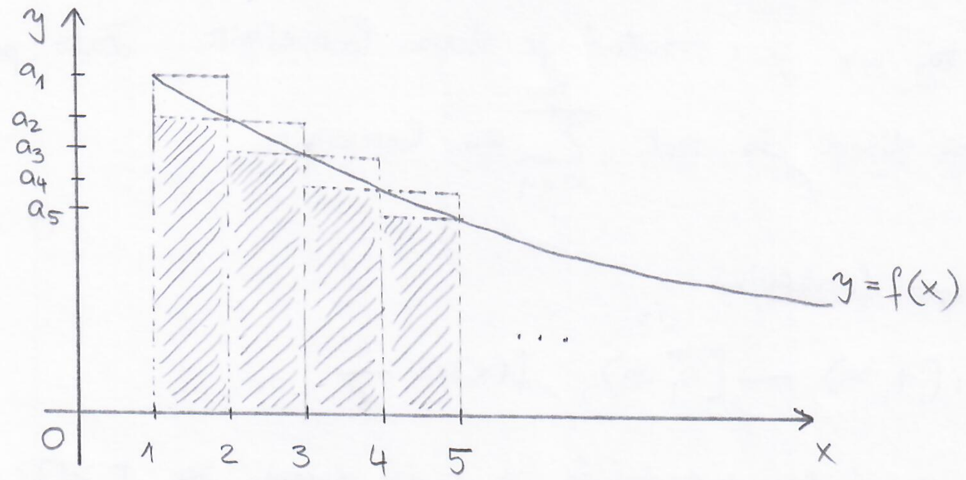
MATEMATIČKA ANALIZA 2

Završni ispit (1.7.2019.)

- RJEŠENJA ZADATAKA -

1. (a)



Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je n-ta parcijalna suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

jednaka zbroju površina pravokutnika upisanih ispod grafa funkcije $y=f(x)$ (iscrtkani na slici) uvećanoj za a_1:

$$S_n = a_1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1 = a_1 + m(f, [1,n]),$$

pri čemu smo sa $m(f,[1,n])$ označili odgovarajuću donju integralnu sumu od f na segmentu $[1,n]$. Znamo da je ta suma manja ili jednaka integralu od f na $[1,n]$:

$$S_n = a_1 + m(f,[1,n]) \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx. \qquad (*)$$

S druge strane, jer je f nenegativna funkcija i integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergira, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Dakle, iz (*) imamo

$$S_n \leq a_1 + \int_1^\infty f(x)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj. niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je omeđen. Budući da je $a_n = f(n) \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, taj niz je i rastuć pa stoga konvergira. Zato po definiciji slijedi da red $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergira.

(b) Promatramo funkciju

$$f : [1, \infty) \to [0, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{x^r}$$

koja je neprekidna i padajuća na svojoj domeni za $r > 0$.

Računamo

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^r}dx = \frac{1}{1-r}x^{1-r}\Big|_1^\infty = \begin{cases} \infty, & r < 1, \\ \frac{1}{r-1}, & r > 1. \end{cases}$$

Posebno, za $r = 1$ imamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^\infty = \infty,$$

pa prema integralnom kriteriju slijedi da red konvergira za $r > 1$, a divergira za $0 < r \leq 1$.

U slučaju $r \leq 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} n^{-r} = \begin{cases} 1, & r = 0 \\ \infty, & r < 0 \end{cases}$$

pa zbog narušenog nužnog uvjeta konvergencije zadani red u ovom slučaju divergira.

