Obnavljanje slike

Prof. dr. sc. Sven Lončarić
http://www.fer.hr/predmet/obrinf

Uvod

- engl. image restoration
- Obnavljanje slike ima za svrhu restauraciju originalne iz degradirane slike pretpostavljajući neki model degradacije
- Za razliku od obnavljanja poboljšanje slike je koncentrirano na isticanje nekih karakteristika slike
- Problemi obnavljanja su precizno postavljeni dok se kriteriji poboljšanja slike teško formaliziraju matematički

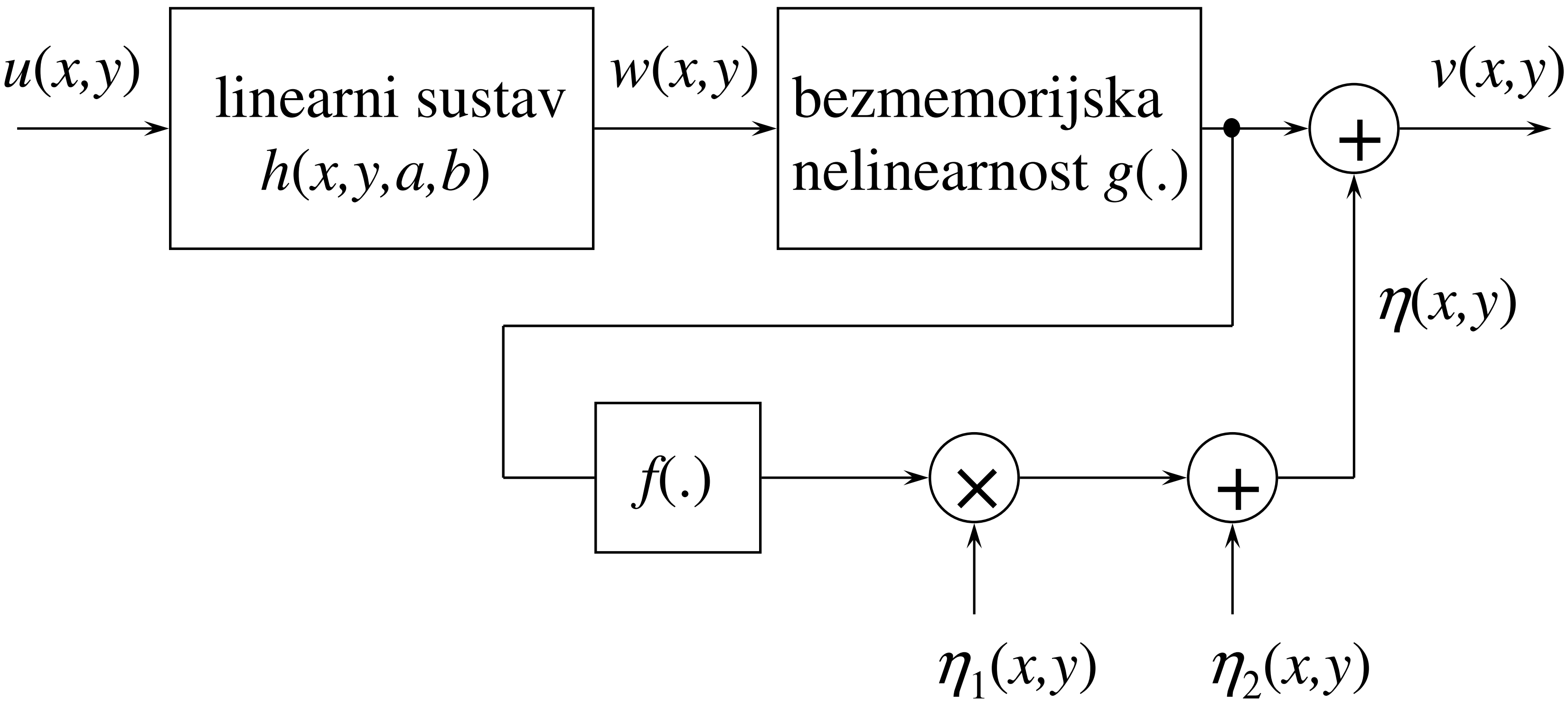
Pregled tema

- Modeli degradacije slike
- Inverzni i Wiener filtar
- Pseudoinverzna matrica
- Geometrijske modifikacije slike

Sustav za akviziciju slike

- Tipični sustav za akviziciju slike se sastoji od:
  - sustava za formiranje slike
  - detektora slike
  - sustava za registraciju (pamćenje) slike
- Primjer: foto aparat, TV kamera
- Svaka od gornje tri komponente unosi degradaciju koja se može modelirati
- Šum također unosi degradaciju

