Digitalna obrada signala

Obrada informacija

Damir Seršić

http://www.fer.hr/predmet/oi

Teme predavanja

- Reprezentacija signala i sustava
- Osnovne podjele i osnovni signali
- Linearni sustavi, impulsni odziv i konvolucija
- Dekonvolucija
- Z transformacija, prijenosna funkcija, frekvencijska karakteristika
- Sustavi s beskonačnim (IIR) i konačnim (FIR) impulsnim odzivom
- Grupno kašnjenje, linearna faza
- Tipovi FIR filtara s linearnom fazom

Reprezentacija signala

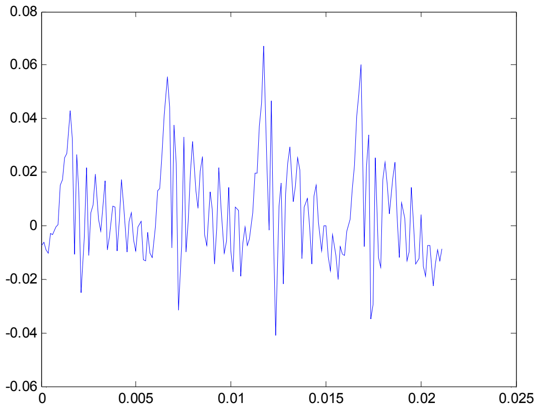
- *Signal* je fenomen koji nosi neku informaciju.
- Obično to je varijacija neke fizikalne veličine.
- Moguće ju je izmjeriti, manipulirati, pohraniti, prenijeti ili obraditi nekim fizikalnim procesom: *sustavom*.
- Signal: veza nezavisne i zavisne varijable

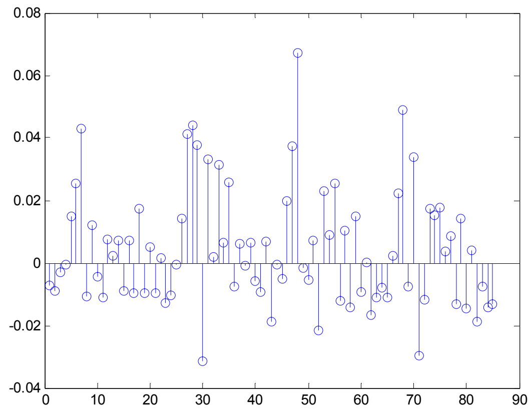
$$x = \{(t, x) \mid t \in D, x \in K\}$$

- D: domena; K: kodomena.

Osnovne podjele

- Svojstva nezavisne varijable klasificiraju signale kao *kontinuirane* ili *diskretne*.





- D: neprekinut i neprebrojiv skup.

$$D \subseteq R$$

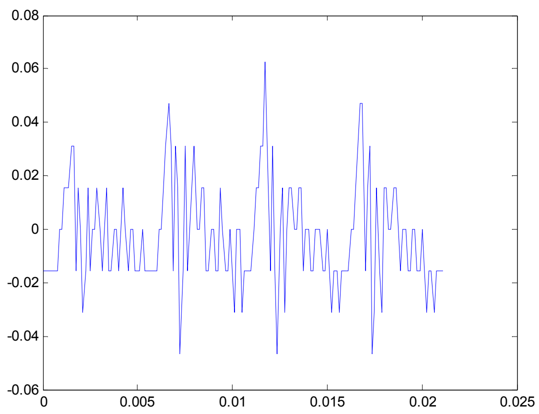
- D: prebrojiv skup.

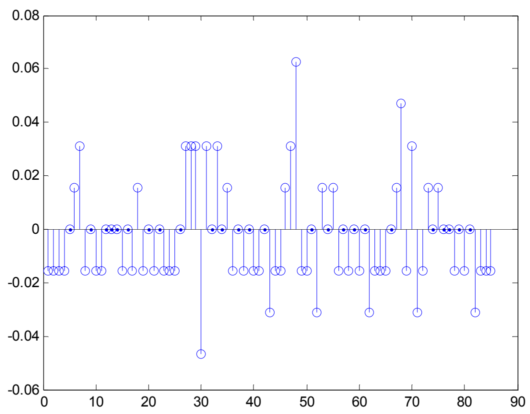
$$x = \left\{ (k, x) \,\middle|\, k \in D, x \in K \right\}$$

$$D \subseteq Z$$

Osnovne podjele

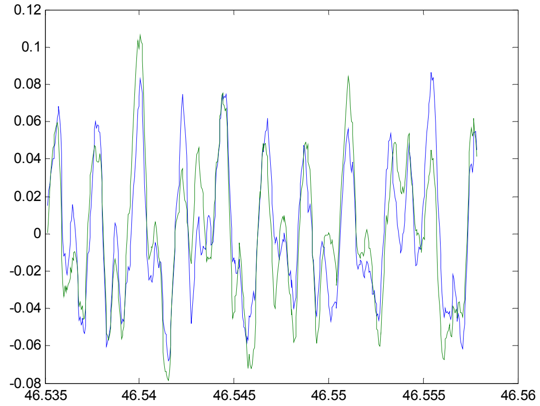
- Ako je kodomena *K* prebrojiv skup, onda govorimo o kvantiziranom signalu.
- Diskretan i kvantiziran → *digitalan*.
- Kontinuiran i nekvantiziran → *analogan*.

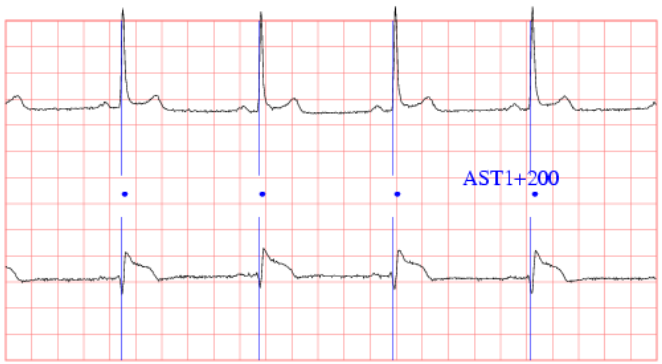




Vektorski signali

- Kada mjerenu veličinu karakterizira *skup signala*, možemo govoriti o *vektorskom signalu*.
- Stereo ili višekanalni audio, EEG, EKG, signali dobiveni redom antena ili senzora…





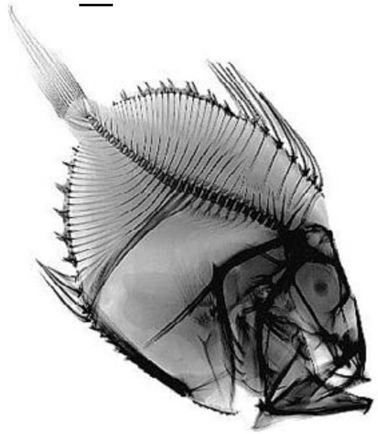
Višedimenzionalni signali

- Domena može biti dvodimenzionalan skup:

$$D \subseteq R \times R \qquad D \subseteq Z \times Z$$

- ili općenito višedimenzionalan:

$$D \subseteq R^N \qquad D \subseteq Z^N$$

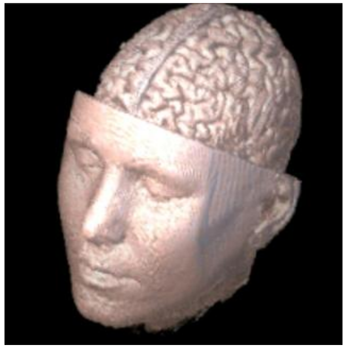


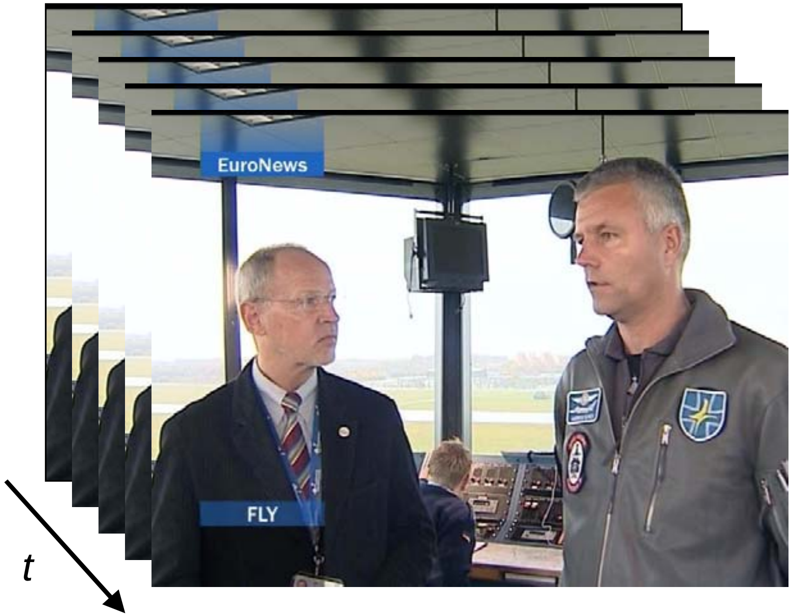
- Primjeri 2D signala.

Višedimenzionalni vektorski signali

- Domena je višedimenzionalan skup.
- Kodomena je vektor.
- Primjer: fotografija u boji (2D $\rightarrow$ RGB).

