Međuispit iz Matematičke analize 2
26.04.2021.

1. **(7 bodova)**

   (a) **(1b)** Definirajte neprekinutost funkcije $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in D_f$.

   (b) **(3b)** Ispitajte neprekinutost funkcije f u točki $(0,0)$ ako je:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{4x^4 + 3y^{4/3}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{7}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (c) **(2b)** Je li sljedeća tvrdnja istinita ili neistinita? Dokažite ako je istinita ili opovrgnite protuprimjerom ako je neistinita:

   Ako je funkcija f diferencijabilna u (x_0, y_0), onda je neprekinuta u (x_0, y_0).

   (d) **(1b)** Je li funkcija iz **(b)** diferencijabilna? Obrazložite.

2. **(7 bodova)** Ploha u $\mathbb{R}^3$ dana je sljedećim izrazom:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0.$$

   (a) **(2b)** Primjenom teorema o implicitnoj funkciji, obrazložite može li se izraziti z u obliku $z = f(x,y)$ na okolini točke $(1,-2)$ tako da vrijedi $f(1,-2) = 0$.

   (b) **(5b)** Nađite točke na zadanoj plohi u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s ravninom $x - 2y + 2z = 3$.

3. **(10 bodova)**

   (a) **(3b)** Definirajte usmjerenu derivaciju funkcije dviju varijabli $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0)$ te pokažite da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(T_0) = \nabla f(T_0) \cdot \vec{v}_0, \quad \text{gdje je } \vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

   (b) **(3b)** Planinar šeće planinom koja je oblika plohe

$$f(x,y) = 3x^2 y - 2xy + 5x - 3y,$$

   gdje je $z = f(x,y)$ nadmorska visina. Ako se planinar nakon odmora u točki $T_1(2, 1, z_1)$ uputi u smjeru prema točki $T_2(5, -3, z_2)$, kojom brzinom mu se mijenja nadmorska visina?

   (c) **(2b)** U kojem smjeru planinar treba krenuti iz točke T_1 ako želi najbrže sići s planine? Koliko iznosi brzina promjene visine u tom smjeru?

   (d) **(2b)** U kojem se smjeru planinar treba kretati iz točke T_1 ako želi ostati na istoj nadmorskoj visini? Obrazložite svoj odgovor.

Okrenite!

4. **(9 bodova)**

   (a) **(6b)** Koristeći metodu Lagrangeovog multiplikatora, nađite uvjetne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 2$.

   (b) **(3b)** Odredite globalne esktreme funkcije $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ na skupu određenom nejednadžbom $x^2 + y^2 \leq 2$.

5. **(8 bodova)**
   Zadan je lik D u ravnini određen nejednadžbama $y \geq x^2$, $y \geq 1$ i $y \leq 4$.

   (a) **(6b)** Zapišite integral
   $$\iint_D y \, dxdy$$
   u oba poretka integracije te ga potom izračunajte.

   (b) **(2b)** Skicirajte tijelo u prostoru čiji volumen je izražen integralom pod **(a)**.

6. **(9 bodova)**

   (a) **(1b)** Napišite trostruki integral $\iiint_V f(x, y, z)dV$ u novim varijablama u, v, w, gdje je zamjena varijabli dana s $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$.

   (b) **(2b)** Izvedite Jacobijan za cilindrične koordinate.

   (c) **(6b)** Izračunajte
   $$\iiint_V y^2 \, dV$$
   gdje je V tijelo omeđeno plohom $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ i ravninama $z = 0$ i $z = 1$. Skicirajte tijelo.

Napomena: Ispit se piše 120 minuta i dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala.