Pitanja za završni ispit iz Obradbe informacija

Realni spektri

By blackjade

Varijante parne i periodičke ekstenzije signala

Želimo smanjiti signal. Znači, nekako, htjeli bi eliminirati redundanciju.
FT (Fourierove Transformacije) su za to pogodne, no ne i nužno idealne.
Na primjer, **DFT** nam **u generalnom slučaju vraća kompleksne koeficijente periodički proširenog signala**, što je **redundantno**. Nadalje, **kod proširivanja** često **nastaju diskontinuiteti**, što „potroši" puno koeficijenata.

Tražimo **realnu transformaciju, sa sažetim opisom**.
DFT PARNIH funkcija vrača samo cos koeficijente (**koeficijenti su realni**). Još bolje, parne su funkcije **simetrične oko nule** (proširivanje **ne uzrokuje diskontinuitete**).

Znači, želimo konačan signal trajanja N nadopuniti do parnosti.
Četiri glavna načina.

(*A*,b,c,d,e)- signal, A je početni uzorak, N=5

SIMETRIČNI

S PONAVLJANJEM PRVOG

(**e,d,c,b,a**,A,b,c,d,e) – boldani su novi. N_2 =2N

BEZ PONAVLJANJA PRVOG I ZADNJEG

(**d,c,b**,A,b,c,d,e) – primijetite da „nedostaju“ a i e. N_2 =2*N-2

ANTISIMETRIČNI (nadovezuju se na simetrične)

(**e**,**d,c,b**,**a**,A,b,c,d,e, -e,-d,-c,-b,-a, ,-a,-b,-c,-d,-e) – Kopiraj cijeli niz sa desne strane, stavi minus ispred svakog kopiranog. N_2 =4N

(0,**d,c,b**,A,b,c,d,e, -0,-d,-c,-b,-a,-b,-c,-d,-e) –Dodaj nulu s lijeve strane, s desne strane kopiraj cijeli niz (uključujući nulu), stavi minus ispred svakog kopiranog. N_2 =4N

Diskretna kosinusna transformacija (DCT), varijante i veze s DFT

$$X_{DFT}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\quad \textbf{DFT}$$

$$X(k)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N-2}nk}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-2}\ x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N-2}(2N-2-n)k}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N-2}nk}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sum_{n=1}^{N-2}\ x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N-2}(-n)k}$$

Iz prve sume izdvojimo prvi i zadnji pribrojnik, te spojimo preostale sume.

$$=\frac{1}{2}x(0)+\frac{1}{2}x(N-1)\cdot(-1)^k+\sum_{n=1}^{N-2}\ x(n)\cos(\frac{\pi}{N-1}nk)$$
$$X(k)=\frac{1}{2}(x(0)+x(N-1)\cdot(-1)^k)+\sum_{n=1}^{N-2}\ x(n)\cos(\frac{\pi}{N-1}nk)$$

Što je izraz za NESKALIRANI DCT-I.

DCT najčešće znači DCT-II (ta se varijanta tipično koristi). Razlika je u tipu proširenja do parnosti. DCT-II koristi drugu varijantu (s ponavljanjem prvog elementa).

$$X(k) = w_k \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{\pi}{N} \mathbf{(n + \frac{1}{2})} k$$ **DCT. DCT-II**

$$w_k = (\sqrt{1/N}, k = 0. \sqrt{2/N}, \text{ k} \neq 0)$$

w_k su **težinski faktori**. U osnovi, osiguravaju da vrijedi **Parsevalov teorem** o čuvanju energije.
Boldani dio u formuli, lak je način da zapamtite koje proširenje do parnosti se koristi u DCT-II (DCT) (drugo, jer je u njemu os simetrije **IZMEĐU** dva uzorka (dakle, na pola))

$$x(n) = w_k \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{\pi}{N} \mathbf{(n + \frac{1}{2})} k$$ **IDCT,IDCT-II**

$$w_k = (\sqrt{1/N}, k = 0. \sqrt{2/N}, \text{ k} \neq 0)$$

Obratite pozornost na zamjenu n i k u granicama sume.

DCT & IDCT matrice, filtarski slog, primjene

U izrazu za DCT, dosta elemenata ovisi samo o n,k no ne i o ulazu (x(n)). Navodi na optimiziranje.

$$W^{n,k} = w_k \cdot \cos\frac{\pi}{N}(n+\frac{1}{2})k$$

$W^N = N * N$ matrica

$$W^4 = \begin{bmatrix} W^{0,0} & W^{1,0} & W^{2,0} & W^{3,0} \\ W^{0,1} & W^{1,1} & W^{2,1} & W^{3,1} \\ W^{0,2} & W^{1,2} & W^{2,2} & W^{3,2} \\ W^{0,3} & W^{1,3} & W^{2,3} & W^{3,3} \end{bmatrix}$$

IDCT je TRANSPONIRANA DCT (i obratno;)
(UNITARNE MATRICE.)

$$W_{IDCT}^N = (W_{DCT}^N)^T$$

$$w_n = (\sqrt{1/N}, k = 0. \ \sqrt{2/N}, k \neq 0)$$

Sve varijante DCT-a računaju se putem FFT-a (učinkovitost).
(Direktna realizacija je poput složenosti DCT-a.)

