Transformacije slika

Prof. dr. sc. Sven Lončarić
http://www.fer.hr/predmet/obrinf

Pregled tema

- Uvod
- 1-D i 2-D linearne transformacije
- 1-D i 2-D ortogonalne transformacije
- Matrična interpretacija ortogonalnih transformacija
- Pregled poznatijih diskretnih transformacija

Uvod

- transformacije slika su važne za mnoga područja digitalne obrade slike
- transformacije slike koriste se za poboljšanje, obnavljanje, kodiranje i opis slika
- transformacije i dalje predstavljaju jedno od područja intenzivnog znanstvenog istraživanja
- linearne transformacije su pogodnije za korištenje od nelinearnih

Linearne transformacije

- ovdje nas prvenstveno zanimaju linearne transformacije
- konvencionalna definicija linearnosti transformacije:

$$T(ax+by) = aT(x)+bT(y)$$

1-D linearne transformacije

- Linearna diskretna 1-D transformacija ima formu:

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n)a(k,n), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

gdje je *a*(*k,n*) jezgra transformacije

- Inverzna transformacija je dana sa:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k)b(n,k), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

gdje je *b*(*n,k*) jezgra inverzne transformacije

Alternativna notacija

- Neki autori koriste alternativnu notaciju:

$$a(k,n) = a_k(n)$$

$$b(n,k) = b_n(k)$$

što daje alternativnu formu općih jednadžbi diskretne 1-D linearne transformacije:

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) a_k(n), \quad 0 \le k \le N-1$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k) b_n(k), \quad 0 \le n \le N-1$$

2-D linearne transformacije

- 2-D transformacija slike (diskretnog niza) $u(m,n)$ dimenzija $N{\times}N$ je opisana parom jednadžbi:

$$v(k,l)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}a_{k,l}(m,n)u(m,n), \quad 0\le k,l\le N-1$$

$$u(m,n)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}b_{m,n}(k,l)v(k,l), \quad 0\le m,n\le M-1$$

gdje su $a_{k,l}(m,n)$ i $b_{m,n}(k,l)$ jezgra transformacije i jezgra inverzne transformacije

Separabilne 2-D transformacije

- jezgra transformacije je separabilna ako vrijedi:

$$a_{k,l}(m,n) = c_k(m) d_l(n)$$

- jezgra transformacije je simetrična ako vrijedi:

$$c_k(m) = d_k(m), \quad \forall k, m$$

Primjer separabilne 2-D transformacije

- jezgra 2-D Fourierove transformacije:

$$a_{k,l}(m,n) = \frac{1}{N}\exp[-\frac{j2\pi(mk+nl)}{N}] = c_k(m)d_l(n)$$

gdje su:

$$c_k(m) = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp(-\frac{j2\pi mk}{N})$$

$$d_l(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp(-\frac{j2\pi nl}{N})$$

- jezgra 2-D F.T. je također simetrična

1-D ortogonalne transformacije

- Opća forma 1-D ortogonalne transformacije je:

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n)a(k,n), \quad 0 \le k \le N-1$$

- Inverzna transformacija je dana sa:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k)a^*(k,n), \quad 0 \le n \le N-1$$

gdje je kompleksna matrica transformacije
$\mathbf{A}=\{a(k,n)\}$ unitarna: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{H}$

Matrična formulacija 1-D ortogonalnih transformacija

- 1-D niz $u(n)$, $0 < n < N$-1 može se predstaviti pomoću N-dimenzionalnog vektora u
- 1-D ortogonalna transformacija se tada može prikazati kao:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Rightarrow v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k,n)u(n), \quad 0 \le k \le N-1$$

gdje je $\mathbf{A}=\{a(k,n)\}$ unitarna matrica: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{H}$

Matrična formulacija inverzne 1-D ortogonalne transformacije

- Budući da je **A** unitarna matrica $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{H}$ izraz za inverznu transformaciju se dobiva kao:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}^{H}\mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \quad u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^*(k,n)v(k), \quad 0 \le n \le N-1$$

2-D ortogonalne transformacije

- 2-D ortogonalna transformacija slike $u(m,n)$ dimenzija $N \times N$ se može prikazati parom jednadžbi:

$$v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) u(m,n), \qquad 0 \le k,l \le N-1$$

$$u(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a^*_{k,l}(m,n) v(k,l), \quad 0 \le m,n \le M-1$$

gdje je $a_{k,l}(m,n)$ jezgra transformacije, koja je skup ortonormalnih 2-D funkcija (baza)

Separabilnost i simetričnost ortogonalnih 2-D transformacija

- 2-D transformacija je separabilna ako vrijedi:

$$a_{k,l}(m,n) = a_k(m)b_l(n) = a(k,m)b(l,n)$$

gdje su

$$\{a_k(m), k = 0,..., N-1\}, \{b_i(n), l = 0,..., N-1\}$$

1-D ortonormalni skupovi vektora, tj. matrice **A**={$a(k,m)$}, **B**={$b(l,n)$} su unitarne matrice

- 2-D transformacija je simetrična ako je **A**=**B**

Jednadžbe separabilne i simetrične 2-D transformacije

- Za separabilnu i simetričnu 2-D transformaciju jednadžbe su dane sa:

$$v(k,l)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}a(k,m)u(m,n)a(l,n), \qquad 0\le k,l\le N-1$$

$$u(m,n)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}a^*(k,m)v(k,l)a^*(l,n), \quad 0\le m,n\le M-1$$

Matrična formulacija separabilne i simetrične 2-D transformacije

- Matrična formulacija separabilne i simetrične 2-D transformacije dana je sa:

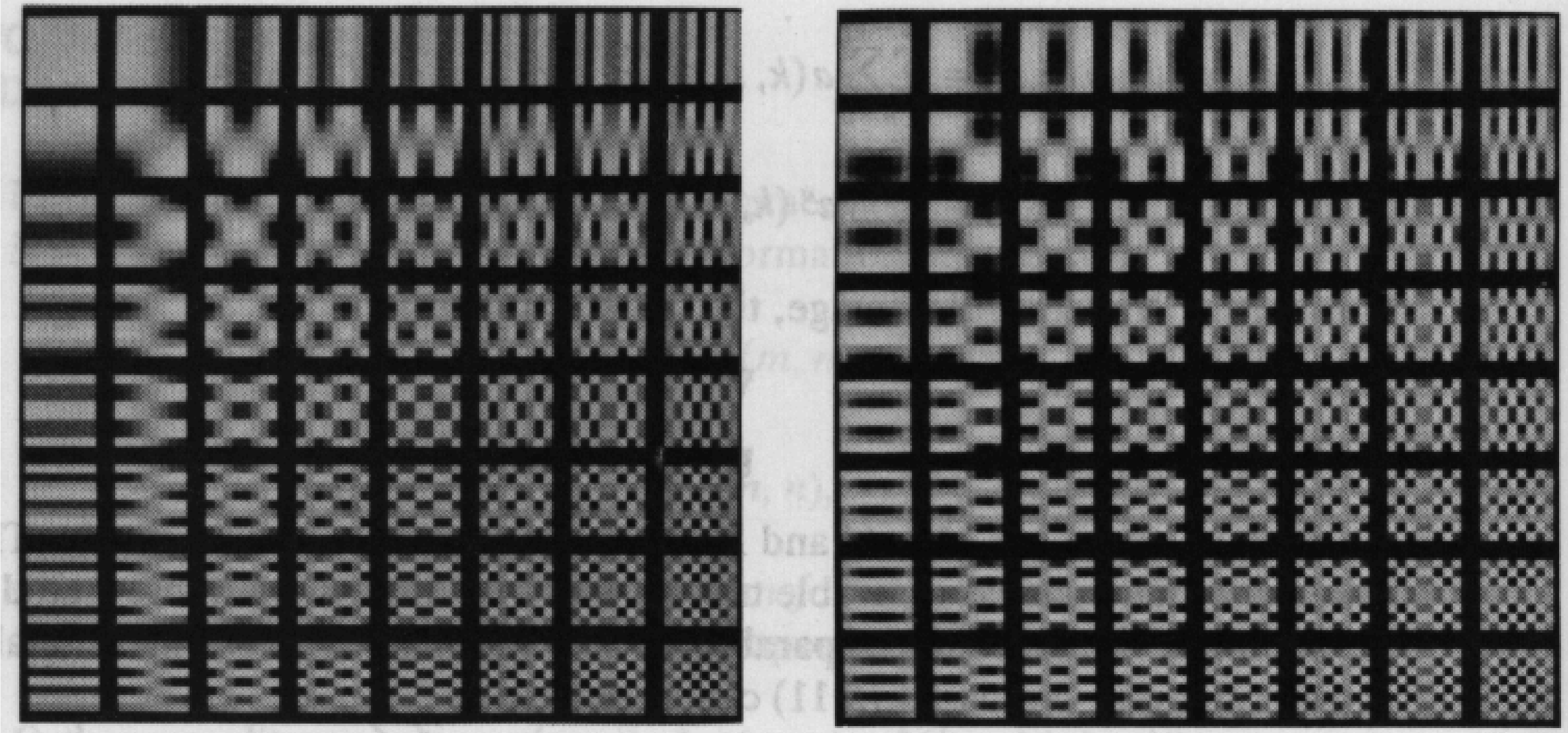
$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{*T}\,\mathbf{V}\mathbf{A}^{*}$$

gdje je **U** $N \times N$ matrica slike, **V** je $N \times N$ transformacija slike, a **A** je unitarna matrica transformacije dimenzija $N \times N$ definirana ranije kao: $\mathbf{A}=\{a(k,m)\}$

Primjeri ortogonalnih baza I

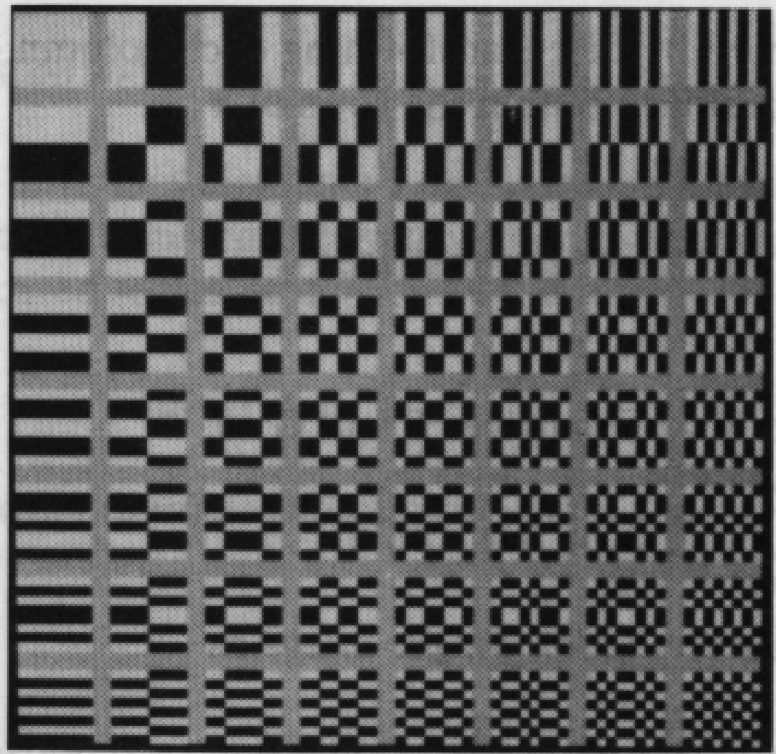
- Baze kosinusne i sinusne transformacije 8×8



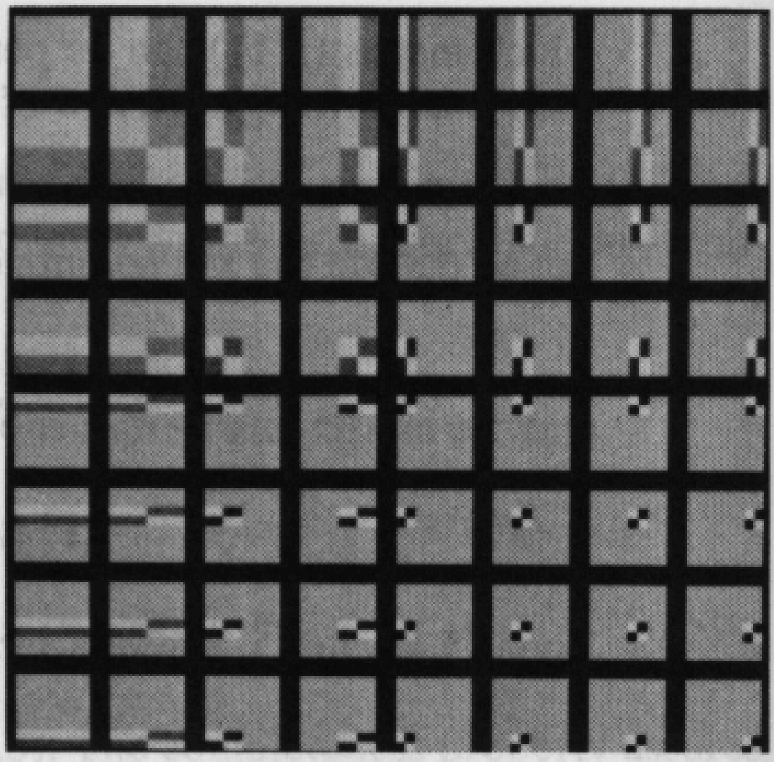
(a) Cosine (b) Sine

Primjeri ortogonalnih baza II

- Baze Hadamardove i Haarove transformacije 8×8



(c) Hadamard



(d) Haar

Primjeri diskretnih transformacija

- Fourierova transformacija
- Kosinusna transformacija
- Karhunen-Loeve transformacija

Unitarna 1-D DFT

- Unitarna 1-D DFT je definirana kao:

$$v(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) W_N^{kn}, \quad k = 0,\dots,N-1$$

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0,\dots,N-1$$

gdje je: $W_N = \exp(-\frac{j2\pi}{N})$

- $N \times N$ matrica **F** unitarne 1-D DFT jednaka je:

$$\mathbf{F} = \{f_{kn}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{kn} \right\}, \quad 0 \le k, n \le N-1$$

Unitarna 2-D DFT

- Unitarna 2-D DFT je definirana sa:

$$v(k,l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m,n) W_N^{km} W_N^{\ln}, \qquad 0 \le k,l \le N-1$$

$$u(m,n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k,l) W_N^{-km} W_N^{-\ln}, \quad 0 \le m,n \le N-1$$

gdje je: $$W_N = \exp(-\frac{j2\pi}{N})$$

ili u matričnoj notaciji (**F** je simetrična):

$$\mathbf{V} = \mathbf{FUF}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}^* \mathbf{V} \mathbf{F}^*$$

Primjer 2-D DFT

- 2-D unitarna DFT slike dimenzija 256×256
- Prikazane su: slika, faza, amplituda i centrirana amplituda

