Pitanja za završni ispit iz Obradbe informacija

Dizajn sustava

(str. 4-7)/3 znači stranice 4-7 u predavanjima
(6 slajdova), stranica 3 u ovom dokumentu.

By blackjade

1. Periodična i cirkularna konvolucija, matrična reprezentacija

Konvolucija periodičnih signala

Imamo dva signala, $u_N[n]$, $\mathrm{h}_N[n]$, OBA su perioda N. Želimo ih konvoluirati.
Kako su oba signala **periodična**, **i istog perioda**, koristimo periodičnu konvoluciju.
Periodična konvolucija je konvolucija po PERIODU, koji je, naravno, N
(vidi granice sume u formuli) .

$$y_{\mathbf{N}}[n]=\sum_{j=0}^{N-1} u_{\mathbf{N}}[j]\, h_{\mathbf{N}}[n-j]$$ **PERIODIČNA KONVOLUCIJA**

Rezultat je periodičan, perioda N.

JEDAN OD PERIODA periodične konvolucije **je CIRKULARNA** KONVOLUCIJA.

Cirkularna se dobije iz periodične. Uzmimo za period N=4. Onda je

$u_N[0]=u_N[4], u_N[-1]=u_N[3], u_N[n]=u_N[n+4]$, a formula za konvoluciju postaje

$$y[n]=\sum_{j=0}^{N-1} u\ [j]\,h\ [\mathrm{mod}_N(n-j)]$$ **CIRKULARNA KONVOLUCIJA**

Primijetite da se formule za periodičnu i cirkularnu **razlikuju u notaciji** (y,u i h nemaju subskript N što je za očekivati i naglašava da rezultat NIJE periodičan [već JEDNA PERIODA perioda dužine N.]) **i mod** (jer vrijedi 0=4, -1=3,n=n+4, a to je karakteristika modula).

Ista stvar, zapisana matrično je

$$y_n=\sum_{j=0}^{N-1} u_j \cdot h_{\mathrm{mod}_N(n-j)}$$

$$y_N=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=H_{NN}\cdot u_N$$

Ovo je važno jer znači da operaciju cirkularne konvolucije možemo jednostavno implementirati programski, množenjem matrica. Množeći ulaz jedne periode , s matricom

$$H_{NN}=\begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

(ona je dimenzija N*N. N je 4 samo u ovom slučaju.)

Lako dobivamo izlaz. Matrica H_{NN} je **CIRKULANTNA**.

Pogledajte prvi **stupac** (ista stvar vrijedi i za retke), zamislite da ga gurate **dolje**, znači h_0 je s prvog pao na drugo mjesto, h_1 s drugog na treće, h_2 sa trećeg na četvrto. A h_3? Pa, elementi na krajnjim pozicijama se **premotavaju na rubovima**. Kao u starim videoigricama, kad dođeš do kraja ekrana, pojaviš se na drugoj strani. Znači, h_3 je s četvrtog prešao na prvo.

Primijenimo li iste principe na stupac dva, dobivamo stupac tri. Na stupac tri, dobivamo stupac četiri. To je cirkulantna matrica.

One su fora, imaju **„mnoga dobra svojstva“** jedno od kojih je i **„posebna veza s DFT“**.

2. Brza konvolucija

Brza cirkularna konvolucija

Znamo što je cirkularna konvolucija i nismo impresionirani. Kako god gledali, **Direktna primjena** ima **kvadratnu složenost** (N^2 množenja, $N(N-1)$ zbrajanja).

Sad, FFT ima složenost $\mathrm{N} \cdot \log_2 \mathrm{N}$, što je povoljnije od kvadratne. Ideja je uzeti signale **u** i **h,** svakog transformirati FFT-om (**2 *** $\mathrm{N} \cdot \log_2 \mathrm{N}$ operacija) i transformirane signale pomnožiti (**množenje u frekvencijskoj je konvolucija u vremenskoj domeni**). Rezultat još treba provući kroz IFFT ($\mathrm{N} \cdot \log_2 \mathrm{N}$ operacija) i dobili smo rezultat konvolucije.

Poanta je da je **ukupna složenost** na ovaj način (prebaciš u frekvencijsku, pomnožiš, vratiš u vremensku) **puno manja** od N^2 (direktna primjena), što je važno za velike N.

