

**Završni ispit iz Matematičke analize 2**  
**28.06.2021.**

**1. (9 bodova)**

- (a) **(3b)** Iskažite i dokažite Leibnizov kriterij konvergencije.  
(b) **(3b)** Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}.$$

- (c) **(3b)** Ispitajte apsolutnu konvergenciju reda iz (b).

**2. (9 bodova)**

- (a) **(3b)** Odredite područje konvergencije i ispitajte ponašanje na rubu područja za red potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{x^n}{3^{n+1}}.$$

- (b) **(2b)** Derivirajte red iz (a) i odredite polumjer konvergencije dobivenog reda.  
(c) **(4b)** Integrirajte red iz (a) te odredite područje konvergencije dobivenog reda i ispitajte ponašanje na rubu područja. Usporedite dobiveno područje konvergencije s područjem iz (a).

**3. (9 bodova)** Odredite opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednačini:

- (a) **(4b)**

$$\frac{x+y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = 0.$$

- (b) **(5b)**

$$xy^2y' = y^3 + 2x.$$

**4. (7 bodova)**

- (a) **(2b)** Iskažite Picardov teorem za Cauchyjev problem  $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$   
(b) **(5b)** Zadan je Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}, \\ y(3) = y_0. \end{cases}$$

- (i) Pokažite da za  $y_0 = 1$  Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje te skicirajte barem 2 rješenja.  
(ii) Za  $y_0 = 2$  odredite neki pravokutnik  $D \subset \mathbb{R}^2$  na kojem zadani Cauchyjev problem zadovoljava uvjete Picardovog teorema.

**Okrenite!**

5. (8 bodova)

- (a) (1b) Definirajte linearnu nezavisnost funkcija  $y_1, \dots, y_n$ .
- (b) (2b) Je li sljedeća tvrdnja istinita ili neistinita? Dokažite ako je istinita ili obrazložite ako je neistinita.  
**Tvrdnja:** Ako Wronskijan  $W(y_1, \dots, y_n)$  nije identički jednak nuli, tada su  $y_1, \dots, y_n$  linearno nezavisne funkcije.
- (c) (5b) Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 4. \end{cases}$$

6. (8 bodova)

- (a) (2b) Ispitajte jesu li funkcije  $y_1 = \sin^2 x$  i  $y_2 = \sin 2x$  linearno nezavisne.
- (b) (6b) Odredite opće rješenje diferencijalne jednačine

$$y'' + 4y + 2 = \sin 2x.$$

Napomena: Ispit se piše 120 minuta i dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala.