Interpolacija signala

Obrada informacija

Damir Seršić

http://www.fer.hr/predmet/obrinf

Teme predavanja

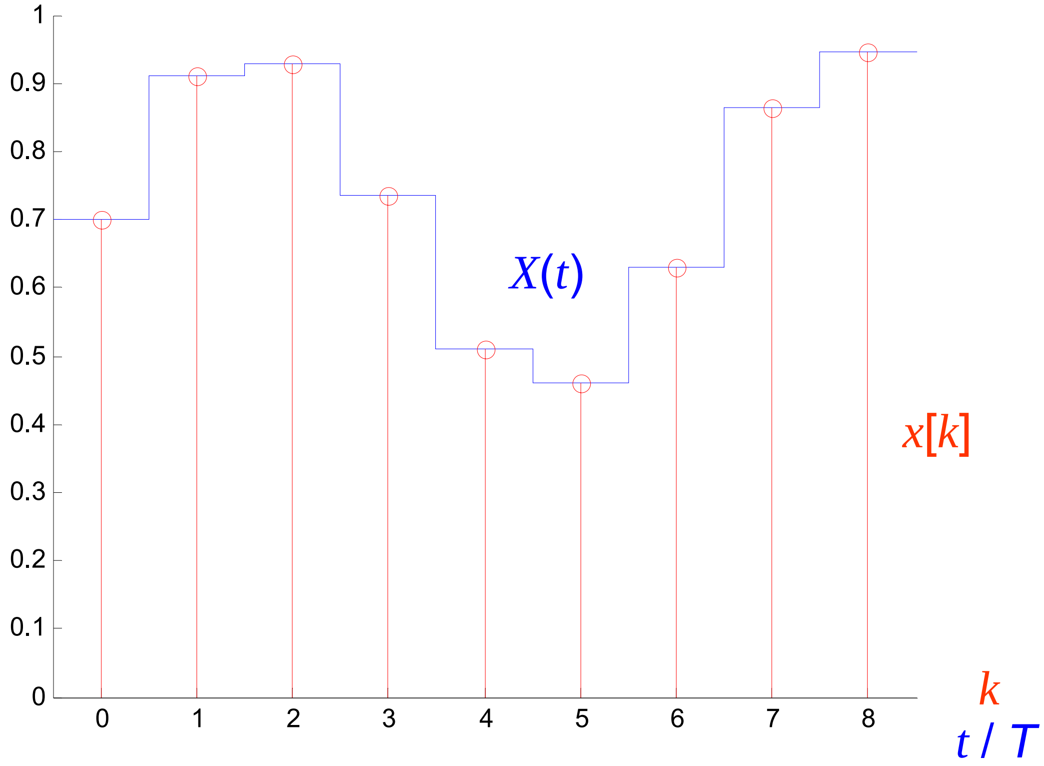
- Interpolacija signala polinomom
  - Interpolacija nultog reda
  - Linearna interpolacija
  - Interpolacija polinomom višeg reda
    - savitljivi krivuljar (*eng. spline*), kubni *spline*
  - Shannonov interpolator
- Nelinearni filtri
  - Medijan filtar
  - Procjena efektivne vrijednosti

Kontinuirani signal iz diskretnog

- Digitalno / analogna pretvorba
  - Nakon digitalne obrade signala, rezultat se pretvara u odgovarajuću analognu veličinu.
- Promjena frekvencije uzorkovanja signala, ili promjena broja točaka u slici
  - Česta potreba u audio tehnici, komunikacijama, obradi slike i video signala.

Interpolator nultog reda

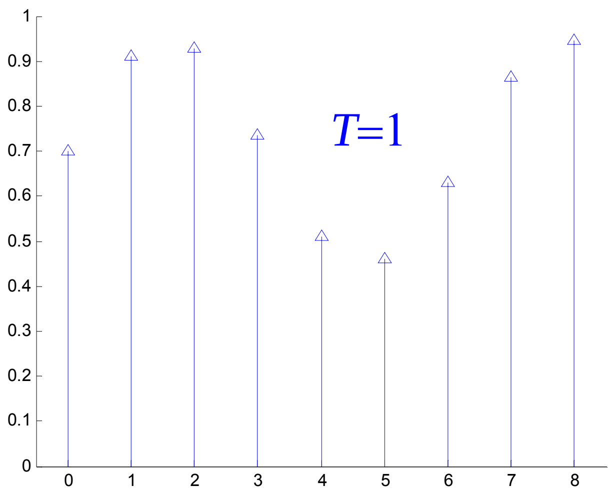
- Reprezentira djelovanje tipičnog A/D pretvornika.

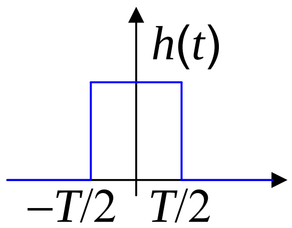


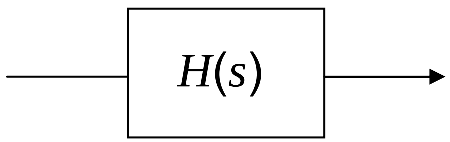
Matematički model interpolatora nultog reda

- Formiramo kontinuirani signal $x_s(t)$ množenjem $x[k]$ s češljem Diracovih funkcija, te filtriramo rezultat filtrom pravokutnog impulsnog odziva:

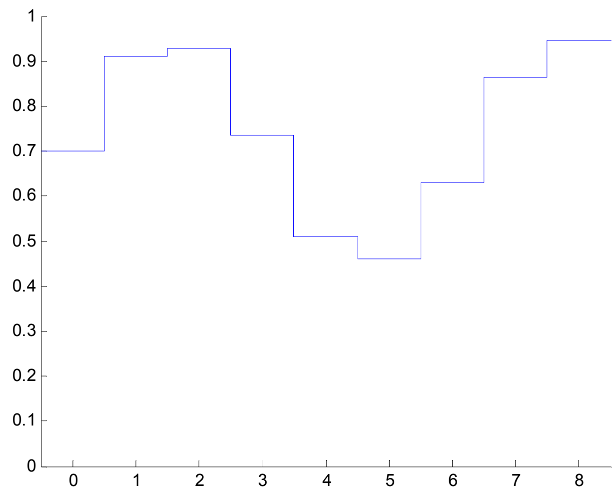
$$x_s(t) = \sum_{k \in Z} x[k]\,\delta(t - kT)$$







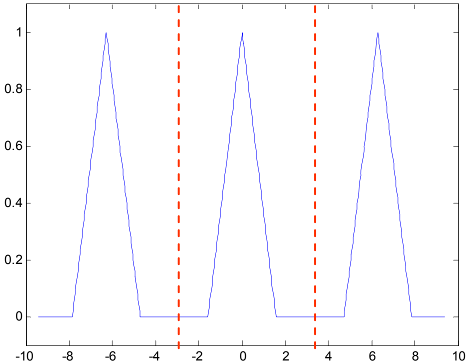
Interpolirani signal $X(t)$



U frekvencijskoj domeni

Spektar $x_s(t)$ je periodičan:

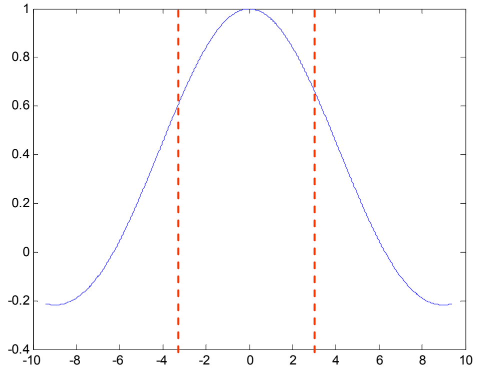
$$X_s(\omega)=\int_t \sum_k x[k]\,\delta(t-kT)\,e^{-j\omega t}dt=\sum_k x[k]\,e^{-j\omega Tk}$$



ωT

Frekvencijska karakteristika filtra je:

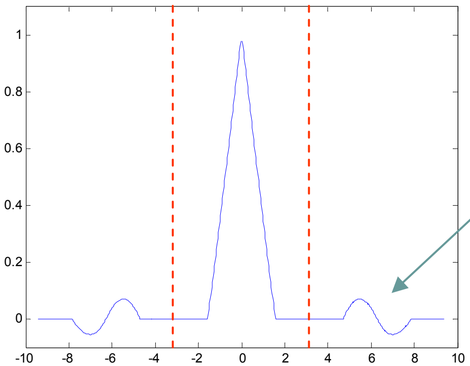
$$H(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}dt=T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$



