Obrada informacija – Zadaci za domaću zadaću 3.

Akademska školska godina 2007./2008.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet Elektrotehnike i računarstva,
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Uputa

Ovi zadaci koje je potrebno riješiti za domaću zadaću ujedno su i zadaci kakve možete očekivati na pismenom završnom međuispitu. Drugi međuispit se sastoji od 5 zadataka i piše se 120 minuta.

Zbog velikog broja zadataka svaki student za domaću zadaću mora riješiti samo manji dio zadataka, i to ovisno o zadnjoj znamenci matičnog broja:

Znamenka 0: zadatke 1, 4, 5, 8, 9, 10a, 13, 15, 16, 18a, 19c, 20, 21, 23b, 24, 25, 26, 30, 31c, 32a, 33a, 33c, 35, 37, 38, 39

Znamenka 1: zadatke 2, 4, 7, 8, 9, 10b, 12, 14, 17, 18b, 19a, 21, 22b, 23c, 24, 25, 27b, 29, 31d, 32b, 33a, 33d, 34, 36, 38, 39

Znamenka 2: zadatke 3, 4, 6, 8, 9, 10c, 11, 15, 17, 18c, 19d, 21, 22a, 23a, 24, 25, 28, 30, 31a, 32c, 33b, 33d, 35, 37, 38, 39

Znamenka 3: zadatke 1, 4, 5, 8, 9, 10d, 13, 14, 16, 18d, 19e, 20, 21, 23b, 24, 25, 26, 29, 31b, 32a, 33b, 33c, 34, 36, 38, 39

Znamenka 4: zadatke 2, 4, 7, 8, 9, 10d, 12, 15, 16, 18e, 19a, 21, 22a, 23c, 24, 25, 27a, 30, 31c, 32b, 33a, 33c, 35, 37, 38, 39

Znamenka 5: zadatke 3, 4, 6, 8, 9, 10c, 11, 14, 17, 18f, 19c, 21, 22b, 23a, 24, 25, 28, 29, 31d, 32c, 33a, 33d, 34, 36, 38, 39

Znamenka 6: zadatke 1, 4, 5, 8, 9, 10b, 13, 15, 17, 18g, 19b, 20, 21, 23b, 24, 25, 26, 30, 31a, 32a, 33b, 33d, 35, 37, 38, 39

Znamenka 7: zadatke 2, 4, 7, 8, 9, 10a, 12, 15, 16, 18h, 19b, 21, 22b, 23c, 24, 25, 27b, 29, 31b, 32b, 33b, 33c, 35, 36, 38, 39

Znamenka 8: zadatke 3, 4, 6, 8, 9, 10a, 11, 14, 17, 18d, 19c, 21, 22a, 23a, 24, 25, 27a, 30, 31c, 32c, 33a, 33d, 34, 37, 38, 39

Znamenka 9: zadatke 1, 4, 5, 8, 9, 10b, 13, 15, 16, 18c, 19a, 20, 21, 23b, 24, 25, 26, 29, 31d, 32a, 33a, 33c, 34, 36, 38, 39

Bez obzira što je za domaću zadaću potrebno riješiti samo dio zadataka svakako je dobro pregledati i ostale zadatke, te ovisno o vremenu, riješiti barem neke od njih.

Zadaci iz zadnje skupine su nešto teži i prvenstveno su namijenjeni studentima koji žele znati više. Na međuispitu se neće pojaviti zadaci iz zadnje skupine!

Uvod u digitalnu obradu slike

1. Definirajte digitalnu sliku. Što je domena, a što kodomena? Kako kodomena izgleda za sive slike, a kako za slike u boji? Navedite neke primjere!

2. Što je snaga zračenja (jakost svjetlosti) svjetlosnog izvora, a što je luminancija? Definirajte Weberov kontrast i Weberov koeficijent.

3. Što je perspektivna projekcija? Ako znate da je udaljenost leće od mrežnice 17 mm, te da promatramo objekt veličine 15 m na udaljenosti od 100 m, izračunajte veličinu slike predmeta na mrežnici.

Osnove digitalne geometrije

Definicija 1.1. (Voronoi susjedstvo) *Neka je G skup točaka u $\mathbb{R}^N$. Voronoi susjedstvo u G svakog elemeta $g \in G$ je skup*

$$N_G(g) = \big\{v \in \mathbb{R}^N | \forall h \in G, ||v - g|| \leq ||v - h||\big\}.$$

Pojednostavljeno, Voronoi susjedstvo točke g je skup svih točaka prostora čija najbliža točka je upravo g. Odaberemo li za skup G diskretne točke u ravini s cjelobrojnim koordinatama, dakle $G = \mathbb{Z}^2$ i $g = (g_1, g_2)$, Voronoi susjedstva su kvadrati, odnosno $\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 | \max(|v_1 - g_1|, |v_2 - g_2|) \leq \frac{1}{2}\}$.

Neka je M neki skup i neka je ρ binarna relacija na M. Za dva elementa iz $c, d \in M$ kažemo da su u ρ-susjedstvu ako je $(c, d) \in \rho$. Kada razmatramo digitalne prostore, dakle za $M = \mathbb{Z}^N$, od posebnog značaja su dvije binarne relacije:

Definicija 1.2. **(α_N susjedstvo)** *Za dvije točke $c, d \in \mathbb{Z}^N$ kažemo da su u α_N susjedstvu ako i samo ako $c \neq d$ i $|c_n - d_n| < 1$ za $1 \leq n \leq N$. Pišemo $(c, d) \in \alpha_N$.*

Definicija 1.3. **(ω_N susjedstvo)** *Za dvije točke $c, d \in \mathbb{Z}^N$ kažemo da su u ω_N susjedstvu ako i samo ako $\sum_{n=1}^{N} |c_n - d_n| = 1$. Pišemo $(c, d) \in \omega_N$.*

Za dvodimenzionalne digitalne slike α_2 susjedstvo naziva se i 8-susjedstvo, dok se ω_2 susjedstvo naziva 4-susjedstvo.

