Dvodimenzionalni sustavi

Prof. dr. sc. Sven Lončarić
http://www.fer.hr/predmet/obrinf

Pregled tema

- Uvod
- Osnovne dvodimenzionalne (2-D) sekvencije
- 2-D sustavi
- Linearni 2-D sustavi
- Fourierova transformacija
- Z transformacija

Uvod

- Jednodimenzionalni signal je funkcija jedne varijable: $f(x)$, $s(t)$, itd.
- Kontinuirana slika je funkcija dviju nezavisnih varijabli: $f(x,y)$
- Prostorno diskretna (otipkana) slika je funkcija dvaju diskretnih varijabli: $u(m,n)$, $v(k,l)$, itd.
- Funkcija $f(x,y)$ je separabilna ako vrijedi da je: $f(x,y) = g(x)\,h(y)$

2-D Dirac-ova funkcija

- 2-D Dirac-ova funkcija je definirana izrazom:

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$$

- Svojstva:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\delta(x-s, y-t)\,ds\,dt = f(x, y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x, y)\,dx\,dy = 1$$

2-D Kronecker-ova funkcija

- Kao Dirac-ova samo u diskretnoj domeni.
- 2-D Kronecker-ova funkcija je dana sa:

$$\delta(m,n) = \delta(m)\delta(n)$$

- Svojstva:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(i,j)\delta(m-i,n-j) = x(m,n)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(i,j) = 1$$

2-D pravokutni impuls

- 2-D pravokutni impuls je definiran sa:

$$\mathrm{rect}(x, y) = \mathrm{rect}(x)\,\mathrm{rect}(y)$$

gdje je

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 0.5 \\ 0, & |x| > 0.5 \end{cases}$$

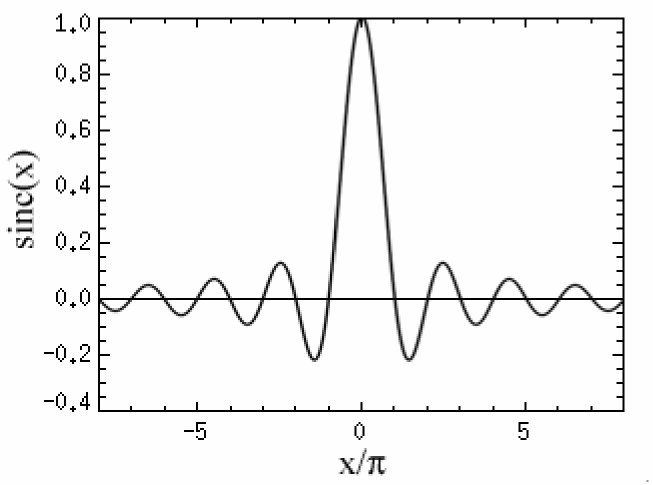
2-D Sinc funkcija

- 2-D sinc funkcija definirana je sa:

$$\mathrm{sinc}(x, y) = \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{sinc}(y)$$

gdje je 1-D sinc funkcija definirana kao

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



2-D Češalj funkcija

- Češalj (engl. comb) funkcija definirana je sa:

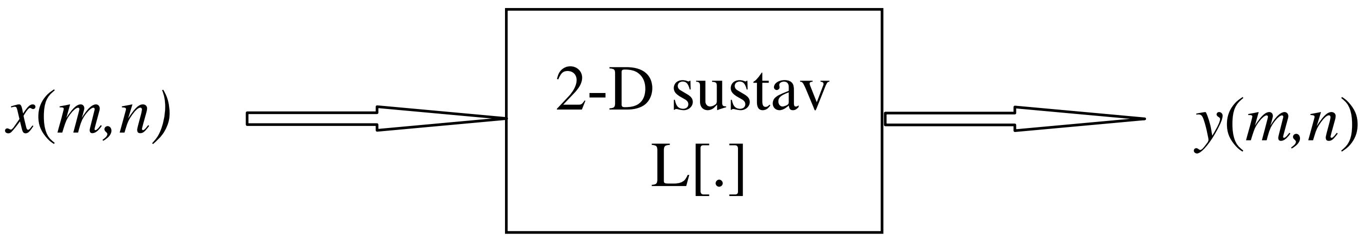
$$\mathrm{comb}(x, y) = \mathrm{comb}(x)\,\mathrm{comb}(y)$$

gdje je

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

2-D sustav

- Neka je $x(m,n)$ ulaz u 2-D sustav, a $y(m,n)$ izlaz



- Izlaz se dobiva kao $y(m,n) = L[x(m,n)]$
- L je operator koji može biti linearan ili nelinearan

