Vektorska funkcija i funkcija više varijabli

Derivacija vektorske funkcije

$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x(t+h)\vec{i}+y(t+h)\vec{j}+z(t+h)\vec{k}) - (x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x(t+h)-x(t))\vec{i}+(y(t+h)-y(t))\vec{j}+(z(t+h)-z(t))\vec{k}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\vec{i}+\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\vec{j}+\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\vec{k}\right) = \left[\text{def: } \lim r(t) = (\lim x(t))\vec{i} + (\lim y(t))\vec{j} + (\lim z(t))\vec{k}\right] = \left(\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right)\vec{i} + \left(\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)\vec{j} + \left(\lim_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\right)\vec{k}$$

$$= x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

Diferencijalni račun funkcija više varijabli

Ako je funkcija diff u (x_0,y_0) onda je i neprekinuta

f diff $\Rightarrow \exists \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \in \mathbb{R}, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \in \mathbb{R}$

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot \Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$ gdje je $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{o(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$, pa vrijedi $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} o(\Delta x,\Delta y) = 0$

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$

$x = x_0+\Delta x$, $y = y_0+\Delta x$:

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

$\Rightarrow f$ je neprekinuta u x_0, y_0

Teorem o implicitno zadanoj funkciji dvije varijable

$f(x_0,y_0) = 0 \quad f_y(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists! y = \varphi(x)$ na intervalu oko $x_0 \Leftrightarrow f(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi(x_0) = y_0$ te vrijedi

$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x'(x_0,y_0)}{f_y'(x_0,y_0)}$ ili $\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$

Deriviramo $f(x,\varphi(x)) = 0$ po x: $\frac{d}{dx} f(x,\varphi(x)) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$

$\varphi'(x) = \frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$, te za $T(x_0,y_0)$: $\varphi'(x_0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$

Računanje usmjerene derivacije

f diff, $\vec{v} \in V^2$ $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = v_{01}\vec{i} + v_{02}\vec{j}$ ... vrijedi: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_{01} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_{02}$

vrijedi $z = g(s) = f(x_0+sv_{01}, y_0+sv_{02})$ i $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+sv_{01}, y_0+sv_{02}) - f(x_0,y_0)}{s} = g'(0)$

uvedemo $x(s) = x_0 + sv_{01}$, $y(s) = y_0 + sv_{02}$ ... $g(s) = f(x(s),y(s)) \Rightarrow g'(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s),y(s))\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s),y(s))\cdot\frac{dy}{ds}$ te za $s=0$ $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_{01} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_{02}$

f diff., $\nabla f(x_0,y_0) \neq \vec{0} \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) \perp$ nivo-krivulja kroz (x_0,y_0)

Neka je $k = z_0 = f(x_0,y_0)$, tada je $f(x,y) = k$ nivo krivulja sa (x_0,y_0), te zbog $\nabla f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$ vrijedi da

$\ell \ldots f(x,y) - k = 0$ možemo u okolici (x_0,y_0) zapisati $\ell \ldots \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, odabirući x ili y za t ovisno po kojoj varijabli dobivamo parcijalnu d. razl od 0 u (x_0,y_0). $\Rightarrow v(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} \neq \vec{0}$

Primjerice ako je der. po $y \neq 0$ ... $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ uzimamo $x = t$ $y = y(t)$ (znamo da postoji iz teorema gore)

$\exists t_0$ t.d. $x(t_0) = x_0$ $y(t_0) = y_0$ $\Rightarrow$ za t blizu t_0 $z = f(x(t),y(t))$ je konstanta $= k$

$\frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) = f_x'(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_y'(x(t),y(t))\cdot y'(t) = 0$

za t_0 $0 = f_x'(x_0,y_0)x'(t_0) + f_y'(x_0,y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$ je tangencijalan na nivo krivulju $\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) \perp$ nivo krivulja u (x_0,y_0)

Teorem srednje vrijednosti funkcije više varijabli

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff, $\vec{a},\vec{b} \in U$ t.d. spojnica točaka $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je u U. $\Rightarrow \exists \vec{c}$ t.d $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$ (skalarni produkt)

radijvektor točke na spojnici $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $\vec{r}_T = \vec{a} + s(\vec{b}-\vec{a})$, $s \in [0,1]$ ... definiramo $g(s) = f(\vec{a}+\vec{s}(b-a))$, $s \in [0,1]$ $\Rightarrow f(b) - f(a) = g(1) - g(0)$

na funkciju g primijenimo L.T.S.V: $\exists s_c \in (0,1)$ t.d $g(1) - g(0) = g'(s_c)(1-0)$

izračunamo $g'(s) = \nabla f(\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a}))\cdot(\vec{b}-\vec{a})$ te ubacimo u prethodnu jednakost: $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = g(1) - g(0) = g'(s_c) = \nabla f(\vec{a}+s_c(\vec{b}-\vec{a}))\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

označimo $\vec{c} = \vec{a} + s_c(\vec{b}-\vec{a})$ Q.E.D.

Ako postoji $M>0$ t.d $\forall \vec{x} \in U$ $^{\subset D(f)}$, $\|\nabla f(\vec{x})\| \leq M$ onda $\forall \vec{a},\vec{b} \in U$ vrijedi $|f(\vec{b}) - f(\vec{a})| \leq M\|\vec{b}-\vec{a}\|$

$\forall \vec{a},\vec{b} \in U$ spojnica $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $\in U$ primjenom prošlog teorema i Cauchy-Schwarzove nejednakosti $\|\vec{x}\cdot\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ slijedi:

$|f(\vec{b}) - f(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{c})(\vec{b}-\vec{a})| \leq \|\nabla f(\vec{c})\|\|\vec{b}-\vec{a}\| \leq M\|\vec{b}-\vec{a}\|$

Ako je $\nabla f(\vec{x}) = 0$ $\forall \vec{x} \in U$ $^{\subset D(f)}$ onda je f konstantna funkcija

Uzmemo $\vec{a},\vec{b} \in U$ t.d $\vec{a} \neq \vec{b}$: $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c})(\vec{b}-\vec{a}) = 0\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0$

Ako je $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$ onda se f i g razlikuju za konstantu

Iz $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$ slijedi $\nabla(f-g)(\vec{x}) = \vec{0}$ odnosno iz prošlog teorema slijedi da je $f-g$ konstanta

Primjena diferencijalnog računa dvije varijable

Sylvesterov teorem za dvije varijable

Neka je zadana kvadratna forma $Q(h,k)=ah^2+2bhk+ck^2$ te neka je A njena matrica

a) Ako su minore pozitivne $a>0,\ ac-b^2>0$ onda je pozitivno definitna

b) Ako je $a<0$, $ac-b^2>0$ onda je $Q(h,k)$ negativno definitna

c) Ako je $ac-b^2<0$ onda je indefinitna

$Q(h,k)=ah^2+bhk+ck^2=k^2\left[a\left(\frac{h}{k}\right)^2+2b\frac{h}{k}+c\right]$ ... u zagradi polinom drugog stupnja $\frac{h}{k}$, diskriminanta mu je $4(b^2-ac)$, određuje br. nultočaka

Ako ima nultočke onda mijenja predznak (c), inače ako je $a<0$ onda je uvijek negativna, a ako je $a>0$ onda je uvijek pozitivna

Nužan uvjet za lokalni ekstrem funkcije dviju varijabli

Ako f ima ekstrem u (x_0,y_0), onda je $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$ tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

Definiramo $f_1(x)=f(x,y_0)$ restrikciju na f kroz $T_0(x_0,y_0)$. Ako je T_0 lok. ekstrem f. tada je x_0 lok.e. f_1 funkcije jedne varijable

Slijedi $\frac{d}{dx}f_1(x_0)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ Analogno za y

Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem funkcije dviju varijabli

T_0 stacionarna, $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$, ako je kvadratna forma $d^2f(x_0,y_0)$...

