Rješenja zadataka za treću domaću zadaću iz Obrade informacija

17. lipanj 2008
12:19

Prije korištenja ovih rješenja svakako pokušajte sami riješiti zadatke. Ova rješenja sadrže samo odabrane zadatke iz skupa zadataka za DZ3.

u Zagrebu 17. lipnja 2008.

Tomislav Petković

10) Dvodimenzionalna Fourierova transformacija signala $f(x,y): R^2 \to C$ je dana izrazom

$$F(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-j\omega_1 x}\, e^{-j\omega_2 y}\, dx\, dy$$

Za separabilni slučaj kada je moguće signal $f(x,y)$ rastaviti u produkt

$$f(x,y) = f_x(x)\cdot f_y(y)$$

umjesto dvostrukog integrala računamo dva jednostruka integrala

$$F(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\, e^{-j\omega x}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y)\, e^{-j\omega y}\, dy$$

10c) $f(x,y) = \sin(x-y) + \sin(x+y) = 2\sin(x)\cos(y) = \underbrace{\sqrt{2}\sin(x)}_{f_x(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{2}\cos(y)}_{f_y(y)}$

Kako smo funkciju $f(x,y)$ rastavili na produkt $f_x(x)\cdot f_y(y)$ možemo odrediti 1D Fourierovu transformaciju od $f_x(x)$ i $f_y(y)$

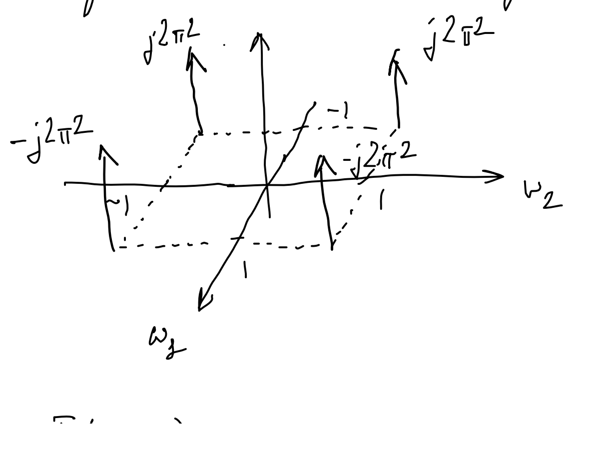
$$F_x(\omega_1) = \mathcal{F}\left[\sqrt{2}\sin(x)\right] = -j\pi\sqrt{2}\left(\delta(\omega_1-1) - \delta(\omega_1+1)\right)$$

$$F_y(\omega_2) = \mathcal{F}\left[\sqrt{2}\cos(y)\right] = \pi\sqrt{2}\left(\delta(\omega_2-1) + \delta(\omega_2+1)\right)$$

$$F(\omega_1,\omega_2) = F_x(\omega_1)\cdot F_y(\omega_2) = -j2\pi^2\left(\delta(\omega_1-1) - \delta(\omega_1+1)\right)\left(\delta(\omega_2-1) + \delta(\omega_2+1)\right)$$

$$= -j2\pi^2\left(\delta(\omega_1-1,\omega_2-1) - \delta(\omega_1+1,\omega_2-1) + \delta(\omega_1-1,\omega_2+1) - \delta(\omega_1+1,\omega_2+1)\right)$$

Amplitudni spektar $|F(\omega_1,\omega_2)|$ je ploha nad $\omega_1 O \omega_2$ ravninom koja u ovom slučaju sadrži 4 δ-distribucije:



ω_2

12) $f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega_1,\omega_2)$

Moramo izračunati Fourierovu transformaciju signala $f(x-6y,y)$. Dobivamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-6y,y)\, e^{-j(\omega_1 x+\omega_2 y)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi,\nu)\, e^{-j(\omega_1\chi+6\nu\omega_1+\omega_2\nu)}\,|J|\,d\chi\,d\nu =$$

mijenjamo varijable tako da bude

$$\begin{cases}\chi = x-6y\\ \nu = y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\chi+6\nu\\ y=\nu\end{cases} \quad i \quad |J| = \begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi,\nu)\, e^{-j\omega_1\chi}\, e^{-j\underbrace{(\omega_2-6\omega_1)}_{\text{NOVA } \omega_2!}\nu}\,d\chi\,d\nu = F(\omega_1,\omega_2-6\omega_1)$$

NAPOMENA: Ne smijete zaboraviti na Jacobijevu determinantu prilikom zamjene varijabli u dvostrukom integralu!

15) $f(x,y) = \mathrm{rect}(x+\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2})$

2D konvoluciju bit ćemo s dvostrukom integracijom koja bi je razlikovala od 1D konvolucije. Vrijedi

$$f(x,y)**g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi,\nu)\, g(x-\chi, y-\nu)\,d\chi\,d\nu$$

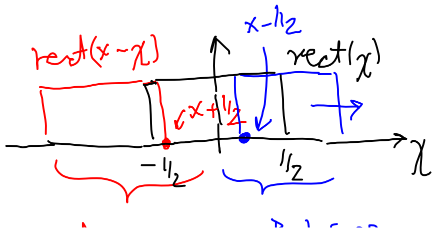
Što se u slučaju separabilnih funkcija pojednostavljuje jer je moguće dvostruki integral rastaviti u par jednostrukih integrala.