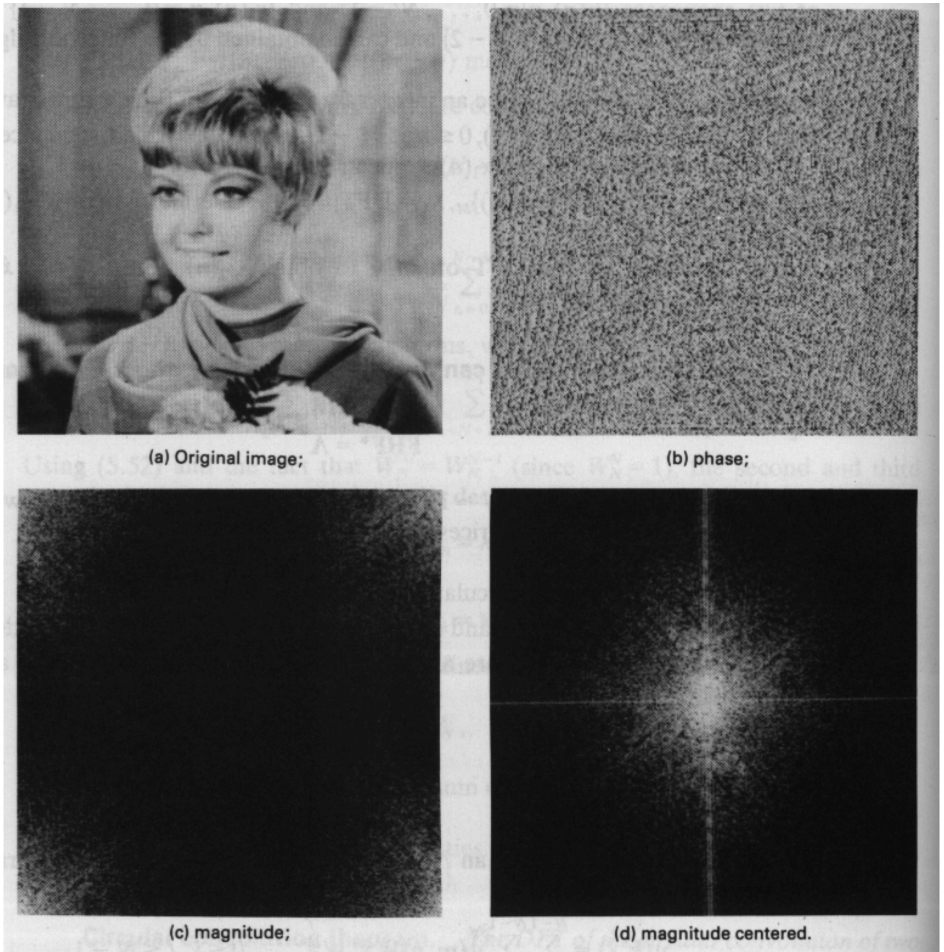


Figure 5.6 Two-dimensional unitary DFT of a 256 × 256 image.

Svojstva 2-D FT

- separabilnost
- translacija
- periodičnost i konjugirana simetrija
- rotacija
- skaliranje
- Laplaceov operator
- cirkularna konvolucija
- korelacija

Separabilnost 2-D DFT

- Slijedi iz definicije:

$$\mathbf{V} = \mathbf{FUF}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{V}^T = \mathbf{F}^T\mathbf{U}^T\mathbf{F}^T = \mathbf{F}(\mathbf{FU})^T$$

- 2-D DFT se svodi na dvije 1-D DFT: 1-D DFT po stupcima, zatim 1-D DFT po redovima (engl. row-column metoda)
- 1-D FFT ima broj operacija reda: $O(N \log_2 N)$
- 2-D DFT ima broj operacija reda: $O(N^2 \log_2 N)$

Translacija 2-D DFT

- Pretpostavimo da je: $v(k,l) = F\{u(m,n)\}$ gdje je F diskretna F.T.
- Translacija u prostornoj i frekvencijskoj domeni:

$$u(m-a, n-b) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} v(k,l)\exp\left(-\frac{j2\pi(ka+lb)}{N}\right)$$

$$u(m,n)\exp\left(\frac{j2\pi(\alpha m+\beta n)}{N}\right) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} v(k-\alpha, l-\beta)$$

Periodičnost 2-D DFT

- Pretpostavimo da je: $v(k,l)$ = F$\{u(m,n)\}$ gdje je F diskretna F.T.
- 2-D DFT i inverzna DFT su periodične sekvencije s periodom (N,N):

$$v(k,l) = v(k+N,l) = v(k,l+N) = v(k+N,l+N), \quad \forall k,l$$

Konjugirana simetrija 2-D DFT

- Pretpostavimo da je: $v(k,l)$ = F{$u(m,n)$} gdje je F diskretna F.T., a $u(m,n)$ realna sekvencija
- Tada vrijedi:

$$v(k,l) = v^*(-k,-l)$$
$$|v(k,l)| = |v(-k,-l)|$$

Rotacija 2-D FT i DFT

- Pretpostavimo da su korištene polarne koordinate:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad u = \omega\cos\phi \quad v = \omega\sin\phi$$

  i neka je: $F(u,v) = \mathrm{F}\{f(x,y)\}$
  gdje je F{.} kontinuirana F.T.
- tada vrijedi: $f(x,y) \rightarrow f(r,\theta), \quad F(u,v) \rightarrow F(\omega,\phi)$
- Može se pokazati da rotacija slike izaziva jednaku rotaciju u frekvencijskoj domeni:

$$f(r,\theta+\theta_0) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F(\omega,\phi+\theta_0)$$