ωT

Filtriranje utječe na osnovni pojas $-\pi$ do π, a rezultat sadrži i *aliasing* komponente:

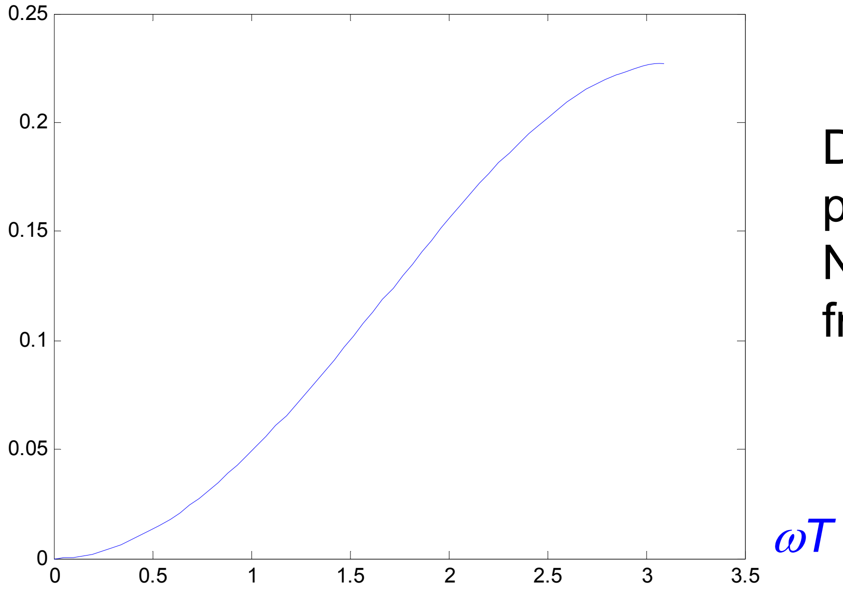
$H(\omega)X_s(\omega)$



ωT

Pogreška aproksimacije

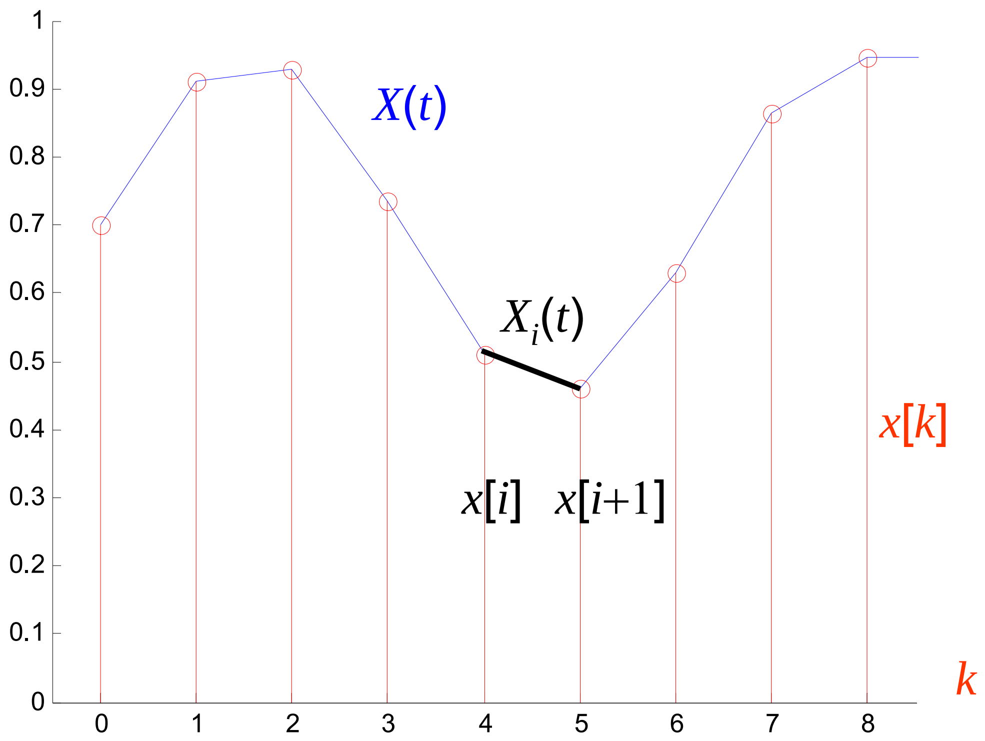
- Rekonstruirani signal uslijed *aliasinga* nije ograničenog spektra, te ne zadovoljava Nyquistov (Shannonov) uvjet.
- Za diskretni sinusoidni signal frekvencije ω možemo mjeriti faktor distorzije rekonstruiranog signala (omjer sume energija *aliasing* komponenti i energije osnovne komponente):



Distorzija raste približavanjem Nyquistovoj frekvenciji

Interpolator prvog reda

- Bolju aproksimaciju daje linearni interpolator:



$T=1$, radi jednostavnosti

Za i-ti interval vrijedi:

$$X_i(t) = a_i + b_i t, \quad t \in [0,1]$$

$$X_i(0) = x[i] = a_i$$

$$X_i(1) = x[i+1] = a_i + b_i$$

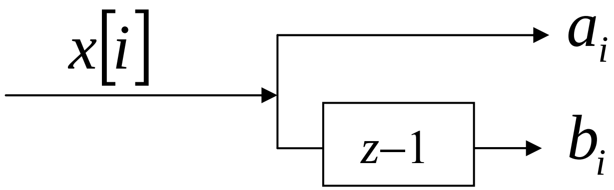
$$a_i = x[i]$$

$$b_i = x[i+1] - x[i]$$

Interpolator prvog reda

- Realizacija interpolatora:

Diskretni dio



Kontinuirani dio

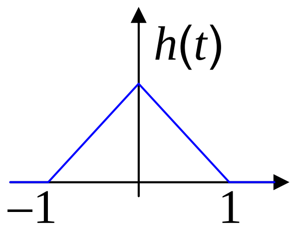
$$X_i(t) = a_i + b_i t, \quad t \in [0,1], \quad i \in Z$$

- Impulsni odziv cijelog sustava:

$$i = -1, \quad x[i] = 0, \quad x[i+1] = 1; \qquad a_i = 0, \quad b_i = 1, \quad X_i(t) = t;$$

$$i = 0, \quad x[i] = 1, \quad x[i+1] = 0; \qquad a_i = 1, \quad b_i = -1, \quad X_i(t) = 1 - t;$$

(drugdje nula)

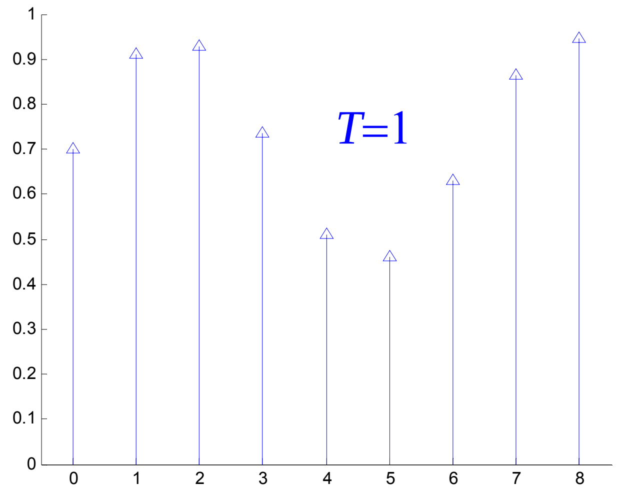


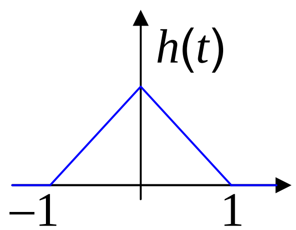
$$t \in [0,1]$$

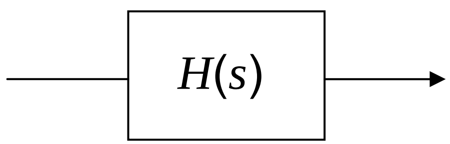
Matematički model interpolatora prvog reda

- Formiramo kontinuirani signal $x_s(t)$ množenjem $x[k]$ s češljem Diracovih funkcija, te filtriramo rezultat filtrom trokutnog impulsnog odziva:

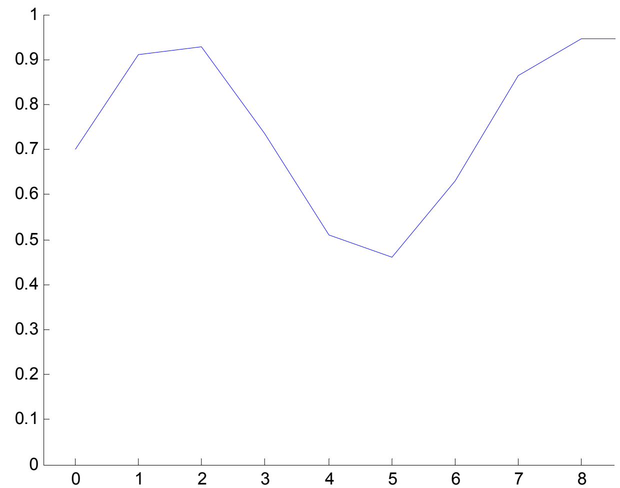
$$x_s(t) = \sum_{k \in Z} x[k]\,\delta(t-k)$$







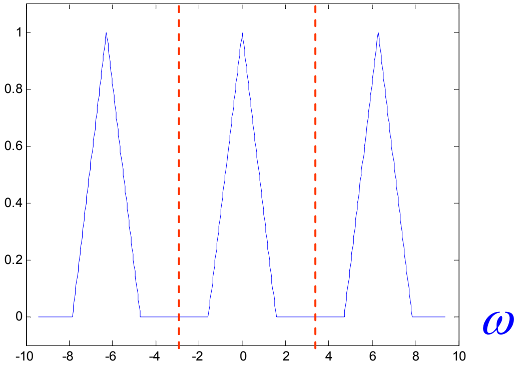
Interpolirani signal $X(t)$



U frekvencijskoj domeni

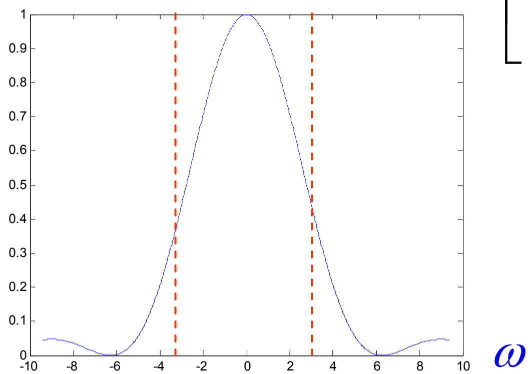
Periodičan spektar $x_s(t)$:

$$X_s(\omega) = \sum_k x[k] e^{-j\omega k}$$



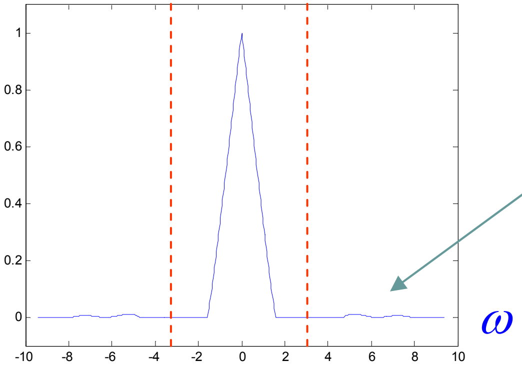
Frekvencijska karakteristika filtra je:

$$H(\omega) = \int_{-1}^{1} |1-t|\, e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right]^2$$



Rezultat filtriranja:

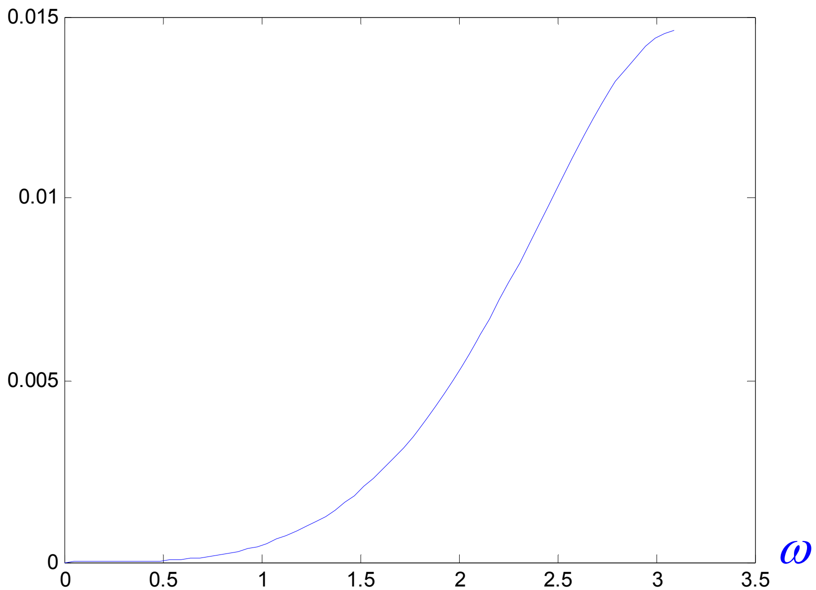
$$H(\omega) X_s(\omega)$$



aliasing je sada znatno manji

Pogreška aproksimacije

- Faktor distorzije rekonstruiranog signala (omjer sume energija aliasing komponenti i energije osnovne komponente) za diskretni sinusoidni signal frekvencije ω :

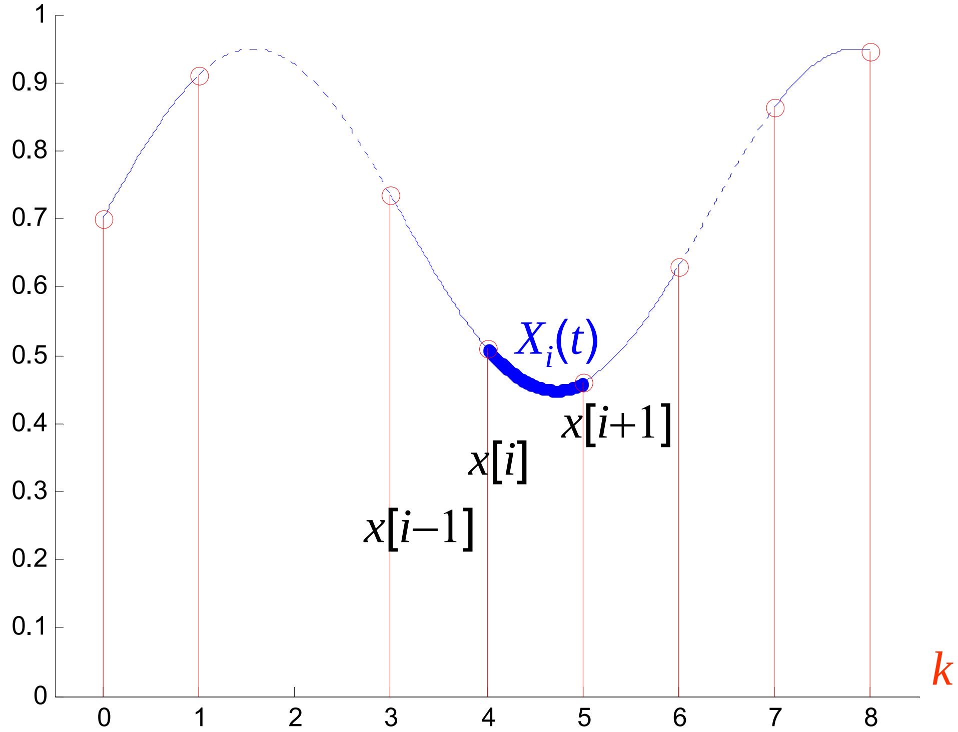


Distorzija je za red veličine manja u usporedbi s interpolatorom nultog reda

Interpolacija polinomom *m*-tog reda

- Za crtanje krivulja često se koristi savitljivi krivuljar (*eng. spline*).
- Krivuljar se učvrsti u N točaka (čvorova), a elastične sile naprezanja određuju interpolacijsku krivulju, što daje glatke prijelaze između čvorova.
- Ideja: signal između uzoraka interpolirati odsječcima polinoma, a na rubovima izjednačiti njihove iznose i derivacije.