Definicija 1.4. (Granica) *Neka su O i Q dva podskupa od $\mathbb{Z}^N$. Granica između skupova O i Q je skup*

$$\partial(O, Q) = \big\{(c, d) | c \in O, d \in Q, (c, d) \in \omega_N\big\}.$$

Stavak 1.1. (O granici u dvodimenzionalnoj slici) *Neka je A neprazan pravi podskup od $\mathbb{Z}^2$. Neka je O α_2-komponenta od A i neka je Q ω_2-komponenta od $\overline{A}$ takve da granica $\partial(O, Q)$ nije prazna. Tada postoje dva jednoznačno definirana podskupa I i E od $\mathbb{Z}^2$ sa slijedećim svojstvima:*

1. *$O \in I$ i $Q \in E$,*
2. *$\partial(O, Q) = \partial(I, E)$,*
3. *$I \cup E = \mathbb{Z}^2$ i $I \cap E =$,*
4. *I je α_2-povezan podskup od $\mathbb{Z}^2$ i E je ω_2-povezan podskup od $\mathbb{Z}^2$, i*
5. *svaki ω_2-put koji povezuje element iz I s elementom iz E prolazi kroz granicu $\partial(O, Q)$.*

Teorem je bitan jer pokazuje da za kvadratnu mrežu $\mathbb{Z}^2$ moramo koristiti dvije različite relacije susjedstva, α_2 i ω_2, jednu za objekt i drugu za pozadinu. U protivnom granica između objekta i pozadine ne bi bila dobro definirana, odnosno postojao bi put koji spaja objekt i pozadinu, a koji ne prolazi kroz granicu!

4. Definirajte 4-susjedstvo i 8-susjedstvo te navedite svojstva funkcije udaljenosti. Neka su zadane dvije točke u slici, $p = (1, 2)$ i $q = (14, 5)$. Skicirajte četiri i osam susjedstva obje točke. Pronađite najkraću 4-putanju i 8-putanju koja spaja p i q. Što možete reći o jedinstvenosti najkraćih putanja?

5. Promatramo krug $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 9\}$. Gaussova digitalizacija G skupa S je skup svih točaka $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ koje se nalaze u S. Nacrtajte sve točke koje čine Gaussovu digitalizaciju skupa S. Također za svaku od točaka $(p, q) \in G$ skicirajte Voronoi susjedstvo $N_{\mathbb{Z}^2}(p, q)$. Zadovoljavaju li sve točke iz pripadnih Voronoi susjedstva jednadžbu $x^2 + y^2 < 9$?

6. Definirajte funkciju udaljenosti, odnosno navedite koja svojstva mora zadovoljiti svaka funkcija udaljenosti. Ako su $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^2$ za svaku od navedenih funkcija ispitajte jesu li navedena svojstva zadovoljena:

a) $d_4(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$

b) $d_e(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$

c) $d_8(e, q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$

7. Označimo sa $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$ dvije točke iz $\mathbb{Z}^2$. Definirajte 4-udaljenost $d_4(p, q)$, 8-udaljenost $d_8(p, q)$ i Euklidsku udaljenost $d_e(p, q)$ za točke p i q u ravnini. Za točku $p = (0, 0)$ skicirajte sve točke q za koje vrijedi:

a) $d_4(p, q) < 5$

b) $d_e(p, q) < 5$

c) $d_8(p, q) < 5$

8. Označimo sa $p = (p_1, p_2)$ i $q = (q_1, q_2)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^2$. Pokažite da 4-udaljenost d_4, 8-udaljenost d_8 i Euklidska udaljenost d_e zadovoljavaju nejednadžbu

$$d_8(p, q) \leq d_e(p, q) \leq d_4(p, q) \leq 2d_8(p, q), \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^2.$$

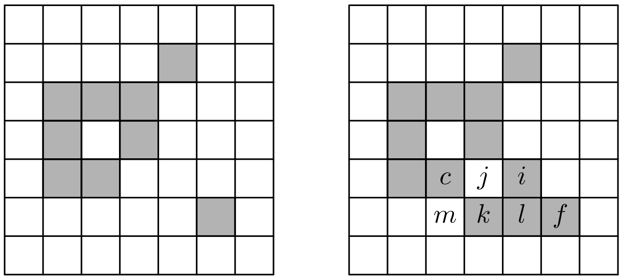
9. Neka na slici 1. točke označene sivom bojom čine objekt A dok točke označene bijelom bojom čine točke pozadine $\overline{A}$. Za obje digtalne slike na slici 1. odredite je li objekt A osam ili četiri povezan, te je li pozadina $\overline{A}$ osam ili četiri povezana. Neka je za desnu digitalnu sliku $O = \{i, k, l, f\}$ i neka je $Q = \{j\}$. Odredite granicu $\partial(O, Q)$ i ispitajte vrijedi li stavak 1.1. o granici. Pokažite da za tako odabrane O i Q zamjena relacije α_2 s relacijom ω_2 čini stavak 1.1. netočnim.