Skaliranje 2-D FT

- Pretpostavimo da je: $F(u,v)$ = F{$f(x,y)$} gdje je F{.} kontinuirana F.T.
- Tada vrijedi:

$$f(ax,by) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \frac{1}{|ab|} F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

Laplace-ov operator

- Laplace-ov operator je definiran kao:

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

- Pretpostavimo da je $F(u,v)$ = F{$f(x,y)$} gdje je F{.} kontinuirana F.T.
- Tada vrijedi:

$$\nabla^2 f(x,y) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} -4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$$

- Primjena: isticanje rubova

Linearna konvolucija I

- Linearna konvolucija dvaju kontinuiranih 2-D signala definirana je kao:

$$(f*g)(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)g(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta$$

- Pretpostavimo da je $f \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F,\quad g \xleftrightarrow{\mathrm{F}} G$

  gdje je F kontinuirana F.T.
- Tada vrijedi:

$$f(x,y)*g(x,y) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F(u,v)G(u,v)$$
$$f(x,y)g(x,y) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F(u,v)*G(u,v)$$

Linearna konvolucija II

- Linearna konvolucija dvaju diskretnih 2-D signala (nizova) definirana je kao:

$$(h*u)(m,n)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h(m-i,n-j)u(i,j)$$

- Pretpostavimo da je $h \xleftrightarrow{\mathrm{F}} H$, $u \xleftrightarrow{\mathrm{F}} U$ gdje je F F.T diskretnih aperiodičkih nizova *h* i u
- Tada vrijedi:

$$h(m,n)*u(m,n) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} H(u,v)U(u,v)$$

Cirkularna konvolucija

- Definicija 2-D cirkularne konvolucije:

$$(h \otimes u)(m,n) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} h((m-i) \bmod N, (n-j) \bmod N) u(i,j)$$

- 2-D cirkularna konvolucija ima složenost O(N^4)
- Pretpostavimo da je: $u \xleftrightarrow{\mathrm{F}} U, \quad h \xleftrightarrow{\mathrm{F}} H$

  gdje je F 2-D DFT duljine N
- Tada vrijedi: $(h \otimes u)(m,n) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} H(k,l)U(k,l)$
- Računanje cirkularne konvolucije pomoću 2-D DFT ima složenost O($N^2 \log_2 N$)

Korelacija I

- Korelacija dvaju realnih kontinuiranih 2-D funkcija *f* i *g* definirana je sa:

$$f(x,y)\circ g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\,g(x+\alpha,y+\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

- Pretpostavimo da je $f \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F,\quad g \xleftrightarrow{\mathrm{F}} G$ gdje je F F.T kontinuiranih funkcija *f* i *g*
- Tada vrijedi:

$$f(m,n)\circ g(m,n) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F^*(u,v)G(u,v)$$

Korelacija II

- Korelacija dvaju realnih aperiodičnih 2-D nizova *f* i *g* definirana je sa:

$$f(m,n) \circ g(m,n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(i,j) g(m+i, n+j)$$

- Pretpostavimo da je $f \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F, \quad g \xleftrightarrow{\mathrm{F}} G$ gdje je F F.T diskretnih aperiodičkih nizova *f* i *g*
- Tada vrijedi:

$$f(m,n) \circ g(m,n) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} F^*(u,v) G(u,v)$$

Diskretna kosinusna transformacija (DCT)

- Matrica **C** = $\{c(k,n)\}$ diskretne kosinusne transformacije (DCT) dimenzija $N\times N$ definirana je kao:

$$c(k,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{N}}, & k=0, \quad 0\le n\le N-1\\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}\cos\dfrac{\pi(2n+1)k}{2N}, & 1\le k\le N-1, \quad 0\le n\le N-1\end{cases}$$

1-D DCT

- 1-D DCT diskretnog niza *u*(*n*) duljine *N* i inverzna DCT diskretnog niza *v*(*k*) su definirane parom jednadžbi:

$$v(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cos \frac{\pi(2n+1)k}{2N}, \quad 0 \le k \le N-1$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) v(k) \cos \frac{\pi(2n+1)k}{2N}, \quad 0 \le n \le N-1$$

gdje je:

$$\alpha(0) = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad \alpha(k) = \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad 1 \le k \le N-1$$

ili u matričnoj formi: $\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{v} = \mathbf{C}^{T}\,\mathbf{v}$

2-D DCT

- 2-D verzija DCT se dobiva u matričnoj formi kao:

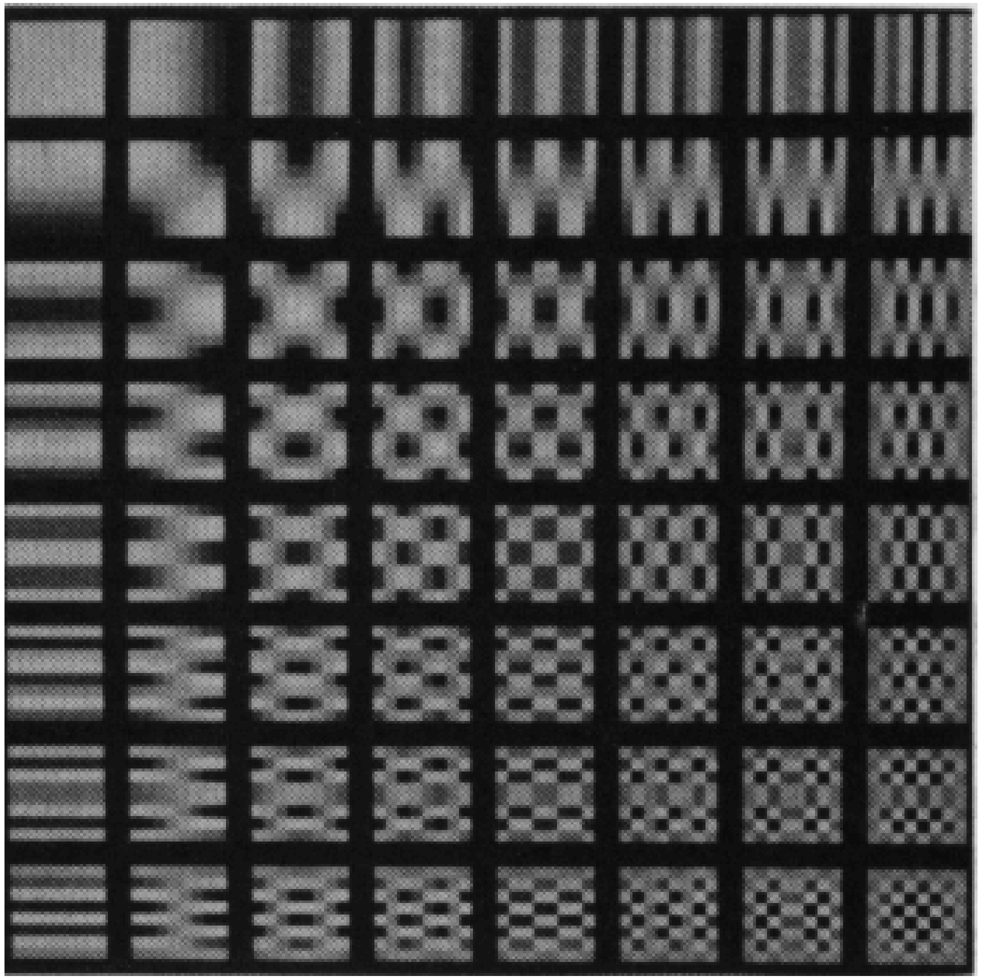
  $$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{U}\mathbf{C}^{T}$$

  $$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{T}\mathbf{V}\mathbf{C}$$

  gdje je $\mathbf{U}=[u(m,n)]$ ulazna 2-D sekvencija (slika), a $\mathbf{V}=[v(k,l)]$ transformacija ulazne slike $\mathbf{U}$

Primjer baze 2-D DCT

- Baza 2-D DCT transformacije dimenzija 8×8



Svojstva DCT I

- DCT realna transformacija (koeficijenti transformacije tj. elementi matrice **C** su realni brojevi)
- DCT je ortogonalna transformacija:

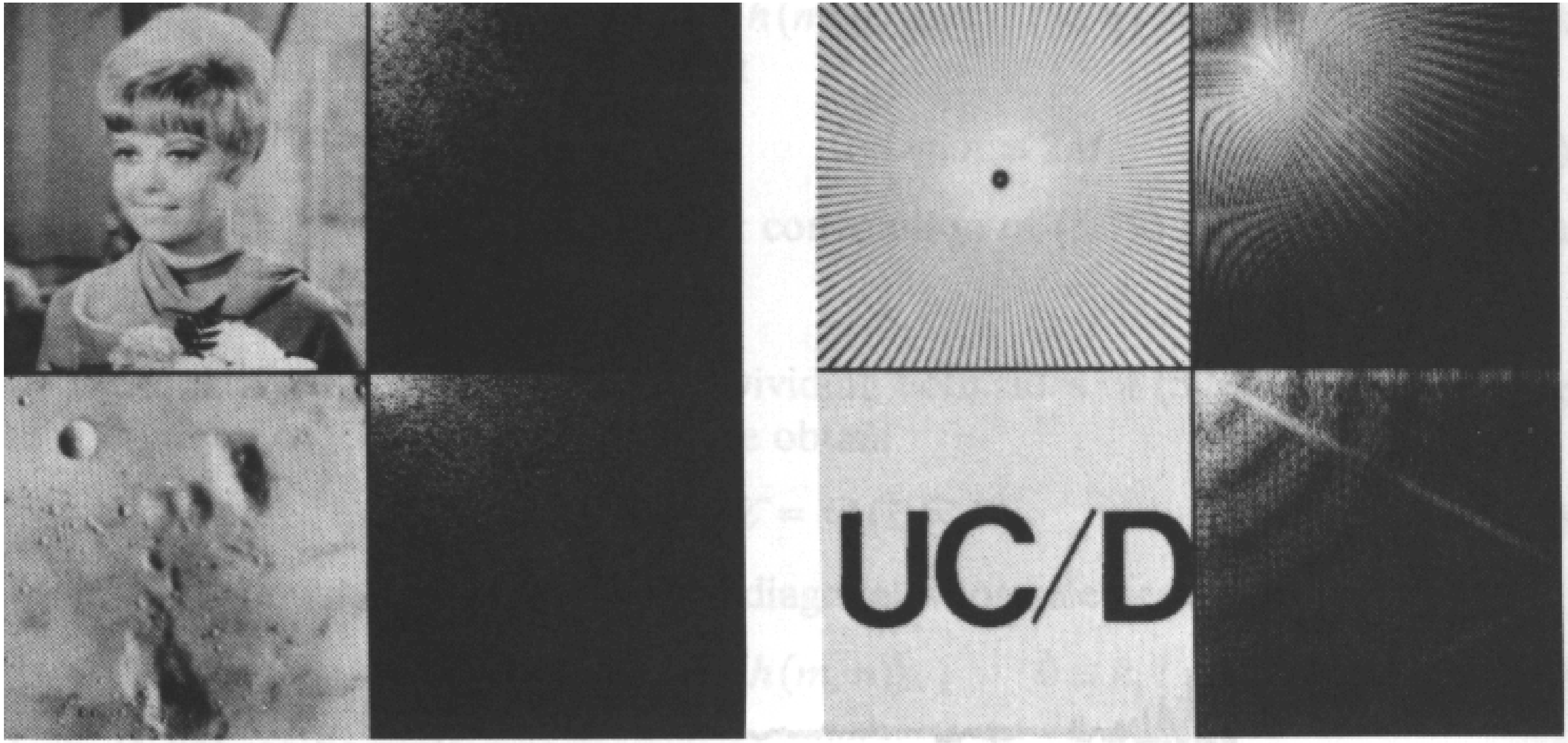
$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^* \quad \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$$

- DCT nije realni dio DFT (to se može vidjeti uspoređivanjem matrica **F** i **C**)
- DCT niza duljine *N* moguće je izračunati pomoću DFT simetrično proširenog niza duljine *2N*

Svojstva DCT II

- Najveći dio energije se nalazi u nižim koeficijentima DCT
- To je dobro za kompresiju jer eliminacija viših DCT koeficijenata predstavlja relativno mali gubitak informacije
- Zato se DCT često koristi u kompresiji slika

Primjer DCT



(a) Cosine transform examples of monochrome images;

(b) Cosine transform examples of binary images.

Karhunen-Loeve transformacija

- Neka je **u** realni slučajni vektor duljine N
- Autokorelacijska matrica vektora **u** je: $\mathbf{R} = E[\mathbf{u}\mathbf{u}^T]$
- Neka je **A** $N \times N$ matrica čiji su stupci ortonormalizirani vlastiti vektori matrice **R**:

$$\mathbf{R}\mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{N-1}$$

- Matrica **A** je $N \times N$ unitarna matrica koja reducira **R** na dijagonalnu formu $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^H \mathbf{R} \mathbf{A}$

Karhunen-Loeve transformacija

- 1-D KL transformacija vektora **u** je definirana izrazom:

  $$\mathbf{v} = \mathbf{A}^H\mathbf{u}$$

  gdje je **A** matrica koja dijagonalizira **R**, autokorelacijsku matricu vektora **u**
- inverzna 1-D KL transformacija je definirana s:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{N-1} v(k)\mathbf{a}_k$$

Svojstva KL transformacije

- Zbog pojednostavljenja u slijedećem tekstu pretpostavlja se da je $E[\mathbf{u}] = 0$
- Svojstva KL transformacije:
  - 1. Dekorelacija
  - 2. Restrikcija baze

Dekorelacija

- Tvrdnja: Koeficijenti KL transformacije *v*(*k*) imaju očekivanje jednako nuli i nekorelirani su:

$$E[v(k)] = 0$$
$$E[v(k)v^*(l)] = \lambda_k \delta(k-l)$$

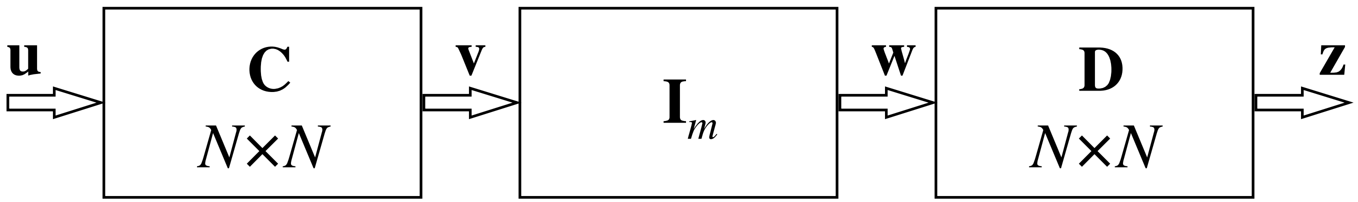
- Dokaz:

$$E[\mathbf{v}] = \mathbf{A}^H E[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$$
$$E[\mathbf{v}\mathbf{v}^H] = \mathbf{A}^H E[\mathbf{u}\mathbf{u}^H]\mathbf{A} = \mathbf{A}^H \mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{Q}$$
$$\Rightarrow E[v(k)v^*(l)] = \lambda_k \delta(k-l)$$

