Dizajn sustava

Obrada informacija

Damir Seršić

http://www.fer.hr/predmet/obrinf

Teme predavanja

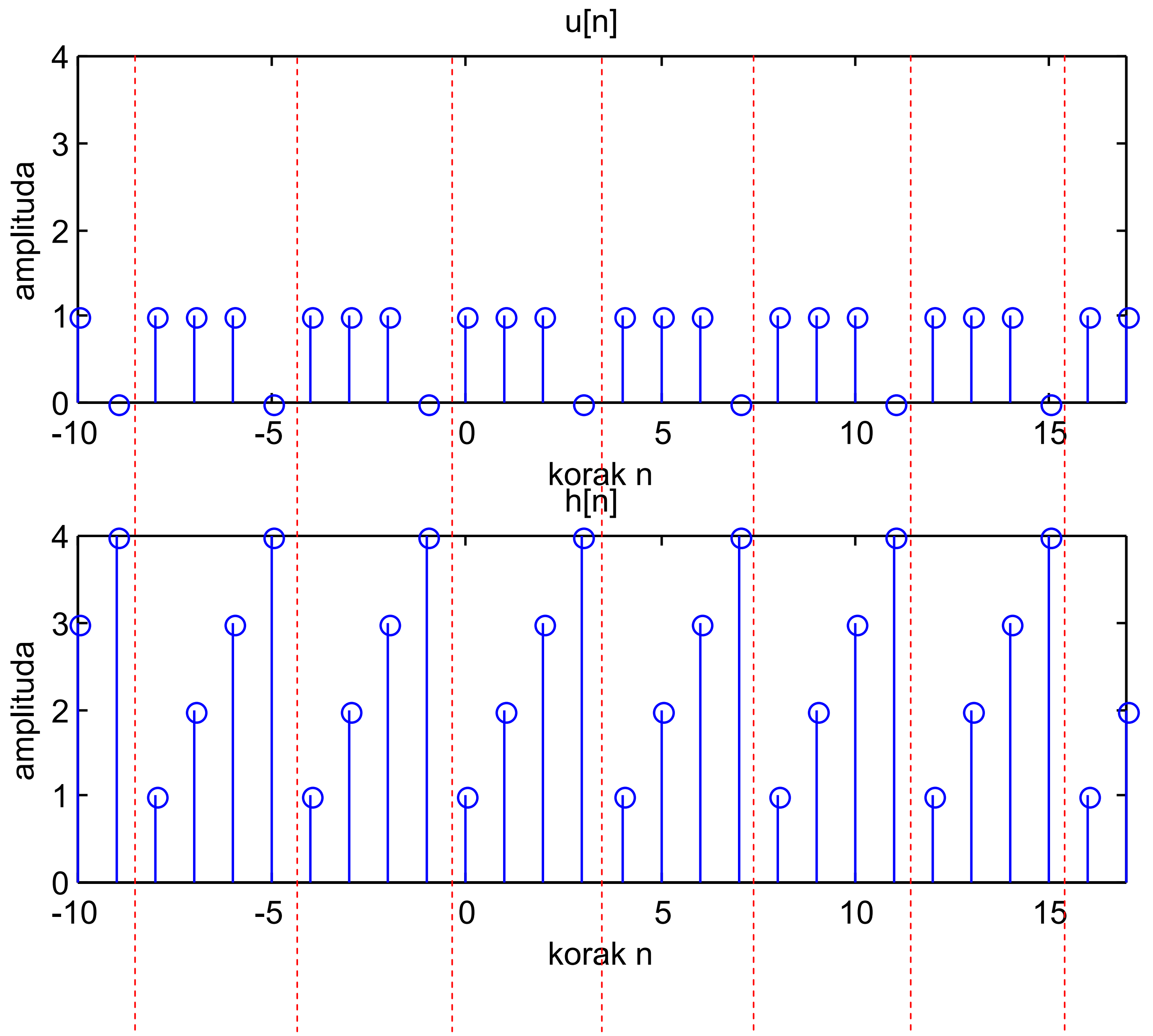
- Periodična i cirkularna konvolucija
- Brza konvolucija
- Projektiranje i primjena filtara u frekvencijskoj domeni
- Projektiranje FIR filtara
  - metoda vremenskih otvora
  - optimizacija
  - projekcijska metoda

Konvolucija periodičnih signala

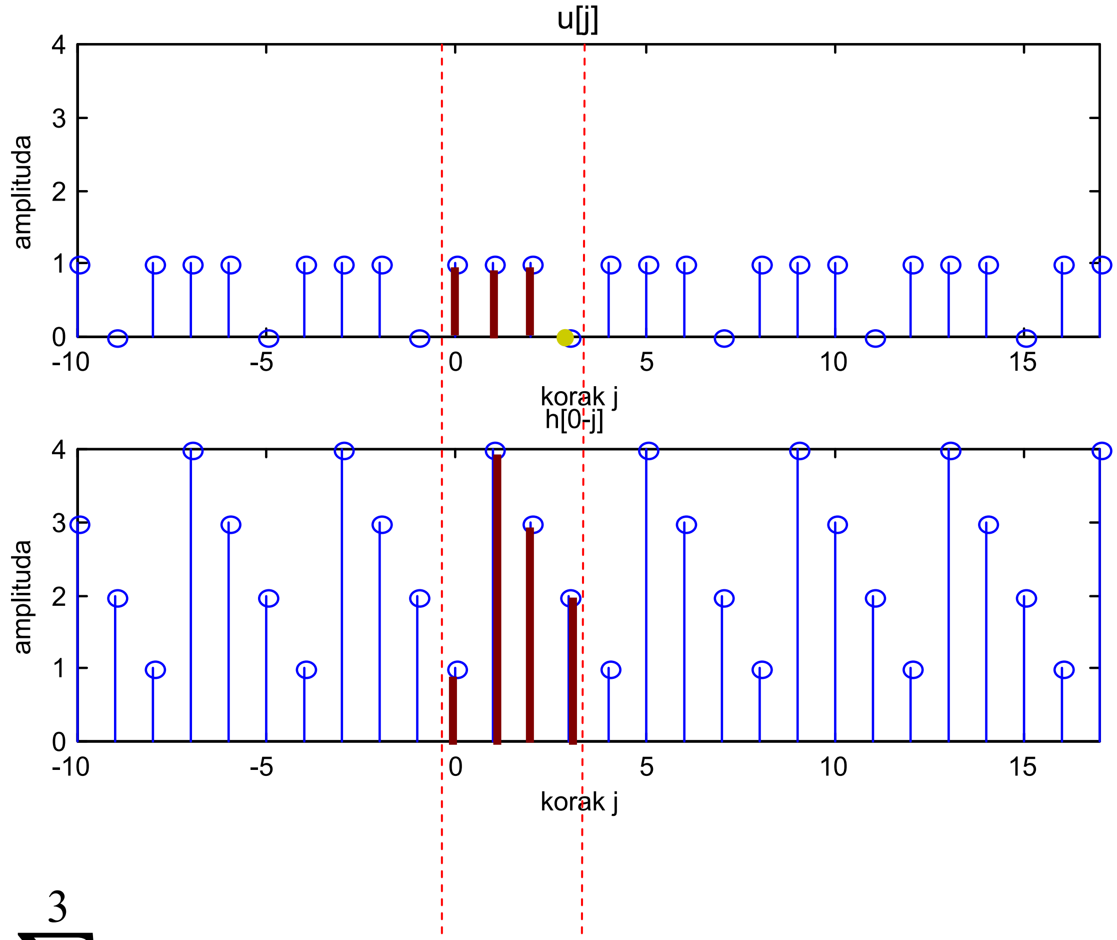
- Za periodične nizove $u_N[n]$ i $h_N[n]$ periode N definiramo periodičnu konvoluciju:

$$y_N[n] = \sum_{j=0}^{N-1} u_N[j] h_N[n-j]$$

- Kod periodične konvolucije imamo konačnu sumu od N pribrojnika.
- Rezultat je opet periodičan s periodom N.
- Slijedi primjer dva niza u i h, perioda $N = 4$.

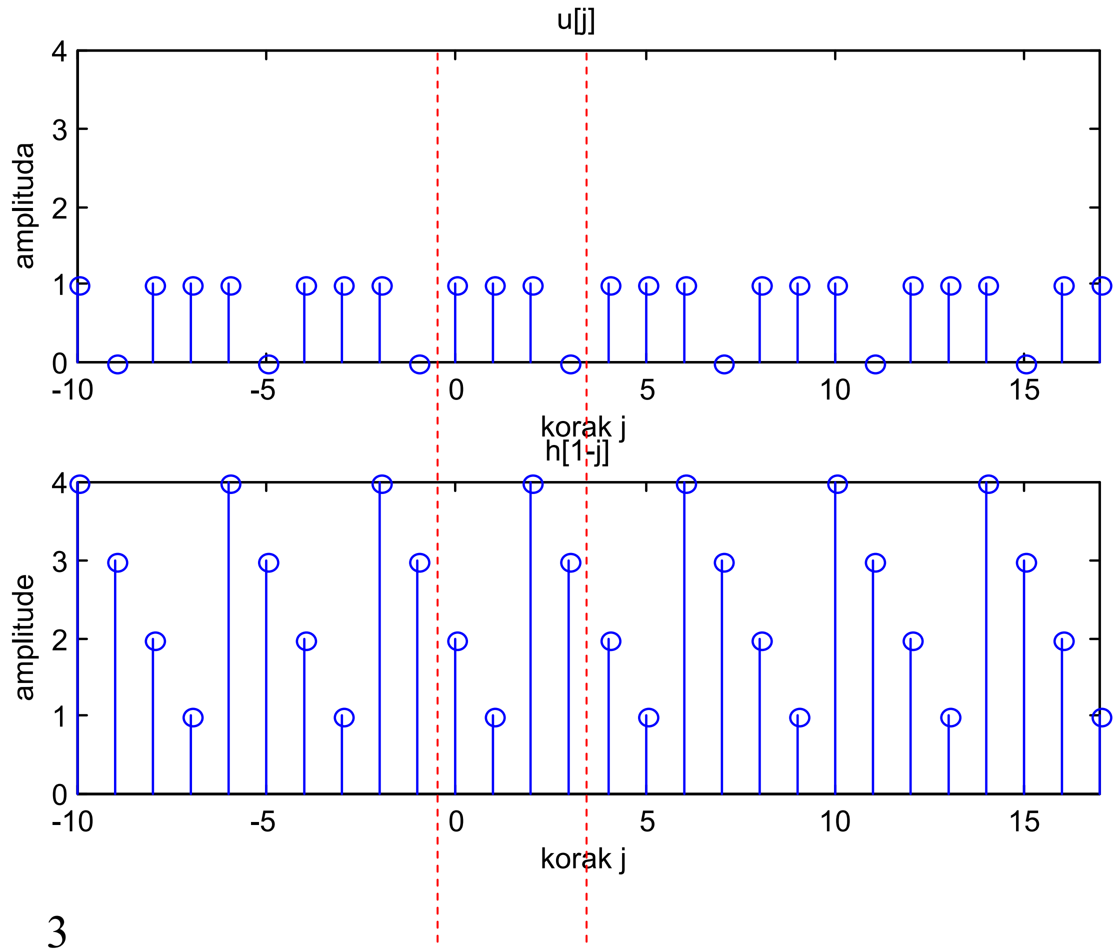

u[n]
amplitude
0
1
2
3
4
-10
-5
0
5
10
15
korak n
h[n]
amplitude
0
1
2
3
4
-10
-5
0
5
10
15
korak n

Primjer, N=4, n=0



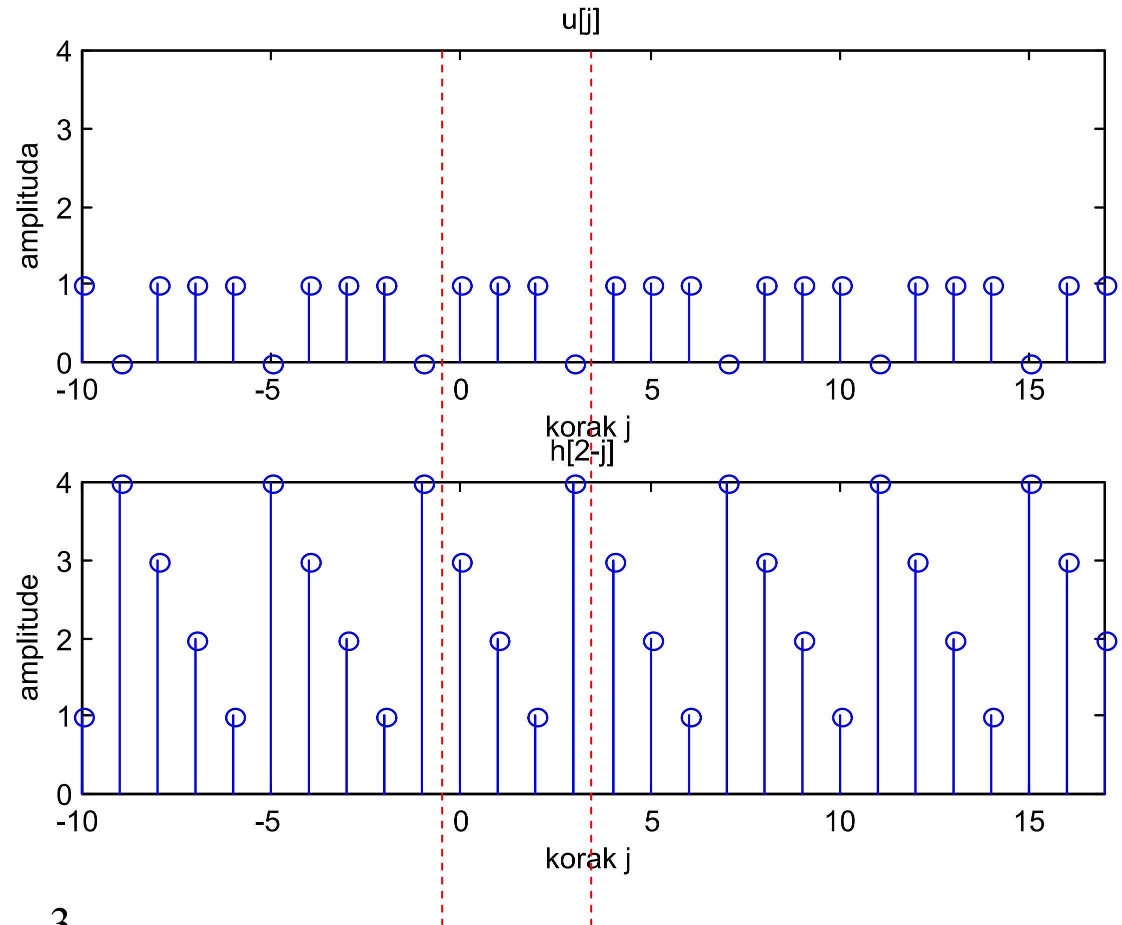
$$y[0] = \sum_{j=0}^{3} u[j] \cdot h[0-j] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 8$$

Primjer, N=4, n=1



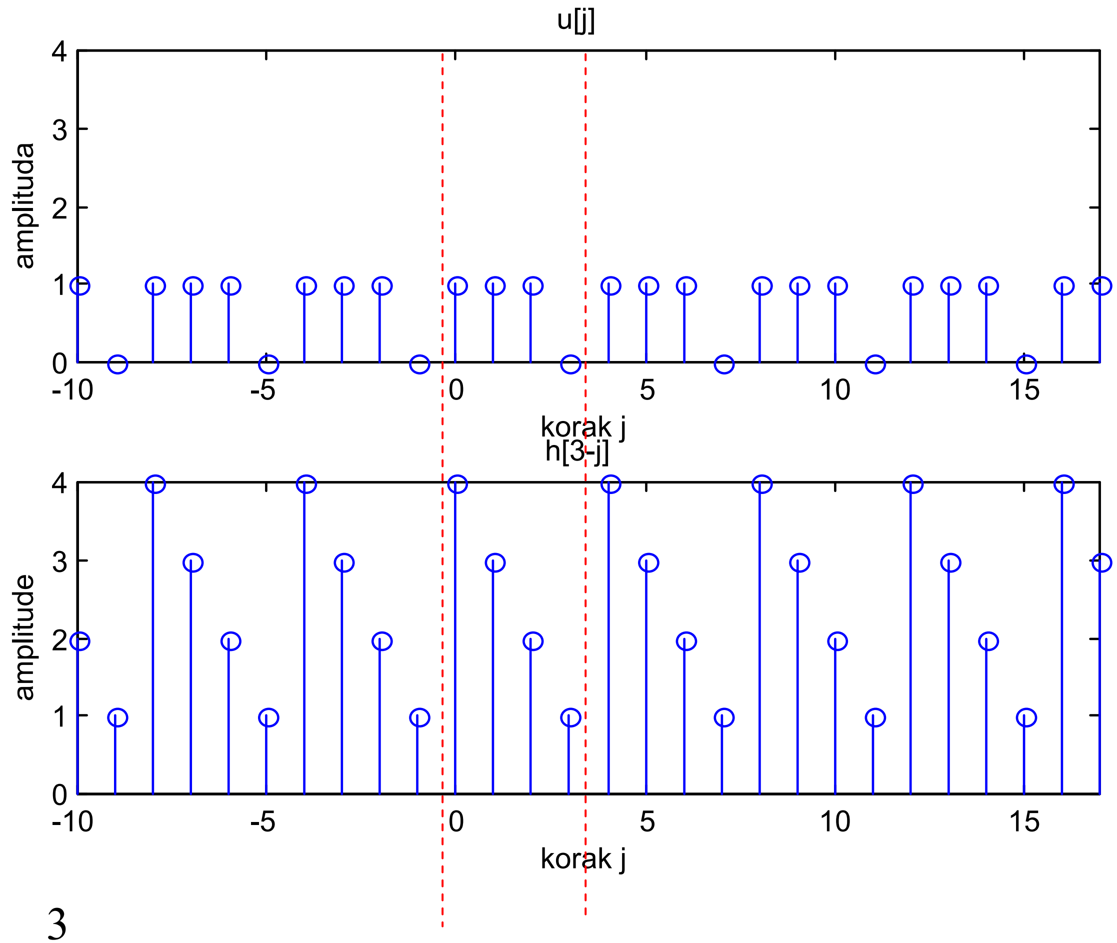
$$y[1]=\sum_{j=0}^{3} u[j]\cdot h[1-j]=1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 3=7$$