Dvodimenzionalna Fourierova transformacija

10. Izračunajte 2D Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudnu karakteristiku slijedećih kontinuiranih 2D signala (iskoristite separabilnost):

a) $f(x, y) = \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{sinc}(y)$

b) $f(x, y) = e^{-|x|-|y|}$



Slika 1.: Dvije digitalne slika na mreži dimenzija 7×7

c) $f(x, y) = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

11. Promatramo signal $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pokažite da ako $f(x, y)$ možemo zapisati u obliku produkta $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ tada je

$$f(x, y) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega_1, \omega_2) = F_1(\omega_1) F_2(\omega_2),$$

gdje je $F_1(\omega_1)$ 1D Fourierova transformacija signala $f_1(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $F_2(\omega_2)$ 1D Fourierova transformacija signala $f_2(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

12. Neka je $f(x, y) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega_1, \omega_2)$ 2D Fourierov transformacijski par i neka je $\sigma \in \mathbb{R}$. Pokažite da je 2D Fourierova transformacija signala $f(x - \sigma y, y)$ tada $F(\omega_1, \omega_2 - \sigma \omega_1)$.

13. Neka je $f(x, y) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega_1, \omega_2)$ 2D Fourierov transformacijski par i neka je $g(x, y)$ rotirani signal $f(x, y)$ za kut θ u smjeru kazaljke na satu, odnosno $g(x, y) = f(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$. Izrazite spektar $G(\omega_1, \omega_2)$ signala $g(x, y)$ pomoću spektra $F(\omega_1, \omega_2)$ i kuta rotacije θ.

14. Definirajte 2D linearnu konvoluciju i navedite teorem o konvoluciji. Označimo sa $f(x, y) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega_1, \omega_2)$ i $g(x, y) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(\omega_1, \omega_2)$ dva Fourierova transformacijska para. Ako je

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{-x} 3^{-y}, & 0 \leq x, 0 \leq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x, y) = \begin{cases} 3^{-x} 2^{-y}, & 0 \leq x, 0 \leq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

izračunajte $f(x, y) ** g(x, y)$ koristeći teorem o konvoluciji.

15. Neka je $f(x, y) = \mathrm{rect}(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$. Izračunajte:

a) $f(x, y) ** f(x, y)$

b) $f(x, y) ** f(x, -y)$

c) $f(x, y) ** f(-x, y)$

d) $f(x, y) ** f(-x, -y)$

16. Neka su $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ i $g(x, y) = g_1(x) g_2(y)$ dvije separabilne funkcije. Pokaži da njihovu 2D linearnu konvoluciju možemo računati kao produkt dvije 1D linearne konvolucije, odnosno da vrijedi

$$f(x, y) ** g(x, y) = \big(f_1(x) * g_1(x)\big)\big(f_2(y) * g_2(y)\big).$$

17. Neka je $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ separabilna funkcija i neka je $g(x, y)$ neseparabilna funkcija. Pokaži da vrijedi

$$f(x, y) ** g(x, y) = \big(f_1(x) * g(x, y)\big) * f_2(y) = \big(f_2(y) * g(x, y)\big) * f_1(x).$$

Linearni prostorno nepromjenjivi sustavi

Do sada ste se uglavnom susretali sa sustavima koji procesiraju vremenske signale. Od posebne važnosti su bili linearni vremenski nepromjenjivi sustavi, odnosno LTI sustavi (eng. *linear time-invariant*). Kada govorimo o digitalnoj obradi slike umjesto vremenske nepromjenjivosti bitna je prostorna nepromjenjivost. Neka je $g(x,y)$ odziv sustava S na pobudu $f(x,y)$, dakle $g(x,y) = S\big(f(x,y)\big)$. Sustav S je prostorno nepromjenjiv ako

$$\forall x_0, y_0 : S\big(f(x+x_0, y+y_0)\big) = g(x+x_0, y+y_0). \tag{1}$$

Ako je sustav S još i linearan govorimo o linearnim prostorno nepromjenjivim sustavima ili LSI sustavima (eng. *linear space-invariant*).

Promatramo LSI sustav s poznatim impulsnim odzivom $h(x,y)$ i poznatom prijenosnom funkcijom $H(\omega_1,\omega_2)$. Kada govorimo o LSI sustavima impulsni odziv sustava se još naziva i PSF (eng. *point spread function*). Optička prijenosna funkcija ili OTF (eng. *optical transfer function* je

$$\mathrm{OTF} = \frac{H(\omega_1,\omega_2)}{H(0,0)} \tag{2}$$

dok je modulacijska prijenosna funkcija ili MTF (eng. *modulation transfer function*)

$$\mathrm{MTF} = \left|\frac{H(\omega_1,\omega_2)}{H(0,0)}\right|. \tag{3}$$

Primijetite da su izrazi za OTF (2) i MTF (3) dobrno definirani samo za sustave čiji impulsni odziv zadovoljava uvjet $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,dxdy \neq 0$.

