Jesenski ispitni rok iz Matematičke analize 2
27.08.2020.

1. **(7 bodova)**

   (a) **(3b)** Odredite prirodnu domenu, sliku i nivo-plohe funkcije
   $$f(x, y, z) = 5 - \sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2}.$$

   (b) **(4b)** Skicirajte i imenujte nivo-plohu koja prolazi točkom $T(\sqrt{3}, 1, 1)$, te odredite tangencijalnu ravninu na tu plohu u zadanoj točki T.

2. **(7 bodova)**

   (a) **(2b)** Neka je f realna funkcija dvije varijable $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Definirajte limes $L \in \mathbb{R}$ funkcije f u točki $\vec{x} = \vec{a}$, $\vec{a} \in \mathcal{D}_f$.

   (b) **(2b)** Iskazana je sljedeća tvrdnja:

   T: Funkcija $f(x, y)$ ima limes u ishodištu ako vrijedi:
   $$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y=x^2} f(x, y)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x=y^2} f(x, y)\right] = L.$$
   Da li je iskazana tvrdnja točna ili netočna? Obrazložite svoj odgovor!

   (c) **(3b)** Ispitajte neprekinutost funkcije u ishodištu:
   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Navedite primjer funkcije dvije varijable s lokalnim maksimumom u $T(0, 0)$ te primjer funkcije dvije varijable s lokalnim minimumom u $T(1, 1)$.

   (b) **(6b)** Odredite lokalne ekstreme funkcije:
   $$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2\, y^2) - x^2 - y^2 + xy.$$

4. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Izvedite Jakobijan transformacije iz pravokutnih u sferne koordinate.

   (b) **(6b)** Izračunajte
   $$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$$
   gdje je V tijelo određeno nejednadžbama $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ i $z \geq 1$.

Okrenite!

5. **(8 bodova)**

(a) **(4b)** Za navedene tvrdnje napišite jesu li istinite ili lažne. Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite protuprimjerom.

T1: Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tada red $\sum\limits_n a_n$ divergira.

T2: Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tada red $\sum\limits_n a_n$ konvergira.

T3: Ako red $\sum\limits_n a_n$ konvergira, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) **(4b)** Ispitajte konvergenciju redova: (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

6. **(5 bodova)** Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x^2y' = 2xy - y^2 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

7. **(6 bodova)** Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba

$$\left(\frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dx + \left(\frac{\alpha \cdot (x - \sin x \cos x)}{y^3} + \cos y\right) dy = 0$$

bude egzaktna te za dobiveni α odredite opće rješenje zadane jednadžbe.

8. **(11 bodova)**

(a) **(5b)** Neka su funkcije

$$y_1(x) = e^x + x + 1 \quad \text{i} \quad y_2(x) = e^{-x} + x - 2$$

dva linearno nezavisna rješenja homogene linearne diferencijabilne jednadžbe 2. reda. Pokažite njihovu linearnu nezavisnost i nađite ono rješenje te jednadžbe čiji graf sječe os ordinata u točki $T(0,1)$ pod kutem od $\frac{\pi}{6}$.

(b) **(6b)** Nađite opće rješenje diferencijabilne jednadžbe

$$y'' + 9y = \frac{3}{\cos(3x)}.$$

Ispit se piše 150 minuta i nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala osim službenog podsjetnika iz Matematičke analize 2.