PONOVLJENI ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 2

13.07.2009.

PITANJA IZ TREĆEG CIKLUSA NASTAVE

1. **(2 boda)** Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' - \sin^2(x - y + 1) = 0.$$

2. **(3 boda)** Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y(1 + xy)dx - xdy = 0$$

koje zadovoljava početni uvjet $x = 2$ i $y = 1$.

3. **(3 boda)** Odredite i nacrtajte sve krivulje koje zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu

$$y^2 = x^2 + 2xyy'.$$

4. **(3 boda)** Nađite krivulju koja prolazi točkom $T_0(1, 0)$, a ima svojstvo da je u svakoj njenoj točki duljina odsječka kojeg tangenta odsijeca na osi apscisa jednaka duljini odsječka kojeg normala odsijeca na osi ordinata.

5. **(3 boda)** Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$yy'' + (y')^2 = (y')^3.$$

Snižavanje reda:
$y' = p(y)$

6. **(3 boda)** Zadana je diferencijalna jednadžba

$$y''(x) - y(x) = e^x + 1.$$

Odredite njezinu integralnu krivulju koja prolazi točkom $T(0, -1)$ sa nagibom tangente $k = \frac{1}{2}$ u toj točki.

7. **(3 boda)** Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y''(x) + y(x) = 2\cos^2(x) - \sin^2(x).$$

OKRENI!

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

8. (3 boda) (a) (1 bod) Iskažite Leibnizov kriterij konvergencije reda realnih brojeva.
b) (2 boda) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum \left(\frac{2n^2 + n - 2}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n .$$

9. (2 boda) Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ u Taylorov red oko $x_0 = 0$.

10. (3 boda) Neka je ploha zadana jednadžbom $z = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$. Odredite jednadžbe tangencijalnih ravnina u točki $T_0(x_0, y_0, \sqrt{8})$ u kojoj je gradijent funkcije paralelan s pravcem $y = x$.

11. (3 boda) Nađite i ispitajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^3 - z$$

u I. oktantu, tj. za $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

12. (4 boda) (a) (1 bod) Pokazati da rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

imaju svojstvo linearnosti (tj. ako su funkcije y_1 i y_2 rješenja jednadžbe, onda je i funkcija $C_1y_1 + C_2y_2$ također njezino rješenje).
(b) (1 bod) Definirajte linearnu nezavisnost funkcija $y_1, \ldots, y_n \in C^{(n)}[a, b]$.
(c) (2 boda) Ispitajte linearnu nezavisnost funkcija $y_1 = x^2 + 3x + 2$, $y_2 = 2x^2 - x + 1$, $y_3 = 14x + 6$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **150 minuta**.