Interpolacija polinomom *m*-tog reda



$T=1$, radi jednostavnosti

A) Za i-ti interval imamo polinom:

$$X_i(t) = \sum_{k=0}^{m} a_i[k]t^k$$

$$t \in [0,1] \quad m \text{ neparan}$$

B) Izjednačavanje s uzorcima:

$$X_i(0) = x[i] = a_i[0]$$

$$X_i(1) = x[i+1] = \sum_{k=1}^{m} a_i[k]$$

C) Izjednačavanje derivacija:

$$X_i^{(n)}(0) = X_{i-1}^{(n)}(1) \quad n = 0, \ldots, m-1$$

- Odsječci polinoma su na rubovima izjednačeni po iznosima sa uzorcima, a susjednim polinomima je na rubovima izjednačeno $m-1$ derivacija.

Kubni *spline*

A) Kubni polinom za i-ti interval :

$$X_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 \qquad t \in [0,1]$$

i njegove derivacije:

$$X_i'(t) = b_i + 2c_i t + 3d_i t^2$$

$$X_i''(t) = 2c_i + 6d_i t$$

B) Izjednačavanje s uzorcima (2 jednadž.):

$$X_i(0) = x[i] = a_i \qquad (1)$$

$$X_i(1) = x[i+1] = a_i + b_i + c_i + d_i \qquad (2)$$

C) Izjednačavanje derivacija (2 jednadžbe):

$$X_i'(0) = X_{i-1}'(1) \qquad b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1} + 3d_{i-1} \qquad (3)$$

$$X_i''(0) = X_{i-1}''(1) \qquad 2c_i = 2c_{i-1} + 6d_{i-1} \qquad (4)$$

- Svaki interval daje 4 jednadžbe i 4 nepoznanice $\rightarrow$ ukupan sustav ima $4 \times N$ jednadžaba i isto toliko nepoznanica, pa se može riješiti.
- Za rješavanje je potrebno svih N uzoraka signala!

Rješenje sustava

- Sustav ćemo rješavati rekurzivno.
- Za početak, imamo (1): $a_i = x[i]$
- Uvedimo oznaku za uzorak derivacije: $D[i] = X_i'(0)$

$$X_i'(0) = b_i \qquad\qquad b_i = D[i]$$

- Iz (2) dobivamo: $x[i+1] = x[i] + D[i] + c_i + d_i$
- Iz (3) slijedi: $D[i+1] = D[i] + 2c_i + 3d_i$

riješimo po c_i i d_i

$$d_i = -2x[i+1] + 2x[i] + D[i+1] + D[i]$$

$$c_i = 3x[i+1] - 3x[i] - D[i+1] - 2D[i]$$

- Uvrstimo u (4) i imamo jednadžbu diferencija:

$$D[i+1] + 4D[i] + D[i-1] = 3x[i+1] - 3x[i-1]$$

Rješenje sustava u Z-domeni

$$D[i+1]+4D[i]+D[i-1]=3x[i+1]-3x[i-1]$$

- U Z-domeni imamo:

$$\left(z+4+z^{-1}\right)D(z)=3\left(z-z^{-1}\right)X(z) \qquad D(z)=3\frac{z-z^{-1}}{z+4+z^{-1}}X(z)$$

- Do uzoraka derivacije $X_i'(0) = D[i] = b_i$ dolazimo određivanjem odziva diskretnog IIR filtra!
- Koeficijenti a_i jednaki su uzorcima signala $x[k]$.
- Izrazi za c_i i d_i s prethodnog slajda daju i preostale koeficijente (izrazi vode na FIR filtre).
- Problem: IIR filtar nije kauzalan!

Realizacija kubnog *splinea* filtrima

- Nekauzalnost FIR filtara se lako može riješiti dodavanjem kašnjenja, ali to nije slučaj s IIR filtrima!
- Nazivnik razložimo na kauzalnu i antikauzalnu komponentu:

$$\frac{1}{z+4+z^{-1}} = \underbrace{\frac{1}{1-z_1 z^{-1}}}_{\text{kauzalni dio}} \cdot \underbrace{\frac{1}{z-z_2}}_{\text{antikauzalni dio}}$$

$$z_1 = -2+\sqrt{3}$$

$$z_2 = -2-\sqrt{3} \quad = 1/z_1$$

Recipročna vrijednost

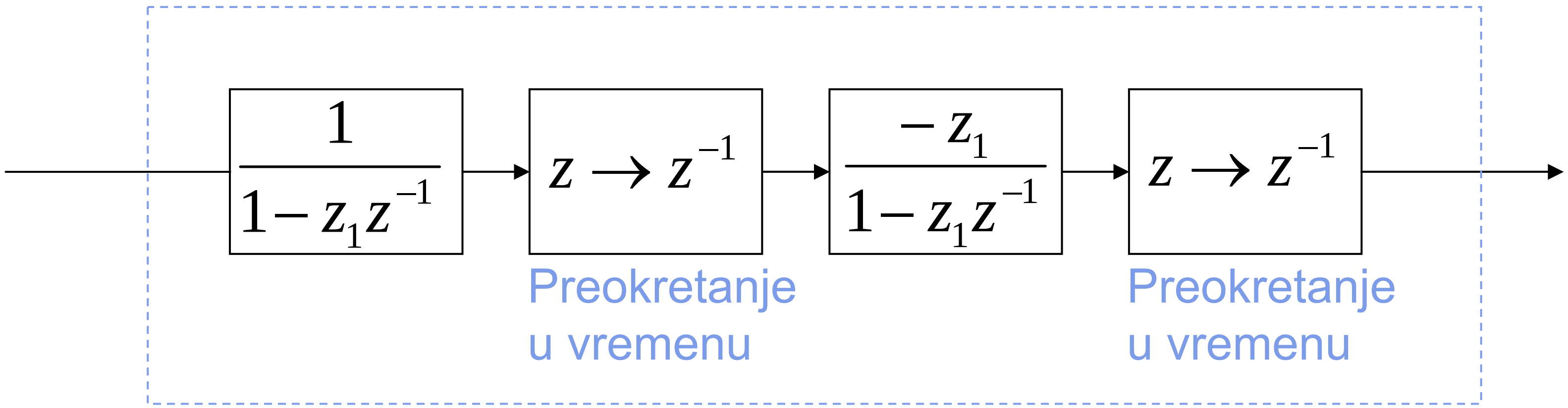
- Najprije primijenimo kauzalni dio, zatim preokrenemo rezultat u vremenu i primijenimo antikauzalni dio, te ga opet preokrenemo!
- To je moguće samo za konačne signale.

Realizacija kubnog *splinea* filtrima

- Preokretanje u vremenu odgovara zamjeni $z \to 1/z$.