Primjer, N=4, n=2



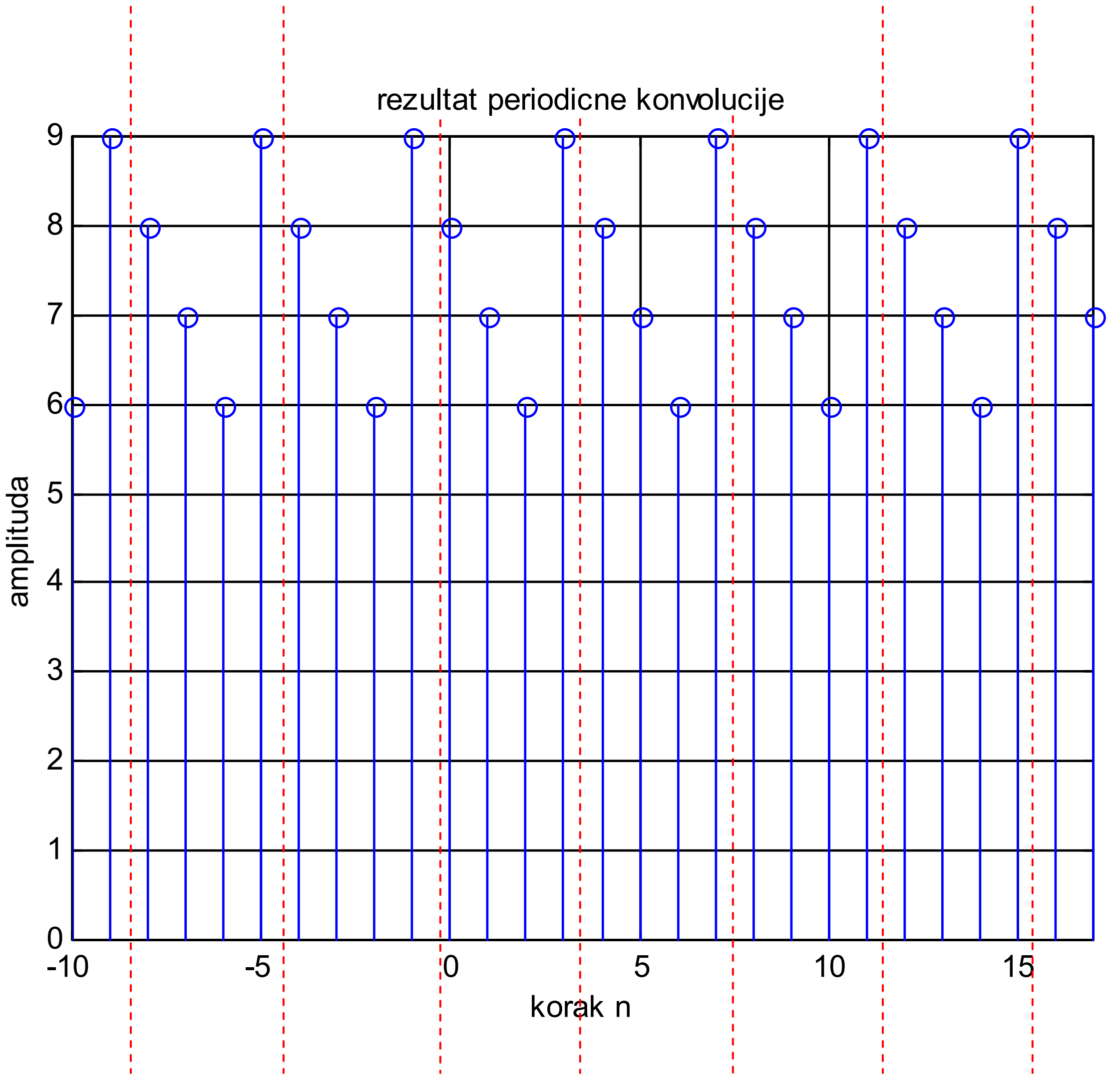
$$y[2]=\sum_{j=0}^{3}u[j]\cdot h[2-j]=1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 4=6$$

Primjer, N=4, n=3



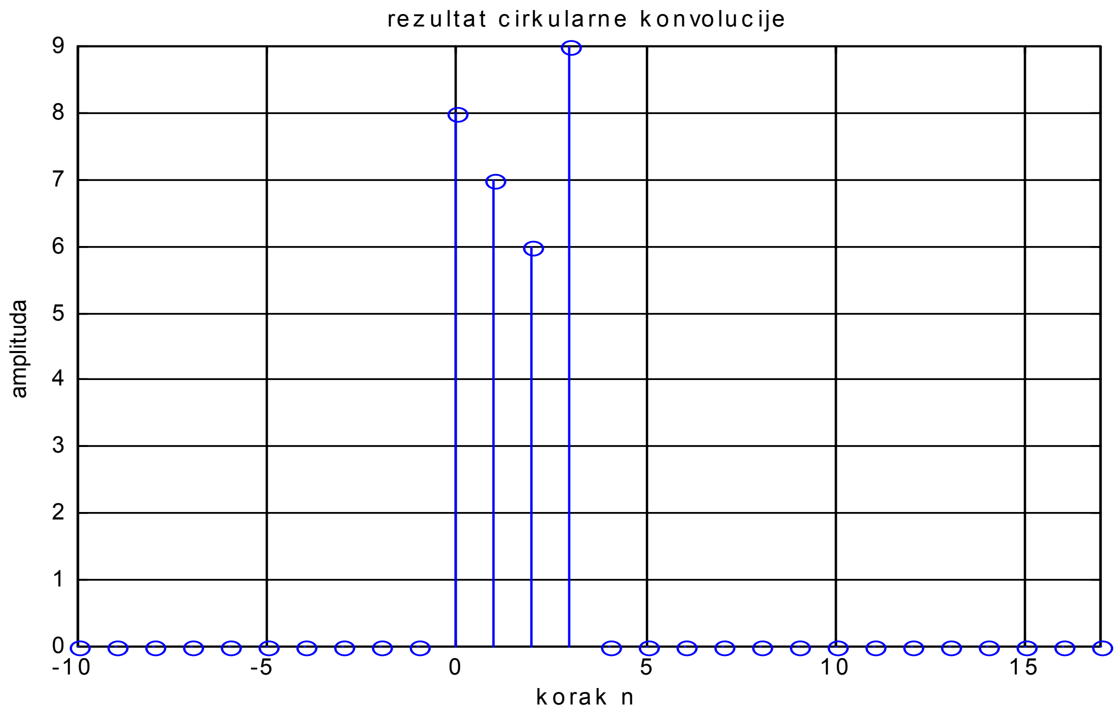
$$y[3]=\sum_{j=0}^{3}u[j]\cdot h[3-j]=1\cdot 4+1\cdot 3+1\cdot 2+0\cdot 1=9$$

Periodična konvolucija, rezultat primjera



Cirkularna konvolucija

- Cirkularnom ili kružnom konvolucijom nazivamo jednu periodu periodične konvolucije.
- U našem primjeru:



Matrična reprezentacija cirkularne konvolucije

- Za naš primjer ($N = 4$) pišemo jednadžbe za cirkularnu konvoluciju.
- Uz $h(-1)=h(3)$, $h(-2)=h(2)$ i $h(-3)=h(1)$ imamo:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= u(0)h(0) + u(1)h(3) + u(2)h(2) + u(3)h(1) \\
y(1) &= u(0)h(1) + u(1)h(0) + u(2)h(3) + u(3)h(2) \\
y(2) &= u(0)h(2) + u(1)h(1) + u(2)h(0) + u(3)h(3) \\
y(3) &= u(0)h(3) + u(1)h(2) + u(2)h(1) + u(3)h(0)
\end{aligned}
$$

$$y(n) = \sum_{j=0}^{N-1} u(j) \cdot h(\mathrm{mod}[n-j])$$

Matrična reprezentacija cirkularne konvolucije

- Uz nešto kompaktniji zapis imamo:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_{\mathrm{mod}(n-k)} \cdot u_k$$

$$\mathbf{y}_N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{NN} \cdot \mathbf{u}_N$$

Matrična reprezentacija cirkularne konvolucije

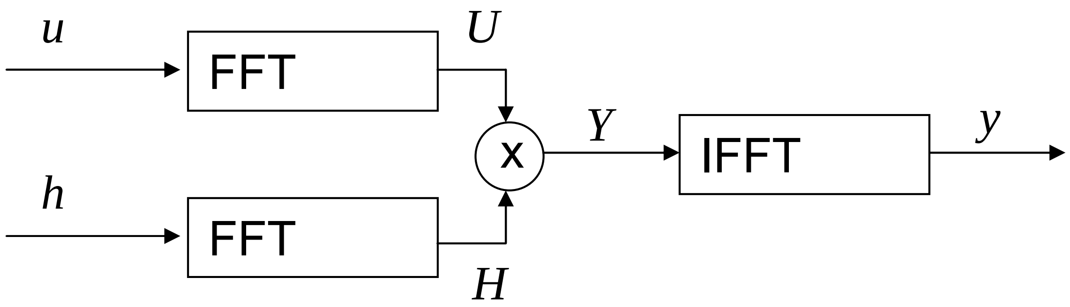
$$\mathbf{H}_{NN} = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

- Matrica $\mathbf{H}_{NN}$ je cirkulantna: svaki njezin redak nastaje pomicanjem prethodnog udesno uz premotavanje na rubovima.
- Takve matrice imaju mnoga dobra svojstva, a jedno od njih je posebna veza s DFT.

Brza cirkularna konvolucija

- Direktna primjena traži N^2 množenja i $N(N-1)$ zbrajanja.
- Spektar diskretnih periodičnih signala h i u možemo izračunati korištenjem FFT algoritma uz (dvaput po) $N\log_2 N$ operacija.
- Periodična konvolucija u spektralnoj domeni odgovara običnom množenju (N operacija).
- Odziv dobivamo kao IFFT ($N\log_2 N$ operacija).
- Za veće N imamo značajnu uštedu!

Brza cirkularna konvolucija



N	Broj množenja: direktno	Broj množenja: FFT
32	1.024	512
1024	1.048.576	31.744
65536	4.294.967.296	3.211.264

- Ako se impulsni odziv sustava h ne mijenja, onda se $H = \text{FFT}(h)$ izračuna samo jednom, pa je efektivni broj operacija za svaki u još manji.

Brza konvolucija signala konačnog trajanja

- Sve do sada rečeno odnosilo se na periodične signale i za sustave s periodičnim impulsnim odzivom.
- U praksi se puno češće srećemo sa signalima konačnog trajanja, te sustavima s konačnim impulsnim odzivom (FIR).
- Možemo li ideju brze konvolucije (tj. efikasne realizacije filtara u frekvencijskoj domeni) iskoristiti i za takve signale?

Ekvivalencija linearne i cirkularne konvolucije

- Pitanje je kada ova dva izraza mogu dati isti rezultat?

$$y_n = \sum_k h_{n-k} \cdot u_k \qquad\qquad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_{\mathrm{mod}(n-k)} \cdot u_k$$

- Cirkularna konvolucija se od linearne razlikuje po periodičkom premotavanju uzoraka: $\mathrm{mod}(n-k)$.
- Ako nadopunimo signal i impulsni odziv nulama, premotavanje neće imati utjecaja!

Primjer

- Uzmimo konačne signale tako da uzmemo jednu periodu signala iz prethodnog primjera
  - $u = \{\underline{1},1,1,0\}.$
  - $h = \{\underline{1},2,3,4\},$
- Direktno izračunata cirkularna konvolucija se razlikuje od linearne.
- Nadopunimo ih s (najmanje) 3 nule:
  - $u = \{\underline{1},1,1,0,0,0,0\}.$
  - $h = \{\underline{1},2,3,4,0,0,0\},$
- i izračunajmo periodičku konvoluciju!

Primjer: linearna pomoću cirkularne konvolucije

Zbog nadopunjavanja nulama, premotani uzorci nisu utjecali na rezultat.

$u[j] \quad = [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$

$h[0\text{-}j] = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 3\ 2]; \qquad \Rightarrow y[0] = 1$

$h[1\text{-}j] = [2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 3]; \qquad \Rightarrow y[1] = 3$

$h[2\text{-}j] = [3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 4]; \qquad \Rightarrow y[2] = 6$

$h[3\text{-}j] = [4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]; \qquad \Rightarrow y[3] = 9$

$h[4\text{-}j] = [0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0]; \qquad \Rightarrow y[4] = 7$

$h[5\text{-}j] = [0\ 0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0]; \qquad \Rightarrow y[5] = 4$

$h[6\text{-}j] = [0\ 0\ 0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0]; \qquad \Rightarrow y[6] = 0$

$h[7\text{-}j] = [0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 3\ 2\ 1]; \qquad \Rightarrow y[7] = 0$

Primjer 2: linearna pomoću cirkularne konvolucije

- Uz $h_0,h_1,u_0,u_1,u_2 \neq 0$ te proširenje nulama do $N=4$ imamo isto rješenje $y = y_N$:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}_N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & h_1 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{NN} \cdot \mathbf{u}_N$$

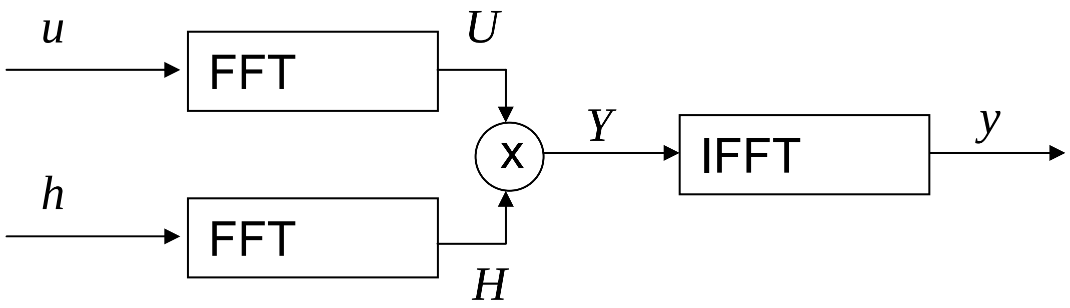
Primjer 2: linearna pomoću cirkularne konvolucije

$$\mathbf{y}_N = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & h_1 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{NN} \cdot \mathbf{u}_N$$

- U domeni diskretne Fourierove transformacije, množenje cirkulantnom matricom se svodi na N skalarnih množenja:

$$Y_k = H_k \cdot U_k, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

Zaključci



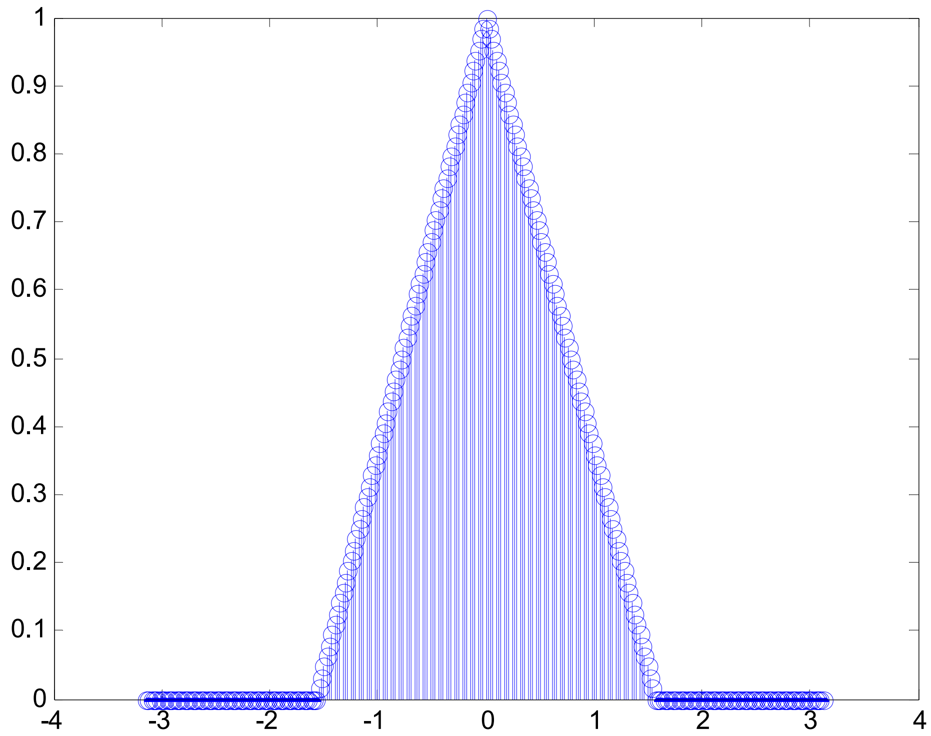
- Cirkularna se konvolucija može efikasno realizirati FFT algoritmom.
- Usprkos produžavanju nulama, za veće N implementacija filtara u frekvencijskoj domeni daje značajnu uštedu računskih operacija!
- Nedostatak: rezultat se izračunava u bloku, a ne korak po korak!