Model degradacije I



Model degradacije II

- $u(x,y)$ predstavlja objekt (originalnu sliku)
- $v(x,y)$ predstavlja opaženu sliku (rezultat akvizicije)
- $\eta(x,y)$ je aditivni šum koji se sastoji od dijela ovisnog o slici $\eta_1(x,y)$ i dijela $\eta_2(x,y)$ neovisnog o slici:

$$v(x,y) = g\left[w(x,y)\right] + \eta(x,y)$$

$$w(x,y) = \iint h(x,y,a,b)u(a,b)\,da\,db$$

$$\eta(x,y) = f\left[g(w(x,y))\right]\eta_1(x,y) + \eta_2(x,y)$$

Primjeri formiranja slike I

- Optički sustav ograničen difrakcijom:

$$h(x, y) = ab\,\mathrm{sinc}(ax)\,\mathrm{sinc}(by)$$

$$H(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{rect}(\xi_1/a, \xi_2/b)$$

- Horizontalno gibanje:

$$h(x, y) = \mathrm{rect}(x/a - 0.5)\,/\,a$$

$$H(\xi_1, \xi_2) = e^{-j\pi\xi_1 a}\,\mathrm{sinc}(\xi_1 a)$$

Primjeri formiranja slike II

- Atmosferske turbulencije:

$$h(x,y)=\exp(-\pi\alpha^2(x^2+y^2))$$

$$H(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{\alpha^2}\exp(\frac{-\pi(\xi_1^2+\xi_2^2)}{\alpha^2})$$

Modeli detektora i registratora

- Film, uređaji za prikaz imaju nelinearnu karakteristiku:

  $$g = aw^b$$

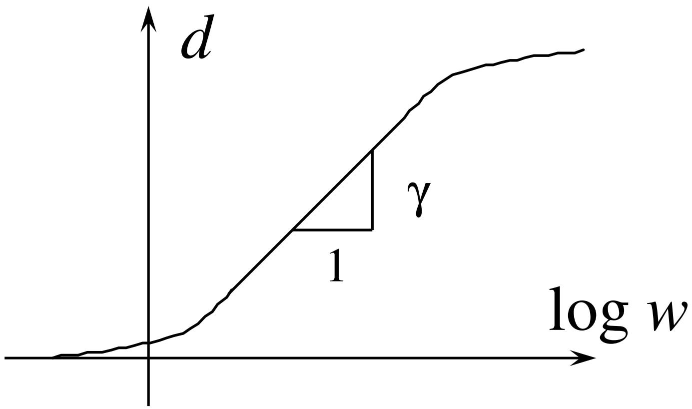
  gdje su *a* i *b* konstante koje ovise o tipu detektora a *w* je ulazna varijabla
- Kod fotoelektroničkih detektora *w* predstavlja intenzitet upadnog svjetla a *g* je struja snopa elektrona koji otipkava sliku (scanning beam)

Primjer fotografskog filma

- U slučaju fotografskog filma gornja nelinearna karakteristika se često piše u obliku:

$$d = \gamma \log w - d_0$$

gdje je w intenzitet svjetla a d je optička gustoća

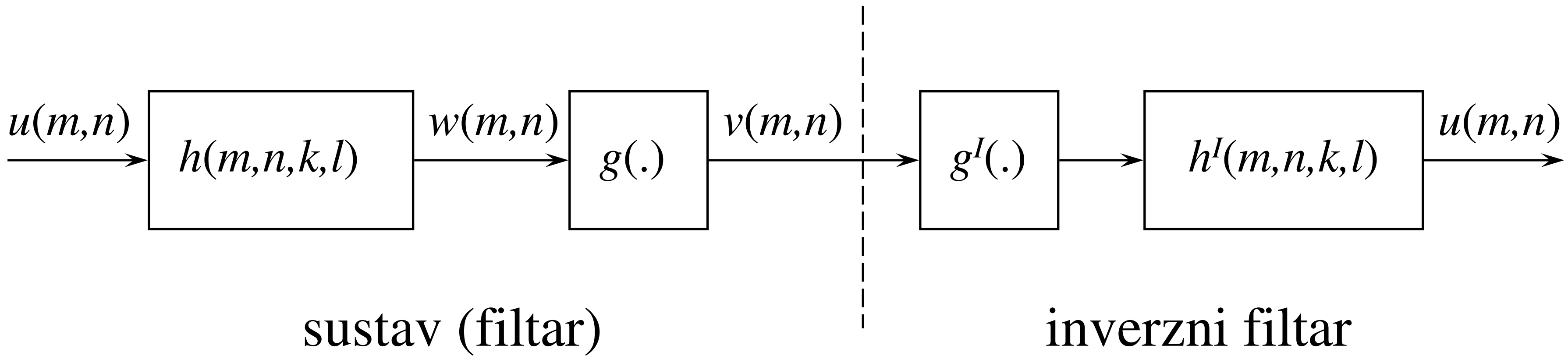


Metode za obnavljanje slike

- Inverzni filtar
- Pseudo inverzni filtar
- Wienerov filtar

Inverzni filtar

- Inverzno filtriranje je proces kojim se za dani izlaz sustava računa ulaz (obrnuto od uobičajenog filtriranja gdje se za dani ulaz računa izlaz)



Matematička formulacija I

- Poništavanje bezmemorijskih nelinearnosti traži:

  $g^{I}(x) = g^{-1}(x)$

- Za poništavanje memorijskog dijela treba vrijediti:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h^{I}(m,n,i,j)\,h(i,j,k,l) = \delta(m-k,n-l)$$

- Inverzni filtri su korisni i za pre-korekciju grešaka koje se očekuju (npr. nelinearnost ekrana za prikaz)

Matematička formulacija II

- Za sustave invarijantne na pomak gornji izraz postaje kovolucijska sumacija:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h^I(m-i,n-j)h(i,j)=\delta(m,n)$$

- Nakon Fourierove transformacije dobiva se:

$$H^I(\omega_1,\omega_2)H(\omega_1,\omega_2)=1$$
$$\Rightarrow H^I(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{H(\omega_1,\omega_2)}$$

Matematička formulacija III

- Dizajn realizabilnih filtara je težak zbog moguće nestabilnosti
- Nule originalnog sustava postaju polovi inverznog sustava
- Ako originalni sustav ima nule na jediničnoj kružnici inverzni sustav će imati polove na jediničnoj kružnici. Odziv za te frekvencije bit će beskonačan (nestabilan sustav)

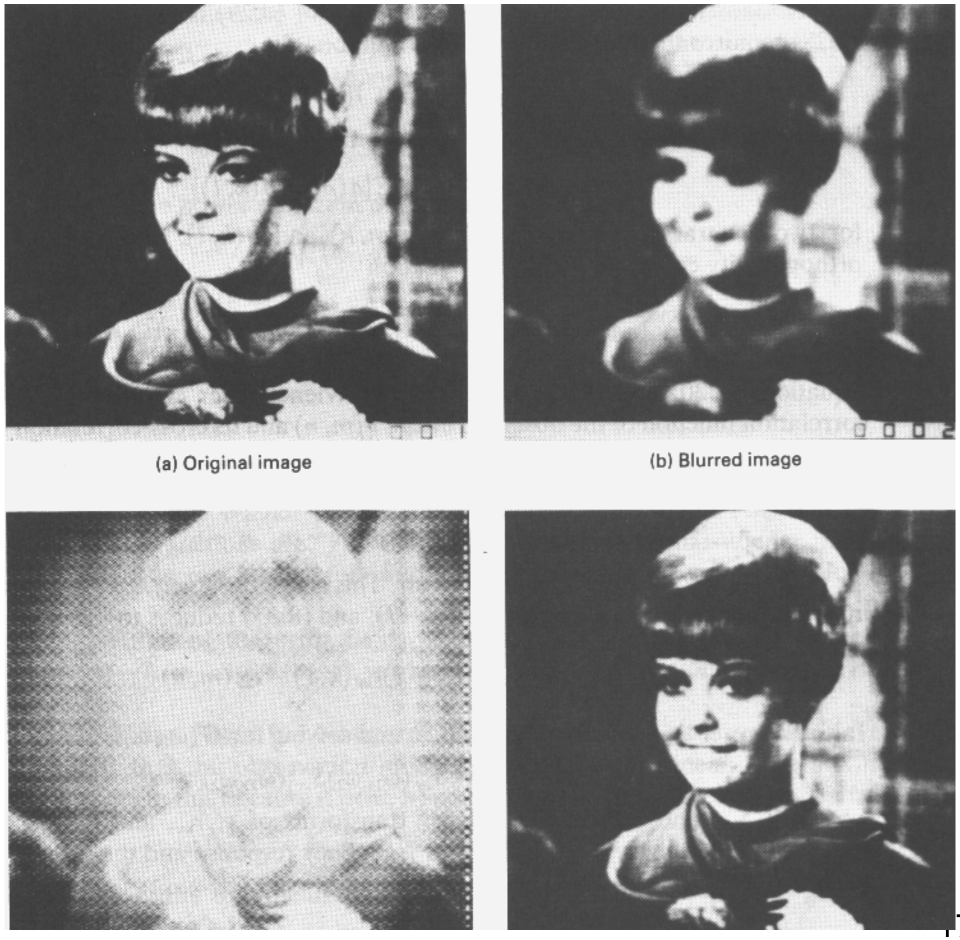
Pseudoinverzni filtar

- Pseudoinverzni filtar je stabilizirana verzija inverznog filtra
- Za linearni sustav invarijantan na pomak s frekvencijskom karakteristikom $H(\omega_1, \omega_2)$ pseudoinverzni filtar je definiran kao:

$$H^{-}(\omega_1,\omega_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{H(\omega_1,\omega_2)}, & H(\omega_1,\omega_2)\neq 0\\ 0, & H(\omega_1,\omega_2)=0\end{cases}$$

Primjer inverznog i pseudoinverznog filtriranja

- GL: originalna slika
- GD: zamućena slika
- DL: inverzna filtracija
- DD: pseudo-inverzna filtracija



Wienerov filtar

- Glavna mana inverznog filtriranja je velika osjetljivost na šum
- Osjetljivost je velika zbog prirode inverznog filtriranja koje se sastoji u računanju kvocjenta dvaju malih veličina
- Wienerov filtar je metoda obnavljanja slike uz prisustvo šuma

Formulacija problema

- Neka su *u*(*m,n*) i *v*(*m,n*) slučajni nizovi s srednjom vrijednosti jednakom nuli
- Problem: Treba naći procjenu

$$\hat{u}(m,n)$$

niza *u*(*m,n*) iz *v*(*m,n*) takvu da se minimizira srednja kvadratna pogreška:

$$\sigma_e^2 = E\left\{\left[u(m,n) - \hat{u}(m,n)\right]^2\right\}$$

Rješenje problema I

- Najbolja ocjena je uvjetna srednja vrijednost niza *u*(*m*,*n*) uz dane $\{v(k,l), \quad \forall k,l\}$

$$\hat{u}(m,n) = E\big[u(m,n) \big| \{v(k,l), \quad \forall k,l\}\big]$$

- Gornju jednadžbu je teško riješiti zato se najčešće koristi najbolja linearna ocjena oblika:

$$\hat{u}(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(m,n,k,l) v(k,l)$$

gdje se impulsni odziv filtra *g*(*m*,*n*,*k*,*l*) odabere tako da se minimizira srednja kvadratna pogreška

Rješenje problema II

- Uvjet minimizacije srednje kvadratne pogreške je uvjet ortogonalnosti:

$$E\left[\{u(m,n)-\hat{u}(m,n)\}v(m',n')\right]=0, \quad \forall m,n,m',n'$$

- Koristeći definiciju kros-korelacije:

$$r_{ab}(m,n,k,l)=E\left[a(m,n)b(k,l)\right]$$

i gornju jednadžbu za linearnu ocjenu dobiva se:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(m,n,k,l)r_{vv}(k,l,m',n')=r_{uv}(m,n,m',n')$$

Rješenje problema III

- Ako su *u*(*m,n*) i *v*(*m,n*) stacionarni procesi onda je:

$$r_{ab}(m,n,m',n') = r_{ab}(m-m',n-n')$$

  gdje je *ab* jednako *uu*, *uv*, *vv*

- Tada je i filtar *g*(*m-k,n-l*) invarijantan na pomak te dobivamo:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(m-k,n-l)r_{vv}(k,l) = r_{uv}(m,n)$$

Rješenje problema IV

- Transformacijom jednadžbe u Fourierovu domenu dobivamo rješenje :

$$G(\omega_1,\omega_2) = S_{uv}(\omega_1,\omega_2)S_{vv}^{-1}(\omega_1,\omega_2)$$

gdje su G, S_{uv}, S_{vv} Fourierove transformacije od g, r_{uv}, r_{vv} respektivno

- Konačno se može pisati:

$$\hat{u}(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(m-k,n-l)v(k,l)$$

$$\hat{U}(\omega_1,\omega_2) = G(\omega_1,\omega_2)V(\omega_1,\omega_2)$$

Rješenje problema V

- Pretpostavimo sada (model degradacije) da je $v(m,n)$ u obliku:

$$v(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(m-k, n-l) u(k,l) + \eta(m,n)$$

gdje je $\eta\,(m,n)$ stacionarni šum nekoreliran s $u(m,n)$ i koji ima spektralnu gustoću $S_{\eta\eta}$

