PITANJA ZA USMENI ISPIT

REPREZENTACIJA SIGNALA I SUSTAVA

* DEFINICIJE, PODJELE I OSNOVNI SIGNALI

SIGNAL – fenomen koji nosi neku informaciju, obično varijacije neke fizikalne veličine moguće ju je izmjeriti, pohraniti, obraditi ili prenijeti

- signal → veza nezavisne i zavisne varijable

$$x = \{(t, x) \mid t \in D, x \in K\}$$

D... domena
K... kodomena

nezavisna varijabla: kontinuirana $D \subseteq \mathbb{R}$ – neprekinut i neprebrojiv skup
diskretna $D \subseteq \mathbb{Z}$ – prebrojiv skup

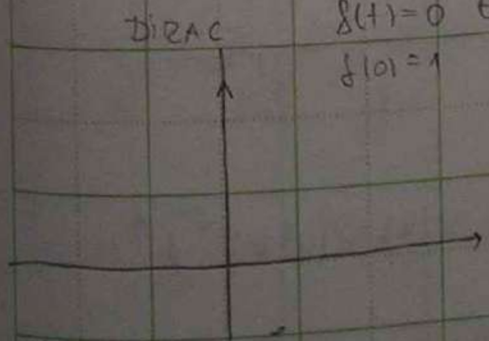
zavisna: kvantizirana – prebrojiv skup
nekvantizirana – neprebrojiv skup

Diskretan + kvantiziran → digitalan
kontinuiran + nekvantiziran → analogan

VEKTORSKI SIGNAL – kada mjerenu veličinu karakterizira skup signala
Domena: višedimenzionalan skup $D \subseteq \mathbb{R}^N$ $D \subseteq \mathbb{Z}^N$
Kodomena: vektor

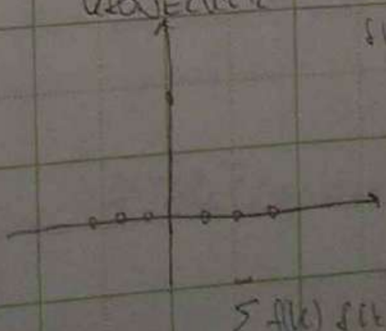
JEDINIČNI IMPULS

DIRAC
$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$
$\delta(0) = 1$



$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$

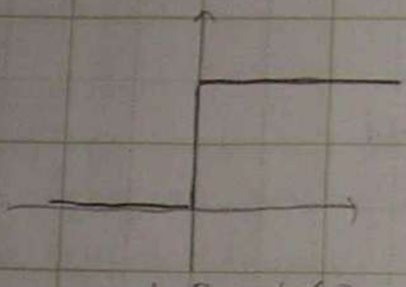
KRONECKER
$\delta[k] = 0 \quad k \neq 0$
$\delta[0] = 1$

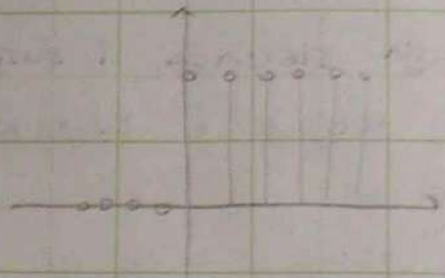


$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta[k] = 1$

$\sum_{-\infty}^{\infty} f(k)\,\delta(k-n) = f(n)$

JEDINIČNA STEPENICA

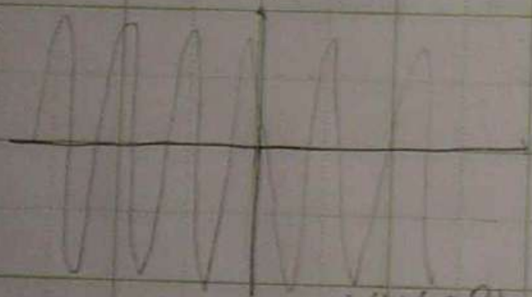


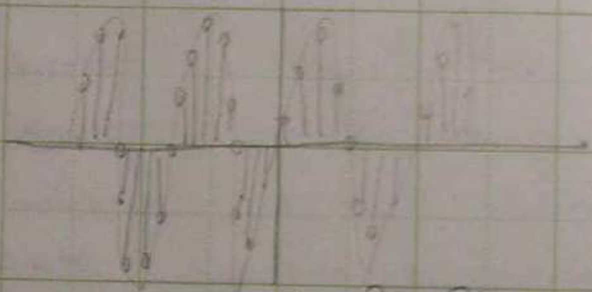


$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/2 & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \qquad \mu(k) = \begin{cases} 0, & k<0 \\ 1, & k\geq 0 \end{cases}$$

- kauzalan, množenje bilo kojeg signala sa $\mu(k)$ čini ga kauzalnim

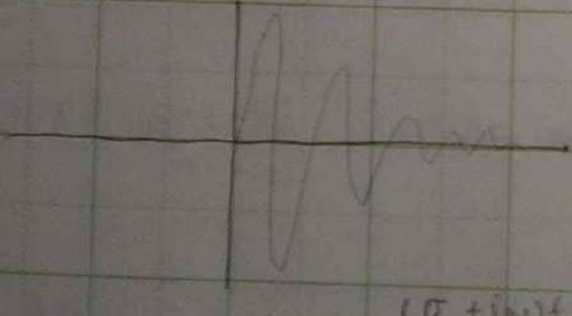
KOMPLEKSNA HARMONIJSKA FUNKCIJA

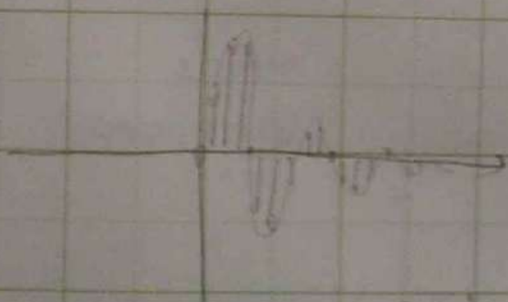




$$x(t) = e^{j(\omega t+\theta)} \qquad x(k) = e^{j(\Omega k+\theta)}$$

KOMPLEKSNA EKSPONENCIJALA





$$x(t) = e^{(\sigma+j\omega)t} \qquad x(k) = (\rho e^{j\Omega})^k$$

* LINEARNI SUSTAVI, IMPULSNI ODZIV, STABILNOST, KAUZALNOST

LINEARNI SUSTAV - veza ulaznog i izlaznog signala

$\{(u,y) \mid u \in U, y \in Y\}$

D: prostor ulaznih signala V: prostor izlaznih signala

- preslikavanje $f: U \to V$
- sustav je linearan ako vrijedi: $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

IMPULSNI ODZIV - odziv mirnog linearnog sustava na jedinični impuls

↳ poč. uvjeti = 0

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t,\tau) \, d\tau \qquad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) h(n,k)$$

STABILNOST - sustav je stabilan ako je odaziv na bilo koju ograničenu pobudu ograničen

$$|x(t)| < M \rightarrow |y(t)| < M \cdot I \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, dt < \infty$$

KAUZALNOST - sustav je kauzalan ako je ne odaziva prije nego je stigla pobuda

$$y(t) = 0 \quad t < t_0 \quad \text{ako je} \quad x(t) = 0 \quad t < t_0$$

* KONVOLUCIJA, MATRIČNA REPREZENTACIJA KONV., SVOJSTVENE FJE

KONVOLUCIJA - ako je sustav vremenski stalan, pomaknuta pobuda daje isti odziv samo pomaknut

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) \, d\tau \qquad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) h(n-k)$$

$$\boxed{y = u * h}$$

MATRIČNA REPREZENTACIJA

$$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & & \\ \vdots & h_1 & h_0 & & 0 \\ & & h_1 & & \\ h_m & & & & \\ 0 & h_m & & & h_1 \\ 0 & 0 & h_m & & \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & h_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} = H \cdot u$$

vektor:

$n = m + k$

duljina niza

$y = u + z - 1$

SVOJSTVENE FUNKCIJE

- kompleksne eksponencijale su svoj. fje operatora konvolucije

$$z^n = (\rho e^{j\omega})^n$$

* DEKONVOLUCIJA, STABILNOST INVERZNOG SUSTAVA

DEKONVOLUCIJA - postupak rekonstrukcije ulaznog signala iz izlaznog (dobivanje nepoznate pobude)

$$u(n) = \left[y(n) - \sum_{k=1}^{n} u(n-k)h(k) \right] \frac{1}{h(0)}$$

STABILNOST INVERZNOG SUSTAVA

- u Z-domeni - dekonvolucija → primjena inverzne funkcije

$G(z) = H^{-1}(z)$

$U(z) = H^{-1}(z) \cdot H(z) \cdot U(z) = H^{-1}(z) \cdot Y(z) = G(z) \cdot Y(z)$