Primjene

- Dizajn i implementacija filtara u frekvencijskoj domeni:
  - željenu frekvencijsku karakteristiku filtra specificiramo uzorcima u frekvencijskoj domeni,
  - signal i impulsni odziv filtra nadopunimo nulama,
  - provjerimo da li nas karakteristika novog filtra zadovoljava, te
  - implementiramo filtar u FFT domeni ("brza konvolucija").
- Rješenje ne mora biti kauzalno ni stabilno, čak niti filtar ne mora biti realan.

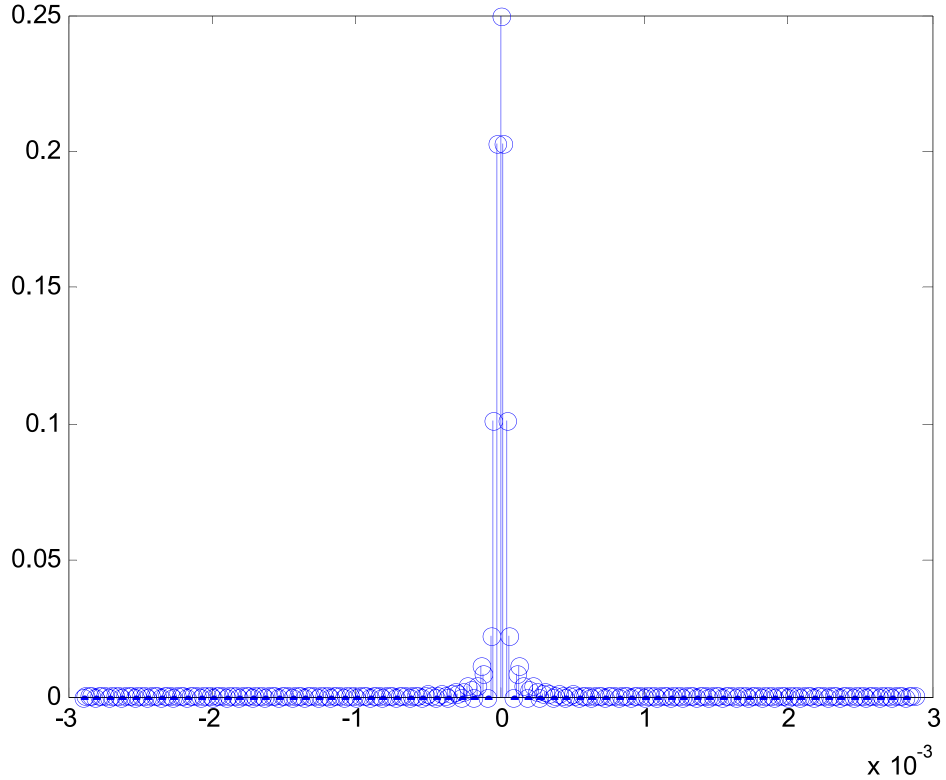
Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

- Neka je željena AF karakteristika filtra *H* pilastog oblika, a fazna neka je nula:



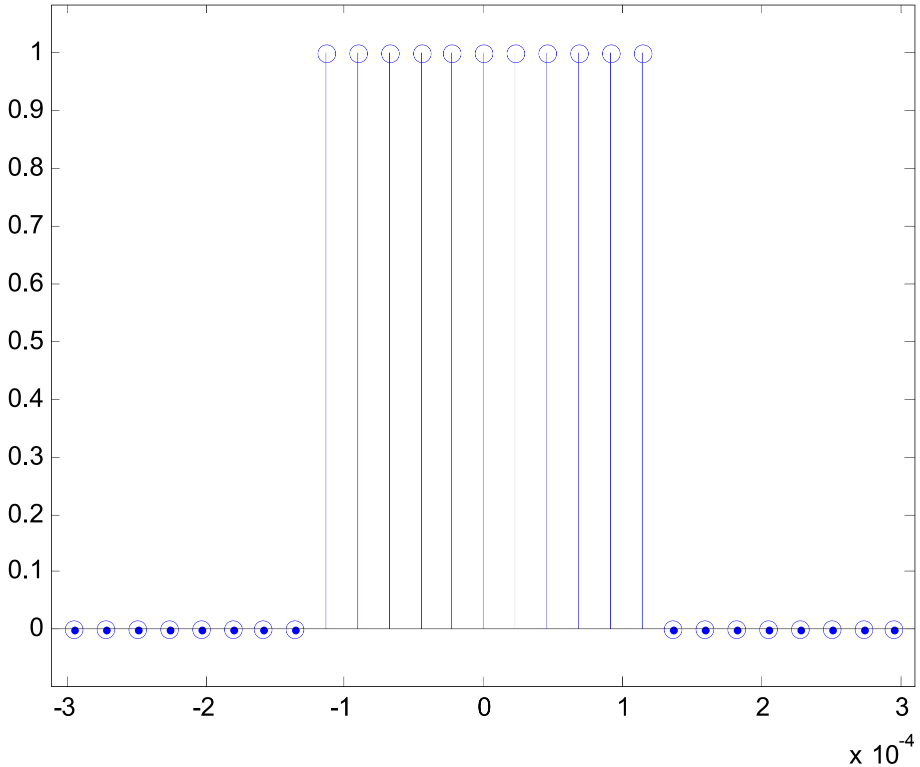
Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

- Pripadni impulsni odziv filtra *h* je realan i simetričan oko nule (nije kauzalan!):



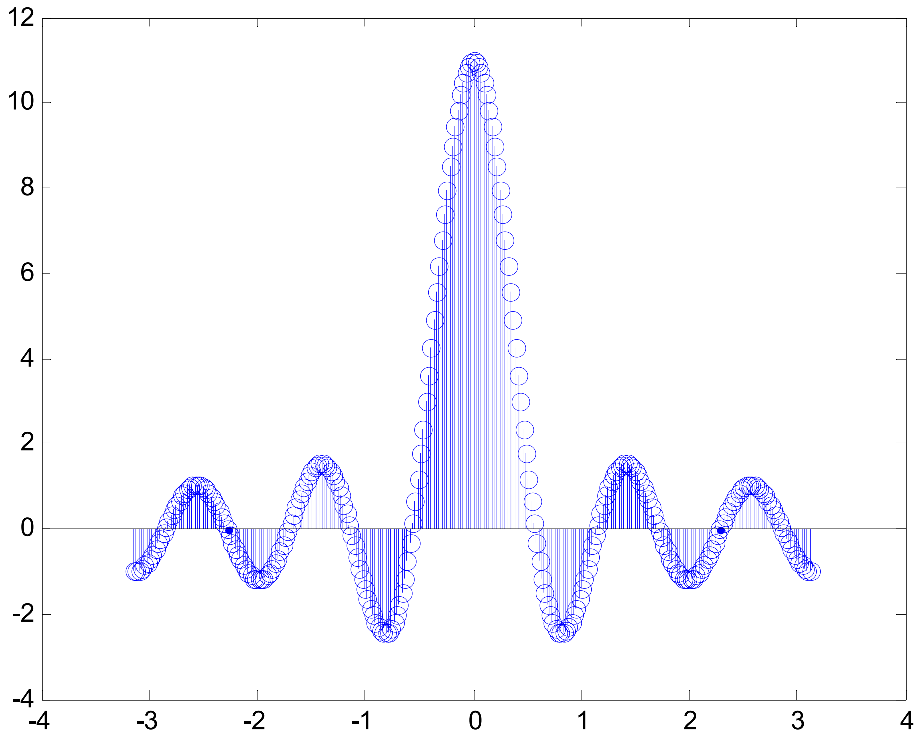
Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

- Neka je signal *u* pravokutni puls, također simetričan oko nule:



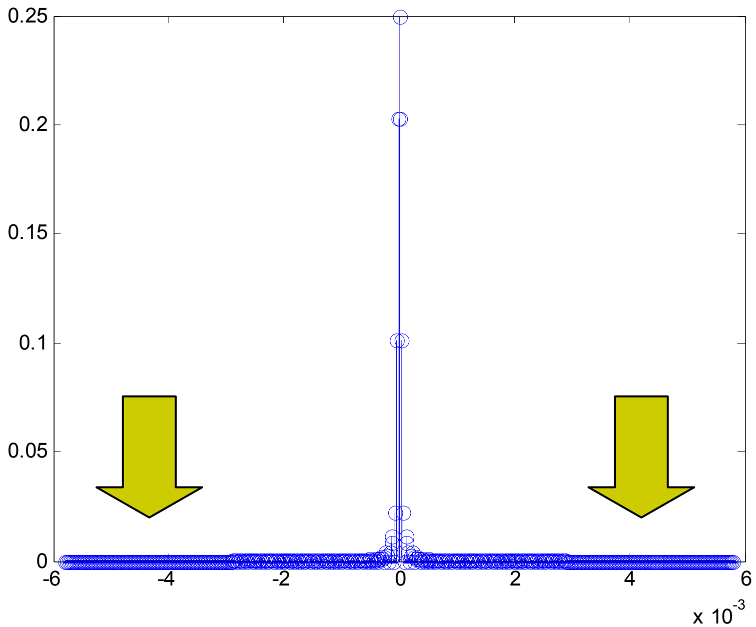
Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

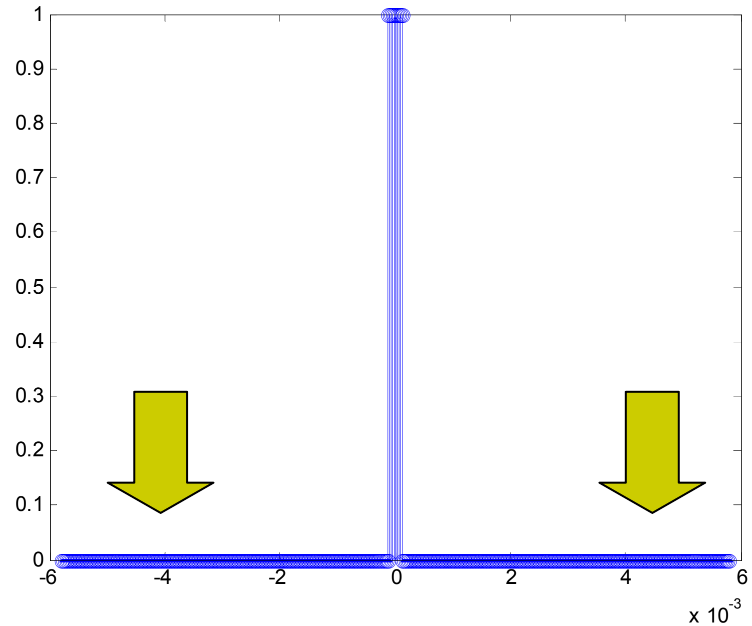
- Spektar *U* mu je (zbog simetrije) realan:



Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

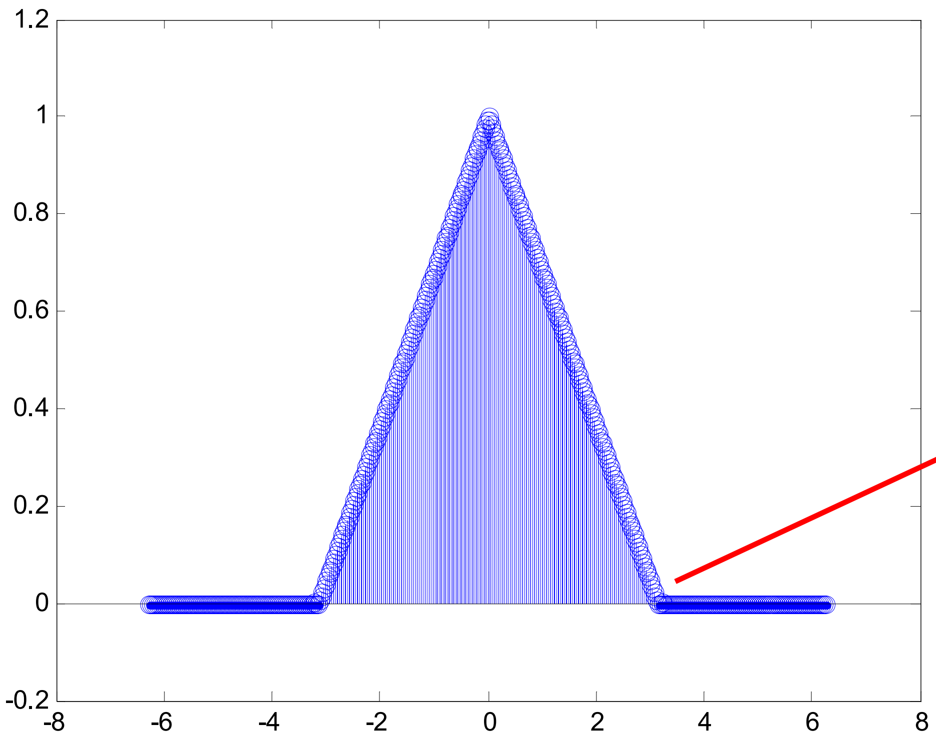
- Filtar implementiramo množenjem u frekvencijskoj domeni, a kako bi rezultat cirkularne konvolucije bio jednak linearnoj, nadopunimo *u* i *h* nulama (vidi strelice).



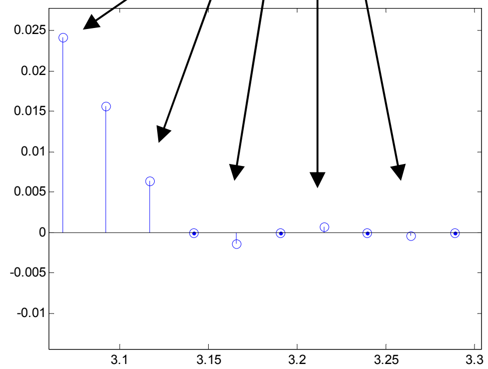


Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

- Posljedica dodavanja nula: DFT spektri imaju više uzoraka.