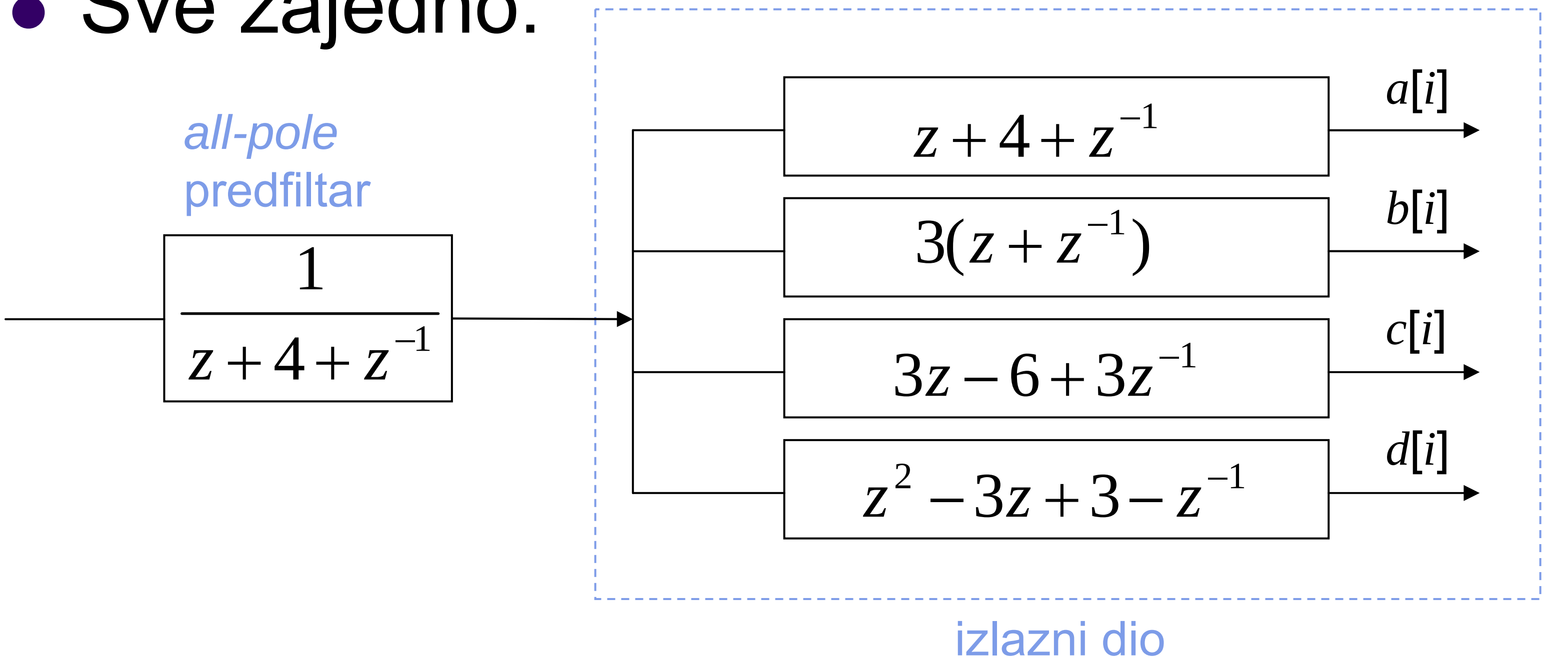
$$\left.\underbrace{\frac{1}{z-z_2}}_{\text{antikauzalni dio}}\right|_{z\to z^{-1}} = \frac{1}{z^{-1}-z_2} = \frac{-z_2^{-1}}{1-z_2^{-1}z^{-1}} = \frac{-z_1}{1-z_1 z^{-1}}$$

- Konačno imamo realizaciju *all-pole* predfiltra:



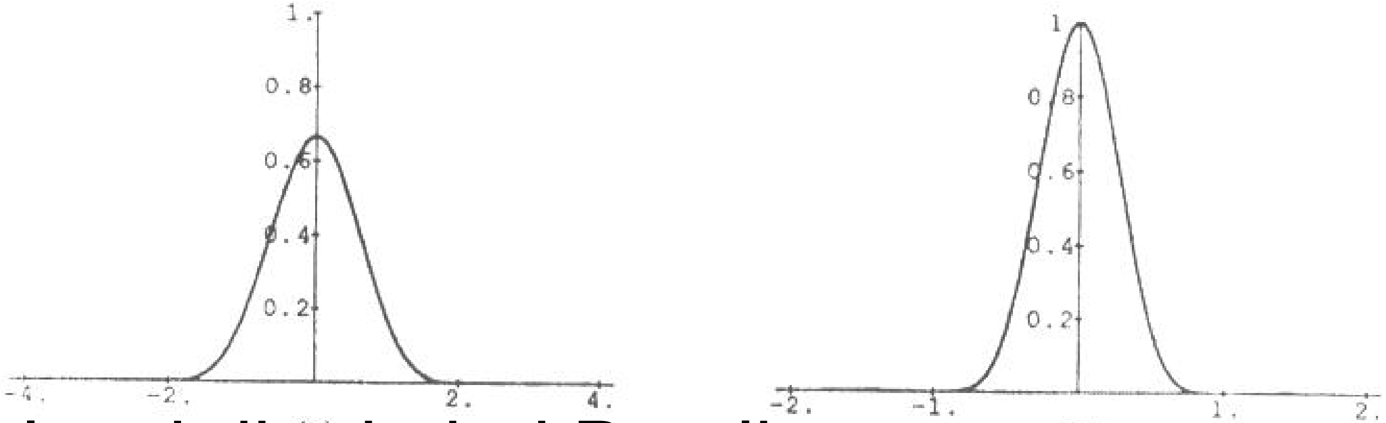
Realizacija kubnog *splinea* filtrima

- Sve zajedno:

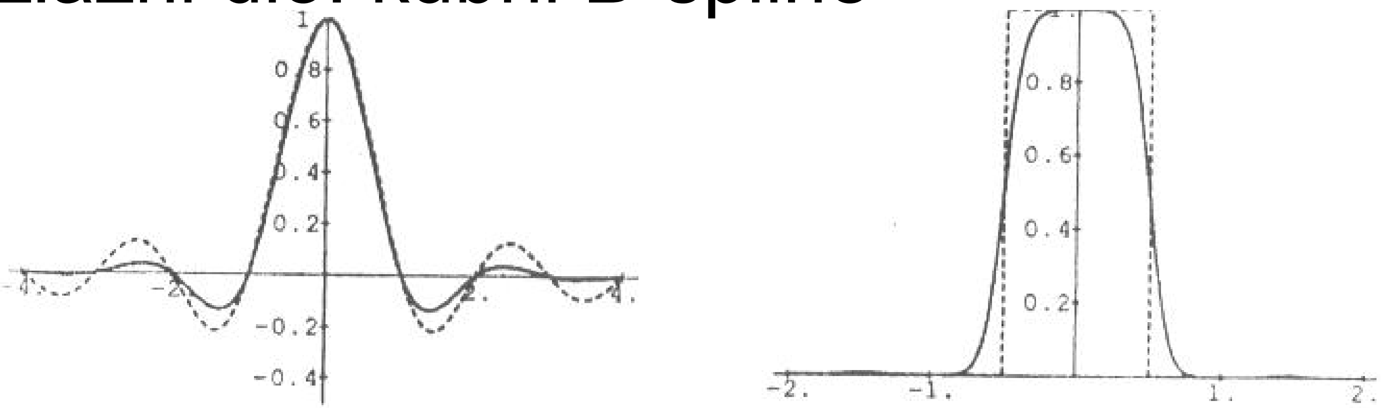


- Često se posebno promatra impulsni odziv izlaznog dijela, koji je konačan, te ukupan beskonačan impulsni odziv interpolatora.

Impulsni odzivi i frekvencijske karakteristike filtara



- Izlazni dio: kubni B-spline

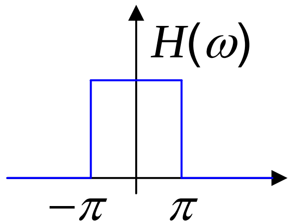


- Ukupni odziv: kardinalni kubni spline

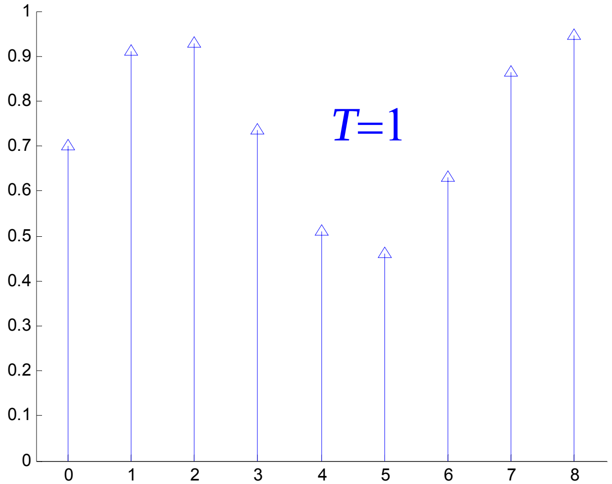
Shannonov interpolator

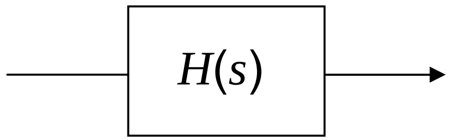
- Formiramo kontinuirani signal $x_s(t)$ množenjem $x[k]$ s češljem Diracovih funkcija, te filtriramo rezultat idealnim NP filtrom sa slike:

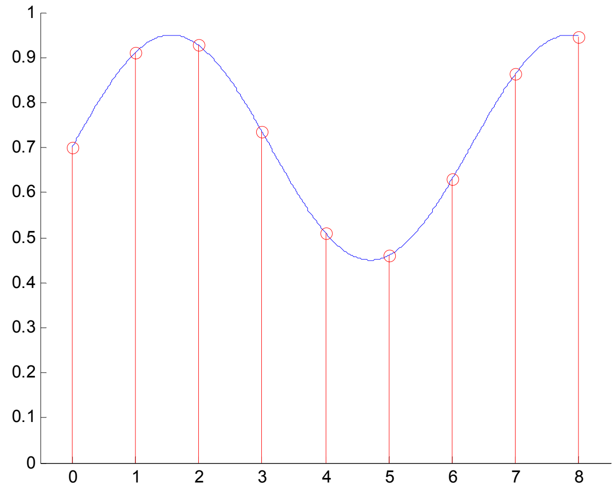
$$x_s(t) = \sum_{k \in Z} x[k]\,\delta(t - kT)$$



