Obrada informacija

Ponovljeni završni ispit – 4. srpnja 2008.

1. Navedite izraze za računanje 4-udaljenosti $d_4(p,q)$ i 8-udaljenosti $d_8(p,q)$ za dvije točke p, q iz $\mathbb{Z}^2$. Neka je $K_8(d)$ skup svih točaka $q \in \mathbb{Z}^2$ za koje vrijedi $d_8(p,q) < d$ uz $p = (0,0)$ te neka je $K_4(d)$ skup svih točaka $q \in \mathbb{Z}^2$ za koje vrijedi $d_4(p,q) < d$. Skicirajte skupove $K_8(3)$ te $K_4(3)$. Je li skup $K_8(d)$ podskup od $K_4(d)$ za svaki d? Objasnite!

2. Izračunajte 2D Fourierovu transformaciju te skicirajte spektar signala $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanog izrazom

$$f(x,y) = \frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Napomena: 1D Fourierov par je $f(x) = \dfrac{a}{a^2+x^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega) = \pi e^{-a|\omega|}$.

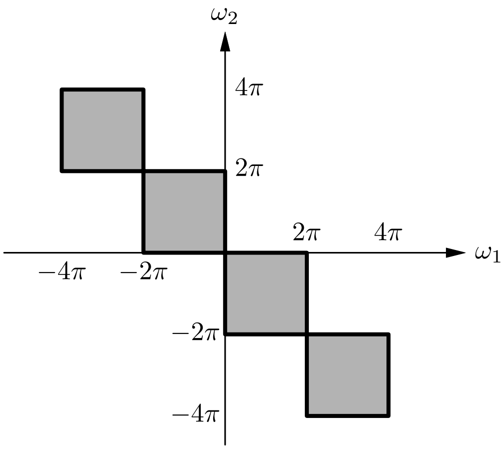
3. Promatramo 2D diskretni LSI sustav s impulsnim odzivom

$$h(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \underline{4} & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Je li zadani impulsni odziv separabilan? Izračunajte MTF (normiranu amplitudnu frekvencijsku karakteristiku) danog sustava. Izračunajte odziv dobivenog sustava na konstantnu pobudu $f(x,y) = 3$.

4. Kontinuirani 2D signal ima spektar $F_k(\omega_1, \omega_2)$ koji je jednak jedinici za područje označeno slikom, dok je za sve ostale vrijednosti kontinuiranih kružnih frekvencija ω_1 i ω_2 spektar jednak nuli. Za koje vrijednosti razmaka uzorkovanja Δx i Δy neće doći do preklapanja spektra? Skicirajte pripadni spektar diskretnog signala za $\Delta x = \frac{1}{3}$ i $\Delta y = \frac{1}{3}$ ako znate da je spektar dobivenog diskretnog signala opisan izrazom

$$F_d(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_k\Big(\frac{\Omega_1 + 2\pi i}{\Delta x}, \frac{\Omega_2 + 2\pi j}{\Delta y}\Big).$$



5. Definirajte dvodimenzionalnu Fourierovu transformaciju za sliku dimenzija $N_1 \times N_2$. Korištenjem izraza $\mathbf{W}_6 \mathbf{F} \mathbf{W}_3^T$ izračunajte dvodimenzionalnu diskretnu Fourierovu transformaciju slike

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponovljeni završni ispit, OBRADA INFORMACIJA

Tomislav Petković, ZAGREB, 2008. 7. 4.

① $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$, $p, q \in \mathbb{Z}^2$

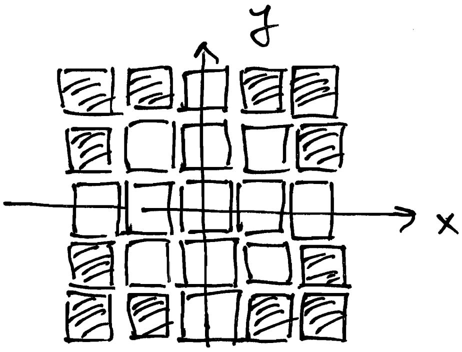
$$d_4(p,q) = |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$$

$$d_8(p,q) = \max(|p_x - q_x|, |p_y - q_y|)$$

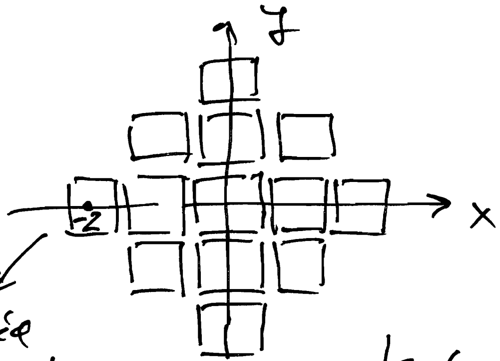
$$K_4(d) = \{(x,y) \mid d_4((0,0),(x,y)) < d\}$$

$$K_8(d) = \{(x,y) \mid d_8((0,0),(x,y)) < d\}$$

$K_8(3)$ i $K_4(3)$ su krugovi uz 8 i 4 udaljenost. Obratite pažnju na znak nejednakosti - koristimo strogo manje.



$K_8(3)$



najveća udaljenost manja od 3 je 2!

$K_4(3)$

$K_8(3)$ nije podskup od $K_4(3)$ što se vidi iz slike jer šrafirani dio skupa $K_8(3)$ nije u $K_4(3)$. Štoviše, vrijedi $K_4(3) \subseteq K_8(3)$ i općenito $K_4(d) \subseteq K_8(d)$ jer je za dvije točke p i q iz $\mathbb{Z}^2$ $d_4 \geq d_8$

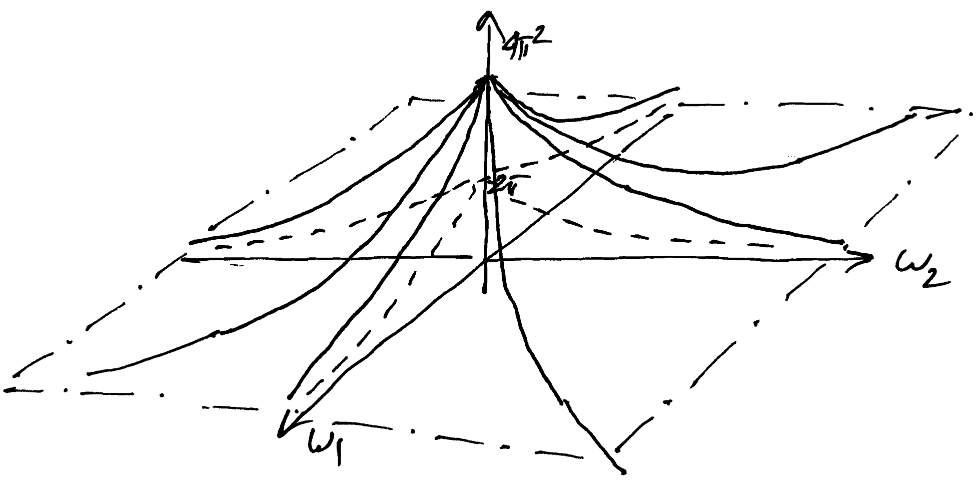
(2) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{4}{(1+x^2)(1+y^2)}$

$$f(x) = \frac{a}{a^2+x^2} \quad \circ\!\!-\!\!\circ \quad F(\omega) = \pi e^{-a|\omega|}$$

$$\mathcal{F}[f(x,y)] = \mathcal{F}[f_x(x) \cdot f_y(y)] \overset{\text{SEPARABILNOST!}}{=} \mathcal{F}\left[\frac{2}{1+x^2}\right] \mathcal{F}\left[\frac{2}{1+y^2}\right] =$$

$$= 2\pi e^{-|\omega_1|} \cdot 2\pi e^{-|\omega_2|} = 4\pi^2 e^{-|\omega_1| - |\omega_2|}$$

Dobiveni spektar je čisto realni te ne moramo posebno skicirati amplitude i faze!



(3)

$$h(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{h_y(y)} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix}}_{h_x(x)}$$

Zadani impulsni odziv $h(x,y)$ je separabilan! Sada računamo MTF koja je dobro definirana samo ako je $\sum_x \sum_y h(x,y) \neq 0$. Kako je

$$\sum_x \sum_y h(x,y) = 1+2+1+2+4+2+1+2+1 = 16 \neq 0$$

možemo računati MTF.

$$\mathcal{F}_{VD}\left[h_x(x)\right] = H_x(\omega_1) = \sum_{x=-1}^{1} h_x(x)\, e^{-j\omega_1 x} = e^{j\omega_1} + 2 + e^{-j\omega_1}$$

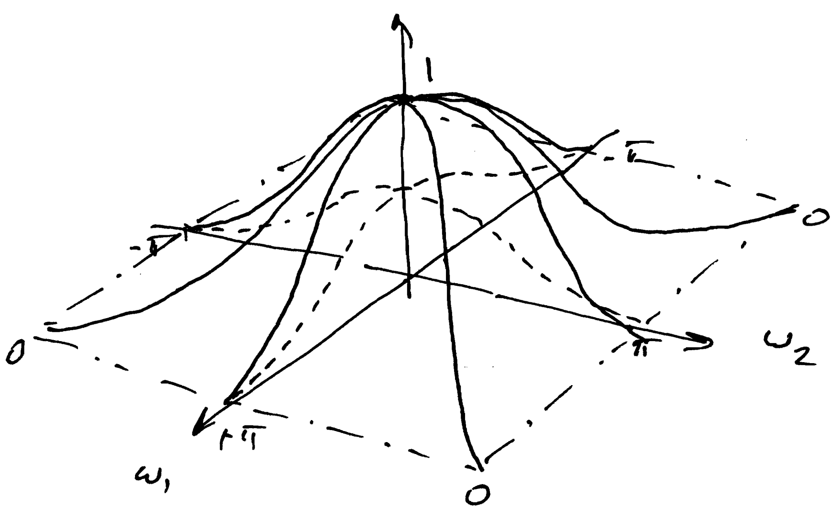
$$= 2 + 2\cos(\omega_1)$$

$$\mathcal{F}_{VD}\left[h_y(y)\right] = e^{j\omega_2} + 2 + e^{-j\omega_2} = 2 + 2\cos(\omega_2)$$

$$H(\omega_1, \omega_2) = H_x(\omega_1) \cdot H_y(\omega_2) = (2 + 2\cos(\omega_1))(2 + 2\cos(\omega_2)) =$$

$$= 4 + 4\cos(\omega_1) + 4\cos(\omega_2) + 4\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)$$

$$MTF = \frac{1}{16}\,(2 + 2\cos(\omega_1))(2 + 2\cos(\omega_2))$$



temeljni period MTF

Izhod sistema na pobudo $f(x,y)=3$ je rezultat konvolucije:

$$g(x,y) = h(x,y) ** f(x,y) = \sum_{\chi}\sum_{\nu} \underbrace{f(x-\chi, y-\nu)}_{=3}\, h(\chi,\nu) =$$

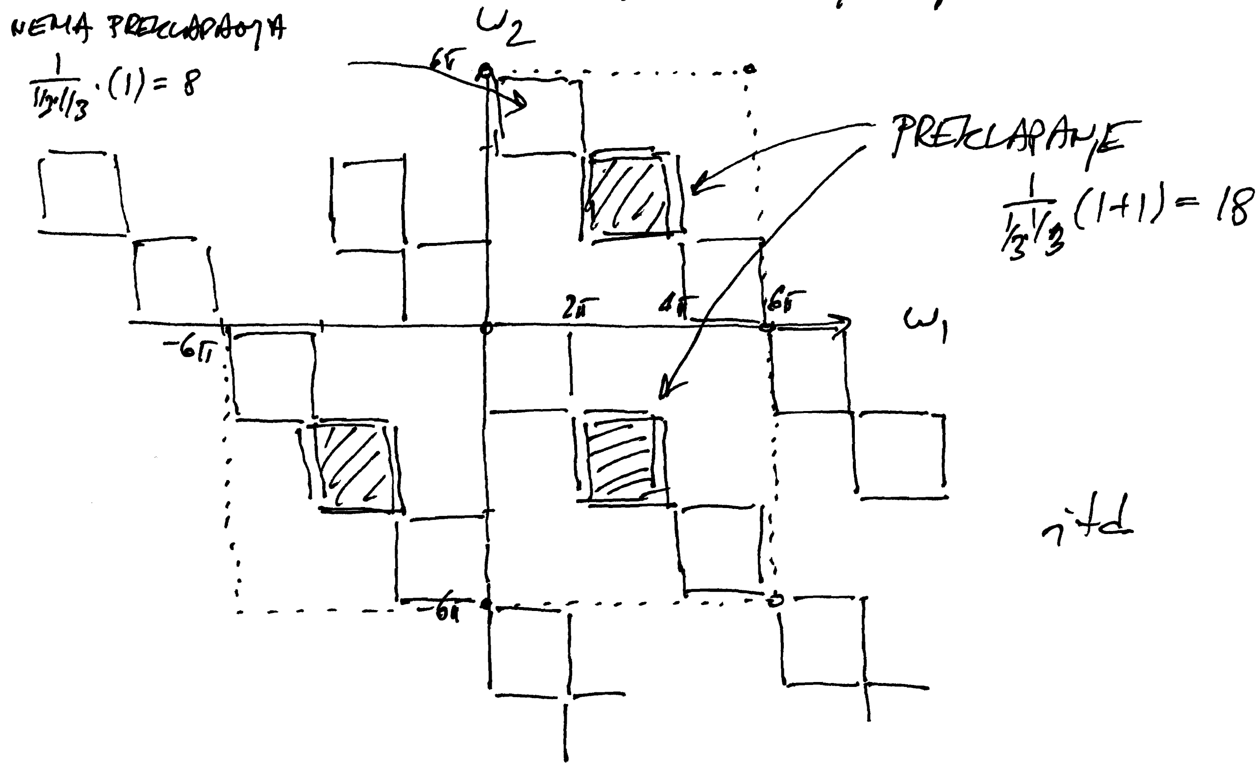
$$= 3 \sum_{\chi}\sum_{\nu} h(\chi,\nu) = 3 \cdot 16 = 48$$

(4) $\Delta x = \Delta y = 1/3 \Rightarrow \omega_{sx} = \omega_{sy} = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$

Kako je najveća frekvencija za x i y 4π do preklapanja spektra neće doći za $\omega_{sx} = \omega_{sy} > 2 \cdot 4\pi = 8\pi$, odnosno razmaci otipkavanja moraju biti manji od

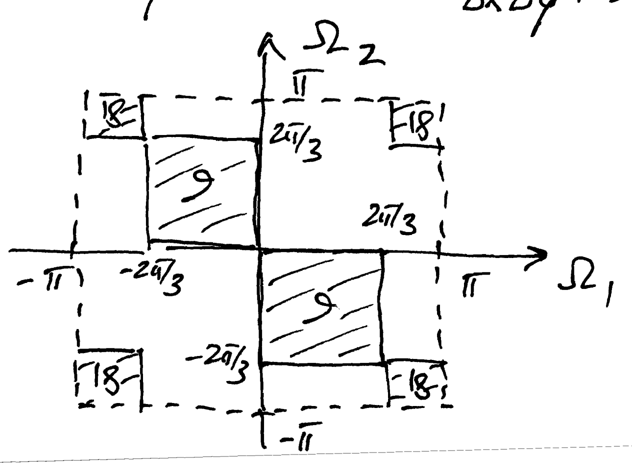
$$\Delta x_{max} = \Delta y_{max} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$

Kako je $1/3 > 1/4$ dolazi do preklapanja spektra!



itd

Kako je $\omega_{sx} = \omega_{sy} = 6\pi$ to je ujedno i period diskretnog spektra sve možemo skicirati taj period koji se nalazi unutar intervala $\langle -3\pi, 3\pi \rangle \times \langle -3\pi, 3\pi \rangle$. Pri tome još skaliramo amplitudu s $\frac{1}{\Delta x \Delta y}$. Dobivamo:



PERIOD DISKRETNOG SPEKTRA

(5) $W_6 F W_3^T$ uz $F = \begin{bmatrix} I_3 \\ \hdashline I_3 \end{bmatrix}$

$$W_6 F W_3^T = W_6 \begin{bmatrix} I_3 \\ \hdashline I_3 \end{bmatrix} W_3^T = W_6 \begin{bmatrix} W_3^T \\ \hdashline W_3^T \end{bmatrix}$$

Element matrice W_6 na mjestu (i,j) je W_6^{ij}. Isto vrijedi i za matricu W_3^T, dakle na mjestu (i,j) je $W_3^{ij} = W_6^{2ij}$. Sada kada smo matricu W_3^T zapisali pomoću elemenata W_6^{2ij} primijetimo da ukoliko množimo elemente $W_6^a \cdot W_6^b$ što daje $W_6^a \cdot W_6^b = W_6^{a+b} = W_6^{(a+b) \bmod 6}$. Ne moramo dakle raspisivati sve matrične elemente već je dovoljno zapisati eksponente od W_6:

$$\left\{\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ \hdashline 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{array}\right\}$$

eksponenti od W_6!

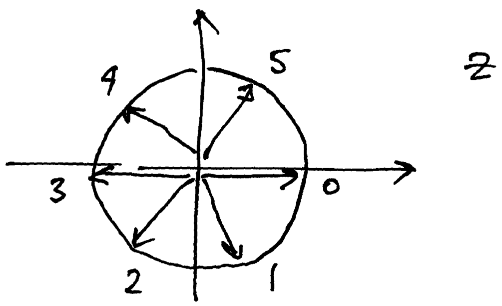
eksponenti od $\begin{bmatrix} W_3^T \\ \hdashline W_3^T \end{bmatrix}$ uz element W_6!

Dobiveni eksponenti iz retka prve matrice i stupca druge matrice se zbrajaju, npr. za prvi redak W_6 i drugi stupac $\begin{bmatrix} W_3^T \\ \hdashline W_3^T \end{bmatrix}$ dobivamo

$$W_6^{0+0} + W_6^{0+2} + W_6^{0+4} + W_6^{0+0} + W_6^{0+2} + W_6^{0+4} =$$

$$= W_6^0 + W_6^2 + W_6^4 + W_6^0 + W_6^2 + W_6^4 = 0$$

No kompleksni brojevi W_6^x nalaze na jediničnoj kružnici u Z-ravnini:



Zbrojevi $0+1+2+3+4+5$, $0+2+4$, $0+3$ daju nulu!
Konačni rezultat je stoga:

$$W_6 F W_3^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U zadatku se još traže definicije dvodimenzionalne Fourierove transformacije za sliku dimenzija $N_1 \times N_2$:

$$F(k,l) = \sum_{x=0}^{N_1-1} \sum_{y=0}^{N_2-1} f(x,y)\, W_{N_1}^{xk}\, W_{N_2}^{yl}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} F(k,l)\, W_{N_1}^{-xk}\, W_{N_2}^{-yl}$$