18. Za svaki od navedenih kontinuiranih 2D sustava ispitajte jesu li prostorno nepromjenjivi:

a) $S\big(f(x,y)\big) = 2f(x,y) + f^2(x,y)$

b) $S\big(f(x,y)\big) = 2f(x,y) + 3$

c) $S\big(f(x,y)\big) = 2f(x,y) + 2x + 2y$

d) $S\big(f(x,y)\big) = 2f(x,y) + f(y,x)$

e) $S\big(f(x,y)\big) = f(x+y, x-y)$

f) $S\big(f(x,y)\big) = f(x+1,y) - f(x-1,y)$

g) $S\big(f(x,y)\big) = f(x,y+1) - f(x,y-1)$

h) $S\big(f(x,y)\big) = f(x+1,y+1) - f(x-1,y-1)$

19. Za svaki od navedenih kontinuiranih 2D sustava ispitajte jesu li linearni, prostorno nepromjenjivi i imaju li memoriju:

a) $S\big(f(x,y)\big) = \int_0^x f(\chi,y)\,d\chi$

b) $S\big(f(x,y)\big) = \int_{-\infty}^x f(\chi,y)\,d\chi$

c) $S\big(f(x,y)\big) = \int_0^x \int_0^y f(\chi,\upsilon)\,d\chi d\upsilon$

d) $S\big(f(x,y)\big) = \int_{2-x}^{2+x} \int_{2-y}^{2+y} f(\chi,\upsilon)\,d\chi d\upsilon$

e) $S\big(f(x,y)\big) = \int_{x-2}^{x+2} \int_{y-2}^{y+2} f(\chi, \upsilon)\, d\chi d\upsilon$

20. Impulsni odziv kontinuiranog 2D sustava je $h(x,y) = \mathrm{rect}(x,y)$. Odredi i skiciraj modulacijsku prijenosnu funkciju i optičku prijenosnu funkciju.

21. Za svaki od navedenih diskretnih 2D sustava ispitajte jesu li linearni i prostorno nepromjenjivi:

a) $S\big(f(x,y)\big) = \sum_{i=x}^{+\infty} \sum_{j=y}^{+\infty} f(i,j)$

b) $S\big(f(x,y)\big) = \sum_{i=-x}^{0} \sum_{j=-y}^{0} f(i,j)$

22. Ispitaj je li zadani impulsni odziv diskretnih 2D sustava separabilan te odredi i skiciraj modulacijsku prijenosnu funkciju i optičku prijenosnu funkciju.

a) $h(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & \underline{62} & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{Bmatrix}$

b) $h(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & \underline{64} & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{Bmatrix}$

Napomena: Podcrtani uzorak impulsnog odziva je uzorak za $(x,y) = (0,0)$. Uzorci koji nisu navedeni su jednaki nuli. Elementi u retku imaju istu vrijednost nezavisne varijable y, dok elementi u stupcu imaju istu vrijednost varijable x. Vrijednost x se povećava s pomakom od lijeva na desno dok se vrijednost y povećava s pomakom prema gore.

23. Parcijalna derivacija funkcije $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definirana izrazom

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Kada radimo s prostorno diskretnim signalima $f(x,y) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ derivaciju možemo aproksimirati konačnom diferencijom. Ako je funkcija $f(x,y)$ zadana slikom 2. izračunaj svaku od zadanih aproksimacija.

a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \approx f(x+1,y) - f(x,y)$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \approx f(x,y) - f(x-1,y)$

c) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \approx \frac{1}{2}\big(f(x+1,y) - f(x-1,y)\big)$

0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

Slika 2.: Ulazna slika kratke vertikalne linije (sve ostale vrijednosti su nula)

24. Dva sustava koja aproksimiraju parcijalnu derivaciju primjenjujemo na ulaznu digitalnu sliku prikazanu na slici 2. četiri puta uzastopce kako bi aproksimirali četvrtu derivaciju. Ako su sustavi

$$g(x,y) = S_1\big(f(x,y)\big) = f(x,y) - f(x-1,y)$$

i

$$g(x,y) = S_2\big(f(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(f(x+1,y) - f(x-1,y)\big)$$

za svaki od sustava skiciraj rezultat. Je li došlo do pomaka četvrte derivacije u odnosu na početnu sliku? Objasnite! Koji uvjet mora zadovoljiti LSI sustav da do pomaka ne dođe?

25. Za sustave S_1 i S_2 iz zadatka 24 odredi prijenosne funkcije te pripadne amplitudne i fazne karakteristike. Možete li faznu karakteristiku povezati s pomakom odziva u odnosu na pobudu?

Uputa: Odredite grupni prostorni pomak koji odgovara negativnoj derivaciji fazne karakteristike. Usporedite vrijednost grupnog prostornog pomaka s pomakom uočenim između rezultata i slike.

26. Odredite odziv LSI sustava s zadanim impulsnim odzivom

$$h(x,y) = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\}$$

na pobudu

$$f(x,y) = \left\{\begin{matrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

Napomena: Podcrtani uzorak je uzorak za $(x,y) = (0,0)$. Uzorci koji nisu navedeni su jednaki nuli. Elementi u retku imaju istu vrijednost nezavisne varijable y, dok elementi u stupcu imaju istu vrijednost varijable x. Vrijednost x se povećava s pomakom od lijeva na desno dok se vrijednost y povećava s pomakom prema gore.