(c) Imamo

$$n^\alpha\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n^4-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}}=$$

$$=n^\alpha\cdot\frac{n^2+1-\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}}\cdot\frac{n^2+1+\sqrt{n^4-1}}{n^2+1+\sqrt{n^4-1}}$$

$$=n^\alpha\cdot\frac{(n^2+1)^2-(n^4-1)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}\right)\left(n^2+1+\sqrt{n^4-1}\right)}$$

$$=\frac{n^\alpha(2n^2+2)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}\right)\left(n^2+1+\sqrt{n^4-1}\right)}.$$

Sada imamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n^4-1}\right)}{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^\alpha(2n^2+2)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}\right)\left(n^2+1+\sqrt{n^4-1}\right)}}{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n^\alpha(2n^2+2)}{\frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4-1}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\left(n^2+1+\sqrt{n^4-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}}{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+\sqrt[4]{1-\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}\right)\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}\right)}$$

$$=\frac{2}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{2}\in\langle 0,\infty\rangle,$$

pa prema usporednom kriteriju zadani red dijeli konvergenciju s redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$.

Ovaj red prema (b) dijelu konvergira za $1-\alpha > 1$ $(\Leftrightarrow \alpha < 0)$, a divergira za $1-\alpha \leq 1$ $(\Leftrightarrow \alpha \geq 0)$.

Dakle, zadani red konvergira za $\alpha < 0$, a divergira za $\alpha \geq 0$.

2. (a) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \Big/ \int dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |-x^2|<1 \Leftrightarrow |x|<1$$

Konstantu C možemo odrediti npr. uvrštavanjem $x=0$ (što smijemo jer $|0|<1$):

$$0 + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x|<1$$

(b) Svi redovi iz (a) dijela imaju isti radijus konvergencije, $R=1$; zato će i dobiveni red potencija sigurno konvergirati na $\langle -1, 1 \rangle$. Ispitujemo konvergenciju u rubovima:

- $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Za niz $a_n := \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

1) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ((a_n) je padajući niz)

3) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

pa prema Leibnizovom kriteriju slijedi da dobiveni red konvergira.

• $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Za ovaj smo red pokazali da konvergira.

Dakle, područje konvergencije reda potencija iz (a) dijela je $[-1, 1]$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = ?$

Imamo

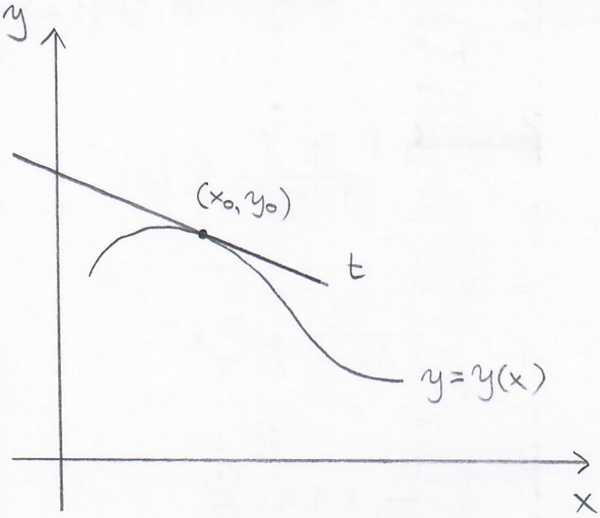
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{koristimo razvoj iz (a) dijela,} \\ \text{uočimo da je } \frac{1}{\sqrt{3}} \in [-1, 1] \end{array}\right]$$

$$= \sqrt{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

3. (a)



Neka je (x_0, y_0) proizvoljna točka tražene krivulje.

Jednadžba tangente na krivulju u toj točki glasi

$$t \ldots \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

U točki presjeka s osi Oy imamo

$$x = 0 \Rightarrow \quad y = y_0 - y'(x_0)\, x_0 .$$

Prema uvjetu zadatka mora biti

$$|y_0 - y'(x_0)\, x_0| = y_0^2 ,$$

a zbog proizvoljnosti točke (x_0, y_0) dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$|y - y'x| = y^2$$

$$y - y'x = y^2 \qquad\qquad y - y'x = -y^2$$

$$y'x = y - y^2 \qquad\qquad y'x = y + y^2$$

$$\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{dx}{x} \Big/ \int \qquad\qquad \frac{dy}{y(1+y)} = \frac{dx}{x} \Big/ \int$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \int \frac{dx}{x} \qquad\qquad \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

