Obrada informacija – Zadaci za domaću zadaću 2.

Akademska školska godina 2007./2008.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet Elektrotehnike i računarstva,
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Uputa

Ovi zadaci koje je potrebno riješiti za domaću zadaću ujedno su i zadaci kakve možete očekivati na drugom međuispitu. Drugi međuispit se sastoji od 5 zadataka i piše se 120 minuta.

Zbog velikog broja zadataka svaki student za domaću zadaću mora riješiti samo manji dio zadataka, i to ovisno o zadnjoj znamenci matičnog broja:

Znamenka 0: zadatke 1, 4a, 5, 6a, 7, 8, 10b, 11b, 12, 13a, 14h, 15a, 15e, 16, 22, 23, 26, 27a, 28

Znamenka 1: zadatke 2, 4b, 5, 6b, 7, 9, 10c, 11c, 12, 13b, 14g, 15b, 15f, 17, 20, 25, 26, 27b, 28

Znamenka 2: zadatke 3, 4c, 5, 6c, 7, 9, 10d, 11a, 12, 13c, 14f, 15c, 15g, 18, 21, 24, 26, 27c, 28

Znamenka 3: zadatke 1, 4d, 5, 6d, 7, 8, 10e, 11b, 12, 13d, 14e, 15d, 15h, 19, 21, 23, 26, 27d, 28

Znamenka 4: zadatke 2, 4a, 5, 6a, 7, 9, 10b, 11c, 12, 13e, 14d, 15a, 15h, 16, 22, 25, 26, 27e, 28

Znamenka 5: zadatke 3, 4b, 5, 6b, 7, 9, 10c, 11a, 12, 13f, 14c, 15b, 15g, 17, 21, 24, 26, 27f, 28

Znamenka 6: zadatke 1, 4c, 5, 6c, 7, 8, 10d, 11b, 12, 13g, 14b, 15c, 15f, 18, 21, 23, 26, 27a, 28

Znamenka 7: zadatke 2, 4d, 5, 6d, 7, 9, 10e, 11c, 12, 13h, 14a, 15d, 15e, 17, 20, 25, 26, 27b, 28

Znamenka 8: zadatke 3, 4a, 5, 6a, 7, 9, 10b, 11a, 12, 13a, 14h, 15a, 15g, 16, 22, 24, 26, 27c, 28

Znamenka 9: zadatke 1, 4b, 5, 6b, 7, 9, 10a, 11b, 12, 13b, 14f, 15b, 15h, 19, 21, 23, 26, 27d, 28

Bez obzira što je za domaću zadaću potrebno riješiti samo dio zadataka svakako je dobro pregledati i ostale zadatke, te ovisno o vremenu, riješiti barem neke od njih.

Zadaci iz zadnje skupine su nešto teži i prvenstveno su namijenjeni studentima koji žele znati više. Na međuispitu se neće pojaviti zadaci iz zadnje skupine!

Brza Fourierova transformacija

1. Što je to FFT-algoritam? Kolika je asimptotska složenost korijen-2 FFT algoritma ako njime računamo diskretnu Fourierovu transformaciju u N točaka (N je potencija broja 2). Kolika je asimptotska složenost za izravno računanje DFT-a?

2. Nacrtajte graf toka signala za diskretnu Fourierovu transformaciju u dvije točke (DFT_2). Što je DFT-leptir?

3. Neka je $x[n]$ signal duljine $N = 2L$ uzoraka, $L \in \mathbb{N}$. Pokaži da njegovu DFT_N transformaciju u $N = 2L$ točaka možemo rastaviti u linearnu kombinaciju dvije DFT_L transformacije prema izrazu

$$X[k] = \mathrm{DFT}_{2L}\big[x[n]\big] = \mathrm{DFT}_L\big[x[2n]\big] + W_N^k\,\mathrm{DFT}_L\big[x[2n+1]\big].$$

Napomena: Spektar $X[k] = \mathrm{DFT}_N\big[x[n]\big] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}$ je periodičan s periodom N.

Linearna i cirkularna konvolucija

4. Definirajte linearnu konvoluciju $x[n] * y[n]$. Za zadane signale konačnog trajanja izračunajte linearnu konvoluciju te navedite koliko uzoraka linearne konvolucije je različito od nule.

a) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $y[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$

b) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $y[n] = \{\underline{4}, 3, 2, 1\}$

c) $x[n] = \{\underline{1}, 1, 1, -1\}$, $y[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}$

d) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $y[n] = \{\underline{4}, -3, 2, -1\}$

5. Navedite teorem o konvoluciji za vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju. Korištenjem tog teorema izračunajte $x_1[n] * x_2[n]$ ako je

$$x_1[n] = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} 3^{-n}, & n \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Napomena: Vremenski diskretna Fourierova transformacija signala $a^n\,\mu[n]$ je $\dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$, $|a| < 1$.

6. Definirajte cirkularnu (ili kružnu) konvoluciju $x[n] \circledN y[n]$. Za zadane signale konačnog trajanja izračunajte cirkularnu konvoluciju duljine 4, dakle $x[n] \circled{4} y[n]$. Usporedite rezultate s rezultatima zadatka 4.

a) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $y[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$

b) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $y[n] = \{\underline{4}, 3, 2, 1\}$

c) $x[n] = \{\underline{1}, 1, 1, -1\}$, $y[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}$

d) $x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $y[n] = \{\underline{4}, -3, 2, -1\}$

7. Navedite teorem o konvoluciji za diskretnu Fourierovu transformaciju u N točaka. Korištenjem tog teorema izračunajte $x[n] \circled{4} y[n]$ signala $x[n] = \{\underline{2}, 1, 0, 1\}$ i $y[n] = \{\underline{2}, -1, 0, -1\}$.

8. Zadana su dva konačna niza brojeva

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 2, 4, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{-3}, 4, 0, 2, -1, 2, \}.$$

a) Odredite linearnu konvoluciju zadanih nizova. Kolika je duljina linearne konvolucije?

b) Proširite prvi niz na šest članova dodavanjem nula i odredite cirkularnu konvoluciju uz $N = 6$ tako proširenog niza s nizom $x_2[n]$.

c) Izračunaj cirkularnu konvoluciju iz b) zadatka korištenjem DFT-a.

d) Koji N moramo odabrati i kako moramo proširiti nizove da bi cirkularna konvolucija postala jednaka linearnoj.

9. Zadana su dva signala

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 4, 3, 2, 1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 5\}.$$

Izračunaj $x_1[n] * x_2[n]$ i $x_1[n] \circled{5} x_2[n]$. Kada računamo $x_1[n] \circledN x_2[n]$ koji N moramo odabrati da za $0 \leq n < N$ vrijedi $x_1[n] * x_2[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]$? Izračunaj $x_1[n] \circledN x_2[n]$ za odabrani N.

Digitalni FIR filtri

10. Za svaki od zadanih vremenski otvora navedite izraz za računanje uzoraka otvora u vremenskoj domeni, širinu glavne latice, gušenje prve bočne latice i širinu prijelaznog područja. Kako širina glavne latice ovisi o broju uzoraka otvora?

a) Pravokutni vremenski otvor.

b) Trokutasti ili Bartlettov vremenski otvor.

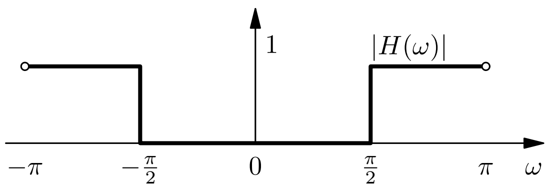
c) Hannov vremenski otvor.

d) Hammingov vremenski otvor.

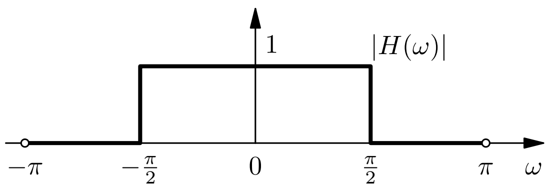
e) Blackmanov vremenski otvor.

11. Zadane su tri aplitudne karakteristike diskretnih filtara (fazne karakteristike su jednake nuli). Korištenjem inverzne vremenski diskretne Fourierove transformacije odredite impulsni odziv nekauzalnog filtra. Izračunati impulsni odziv pomnožite s pravokutnim otvorom duljine $N = 5$ i pomakite u vremenu tako da dobiveni FIR filtar postane kauzalan. Izračunajte DTFT transformaciju tako dobivenog FIR filtra i usporedite je s početnom karakteristikom.

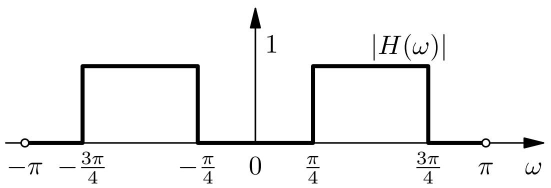
a)



b)



c)



Napomena: Pravokutni vremenski otvor duljine N za neparan N je dan izrazom

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

12. Neka je $A_s(\omega)$ idealna amplitudna karakteristika, neka je $A(\omega)$ stvarna amplitudna karakteristika nekog diskretnog filtra. Definiraje p-udaljenost koja mjeri odstupanje dobivene od idealne karakteristike. Kako se udaljenost (pogreška) zove za $p = 1$, kako za $p = 2$, a kako za $p = \infty$.

Napomena: Ako su $f(\omega)$ i $g(\omega)$ dvije funkcije njihova p-udaljenost je $\sqrt[p]{\int \left| f(\omega) - g(\omega) \right|^p d\omega}$.

13. Za svaku od zadanih amplitudnih karakteristika $A(\omega)$ uz pretpostavku nulte faze projekcijskom metodom odredi impulsni odziv u $N = 5$ uzoraka FIR filtra tipa 1.

a) $A(\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{\pi}{6} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

b) $A(\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

c) $A(\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{3} < \omega < \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

d) $A(\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

e) $A(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{6}{\pi}|\omega|, & -\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{\pi}{6} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

f) $A(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi}|\omega|, & -\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

g) $A(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{\pi}|\omega|, & -\frac{\pi}{3} < \omega < \frac{\pi}{3} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

h) $A(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi}|\omega|, & -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Napomena: Prijenosna funkcija FIR filtra tipa 1 duljine $N = 5$ je oblika

$$H(\omega) = e^{-j5\omega/2}\big(a[0] + a[1]\cos(\omega) + a[2]\cos(2\omega)\big).$$

Diskretna kosinusna i sinusna transformacija

Kako postoji više različitih definicija DCT i DST transformacija ako u zadatku samo piše DCT_N podrazumijevamo diskretnu kosinusnu transformaciju danu izrazom

$$X[k] = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N}, \tag{1}$$

gdje je $\alpha(k)$ normalizacijski koeficijent koji poprima vrijednosti

$$\alpha(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 1 \leq k < N \end{cases}. \tag{2}$$

MATLAB-ova naredba `DCT` računa upravo diskretnu kosinusnu transformaciju prema izrazu (1). Jednako za DST_N podrazumijevamo diskretnu sinusnu transformaciju danu izrazom

$$X[k] = \beta(k) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\frac{(2n+1)(k+1)\pi}{2N}, \tag{3}$$

gdje je $\beta(k)$ normalizacijski koeficijent koji poprima vrijednosti

$$\beta(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 0 \leq k < N-1 \end{cases}. \tag{4}$$

MATLAB-ova naredba `DST` ne odgovara ovdje navedenoj definiciji diskretne sinusne transformacije (3). Za sve ostale transformacije kao što su DCT-I, DCT-II itd. izrazi će biti navedeni u tekstu zadatka, dakle nije ih potrebno znati napamet!