① ...pozitivno definitna => strogi lok. min. ② ... negativno definitna => strogi lok. maks ③ ... indefinitna => sedlasta točka

Koristeći taylora oko T_0 dobivamo: $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left[(f_x')_0(x-x_0)+(f_y')_0(y-y_0)\right]+\frac{1}{2!}\left[(f_{xx}'')_c(x-x_0)^2+2(f_{xy}'')_c(x-x_0)(y-y_0)+(f_{yy}'')(y-y_0)^2\right]$ gdje c označava T_c na spojnici T_0 i T

Budući da je stac. dobivamo $(f_x')_0=0,\ (f_y')_0=0$ odnosno $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}d^2f(T_c)$. Ako uzmemo T dovoljno blizu T_0 onda će predznaci d^2f T_0 i T_c biti isti

Ako je $d^2f(T_0)<0 \Rightarrow f(x,y)<f(x_0,y_0)$ odnosno ako je $d^2f(T_0)>0 \Rightarrow f(x,y)>f(x_0,y_0)$

Teorem o globalnim ekstremima - f na omeđenom zatvorenom skupu D(f) poprima globalni maks. i min. u kritičnim točkama ili rubu D

Druga tvrdnja: neka je $\vec{x_0}$ točka glob.e. funkcije. Pretpostavimo da nije kritična ni rub domene. Budući da je $\vec{x_0}$ glob.e. i nalazi se unutar U onda je to i točka lok.e. Budući da je $f(\vec{x_0})$ diff onda po nužnom uvjetu za lok.e. je $\vec{x_0}$ stac. točka. ↯

Nužni uvjet za uvjetni ekstrem

$f:U\to\mathbb{R}$, $\forall\vec{x}\in S\subseteq U$ $\varphi(x)=0$ $\nabla\varphi(\vec{x})\neq 0$. Ako je $\vec{a}$ uvjetni lok.e. $f|_S$ onda postoji (Lagrangeov multiplikator) λ t.d. $\nabla f(\vec{x})=-\lambda\nabla\varphi(\vec{x})$

Za tri dimenzije $u=f(x,y,z)$ uz uvjet $\varphi(x,y,z)=0$. Taj uvjet definira plohu S. $\vec{a}$ je uvjetni e. $f|_S$, $\vec{r}(t)$ je glatka krivulja t.d. $\vec{r}(t_0)=\vec{a}$

Uvedemo $v(t)=f(\vec{r}(t))$ koja ima ekstrem u t_0: $0=\frac{dv}{dt}(t_0)=\nabla f(\vec{r}(t_0))\cdot\vec{r}'(t_0)$ $\Rightarrow \nabla f(\vec{a})\perp\vec{r}'(t_0)$

Budući da ovo vrijedi za svaku $\vec{r}(t)$ na plohi S koja prolazi kroz $\vec{a}$ zaključujemo da je $\nabla f(\vec{a})$ okomit na tangencijalnu ravninu plohe S u točki $\vec{a}$, odnosno paralelan s normalom $\nabla\varphi(\vec{a})$ $\Rightarrow \exists\lambda$ t.d. $\nabla f(\vec{a})+\lambda\nabla\varphi(\vec{a})=0$

Višestruki integrali

Računanje dvostrukog integrala

Ako postoji dvostruki integral od $f:D\to\mathbb{R}$ na zatvorenom području $D=\{(x,y): a\leq x\leq b,\ g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$ gdje su g_1 i g_2 neprekinute na $[a,b]$ i ako postoji integral $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)dy$ za svaki $x\in[a,b]$ onda je $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)dy\right)dx$

Prelaskom na pravokutnik i korištenjem Fubinijevog teorema $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_P F(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)dy\right)dx$

Teorem srednje vrijednosti za dvostruki integral

Neka je $f(x,y)$ neprek. na D $\Rightarrow \exists(x_0,y_0)\in D$ t.d. $\iint_D f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0)\cdot\mu(D)$, pri čemu je $\mu(D)$ površina skupa D

$m=\min_D f(x,y)$, $M=\max_D f(x,y)$. Tada je $m\iint_D dxdy\leq\iint_D f(x,y)\,dxdy\leq M\iint_D dxdy$

Podijelimo s površinom područja D, odnosno s $\mu(D)=\iint_D dxdy$

$m\leq\frac{1}{\mu(D)}\iint_D f(x,y)dxdy\leq M$ budući da je f nepr. na D, ona poprima sve vrijednosti $\in[m,M] \Rightarrow \exists(x_0,y_0)\in D$ t.d. $f(x_0,y_0)=\frac{1}{\mu(D)}\iint_D f(x,y)dxdy$

SRETNO NA ISPITU