a_{N+2} \cdot 1 + \ldots + a_{N+k-1} \cdot 1 = S_{N+k-1} - S_{N-1}$ = površina pravokutnika opisanih području omeđenog grafom funkcije i x-osi

Znači da je $S_{n+k-1} - S_{N-1} \geq P(N,N+k)$ gdje $P(N,N+k) = \int_N^{N+k} f(x)dx$ odnosno za limes $k\to\infty$: $S - S_N \geq \int_N^{\infty} f(x)dx$ odnosno $\int_N^{\infty} f(x)dx < \infty$

$\Leftarrow$ $\int_N^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow$ Suma $a_{N+1} \cdot 1 + \ldots + a_{N+k} \cdot 1 = S_{N+k} - S_N$ = površina upisanih pravokutnika $\Rightarrow S - S_N \leq P(N,N+k)$ te za lim $k\to\infty$: $S - S_N \leq \int_N^{\infty} f(x)dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv

Apsolutno konvergentan red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.

Definiramo $b_n = \begin{cases} a_n & \text{za } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{za } a_n < 0 \end{cases}$ i $c_n = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n > 0 \\ -a_n & \text{ako je } a_n \leq 0 \end{cases}$ koji imaju neneg. čl.

$a_n = b_n - c_n$, $b_n \leq |a_n|, c_n \leq |a_n| \Rightarrow b_n$ i c_n konv po paredbenom kriteriju

$\Rightarrow$ po teoremu zbroja redova, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

Leibnizov kriterij - ako alternirani red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ zadovoljava nužan uvjet konv. i $\exists N, \forall n \geq N, a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$ red konvergira

Uzimamo $N=1$

Niz parnih parc.suma S_{2n} je rastući: $S_{2(n+1)} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$ i omeđen odozgo s a_1 $(S_{2n} = a_1 + (-a_2 + a_3) \dots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n})$ $\Rightarrow$ konv u S_2

Niz neparnih p. suma S_{2n+1} je padajući: $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ i omeđen odozdo s 0 $(S_{2n+1} = (a_1 - a_2) \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0)$ $\Rightarrow$ konv u S_1

$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ limesiramo: $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}}_{=S_1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{2n}}_{=S_2} = 0 \Rightarrow S_1 = S_2$ $\quad \{S_n\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n-1}\}$

Umnožak redova - $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. sume neneg. članova $\Rightarrow c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira i suma mu je $C = AB$

Neka su A_n, B_n i C_n parc. sume. $C_n \leq A_n B_n \leq AB$, C_n rastući $\Rightarrow$ red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira i $C \leq AB$, no vrijedi $A_n B_n \leq C_{2n-1} \Rightarrow C = AB$

Mertensov teorem

Neka su $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. redovi od kojih je jedan apsolutno konv $\Rightarrow$ umnožak redova $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konv, $C = AB$

Redovi potencija

Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ konvergira apsolutno na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ za neki $R \in [0, \infty)$, divergira na skupu $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$

Pojednostavimo $x_0 = 0$, pretpostavimo da konv za neki x_1. Nužni uvjet konvergencije daje $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n||x_1|^n < 1$

$\forall x$ t.d $|x| < |x_1|$, $\forall n \geq n_1$: $|a_n x^n| = |a_n||x_1|^n \frac{|x|^n}{|x_1|^n} < q^n$ $\left(\frac{|x|}{|x_1|} = q < 1\right)$ $\Rightarrow$ red konv po paredbenom kriteriju

$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \text{red konv za } x\}$

Cauchy-Hadamardov teorem - $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Pojednostavimo $x_0 = 0$

Primjenimo D'Alamberta $\left(q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ na apsolutnu konvergenciju: $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ konv za $q < 1 \Rightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Za drugu formulu koristimo Cauchya $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ konv za $q < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Za niz b_n $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m \geq n} \{b_m\}$, $\limsup$ je najveća točka gomilanja niza b_n

Za treću formulu stavimo $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ i vidimo $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ t.d $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} > R - \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R-\varepsilon}$:

$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x|}{R-\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon$ $\quad$ za $|x| < R - \varepsilon$ red konv po Cauchy $\Rightarrow R$ je polumjer konv

Bitni taylorovi redovi

$x_0 = 0$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $\quad x \in (-1, 1)$

$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ $\quad x \in (-1, 1)$

$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

Derivacija i integral analitičke funkcije

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$, isti R

$\int f(x)dx = C + a_0(x-x_0) + \frac{1}{2}a_1(x-x_0)^2 + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x-x_0)^{n+1}$, isti R

Red potencija analitičke funkcije f na skupu S je taylorov red

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\quad$ uvrštimo $x = x_0$, $f(x_0) = a_0$

deriviramo i uvrstimo $x = x_0$ $f'(x_0) = a_1$, indukcijom lako se pokaže $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

Abelov teorem

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergentan na $(-1, 1)$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow f(x)$ ima lijevi lim u $x = 1$ i vrijedi $\lim_{n\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(f_n) niz funkcija konv. jednoliko prema f na skupu S. f_n neprekinute u $x_0 \in S \Rightarrow f$ neprekinuta u x_0

Neka je $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki $x \in S$ (to za konv. po točkama ne vrijedi).

f_{n_0} neprekidna u $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.d. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. $\quad$ Za $x \in S$ t.d $|x - x_0| < \delta$ dobivamo:

$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ $\quad$ a to znači da je f neprekidna u x_0

S je područje konv. reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \Rightarrow$ niz funkcija $f_{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i$ konvergira na svakom zatvorenom intervalu od S

(f_n) niz funkcija konv jednoliko prema f na $[a,b]$ $\Rightarrow$ niz funkcija $(\int_a^x f_n(t)dt)$ konv jednoliko prema $\int_a^x f(t)dt$ na $[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$:

$\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leq (x-a)\frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$ $\quad \Rightarrow$ niz $\left(\int_a^x f_n(t)dt\right)$ konv prema $\int_a^x f(t)dt$ za $x \in [a,b]$

Prošli i ovaj teorem daju $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x-x_0)^{n+1}$ u teoremu integrala analitičke f

(f_n) konv, derivacije f_n' su neprekinute, (f_n') konv jednoliko $\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ za $x \in [a,b]$

Diferencijalne jdb. prvog reda

Formulom $y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds} dt\right)$ su određena sva rj. lin. diff. jdb $y' + f(x)y = g(x)$, odnosno njom je dano opće rj. jdb.

$$y' + f(x)y = g(x) \quad / \cdot e^{\int f(s)ds}$$
$$y'(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + f(x)y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} = g(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$
$$= \left(y(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\right)' = g(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} \quad / \int$$
$$y(x) e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds} dt \quad / \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$
$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds} dt\right)$$

Ortogonalne trajektorije

Krivulje su međusobno ortogonalne ako su im tangente u svakom sjecištu okomite $\equiv$ za svaki x_0 t.d. $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ vrijedi $y_1'(x_0) = -\frac{1}{y_2'(x_0)}$

1) familiji krivulja $\phi(x, y, c_1) = 0$ odredimo diff. jdb $F_1(x, y, y') = 0$ direktnim deriviranjem i eliminiranjem c — 1) $y = ce^{x^2} \Rightarrow (c = ye^{-x^2})$ $y' = 2cxe^{x^2} = 2ye^{-x^2}xe^{x^2} = 2xy$

2) iz uvjeta ortog. zamjenimo y' sa $\frac{-1}{y'}$ pa iz $F_1(x, y, y')$ dobijemo $F_1 = F_2(x, y, -1/y') = 0$ — 2) $y' \Rightarrow \frac{-1}{y'}$ $\quad -\frac{1}{y'} = 2xy \equiv \frac{1}{x} = -2yy'$