Interpolirani signal $X(t)$



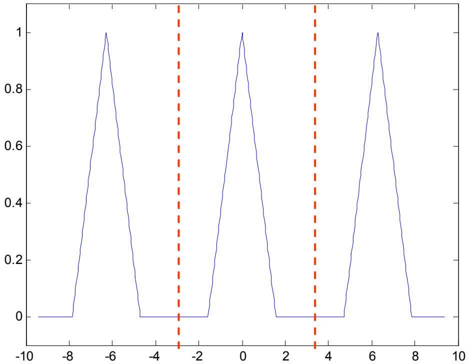




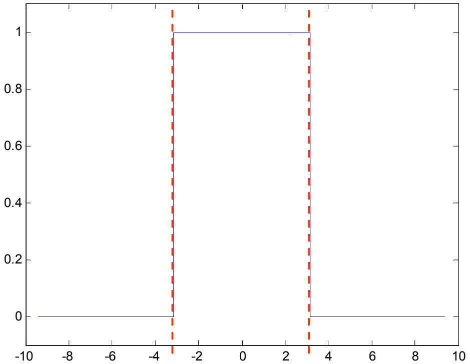
U frekvencijskoj domeni

Spektar $x_s(t)$ je periodičan:

$$X_s(\omega) = \int_t \sum_k x[k]\,\delta(t - kT)\,e^{-j\omega t}\,dt = \sum_k x[k]\,e^{-j\omega Tk}$$

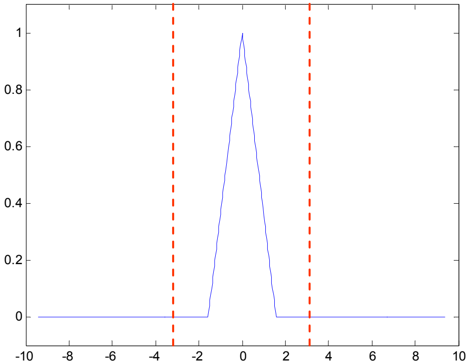


Frekvencijska karakteristika idealnog NP filtra je: $H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega T| < \pi \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$



Filtriranje ne utječe na osnovni pojas $-\pi$ do π, nema *aliasinga*:

$$H(\omega)\cdot T X_s(\omega)$$



Interpolacijska formula

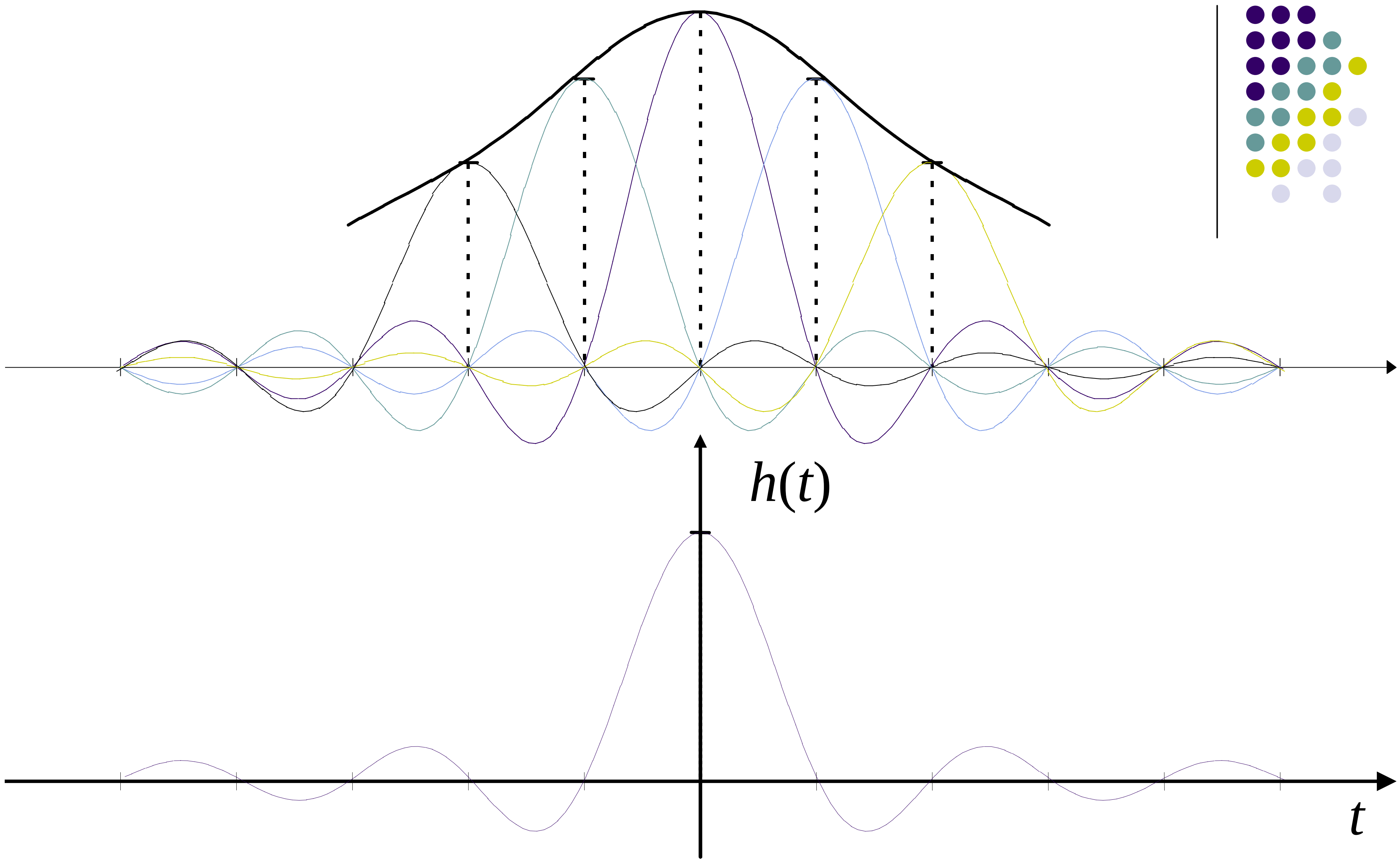
- Rekonstruirani signal je frekvencijski ograničen, nema niti *aliasinga* ni distorzije.
- Direktan izraz za interpolaciju možemo dobiti tako da izračunamo odziv NP filtra na $x_s(t)$:

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega T|<\pi \\ 0 & \text{drugdje}\end{cases} \qquad h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}1\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{T}\frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$$

$$x(t)=h(t)*Tx_s(t)=\int_{\tau}\frac{1}{T}\frac{\sin\frac{\pi}{T}\tau}{\frac{\pi}{T}\tau}T\sum_{k\in Z}x[k]\,\delta(t-\tau-kT)\,d\tau=\sum_{k\in Z}x[k]\int_{\tau}\frac{\sin\frac{\pi}{T}\tau}{\frac{\pi}{T}\tau}\delta(t-\tau-kT)\,d\tau$$

$$x(t)=\sum_{k\in Z}x[k]\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

Idealna interpolacijska formula



Filtar ima nekauzalan odziv i nije ostvariv.

Nelinearni filtri

- U nastavku ćemo napraviti dva primjera nelinearnih sustava.

Medijan

- Srednja vrijednost: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]$
- Središnja vrijednost (medijan):
  - poredaj uzorke po veličini,
  - uzmi središnji uzorak za N neparan, odnosno uzmi srednju vrijednost 2 središnja uzorka za N paran.
- Primjer $x = \{1, -1, 2, 7, 5\}$:
  - Srednja vrijednost $(1-1+2+7+5)/5 = 2{,}8$.
  - Medijan: $x_{sort} = \{-1, 1, 2, 5, 7\}$, medijan($x$) $= 2$.
- Primjer $x = \{1, -1, 2, 7\}$:
  - Medijan: $x_{sort} = \{-1, 1, 2, 7\}$, medijan($x$)$=(1+2)/2=1{,}5$.

Medijan filtar

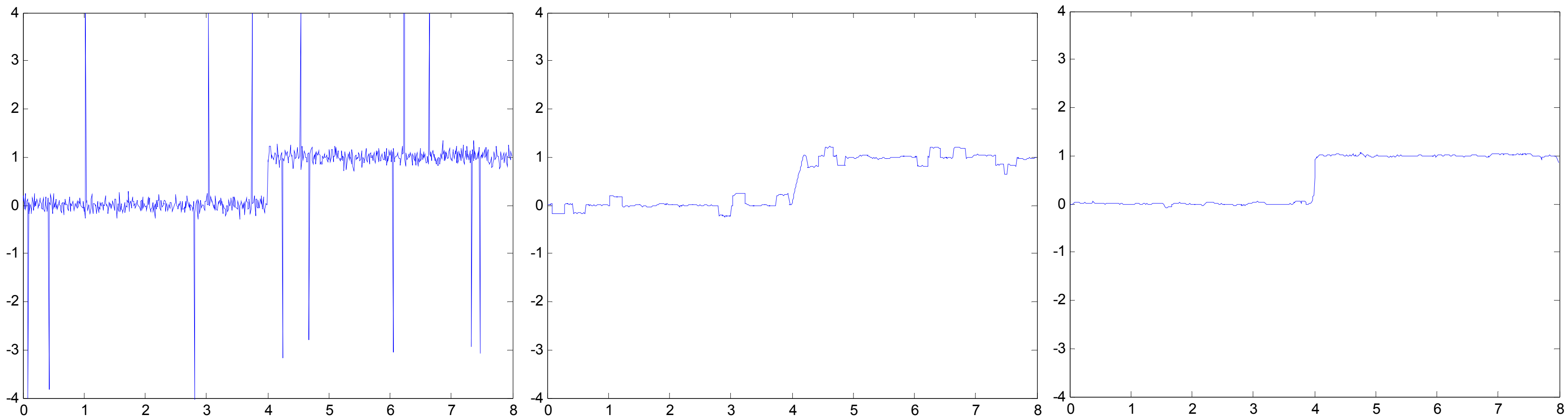
- Pomična srednja vrijednost (eng. *moving average*):

$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}$$

- Ovaj se NP filtar često koristi za dobivanje procjene srednje vrijednosti neke mjerne veličine, potiskivanje šuma, …
- Često bolje rezultate daje medijan filtar:

Medijan
na otvoru od N
uzoraka

Primjeri



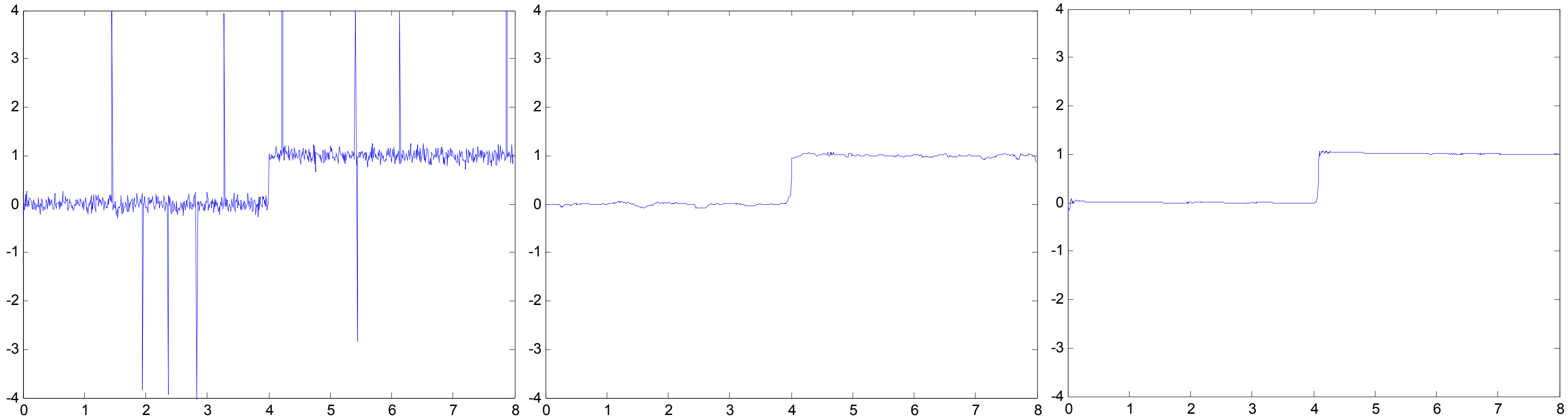
- Lijevo: mjereni signal.
- Sredina: pomična srednja vrijednost, $N=20$.
- Desno: pomični medijan, $N=20 \rightarrow$
  - strmiji brid, manja osjetljivost na impulsni šum.

Brza aproksimacija medijana

- **Inicijalizacija:**
- 1: $y(k) = x(1)$
- 2: $korak = \max(|x(1)/2|, najmanji\_korak)$
- **Za svaki novi k:**
- 3: $y(k) = y(k-1) + korak \cdot \mathrm{sign}(x(k)-y(k-1))$;
- 4: **if** $|x(k) - y(k)| < korak$ **then**
- 5: $korak = korak / 2$
- 6: **else if** $|x(k) - y(k)| > 3\sigma_n$ **then**
- 7: $korak = korak \cdot 2$
- 8: **end if**

Devijacija šuma

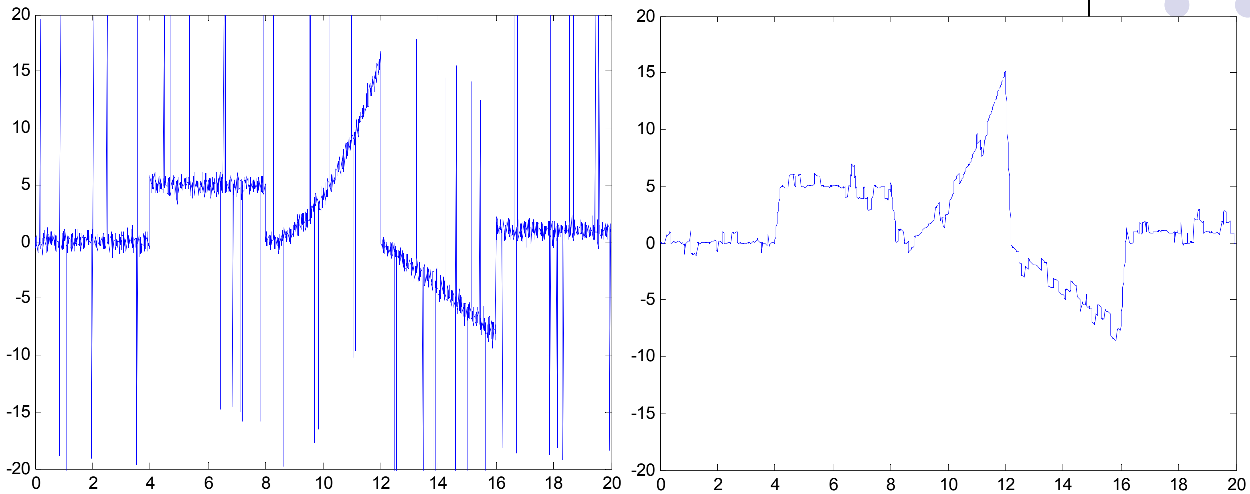
Primjeri



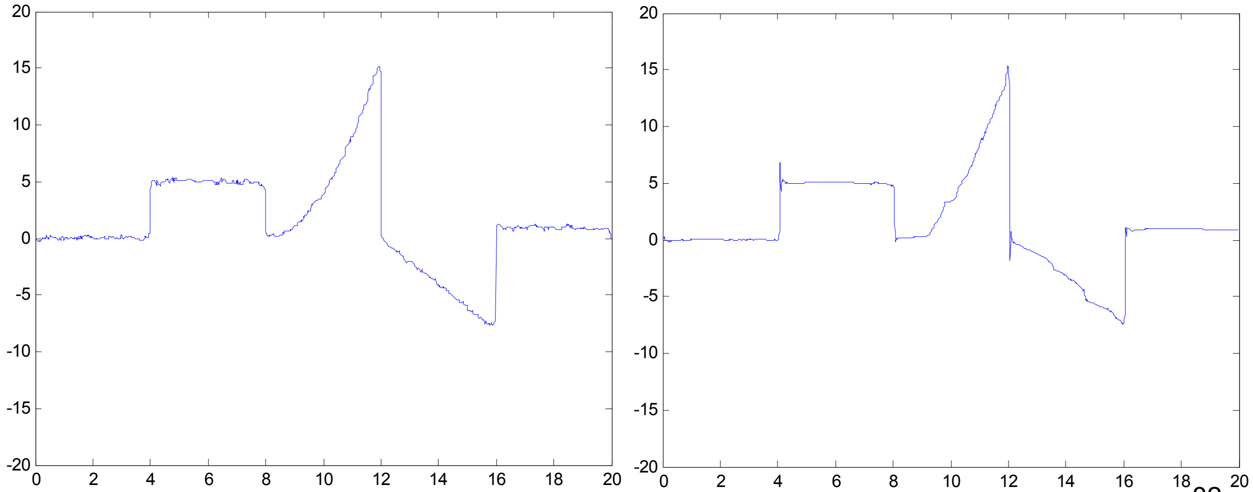
- Lijevo: mjereni signal.
- Sredina: pomični medijan, $N=20$.
- Desno: brza aproksimacija medijana.