- polovi od $H(z)$ → nule od $G(z)$
- nule od $H(z)$ → polovi od $G(z)$

⇒ nema jamstva za stabilnost dekonvolucijskog sustava

* Z-TRANSFORMACIJA, PRIJENOSNA FJA, FREKV. KARAKTERISTIKA

- predstavljanje općeg diskretnog signala kompleks. eksponencijalama

$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int X(z) z^{n-1} dz$

svojstva: linearnost $a x(n) + b y(n) \rightarrow a X(z) + b Y(z)$

konvolucija → množenje: $x(n) * y(n) \rightarrow X(z) \cdot Y(z)$

OSNOVNE FJE: $\delta(n) \rightarrow 1$ $\mu(n) \rightarrow \frac{z}{z-1}$

PRIJENOSNA FJA

$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) z^{n-k} = \underbrace{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}\right)}_{H(z)} z^n$

- odziv na pobudu kompl. eksp. je opet komp. eksp. kompleksne amplitude $H(z)$

prijenosna fja

$z^n \rightarrow H(z) z^n$

$z^n = (e^{j\omega})^n$

FREKVENCIJSKA KARAKTERISTIKA

$H(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{AMPLITUDNA KARAKTERISTIKA}} e^{\overbrace{j \angle H(e^{j\omega})}^{\text{FAZNA KARAKTERISTIKA}}}$

$Re^2 + Im^2$

govori o odnosu amplitude odziva i pobude

$\operatorname{arctg} \frac{Im}{Re}$

nosi informacije o vremenskim odnosima

odnos kompleksnih amplituda odziva i pobude

harmonijskih fja

(6)

* SUSTAVI S BESKONAČNIM (IIR) i KONAČNIM (FIR) IMPULSNIM ODZIVOM

IIR

- jdi diferencija: $y(n) + a_1 y(n-1) \cdots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \cdots + b_M u(n-M)$

- z-domena

$$(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}) U(z)$$

- prijenosna fja $= H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$

- nalazimo polove - nultočke nazivnika

$$H(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{z}{z - p_k}$$

$$h(n) = C_0 \, \delta(n) + \sum_{k=1}^{N} C_k p_k^n \mu(n)$$

- sustav je STABILAN ako su mu svi polovi unutar jed. kruž.
- eksponencijale se rasprinju ili trnu → beskonačni imp. odziv. (rekurzivni sustav)

- ALL - POLE SUSTAVI
- samo polovi, odziv beskonačnog trajanja

$u = \delta(n) \quad h(n) = \sum_{k=1} C_k p_k$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

FIR

- jednadžba diferencija: $y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$
- ne ovisi o prethodnim izlazima → nerekurzivan

z-domena $Y(z) = (b_0 + b_1 z^{n-1} + \dots + b_M z^{n-M}) U(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n z^{n-M}$$

imp. odziv: $h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_M \delta(n-M)$

- konačni imp. odziv
- sustav ima samo nule pa je uvijek stabilan

* GRUPNO KAŠNJENJE, LINEARNA FAZA, MIN. FAZNI I RECIPR. SUSTAVI

$\theta(\omega) = \angle H(e^{j\omega})$ faza

$\tau(\omega) = -\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ "grupno kašnjenje"

- poželjno svojstvo - konstantno grupno kašnjenje - faza mora biti linearna funkcija frekvencije

$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\arctan\left(\frac{Im\ H(e^{j\omega})}{Re\ H(e^{j\omega})}\right) =$$

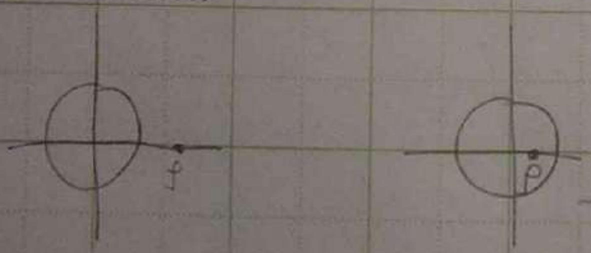
$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{Im}{Re}\right)^2}\frac{d}{d\omega}\frac{Im}{Re} = -\frac{Re^2}{Re^2+Im^2}\left(\frac{Im' Re - Im Re'}{Re^2}\right) =$$

$$= \frac{Im\,Re' - Im'\,Re}{Im^2+Re^2}$$

MINIMALNA FAZA

- sve nule unutar jedinične kružnice - SUSTAV S MINIM. FAZOM
- sve nule koje su izvan jedinične kružnice možemo zamijeniti recipročnima → novi sustav ima jednaku ampl.-frekv. karakteristiku, ali je minimalne faze (+ fazna pogreška)

RECIPROČNI SUSTAV



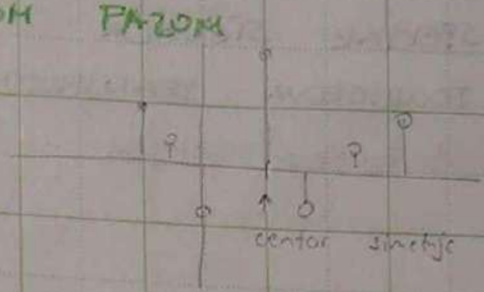
Imaju istu ampl. frekv. karakteristiku

→ min. faze - manje grupno kašnjenje

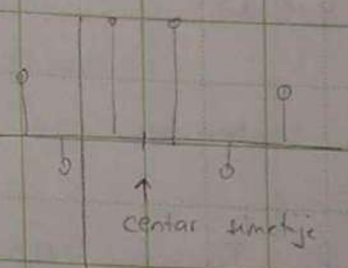
LINEARNA FAZA

* TIPOVI FIR FILTARA S LINEARNOM FAZOM

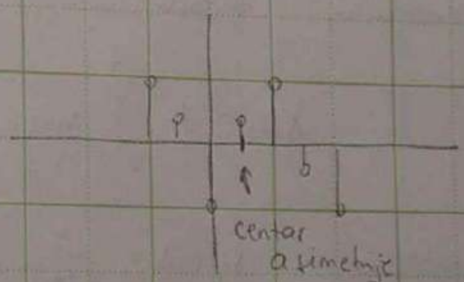
Tip 1 - simetričan imp. odziv
- neparan broj uzoraka imp. odziva



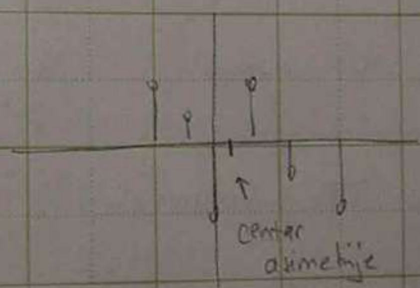
Tip 2 - simetričan imp. odziv
- paran broj uzoraka imp. odziva



Tip 3 - asimetričan imp. odziv
- neparan broj uzoraka imp. odziva



Tip 4 - asimetričan imp. odziv
- paran broj uzoraka imp. odziva



SPEKTAR SIGNALA

* FOURIEROVA TRANSFORMACIJA , 4 varijante

1. Fourierov integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(\omega)$$

Inverzno : $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

D: kontinuiran. K: kontinuiran.

2. Fourierov red
- periodički signali

$$X(n) = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$\omega \to n\Omega$
$\Omega = 2\pi / T$

Inverzno $x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{jn\Omega t}$

D: kontinuirani K: diskretan

3. FT vremenski diskretnih signala

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

↓ periodičan spektar s periodom 2π

Inverzno $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

D: diskretan K: kontinuirani (periodičan)

4. Diskretna Fourierova transformacija DFT

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X(k)$$

$x(n)$, $X(k)$ – periodički s periodom N

Inverzna: $$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

D: diskretna (period.) K: diskretna (period.)

*** MATRICA DISK. FT (DFT MATRICA)**

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\mathbf{W}_N = \left[W_N^{km}\right]$$ indexi reda i stupca matrice

opći oblik matric DFT

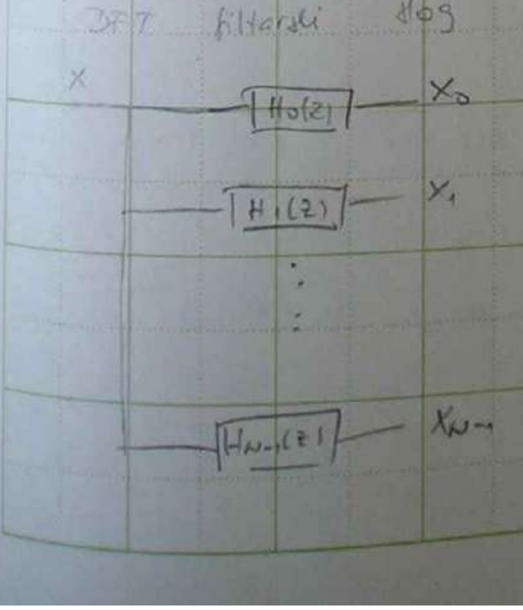
za inverz

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\left[W_N^{-km}\right]$$

$$\mathbf{W}_N^{-1} \cdot \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$$

