Završni ispit iz Matematičke analize 2
23.06.2020.

1. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Ukoliko postoji, odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da funkcija f bude neprekinuta:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ako } (x,y) \neq (0,0), \\ a, & \text{ako } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (b) **(2b)** Definirajte diferencijabilnost funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) **(4b)** Za svaku od sljedećih tvrdnji napišite je li istinita ili lažna:

   T1: Ako je f diferencijabilna u (x_0, y_0), onda je f i neprekinuta u (x_0, y_0).

   T2: Ako je f neprekinuta u (x_0, y_0), onda je f i diferencijabilna u (x_0, y_0).

   Istinite tvrdnje dokažite, a lažne opovrgnite kontraprimjerom i obrazložite.

2. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Skicirajte i imenujte plohu zadanu jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = 2y - 2z$.

   (b) **(2b)** Odredite tangencijalnu ravninu na plohu iz (a) u točki $T(0,2,0)$.

   (c) **(3b)** Ako je jednadžbom iz (a) implicitno zadana funkcija $z = z(x,y)$ u okolini točke $T(0,2,0)$, odredite $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,2)$ i $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,2)$.

   (d) **(1b)** U kojim točkama plohe iz (a) nije moguće (implicitno) definirati jedinstvenu funkciju $z = z(x,y)$?

3. **(9 bodova)**

   (a) **(1b)** Definirajte negativno definitnu kvadratnu formu dvije varijable.

   (b) **(2b)** Dokažite Sylvesterov kriterij za negativno definitnu kvadratnu formu dvije varijable.

   (c) **(6b)** Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

4. **(7 bodova)**

   (a) **(2b)** Definirajte dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ na omeđenom skupu D.

   (b) **(5b)** Izračunajte

   $$\iint_D (x+y)\,dxdy,$$

   gdje je D područje omeđeno krivuljom $y = \sqrt{2x}$, pravcem $y = 4 - x$ i osi x.

Okrenite!

5. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Izvedite Taylorov red funkcije $f(x) = e^x$ oko točke $x_0 = 0$.

   (b) **(2b)** Koristeći ostatak u Lagrangeovom obliku dokažite da red iz (a) konvergira prema zadanoj funkciji te odredite njegovo područje konvergencije.

   (c) **(4b)** Koristeći red iz (a) izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n\, n!}$.

6. **(7 bodova)** Zadana je diferencijalna jednadžba

$$(2x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.$$

   (a) **(1b)** Pokažite da je zadana diferencijalna jednadžba homogenog stupnja i odredite joj stupanj homogenosti.

   (b) **(1b)** Pokažite da je zadana jednadžba Bernoullijeva diferencijalna jednadžba.

   (c) **(5b)** Riješite zadanu diferencijalnu jednadžbu metodom po vlastitom izboru.

7. **(5 bodova)** Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$(2x + y^2 \cos(xy^2))\, dx + (2xy \cos(xy^2) + 3y^2)\, dy = 0.$$

8. **(8 bodova)**

   (a) **(2b)** Pokažite da su funkcije $e^{r_1 x}$ i $e^{r_2 x}$ linearno nezavisne za sve $r_1 \neq r_2$.

   (b) **(6b)** Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3x + e^{2x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Ispit se piše 150 minuta i nije dozvoljena upotreba kalkulatora i drugih pomagala osim službenog podsjetnika iz Matematičke analize 2.