Ukoliko se impulsni odziv sustav ne mijenja H=FFT(h) računamo samo jednom (jer je rezultat uvijek jednak).

Brže je, naravno, bolje ;) .

Dobro, no **cirkularna vrijedi za periodične signale i sustave sa periodičnim odzivom**, što ako (kao što je najčešće slučaj) imamo signal konačnog trajanja sa konačnim odzivom?

Za takve signale već znamo da vrijedi obična konvolucija. Pitanje se svodi na **„Kada su cirkularna i linearna** (obična) **konvolucija jednake? „**

Odgovor je **kada u i h nadopunimo nulama (N-1 nule minimalno).**

Linearna i cirkularna razlikuju se zbog **mod** u formulama(**premotavanje**),
kada dodamo nule mod nema efekta i jedna se formula svodi na drugu.

To je poželjno jer znači da gore navedeno (prebaci,pomnoži,vrati) uz nadopunjavanje nulama vrijedi i generalno.

Volimo li cjepidlačiti, napomenuti ćemo da je **nedostatak** te metode da se **rezultat „izračunava u bloku, a ne korak po korak“**

3. Projektiranje i primjena filtara u frekvencijskoj domeni

Želimo konstruirati filter. Kako ?

Znamo što će filter raditi(u frekvencijskoj domeni).
1. Specificiramo to uzorcima u frekvencijskoj domeni (H) (vektor u matlabu, npr.).
2. Nadopunimo sa N-1 nula za N periodičan signal.
3. Napravimo IFFT na tome (h=IFFT(H)).
4. Provjerimo odgovara li nam dobiveno.

Korak **4.** je važan jer **h ne mora biti realan, kauzalan pa ni stabilan** (i Murphy kaže da će biti nestabilan, ne-kauzalni i nerealni ;)

To očitamo sa grafa (npr. ako je h **simetričan oko nule, nije kauzalan**, ako se h sastoji od **više od jednog „grafa“**, gledate u sin i cos komponentu, i **h je nerealan** [kompleksan], h koji **nije ograničen** [npr. izgleda kao eksponencijalna funkcija] **nije stabilan**)

Super, imamo filter. Koristimo ga ovako:

1. Nadopunimo u,h(h smo dobili gornjim postupkom) sa N-1 nula za rezultat sa N uzoraka (jer ćemo cirkularnu konvoluciju obaviti preko FFT-a.)
2. Y=U*H.
3. y=IFFT(Y).
4. Zbog nadopunjavanja u,h nulama y ima „višak nula.“ To uklanjamo.

Davež sa vrha stranice podsjetio bi nas da se rezultat „izračunava u bloku, a ne korak po korak“ što nam često nije dovoljno.

4. Metoda fiksnih vremenskih otvora

Dizajn FIR filtara metodom vremenskih otvora

U koraku 4. korištenja filtra kažem „to uklanjamo.“ Kako ?

Tehnički, neželjeni efekt „viška nula“ rješavamo množenjem s filtrom „za čišćenje“(fiksni vremenski otvor) u frekvencijskoj domeni (time primjenjujući filtar). O filtru koji koristimo, ovisi rezultat, što je ujedno i povod proučavanja.

Usput, ako višak NE uklonimo, dobivamo beskonačan impulsni odziv.

Tipovi fiksnih vremenskih otvora:

Pravokutni

$$w[k] = 1,\ -\frac{N}{2} \le k \le \frac{N}{2}$$

Bartlettov (trokutni)

$$w[k] = 1 - \frac{|k|}{N/2},\ -\frac{N}{2} \le k \le \frac{N}{2}$$

Hannov (kosinusni)

$$w[k] = 0.5 + 0.5\cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N+1}),\ -\frac{N}{2} \le k \le \frac{N}{2}$$

Hammingov

$$w[k] = 0.54 + 0.46\cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N+1}),\ -\frac{N}{2} \le k \le \frac{N}{2}$$

Blackmanov

$$w[k] = 0.42 + 0.5\cos(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N+1}) + 0.08\cos(\frac{4 \cdot \pi \cdot k}{N+1}),\ -\frac{N}{2} \le k \le \frac{N}{2}$$

Uz fiksne, postoje i promjenjivi vremenski otvori. Kod njih je moguće fino podesiti širinu glavne latice i gušenje bočnih.