Primjer 2

- L: mjereni signal
- D: pomična sredina



- L: pomični medijan
- D: brza aproksima-cija medijana



Primjene

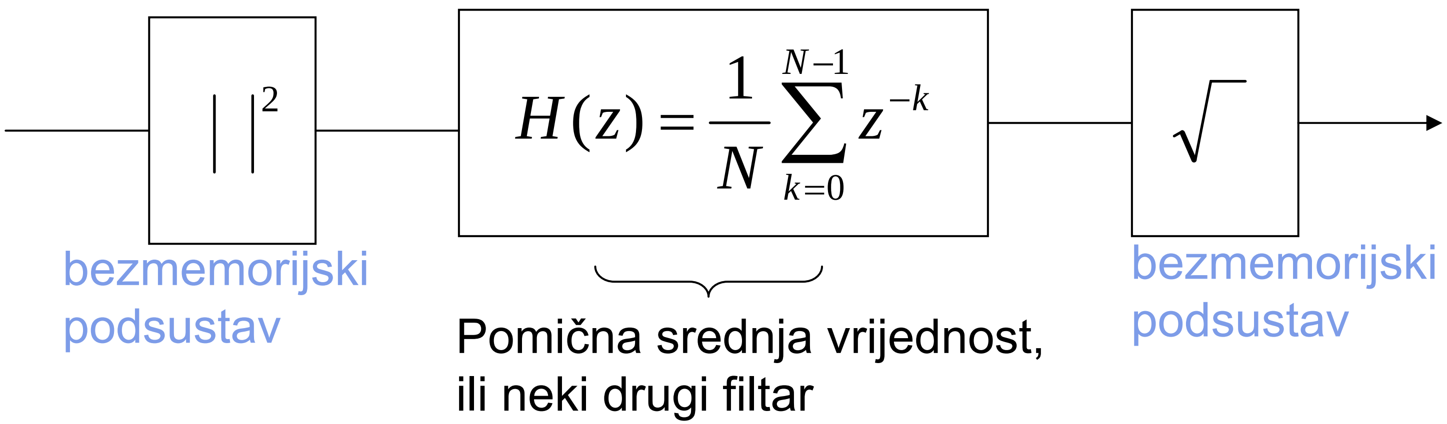
- Poboljšanje mjernih podataka
- Potiskivanje šuma
- Detekcija i separacija trenda u signalu
- Separacija nepomične pozadine u video signalu
- …

Procjena efektivne vrijednosti

- Procjena efektivne vrijednosti signala:

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|x[k]\right|^2}$$

- Realizacija filtrima:

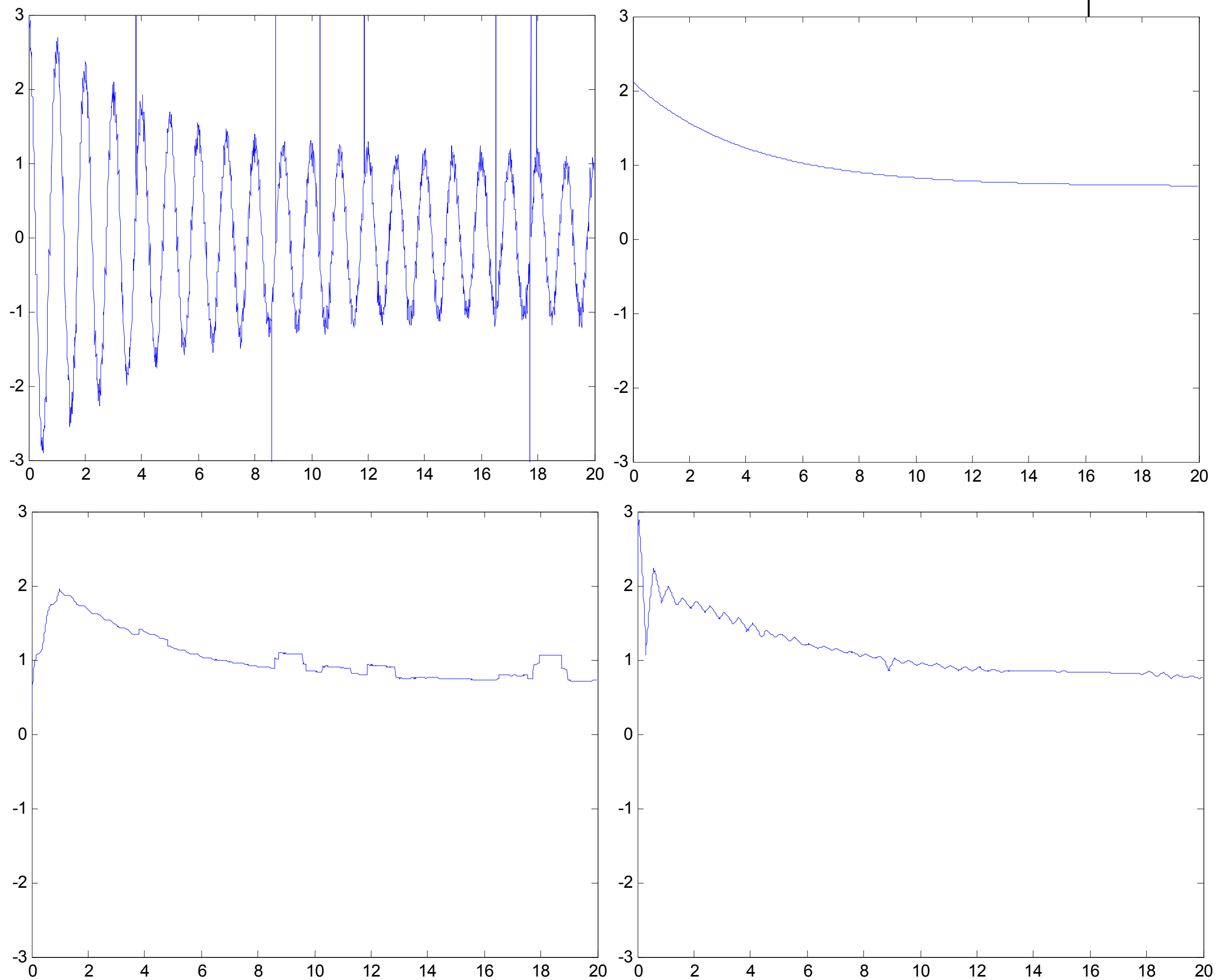


Procjena efektivne vrijednosti

- Srednji član kaskade se može zamijeniti npr. *all-pole* NP filtrom, I ili II reda (potonji može oponašati otklonski sustav instrumenta).
- Nadalje, može se zamijeniti i nekim nelinearnim estimatorom.

Primjer

- L: signal
- D: efektivna vrijednost



- Estimatori
- L: pomična sredina
- D: brza aproksimacija medijana

Obradili smo…

- Interpolacija signala polinomom
  - Interpolacija nultog reda
  - Linearna interpolacija
  - Interpolacija polinomom višeg reda
    - savitljivi krivuljar (*eng. spline*), kubni *spline*
  - Shannonov interpolator
- Nelinearni filtri
  - Medijan filtar
  - Procjena efektivne vrijednosti