Jesenski ispitni rok iz Matematičke analize 2

09.09.2019.

1. (**7 bodova**)

(a) **(2b)** Napišite definiciju parcijalnih derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ za $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) **(2b)** Koristeći (a), pokažite da za funkciju $f(x, y) = x^2 y^3$ vrijedi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$.

(c) **(3b)** Pomoću prvog diferencijala približno izračunajte izraz $(0.99)^2(1.01)^3$.

2. (**6 bodova**)

(a) **(3b)** Zadana je krivulja

$$\mathcal{C} \ldots \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t \\ z(t) = t^3 \end{cases}, \quad t \in [1, 3].$$

Odredite točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ te krivulje u kojoj je tangenta na krivulju paralelna s ravninom $2x + \frac{1}{2}y = 0$.

(b) **(3b)** Koristeći derivaciju složene funkcije, odredite $\dfrac{dw}{dt}$ u točki $t = \sqrt{\pi}$ ako je $w(x, y, z) = 5\cos(xy) - \sin(xz)$, a zamjena varijabli je definirana vektorskom funkcijom $(x(t), y(t), z(t))$ iz (a) dijela.

3. (**10 bodova**)

(a) **(2b)** Ako je T_0 točka lokalnog maksimuma funkcije $z = f(x, y)$, dokažite da je tada T_0 stacionarna točka od f, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(T_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(T_0) = 0$.

(b) **(2b)** Ako je T_0 stacionarna točka funkcije f i ako je $d^2 f(T_0)$ negativno definitna kvadratna forma, dokažite da je tada T_0 lokalni maksimum od f.

(c) **(6b)** Odredite točke lokalnog maksimuma funkcija $z = z(x, y)$ zadanih implicitno s

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

4. (**8 bodova**) Zadan je trostruki integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz.$

(a) **(2b)** Skicirajte područje integracije za zadani integral.

(b) **(2b)** Zapišite zadani integral u cilindričnim koordinatama.

(c) **(2b)** Zapišite zadani integral u sfernim koordinatama.

(d) **(2b)** Izračunajte zadani integral.

Okrenite!

5. (**7 bodova**)

(a) **(3b)** Iskažite i dokažite Leibnizov kriterij konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, gdje $a_n \geqslant 0$.

(b) **(4b)** Odredite područje konvergencije te ispitajte ponašanje na rubu tog područja za red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(x+1)^{2n+1}.$$

6. (6 bodova) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + \frac{2}{x}y = x^4y^4$.

7. (6 bodova) Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $(3,1)$, a čija tangenta u proizvoljnoj točki ima svojstvo da njeno sjecište s y-osi raspolavlja dužinu koja spaja njeno sjecište s x-osi i dirialište s krivuljom.

8. (**10 bodova**)

(a) **(2b)** Definirajte determinantu Wronskog $W(y_1, y_2)$ za dvije funkcije y_1, y_2 te dokažite da su funkcije $y_1 = e^{rx}$ i $y_2 = xe^{rx}$ linearno nezavisne za svaki $r \in \mathbb{R}$.

(b) **(3b)** Zadana je diferencijalna jednadžba $y'' + a_1y' + a_0y = 0$. Ako je r_0 dvostruka realna nultočka pripadne karakteristične jednadžbe, dokažite da je $y = 5e^{r_0x} + 2xe^{r_0x}$ jedno rješenje te diferencijalne jednadžbe.

(c) **(5b)** Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}.$$

Ispit se piše 150 minuta. *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje i službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 2.*