3) rješavanjem diff. jdb $F_2(x, y, y') = 0$ dobivamo $\phi_2(x, y, c_2)$ ortogonalan familiji ϕ_1 — 3) rješimo sep. varijabli $-y^2 = \ln x + C$

Diff jdb $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ je egzaktna $\Leftarrow \exists\, U(x,y)$ t.d. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU$, gdje je $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$

Odnosno postoji $U(x,y)$ t.d. $P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)$ $\quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$ $\Rightarrow dU = 0$ pa je opće rj. d. jdb: $U(x,y) = c$

Ako je diff. jdb. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ egzaktna $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

Dovoljan uvjet za egzaktnost, prošli u $\Leftarrow$ smjeru: $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \Rightarrow U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C,\ C \in \mathbb{R} = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C$, x_0 i y_0 po volji

Pokažimo da U zadovoljava $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, da je jdb $P(x,y) + Q(x,y) = 0$ egz.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

$\int dx$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + c(y) \qquad c(y) = U(x_0, y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)ds + c'(y)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \qquad \Rightarrow Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial s}(s,y)ds + c'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + c'(y) \Rightarrow c'(y) = Q(x_0, y) \quad / \int dy$$
$$c(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Peanov teorem - $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nepr. f. na pravokutniku $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ oko točke (x_0, y_0) $\Rightarrow \exists \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ na kojem Cauchyjev teorem ima rj.

Picardov teorem - $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana na D oko (x_0, y_0) ima svojstva: neprekinuta na D, $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena f. na $D \Rightarrow \exists \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ na kojem Cauchyjev teorem ima jedinstveno rj.

Regularna i singularna rj - neka je $z(x)$ jedno fiksirano rj diff. jdb. $y' = f(x,y)$

- $y_s(x)$ je singularno rj. od $y' = f(x,y)$ ako $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists\, y(x)$ rj. od $y' = f(x,y)$ i prolazi kroz $(x_0, y_s(x_0))$ t.d $y \neq y_s$, odnosno $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ Cauchyjev problem $y' = f(x,y), y(x_0) = y_s(x_0)$ nem jedin. rj.
- $y(x)$ je regularno rj. ako $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists!\, y(x)$ rj od $y' = f(x,y)$ koje prolazi kroz $(x_0, y(x_0))$ odnosno Cauchyev prob. ima jedinstveno rj.
- $y(x)$ nije regularno rj. ako $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.d. Cauchyev problem nema jedin. rj.

Diferencijalne jdb. višeg reda (ružni dokazi)

Egzistencija i jedinstvenost rješenja

f diff na okolini D točke $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)})$ i D zadovoljava sljedeće uvjete:

$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ je neprekinuta i $\exists M > 0$ t.d. $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M, \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| \le M, \dots \left|\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right| \le M$ $\Rightarrow \exists \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ oko x_0 u kojem jdb $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ima jed. rj. $y = y(x)$

koje zadovoljava početne uvjete $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Lin. dif. jdb. n-tog reda - X i Y su vekt. prostori, $L: X \to Y$ je operator i $f \in Z$ je zadan. Jdb $Ly = f$ je nehomogena operatorska jdb., a $Ly = 0$ je homogena op. jdb

Vektor $y_h \in Y$ je rj. homogene op. jdb. ako $Ly_h = 0$, a vektor $y_p \in Y$ je partikularno rj. nehomogene jdb $Ly_p = f$

y_p je partik rj. op. jdb $Ly = f$ $\Rightarrow$ svako rj. op. jdb. se može zapisati kao $y = y_h + y_p$, $Ly_h = 0$

y_0 je bilo koje rj. jednadžbe, y_p partikularno: $L(y - y_p) = Ly_0 - Ly_p = f - f = 0$ $\Rightarrow y_h = y_0 - y_p$ je rj. homogene jdb $Ly = 0$