Za računanje DCT i DST transformacije nekog signala poželjno je znati vrijednosti sinus i kosinus funkcija za kutove koji su višekratnici od $\frac{\pi}{n}$ gdje je n prirodan broj. U tablicama 1., 2. i 3. su navedene vrijednosti sinusa i kosinusa za neke interesantije višekratnike. Na ispitu za računanje tih vrijednosti možete slobodno koristiti kalkulator.

x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$
$\cos(x)$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$	$-\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$	$-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
$\sin(x)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Tablica 1.: Vrijednosti kosinusa i sinusa za višekratnike od $\pi/5$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tablica 2.: Vrijednosti kosinusa i sinusa za višekratnike od $\pi/6$.

x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$
$\cos(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Tablica 3.: Vrijednosti kosinusa i sinusa za višekratnike od $\pi/8$.

14. Svaku od navedenih diskretnih kosinusnih transformacija zapiši u matričnom obliku za $N = 4$. Korištenjem matričnog oblika izračunaj spektar $X[k]$ realnog signala $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0\}$ duljine $N = 4$.

a) DCT-I transformacija dana izrazom (za $N > 1$)

$$X[k] = \sqrt{\frac{2-\delta[k]-\delta[k-N+1]}{N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{\sqrt{1+\delta[n]+\delta[n-N+1]}} \cos\frac{nk\pi}{N-1}.$$

b) DCT-II transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2-\delta[k]}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N}.$$

c) DCT-III transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{\sqrt{1+\delta[n]}} \cos\frac{n(2k+1)\pi}{2N}.$$

d) DCT-IV transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{4N}.$$

e) DCT-V transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{4-2\delta[k]}{2N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{\sqrt{1+\delta[n]}} \cos \frac{2nk\pi}{2N-1}.$$

f) DCT-VI transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{4-2\delta[k]}{2N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{\sqrt{1+\delta[n-N+1]}} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N-1}.$$

g) DCT-VII transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{4-2\delta[k-N+1]}{2N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \frac{1}{\sqrt{1+\delta[n]}} \cos \frac{n(2k+1)\pi}{2N-1}.$$

h) DCT-VIII transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{4}{2N+1}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{4N+2}.$$

15. Definiraj DCT_4 i IDCT_4 transformaciju te napiši matricu transformacije. Za svaki od zadanih signala $x[n]$ izračunaj $X[k] = \mathrm{DCT}_4\big[x[n]\big]$ i pokaži da je $\mathrm{IDCT}_4\big[X[k]\big] = x[n]$.

a) $x[n] = \{\underline{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}$

b) $x[n] = \Big\{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}/2}}, \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}/2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}/2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}/2}\Big\}$

c) $x[n] = \{\underline{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}$

d) $x[n] = \Big\{\underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}/2}}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}/2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}/2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}/2}\Big\}$

e) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0\}$

f) $x[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 0\}$

g) $x[n] = \{\underline{0}, 0, 1, 0\}$

h) $x[n] = \{\underline{0}, 0, 0, 1\}$

Napomena: Izraz za DCT_4 transformaciju odgovara izrazu za DCT-II uz $N = 4$, dok izraz za IDCT_4 odgovara izrazu za DCT-III, naravno opet uz $N = 4$ (vidi zadatak 14).

16. Označimo s $\mathcal{C}_N$ matricu DCT_N transformacije i s $\mathcal{C}_N^{-1}$ matricu IDCT_N transformacije. Pokaži da je za $N = 3$ matrica

$$\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

te da vrijedi $\mathcal{C}_3^{-1} = \mathcal{C}_3^T$, odnosno $\mathcal{C}_3\mathcal{C}_3^T = \mathcal{C}_3^T\mathcal{C}_3 = \mathbf{I}$.