Primjeri 3D signala

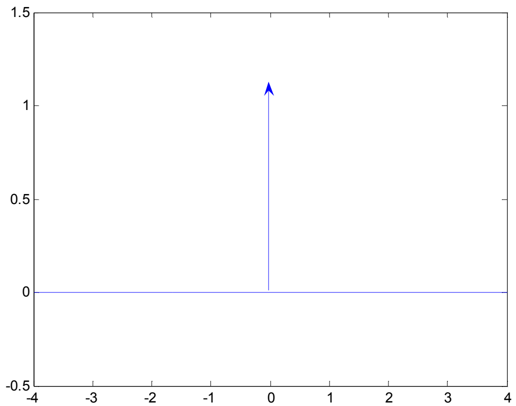


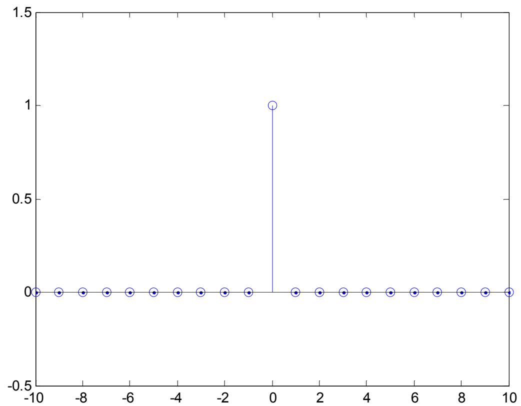


- fMRI snimka (3D), video snimka (2D + vrijeme: 2½D)

Osnovni signali

- Jedinični impuls





- Dirac delta

$$\delta(t)=0, \quad t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$

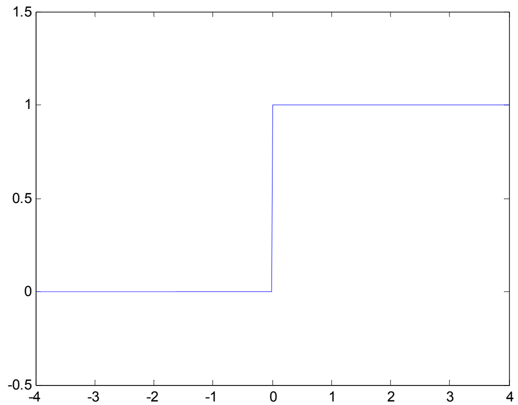
- Kroenecker delta

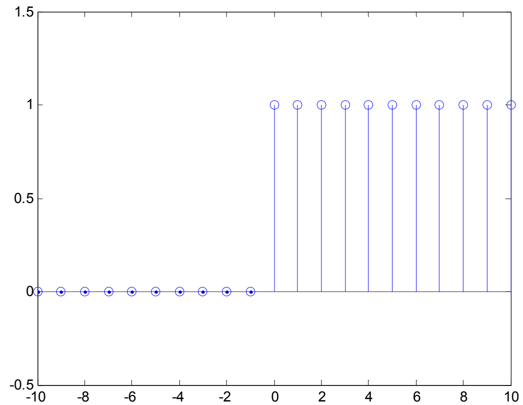
$$\delta(k)=0, \quad k \neq 0; \quad \delta(0)=1$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(k)=1; \quad \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)\,\delta(k-n)= f(n)$$

Osnovni signali

- Jedinična stepenica





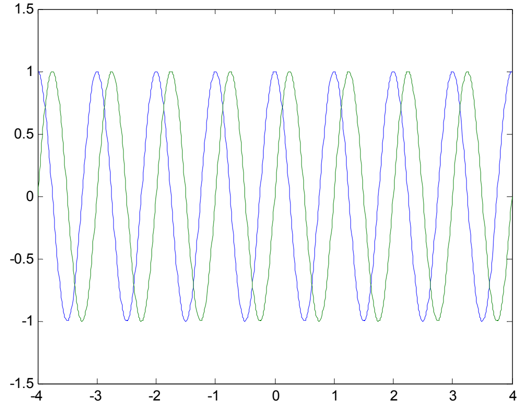
$$\mu(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1/2, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

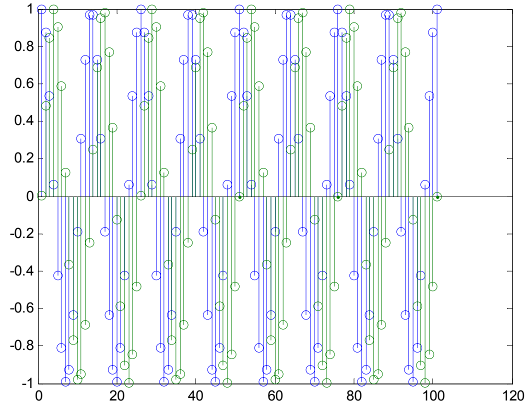
$$\mu(k)=\begin{cases}0, & k<0,\\ 1, & k\geq 0.\end{cases}$$

- Signal je kauzalan ako vrijedi $x(k)=0$ za $k<0$.
- Množenje signala s $\mu(k)$ čini ga kauzalnim.

Osnovni signali

- Kompleksna harmonijska funkcija

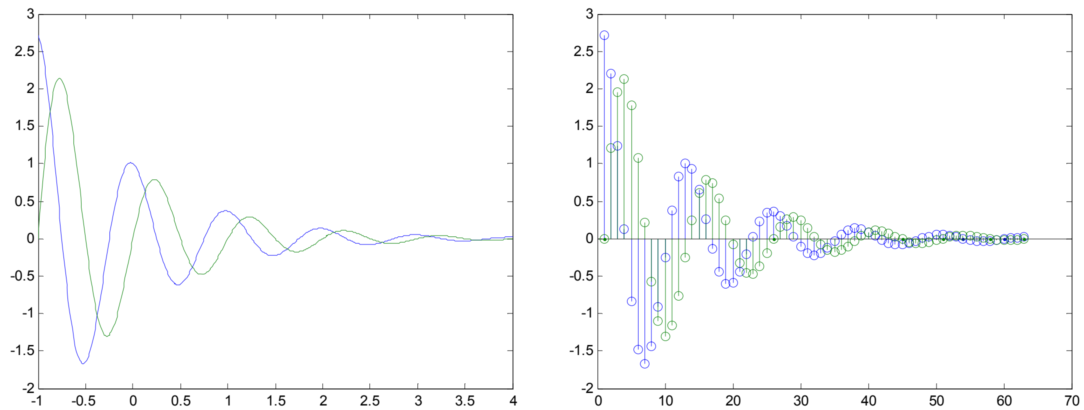




- Kontinuirana $x(t)=e^{j(\omega t+\theta)}$, diskretna $x(k)=e^{j(\Omega k+\theta)}$.
- Sinusoidalni (harmonijski) signali neophodni za frekvencijsku analizu linearnih sustava.

Osnovni signali

- Kompleksna eksponencijala



- Kontinuirana $x(t)=e^{(\sigma+j\omega)\,t}$, diskretna $x(k)=(\rho e^{j\Omega})^{k}$.
- Potrebni za potpun uvid u vladanje i svojstva linearnih sustava.

Linearni sustav

- Sustav: veza ulaznog i izlaznog signala

$$\{(u,y) \mid u \in U, y \in Y\}$$

- D: prostor (skup) ulaznih signala;
  K: prostor izlaznih signala.
- Preslikavanje određuje operator $f : u \mapsto y$
- Sustav je linearan ako za *f* vrijedi:

$$f(a \cdot u) = a \cdot f(u),$$
$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

Primjeri linearnih sustava

- Bezmemorijski: pojačalo ili atenuator $y = A \cdot u$.
- Memorijski kontinuiran: diferencijalna jednadžba

$$y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y =$$
$$b_M u^{(M)} + b_{M-1} u^{(M-1)} + \ldots + b_2 u'' + b_1 u' + b_0 u$$

- Memorijski diskretan: jednadžba diferencija

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_{N-1} y(k-N+1) + a_N y(k-N) =$$
$$b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_M u(k-M)$$

- U oba primjera memorijski linearni sustavi su ujedno i vremenski stalni (nepromjenjivi).

Impulsni odziv linearnog sustava

- Neka je h odziv mirnog linearnog sustava na jedinični impuls (*miran* $\leftrightarrow$ početni uvjeti $= 0$).

$$f : \delta \mapsto h$$

- Tada h nazivamo impulsnim odzivom sustava.
- Opći signal u možemo razložiti na jedinične impulse:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad u(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k)\,\delta(n-k)$$

Odziv linearnog sustava

- Neka je y odziv mirnog linearnog sustava na opću pobudu u: $f : u \mapsto y$

$$y(t) = f\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right] \qquad y(n) = f\left[\sum_{-\infty}^{\infty} u(k)\,\delta(n-k)\right]$$

- Kako je f linearan operator, možemo zapisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\; f[\delta(t-\tau)]\,d\tau \qquad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k)\; f[\delta(n-k)]$$

- Prepoznajemo impulsni odziv sustava:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau \qquad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k)\,h(n,k)$$

Konvolucija

- Ako je sustav vremenski stalan, pomaknuta pobuda daje isti odziv, također pomaknut:

$$f\left[\delta(t-\tau)\right]=h(t-\tau) \qquad f\left[\delta(k-n)\right]=h(k-n)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \qquad y(n)=\sum_{-\infty}^{\infty}u(k)\,h(n-k)$$

- Dobivene izraze nazivamo *konvolucijom*.
- Koristit ćemo ih vrlo često. Kraća oznaka:

$$y=u*h \quad =h*u$$

Kauzalan sustav

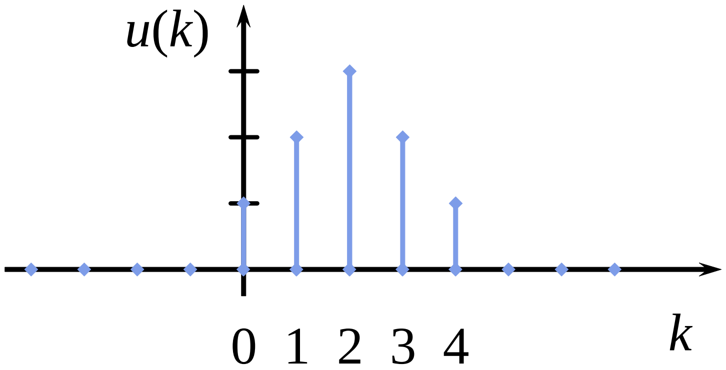
- Linearan vremenski stalan (LVS) sustav je kauzalan ako se ne odaziva prije nego što je pristigla pobuda.
- Matematički izražen uvjet kauzalnosti glasi:
- $y(t) = 0$ za $t < t_0$ ako je $x(t) = 0$ za $t < t_0$,
- Za LVS sustav slijedi: $h(t) = 0$ za $t < 0$, tj. impulsni odziv kauzalnog sustava jest kauzalan signal.
- Za kauzalne signale i sustave izrazi za konvoluciju imaju konačne granice:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)\, h(n-k)$$

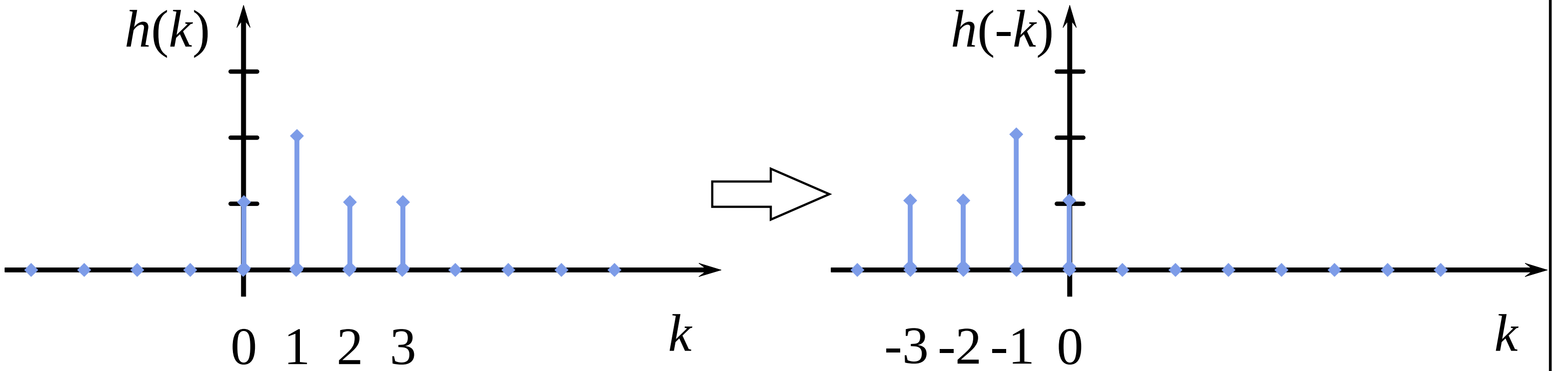
Stabilan sustav

- Sustav je stabilan ako je odziv na bilo koju ograničenu pobudu ograničen: $|x(t)| < \mathrm{M} \rightarrow |y(t)| < \mathrm{M} \cdot \mathrm{I}$ (M i I su konstante).
- Za LVS
  sustav slijedi: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$.

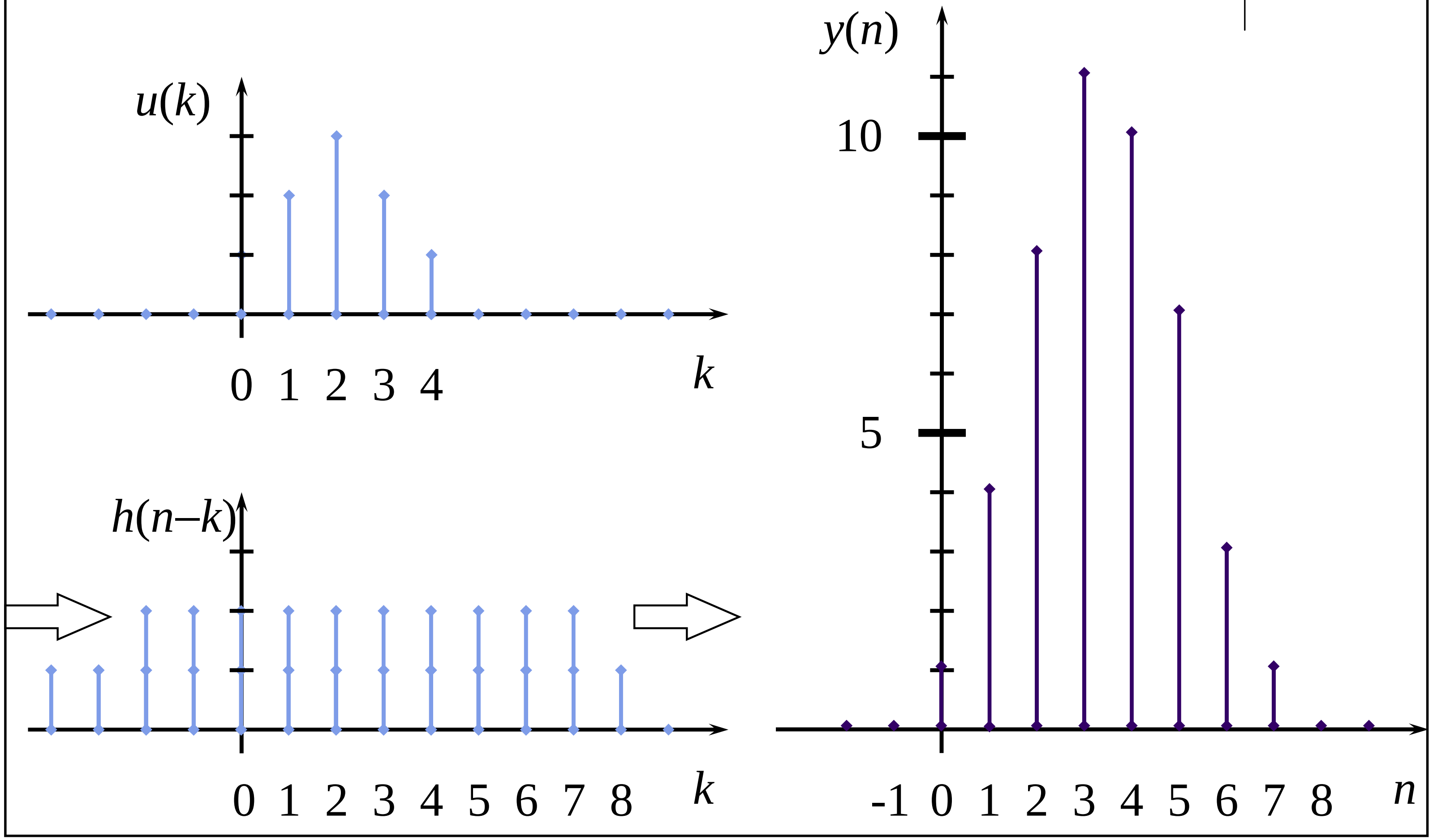
Konvolucija, primjer 1



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)h(n-k)$$



Konvolucija, primjer 1



Matrična reprezentacija konvolucije

$$
\begin{aligned}
y_0 &= h_0u_0 \\
y_1 &= h_0u_1 + h_1u_0 \\
y_2 &= h_0u_2 + h_1u_1 + h_2u_0 \\
y_3 &= h_0u_3 + h_1u_2 + h_2u_1 + h_3u_0 \\
y_4 &= h_0u_4 + h_1u_3 + h_2u_2 + h_3u_1 \\
y_5 &= h_1u_4 + h_2u_3 + h_3u_2 \\
y_6 &= h_2u_4 + h_3u_3 \\
y_7 &= h_3u_4
\end{aligned}
$$

Matrična reprezentacija konvolucije

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$$

Dekonvolucija

- Važna zadaća digitalne obrade signala je rekonstrukcija ulaznog signala iz izlaznog.
- Postupak se naziva dekonvolucija.
- Utjecaj mjerne opreme nije moguće ukloniti, ali je moguće napraviti rekonstrukciju fMRI ili CT ili UZV signala ili pak slike udaljene galaksije.
- U komunikacijama je osobito važno uklanjanje utjecaja komunikacijskog kanala – bez toga nema velikih brzina prijenosa!

Dekonvolucija

- Postupak dobivanja nepoznate pobude $u(n)$, ako je poznat odziv sustava $y(n)$.
- Izraz za konvoluciju je:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(n-k)\,h(k)$$

$$= u(n)h(0) + \sum_{k=1}^{n} u(n-k)h(k),$$

- što vodi na jednostavnu rekurzivnu formulu.

Dekonvolucija

$$u(n) = \left[y(n) - \sum_{k=1}^{n} u(n-k)h(k) \right] \frac{1}{h(0)}$$

- Dekonvolucija se koristi za uklanjanje poznatog utjecaja mjernog sustava.
- Poznat je impulsni odziv mjernog sustava.
- Za restauraciju uzorka $u(n)$ koriste se svi prethodni uzorci $u(0)$, $u(1)$, … $u(n-1)$.
- U izračunu se može javiti numerička nestabilnost.

Primjer 1, dekonvolucija

$$y(n)=\{\underline{1},4,8,11,10,7,3,1\} \qquad h(n)=\{\underline{1},2,1,1\}$$

$$u(n)=\left[y(n)-\sum_{k=1}^{n}u(n-k)h(k)\right]\frac{1}{h(0)}$$

$$u(0)=y(0)\frac{1}{h(0)} \qquad =1\frac{1}{1}=1$$

$$u(1)=[y(1)-u(0)h(1)]\frac{1}{h(0)} \qquad =[4-1\cdot 2]\frac{1}{1}=2$$

$$u(2)=[y(2)-u(1)h(1)-u(0)h(2)]\frac{1}{h(0)} \qquad =[8-2\cdot 1-1\cdot 2]\frac{1}{1}=3$$

Primjer 1, dekonvolucija

$$u(3) = \left[y(3) - u(2)h(1) - u(1)h(2) - u(0)h(3)\right]\frac{1}{h(0)}$$

$$= [11 - 3\cdot 2 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1]\cdot\frac{1}{1} = 2$$

$$u(4) = \left[y(4) - u(3)h(1) - u(2)h(2) - u(1)h(3) - u(0)h(4)\right]\frac{1}{h(0)}$$

$$= [10 - 2\cdot 2 - 3\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 0]\cdot\frac{1}{1} = 1$$

$$u(5) = [7 - 1\cdot 2 - 2\cdot 1 - 3\cdot 1 - 2\cdot 0 - 1\cdot 0]\cdot\frac{1}{1} = 0$$

$$u(n) = \ldots = 0,\; n \geq 5$$

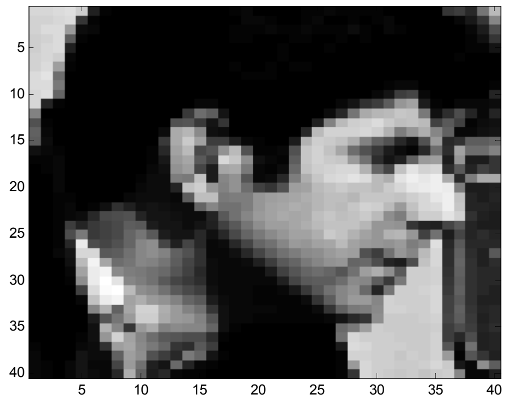
$$\Rightarrow u(n) = \{\underline{1},2,3,2,1\}$$

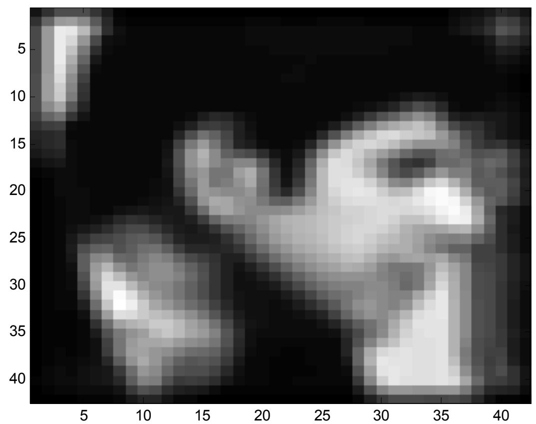
2D konvolucija

$$y(n_1,n_2)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}h(k_1,k_2)\,u(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

- Primjer: u – slika, $h=\frac{1}{9}\begin{Bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \underline{1} & 1\\ 1 & 1 & 1\end{Bmatrix}$

u





y

1D konvolucija, primjer 2

- Miran sustav ima impulsni odziv konačnog trajanja $h(n) = \{\underline{1}, 2\}$ i pobuđen je kompleksnom eksponencijalom $u(n) = z^n$. Odziv $y(n)$ mu je:

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k)\, u(n-k) \;= 1 \cdot z^n + 2 \cdot z^{n-1} \;= \left(1 + 2 \cdot z^{-1}\right) \cdot z^n$$

- također kompleksna eksponencijala z^n, samo promijenjene (kompleksne) amplitude $1+2z^{-1}$.

1D konvolucija, primjer 2

- Za opći impulsni odziv $h(n)$, te pobudu kompleksnom eksponencijalom z^n imamo:

$$y(n)=\sum_{-\infty}^{\infty} h(k)\,u(n-k)=\sum_{-\infty}^{\infty} h(k)\,z^{n-k}=\underbrace{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} h(k)\,z^{-k}\right)}_{H(z)}\cdot z^{n}$$

- Odziv je opet kompleksna eksponencijala z^n, kompleksne amplitude $H(z)$: $z^n \to H(z)\cdot z^n$.
- $\Rightarrow$ kompleksna eksponencijala je svojstvena funkcija (*eigenfunction*) operatora konvolucije.
- $H(z)$ se zove prijenosna funkcija sustava.

Z-transformacija

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z) z^{n-1} dz.$$

- Predstavljanje općeg diskretnog signala kompleksnim eksponencijalama.
- Jednostrana Z-transformacija se koristi za analizu kauzalnih signala i sustava.
- Važnija svojstva:

linearnost $\quad ax(n)+by(n)\rightarrow aX(z)+bY(z)$

konvolucija $\rightarrow$ množenje $\quad x(n)*y(n)\rightarrow X(z)\cdot Y(z)$

Osnovna tablica jednostrane Z-transformacije

$$\delta(n) \to 1$$

$$\mu(n) \to \frac{z}{z-1}$$

$$a^n \mu(n) \to \frac{z}{z-a}$$

$$na^n \mu(n) \to \frac{az}{(z-a)^n}$$

$$a^n x(n) \to X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$x(n+k) \to z^k \left[X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{-j} \right]$$

$$x(n-k) \to z^{-k} \left[X(z) + \sum_{j=-k}^{-1} x(j) z^{-j} \right]$$

$$nx(n) \to -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$n^k x(n) \to \left(-z \frac{d}{dz} \right)^k X(z).$$

uz odgovarajuća područja konvergencije (za detalje vidi: Signali i sustavi).

Primjer 1, rješenje u Z-domeni

$$u(n) = \{\underline{1},2,3,2,1\}$$
$$h(n) = \{\underline{1},2,1,1\}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X(n)\, z^{-n}$$

$$U(z) = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4}$$
$$H(z) = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}$$

- Konvolucija $\leftrightarrow$ množenje u Z-domeni.
- Množimo polinome:

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = \left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}\right)\left(1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)$$
$$= 1 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + 11z^{-3} + 10z^{-4} + 7z^{-5} + 3z^{-6} + z^{-7}$$

$$y(n) = \{\underline{1},4,8,11,10,7,3,1\}$$

Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)

- Neka je jednadžba diferencija sustava:

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=$$
$$b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_Mu(n-M)$$

- Pri izračunu $y(n)$ lijeva strana jednadžbe diferencija daje rekurzivnu formulu:

$$y(n)=-a_1y(n-1)-\ldots-a_{N-1}y(n-N+1)-a_Ny(n-N)+$$
$$b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_Mu(n-M)$$

- Izlaz u koraku n ovisi o izlazima u prethodnim koracima $n-1,\ldots, n-N$.

Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)

- U Z-domeni imamo (sustav je miran, ulaz *u* kauzalan): $x(n-k) \to z^{-k} X(z)$

$$\left(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}\right) Y(z) =$$
$$\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}\right) U(z)$$

- pa prijenosna funkcija glasi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-M+1} + a_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}$$

Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)

- U postupku nalaženja impulsnog odziva nalazimo korijene nazivnika (polove):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-M+1} + a_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - z^{-1} p_k\right)}$$

- pa razlažemo $H(z)/z$ u parcijalne razlomke.
- Radi jednostavnosti, prikazujemo slučaj različitih korijena uz $M=N$:

$$H(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{z}{z - p_k}$$

Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)

- Konačno, impulsni odziv je suma *N* kompleksnih eksponencijala:

$$h(n) = C_0\delta(n) + \sum_{k=1}^{N} C_k p_k^n \mu(n)$$

- Polovi p_k određuju svaku komponentu odziva $(p_k)^n=(\rho_k)^n e^{j\Omega_k n}$.
- Modul $\rho_k = |p_k|$ određuje radi li se o prigušenoj $(\rho_k<1)$ ili raspirujućoj eksponencijali $(\rho_k>1)$.

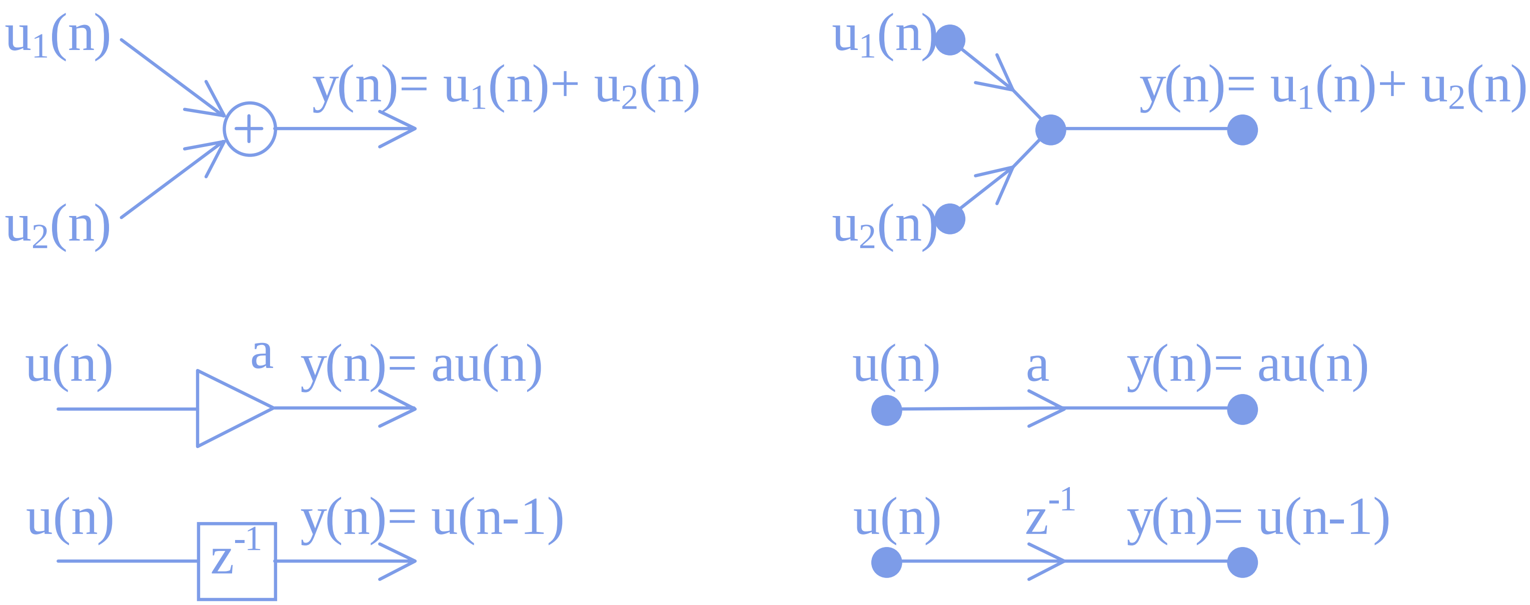
Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k p_k^n$$

- $\Rightarrow$ diskretan, linearan i vremenski stalan (LVS) sustav je stabilan ako su mu svi polovi unutar jedinične kružnice.
- Eksponencijale se raspiruju ili trnu, brže ili sporije; očigledno radi se o sustavu s beskonačnim impulsnim odzivom (*eng. IIR = Infinite Impulse Response*).
- Alternativni naziv: rekurzivni sustav.

Realizacija IIR sustava

- Pojednostavljeno crtanje blok dijagrama: zbrajalo, množilo, element za kašnjenje.



Realizacija IIR sustava

$$\mathrm{H}(z) = \frac{\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}} = \mathrm{H}_1(z) \cdot \mathrm{H}_2(z)$$

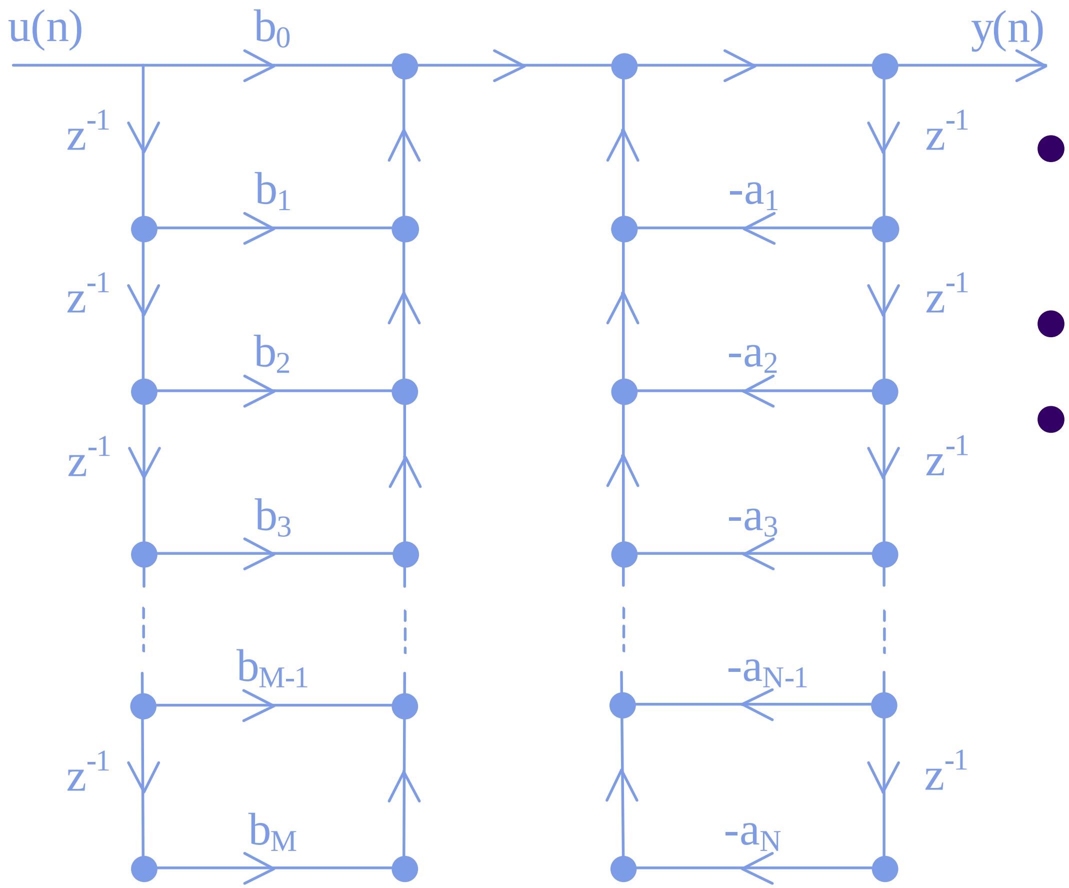
- nule od H(z):

$$\mathrm{H}_1(z) = \sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}$$

- polovi od H(z):

$$\mathrm{H}_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}}$$

Direktna I realizacija IIR filtra



- M+N+1 množenja
- M+N zbrajanja
- M+N memorijskih lokacija

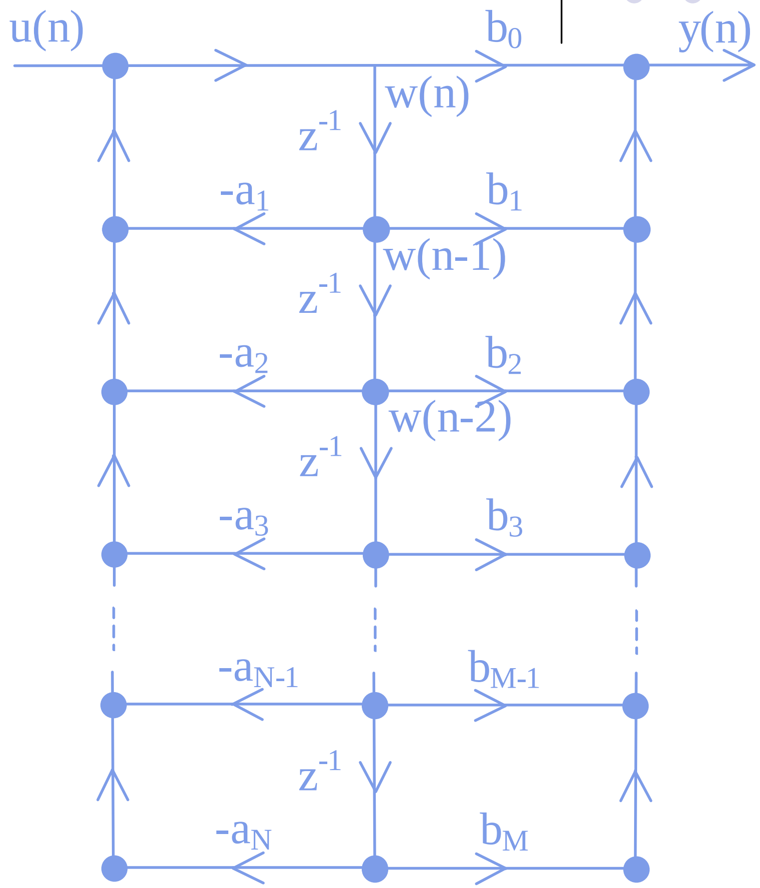
Direktna II realizacija IIR filtra

- kompaktnija struktura jer vrijedi:

$$w(n) = -\sum_{m=1}^{N} a_m w(n-m) + u(n)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m w(n-m)$$

- M+N+1 množenja
- M+N zbrajanja
- max(M, N) memorijskih lokacija



IIR sustavi sa samim polovima (*all-pole*)

- Neka je jednadžba diferencija sustava:

$$y(n)+a_1 y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_N y(n-N)=u(n)$$

- Za izračun $y(n)$ imamo rekurziju:

$$y(n)=-a_1 y(n-1)-\ldots-a_{N-1}y(n-N+1)-a_N y(n-N)+u(n)$$

- Izlaz u koraku n ovisi o izlazima u prethodnim koracima.
- Za $u(n) = \delta(n)$ i $n > 0$ jednadžba postaje homogena, s rješenjem oblika:

$$h(n)=\sum_{k=1}^{N} C_k p_k^n \quad \text{(slučaj različitih korijena } p_k\text{)}$$

- Odziv je beskonačnog trajanja.

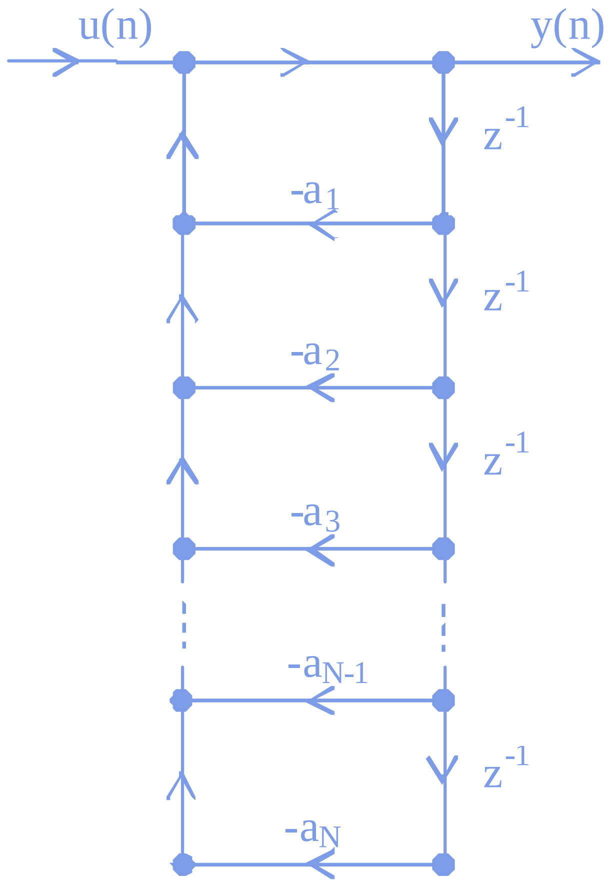
IIR sustavi sa samim polovima (*all-pole*)

- Prijenosna funkcija ima samo nazivnik:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_{N-1}z^{-N+1}+a_Nz^{-N}}$$

- Sustav nema nula (korijena brojnika), već samo polove (korijene nazivnika).
- Naravno, nedostatak brojnika predstavlja ograničenje u modeliranju realnih sustava.
- Daje dovoljno dobar model npr. prediktora govornog signala, a i mnogih drugih sustava.