Neka su funkcije $y_1, \dots, y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$. Wronskijana je:

$$W(y_1, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ako wronskijand $\neq 0$ tada su $y_1, \dots, y_n$ linearno nezavisne

Ako su $y_1, \dots, y_n$ lin. zavisne tada je $W = 0$. Pretpostavimo da su α_i t.d. $\exists \alpha_i \neq 0$ i vrijedi $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0\ \forall x$. Deriviramo $n-1$ puta:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n &= 0 \\ \alpha_1 y_1' + \dots + \alpha_n y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} \dots \alpha_n y_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ homogeni sustav od n jdb i n nepoznanica $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (Primijetimo da je ovo $W(y_1, \dots, y_n)$), sustav ima netrivijalno rj.

$\Rightarrow$ matrica je singularna, $W = 0$

Prostor rješenja homogene lin. dif. jdb. n-tog reda $Ly = 0$ je n-dimenzionalni vektorski potprostor $C^{(n)}[a,b]$

Sva rj. lin. dif. jdb. su n puta neprekinuto dif. odnosno $y \in C^{(n)}[a,b]$. Moramo pokazati da je lin. komb. svaka 2 rj. homogene lin. dif. jdb. $Ly = 0$ također rj:

To slijedi iz lin. diferencijalnog operatora L. Neka su y_1 i y_2 rj: $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$:

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2 = 0$$

$\Rightarrow$ Prostor rj. je vektorski potprostor od $C^{(n)}[a,b]$

Skup $\{y_1, \dots, y_n\}$ lin. nezavisnih rj. hom. lin. dif. jdb. n-tog reda naziva se baza rješenja

Opće rješenje možemo zapisati u obliku $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$, $C_1, \dots C_n \in R$

Neka su $y_1, \dots, y_n$ rj HLDJ n-tog reda t.d $W(x_0) = 0$ za neki $x_0 \in \langle a, b \rangle \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ su lin. nezavisne funkcije

$$\begin{matrix} d_1 y_1(x_0) + d_2 y_2(x_0) \dots + d_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ d_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + d_2 y_2^{(n-1)}(x_0) \dots + d_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{matrix}$$

$W(x_0) = 0 \Rightarrow$ sustav ima netrivijalno rj $d_1^*, \dots, d_n^*$: $\exists d_i^* \neq 0$

Definiramo $y_*(x) = d_1^* y_1(x) + \dots + d_n^* y_n(x)$ kao lin. komb. navedenih rješenja. Vidimo da je takva f također rj iste jdb. i zadovoljava početne uvjete:

$y_*(x_0) = y_*'(x_0) = \dots = y_*^{(n-1)}(x_0) = 0$ no te uvjete zadovoljava i funkcija $y = 0$ - zbog jedinstvenosti Cauchyjevog problema slijedi da je:

$y^*(x) = d_1^* y_1(x) + \dots d_n^* y_n(x) = 0 \Rightarrow$ Barem jedan $d_i \neq 0 \Rightarrow$ funkcije $y_1, \dots, y_n$ su nezavisne.

Rješenja $y_1, \dots, y_n$ HLDJ n-tog reda su nezavisna $\Leftrightarrow W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$

$\Leftarrow$ dokazano gore, $\Rightarrow$ prethodni teorem po kontrapoziciji

Ako karakteristični polinom ima višestruke nultočke i vrijedi $r_1 = r_2 = \dots r_k \Rightarrow L(x^j e^{r_1 x}) = 0$ za $j = 0, 1, \dots, k-1$

Ako je kompleksna funkcija y rješenje jdb. $Ly = 0$ s realnim koef $\Rightarrow Re(y)$ i $Im(y)$ su realna rj. te jdb.

Neka je $y(x) = y_1(x) + i y_2(x)$ rj $Ly = 0$:

$Ly(x) = L(y_1(x) + i y_2(x)) = L y_1(x) + i L y_2(x) = 0 \Rightarrow L y_1(x) = 0$, $L y_2(x) = 0$