Kako vremenske otvore koristimo konvoluiranjem s njima, utjecaj im je podjednak u svim frekvencijskim područjima, što često nije poželjno.

Ukoliko nam treba FIR filtar sa konstantnim grupnim kašnjenjem, možemo krenuti od toga (treba nam **FIR** filtar).

Recimo, tražimo FIR filtar simetričnog odziva i neparnog broja uzoraka.

$h[k] = h[N-k],\ 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}$ (jer je **simetričan**)

N=8

$$H(z) = h[0] + h[1]\cdot z^{-1} + h[2]\cdot z^{-2} + h[3]\cdot z^{-3} + h[4]\cdot z^{-4} + h[5]\cdot z^{-5} + h[6]\cdot z^{-6} + h[7]\cdot z^{-7} + h[8]\cdot z^{-8}$$

Iskoristimo simetričnost.

$$H(z) = h[0]\cdot(1+z^{-8}) + h[1]\cdot(z^{-1}+z^{-7}) + h[2]\cdot(z^{-2}+z^{-6}) + h[3]\cdot(z^{-3}+z^{-5}) + h[4]\cdot z^{-4}$$

Sredimo izlučivanjem z^{-4}.

Frekvencijska karakteristika je

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}\cdot(2h[0]\cdot\cos(4\varpi) + 2h[1]\cdot\cos(3\varpi) + 2h[2]\cdot\cos(2\varpi) + 2h[3]\cdot\cos(\varpi) + h[4])$$

To (za simetrične FIR filtere neparnog broja uzoraka) vrijedi i **GENERALNO**

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN(\omega)/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N/2} a[m]\cdot\cos(\varpi\cdot m)\right)$$
$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right],\ a[m] = 2h\left[\frac{N}{2}-m\right],\ 1 \leq m \leq \frac{N}{2}$$

Ovdje je $e^{-jN(\omega)/2}$*kašnjenje,* a $a[m]$ *nam služe za dizajn.*

5. Optimizacijske metode

Optimizacijski kriteriji

Želimo optimizirati filter. Radimo to preko a[m] („a a[m] nam služe za dizajn“)

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN(\omega)/2} \cdot A_d(e^{j\omega})$$

Ova nam je funkcija poznata. Samo smo odvojili elemente za kašnjenje i dizajn.

Očekivanje pogreške je

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})\left|A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega})\right|^m$$

$W(e^{j\omega})$ je težinska funkcija i mi je biramo

m je tip pogreške (m=1 je apsolutna, m=2 je kvadratna,...)

Mjere pogreške su npr.

$$\underline{\mathrm{E}} = \int_{-\pi}^{\pi} E(e^{j\omega})\, d\omega \text{ ili } \underline{\mathrm{E}} = \max_{w\in[-\pi,\pi]} E(e^{j\omega})$$

Naravno, tražimo minimalnu pogrešku. Generalno, opisani postupak nam ne garantira pronalaženje globalnog minimuma(*možda je minimum u podacima s kojim testirate?* ;).

6. Projekcijska metoda

Projekcijska metoda **minimizira kvadratnu pogrešku**. To joj je **KARAKTERISTIKA** (za sustav ortonormiranih funkcija „projekcijski koeficijenti a_m daju opis u prostoru uz najmanju kvadratnu pogrešku“).

Funkcije $\cos(\omega m)$ su na intervalu $[-\pi, \pi]$ ortogonalne, vrijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega m)\cdot\cos(\omega n)\ d\omega = \{\pi, m = n.\ 0 \text{ inače}$$

Računamo kosinusne koeficijente Fourierovog reda.

$$a[m] = a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(e^{j\omega})\cdot\cos(\omega m)\ d\omega$$

$$a[0] = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(e^{j\omega})\cdot\cos(\omega m)\ d\omega$$

Na kraju dodajemo $e^{-jN(\varpi/2)}$.

Simpatična optimizacija je sjetiti se da je A_d parna, te vrijedi i

$$a[m] = a_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} A_d(e^{j\omega})\cdot\cos(\omega m)\ d\omega$$

$$a[0] = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} A_d(e^{j\omega})\cdot\cos(\omega m)\ d\omega$$

Time smo skratili interval integracije za pola.