

LJETNI ISPITNI ROK: MATEMATIKA 2**7.7.2015.****1) [5 bodova]****a) [2 boda]** Izvedite formulu za udaljenost točke od pravca.**b) [3 boda]** Zadani su pravci:

$$\begin{aligned} p \dots \frac{x-1}{1} &= \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \\ q_1 \dots \frac{x-2}{-1} &= \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{3} \\ q_2 \dots \frac{x-1}{1} &= \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1} \end{aligned}$$

Odredite udaljenost točke **A** od pravca **p** pri čemu je točka **A** presjek pravca **q₁** i **q₂**.**2) [5 bodova]** Nađite sve točke na prostornoj krivulji

$$C \dots \begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = \frac{3}{2}t^4 - 2 \\ z(t) = -t^2 + 1 \end{cases}$$

u kojima je tangenta okomita na tangencijalnu ravninu plohe

$$z = x^2 - 2xy + y^3 - 3$$

u točki **T₀(1,1)**.**3) [4 boda]****a) [2 boda]** Neka je U otvoreni skup u ravnini i $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ takva da je $f(x_0, y_0) = 0$.Navedite uvjete pod kojima je izrazom $f(x, y) = 0$ implicitno definirana neprekinuto diferencijabilna funkcija $y = \varphi(x)$ na nekom otvorenom intervalu I oko x_0 , $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.**b) [2 boda]** Izvedite izraz za derivaciju $\varphi'(x)$ funkcije $\varphi(x)$ implicitno definirane izrazom $f(x, y) = 0$, ako su zadovoljeni uvjeti pod a)**4) [5 bodova]** Neka je $w = f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$ pri čemu je $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija.

Pokažite da vrijedi:

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

5) [5 bodova] Nađite točku na sferi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

koje su najudaljenije od točke **T(2, 1, 2)**.(Uputa: maksimizirajte kvadrat udaljenosti od točke **T** do proizvoljne točke na sferi).

6) [5 bodova]

a) [3 boda] Iskažite i dokažite usporedni kriterij za redove s pozitivnim članovima (NE LIMES OBLIK)!

b) [2 boda] Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \sin^2 n$$

7) [5 bodova] Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+8}$$

a) [2 boda] Razvijte funkciju f u red potencija oko točke $a_1 = -3$ te odredite područje konvergencije.

b) [3 boda] Razvijte funkciju f u red potencija oko točke $a_2 = 0$ te odredite područje konvergencije.

8) [5 bodova] Nađite opće rješenje Bernoullijeve jednačbe

$$y' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)y = -x^3y^2$$

9) [5 bodova] Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$y'' + y = e^x \sin x$$

10) [6 bodova] Neka su

$$y_1(x) = -x^2$$

$$y_2(x) = 3x^2 \ln x$$

rješenja homogene linearne diferencijalne jednačbe 3. reda

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' = 0, \quad x > 0$$

a) [4 boda] Koje su od navedenih tvrdnji istinite, a koje nisu? Obrazložite.

(T1) Funkcija $y(x) = 2x^2 - 10x^2 \ln x$ je rješenje jednačbe (1).

(T2) Postoji x_0 takav da za Wronskijem W vrijedi: $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$.

(T3) Funkcija $y = 1$ je rješenje jednačbe (1).

b) [2 boda] Koristeći činjenicu da su $y_1(x) = -x^2$ i $y_2(x) = 3x^2 \ln(x)$ rješenja jednačbe (1), odredite nepoznate funkcije $p(x)$ i $q(x)$.