DCT filtarski slog je **DFT filtarski slog s realnim filtrima.**
Signal podijeliš u blokove dužine N. Na svakom radiš DCT.

U DCT matrici, **svaki redak je jedan filter.** Koristimo li notaciju DCT matrica, **k-ti filtar je**

$$H_k(z) = W^{k,0} + zW^{k,1} + z^2 W^{k,2} + ... + z^{N-1} W^{k,N-1} \quad \text{(za k-ti } \textbf{redak}\text{)}$$

Svaki **filtar daje jedan koeficijent**, **svi** filtri **zajedno čine** DCT **filtarski slog**.

IDCT zamjenjuje stupce i retke (matrica se dobiva transpozicijom DCT matrice)

$$F_k(z) = W^{k,0} + z^{-1} W^{k,1} + z^{-2} W^{k,2} + ... + z^{-(N-1)} W^{k,N-1} \quad \text{(za k-ti } \textbf{stupac}\text{)}$$

Decimacija je zadržavanje svakog N-tog uzorka rezultata filtriranja.
Tako dobivamo realizaciju DCT-a blok-po-blok.

(NIJE GRADIVO, no pomaže pamćenju)
Usput, ***decimacija*** *je originalno bila naziv za kazneni postupak prakticiran u rimskim legijama. Kod posebno kukavičkog ponašanja u bitci, general je mogao narediti da se svaki deseti vojnik ubije (latinski: decimatio; decem = "deset"). Jedinice su se podijelile u grupe po deset, i u svakoj se izvlačenjem birao jedan. Devet preostalih moralo je ubiti desetog, najčešće kamenovanjem ili palicama. Riječ znači „uklanjanje desetine“.*
http://en.wikipedia.org/wiki/Decimation_(Roman_Army)

Kod blokovskih obrada, javljaju se **preklapanja na rubovima.** To nam se ne sviđa, i **koristimo metode s preklapanjem blokova.**

Modificirana DCT

Sastavni dio audio kodera (mp3, ac3, ogg, aac, ...)
Uzimamo blokove dužine 2N. Na svakom računamo N **DCT-IV** koeficijenata.
Rekonstrukcija se vrši iz preklopljenih blokova.
Po želji, na blokove možemo primijeniti vremenske otvore.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n)\cos\left[\frac{\pi}{N}(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2})(k+\frac{1}{2})\right] \text{ DCT-IV}$$
$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\left[\frac{\pi}{N}(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2})(k+\frac{1}{2})\right] \text{ IDCT-IV}$$

k=1, ..., N-1

MDCT filtarski slog

N DCT-IV filtara dužine 2N; decimacija i ekspanzija za faktor N; polovično preklapanje blokova. (ako vam je ovo nejasno, pogledajte malo objašnjenja filtarskih slogova od prije (DCT-II), stvarno nije komplicirano.)

Na svaki se blok primjenjuje vremenski otvor.

$$w(n) = \sin\frac{\pi}{2N}(n+\frac{1}{2})$$
$$\textit{vrijedi } w_n^2 + w_{n+N}^2 = 1$$

Otvor se primjenjuje **prije MDCT** i **nakon IDCT**.
Rezultat valja podijeliti sa 2.

Wavelet transformacija: Haar

Ako linearnu transformaciju predstavimo matricom, onda je svaka **regularna** matrica **T** jedna linearna transformacija.

Mora biti regularna, jer regularne imaju **inverz** (a to nam treba zbog inverzne transformacije). Znamo li (željene) dimenzije matrice, možemo **iscrpno pretražiti prostor linearnih transformacija.**

Ispada da je **Karhunen-Loeve** najsažetija. Numerički efikasnija (lakša realizacija u praksi) je **wavelet** (koristi je JPEG2000).

DCT loše opisuje diskontinuitete (treba mu puno koeficijenata). Wavelet pristup je bolji.

Wavelet transformacija razlaže signal na „valiće". Valići su **rastegnute i pomaknute kopije** nekog **predloška** („ mother wavelet" ;)

Haarova transformacija (najjednostavniji slučaj wavelet transformacije)

$$\psi(t) = (1, 0 \le t < 1/2.\ -1,\ 1/2 \le t \le 1.\ 0 \text{ inače})$$

Haarova matrica je **UNITARNA** (inverz se dobiva transpozicijom).

Kod wavelet transformacije, **novi koeficijenti sukcesivno poboljšavaju rezoluciju rekonstruiranog signala.**