17. Objasnite vezu DCT (DCT-II) i DFT_{4N} transformacija. Korištenjem te veze proširite niz $x[n] = \{\underline{0}, 1\}$ do duljine $4N$, izračunajte DFT_{4N} proširenog niza te usporedite dobivenu transformaciju s $\mathrm{DCT}\big[x[n]\big]$

Napomena: Nemojte zaboraviti na težinske faktore $\alpha(k)$ dane izrazom (2).

18. Objasnite vezu DCT-I i DFT_{2N-2} transformacija. Korištenjem te veze parno proširite signal $x[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, 1\}$, izračunajte DFT_{2N-2} proširenog niza te usporedite dobivenu transformaciju s $\text{DCT-I}\big[x[n]\big]$.

19. Za DFT_N transformaciju znamo da vrijedi teorem o cirkularnoj konvoluciji, odnosno $x[n] \circledast y[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X[k]Y[k]$, gdje su $X[k]$ i $Y[k]$ odgovarajući DFT_N spektri. Neka je $x[n] = \{\underline{2}, 1, 1, 2\}$ i $y[n] = \{\underline{1}, -1, -1, 1\}$. Pokažite na zadanim signalima da teorem o cirkularnoj konvoluciji ne vrijedi za DCT transformaciju, odnosno pokažite da je $x[n] \circledast y[n]$ različito od $\mathrm{IDCT}\big[\mathrm{DCT}[x[n]] \cdot \mathrm{DCT}[y[n]]\big]$.

DFT i DCT filtarski slogovi

20. Nacrtajte strukturu DFT filtarskog sloga s decimacijom za $N = 4$. Za svaki filtarski element u slogu napišite prijenosnu funkciju u $\mathcal{Z}$ domeni te navedite vezu koeficijenata prijenosnih funkcija i elemenata matrice $\mathbf{W}_4$ diskretne Fourierove transformacije u četiri točke.

21. Nacrtajte strukturu DCT filtarskog sloga s decimacijom za $N = 4$. Za svaki filtarski element u slogu napišite prijenosnu funkciju u $\mathcal{Z}$ domeni te navedite vezu koeficijenata prijenosnih funkcija i matrice $\mathcal{C}_4$ diskretne kosinusne transformacije u četiri točke.

22. Nacrtajte strukturu MDCT filtarskog sloga s decimacijom za $N = 4$. Za svaki filtarski element u slogu napišite prijenosnu funkciju u $\mathcal{Z}$ domeni ako znate da se na svaki blok primijenjuje vremenski otvor $w[n] = \sin \frac{(2n+1)\pi}{4N}$. Koje svojstvo zadovoljava navedeni vremenski otvor?

Uputa: Modificiranu diskretnu kosinusnu transformaciju računamo prema izrazu

$$X[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] \cos \frac{(2n+1+N)(2k+1)\pi}{4N}$$

koji se temelji na DCT-IV transformaciji. Inverznu transformaciju računamo kao

$$x[n] = \sum_{k}^{N-1} X[k] \cos \frac{(2n+1+N)(2k+1)\pi}{4N}.$$

Rekonstrukcija analognog signala

23. Za zadane signale odredi interpolacijsku funkciju oblika sinc. Izračunaj vrijednost koju interpolirani signal poprima u trenutcima $t_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ i $t_2 = 2{,}5\,\mathrm{s}$ ako je period otipkavanja $T_s = 1\,\mathrm{s}$.

a) $x[n] = \{\dots, 0, 0, \underline{1}, 2, 0, -2, -1, 0, 0, 0, \dots\}$,

b) $x[n] = \{\dots, 0, 0, \underline{1}, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ i

c) $x[n] = \{\dots, 0, 0, \underline{1}, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, \dots\}$

24. Diskretni signal $x[n] = 5\delta[n] - 6\delta[n-2] + \delta[n-5] - \delta[n-7]$ rekonstuiramo idealnim i ZOH interpolatorom. Izračunajte i skicirajte dobivene rekonstruirane signale ako je period otipkavanja $T_s = 1\,\mathrm{s}$. Izračunajte i usporedite vrijednosti koju interpolirani signali poprimaju u trenutku $t_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