27. Odredi odziv LSI sustava s zadanim impulsnim odzivom $h(x,y)$ koji aproksimira Laplaceov operator ako je ulazna slika

$$f(x,y) = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \underline{0} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}.$$

Označite na dobivenoj matrici sve granice između točaka u kojima rezultat mijenja predznak. Što možete zaključiti o položaju tih granica?

a) $h(x,y) = \left\{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \underline{4} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\}$

b) $h(x,y) = \left\{\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \underline{8} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}\right\}$

28. Kada detektiramo rubove u slici možemo koristiti Sobelov operator dimenzija 3×3. Izračunaj odzive Sobelovih operatora

$$s_x(x,y) = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \underline{0} & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right\} \quad \text{i} \quad s_y(x,y) = \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{0} & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{matrix}\right\}$$

za sliku

$$f(x,y) = \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & \underline{5} & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right\}.$$

Označimo li odzive sa $g_x(x,y) = f(x,y) ** s_x(x,y)$ i $g_y(x,y) = f(x,y) ** s_y(x,y)$ gradijent u točci je dan izrazom

$$\sqrt{g_x^2(x,y) + g_y^2(x,y)},$$

dok je smjer dan izrazom

$$\arctan \frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}.$$

Izračunajte gradijent i smjer za točku $(x,y) = (0,0)$.

Otipkavanje i kvantizacija

29. Neka je 2D kontinuirani prostorni signal intenziteta opisan funkcijom

$$f(x,y) = \sin(\omega_1 x + \theta_1) + \cos(\omega_2 y + \theta_2) + 2,$$

gdje je $0 \le x \le 4$ i $0 \le y \le 4$. Izračunajte minimalne potrebne prostorne frekvencije otipkavanja za signal. Dolazi li do preklapanja spektra prilikom otipkavanja signala prostornom frekvencijom $f = 1$ po x i po y smjeru? Neka su frekvencije $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$ i faze $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

30. Neka je 2D kontinuirani prostorni signal intenziteta opisan funkcijom

$$f(x,y) = \sin(\omega_1 x + \theta_1)\cos(\omega_2 y + \theta_2) + 1,$$

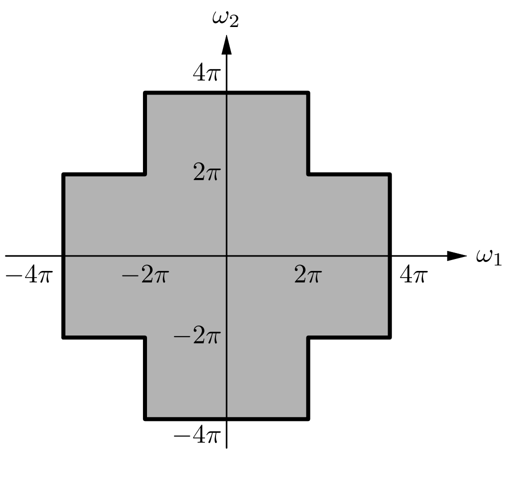
gdje je $0 \le x \le 4$ i $0 \le y \le 4$. Izrazite minimalne potrebne prostorne frekvencije otipkavanja za signal $f(x,y)$ preko parametara signala ω_1, ω_2, θ_1 i θ_2. Ako znate da su frekvencije $\omega_1 = \omega_2 = \pi/2$ i faze $\theta_1 = \theta_2 = 0$ dolazi li do preklapanja spektra prilikom otipkavanja signala prostornom frekvencijom $f = 1$ po x i po y smjeru?

31. Kontinuirani 2D signal ima spektar $F_k(\omega_1, \omega_2)$ koji je jednak jedinici za područje označeno slikom, dok je za sve ostale vrijednosti kontinuiranih kružnih frekvencija ω_1 i ω_2 spektar jednak nuli. Za koje vrijednosti razmaka uzorkovanja Δx i Δy neće doći do preklapanja spektra? Ako znate da je spektar dobivenog diskretnog signala opisan izrazom

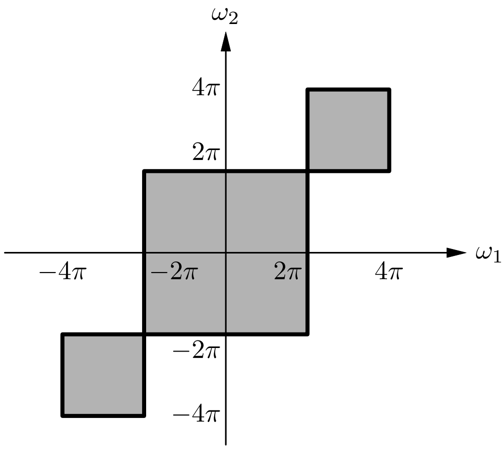
$$F_d(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_k\Big(\frac{\Omega_1 + 2\pi i}{\Delta x}, \frac{\Omega_2 + 2\pi j}{\Delta y}\Big)$$

skicirajte pripadni spektar diskretnog signala za $\Delta x = \frac{1}{2}$ i $\Delta y = \frac{1}{2}$.

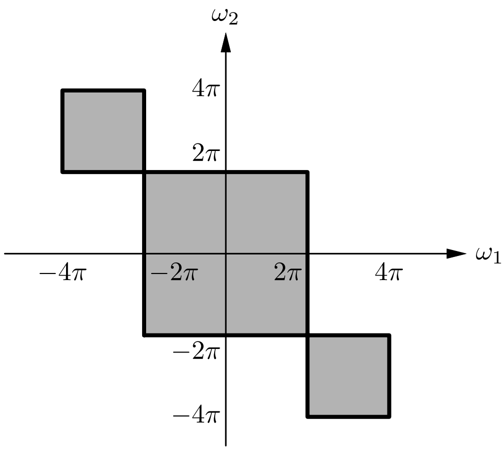
a)