*** DTF & IDFT FILTARSKI SLOG, S DECIMACIJOM I BEZ**

DFT filtarski slog

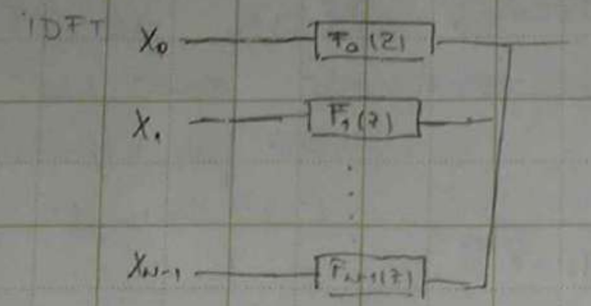


– svaki filtar daje po jedan DFT koeficijent u svakom trenutku vremena

– realizacija pomičnih ...

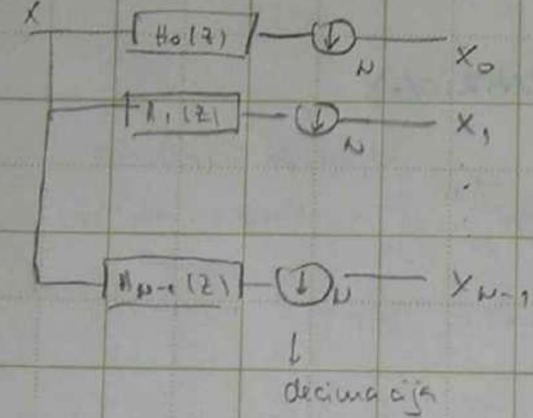
– koeficijenti – redak matrice DFT

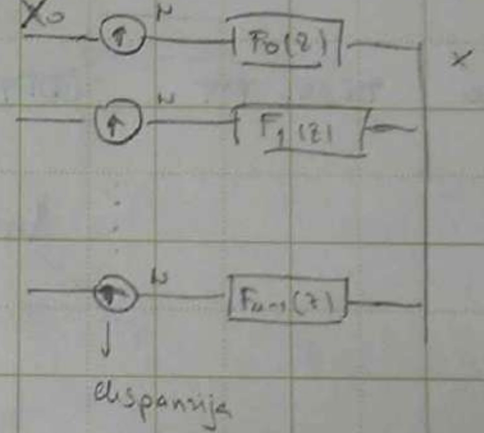
– rezultat redundantan



- koeficijent $X(k)$ svakom pojedinom uzorku $x(n)$ možemo očitati iz k-tog stupca DFT^{-1}

DFT s decimacijom | IDFT s decimacijom





- uzima x svaki N-ti uzorak (realizacija jedan po jedan)
- kasnije kod ekspanzije signal x nadopunjava nulama

* SPEKTROGRAM

- estimacija spektra snage signala s dimenzijom vremena

spektar snage:

$$|X_k(n)|^2 = X_k^* \cdot X_k$$

- uvijek realan, nenegativan i za realne signale paran

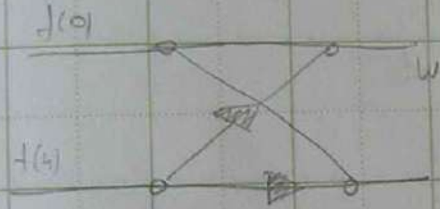
- spektogram prikazuje (npr. bojom) koncentraciju (učestalost pojavljivanja) određenih frekvencija

* BRZA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA (FFT) i DFT LEPTIR

- za DFT potreban je veliki broj operacija ($O(N^2)$) pa tražimo jednostavnije i brže rješenje
- N uzoraka se razloži u više grupa uzoraka, a koristi se periodičnost i simetrija eksponencijale

- $x(n)$ možemo razložiti na parne i neparne uzorke. Složenost je sada $2(N/2)^2$ → ako je $\frac{N}{2}$ i dalje paran možemo dalje razlagati
- postupak se nastavlja kada ostanu 2 uzorka =)

DFT LEPTIR



$W_N^0 = 1$

$W_2 = W_N^{N/2} = -1$

Složenost FFT $N\log_2 N$

- N je potencija broja 2 – ako nije nadopuni se nulama