Prije rješavanja zadatka primijetimo da vrijedi

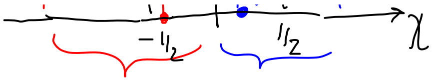
$$\mathrm{rect}(x+\tfrac{1}{2}, y+\tfrac{1}{2}) = \mathrm{rect}(x+\tfrac{1}{2})\cdot\mathrm{rect}(y+\tfrac{1}{2})$$
$$\mathrm{rect}(x+\tfrac{1}{2}, -y+\tfrac{1}{2}) = \mathrm{rect}(x+\tfrac{1}{2})\,\mathrm{rect}(-y+\tfrac{1}{2}) \quad \text{itd.}$$

Također vrijedi $\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x) = \mathrm{tri}(x)$ što moramo i pokazati:

$$\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\chi)\,\mathrm{rect}(x-\chi)\,d\chi$$



Dobiveni integral je različit od nule samo kada postoji preklapanje između $\mathrm{rect}(\chi)$ i



... preklapanje između rect(χ) i rect$(x-\chi)$.

A dio za $-1 < x \leq 0$

B dio za $0 \leq x < 1$

A: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\chi)\,\mathrm{rect}(x-\chi)\,d\chi = \int_{-1/2}^{x+1/2} d\chi = \chi \Big|_{-1/2}^{x+1/2} = x+1$

B: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\chi)\,\mathrm{rect}(x-\chi)\,d\chi = \int_{x-1/2}^{1/2} d\chi = \chi \Big|_{x-1/2}^{1/2} = 1-x$

$$\mathrm{rect}(x) * \mathrm{rect}(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \mathrm{tri}(x)$$

15a) $f(x,y) ** f(x,y) = \mathrm{rect}(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}) ** \mathrm{rect}(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}) =$

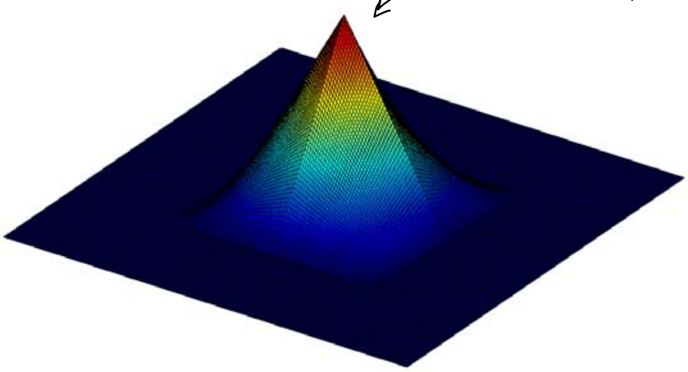
$= \left(\mathrm{rect}(x+\frac{1}{2}) * \mathrm{rect}(x+\frac{1}{2})\right) \cdot \left(\mathrm{rect}(y+\frac{1}{2}) * \mathrm{rect}(y+\frac{1}{2})\right) =$

$= \mathrm{tri}(x + 2\cdot\frac{1}{2}) \cdot \mathrm{tri}(y + 2\cdot\frac{1}{2}) = \mathrm{tri}(x+1)\cdot\mathrm{tri}(y+1)$

Napomena: Ako znamo da je $f(x) * g(x) = h(x)$ onda je $f(x+a) * g(x+b) = h(x+a+b)$ jer je

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi+a)\, g(x-\chi+b)\,d\chi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi)\, g((x+b+a)-\chi)\,d\chi$!

VRH u $(-1,-1)$ za 15a) zadatak!



Slika rezultata za 15a) zadatak

15b), c) i d)

imaju isto rješenje samo pomaknuto u prostoru!

18) Neka je $g(x,y)$ odziv sustava S na pobudu $f(x,y)$, dakle $g(x,y)=S(f(x,y))$.
Sustav S je prostorno nepromjenjiv ako

$$\forall x_0, y_0: \quad S(f(x+x_0, y+y_0)) = g(x+x_0, y+y_0)$$

18c) Zadani sustav je $S(f(x,y)) = 2f(x,y) + 2x + 2y = g(x,y)$.
Da bi ispitali prostornu nepromjenjivost moramo izračunati $S(f(x+x_0, y+y_0))$ te $g(x+x_0, y+y_0)$ i usporediti ih!

$$S(f(x+x_0, y+y_0)) = 2f(x+x_0, y+y_0) + \underline{2x+2y}$$ ← POMAK JE SAMO U f

$$g(x+x_0, y+y_0) = 2f(x+x_0, y+y_0) + 2(x+x_0) + 2(y+y_0)$$

Kako su izrazi različiti zaključujemo da je sustav PROSTORNO PROMJENJIV.

Za 18. zadatke c), d) i e) su PROSTORNO PROMJENJIVI dok su ostali sustavi prostorno nepromjenjivi.

20) $h(x,y) = \mathrm{rect}(x,y) = \mathrm{rect}(x)\cdot\mathrm{rect}(y)$

Zadani odziv je separabilan te nije potrebno računati 2D Fourierovu transformaciju:

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(x)] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)$$
$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(y)] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)$$

$$H(\omega_1,\omega_2) = \mathcal{F}[\mathrm{rect}(x,y)] = \mathcal{F}[\mathrm{rect}(x)\cdot\mathrm{rect}(y)] =$$
$$= \mathcal{F}[\mathrm{rect}(x)]\cdot\mathcal{F}[\mathrm{rect}(y)] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)$$

Moramo izračunati i skicirati OTF i MTF:

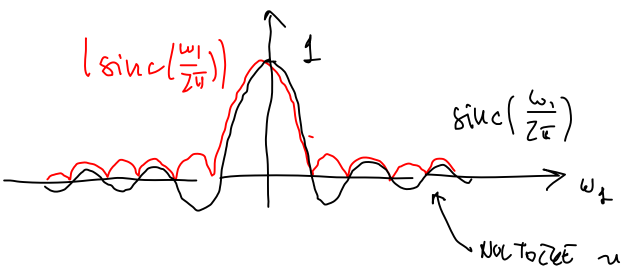
$$OTF = \frac{H(\omega_1,\omega_2)}{H(0,0)}$$

$$\frac{\quad}{H(0,0)}$$

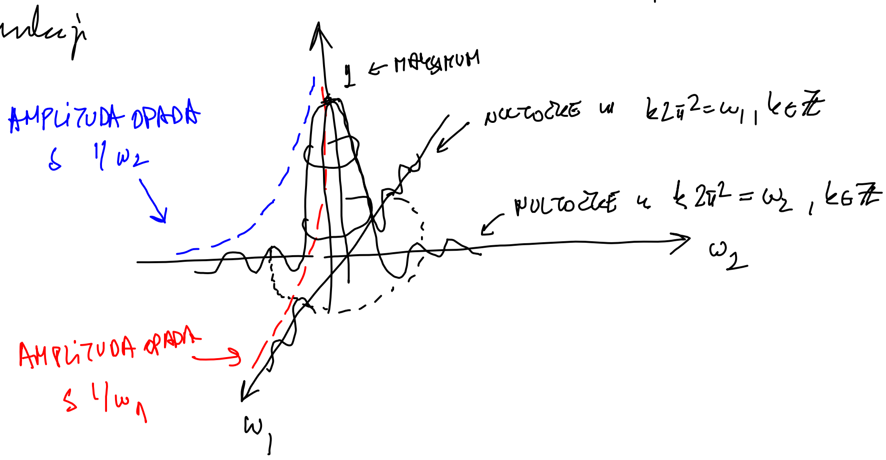
$$MTF = \left| \frac{H(\omega_1,\omega_2)}{H(0,0)} \right|$$

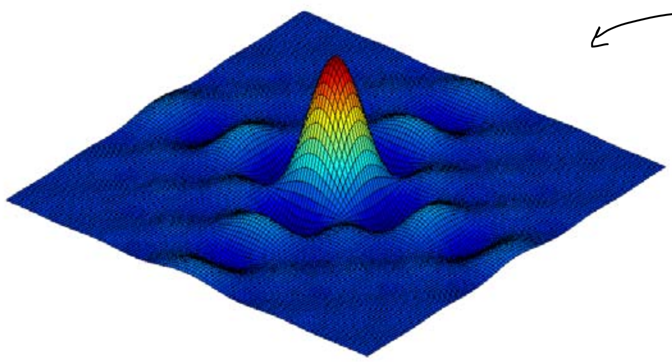
Vrijedi $H(0,0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} dx\,dy = 1$, a također je i $\mathrm{sinc}\left(\frac{0}{2\pi}\right)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{0}{2\pi}\right) = 1\cdot 1 = 1$ (VRIJEDNOST FUNKCIJE sinc U $\emptyset$ je 1)

Želimo li skicirati MTF crtamo $\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)\right| = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)\right|\cdot\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)\right|$. Nacrtajmo prvo sinc funkciju u jednoj dimenziji:



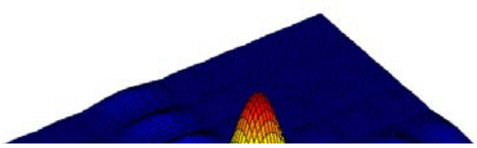
U 2D slučaju se radi o plohi koja je produkt dviju sinc funkcija



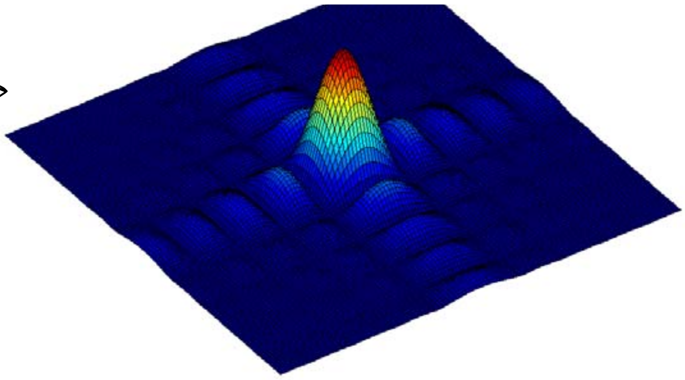


OTF ili optička transfer funkcija je općenito kompleksna, no u ovom slučaju nema imaginarne vrijednosti.

MTF ili modulacijska →



MTF ili modulacijska transfer funkcija je uvijek nenegativna realna funkcija, odnosno $MTF : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$



22) Za razliku od 20) zadatka koji se radi s diskretnim sustavima za koje su prijenosna funkcija, OTF i MTF periodične te je dovoljno skicirati jedan period.

Napravimo prvo notaciju:

$$h(x,y) = \begin{array}{c|c} & y \text{ os} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 1 \\ 8 & \underline{62} & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{array}\right] & x \text{ os} \end{array}$$

$\boxed{\text{UZORCI KOJI NISU ZADANI SU JEDNAKI NULI!}}$

PODCRTANI UZORAK SE NALAZI u (0,0)

$h(-1,1) = 1$	$h(0,1) = 8$	$h(1,1) = 1$
$h(-1,0) = 8$	$h(0,0) = 62$	$h(1,0) = 8$
$h(-1,-1) = 1$	$h(0,-1) = 8$	$h(1,-1) = 1$

22a) Prvo ispitujemo je li impulsni odziv separabilan. Za separabilan impulsni odziv mora vrijediti

$$h(x,y) = h_x(x) \cdot h_y(y),$$

što se u slučaju diskretnih 2D LSI sustava s konačnim impulsnim odzivom može zapisati i u matričnom obliku kao

$$h = h_y \cdot h_x$$

gdje je h matrica dimenzija N_x sa N_y, h_y je vektor stupac sa N_y elemenata a h_x je vektor redak sa N_x elemenata.