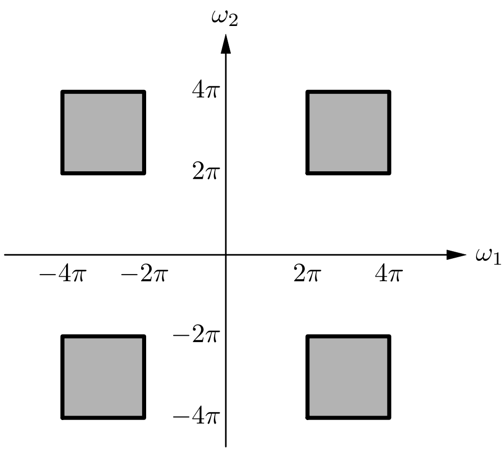
b)



c)



d)



Transformacije slike

Kada govorimo o transformacijama slike sliku možemo predstaviti matricom. No pri tome je potrebno obratiti pažnju na dimenzije slike. Ako kažemo da razmatramo sliku dimenzija $N \times M$ to znači je slika široka N točaka i visoka M točaka, a ako kažemo da promatramo matricu dimenzija $N \times M$ to znači da matrica ima N redaka (visina matrice) i M stupaca (širina matrice). Dakle ako promatramo sliku dimenzija 3×4 to je slika[1]

$$f(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \underline{9} & 10 & 11 & 12 \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

a jedna moguća pripadna matrica $\mathbf{F}$ dimenzija 4×3 bi bila

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \\ 11 & 7 & 3 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Za tako odabranu matricu $\mathbf{F}$ element u retku x i stupcu y je upravo $f(x,y)$.

Ako u zadacima nije točno naveden koordinatni sustav koji se koristi (položaj ishodišta i orijentacija osi) smijete ga slobodno odabrati. Također, ako nije navedena konvencija kako se slika reprezentira u matričnom obliku smijete odabrati reprezentaciju koja vam najviše odgovara. U oba slučaja *obavezno navedite što ste odabrali*!

32. Ispitajte unitarnost zadane matrice:

a) $\mathcal{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

b) $\mathcal{S}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

33. Korištenjem izraza $\mathbf{W}_N\mathbf{F}\mathbf{W}_M^T$ izračunajte dvodimenzionalnu diskretnu Fourierovu transformaciju u $M \times N$ točaka slike $\mathbf{F}$:

a) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $N = M = 3$

b) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N = M = 3$

c) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $N = 3$, $M = 6$

d) $\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N = 6$, $M = 3$

[1] Podcrtani uzorak slike je uzorak za $(x,y) = (0,0)$. Elementi u retku imaju istu vrijednost nezavisne varijable y, dok elementi u stupcu imaju istu vrijednost varijable x. Vrijednost x se povećava s pomakom od lijeva na desno dok se vrijednost y povećava s pomakom prema gore.

34. Neka je $\mathbf{F}$ matrica dimenzija $N \times M$ koja reprezentira sliku. Želimo li izračunati dvodimenzionalnu diskretnu Fourierovu transformaciju u $M \times N$ točaka možemo koristiti izraz

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}_N \mathbf{F} \mathbf{W}_M^T.$$

Odredite za koji kompleksni broj $c \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$\mathbf{F} = c(\mathbf{W}_N^H)^T \mathbf{G} \mathbf{W}_M^H.$$

35. Definirajte 1D Karhunen-Loéve transformaciju. Zadana je autokorelacijska matrica

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore zadane autokorelacijske matrice. Ako je $\mathbf{T}$ matrica čiji stupci su normirani svojstveni vektori matrice $\mathbf{R}$ izračunaj $\mathbf{T}^H\mathbf{R}\mathbf{T}$. Je li dobivena matrica dijagonalna?

Poboljšanje slike

36. Navedite impulsni odziv jednostavnog filtra za usrednjavanje na prozoru dimezija $N \times M$. Zašto se za N i M gotovo uvijek odabiru neparni brojevi? Odredite rezultat filtriranja filtrom za usrednjavanje dimenzija 3×3 ako je zadana ulazna slika

$$f(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ \underline{4} & 3 & 2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

37. Navedite definiciju median filtra. Odredite rezultat filtriranja median filtrom dimenzija 3×3 ako je zadana ulazna slika

$$f(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ \underline{4} & 3 & 2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

38. Histogram vrijednosti kontinuirane 2D slike $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \langle 0,1 \rangle$ možemo opisati izrazom

$$h_f(i) = \begin{cases} 2 - 2i, & i \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Odredite funkciju koju je potrebno primjeniti na sliku kako bi dobili sliku $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \langle 0,1 \rangle$ s histogramom

$$h_g(i) = \begin{cases} 2i, & i \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Segmentacija slike

39. U ovom zadatku ćete pokušati primjeniti usporedbu s pragom s ciljem segmentacije slike. Na slici 3. prikazani su slike brojeva `0`, `1`, i `2` te slova `A`, `B`, `C`, `a`, `b` i `c` dimenzija 5×8. Brojevi upisani na slici su vrijednosti slike koje su dobivene iz idealnih slika dodavanje aditivnog šuma čije karakteristike nisu poznate, dok je sivom bojom označen željeni rezultat segmentacije. Usporedba s pragom zahtijeva odabir neke vrijednosti t praga koja se koristi za klasifikaciju točaka slike prema izrazu

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & f(x,y) \geq t \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \tag{6}$$

a) Postoji li jedna vrijednost praga t takva da primjenom istog praga na svaku sliku dobijemo željeni rezultat? Postoji li takva vrijednost ako svaku sliku promatramo posebno?

b) Ako definiramo pogrešku kao ukupni broj krivo klasificiranih točaka odredite vrijednost praga t koja daje najmanju pogrešku.

c) Za odabranu vrijednost praga odredite kontingencijsku tablicu[2].