Linearni 2-D sustav

- Definicija linearnosti 2-D sustava
- 2-D sustav opisan operatorom *L* je linearan ako za svaki x, y, a, b vrijedi sljedeći izraz:

$$L[ax(m,n)+by(m,n)]=aL[x(m,n)]+bL[y(m,n)]$$

- Ovo je uobičajena definicija linearnosti

Impulsni odziv 2-D sustava

- Defnicija: Ako je ulaz u linearni 2-D sustav jednak

$$x(m,n) = \delta(m-i, n-j)$$

onda se pripadni odziv naziva impulsni odziv

$$h(m,n,i,j) = L[\delta(m-i, n-j)]$$

- U optici se impulsni odziv naziva funkcija razmazivanja točke (point spread function - PSF)

Odziv linearnog 2-D sustava

- Ako je poznat impulsni odziv 2-D linearnog sustava onda se odziv na pobudu može naći kao:

$$
\begin{aligned}
y(m,n) &= L[x(m,n)] \\
&= L[\sum_i \sum_j x(i,j)\delta(m-i,n-j)] \\
&= \sum_i \sum_j x(i,j) L[\delta(m-i,n-j)] \\
&= \sum_i \sum_j x(i,j) h(m,n,i,j)
\end{aligned}
$$

2-D sustav invarijantan na pomak

- Linearni 2-D sustav je invarijantan na pomak ako:

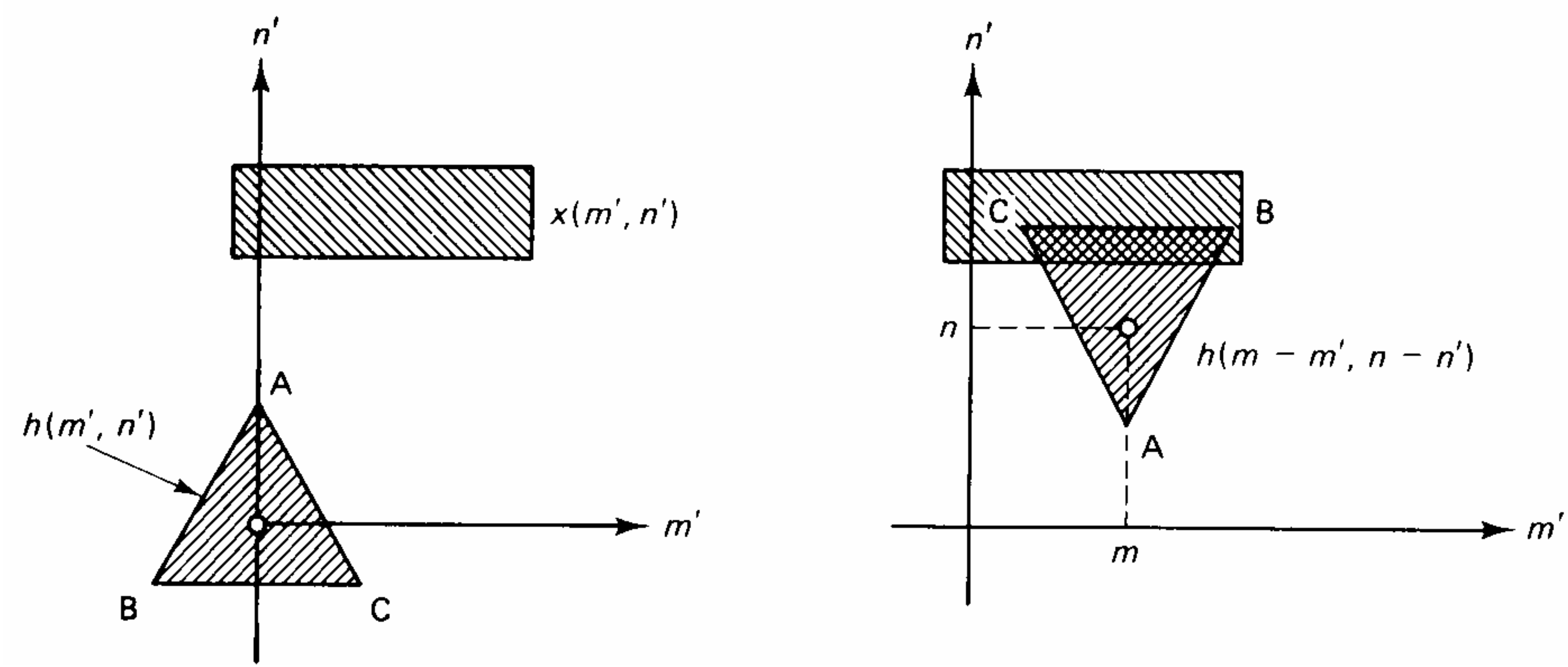
$$h(m,n,i,j) = h(m-i,n-j,0,0) = h(m-i,n-j)$$

- U tom slučaju se odziv sustava računa kao:

$$y(m,n) = \sum_i \sum_j x(i,j)h(m-i,n-j)$$

što predstavlja izraz za 2-D konvolucijsku sumaciju ulazne slike *x* i impulsnog odziva *h*