Impulsni odzivi idealnog i ZOH interpolatora su

$$h_{\text{II}}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad \text{i} \quad h_{\text{ZOH}}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right).$$

25. Za diskretni signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -1\}$$

izračunajte i skicirajte rekonstruirani kontinuirani signal nakon rekonstrukcije sinc i FOH interpolatorom. Izračunajte i usporedite vrijednosti koju interpolirani signali poprimaju u trenutku $t_1 = 0{,}5\,\text{s}$ ako je period otipkavanja $T_s = 1\,\text{s}$.

Impulsni odzivi idealnog i FOH interpolatora su

$$h_{\text{II}}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad \text{i} \quad h_{\text{FOH}}(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{T_s}\right).$$

Uvod u digitalnu obradu slike

26. Definirajte digitalnu sliku. Što je domena, a što kodomena? Kako kodomena izgleda za sive slike, a kako za slike u boji? Navedite neke primjere!

27. Digitalna slika $I(x,y)$ dimezija 5×5 ima vrijednosti točaka kako je prikazano na slici 1.. Za svaku od navedenih operacija odredi izlaznu sliku $J(x,y)$ i ispitaj linearnost operacije.

a) $J(x,y) = 2I(x,y) + 5$

b) $J(x,y) = I(x, y + 2 \bmod 5)$

c) $J(x,y) = I(x,y) + 2I(x - 2 \bmod 5, y - 2 \bmod 5)$

d) $J(x,y) = \sqrt{I(x,y)}$

e) $J(x,y) = I^2(x,y)$

f) $J(x,y) = 20I(x,y)$

5	6	7	8	9
4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5

Slika 1.: Ulazna slika $I(x,y)$ dimenzija 5×5

28. Slika u boji $I(x,y)$ za svaku točku slike ima tri komponente. Označimo li te komponente s $r(x,y)$, $g(x,y)$ i $b(x,y)$ pripadnu normiranu sivu sliku $J(x,y)$ možemo izračunati prema formuli

$$J(x,y) = \frac{1}{\max(r) + \max(g) + \max(b)}\big(0{,}29894\, r(x,y) + 0{,}58704\, g(x,y) + 0{,}11402\, b(x,y)\big).$$

Odredite sivu sliku za ulaznu sliku prikazanu na slici 2..

1	2	3	4		4	4	4	4		4	5	6	7
1	2	3	4		3	3	3	3		3	4	5	6
1	2	3	4		2	2	2	2		2	3	4	5
1	2	3	4		1	1	1	1		1	2	3	4
$r(x,y)$					$g(x,y)$					$b(x,y)$			

Slika 2.: Ulazna slika $I(x,y)$ u boji dimenzija 4×4

Zadaci za one koji žele znati više

29.* Neka je DFT u 8 točaka niza

$$x_1[n] = \{\underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

dan izrazom

$$X_1[k] = \{\underline{A_0}, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}.$$

Ako je poznato da je DFT u 4 točke drugog niza

$$x_2[n] = \{\underline{b_0}, b_1, b_2, b_3\}$$

dan izrazom

$$X_2[k] = \{\underline{A_0}, A_2, A_4, A_6\}$$

odredi izraz koji povezuje brojeve a_k i b_k.

30.* Neka je $y[n]$ niz dobiven linearnom konvolucijom signala $x[n]$ i $h[n]$. Pokaži da vrijedi

a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\right)$ i

b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n]\right)$.

31.* Neka su $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dva konačna niza duljine N. Ako je

$$y_L[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i] x_2\big[n-i\big], \quad n = 0, 1, \ldots, 2N-2$$

linearna konvolucija zadanih nizova te ako je

$$y_C[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2\big[\langle n-i \rangle_N\big]$$

cirkularna konvolucija zadanih nizova izrazi $y_C[n]$ pomoću $y_L[n]$.