Napomena: Zadatak rješite upotrebom računala! Ako nemate pristup računalu umjesto svih znakova odaberite dva te napravite zadatak za odabrana dva znaka.

Zadaci za one koji žele znati više

40.* Definirajte funkciju udaljenosti, odnosno navedite koja svojstva mora zadovoljiti svaka funkcija udaljenosti. Ako su $p = (p_1, p_2, p_3)$ i $q = (q_1, q_2, q_3)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^3$ za svaku od navedenih funkcija ispitajte jesu li navedena svojstva zadovoljena:

a) $d_e(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$

b) $d_6(p,q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|$

c) $d_{18}(p,q) = \max\{d_{26}(p,q), \lceil d_6(p,q)/2 \rceil\}$

d) $d_{26}(p,q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|, |p_3 - q_3|\}$

41.* Označimo sa $p = (p_1, p_2, p_3)$ i $q = (q_1, q_2, q_3)$ dvije točke iz $\mathbb{R}^3$. Definirajte 6-udaljenost d_6, 26-udaljenost d_{26} i Euklidsku udaljenost d_e za točke p i q u trodimenzionalnom prostoru. Pokažite da 6-udaljenost d_6, 26-udaljenost d_{26} i Euklidska udaljenost d_e zadovoljavaju nejednadžbu

$$d_{26}(p,q) \leq d_e(p,q) \leq d_6(p,q) \leq 3d_{26}(p,q), \quad \forall p.q \in \mathbb{R}^3.$$

42.* Označimo sa $p = (p_1, p_2, p_3)$ i $q = (q_1, q_2, q_3)$ dvije točke iz $\mathbb{Z}^3$. Definirajte 18-udaljenost d_{18} i 26-udaljenost d_{26} za točke p i q u trodimenzionalnom prostoru. Pokažite da vrijedi

$$d_{26}(p,q) \leq d_{18}(p,q) \leq d_e(p,q)$$

za svaki par (p,q) iz $\mathbb{Z}^2$ takav da je Euklidska udaljenost $d_e(p,q) \neq \sqrt{3}$.

43.* Euklidska metrika d_e je računalno zahtijevna te se u nekim primjenama koriste odgovarajuće aproksimacije. Označimo sa $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ par točaka i neka je ρ slijed poteza potrebnih da kralja

[2] Kontingencijska tablica je tablica u koju se redom upisuju: broj točaka koje su klasificirane kao znak i to jesu (TP), broj točaka koje su klasificirane kao znak a to nisu (FP), broj točaka koje su klasificirane kao pozadina a to nisu (FN) i broj točaka koje su klasificirane kao pozadina i to jesu (TN).

0	**5**	**5**	**8**	3
7	2	1	4	**7**
7	3	0	**5**	**8**
6	3	**7**	0	**4**
4	**8**	0	2	**6**
5	1	3	3	**7**
2	**7**	**5**	**8**	2

broj 0

0	1	**5**	4	3
3	**6**	**5**	4	3
3	3	**4**	1	4
2	3	**7**	0	0
0	4	**4**	2	2
1	1	**7**	3	3
2	**7**	**5**	**8**	2

broj 1

0	**5**	**5**	**8**	3
7	2	1	4	**7**
3	3	0	**5**	4
2	3	**7**	0	0
0	**8**	0	2	2
5	1	3	3	3
6	**7**	**5**	**8**	**6**

broj 2

0	1	**5**	4	3
3	**6**	1	**8**	3
7	3	0	1	**8**
6	3	3	0	**4**
4	**8**	**4**	**6**	**6**
5	1	3	3	**7**
6	3	1	4	**6**

slovo A

4	**5**	**5**	**8**	3
7	2	1	4	**7**
7	3	0	1	**8**
6	**7**	**7**	**4**	0
4	4	0	2	**6**
5	1	3	3	**7**
6	**7**	**5**	**8**	2

slovo B

0	**5**	**5**	**8**	3
7	2	1	4	**7**
7	3	0	1	4
6	3	3	0	0
4	4	0	2	2
5	1	3	3	**7**
2	**7**	**5**	**8**	2

slovo C

0	1	1	4	3
3	2	1	4	3
3	**7**	**4**	1	**8**
6	3	3	**4**	**4**
4	4	0	2	**6**
5	1	3	**7**	**7**
2	**7**	**5**	4	**6**

slovo a

4	1	1	4	3
7	2	1	4	3
7	3	**4**	**5**	4
6	**7**	3	0	**4**
4	4	0	2	**6**
5	**5**	3	3	**7**
6	3	**5**	**8**	2

slovo b

0	1	1	4	3
3	2	1	4	3
3	**7**	**4**	**5**	4
6	3	3	0	**4**
4	4	0	2	2
5	1	3	3	**7**
2	**7**	**5**	**8**	2

slovo c

Slika 3.: Prikaz brojeva i slova u slikama dimenzija 5×8

premjestimo iz p u q. Neka je $l_{a,b}(\rho) = am + bn$, gdje je m broj vodoravnih ili okomitih pokreta, a n broj dijagonalnih pokreta kralja, dok su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $0 < a \leq b \leq 2a$. Pokažite da je

$$d_{a,b}(p,q) = \min_{\rho} l_{a,b}(\rho)$$

metrika. Također pokažite da $(1,b)$-putna udaljenost $d_{1,b}$ (eng. $(1,b)$-*chamfer distance*) najbolje aproksimira Euklidsku udaljenost d_e za $b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sqrt{2}-1}$ te da za apsolutnu pogrešku aproksimacije na mreži veličine $(k+1) \times (k+1)$ vrijedi

$$|d_e - d_{1,b}| \leq \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{2}-1}\Big)k.$$

