

Dekanski rok iz Matematike 2

19. rujna 2012.

1. a) Iskažite Cauchyev konvergenciju reda brojeva.
b) Dokažite Cauchyev za konvergenciju reda brojeva.

◇

2. Neka je dan red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = (-1)^n \frac{2n+3}{2^n}.$$

- a) Ispitajte konvergenciju i apsolutnu konvergenciju tog reda.
b) Koristeći pravila za deriviranje i integriranje redova potencija, izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

◇

3. Dokažite da se u svakom trokutu sve tri težišnice sijeku u jednoj točki.

◇

4. a) Iskažite teorem o implicitnoj funkciji za funkciju dvije varijable $H(x, y)$.
b) Izvedite formulu za derivaciju implicitne funkcije $\psi(x)$ zadane s

$$H(x, \psi(x)) = 0.$$

- c) Dokažite da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvom da je

$$-\ln(x + y + f(x, y)) = x + y + f(x, y),$$

te izračunajte njene parcijalne derivacije.

◇

5. Točka T nalazi se na plohi zadanoj jednadžbom

$$(x+1)^3 + z + y^2 z^3 = 2,$$

i u toj točki je tangencijalna ravnina na plohu paralelna s ravninom xOy . Oko točke T smještena je kocka K s bridom duljine 4 kojoj su stranice paralelne koordinatnim osima, a sama točka T joj je središte. Odredite točke ekstrema i ekstremne vrijednosti linearne funkcije

$$f(x, y, z) = 9x + 4y - z - 3$$

na skupu K .

6. Odredite i karakterizirajte sve lokalne ekstremane funkcije

$$f(x, y) = e^{-y^2} \sin(2 \arctan(x)).$$

◇

7. Nađite Eulerov multiplikator pa riješite diferencijalnu jednađbu

$$x^2 y^2 dy + (xy^3 - 1) dx = 0.$$

◇

8. Odredite ortogonalne trajektorije familije krivulja

$$y = \ln(x^2 + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

◇

9. Normala u točki T nepoznate krivulje \mathcal{C} siječe os Ox u točki N_T . Odredite krivulju \mathcal{C} kroz točku $(2, 3)$ za koju je pravac određen projekcijom točke T na os Oy i točkom N_T okomit na spojnicu točke T i ishodišta ravnine.

◇

10. Riješite Cauchyevu zadaću

$$\begin{aligned} y'' + \frac{y'}{x} - xy &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Uputa: Koristite redove potencijala