32.* Pokaži da je cirkularna konvolucija komutativna, odnosno da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2\big[\langle n-i \rangle_N\big] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i] x_1\big[\langle n-i \rangle_N\big].$$

33.* Neka je $y[n]$ cirkularna konvolucija dva konačna niza duljine N. Pokaži da vrijedi

a) $\sum_{n=0}^{N-1} y[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\right)$ i

b) $\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n h[n]\right)$ za parni N.

34.* Promatramo potprostor S prostora $L^2[-\pi,\pi]$ koji sadrži sve funkcije oblika $\sum_n a[n]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\omega n)$. Pokaži da vrijedi:

a) Skup $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\omega n), n \in \mathbb{N}_0\}$ je ortonormalan skup, odnosno vrijedi

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\omega n), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\omega m)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega m)\cos(\omega n)\,d\omega = \delta[n-m].$$

b) Pokaži da je za funkciju $f(\omega)$ iz $L^2[-\pi,\pi]$

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\omega n), f(\omega)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\omega n)$$

ortogonalna projekcija $f(\omega)$ na S.

35.* FIR filtar drugog reda ima simetrični impulsni odziv, tj. vrijedi $h[0] = h[2]$. Ako na ulaz takvog filtra dovedemo dvije čiste kosinusoide kružnih frekvencija $\pi/4$ i $\pi/2$ filtar propušta samo komponentu niže frekvencije i to s jediničnim pojačanjem. Odredi impulsni odziv filtra.

36.* Odredi impulsni odziv pojasno-propusnog FIR filtra 105 reda projektiranog pomoću Hammingovog vremenskog otvora. Neka su granične frekvencije $\pi/4$ i $3\pi/4$.

Uputa: Odredi inverznu vremenski-diskretnu Fourierovu transformaciju spektra idealnog filtra koji je na intervalu $[-\pi,\pi]$ određen izrazom

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j\omega N/2} = \begin{cases} e^{-j\omega N/2}, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

37.* Svaku od navedenih diskretnih sinusnih transformacija zapiši u matričnom obliku za $N = 4$. Korištenjem matričnog oblika izračunaj spektar $X[k]$ realnog signala $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0\}$ duljine $N = 4$.

a) DST-I transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\frac{(n+1)(k+1)\pi}{N+1}.$$

b) DST-II transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2-\delta[k-N+1]}{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\frac{(2n+1)(k+1)\pi}{2N}.$$

c) DST-III transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\frac{1}{\sqrt{1+\delta[n-N+1]}}\sin\frac{(n+1)(2k+1)\pi}{2N}.$$

d) DST-IV transformacija dana izrazom

$$X[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin\frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{4N}.$$

e) DST-V transformacija dana izrazom

$$X[k]=\sqrt{\frac{4}{2N+1}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\frac{2(n+1)(k+1)\pi}{2N+1}.$$

f) DST-VI transformacija dana izrazom

$$X[k]=\sqrt{\frac{4}{2N+1}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\frac{(2n+1)(k+1)\pi}{2N+1}.$$

g) DST-VII transformacija dana izrazom

$$X[k]=\sqrt{\frac{4}{2N+1}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\sin\frac{(n+1)(2k+1)\pi}{2N+1}.$$

h) DST-VIII transformacija dana izrazom

$$X[k]=\sqrt{\frac{4-2\delta[k-N+1]}{2N-1}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\frac{1}{\sqrt{1+\delta[n-N+1]}}\sin\frac{(2n+1)(2k+1)\pi}{4N-2}.$$

38.* Označimo sa $\mathcal{S}_N$ matricu DST$_N$ transformacije i sa $\mathcal{S}_N^{-1}$ matricu IDST$_N$ transformacije. Pokaži da je za $N=3$ matrica

$$\mathcal{S}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

te da vrijedi $\mathcal{S}_3^{-1}=\mathcal{S}_3^T$, odnosno $\mathcal{S}_3\mathcal{S}_3^T=\mathcal{S}_3^T\mathcal{S}_3=\mathbf{I}$.