Za zadani impulsni odziv možemo pisati

sa N_y elemenata a h_x je vektor redak sa N_x elemenata.

Za zadani impulsni odziv možemo pisati

$$h = \begin{Bmatrix} h(-1,1) & h(0,1) & h(1,1) \\ h(-1,0) & \underline{h(0,0)} & h(1,0) \\ h(-1,-1) & h(0,-1) & h(1,-1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_y(1) \\ \underline{h_y(0)} \\ h_y(-1) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_x(-1) & \underline{h_x(0)} & h_x(1) \end{Bmatrix}$$

odnosno

$$\begin{Bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & \underline{62} & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_y(1)\cdot h_x(-1) & h_y(1)\cdot h_x(0) & h_y(1)\cdot h_x(1) \\ h_y(0)\cdot h_x(-1) & \underline{h_x(0)\cdot h_y(0)} & h_y(0)\cdot h_x(1) \\ h_y(-1)\, h_x(-1) & h_y(-1)\cdot h_x(0) & h_y(-1)\cdot h_x(1) \end{Bmatrix}$$

koji očigledno nema rješenja te zadani impulsni odziv nije separabilan.

Da bi odredili OTF i MTF moramo izračunati prostorno-diskretnu Fourierovu transformaciju (isto kao za DTFT, samo u 2D):

$$H(\omega_1,\omega_2) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} h(x,y)\, e^{-j\omega_1 x} \cdot e^{-j\omega_2 y}$$

Dobivamo

$$H(\omega_1,\omega_2) = \sum_{x=-1}^{1} \sum_{y=-1}^{1} h(x,y) e^{-j\omega_1 x} e^{-j\omega_2 y} =$$

$$= 1\cdot e^{j\omega_1} \underline{\underline{e^{-j\omega_2}}} + 8e^{-j\omega_2} + 1e^{-j\omega_1} \underline{\underline{e^{-j\omega_2}}} +$$

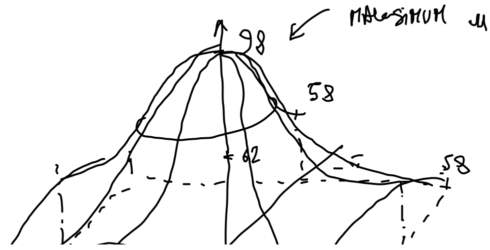
$$+ \underline{8e^{j\omega_1}} + 62 + \underline{8e^{-j\omega_1}} +$$

$$+ 1e^{j\omega_1} e^{j\omega_2} + 8e^{j\omega_2} + 1e^{-j\omega_1} e^{j\omega_2} =$$

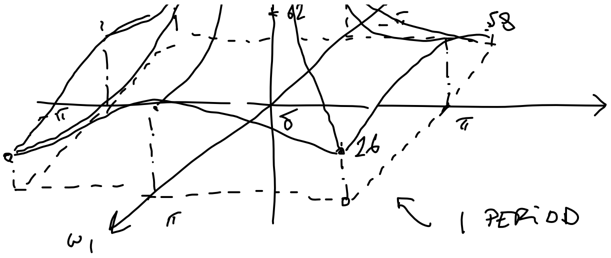
$$= \underline{\underline{e^{-j\omega_2}}}\, 2\cos(\omega_1) + 16\cos(\omega_2) + 16\cos(\omega_1) + \underline{\underline{e^{j\omega_2}}}\, 2\cos(\omega_1) + 62 =$$

$$= 62 + 4\cos(\omega_1)\cos(\omega_2) + 16\cos(\omega_2) + 16\cos(\omega_1)$$

MAKSIMUM u $(0,0)$ JE $62+8+16+16$



Slika prijenosne funkcije sustava. OTF i MTF su istog oblika,



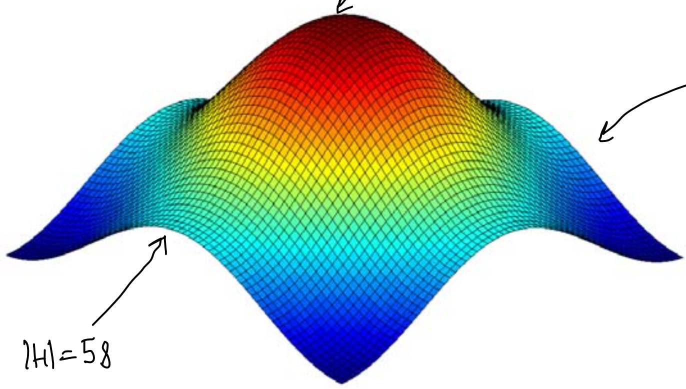
i MTF su istog oblika, no maksimum je 1, a ne 98 zbog normiranja

Kako je $62 \geq 4+16+16=36$ MTF i OTF su iste! Kao pomoć pri skiciranju dobro je nacrtati funkcije

$$78 + 20\cos(\omega_1) \quad \text{i} \quad 78 + 20\cos(\omega_2)$$

koje se dobiju za $\omega_1 = 0$ ili $\omega_2 = 0$. Naravno, MATLAB to brže i ljepše nacrta:

$|H| = 98$



suma kosinusa i sinusa će uvijek dati glatke plohe

$|H| = 58$

$|H| = 26$

22b) U ovom slučaju je odziv separabilan jer je

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & \underline{64} & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{Bmatrix}}_{h(x,y)} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ \underline{8} \\ 1 \end{Bmatrix}}_{h_y(y)} \cdot \underbrace{\{1 \quad \underline{8} \quad 1\}}_{h_x(x)}$$