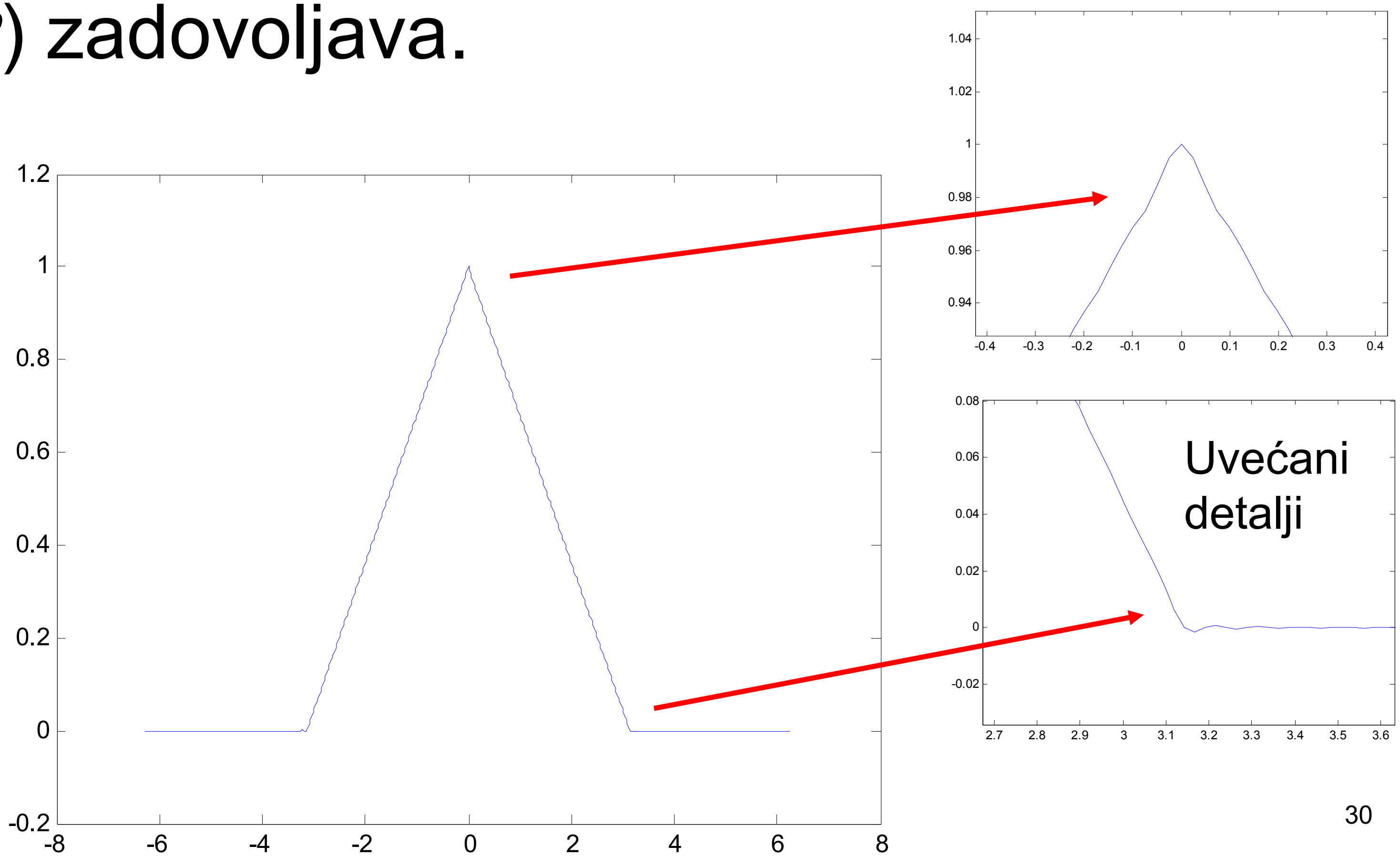
Novi (interpolirani) uzorci



Uvećani detalj

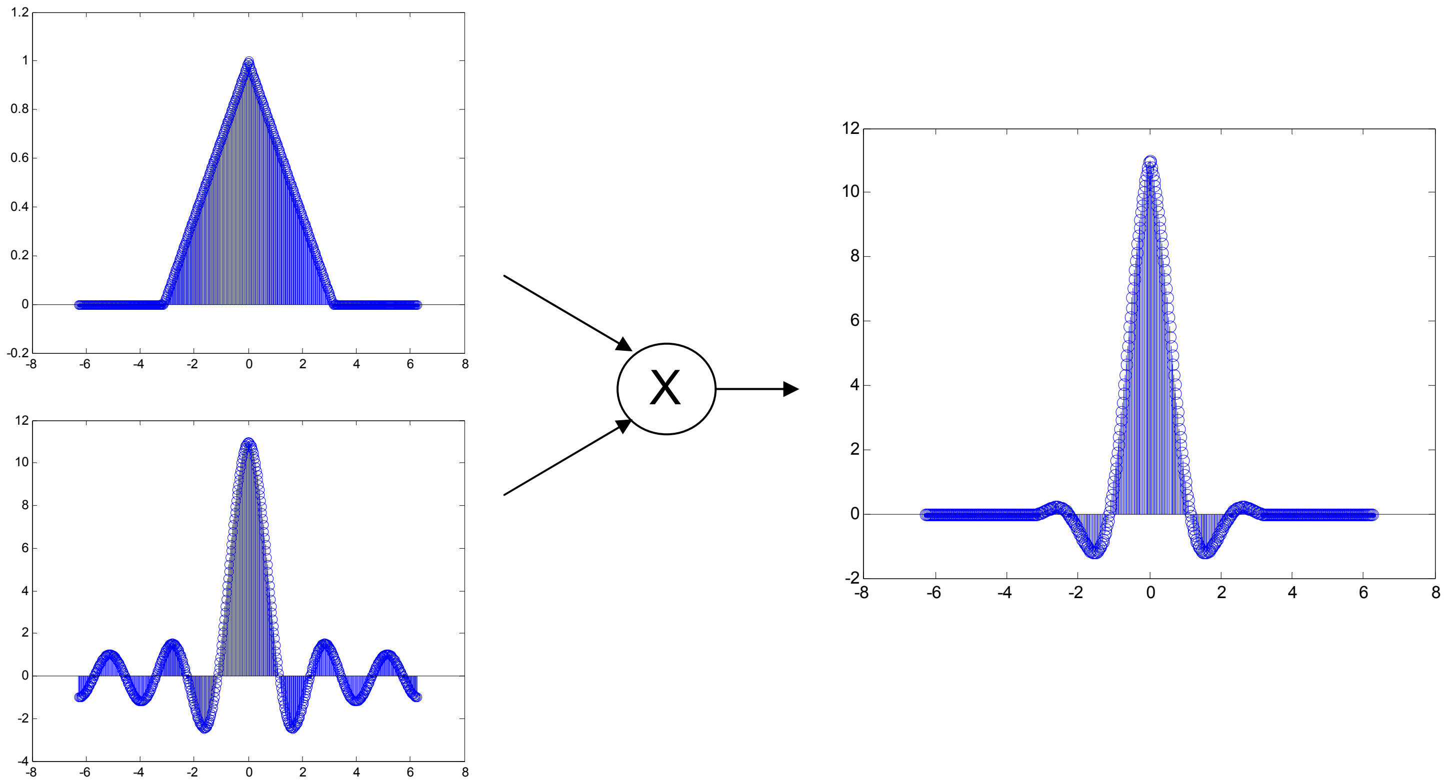
Primjer dizajna i realizacije filtra u frekvencijskoj domeni

- Temeljno pitanje je da li nas tako dobiven $H(e^{j\omega})$ zadovoljava.



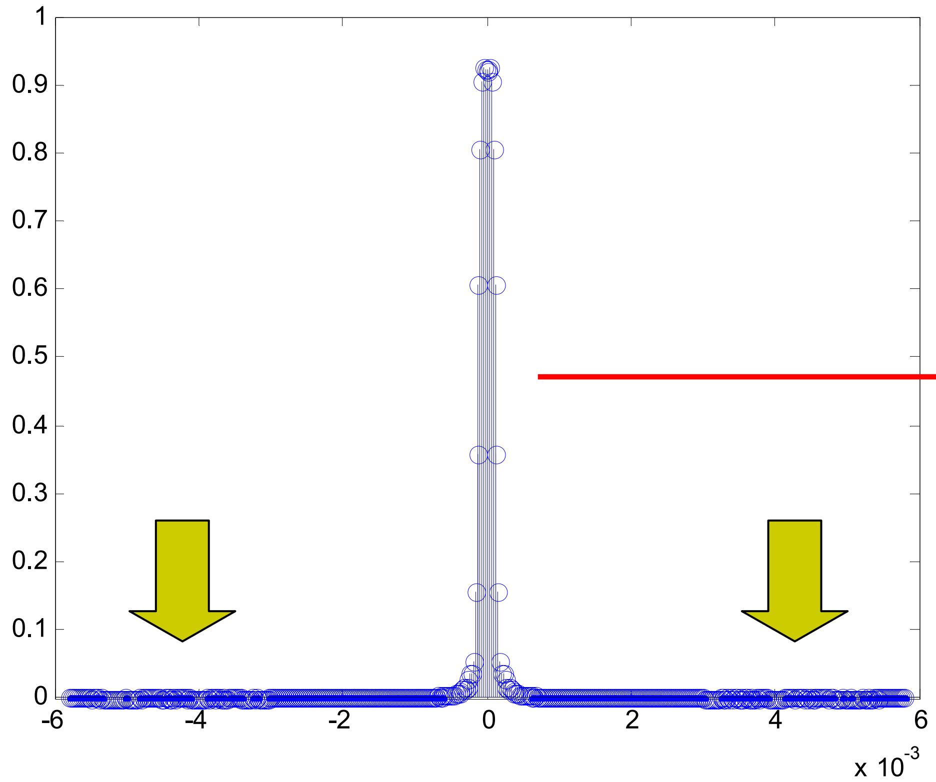
Realizacija filtra u frekvencijskoj domeni

- Realizacija = množenje u frekvencijskoj domeni

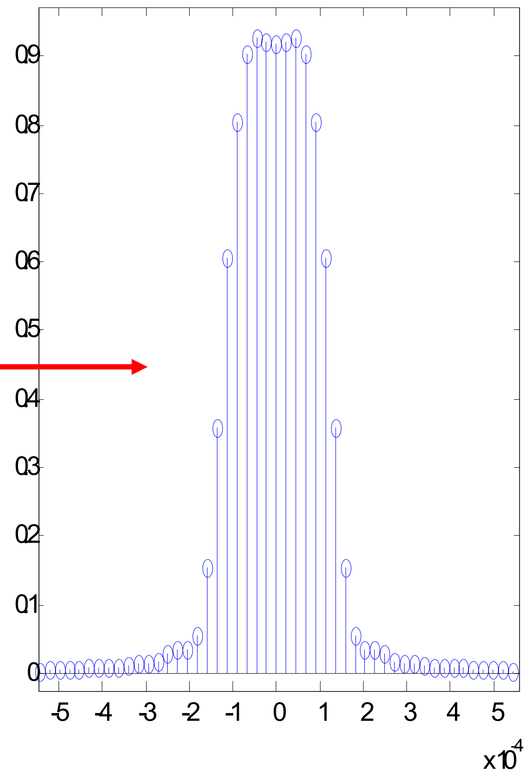


Rezultat filtriranja

- Inverzna DFT daje:



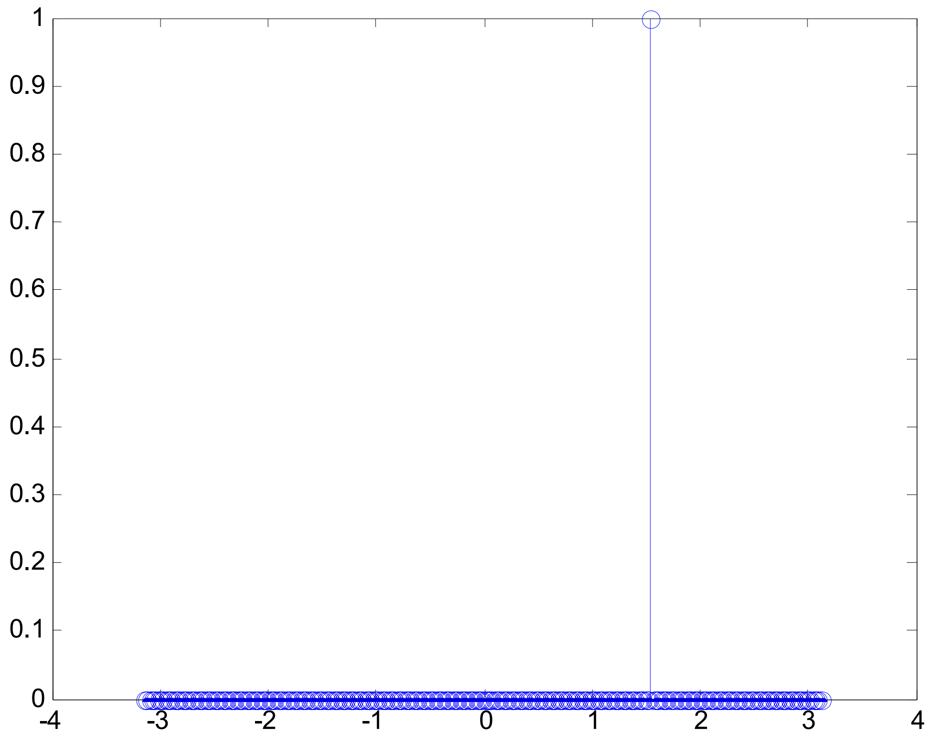
Uvećani dio rezultata



- “Višak nula” može se ukloniti (strelice).

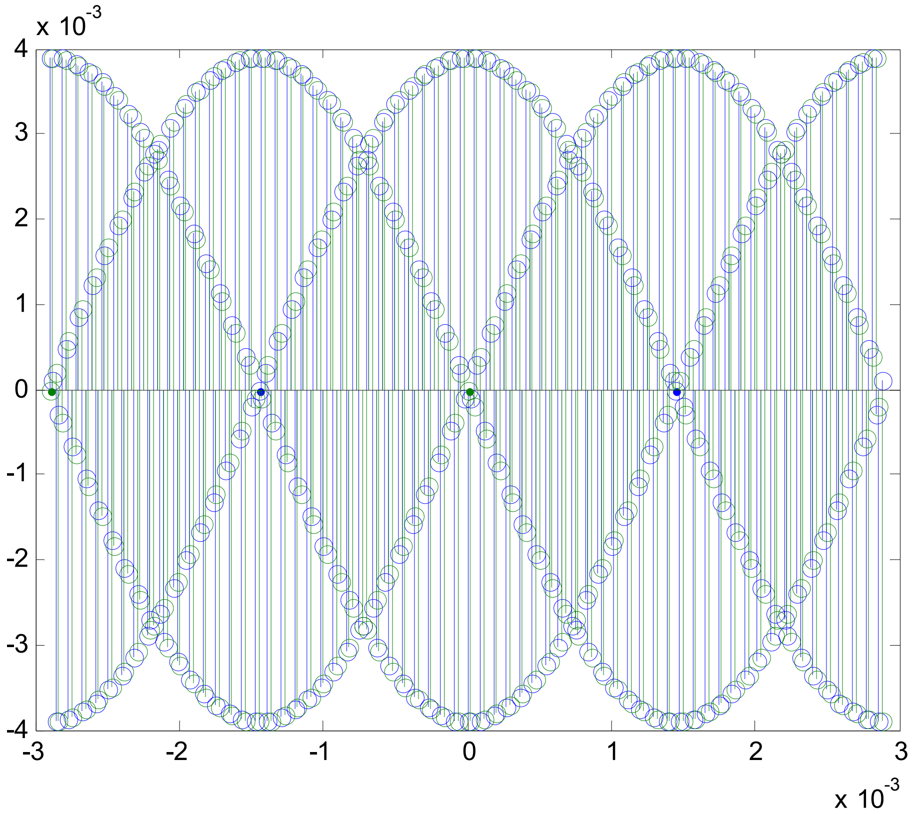
Primjer 2

- Neka željena AF karakteristika filtra ima samo jedan uzorak $= 1$, a ostali uzorci te fazna karakteristika neka su nula.



Primjer 2

- Pripadni impulsni odziv filtra *h* je kompleksan:



Primjer 2

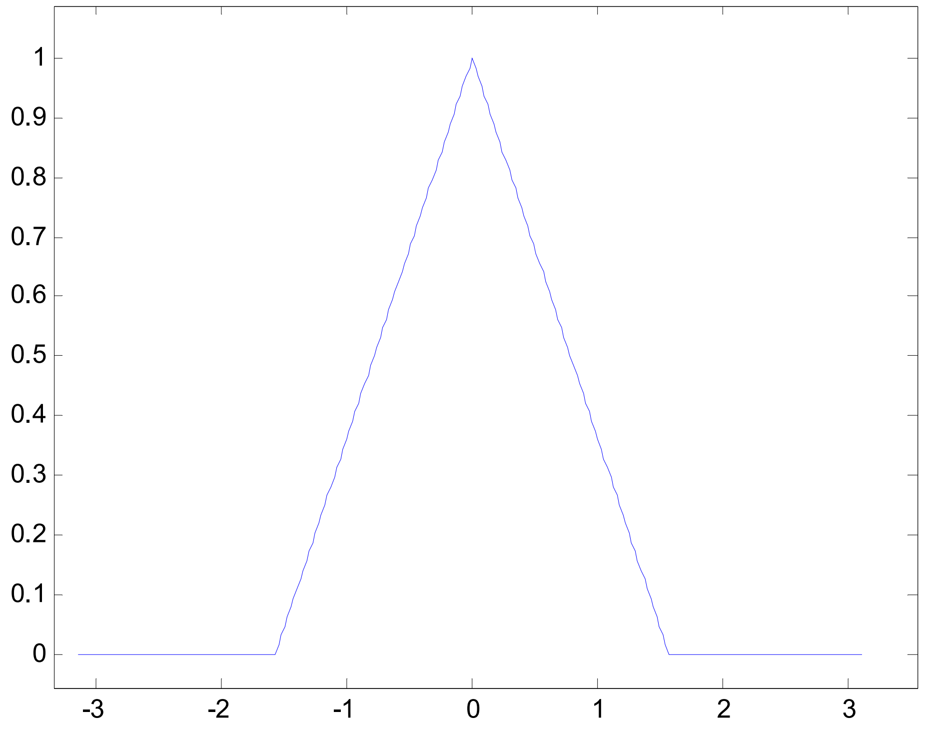
- Iz načina kako smo došli do njega, jasno je da filtar odgovara stupcu inverzne DFT matrice.
- Nadalje, proporcionalan je konjugiranom retku DFT matrice, odnosno korespondira s odgovarajućim filtrom iz DFT sloga (*vidi poglavlje Spektar signala i pripadajuće izraze*).
- Filtar, naravno, ima kompleksne koeficijente.
- Promjenom pozicije uzorka AF karakteristike možemo dobiti sve filtre u DFT slogu.

