

Završni ispit iz Matematike 2

26. lipnja 2014.

1. (5 bodova) Zadane su jednačba $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - e^z = 0$ i točka $T(2, 1, 0)$.
- (a) Dokažite da je u okolini točke $T'(2, 1)$ moguće definirati funkciju $z = z(x, y)$ koja zadovoljava početnu jednačbu i $z(2, 1) = 0$.
- (b) Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u okolini točke T' .
- (c) Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ u okolini točke T' .

2. (5 bodova)

- (a) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(2x) + \cos y - x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, uz $(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
Odredite $d^2 f$ u stacionarnoj točki zadane funkcije, te ispitajte njegovu definitnost.
- (b) Dokažite Sylvesterov kriterij za kvadratnu formu $Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$.

3. (5 bodova) Odredite točku T na paraboloidu $z = x^2 + y^2$ koja je najbliža točki $M(5, 5, 0)$.

4. (5 bodova) Nađite sve krivulje koje imaju svojstvo da je površina trapeza određenog pozitivnim dijelovima koordinatnih osi, tangentom na tu krivulju u točki $T_0(x_0, y_0)$, $x_0, y_0 > 0$ i pravcem $x = x_0$, jednaka kvadratu ordinate dirališta.

5. (5 bodova)

- (a) Zadana je diferencijalna jednačba $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Da bi postojao Eulerov multiplikator $\mu = \varphi(xy)$ pokažite da mora biti

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{Q_x' - P_y'}{xP - yQ},$$

pri čemu je desna strana funkcija od $t = xy$.

- (b) Koristeći tvrdnju pod (a) odredite Eulerov multiplikator oblika $\mu = \varphi(xy)$ tako da jednačba

$$(3x + \frac{y^2}{x})dx + (\frac{x^2}{y} + 3y)dy = 0$$

bude egzaktna, te riješite zadanu jednačbu.

6. (5 bodova) Nađite opće i singularno rješenje diferencijalne jednačbe $y = xy'^2 - 2y^3$.

7. (5 bodova) Riješite Cauchyjev problem $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

8. (5 bodova)

- (a) Definirajte determinantu Wronskoga za funkcije $y_1, \dots, y_n \in C^{(n-1)}[a, b]$.
- (b) Ako su y_1, \dots, y_n rješenja homogene linearne diferencijalne jednačbe n -tog reda, iskažite povezanost linearne nezavisnosti tog skupa funkcija i pripadne determinante Wronskoga.
- (c) Nađite opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednačbe

$$y''' + 2y'' + 3y' + 6y = 0,$$

te pokažite da su dobivena rješenja y_1, y_2, y_3 linearno nezavisna.

Vrijeme pisanja ispita je 120min.

Nije dozvoljena uporaba računala. Dozvoljena je isključivo uporaba službenih formula.