Direktna realizacija, all-pole



- N množenja
- N zbrajanja
- N memorijskih lokacija

Dekonvolucija u Z-domeni

- U Z-domeni dekonvoluciju možemo promatrati kao primjenu inverzne funkcije.
- Općenito:

$$\mathrm{H}(z) = \frac{\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}} \qquad \mathrm{G(z)} = \mathrm{H}^{-1}(z) = \frac{1 + \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}}$$

- Primjena $G(z)$ na signalu *Y* rekonstruira ulazni signal *U*:

$$\mathrm{U(z)} = \mathrm{G(z)} \cdot \mathrm{Y(z)} \qquad = \mathrm{H}^{-1}(z) \cdot \underbrace{\mathrm{H}(z) \cdot \mathrm{U}(z)}_{Y(z)} = \mathrm{U}(z)$$

Dekonvolucija u Z-domeni

- Polovi sustava $H(z)$ su postale nule $G(z)$, a nule sustava $H(z)$ su postali polovi $G(z)$.
- Nemamo jamstva za stabilnost inverznog (dekonvolucijskog) sustava!

$$\mathrm{G(z)} = \frac{1 + \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} a_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^{\mathrm{M}} b_m z^{-m}}$$

Dekonvolucija

$$u(n)=\left[y(n)-\sum_{k=1}^{n}u(n-k)h(k)\right]\frac{1}{h(0)}$$

- Otprije poznatu rekurzivnu formulu možemo promatrati kao korak-po-korak rješenje diferencijskog sustava:

$$h_0u(n)+h_1u(n-1)+\ldots+h_{N-1}y(n-N+1)+h_Nu(n-N)=y(n)$$

- uz pretpostavku da je impulsni odziv originalnog sustava konačnog trajanja $N+1$.
- Inverzni sustav je all-pole, a stabilnost rješenja ovisi o poziciji polova!

Dekonvolucija, primjer 1

- U našem primjeru: $h(n) = \{\underline{1}, 2, 1, 1\}$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$G(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}$$

- Polovi su:
  - -1.7549
  - $-0.1226 + \mathrm{j}\ 0.7449$
  - $-0.1226 - \mathrm{j}\ 0.7449$
- Dekonvolucijski sustav je nestabilan!
- Mi smo ipak rekonstruirali $u(n)$, ali uz aritmetiku beskonačne točnosti, bez mjernog šuma u $y(n)$.

Dekonvolucija *all-pole* sustava

- Ako polazni sustav ima samo polove, onda inverzni sustav ima samo nule, a nema nazivnik:

$$G(z) = 1 + \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}$$

- Takav sustav ima konačan impulsni odziv i uvijek je stabilan.
- Aproksimativno modeliranje stvarnog sustava *all-pole* sustavom ima prednost jednostavne realizacije dekonvolucije.

Dekonvolucija općeg sustava, nastavak

- Kada će dekonvolucija općeg sustava rezultirati stabilnim $G(z)$?

$$G(z) = \frac{1 + \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}$$

- Kako nule $H(z)$ postaju polovi $G(z)$, nužno je da budu unutar jedinične kružnice.
- Sustav s nulama unutar jedinične kružnice naziva se sustav s minimalnom fazom.

Sustavi s konačnim impulsnim odzivom (FIR)

- Neka je jednadžba diferencija sustava:

$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_M u(n-M)$$

- Samo desna stranu jednadžbe diferencija.
- Pri izračunu $y(n)$ koristi se ulaz *u* koraku n te u prethodnim koracima $n-1, \ldots, n-M$.
- Kako odziv ne ovisi o prethodnim izlazima, ovakvi sustavi nazivaju se i nerekurzivnim.
- U *Z*-domeni (uz kauzalnu pobudu) imamo:

$$Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_M z^{n-M}\right) U(z)$$

Sustavi s konačnim impulsnim odzivom (FIR)

- Prijenosna funkcija nema nazivnik:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_M z^{n-M}$$

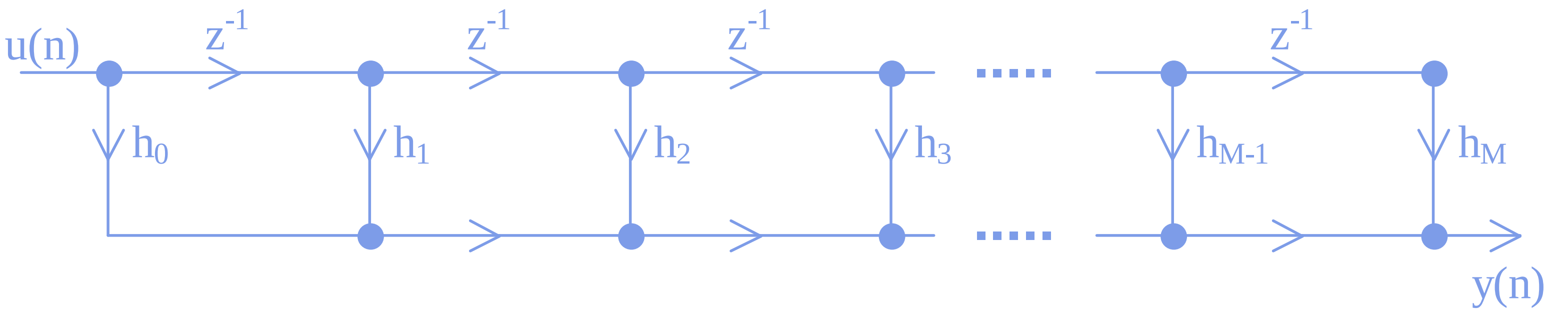
- Impulsni odziv glasi:

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \ldots + b_M \delta(n-M)$$

- i očigledno je trajanja $M+1$.
- Sustav je s konačnim impulsnim odzivom (*eng. Finite Impulse Response*).
- Sustav ima samo nule (*eng. all-zero*) i uvijek je stabilan.

Direktna realizacija FIR filtra

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h_m u(n-m)$$



- M+1 množenja,
- M memorijskih lokacija,
- M zbrajanja.

Frekvencijska karakteristika diskretnih LVS sustava

- Za opći impulsni odziv $h(n)$, te pobudu kompleksnom harmonijskom funkcijom $e^{j\omega n}$ imamo:

$$y(n)=\sum_{-\infty}^{\infty}h(k)u(n-k)=\sum_{-\infty}^{\infty}h(k)e^{j\omega(n-k)}=\underbrace{\left(\sum_{-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega k}\right)}_{H(e^{j\omega})}\cdot e^{j\omega n}$$

- Odziv je opet harmonijska funkcija $e^{j\omega n}$, kompleksne amplitude $H(e^{j\omega})$: $e^{j\omega n}\rightarrow H(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}$.
- $\Rightarrow$ ovo je samo specijalni slučaj otprije poznate karakteristične funkcije z^n, uz izbor $z=e^{j\omega}$.

Frekvencijska karakteristika diskretnih LVS sustava

- Odnos kompleksnih amplituda odziva i pobude, kad je pobuda harmonijska funkcija $e^{j\omega n}$ nazivamo frekvencijska karakteristika diskretnog sustava.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-j\omega k}$$

- Izraz je sličan izrazu za Z-transformaciju, ali suma je dvostrana, uz $z=e^{j\omega}$.
- Rezultat je kompleksna funkcija frekvencije ω.

Amplitudna i fazna karakteristika

- Kompleksnu funkciju možemo zapisati i u polarnom obliku:

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

- Modul nazivamo amplitudnom, a argument faznom frekvencijskom karakteristikom.
- Amplitudna karakteristika govori o odnosu amplituda odziva i harmonijske pobude za svaku frekvenciju.
- Faza nosi informaciju o vremenskim odnosima.

AF i FF karakteristika, primjer 1

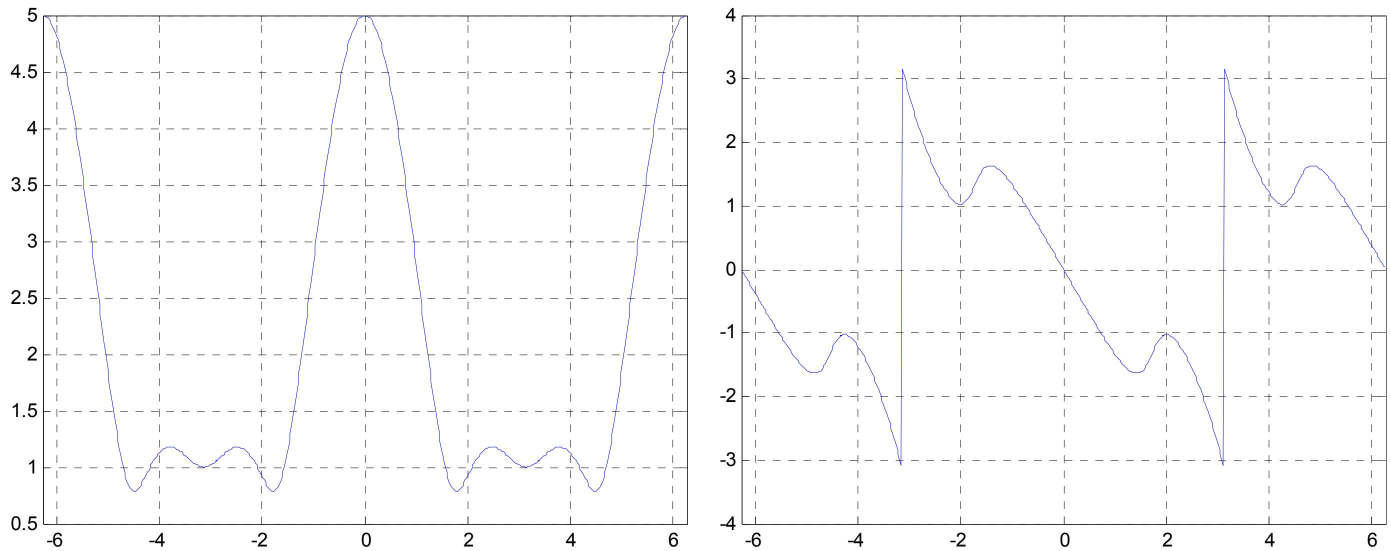
$$h(n) = \{\underline{1},2,1,1\} \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 \cdot e^{-j\omega 0} + 2 \cdot e^{-j\omega 1} + 1 \cdot e^{-j\omega 2} + 1 \cdot e^{-j\omega 3}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2 \cdot \cos\omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega \\ - j\left(2 \cdot \sin\omega + \sin 2\omega + \sin 3\omega\right)$$

- Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava sastoji se od kosinusoida i sinusoida i uvijek je 2π periodična funkcija.
- Realni dio je parna, a imaginarni dio neparna funkcija frekvencije.