- Kovarijancijska matrica **Q** vektora **v** ima dijagonalnu formu tj. *v*(*k*) su nekorelirani

Restrikcija baze

- Osjetljivost transformacije na smanjenje broja vektora u bazi:



- Vektor **w** ima prvih m elemenata iz **v** a ostalo nule
- C i D su $N \times N$ matrice a $\mathbf{I}_m$ je matrica s m jedinica uzduž glavne dijagonale a ostalo su nule
- **u** i **v** su vektori iz N-dimenzionalnog prostora
- **w** je vektor iz $m<=N$ dimenzionalnog prostora

Restrikcija baze

- MS pogreška između nizova $u(n)$ i $z(n)$ je:

$$J_m = \frac{1}{N} E\left[\sum_{n=0}^{N-1} \left|u(n) - z(n)\right|^2\right]$$

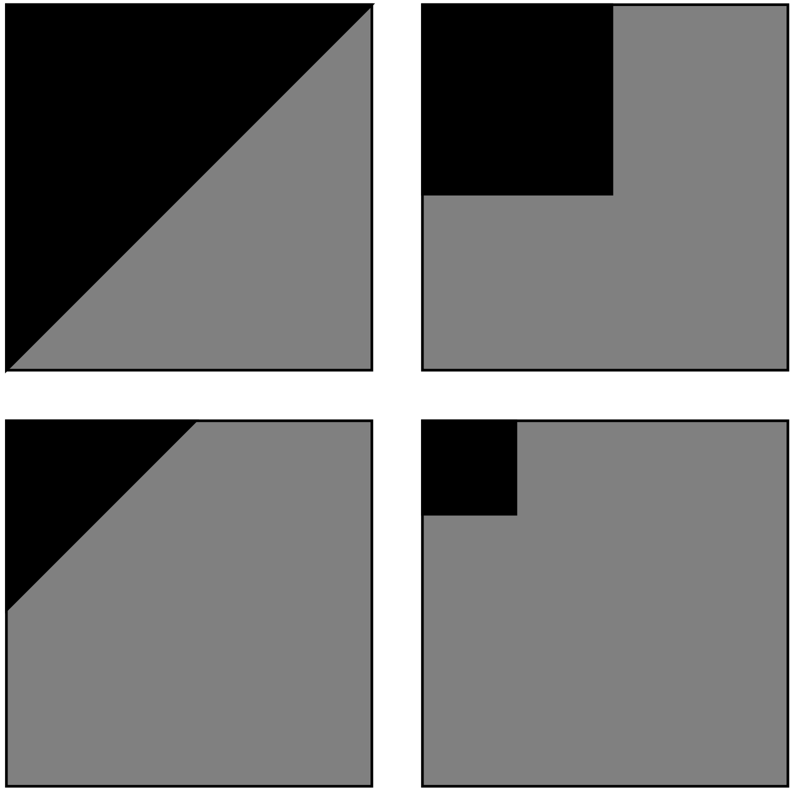
- Tvrdnja: MS pogreška J_m je minimalna kada je:

  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^H$, $\mathbf{D} = \mathbf{A}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{I}$

- Interpretacija: za dani broj koeficijenata *m* KL transformacija predstavlja niz *u* s najmanjom pogreškom (manjom od bilo koje druge unitarne transformacije)

Restrikcija baze

- NP filtri (maske) za redukciju broja uzoraka u “frekvencijskoj” domeni za faktore: 2, 4, 8 i 16
- bijelo: područje propuštanja
- crno: područje gušenja



Restrikcija baze

- Restrikcija baze NP filtriranjem u domeni DCT
- Faktori redukcije broja uzoraka: 1 (original), 4, 8 i 16

(a) Original; (b) 4 : 1 sample reduction; (c) 8 : 1 sample reduction; (d) 16 : 1 sample reduction.

Restrikcija baze

- Utjecaj restrikcije baze za faktor 4 za DCT, DST, DFT i Hadamardovu transformaciju

(a) Cosine; (b) sine; (c) unitary DFT; (d) Hadamard;

Restrikcija baze

- Utjecaj restrikcije baze za faktor 4 za Haarovu i Slant transformaciju

(e) Haar; (f) Slant.

Zaključak

- Predstavljene su najpoznatije ortogonalne transformacije: DFT, DCT
- KL transformacija: optimalna za dani signal ili sliku
- Transformacije su definirane uz pomoć matrične notacije