Uočimo da pravci $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$ zadovoljavaju uvjet zadatka.

$$\ln|y| - \ln|1-y| = \ln|x| + \ln C \qquad \ln|y| - \ln|1+y| = \ln|x| + \ln C \quad C>0$$

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = C|x| \qquad \left|\frac{y}{1+y}\right| = C|x| \quad C>0$$

$$\frac{y}{1-y} = Cx \qquad \frac{y}{1+y} = Cx \quad C \neq 0$$

$$\frac{1}{y} - 1 = \frac{C}{x} \qquad \frac{1}{y} + 1 = \frac{C}{x} \quad C \neq 0$$

$$y = \frac{x}{C \pm x} \qquad C \neq 0$$

Dakle, sve tražene krivulje su $y=0$, $y=1$, $y=-1$, $y = \dfrac{x}{C \pm x}$, $C \neq 0$.

(b) 1. način

Odredimo najprije diferencijalnu jednadžbu prve familije krivulja:

$$2x^2 + 5y^2 = c_1 \qquad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$4x + 10yy' = 0$$

Zato ortogonalna familija ove familije krivulja mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu

$$4x - \frac{10y}{y'} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{5}{2}\frac{dx}{x} \qquad \Big/ \int$$

$$\ln|y| = \frac{5}{2}\ln|x| + \ln C \qquad C>0$$

$$|y| = C|x|^{\frac{5}{2}} \qquad C>0$$

$$y = C\sqrt{x^5} \qquad C \neq 0$$

Dobili smo jednadžbu druge familije krivulja (uočimo da možemo uključiti i slučaj $C=0$, tj. pravac $y=0$ je također ortogonalan na sve elipse iz prve familije).

<u>2. način</u>

Neka su

$$2x^2+5y^2 = c_1, \quad y = c_2\sqrt{x^5},$$

dvije proizvoljne krivulje iz zadanih familija te (x_0, y_0) neka točka u kojoj se te krivulje sijeku. Odredimo koeficijente smjera tangenti na svaku od ovih krivulja u toj točki

$$2x^2+5y^2 = c_1 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$4x + 10yy' = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = y' = -\frac{2x_0}{5y_0}$$

$$y = c_2\sqrt{x^5} \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow k_2 = y' = c_2 \cdot \frac{5}{2} x_0^{\frac{3}{2}} = \frac{5c_2}{2} \cdot \sqrt{x_0^3}$$

Sada odredimo umnožak dobivenih koeficijenata smjera:

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{2x_0}{5y_0} \cdot \frac{5c_2}{2}\sqrt{x_0^3}$$

$$= -\frac{c_2\sqrt{x_0^5}}{y_0} = \left[\begin{array}{l}\text{koristimo činjenicu da } (x_0, y_0) \text{ leži} \\ \text{na drugoj krivulji pa je } y_0 = c_2\sqrt{x_0^5}\end{array}\right]$$

$$= -1$$

Dakle, tangente na svake dvije krivulje iz ovih familija su okomite u točki sjecišta pa po definiciji slijedi da su ove dvije familije krivulja ortogonalne.

4. (a) Ako diferencijalna jednadžba

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

ima Eulerov multiplikator oblika $\mu = \mu(y)$, onda uvjet egzaktnosti povlači

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(y)P(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(y)\,Q(x,y)\big)$$

$$\mu'(y)P(x,y) + \mu(y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \mu(y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$$\mu'(y)P(x,y) + \mu(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = 0$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)$$

Budući da je lijeva strana funkcija koja ovisi samo o varijabli y, to i desna strana mora biti funkcija ovisna samo o y.