Rješenje problema VI

- Tada je:

$$S_{vv}(\omega_1,\omega_2) = \left|H(\omega_1,\omega_2)\right|^2 S_{uu}(\omega_1,\omega_2) + S_{\eta\eta}(\omega_1,\omega_2)$$

$$S_{uv}(\omega_1,\omega_2) = H^*(\omega_1,\omega_2) S_{uu}(\omega_1,\omega_2)$$

što konačno daje izraz za Wienerov filtar:

$$G(\omega_1,\omega_2) = \frac{H^*(\omega_1,\omega_2) S_{uu}(\omega_1,\omega_2)}{\left|H(\omega_1,\omega_2)\right|^2 S_{uu}(\omega_1,\omega_2) + S_{\eta\eta}(\omega_1,\omega_2)}$$

Diskusija rješenja

- Rješenje se može pisati i kao:

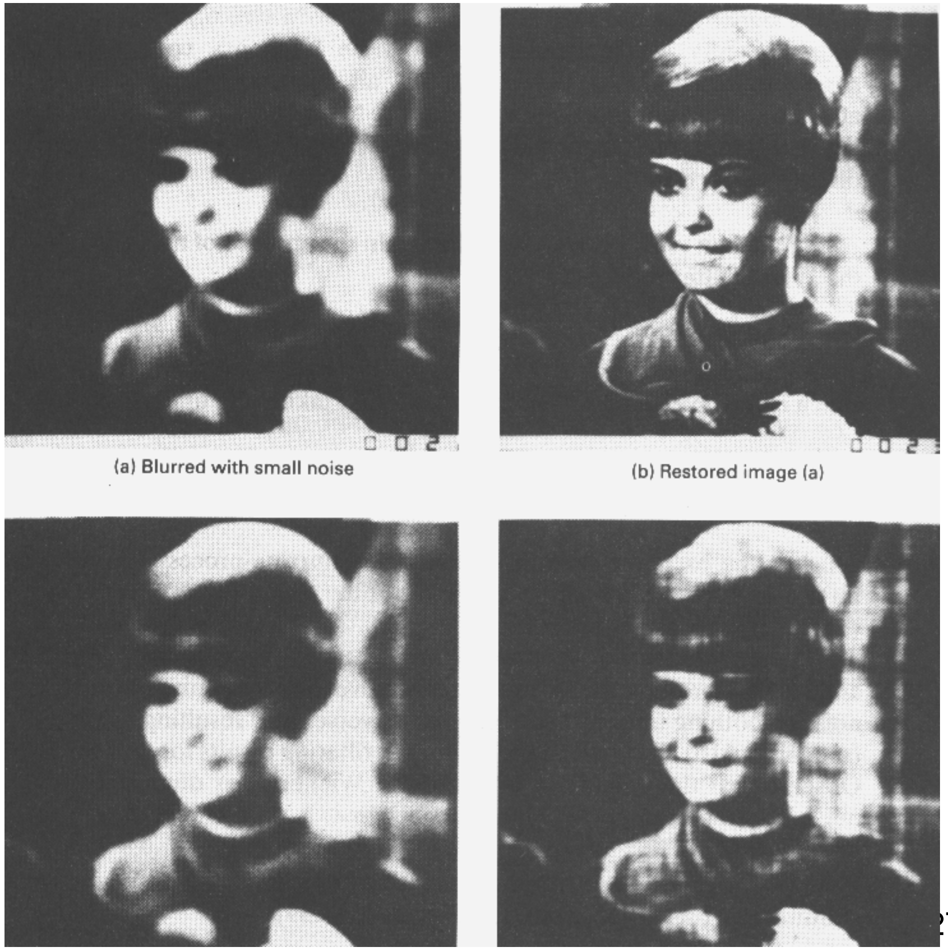
$$G(\omega_1,\omega_2)=\frac{H^*(\omega_1,\omega_2)}{\left|H(\omega_1,\omega_2)\right|^2+\dfrac{S_{\eta\eta}(\omega_1,\omega_2)}{S_{uu}(\omega_1,\omega_2)}}$$

- Kada je $S_{\eta\eta} << \left|H\right|^2 S_{uu}$ dobivamo inverzni filtar:

$$G(\omega_1,\omega_2)\cong\frac{H^*(\omega_1,\omega_2)}{\left|H(\omega_1,\omega_2)\right|^2}=\frac{1}{H(\omega_1,\omega_2)}$$

Primjer Wiener filtra

- GL: malo zamućena slika
- GD: obnovljena slika
- DL: jako zamućena slika
- DD: obnovljena slika



Zaključak

- Dan je pregled osnovnih metoda za obnavljanje slike:
  - Modeli degradacije slike
  - Inverzni filtar
  - Wiener filtar