Ispitni rok iz Matematike 2

11. rujna 2012.

1. a) Iskažite integralni kriterij za konvergenciju reda brojeva.
   b) Dokažite integralni kriterij za konvergenciju reda brojeva.

◇

2. Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!-(n+2)!}{(n+3)!}(n+1)+\frac{n+1}{n+3}\right).$$

◇

3. Funkcija f zadana je formulom

$$f(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2.$$

Razvijte funkciju f u Maclaurinov red i odredite za koje x taj red konvergira.

◇

4. Neka je zadan trokut $\triangle ABC$ gdje su duljine stranica AB i AC redom 4 i 2 i vrijedi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$. Na stranici BC određene su točke M i N koje dijele tu stranicu u 3 jednaka dijela. Odredite vrijednost skalarnog produkta

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}.$$

◇

5. Zadan je trokut u prostoru s vrhovima u točkama

$$A(1,2,1),$$
$$B(-1,-4,3),$$
$$C(6,-4,5).$$

Odredite točku simetričnu točki težišta danog trokuta s obzirom na tangencijalnu ravninu na plohu

$$2x^2+3y^2+5xy-z=0$$

u točki

$$S(-1,1,z_0).$$

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika. Svaki zadatak nosi 5 bodova.
Na drugoj stranici su preostali zadaci.

6. a) Iskažite teorem o implicitnoj funkciji za funkciju dvije varijable $F(x, y)$.
   b) Izvedite formulu za derivaciju implicitne funkcije $\phi(x)$ zadane s

$$F(x, \phi(x)) = 0.$$

   c) Dokažite da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa svojstvom da je

$$x + y + g(x, y) = e^{-x-y-g(x,y)},$$

te izračunajte njene parcijalne derivacije.

$\diamond$

7. Odredite sve ekstreme funkcije

$$f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$$

koji leže na pravcu $x - y = \frac{\pi}{4}$ i gdje su $x, y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

$\diamond$

8. Odredite ortogonalne trajektorije familije krivulja

$$y = \ln(x + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

te skicirajte nekoliko krivulja zadane familije i nekoliko krivulja ortogonalnih trajektorija.

$\diamond$

9. Odredite opće rješenje difrencijalne jednadžbe

$$y''' + y' = (\mathrm{tg}(x))'.$$

$\diamond$

10. Riješite Cauchyevu zadaću

$$\begin{aligned} (1 - x^2)y'' - 2xy' + 20y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Uputa: Koristite redove potencija!

Vrijeme pisanja je **150min**. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika. Svaki zadatak nosi 5 bodova.
Na drugoj stranici su preostali zadaci.