44.* Pokažite da $(3,4)$-putnu udaljenost (eng. $(3,4)$-*chamfer distance*) između točki p i q iz $\mathbb{Z}^2$ možemo računati kao

$$d_{3,4}(p,q) = \frac{1}{3}d_4(p,q) + \frac{2}{3}d_8(p,q).$$

45. Definirajte histogram prvog i drugog reda te navedite izraze za momente i centralne momente. Odredite histogram prvog reda i histogram drugog reda uz pomak $(4,1)$ za zadanu sliku 4..

3	3	3	0	0	0	2
0	1	0	1	0	0	2
2	1	2	2	1	1	1
0	2	3	2	0	3	0

Slika 4.: Ulazna slika za zadatak 45

46. Definirajte histogram prvog i drugog reda te navedite izraze za momente i centralne momente. Odredite histogram prvog reda i histogram drugog reda uz pomak $(1,1)$ za zadanu sliku 5..

3	3	3	0
0	1	0	1
2	1	2	2
0	2	3	2

Slika 5.: Ulazna slika za zadatak 46

47.* Impulsni odziv filtra za Gaussovo usrednjavanje (eng. *Gaussian blur*) može se opisati izrazom

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Želimo li realizirati diskretno Gaussovo usrednjavanje potrebno odabrati devijacije σ_x i σ_y te područje na kojem računamo odziv. U programima za obradu slike parametar koji se zadaje jest promjer maske za filtriranje r s time da je tipično $\sigma_x = \sigma_y$. Uz zadani $r > 0$ dimenzije maske $N \times N$ možemo odabrati tako da je $N = 2\lceil r \rceil + 1$, odnosno x i y poprimaju cjelobrojne vrijednosti iz intervala $-2\lceil r \rceil, -2\lceil r \rceil + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2\lceil r \rceil$. Devijacije σ_x i σ_y odabiremo tako da vrijedi $\sigma_x = \sigma_y \leq r/3$ (obično se uzima jednakost).

a) Pokažite da odabir $N = 2\lceil r \rceil + 1$ uvijek rezultira impulsnim odzivom filtra s neparnim brojem uzoraka i po x i po y osi. Objasnite zašto je to bitno!

b) Pokažite da impulsni odziv poprima najveću vrijednost za $(x,y) = (0,0)$. Odredite gornju granicu omjera vrijednosti uzoraka impulsnog odziva u $(0,0)$ i $(0, 2\lceil r \rceil)$ te $(0,0)$ i $(2\lceil r \rceil, 2\lceil r \rceil)$ ako je $\sigma_x = \sigma_y \leq r/3$. Objasnite zašto smo ograničili raspon devijacija.

c) Pokaži da je impulsni odziv separabilan, odnosno da vrijedi $h(x, y) = h_x(y)h_y(y)$ te da je $h_x(x) = h_y(x)$.

d) Želimo li primijeniti dani filtar na ulaznu sliku $f(x, y)$ možemo računati $f(x, y) ** h(x, y)$ ili možemo iskoristiti separabilnost odziva i računati $\big(f(x, y) * h_x(x)\big) * h_y(y)$. Odredi broj operacija zbranja i množenja za svaki od postupaka. Koji je postupak efikasniji?

e) Odredite rezultat filtriranja uz $r = 1$ ako je zadana ulazna slika

$$f(x, y) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ \underline{4} & 3 & 2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

48.* Neka je zadana prostorno kontinuirana slika određena s vrijednostima intenziteta $f(x, y)$. Definirajte gradijent u točci, njegov iznos i smjer. Navedite neke gradijentne operatore koje koristimo za estimaciju gradijenta na prostorno diskretnim slikama. Za navedene gradijentne operatore odredite iznos gradijenta i smjer gradijenta za digitalnu sliku 6.. Je li odziv isti za vodoravne, okomite i dijagonalne linije? Kako odziv ovisi o odabranom operatoru? Koje aproksimacije se koriste za pojednostavljenje izraza kada želimo realizirati estimaciju iznosa gradijenta u cjelobrojnoj aritmetici? Kako te aproksimacije utječu na odziv za različite linije sa slike 6.?

1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1

Slika 6.: Ulazna slika sa četiri linije (linije se nastavljaju)

49.* Opišite model degradacije slike. Navedite prijenosnu funkciju Wienerovog filtra. Odredite prijenosnu funkciju i impulsni odziv Wienerovog filtra za sliku poznate autokorelacijske funcije

$$R_{XX}(\Delta x, \Delta y) = e^{-2|\Delta x| - 2|\Delta y|}$$

uz nekorelirani aditivni bijeli šum za koji je $S_{NN}(\omega_1, \omega_2) = 16$. Neka je prijenosna funkcija degradacije

$$H(\omega_1, \omega_2) = (2 + j\omega_1)(2 + j\omega_2).$$

Uputa: Koristite separabilnost 2D Fouirerove transformacije. Za jednodimenzionalnu Fourierovu transformaciju je

$$e^{-ax}\,\mu(x) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a + j\omega} \quad \text{i} \quad e^{-a|x|} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2a}{a^2 + \omega^2},$$

gdje je a pozitivna realna konstanta.