No u tom slučaju vrijedi

$$H(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1) \cdot H(\omega_2)$$

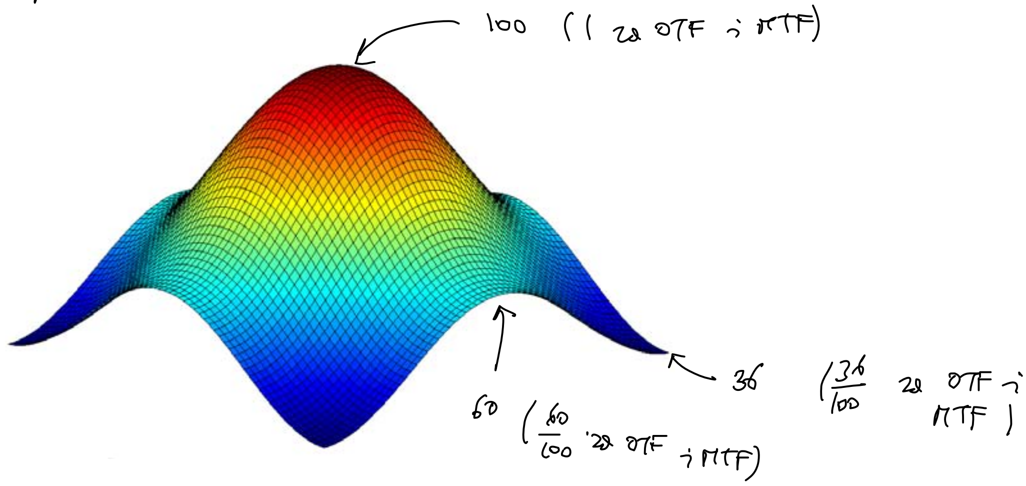
$$\begin{cases} H(\omega_1) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h_x(x) e^{-j\omega_1 x} = 1 \cdot e^{j\omega_1} + 8 + 1 \cdot e^{-j\omega_1} = 8 + 2\cos(\omega_1) \\ H(\omega_2) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} h_y(y) e^{-j\omega_2 y} = 1 \cdot e^{j\omega_2} + 8 + 1 e^{-j\omega_2} = 8 + 2\cos(\omega_2) \end{cases}$$

$$H(\omega_1,\omega_2) = (8+2\cos(\omega_1))\cdot(8+2\cos(\omega_2))$$

Kako je $H(0,0)=100$ onda je

$$OTF = MTF = \frac{1}{100}(8+2\cos(\omega_1))(8+2\cos(\omega_2))$$

Skiciranje prepuštamo MATLAB-u:



25)
$$S_1(f(x,y)) = f(x,y) - f(x-1,y)$$
$$S_2(f(x,y)) = \frac{1}{2}\left(f(x+1,y) - f(x-1,y)\right)$$

Najprije ćemo za oba sustava odrediti impulsne odzive.
Primijetimo da postoji pomak jedino po x-osi što znači da su impulsni odzivi separabilni te da je $h_y(y)=\delta(y)$. Dobivamo

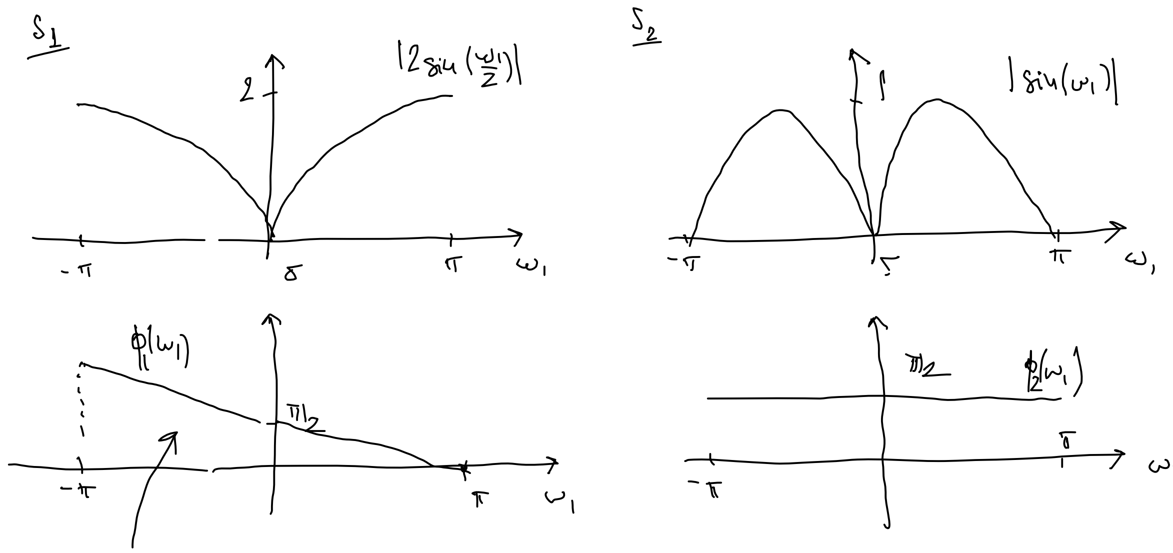
$$h_1(x,y) = \{\underline{1}\ \ -1\} = h_{1x}(x)\,\delta(y)$$
$$h_2(x,y) = \frac{1}{2}\{1\ \ \underline{0}\ \ -1\} = h_{2x}(x)\cdot\delta(y)$$

Odredimo sada Fourierove transformacije dobivenih impulsnih odziva:

$$H_1(\omega_1,\omega_2) = \sum_{x=0}^{1} h_{1x}(x)e^{-j\omega_1 x} = 1 - e^{-j\omega_1} = e^{-j\omega_1/2}\, j2\sin(\omega_1/2)$$
$$H_2(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2}\sum_{x=-1}^{1} h_{2x}(x)e^{-j\omega_1 x} = \frac{1}{2}\left(e^{+j\omega_1 x} - e^{-j\omega_1 x}\right) = j\sin(\omega_1)$$

Kako se radi o sustavima koji aproksimiraju parcijalnu derivaciju po x osi vidimo da i dobivene prijenosne funkcije ovise samo o prostornoj frekvenciji ω_1. Možemo ih i skicirati:

po x osi vidimo da i dobivene prijenosne funkcije ovise samo o prostornoj frekvenciji ω_1. Možemo ih i skicirati:



GENERALIZIRANA LINEARNA FAZA!

$$-\frac{d}{d\omega_1}\phi_1(\omega_1) = \frac{1}{2} \qquad\qquad -\frac{d}{d\omega_1}\phi_2(\omega_1) = 0$$

Sustav S_1 je sustav koji ima generaliziranu linearnu fazu ($\phi_1(\omega_1)$ je afina funkcija) i kao takav unosi prostorni pomak od $-\frac{d}{d\omega_1}\phi_1(\omega_1) = \frac{1}{2}$ uzorka, dok sustav S_2 ne unosi pomak. Za primjenu bi rezultat sustava S_1 trebalo pomaknuti za pola uzorka ulijevo po x-osi da se poklopi s ulaznim signalom. Problem nastaje u uzastopnim primjenama jer se pomak akumulira. Da bi se to izbjeglo gotovo uvijek se biraju LSI sustavi čiji impulsni odziv ima neparan broj uzoraka jer se u tom slučaju lagano postigne nulta fazna karakteristika, odnosno filtriranje ne unosi pomak.

27.)

$$f(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \underline{0} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}, \quad h(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \underline{4} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Kako impulsni odziv nije separabilan ne možemo iskoristiti rezultat zadatka 17 već moramo računati 2D konvoluciju prema

Kako impulsni odziv nije separabilan ne možemo iskoristiti rezultat zadatka 17 već moramo raditi 2D konvoluciju prema definiciji:

$$f(x,y) ** h(x,y) = \sum_{\chi=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f(\chi,\nu)\, \underbrace{h(x-\chi, y-\nu)} = g(x,y)$$

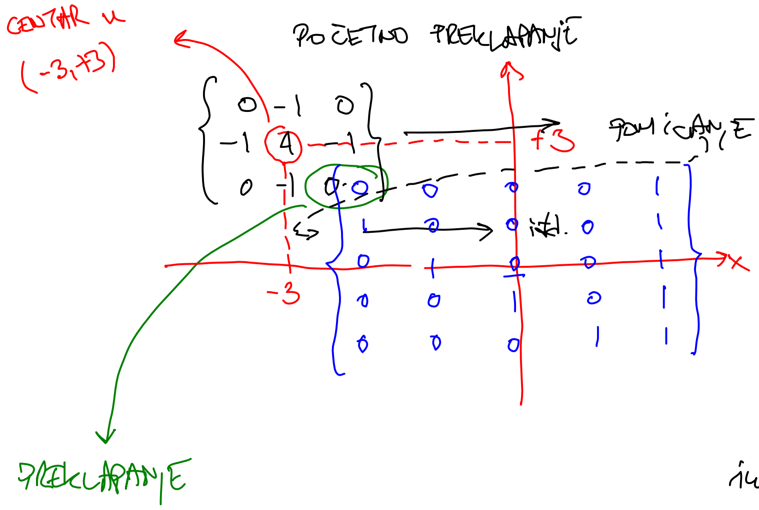
SUMA IDE PO $-\chi$ i $-\nu$ ŠTO ZNAČI DA JE IMPULSNI ODZIV ZRCALJEN!

Najjednostavnije je koristiti zrcali i pomakni algoritam.

$$h(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \underline{4} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} \qquad h(-x,-y) = \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \underline{4} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

ZRCALJEN!

Kako je $h(x,y)$ dimenzija 3x3 i kako je $f(x,y)$ dimenzije 5x5 rezultat konvolucije je dimenzije $(3+5-1)\times(3+5-1) = 7\times 7$.



Brojeve koji se preklapaju množimo te umnoške zbrajamo. Rezultat upisujemo u novu sliku na poziciju (x,y) koja odgovara centru impulsnog odziva!

$g(-3,+3) = 0\cdot 0 = 0$

Primijetite da u ovoj matrici ima dosta nula tako da množenja i zbrajanja nije teško. Kao rezultat dobivamo:

$$g(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \;|\; -1 \quad -1 \;|\; 0 \right)$$

PROMJENA PREDZNAKA OZNAČAVA GRANICU!

27b)

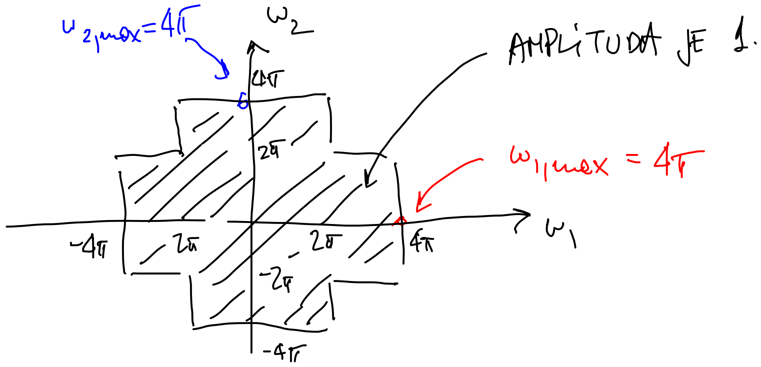
$$g(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 7 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & -1 & -3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -2 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \end{Bmatrix}$$

31) Otipkavanjem ili uzorkovanjem dobivamo diskretni signal koji će imati periodičan spektar. Veza spektra kontinuiranog signala $F_k(\omega_1,\omega_2)$ i spektra diskretnog signala $F_d(\Omega_1,\Omega_2)$ je dana izrazom

$$F_d(\Omega_1,\Omega_2) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_k\left(\underbrace{\frac{\Omega_1 + 2\pi i}{\Delta x}}_{\omega_1}, \underbrace{\frac{\Omega_2 + 2\pi j}{\Delta y}}_{\omega_2} \right)$$

Pri tome smo frekvencije kontinuiranog signala označili sa malim slovom ω a frekvencije diskretnog s velikim slovom Ω kako bi ih mogli razlikovati.

31a)



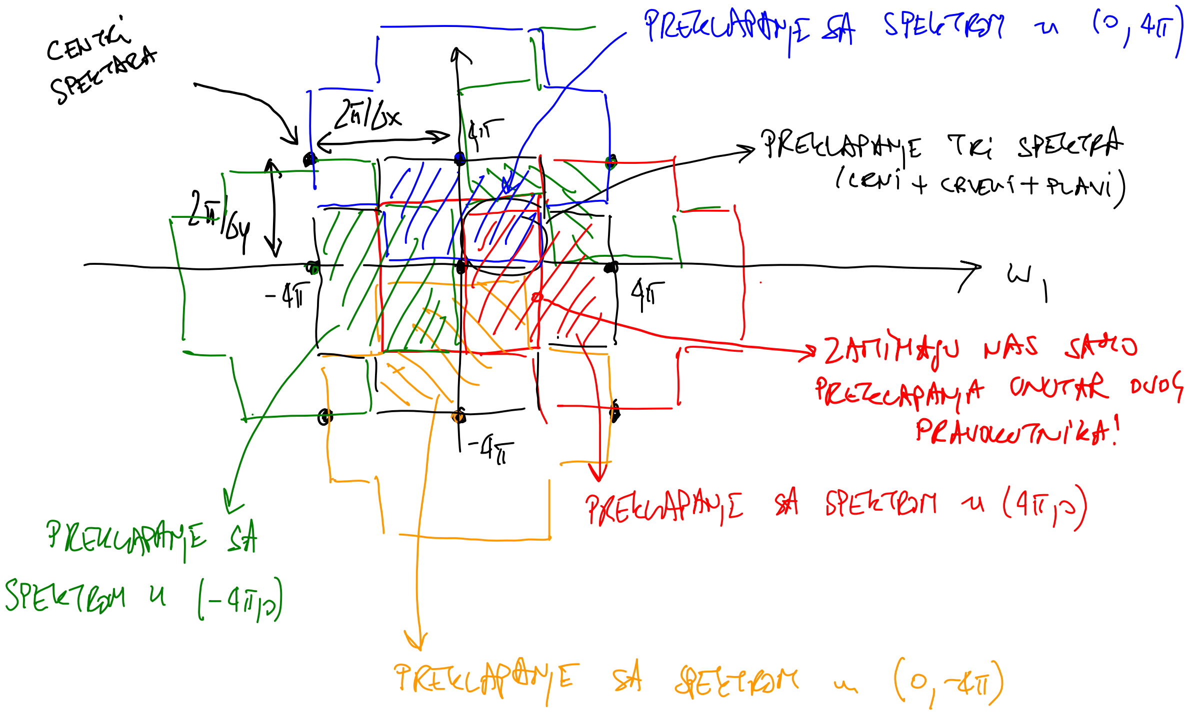
Do preklapanja spektra neće doći ako odaberemo frekvenciju otipkavanja barem dvostruko veću od najveće frekvencije u signalu. Pri tome se x i y koordinate promatraju nezavisno.

$$\omega_{s1,min} = 2 \cdot \omega_{1,max} = 2 \cdot 4\pi = 8\pi \quad , \quad \Delta x_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{s1,min}} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\omega_{s2,min} = 2 \cdot \omega_{2,max} = 2 \cdot 4\pi = 8\pi \quad , \quad \Delta y_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{s2,min}} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$

Kako su zadani razmaci otipkavanja Δx i Δy veći od kritičnih Δx_{max} i Δy_{max} doći će do preklapanja spektra. Novi spektar računamo prema navedenoj formuli koja nam govori da se spektar kontinuiranog signala ponavlja svakih 4π na ω_1 osi i svakih 4π na ω_2 osi (jer je $4\pi = \frac{2\pi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\Delta y}$).

Znači spektar kontinuiranog signala ponavlja se svakih 4π po ω_1 osi i svakih 4π po ω_2 osi (jer je $4\pi = \frac{2\pi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\Delta y}$).