AF i FF karakteristika, primjer 1



- Lijevo modul (AFK), desno argument (FFK).
- Prikaz za kutne frekvencije ω u rasponu od 2π do 2π (dvije periode).

Utjecaj kašnjenja na AFK i FFK

$$h_1(n) = \{\underline{0},1,2,1,1\}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = 0\cdot e^{-j\omega 0} + 1\cdot e^{-j\omega 1} + 2\cdot e^{-j\omega 2} + 1\cdot e^{-j\omega 3} + 1\cdot e^{-j\omega 4}$$

$$= \left(1\cdot e^{-j\omega 0} + 2\cdot e^{-j\omega 1} + 1\cdot e^{-j\omega 2} + 1\cdot e^{-j\omega 3}\right)e^{-j\omega 1}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\cdot e^{-j\omega}$$

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{j\omega})\right| \qquad \angle H_1(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) - \omega$$

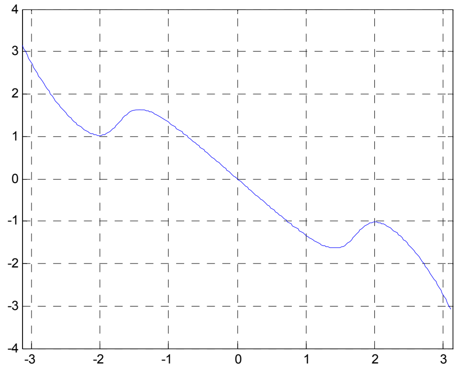
- Kašnjenje ne utječe na amplitudu.
- Kašnjenje za 1 odgovara uvećanju faze za $-\omega$.
- Općenito, pomak signala daje aditivni fazni član koji je linearna funkcija frekvencije:

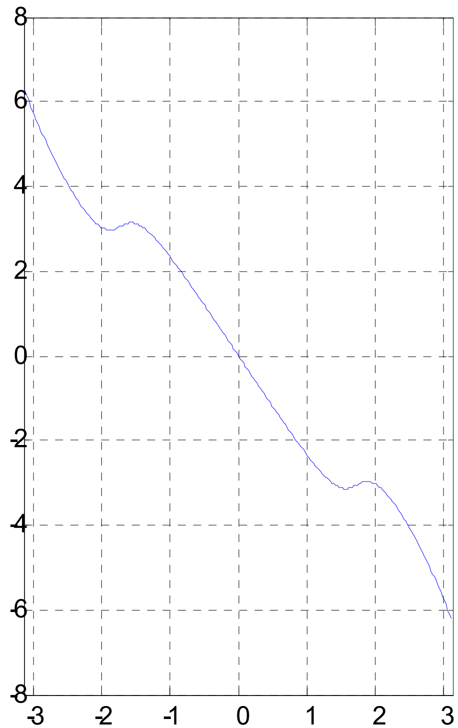
$$h(n-\Delta) \qquad \Leftrightarrow H(e^{j\omega})\cdot e^{-j\Delta\omega} \qquad \angle H(e^{j\omega}) - \Delta\omega$$

Fazna karakteristika, pomak 1

$$h(n) = \{\underline{1},2,1,1\}$$

$$h(n) = \{\underline{0},1,2,1,1\}$$





Grupno kašnjenje

$\theta(\omega) = \angle H(e^{j\omega})$ faza

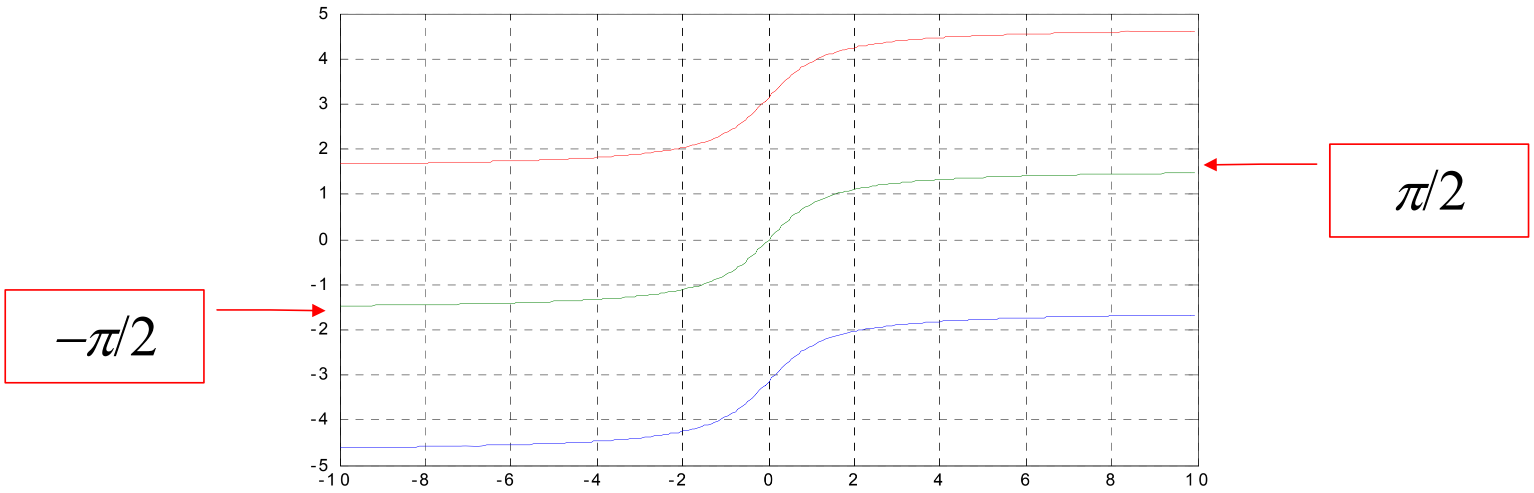
$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ “grupno kašnjenje”

- Grupno kašnjenje je negativna derivacija fazno frekvencijske karakteristike.
- Sustavi s nejednakim grupnim kašnjenjem (linearno) izobličavaju signal.
- Poželjno svojstvo sustava je konstantno grupno kašnjenje $\rightarrow$ faza mora biti linearna funkcija frekvencije.

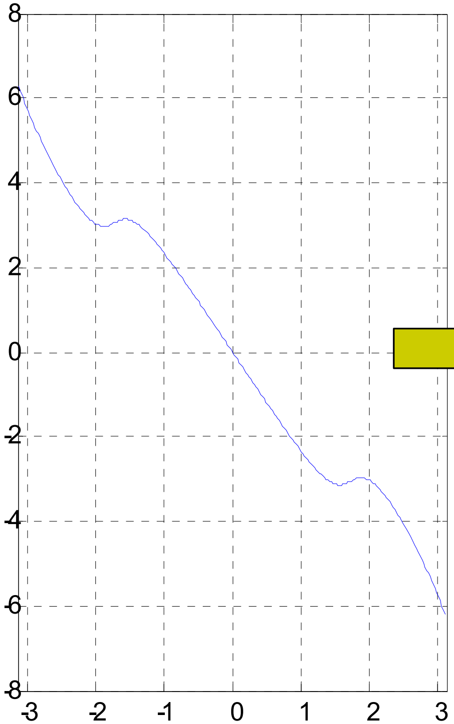
Premotavanje fazne karakteristike

$$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})}\right)$$

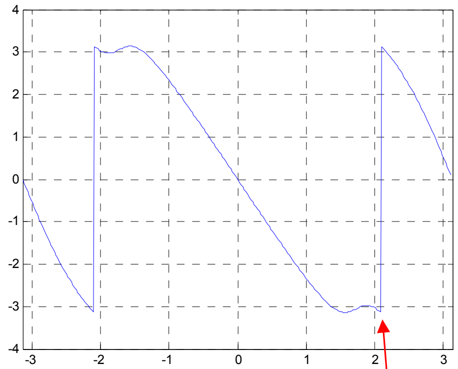
- Arkus tangens je višeznačna funkcija.
- Redovito dobivamo rješenje od $-\pi/2$ do $\pi/2$, a uključimo li predznake brojnika i nazivnika od $-\pi$ do π.



Premotavanje fazne karakteristike



- Premotana faza zbog ograničenja od $-\pi$ do π.



mjesto premotavanja

- Ideja: derivacija *arctg* nije višeznačna!

Izračun grupnog kašnjenja

$$\tau\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})}\right)$$

(kraće zapisano)

$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right)^2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right) = -\frac{\operatorname{Re}^2}{\operatorname{Re}^2+\operatorname{Im}^2}\left(\frac{\operatorname{Im}'\operatorname{Re}-\operatorname{Im}\operatorname{Re}'}{\operatorname{Re}^2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{Im}\operatorname{Re}'-\operatorname{Im}'\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}^2+\operatorname{Re}^2}$$

(zbog preglednosti svuda izostavljeno $H(e^{j\omega})$)

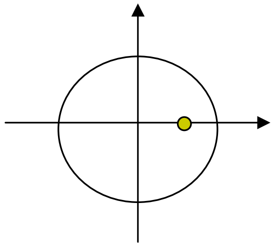
- Izraz daje grupno kašnjenje, a integral grupnog kašnjenja je nepremotana faza:

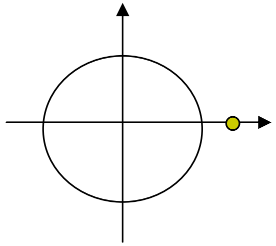
$$\theta\left(e^{j\omega}\right) = -\int_0^{\omega}\tau\left(e^{jw}\right)dw + \theta_0$$

- Za realne *h*: $\theta_0 = 0$ (sinusi).

FIR sustavi s recipročnim nulama

- $H_1(z) = 1 - \rho z^{-1}$ $\qquad$ $H_2(z) = \rho - z^{-1}$





$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \rho e^{-j\omega} \qquad H_2(e^{j\omega}) = \rho - e^{-j\omega}$$

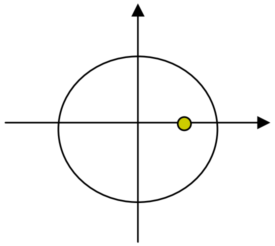
$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \rho\cos\omega + j\rho\sin\omega \qquad H_2(e^{j\omega}) = \rho - \cos\omega + j\sin\omega$$

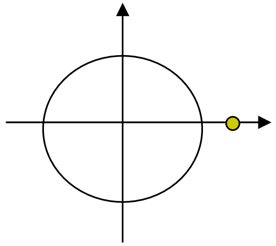
$$\left|H_1(e^{j\omega})\right| = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho^2\cos\omega} \qquad \left|H_2(e^{j\omega})\right| = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho^2\cos\omega}$$

- Sustavi s recipročnim nulama imaju iste amplitudno frekvencijske karakteristike!

FIR sustavi s recipročnim nulama

- $H_1(z) = 1 - \rho z^{-1}$ $\qquad$ $H_2(z) = \rho - z^{-1}$





$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \rho\cos\omega + j\rho\sin\omega \qquad H_2(e^{j\omega}) = \rho - \cos\omega + j\sin\omega$$

...

$$\tau_1(e^{j\omega}) = \frac{\rho(\rho - \cos\omega)}{1 + \rho^2 - 2\rho^2\cos\omega}$$

...

$$\tau_2(e^{j\omega}) = \frac{\rho(\rho^{-1} - \cos\omega)}{1 + \rho^2 - 2\rho^2\cos\omega}$$

$$\rho < 1 \quad \rightarrow \quad \tau_1 < \tau_2$$

- Sustav s nulama unutar jedinične kružnice ima manje grupno kašnjenje (“minimalnu fazu”)!

Dekonvolucija općeg sustava, nastavak 2.

- Neka je $H(z)$ opći IIR sustav.
- Sve nule izvan jedinične kružnice zamijenimo recipročnima: novi sustav $H_{min}(z)$ ima jednaku amplitudno-frekvencijsku karakteristiku kao polazni, ali je minimalne faze
(i manjeg grupnog kašnjenja).
- Dekonvolucija inverznim sustavom $G_m(z)=H^{-1}{}_{min}(z)$ je stabilna, ali uz faznu pogrešku.
- Fazna pogreška često nije važna u obradi audio signala!

Konstantno grupno kašnjenje

- Pokazuje se da sustav s konstantnim grupnim kašnjenjem (linearnom fazom) ima simetričan ili antisimetričan impulsni odziv.
- Lako je konstruirati FIR sustav sa željenim svojstvima simetrije.
- Razlikujemo 4 moguća rješenja.

Tipovi FIR-filtara

–> Tip 1 - simetričan impulsni odziv,
- neparan broj uzoraka impulsnog odziva.

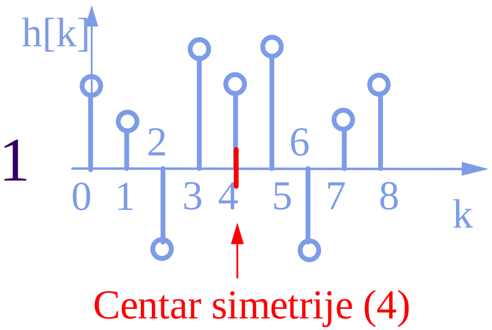
–> Tip 2 - simetričan impulsni odziv,
- paran broj uzoraka impulsnog odziva.

–> Tip 3 - antisimetričan impulsni odziv,
- neparan broj uzoraka impulsnog odziva.

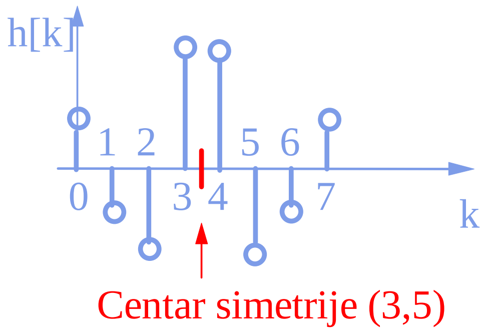
–> Tip 4 - antisimetričan impulsni odziv,
- paran broj uzoraka impulsnog odziva.

Tipovi FIR-filtara ...

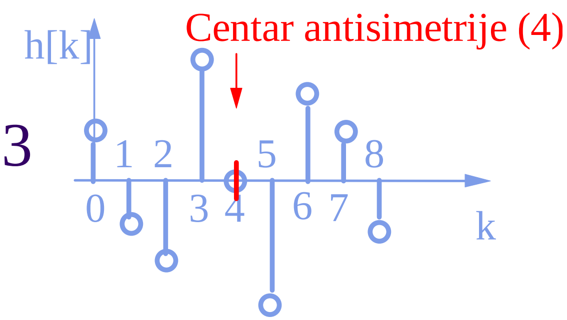
Tip 1



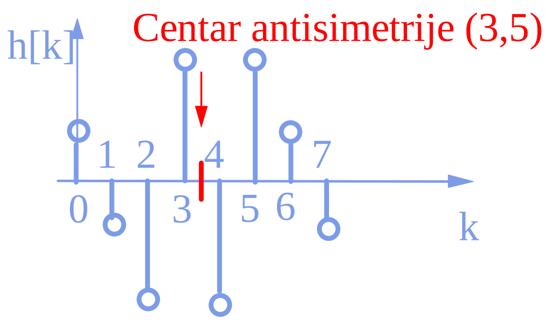
Tip 2



Tip 3

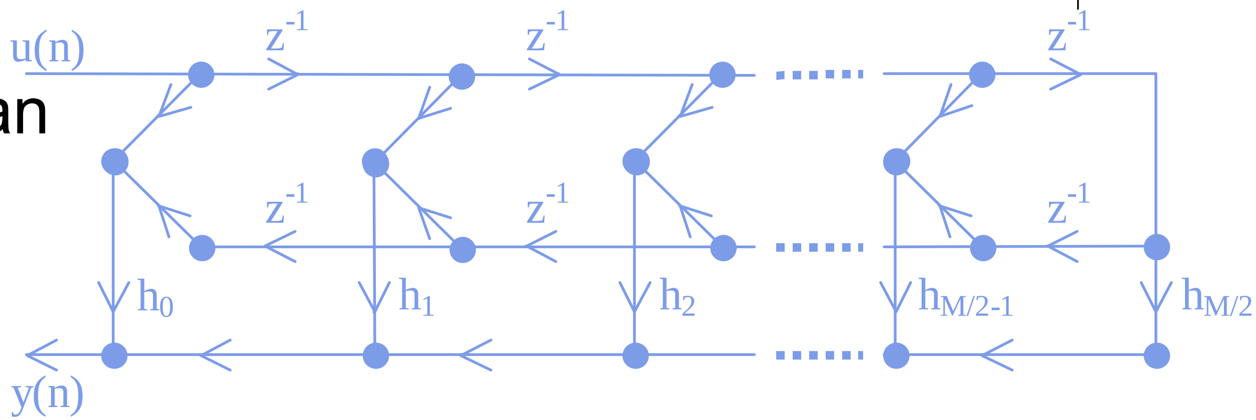


Tip 4

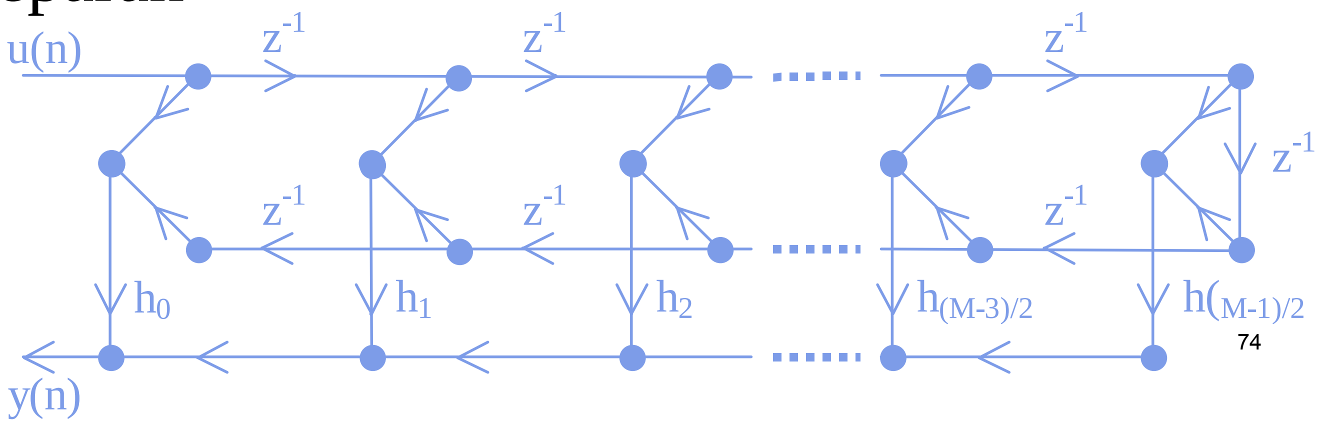


Strukture za FIR filtre linearne faze

- M paran



- M neparan



74

Svojstva FIR filtara

- Aproksimativno modeliranje stvarnog sustava FIR sustavom ima prednost jednostavne realizacije.
- Sustav je uvijek stabilan.
- Moguće je konstruirati kauzalne filtre konačnog reda s linearnom fazom (simetričnim impulsnim odzivom, konstantnim grupnim kašnjenjem, bez faznog izobličenja) a sve uz upola manje množila.

Teme predavanja

- Reprezentacija signala i sustava
- Osnovne podjele i osnovni signali
- Linearni sustavi, impulsni odziv i konvolucija
- Dekonvolucija
- Z transformacija, prijenosna funkcija, frekvencijska karakteristika
- Sustavi s beskonačnim (IIR) i konačnim (FIR) impulsnim odzivom
- Grupno kašnjenje, linearna faza
- Tipovi FIR filtara s linearnom fazom