Uz taj uvjet postoji traženi multiplikator i vrijedi

$$\ln \mu(y) = \int \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dy .$$

(b) $P(x,y) = \cos x + y$

$Q(x,y) = 3x + \frac{2}{y}\sin x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3 + \frac{2}{y}\cos x - 1 = 2 + \frac{2}{y}\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{2 + \frac{2}{y}\cos x}{\cos x + y}$$

$$= \frac{2}{y}\cdot\frac{y+\cos x}{\cos x + y} = \frac{2}{y} \qquad \text{(ovisi samo o } y\text{)}$$

Prema (a) dijelu slijedi da zadana jednadžba ima Eulerov multiplikator oblika $\mu=\mu(y)$ i vrijedi

$$\ln\mu(y)=\int\frac{2}{y}\,dy=\ln y^2 \Rightarrow \mu(y)=y^2.$$

Zato rješavamo egzaktnu jednadžbu

$$(y^2\cos x+y^3)\,dx+(3xy^2+2y\sin x)\,dy=0.$$

Odredimo pripadni potencijal:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=y^2\cos x+y^3 \quad \Big/\int dx \Rightarrow u(x,y)=y^2\sin x+y^3x+\varphi(y) \quad \Big/\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=3xy^2+2y\sin x \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=2y\sin x+3xy^2+\varphi'(y)$$

$$\cancel{2y\sin x}+\cancel{3xy^2}+\varphi'(y)=\cancel{3xy^2}+\cancel{2y\sin x}$$

$$\varphi'(y)=0$$

$$\varphi(y)=C$$

$$\Rightarrow u(x,y)=y^2\sin x+y^3x+C$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe je dano s

$$y^2\sin x+y^3x=C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Iz početnog uvjeta

$$C=1^2\cdot\sin\pi+1^3\cdot\pi=\pi.$$

Zato je rješenje

$$y^2\sin x+y^3x=\pi.$$

5. (a) (T1) ISTINA

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ i neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalari takvi da

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0.$$

Uzastopnim deriviranjem gornje jednakosti $n-1$ puta i uvrštavanjem x_0 dobivamo homogeni sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{aligned} y_1(x_0)\alpha_1 + y_2(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n(x_0)\alpha_n &= 0 \\ y_1'(x_0)\alpha_1 + y_2'(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n'(x_0)\alpha_n &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\alpha_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)\alpha_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)\alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

Determinanta ovog sustava je upravo Wronskijana

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zato ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ pa su funkcije $y_1, y_2, \dots, y_n$ po definiciji linearno nezavisne.

(T2) NEISTINA

Funkcije y_1 i y_2 su linearno nezavisne pa njihova Wronskijana ni u jednoj točki ne može biti nula.

Na primjer, funkcije $y_1(x) = e^{-x}$ i $y_2(x) = e^{-2x}$ čine bazu rješenja jednadžbe $y'' - 3y' + 2y = 0$, ali vrijedi

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$

1° Homogena jednadžba

$y'' + y = 0$

Karakteristična jednadžba: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}$

2° Partikularno rješenje (varijacija konstanti)

$y(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \underbrace{C_1' \cos x + C_2' \sin x}_{=0}$$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x \underbrace{- C_1' \sin x + C_2' \cos x}_{= \frac{1}{\cos^3 x}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 & / \cdot \sin x \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\cos^3 x} & / \cdot \cos x \end{array} \right\} + \Rightarrow C_2' \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow C_2' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow C_1' = -\frac{C_2' \sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + D_1$$

$$= -\frac{1}{2\cos^2 x} + D_1, \quad D_1 \in \mathbb{R}$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + D_2, \quad D_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2\cos^2 x} + D_1 \right) \cos x + \left(\operatorname{tg} x + D_2 \right) \sin x$$

$$= -\frac{1}{2\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + D_1 \cos x + D_2 \sin x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + D_1 \cos x + D_2 \sin x, \quad D_{1,2} \in \mathbb{R}$$

6. (a) 1. način

Odredimo Wronskijanu:

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4)(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cos(3x) & \sin(3x) \\ 0 & 1 & -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \\ 0 & 0 & -9\cos(3x) & -9\sin(3x) \\ 0 & 0 & 27\sin(3x) & -27\cos(3x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \\ 0 & -9\cos(3x) & -9\sin(3x) \\ 0 & 27\sin(3x) & -27\cos(3x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9\cos(3x) & -9\sin(3x) \\ 27\sin(3x) & -27\cos(3x) \end{vmatrix}$$

$$= 243\left(\cos^2(3x) + \sin^2(3x)\right) = 243 \neq 0$$

$\Rightarrow y_1, y_2, y_3, y_4$ su linearno nezavisne funkcije

2. način

Po definiciji: neka su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ skalari takvi da

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x) + \alpha_4 y_4(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ova jednakost posebno vrijedi za

$x = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 + \frac{\pi}{2}\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \qquad \Rightarrow \alpha_4 = 0$

$x = \pi \Rightarrow \alpha_1 + \pi\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 + \pi\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$x = 2\pi \Rightarrow \alpha_1 + 2\pi\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\pi\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

Dakle, nužno mora biti $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ pa su funkcije y_1, y_2, y_3, y_4 linearno nezavisne.

(b) Uočimo da je tražena jednadžba barem četvrtog reda (jer za rješenja ima četiri linearno nezavisne funkcije). Imamo

$y_1(x) = e^{0 \cdot x}$, $y_2(x) = x e^{0 \cdot x}$ $\Rightarrow$ $r_{1,2} = 0$ je dvostruko rješenje karakteristične jednadžbe,

$y_3(x) = \cos(3x)$, $y_4(x) = \sin(3x)$ $\Rightarrow$ $r_{3,4} = \pm 3i$ je par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe.

Zato je karakteristična jednadžba

$$r^2(r^2+9) = 0$$

$$\Rightarrow r^4 + 9r^2 = 0$$

pa je tražena homogena linearna diferencijalna jednadžba

$$y^{(4)} + 9y'' = 0.$$

(c) $y''' - 2y'' + 5y' = \sin x$

1° Homogena jednadžba

$$y''' - 2y'' + 5y' = 0$$

Karakteristična jednadžba:

$$r^3 - 2r^2 + 5r = 0$$

$$r(r^2 - 2r + 5) = 0$$

$r_1 = 0$

$r^2 - 2r + 5 = 0$

$r_{2,3} = 1 \pm 2i$

$$\Rightarrow y_h = C_1 + C_2 e^x \cos(2x) + C_3 e^x \sin(2x), \quad C_{1,2,3} \in \mathbb{R}$$

2° Partikularno rješenje

Tražimo ga metodom oblika desne strane; imamo

$$xe^x = e^{1\cdot x}\left(x\cdot\cos(0\cdot x) + 0\cdot\sin(0\cdot x)\right),$$

a budući da $1+0\cdot i = 1$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, tražimo partikularno rješenje oblika

$$y_p = x^0 e^{1\cdot x}\left((Ax+B)\cos(0\cdot x) + (Cx+D)\sin(0\cdot x)\right)$$
$$= (Ax+B)e^x.$$

Slijedi:

$$y_p' = Ae^x + (Ax+B)e^x = (Ax+A+B)e^x$$

$$y_p'' = Ae^x + (Ax+A+B)e^x = (Ax+2A+B)e^x$$

$$y_p''' = Ae^x + (Ax+2A+B)e^x = (Ax+3A+B)e^x$$

$$\Rightarrow y_p''' - 2y_p'' + 5y_p' = (4Ax+4A+4B)e^x = xe^x$$

$$\Rightarrow 4Ax + 4A + 4B = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 1 & \Rightarrow A = \frac{1}{4} \\ 4A + 4B = 0 & \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow y_p = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)e^x$$

Opće rješenje zadane jednadžbe je

$$y = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)e^x + C_1 + C_2 e^x\cos(2x) + C_3 e^x \sin(2x), \quad C_{1,2,3}\in\mathbb{R}$$