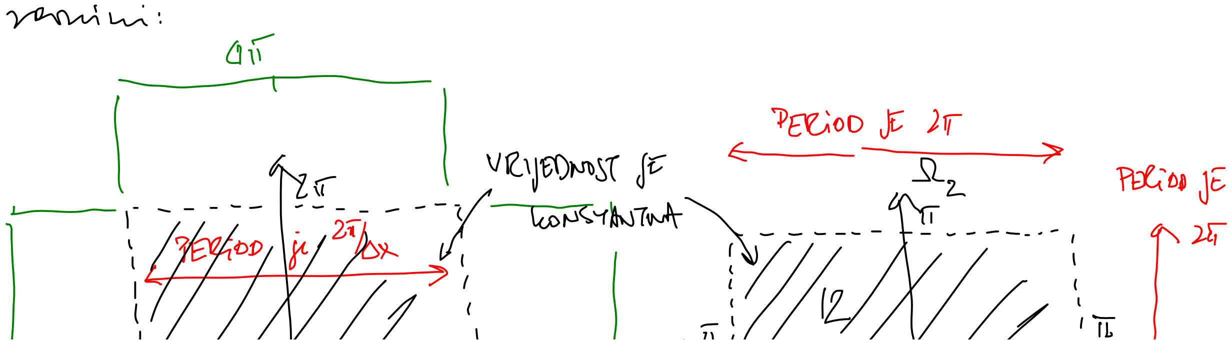


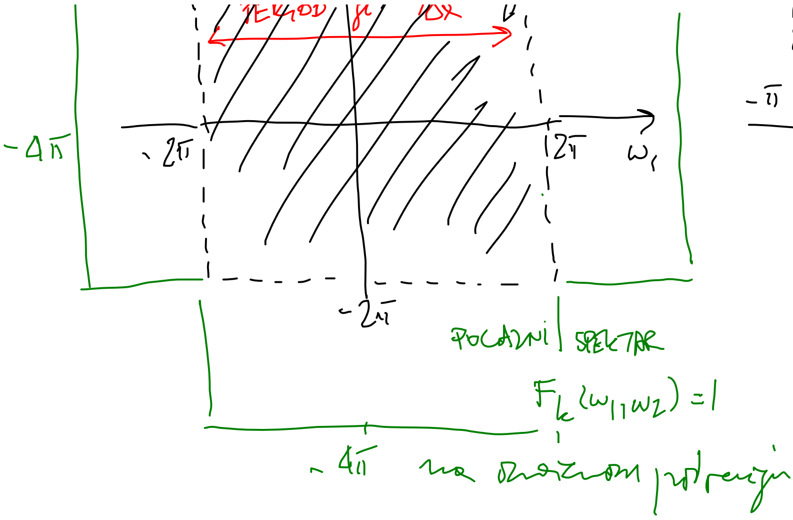
Kako se spektri ponavljaju svakih $\frac{2\pi}{\Delta x}$ po ω_1 osi i $\frac{2\pi}{\Delta y}$ po ω_2 osi za preklapanje je dovoljno naći spektre koji upadaju u pravougaonik stranica $\frac{2\pi}{\Delta x}$ i $\frac{2\pi}{\Delta y}$ centriran oko ishodišta!

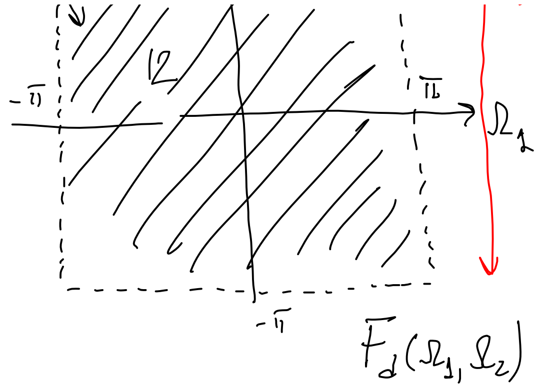
Kada smo odredili preklapanja moramo zbrojiti sve doprinose (zbog dvostruke sume u izrazu). Ovdje se preklapaju tačno tri spektra te je vrijednost amplitude spektra spektra

$$F_d(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{\Delta x \Delta y}(1+1+1) = 4 \cdot 3 = 12$$

Nacrtajmo sada konačan rezultat, i to i u $\omega_1 O \omega_2$ i $\Omega_1 O \Omega_2$ ravnini:





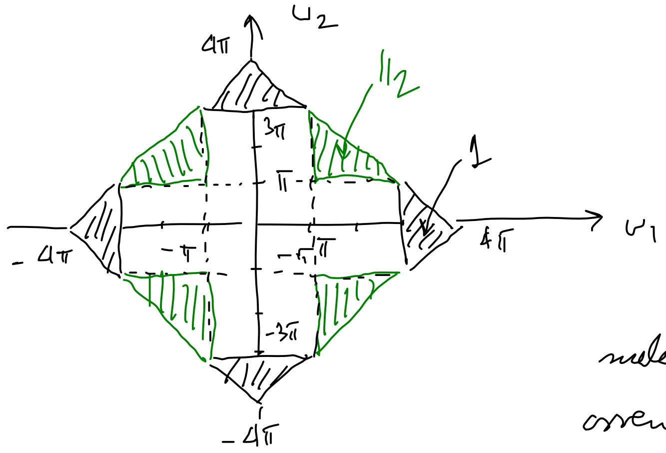


Dobili smo da je $F_d(\Omega_1,\Omega_2)=1$ na cijeloj ravnini. Primijetite također da su frekvencije Ω_1 i Ω_2 normirane u smislu da je vrijednost π uvijek najveća diskretna prostorna frekvencija.

b), c) i d) zadaci rješavaju se na jednak način!

DODATNI „NOGOMETNI" ZADATAK!

Kontinuirani 2D signal ima spektar $F_k(\omega_1,\omega_2)$ koji je jednak jedinici ili 1/2 za područja prikazana slikom!



Skicirajte pripadni spektar diskretnog signala za $\Delta x=\frac{1}{2}$ i $\Delta y=\frac{1}{2}$. Područja različita od nule u $\Omega_1 O \Omega_2$ ravnini obojite crvenom bojom! Što ste dobili?

VOLIM NOGOMET!