Dizajn FIR filtara

- U prethodnim razmatranjima nismo odgovorili na pitanje kako postići da dobiveni $H(e^{j\omega})$ zadovoljava traženu specifikaciju.
- Nadalje, implementacija u filtara frekvencijskoj domeni ne daje odziv korak po korak, često potreban za rad u stvarnom vremenu.
- Stoga ćemo razmotriti i neke druge tehnike dizajna filtara.

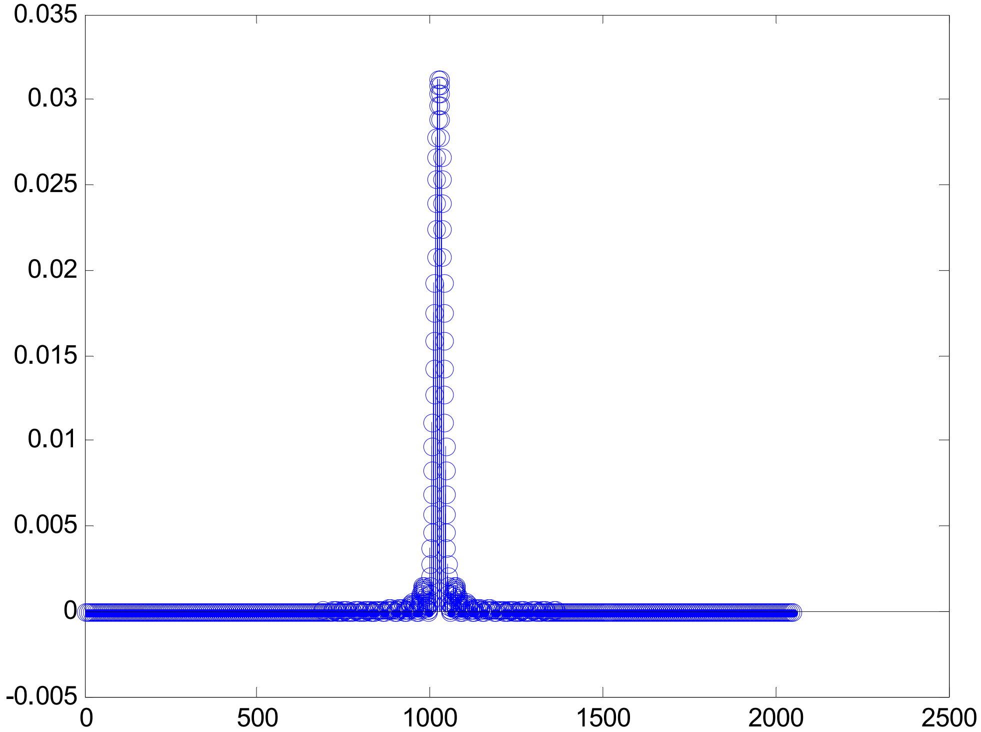
Dizajn FIR filtara

- Krećemo od željene karakteristika filtra $H(e^{j\omega})$.
- Neka je pilastog oblika, a fazna neka je nula:



Dizajn FIR filtara

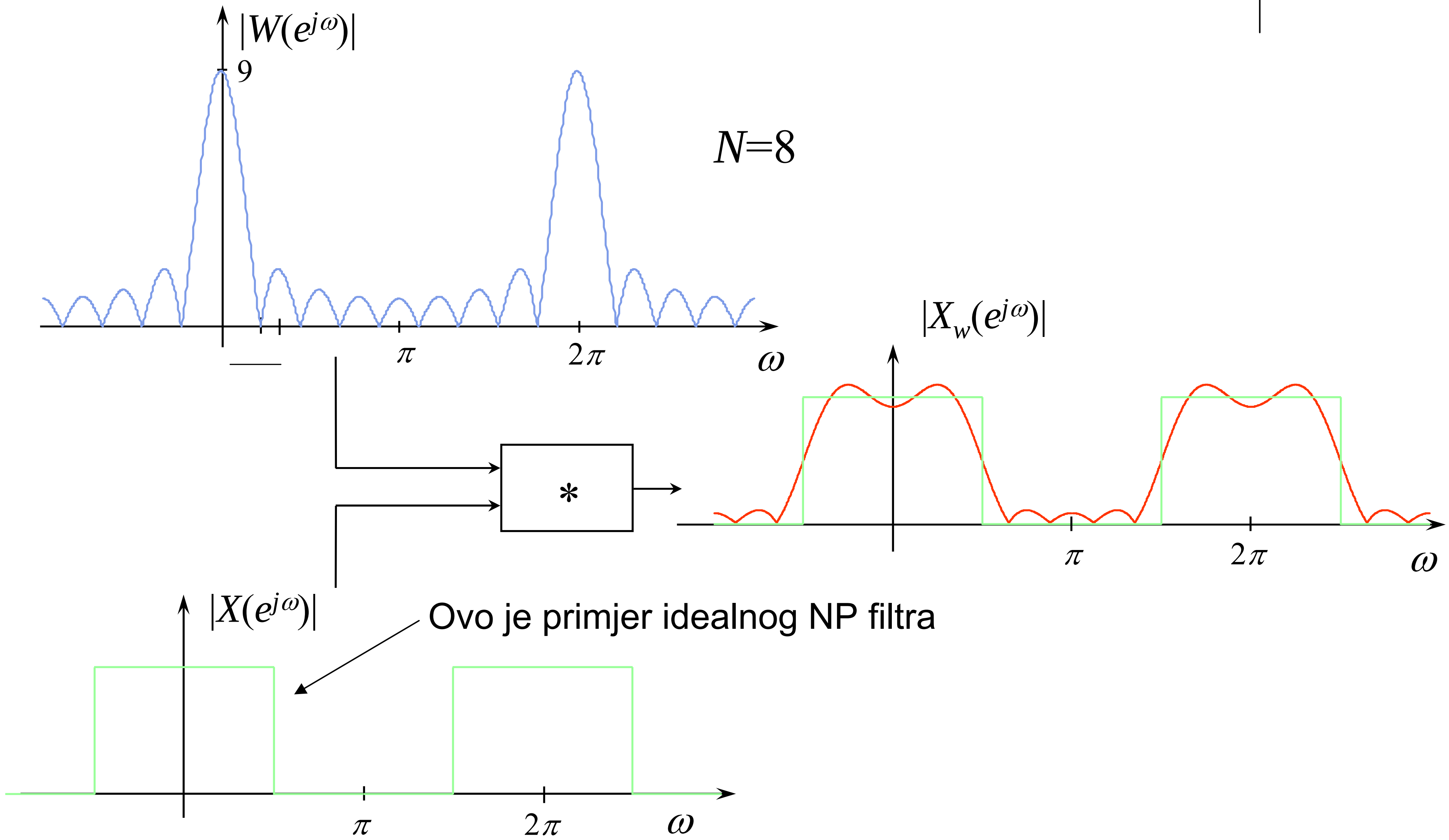
- Impulsni odziv takvog filtra je beskonačnog trajanja:



Dizajn FIR filtara metodom vremenskih otvora

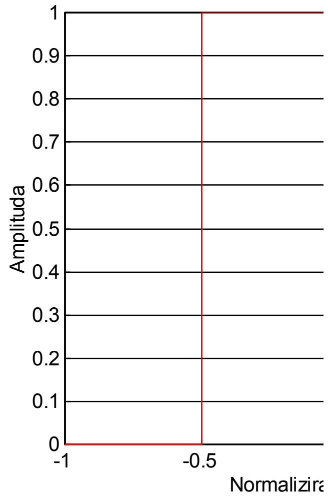
- Filtar s konačnim impulsnim odzivom (FIR) možemo dobiti izrezivanjem beskonačnog odziva vremenskim otvorom.
- Množenje vremenskim otvorom odgovara konvoluciji u frekvencijskoj domeni.
- U primjeru implementacije u frekvencijskoj domeni, beskonačni impulsni odziv je bio odrezan pravokutnim otvorom te nadopunjen nulama: utjecaj na $H(e^{j\omega})$ smo već vidjeli!

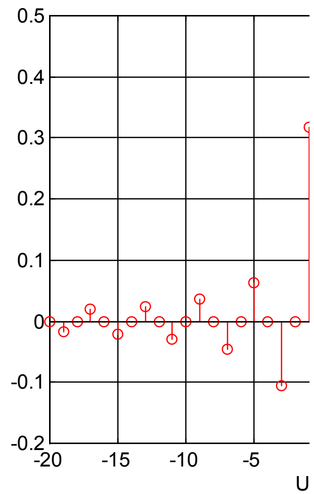
Utjecaj vremenskog otvora na amplitudu spektra



Projektiranje FIR filtara metodom vremenskih otvora

- Postupak projektiranja je slijedeći:
  - Uzeti idealnu karakteristiku filtra
  - Izračunati inverznu Fourierovu transformaciju idealne karakteristike filtra

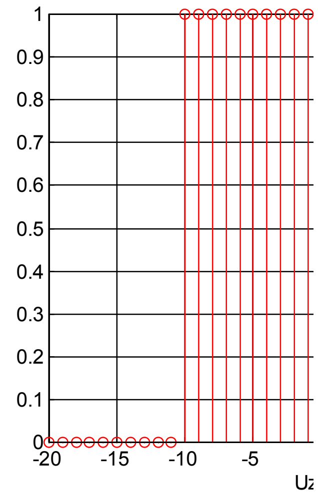




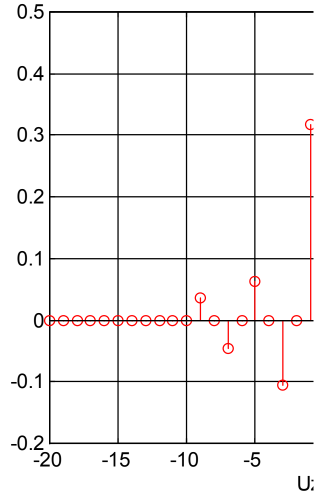
beskonačan impulsni odziv

Projektiranje FIR filtara metodom vremenskih otvora ...

- Odabrati vremenski otvor (npr. pravokutni)



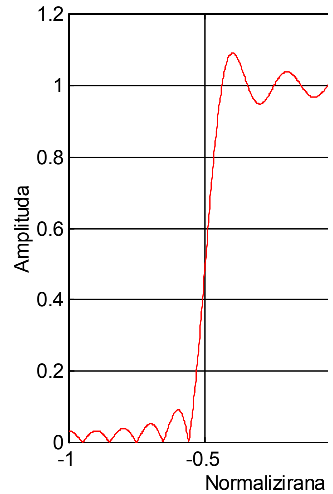
- Pomnožiti beskonačni impulsni odziv s uzorcima vremenskog otvora



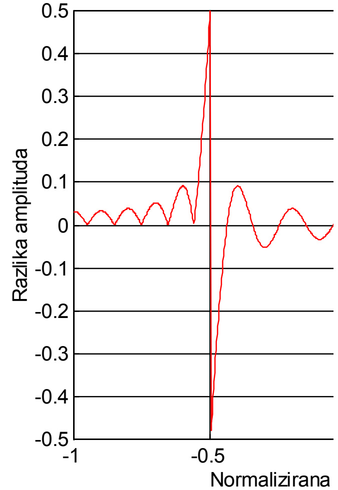
konačan impulsni odziv

Projektiranje FIR filtara metodom vremenskih otvora ...

- Amplitudno frekvencijska karakteristika idealnog i dobivenog filtra.



- Greška dobivenog filtra.



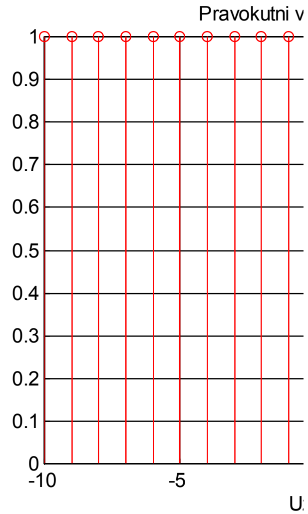
Tipovi fiksnih vremenskih otvora

- Pravokutni
- Bartlettov (trokutni)
- Hannov (kosinusni)
- Hammingov
- Blackmanov

Fiksni vremenski otvori

Pravokutni vremenski otvor

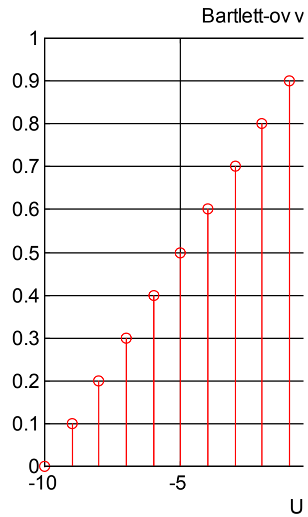
$$w[k] = 1, \qquad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}$$



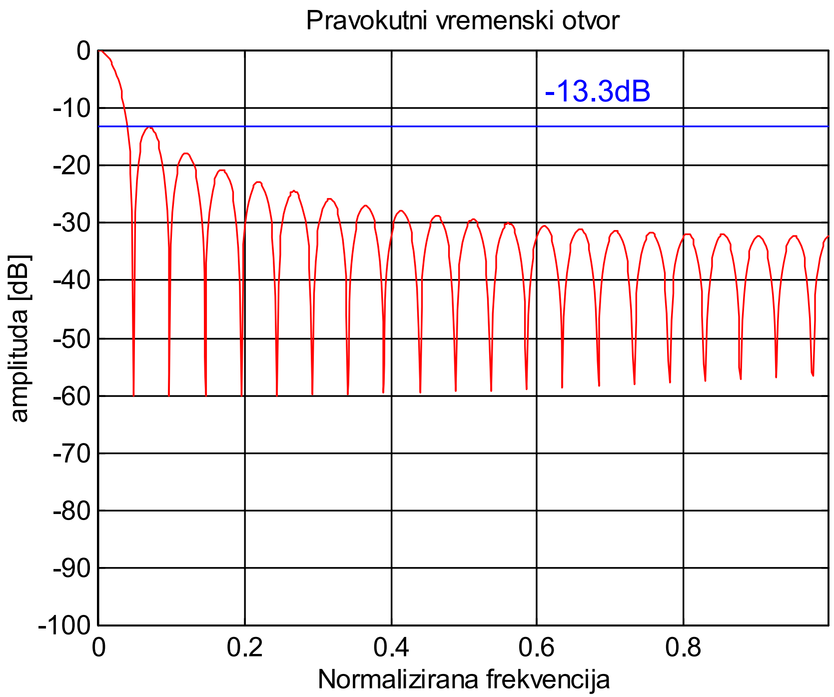
Bartlettov vremenski otvor

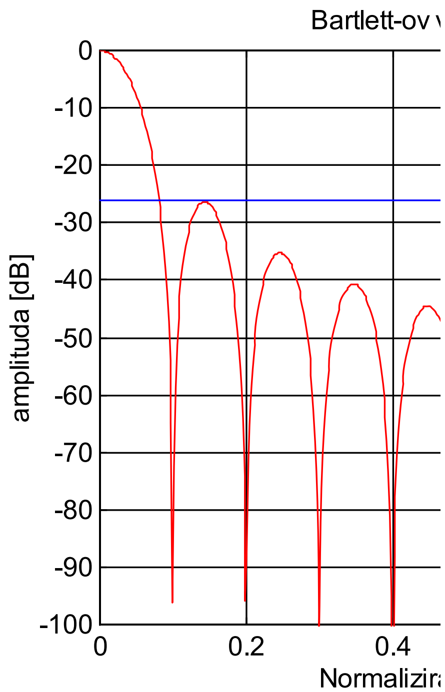
$$w[k] = 1 - \frac{|k|}{N/2},$$

$$-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}$$



Fiksni vremenski otvori (amplitudno-frekvencijske karakteristike)



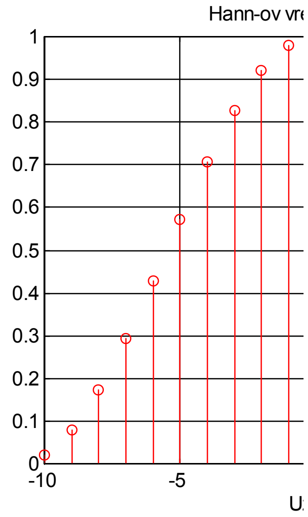


Fiksni vremenski otvori ...

Hannov vremenski otvor

$$w[k] = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N+1}\right),$$

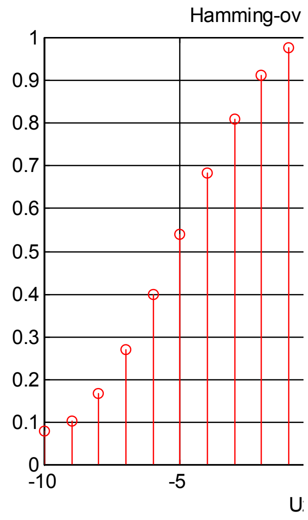
$$-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}$$



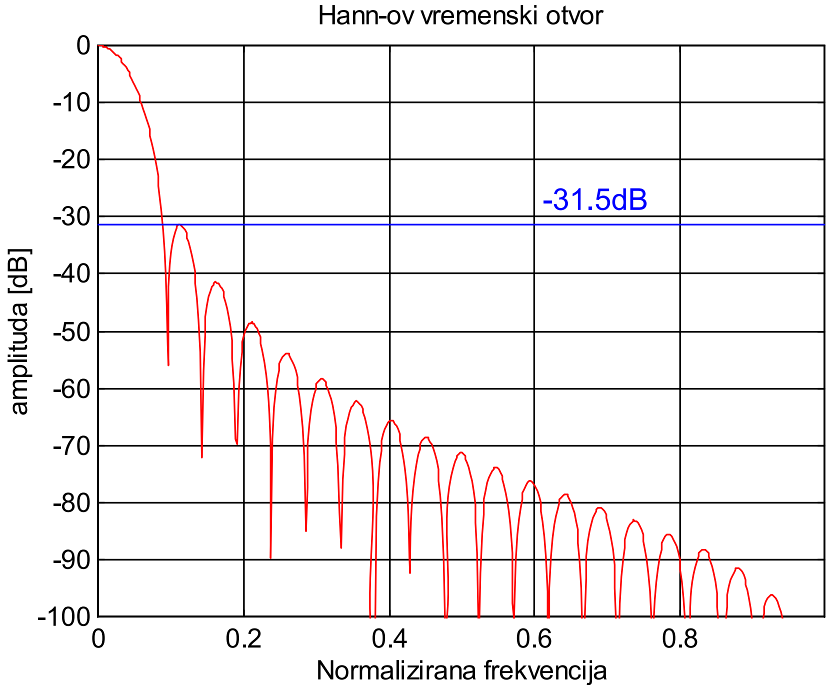
Hammingov vremenski otvor

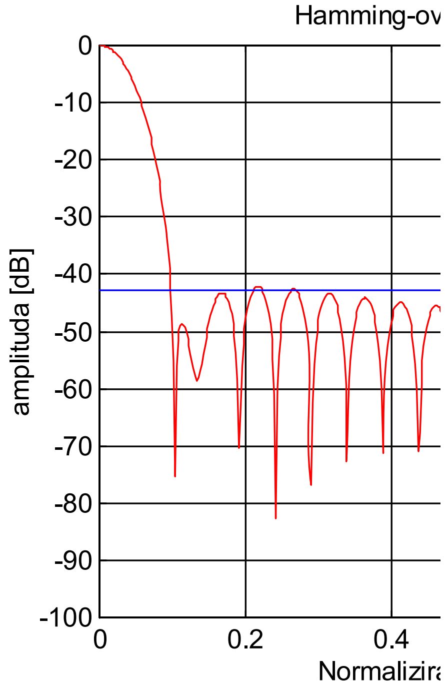
$$w[k] = 0{,}54 + 0{,}46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N+1}\right),$$

$$-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}$$



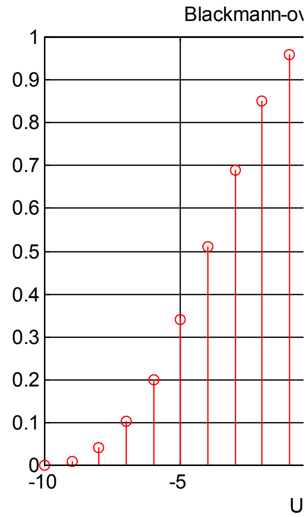
Fiksni vremenski otvori (amplitudno-frekvencijske karak.)





Fiksni vremenski otvori ...

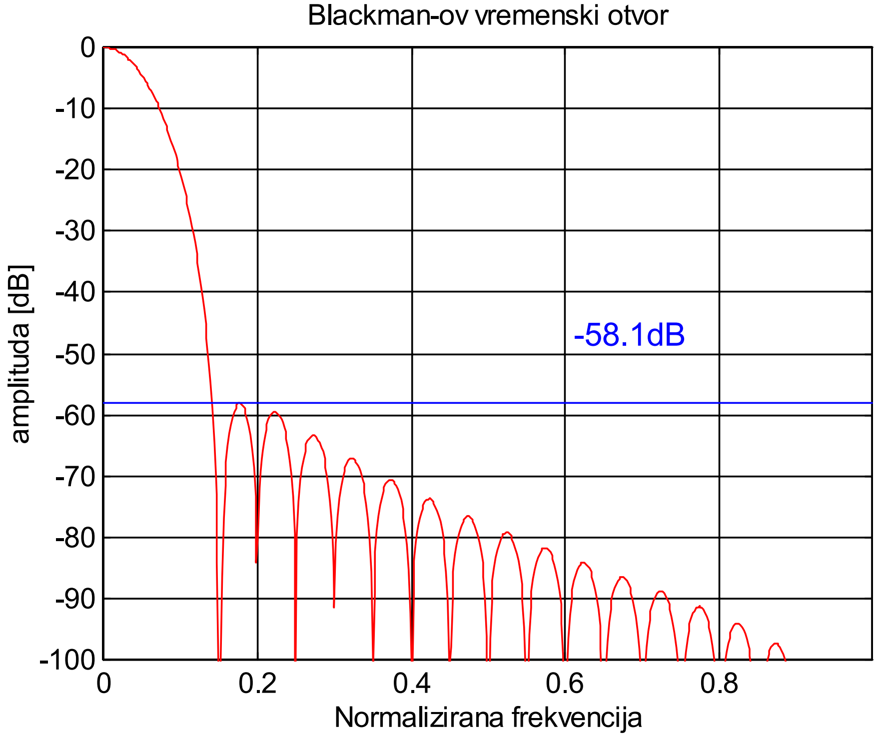
Blackmanov vremenski otvor



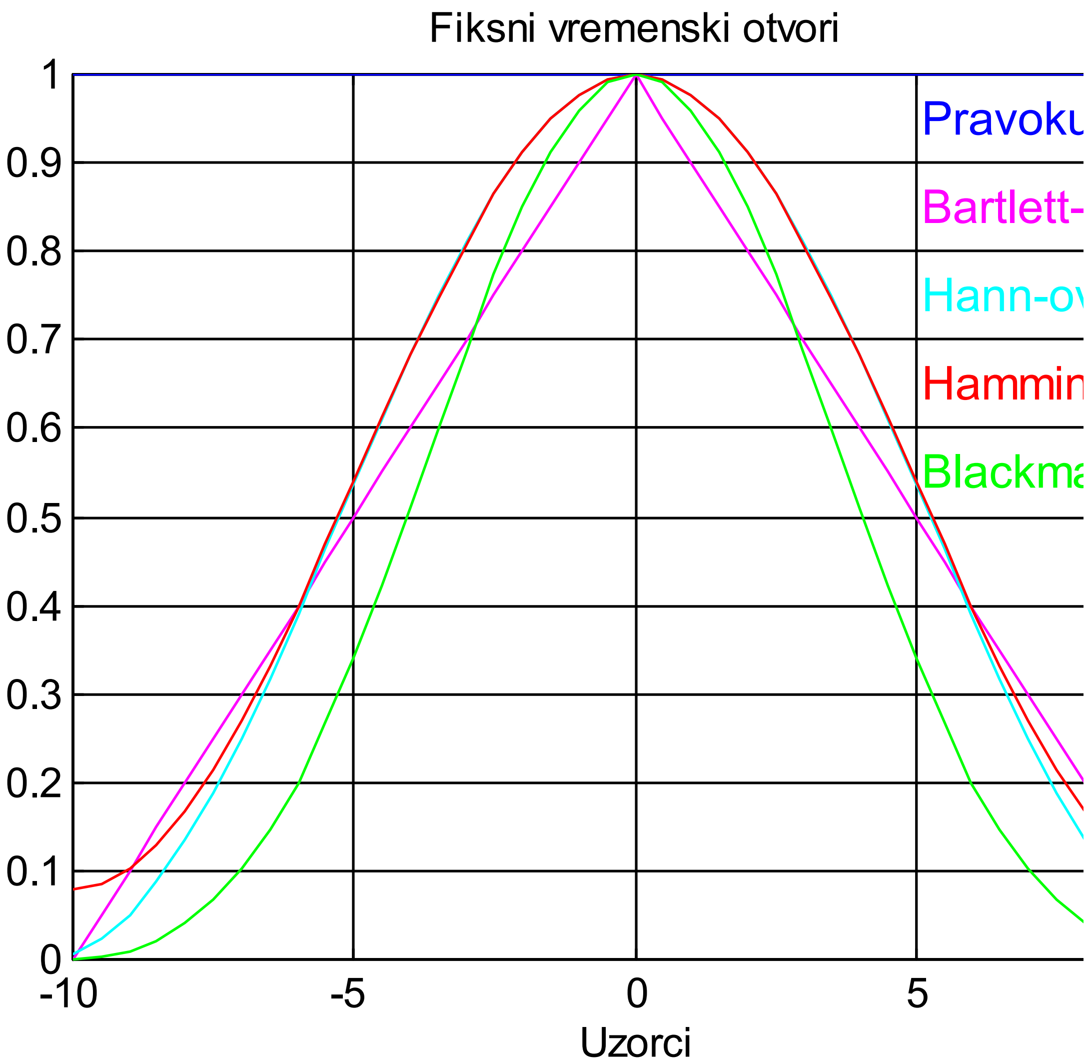
$$w[k] = 0{,}42 + 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{N+1}\right) + 0{,}08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot k}{N+1}\right),$$

$$-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}$$

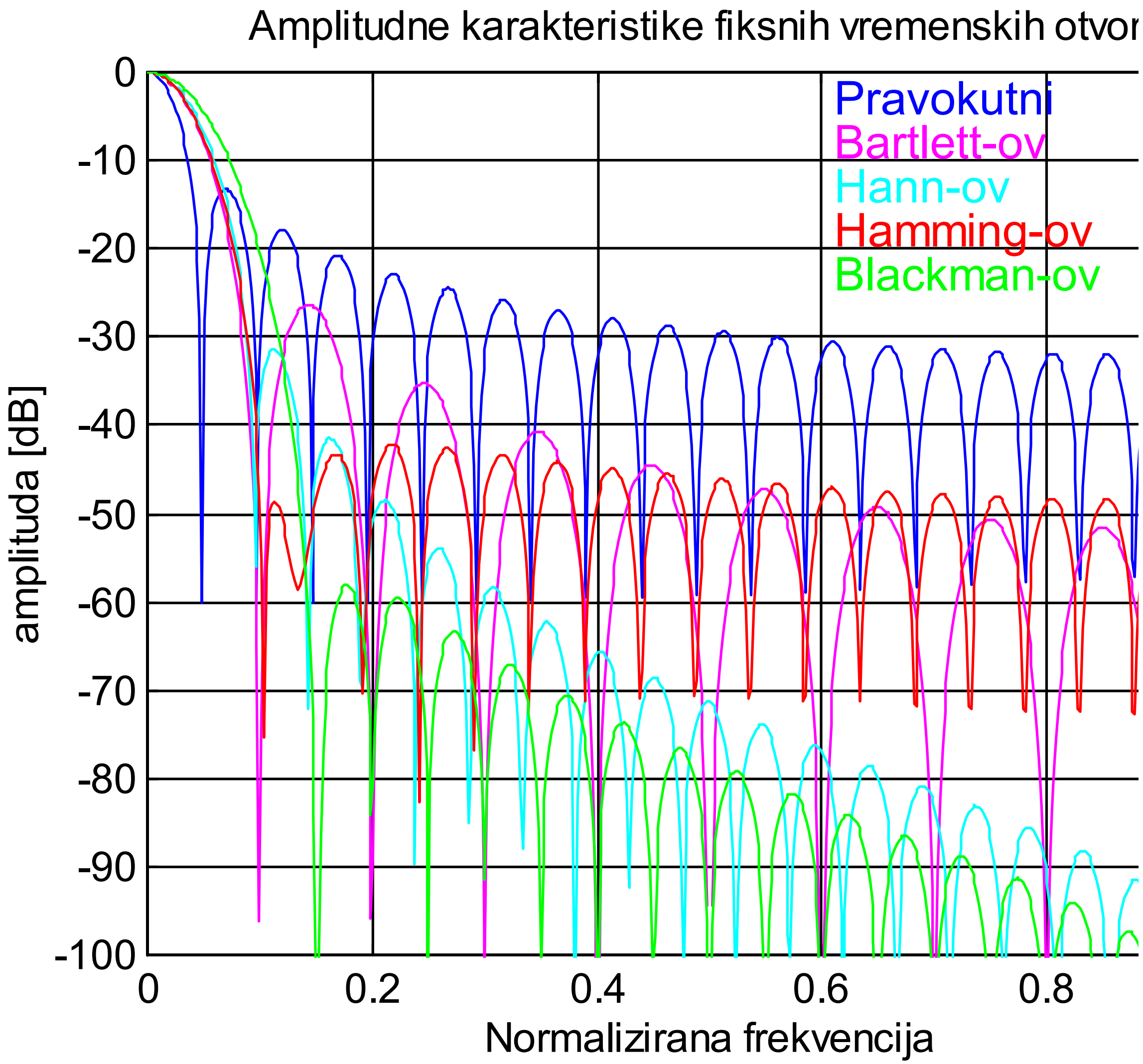
Fiksni vremenski otvori (amplitudno-frekvencijske karak.)



Fiksni vremenski otvori ...

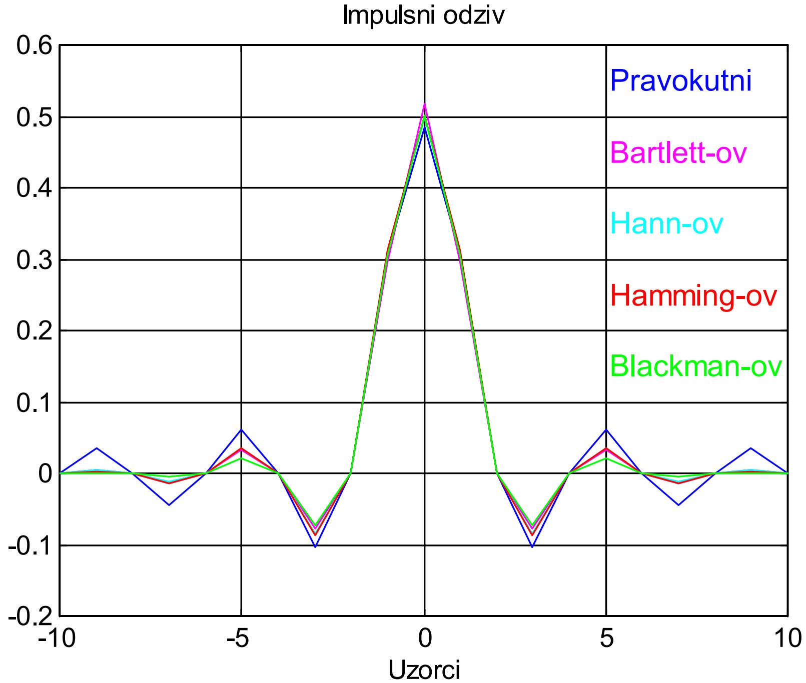


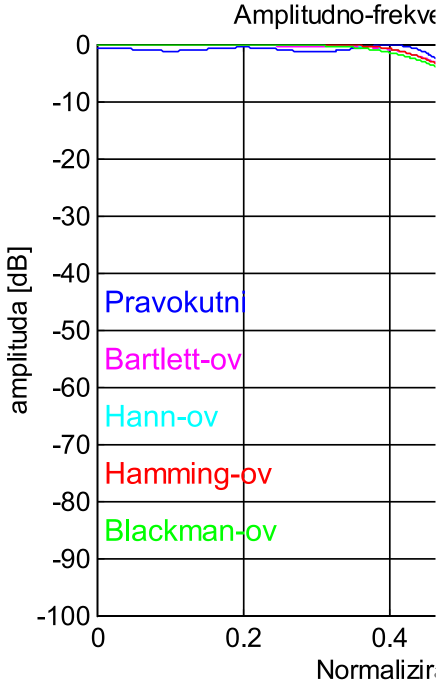
Fiksni vremenski otvori (amplitudno-frekvencijske karak.)

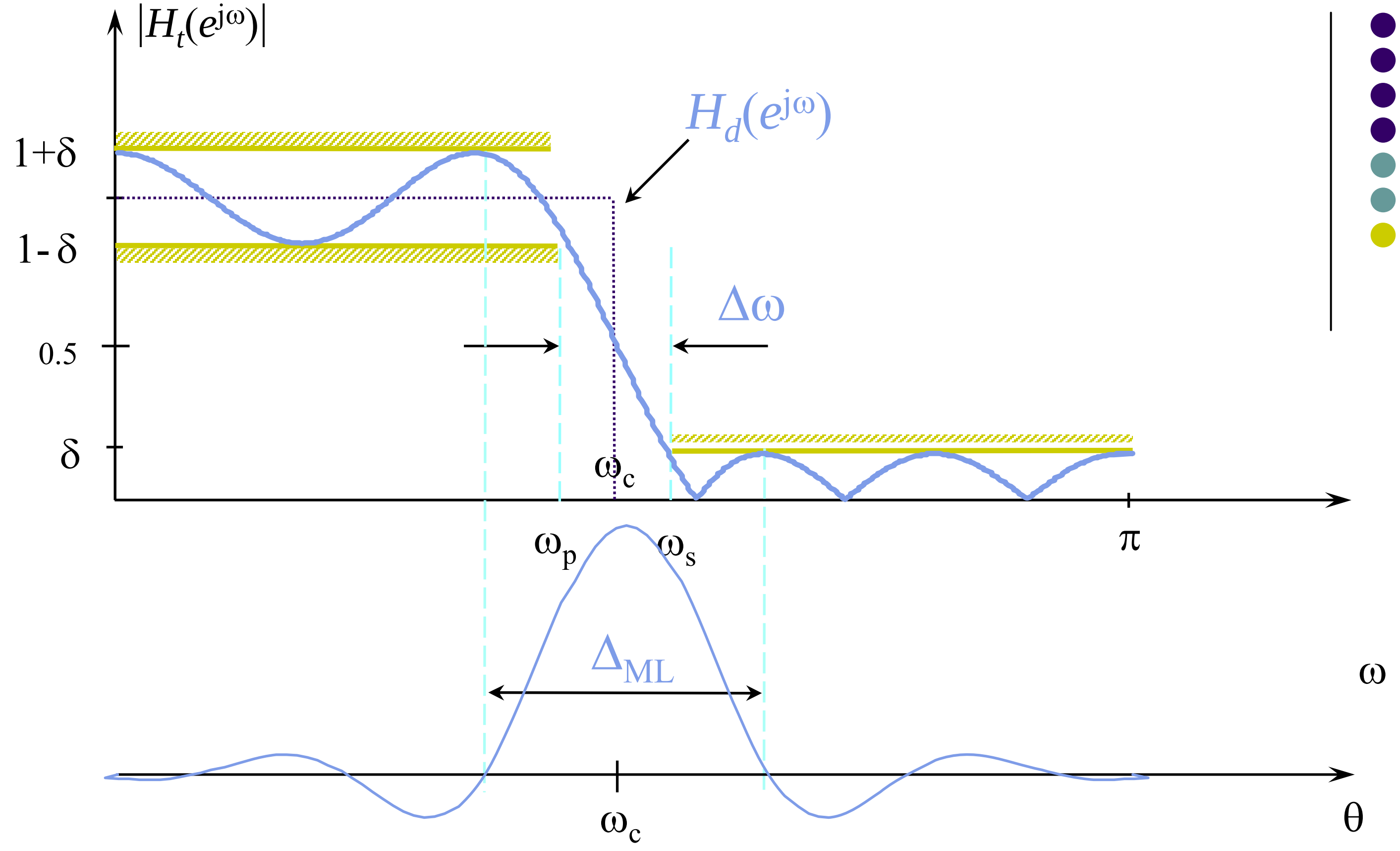


NP filtri dobiveni fiksnim vremenskim otvorima

- primjer: $N=20,\ \omega_c=0{,}5\pi$







Tip otvora	Širina glavne latice Δ_{ML}	Gušenje prve bočne latice	Gušenje u stop bandu	Širina prijelaznog područja ($\Delta\omega$)
Pravokutni	$4\pi/(N+1)$	13,3	20,9	$0,92\pi/(N/2)$
Bartlettov	$8\pi/N$	25	25	
Hannov	$8\pi/N$	31,5	43,9	$3,11\pi/(N/2)$
Hammingov	$8\pi/N$	42,7	54,5	$3,32\pi/(N/2)$
Blackmanov	$12\pi/N$	58,1	75,3	$5,56\pi/(N/2)$

Još o vremenskim otvorima

- Osim fiksnih, postoje i promjenjivi vremenski otvori kod kojih je moguće fino podesiti širinu glavne latice i gušenje bočnih.
- Utjecaj vremenskog otvora reprezentiran je konvolucijom spektara –> podjednak je u svim frekvencijskim područjima.
- To često nije poželjno, pa postoje i brojne druge metode dizajna.

Drugi pristup

- Želimo li projektirati FIR filtar s konstantnim grupnim kašnjenjem, možemo krenuti od željene strukture filtra.
- Već smo vidjeli da postoje 4 tipa FIR filtara sa linearnom fazom (simetričnim ili antisimetričnim impulsnim odzivom).
- Mi ćemo napraviti analizu i primjere za tip 1: simetričan odziv uz neparan broj uzoraka.

Tip 1 FIR filtra

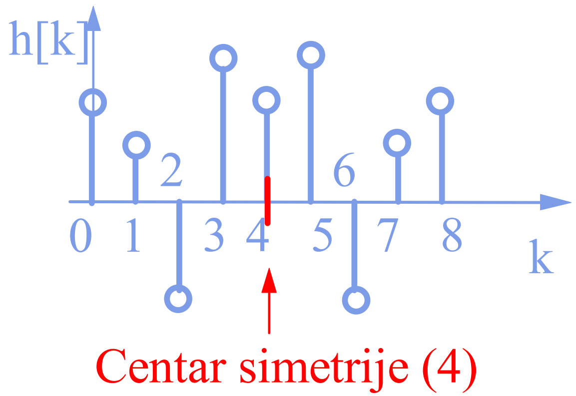
Impulsni odziv zadovoljava uvjet simetrije:

$$h[k] = h[N-k], \qquad 0 \le k \le N$$

Radi jednostavnosti neka je $N=8$.
U tom slučaju prijenosna funkcija filtra je

$$H(z) = h[0] + h[1]\cdot z^{-1} + h[2]\cdot z^{-2} + h[3]\cdot z^{-3} + h[4]\cdot z^{-4} +$$
$$+ h[5]\cdot z^{-5} + h[6]\cdot z^{-6} + h[7]\cdot z^{-7} + h[8]\cdot z^{-8}$$

Tip 1 FIR filtra: simetrija



Za simetričan tip 1 FIR filtar i N=8 vrijedi:

$$h[0] = h[8],\ h[1] = h[7],\ h[2] = h[6],\ h[3] = h[5].$$

Tip 1 FIR filtra ...

Skupimo simetrične koeficijente

$$H(z) = h[0]\cdot\left(1 + z^{-8}\right) + h[1]\cdot\left(z^{-1} + z^{-7}\right) +$$
$$+ \mathrm{h}[2]\cdot\left(z^{-2} + z^{-6}\right) + h[3]\cdot\left(z^{-3} + z^{-5}\right) + h[4]\cdot z^{-4} =$$

i razložimo članove u zagradi izlučivanjem z^{-4}:

$$= z^{-4}\cdot\left\{h[0]\cdot\left(z^{4} + z^{-4}\right) + h[1]\cdot\left(z^{3} + z^{-3}\right) +\right.$$
$$\left. + h[2]\cdot\left(z^{2} + z^{-2}\right) + h[3]\cdot\left(z + z^{-1}\right) + h[4]\right\}.$$

Tip 1 FIR filtra ...

Pripadna frekvencijska karakteristika je

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j4\omega} \cdot \{2h[0]\cdot\cos(4\omega) + 2h[1]\cdot\cos(3\omega) + \\ + 2h[2]\cdot\cos(2\omega) + 2h[3]\cdot\cos(\omega) + h[4]\}$$

ili u općem slučaju

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-jN\omega/2} \cdot \left\{\sum_{m=0}^{N/2} a[m]\cdot\cos(\omega\cdot m)\right\}$$

$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right], \quad a[m] = 2h\left[\frac{N}{2} - m\right], \quad 1 \le m \le \frac{N}{2}$$

Tip 1 FIR filtra zaključak

Tip 1 opći izraz:

kašnjenje (linearni fazni član)

AF karakteristika s predznakom, $A(e^{j\omega})$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-jN\omega/2} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{N/2} a[m] \cdot \cos(\omega \cdot m) \right\}$$

$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right], \quad a[m] = 2 \cdot h\left[\frac{N}{2} - m\right], \quad 1 \le m \le \frac{N}{2}$$

$$\tau(\omega) = \frac{N}{2}$$

Elementi dizajna su koeficijenti $a[m]$.

Dizajn FIR filtra

- Pitanje je kako pronaći koeficijente $a[m]$ za zadovoljavajuću aproksimaciju željene frekvencijske karakteristike.
- Može se postaviti neki optimizacijski kriterij, a ovisno o kriteriju imat ćemo različite rezultate.
- Označimo željenu karakteristiku sa $H_d(e^{j\omega})$.
- Odvojimo kašnjenje (linearni fazni član) i željenu AF karakteristiku:

$$H_d\left(e^{j\omega}\right) = e^{-jN\omega/2} \cdot A_d\left(e^{j\omega}\right)$$

Optimizacijski kriteriji

- Pogreška ili odstupanje AFK:

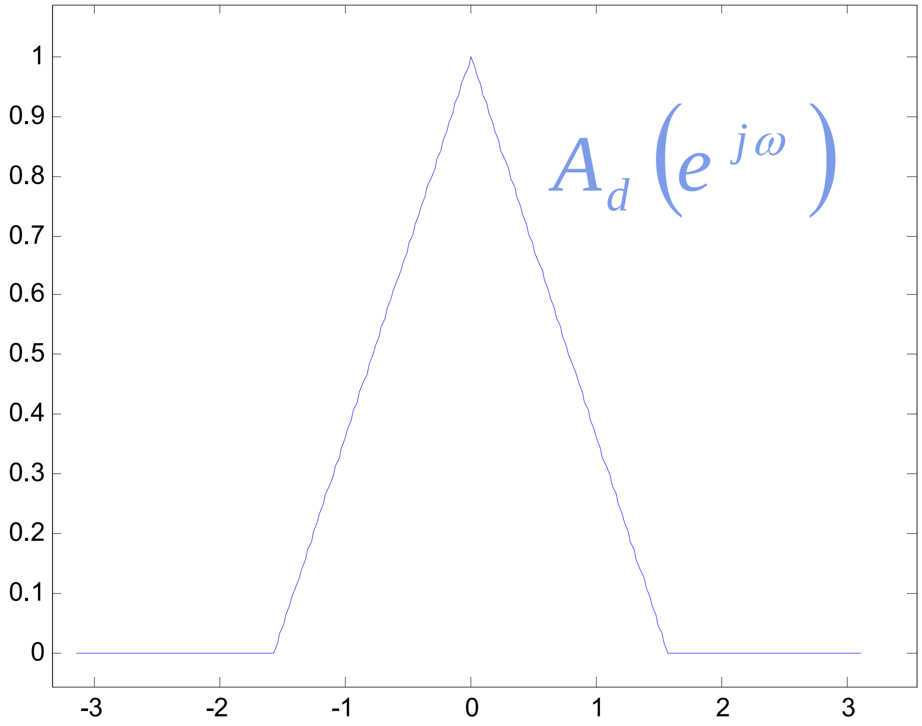
$$E\left(e^{j\omega}\right) = W\left(e^{j\omega}\right) \cdot \left| A\left(e^{j\omega}\right) - A_d\left(e^{j\omega}\right) \right|^m$$

- $W(e^{j\omega})$ – težinska funkcija, po želji dizajnera.
- $m=1$: apsolutna pogreška, $m=2$: kvadratna,…
- Mjere pogreške:

$$\underline{E} = \int_{-\pi}^{\pi} E\left(e^{j\omega}\right) d\omega \quad \text{ili} \quad \underline{E} = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} E\left(e^{j\omega}\right)$$

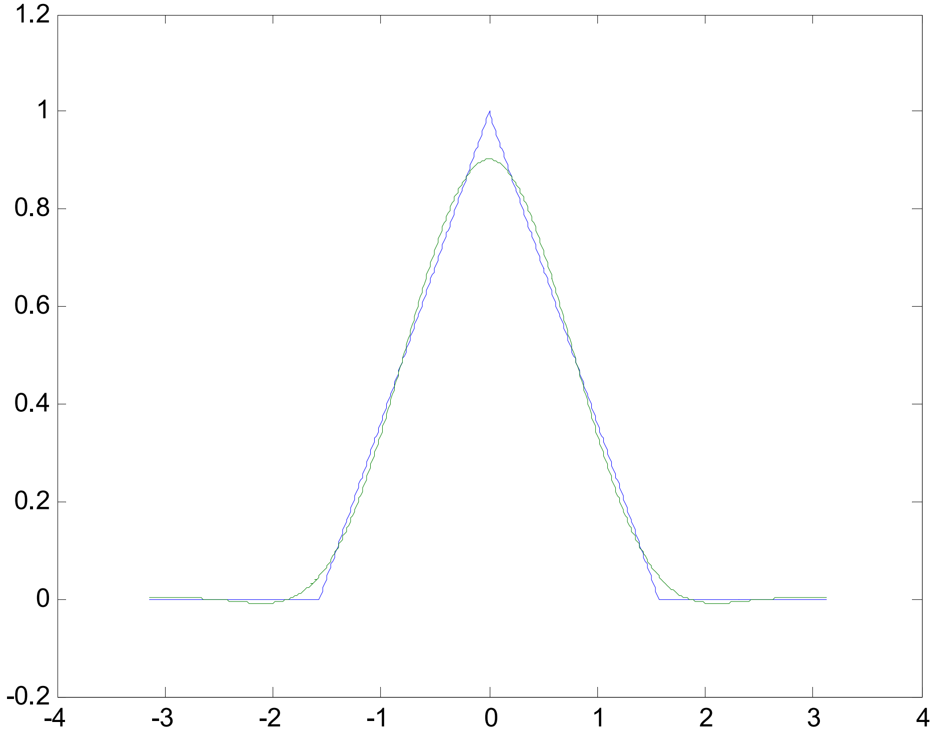
- Potraga za minimumom $\underline{E}$ vodi ka različitim optimizacijskim metodama i rješenjima.

Primjer



- U MATLAB-u ćemo koristiti optimizacijsku funkciju *fminsearch*.
- Argumenti su funkcija kojoj se traži minimum, te početno rješenje.

Rješenje 1

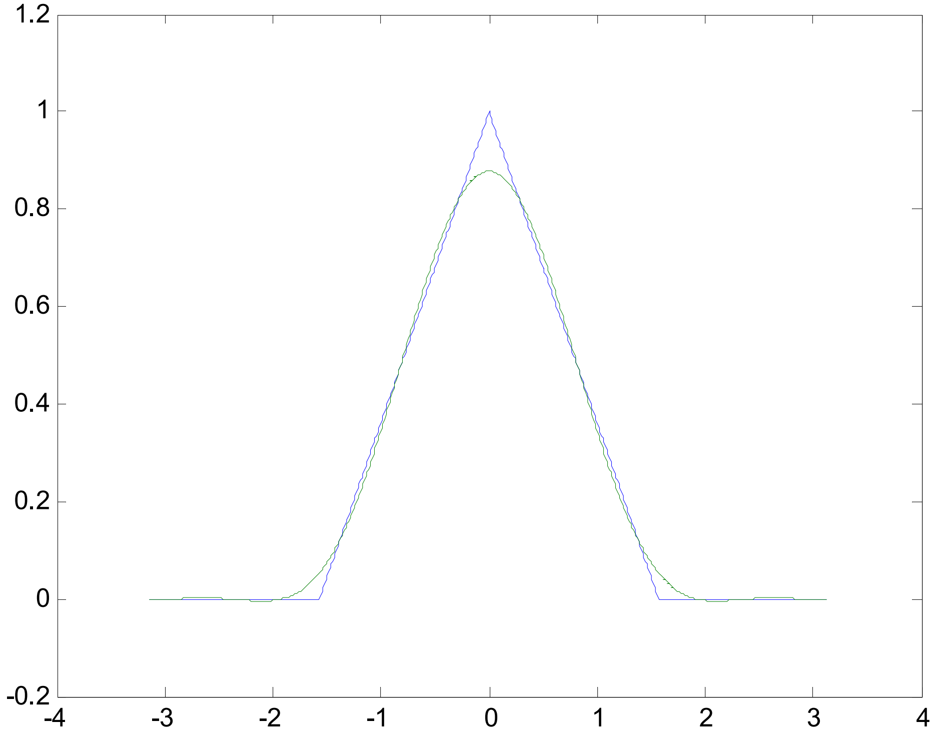


Koeficijenti $a[m]$:
0.2500
0.4053
0.2027
0.0450
0.0000

- N=8, m=2, $W(e^{j\omega})$=1, Eulerova aproksimacija integrala u 512 točaka.

$$\underline{E} = \int_{-\pi}^{\pi} E\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

Rješenje 2

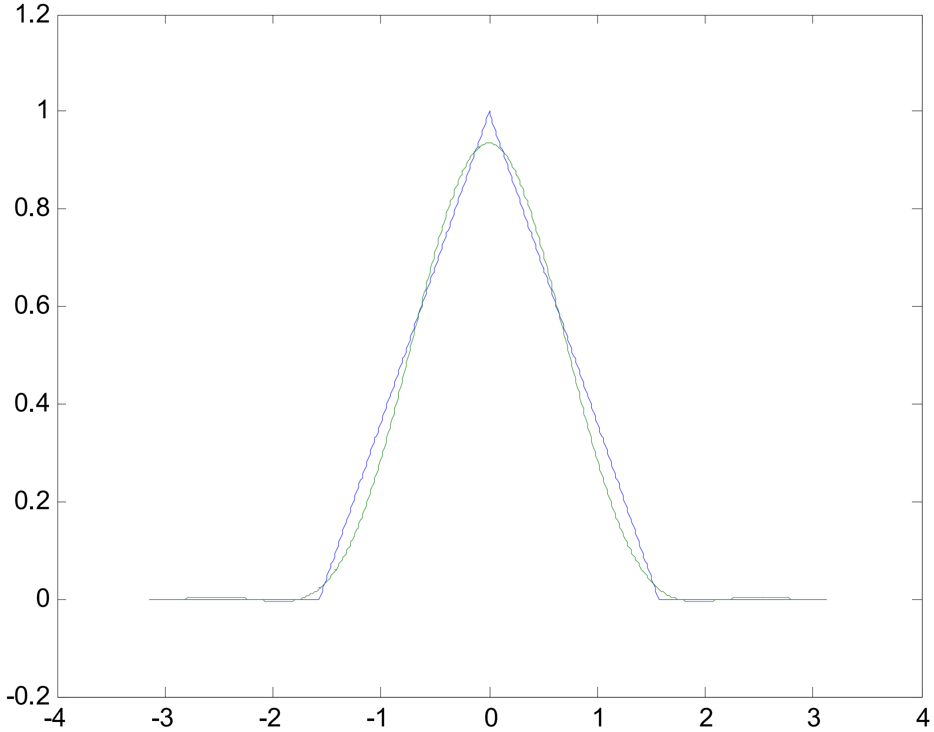


Koeficijenti
a[*m*]:
0.2490
0.3989
0.1926
0.0406
-0.0033

- $N=8$, $m=1$, $W(e^{j\omega})=1$, Eulerova aproksimacija integrala u 512 točaka.

$$\underline{E} = \int_{-\pi}^{\pi} E\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

Rješenje 3

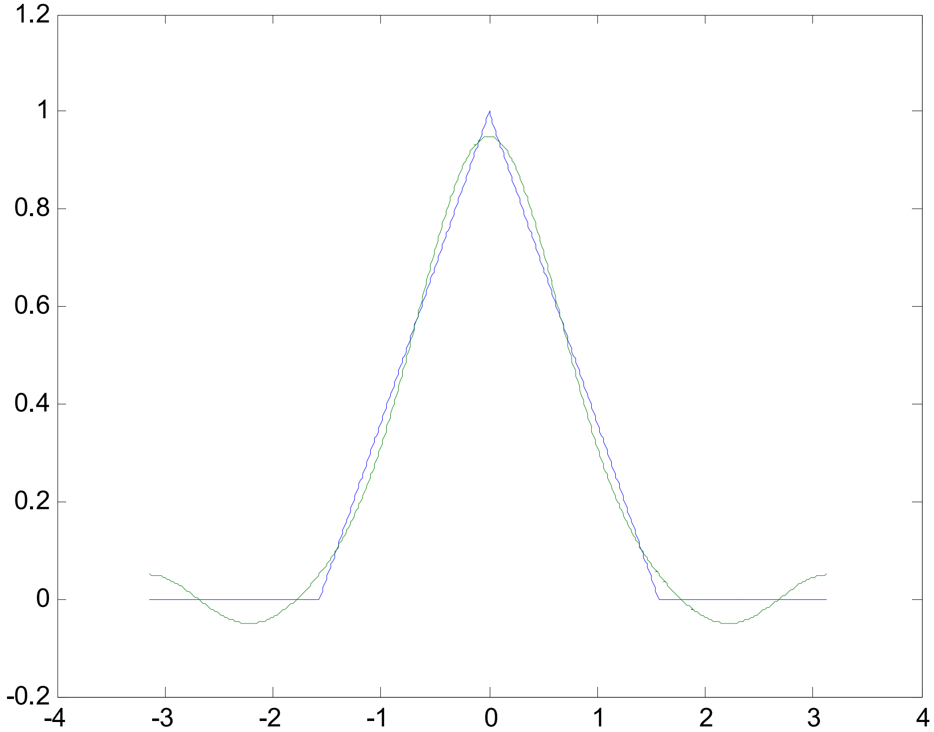


Koeficijenti
a[*m*]:
0.2388
0.3983
0.2226
0.0709
0.0049

- N=8, m=2, Euler 512,
- $W(e^{j\omega})=$ 100 u području gušenja, 1 inače

$$\underline{E}=\int_{-\pi}^{\pi}E\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

Rješenje 4



Koeficijenti
a[*m*]:
0.2456
0.4097
0.2248
0.0403
0.0294

- $N=8$, $m=2$,
- $W(e^{j\omega}) = 1$

$$\underline{E} = \max_{\omega\in[-\pi,\pi]} E\left(e^{j\omega}\right)$$

Optimizacijske metode

- Za zadani N optimizacijom dobivamo koeficijente $a[m]$, $m = 0,1,.., N/2$; te na kraju da bi dobili kauzalan sustav dodamo kašnjenje za $N/2$ (odnosno linearni fazni član $e^{-jN\omega/2}$).
- Ako nas rješenje ne zadovoljava, povećamo N, promijenimo optimizacijski kriterij, ili podesimo težinsku funkciju.
- Nakon više iteracija, dolazimo do prihvatljivog rješenja.

Optimizacijske metode

- Samo neki kriteriji i parametri optimizacije vode na numerički efikasne metode.
- Općenito imamo složen numerički postupak, bez jamstva da je rješenje ujedno i globalni minimum.
- Drugačiji početni uvjet često daje drugačije rješenje (tj. dobivamo neki lokalni minimum), pa je uvijek potrebno isprobati nekoliko varijanti.
- Postoji čitav niz dobrih optimizacijskih algoritama i odgovarajućih programskih paketa.

Projekcijska metoda

- Vrlo jednostavan pristup dizajnu jest projekcijska metoda.
- Funkcije cos($\omega \cdot m$) su na promatranom intervalu $-\pi$ do π ortogonalne, tj. vrijedi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \omega m \cdot \cos \omega n \, d\omega = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Stoga možemo željenu AF karakteristiku neovisno “projicirati” na pojedine cos($\omega \cdot m$).

Projekcijska metoda

- Koristimo dobro poznati izraz za izračunavanje kosinusnih koeficijenata Fourierovog reda a_m:

$$a[m] = a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d\left(e^{j\omega}\right)\cdot\cos\omega m\, d\omega$$

- odnosno

koeficijenti Fourierovog reda

$$a[0] = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

Projekcijska metoda

- Za odabrani N izračunamo sve projekcijske koeficijente $a[m]$, $m = 0,1,.., N/2$, te na kraju dodamo linearni fazni član $e^{-jN\omega/2}$.
- Kako je A_d za realne sustave parna, možemo integrirati samo po pozitivnim frekvencijama:

$$a[m] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A_d\left(e^{j\omega}\right) \cdot \cos \omega m \, d\omega$$

$$a[0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A_d\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

Općenito bi projekcijsku metodu zapisali ovako:

- Neka je $\{ f_m \}$ sustav ortonormalnih funkcija na nekom intervalu I, tj.

skalarni produkt

$$\left\langle f_m, f_n \right\rangle_I = \delta_{m,n} \qquad \left\langle f_m, f_n \right\rangle_I = \int_{t\in I} f_m(t)\, f_n^*(t)\, dt \qquad \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- Onda projekcijski koeficijenti $\{a_m\}$ daju opis

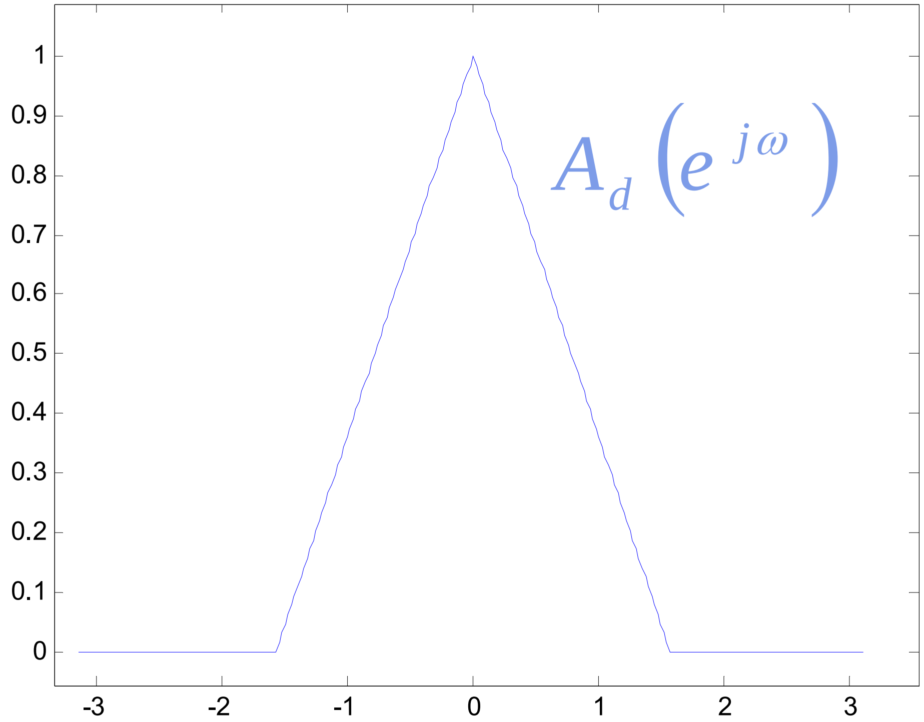
$$\hat{x} = \sum_m a_m f_m \qquad a_m = \left\langle x, f_m \right\rangle_I$$

- u prostoru $\{ f_m \}$, uz najmanju kvadratnu pogrešku:

kvadratna norma

$$\left\| \hat{x} - x \right\|_I^2 \qquad \left\| y \right\|_I^2 = \left\langle y, y \right\rangle_I = \int_{t\in I} \left| y(t) \right|^2 dt$$

Primjer



$$A\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=0}^{N/2} a[m] \cdot \cos\ \omega m \qquad a[0] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A_d\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

$$a[m] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A_d\left(e^{j\omega}\right)\cdot \cos \omega m \, d\omega$$

Primjer

$$a[m] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\omega}{\pi/2}\right)\cdot \cos \omega m \, d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi^2 m^2}\left(1-\cos\frac{m\pi}{2}\right) \quad m \neq 0$$

$$a[0] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\omega}{\pi/2}\right) d\omega = \frac{1}{4}$$

- $a[0]=1/4$, $a[1]=4/\pi^2$, $a[2]=2/\pi^2$, $a[3]=4/(9\pi^2)$, $a[4]=0$.

Primjer

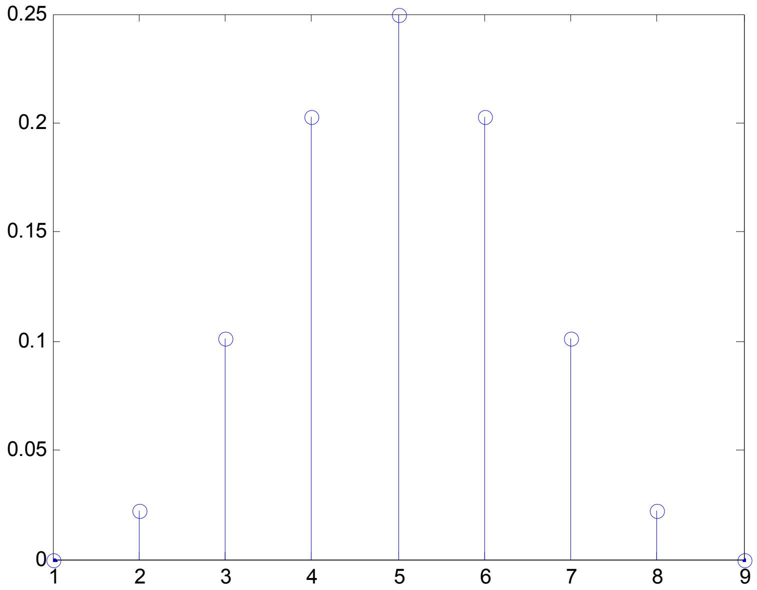
- $a[0]=1/4$, $a[1]=4/\pi^2$, $a[2]=2/\pi^2$, $a[3]=4/(9\pi^2)$, $a[4]=0$.
- Rezultati se poklapaju s onim dobivenim optimizacijom (primjer 1: $m=2$, $W(e^{j\omega})=1$).
- Konačno, impulsni odziv filtra je:

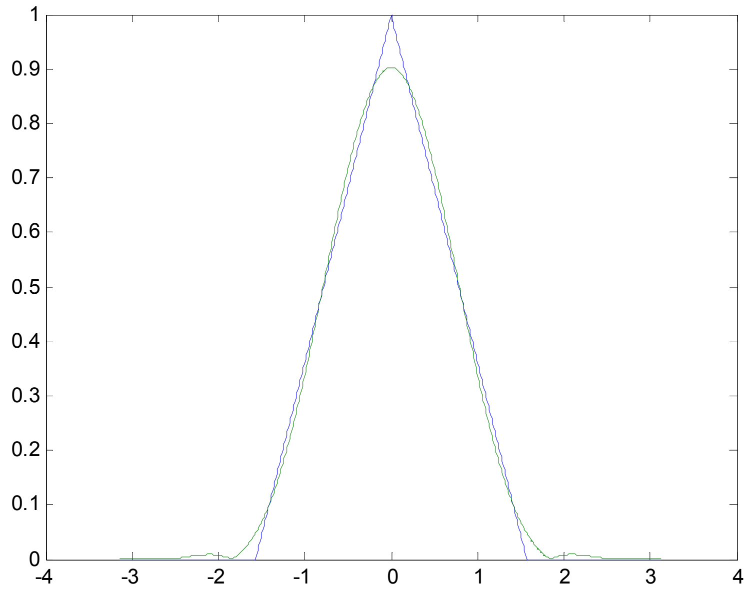
0.2500
0.4053
0.2027
0.0450
0.0000

$$h\left[\frac{N}{2}\right]=a[0], \quad h\left[\frac{N}{2}-m\right]=\frac{1}{2}a[m], \quad 1 \le m \le \frac{N}{2}$$

$$h[N]=h[0],\ h[N-1]=h[1],\ \ldots,\ h\left[\frac{N}{2}+1\right]=h[\frac{N}{2}-1].$$

Primjer: rezultat





- Lijevo: impulsni odziv.
- Desno: modul dobivene AFK (zeleno) i željena AFK (plavo).

Obradili smo teme

- Periodična i cirkularna konvolucija
- Brza konvolucija
- Projektiranje i primjena filtara u frekvencijskoj domeni
- Projektiranje FIR filtara
  - metoda vremenskih otvora
  - optimizacija
  - projekcijska metoda