Ilustracija 2-D konvolucije



Kontinuirana 1-D Fourierova transformacija

- 1-D FT i inverzna FT definirane su na sljedeći način:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp[-j\omega t]dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp[j\omega t]d\omega$$

gdje je t vrijeme, $\omega = 2\pi f$, a ω je kružna frekvencija

Kontinuirana 2-D Fourierova transformacija

- Definicija je analogna definiciji 1-D FT
- Prostorne varijable *x* i *y* su realni brojevi
- ξ_1 i ξ_2 su kontinuirane prostorne frekvencije u *x* i *y* smjerovima
- Definicija kontinuirane 2-D FT:

$$F(\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(x\xi_1 + y\xi_2)]dxdy$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1,\xi_2)\exp[j2\pi(x\xi_1 + y\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2$$

Svojstva kontinuirane 2-D FT

- Svojstvo rotacije:

$$f(\pm x, \pm y) \leftrightarrow F(\pm\xi_1, \pm\xi_2)$$

- Linearnost:

$$af(x, y) + bg(x, y) \leftrightarrow aF(\xi_1, \xi_2) + bG(\xi_1, \xi_2)$$

- Separabilnost:

$$f(x)g(y) \leftrightarrow F(\xi_1)G(\xi_2)$$

- Skaliranje:

$$f(ax, by) \leftrightarrow \frac{F(\xi_1 / a, \xi_2 / b)}{|ab|}$$

Svojstva kontinuirane 2-D FT

- Pomak:

$$f(x \pm a, y \pm b) \leftrightarrow \exp[\pm j2\pi(a\xi_1 + b\xi_2)]F(\xi_1, \xi_2)$$

- Modulacija:

$$\exp[\pm j2\pi(\eta_1 x + \eta_2 y)]f(x, y) \leftrightarrow F(\xi_1 \mp \eta_1, \xi_2 \mp \eta_2)$$

- Linearna konvolucija:

$$h(x, y) * f(x, y) \leftrightarrow H(\xi_1, \xi_2)F(\xi_1, \xi_2)$$

- Multiplikacija:

$$h(x, y)f(x, y) \leftrightarrow H(\xi_1, \xi_2) * F(\xi_1, \xi_2)$$

2-D Fourierova transformacija za aperiodičke nizove

- Fourierova transformacija 2-D aperiodičkog niza $x(m,n)$ dana je izrazom:

$$X(\omega_1,\omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n)\exp[-j(m\omega_1 + n\omega_2)]$$

$$x(m,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1,\omega_2)\exp[j(m\omega_1 + n\omega_2)]d\omega_1 d\omega_2$$

gdje je $-\pi \le \omega_1, \omega_2 \le \pi$

- Gornja transformacija ima svojstva analogna ranije nabrojenim svojstvima FT samo što se sada radi o nizovima (indeksi *m* i *n* su cijeli brojevi)

2-D Z transformacija

- 2-D Z transformacija je definirana izrazom:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

- Z transformacija impulsnog odziva daje transfer funkciju diskretnog 2-D sustava

Odnos Z i Fourierove transformacije

- Ako se Z transformacija izračuna na "jediničnoj kružnici" $|z_1| = 1, |z_2| = 1$ dobiva se Fourierova transformacija
- Drugim riječima ako u izraz za Z transformaciju uvrstimo

$$z_1 = \exp(j\omega_1), \quad z_2 = \exp(j\omega_2)$$

dobit ćemo izraz za FT

Z-transformacija i transfer funkcija

- Pretpostavimo da imamo 2-D linearni vremenski diskretni sustav s impulsnim odzivom $h(m, n)$
- Z-transformacija impulsnog odziva $h(m, n)$ daje transfer funkciju diskretnog 2-D sustava:

$$H(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

- Z-transformacija predstavlja za diskretne sustave ono što Laplace-ova transformacija predstavlja za kontinuirane sustave

Kauzalnost i stabilnost

- Kauzalnost kod 1-D LTI sustava znači da izlaz sustava ne ovisi o budućem ulazu
- 2-D sustav je stabilan kada je zadovoljeno:

$$\sum_{m}\sum_{n}\left|h(m,n)\right| < \infty$$

Optička i modulacijska transfer funkcija

- Za prostorno invarijantan sustav optička transfer funkcija (OTF) je definirana izrazom:

$$OTF = \frac{H(\xi_1, \xi_2)}{H(0,0)}$$

- Modulacijska transfer funkcija (MTF) je definirana izrazom:

$$MTF = |OTF| = \frac{|H(\xi_1, \xi_2)|}{|H(0,0)|}$$

Zaključak

- 2-D nizovi
- 2-D sustav, linearni sustav
- Odziv 2-D sustava, konvolucija
- Fourierova transformacija, svojstva
- Z transformacija