Međuispit iz Matematičke analize 2
30.04.2019.

1. **(9 bodova)**

   (a) Zadana je funkcija

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (i) **(3b)** Ispitajte neprekinutost funkcije $f(x,y)$ u točki $(0,0)$.

   (ii) **(2b)** Po definiciji ispitajte postoji li parcijalna derivacija $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

   (b) **(1b)** Je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna? Dokažite je ako je točna ili opovrgnite protuprimjerom ako je netočna:

   Funkcija za koju postoje parcijalne derivacije u točki (x_0, y_0)
   je i diferencijabilna u (x_0, y_0).

   (c) **(3b)** Neka je $g = g(u,v)$, $u = x^2+y^2$, $v = \frac{x}{y}$ i $G(x,y) = g(x^2+y^2, \frac{x}{y})$. Izrazite $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ pomoću $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ i $\dfrac{\partial g}{\partial v}$.

2. **(9 bodova)** Neka je $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna i neka je $P_0 \in D(f)$ takva da je $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$, te neka je $\vec{h} \in V^2$, $\vec{h} \neq \vec{0}$.

   (a) **(3b)** Napišite definiciju usmjerene derivacije $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0)$ te pokažite da vrijedi

   $$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{h}_0.$$

   (b) **(2b)** Pokažite da za $\forall \vec{h} \in V^2$ vrijedi

   $$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(P_0) \in [-\|\nabla f(P_0)\|, \|\nabla f(P_0)\|\,].$$

   (c) **(3b)** Odredite usmjerenu derivaciju funkcije $f(x,y) = x^2y+y^3$ iz točke $T(1,2)$ u smjeru najbržeg rasta.

   (d) **(1b)** Ako neka diferencijabilna funkcija $g(x,y)$ ima najveću brzinu pada u točki P_0 u smjeru vektora $\vec{j}$, koliko iznosi maksimalna vrijednost usmjerene derivacije iz točke P_0?

3. **(8 bodova)** Funkcija $z = z(x,y)$ implicitno je zadana izrazom

   $$2x + 3y + \sin(4x+5y) + z^2 + \sin z = 0.$$

   (a) **(3b)** Odredite tangencijalnu ravninu na plohu $z(x,y)$ u točki $A(0,0,0)$.

   (b) **(5b)** Odredite drugi diferencijal funkcije $z(x,y)$ u točki $A(0,0,0)$.

Okrenite!

4. **(9 bodova)**

   (a) **(2b)** Dokažite Sylvesterov teorem za pozitivno definitnu kvadratnu formu u dvije varijable.

   (b) **(7b)** Nađite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2y + 2xy^2 + \frac{1}{2}xy.$$

5. **(8 bodova)**

   (a) **(1b)** Definirajte Jakobijan za funkcije $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.

   (b) **(2b)** Izvedite Jakobijan za polarne koordinate.

   (c) **(5b)** Prelaskom na polarne koordinate izračunajte

$$\int_0^1 dy \int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx.$$

   Skicirajte područje integracije.

6. **(7 bodova)** Izračunajte volumen tijela određenog nejednadžbama

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 4 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z.$$

   Skicirajte zadano tijelo.

Napomena: Ispit se piše 120 minuta i dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala.