Ljetni ispitni rok iz Matematičke analize 2

15.07.2019.

1. (**7 bodova**)

(a) (**2b**) Skicirajte graf funkcije $g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ te ispitajte neprekinutost ove funkcije u točki $(0,0)$. *Obrazložite sve svoje tvrdnje!*

(b) (**2b**) Neka je $f : D(f) \to \mathbb{R}$, gdje je $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$. Definirajte diferencijabilnost funkcije f u točki $(x_0, y_0) \in D(f)$.

(c) (**3b**) Koristeći definiciju iz (b) pokažite da je funkcija $f(x,y) = 2x + 3y$ diferencijabilna u točki $(2,1)$.

2. (**8 bodova**) Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 e^y$.

(a) (**3b**) Nađite usmjerenu derivaciju ove funkcije iz točke $P(2,0)$ u smjeru vektora $\overrightarrow{PQ}$, gdje je $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) (**2b**) Odredite vrijednost usmjerene derivacije u smjeru najbržeg rasta ove funkcije iz točke $P(2,0)$.

(c) (**3b**) Napišite 2. Taylorov polinom $T_2(x,y)$ ove funkcije u okolini točke (x_0, y_0). Koristeći $T_2(x,y)$ izračunajte približnu vrijednost izraza $(2.1)^2 \cdot e^{-0.1}$.

3. (**7 bodova**)

(a) (**1b**) Definirajte Hesseovu matricu funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $T_0(x_0, y_0)$.

(b) (**1b**) Iskažite dovoljan uvjet da bi stacionarna točka $T_0(x_0, y_0)$ bila lokalni minimum funkcije f koristeći Hesseovu matricu.

(c) (**5b**) Odredite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$.

4. (**8 bodova**)

(a) (**1b**) Definirajte cilindrične koordinate.

(b) (**2b**) Izvedite Jacobijan transformacije iz pravokutnih u cilindrične koordinate.

(c) (**5b**) Skicirajte tijelo omeđeno ravninom $z = 1$ i plohom $z = 4 - x^2 - y^2$ te mu izračunajte volumen.

Okrenite!

5. (**8 bodova**)

(a) (**1b**) Definirajte polumjer konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

(b) (**5b**) Koristeći se poznatim razvojima, razvijte funkciju $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(2+x)}$ u red potencija oko $x_0 = 0$ te odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

(c) (**2b**) Izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) \dfrac{1}{2^n}$.

6. (**9 bodova**)

(a) (**2b**) Navedite koje uvjete postavljamo na funkciju $f(x, y)$ u Picardovom teoremu da bismo osigurali lokalnu egzistenciju i jedinstvenost Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

(b) (**4b**) Pronađite neki pravokutnik $D = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ oko točke $(x_0, y_0) = (0, 1)$ na kojem su ispunjeni uvjeti Picardovog teorema za Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} y' = x + \sqrt{y + 4x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Pokažite da su ti uvjeti ispunjeni na tom pravokutniku!

(c) (**3b**) Eulerovom metodom aproksimirajte vrijednost $y(1)$ ako funkcija y zadovoljava Cauchyjevu zadaću iz (b). Koristite podjelu intervala na 3 jednaka dijela.

7. (**6 bodova**) Pronađite opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

(a) (**3b**) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$

(b) (**3b**) $(ye^x + 2x)\, dx + e^x\, dy = 0$

8. (**7 bodova**) Zadana je homogena linearna diferencijalna jednadžba

$$y^{(iv)} - 9y''' - y'' + 9y' = 0.$$

(a) (**2b**) Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva rješenja gornje jednadžbe, pokažite da je i njihova linearna kombinacija $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ također rješenje iste jednadžbe za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) (**3b**) Odredite četiri linearno nezavisna rješenja gornje jednadžbe te napišite opće rješenje.

(c) (**2b**) Pokažite linearnu nezavisnost četiri rješenja iz (b).

Ispit se piše 150 minuta. *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje i službenog podsjetnika za kolegij Matematička analiza 2.*