Obrada informacija

1. međuispit – 26. ožujka 2008.

1. Definirajte signal, sustav i informaciju. Klasificirajte signale s obizirom na prebrojivost domene i kodomene. Za svaku klasu signala navedite neki od primjera iz stvarnog života!

2. Definirajte DTFT i IDTFT transformaciju. Izračunajte DTFT transformaciju impulsnog odziva diskretnog LTI sustava

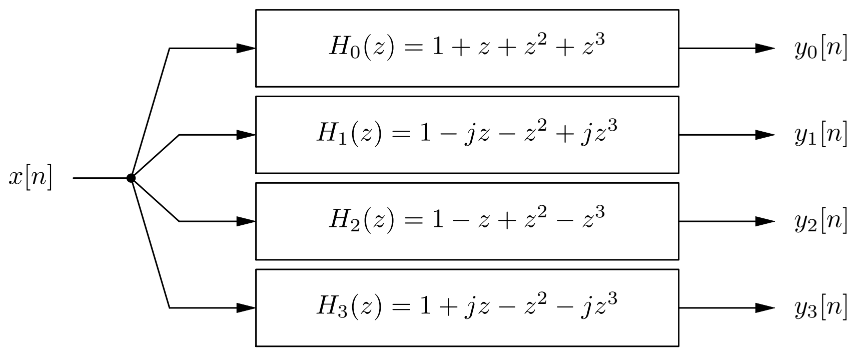
$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$$

te skicirajte pripadnu amplitudnu i faznu karakteristiku. Također izračunajte i skicirajte grupno vrijeme kašnjenja.

3. Definirajte dekonvoluciju. Ako znate da odziv LTI sustava s impulsnim odzivom $h[n] = \{\underline{2}, 3, 2\}$ iznosi $y[n] = \{\underline{2}, 1, 1, -1, -1, -2\}$ odredite ulaz $u[n]$.

4. Diskretni LTI sustav ima prijenosnu funkciju $H(z) = (1 - 2z^{-1})(3 - 1z^{-1})$. Ispitajte je li zadani sustav stabilan i je li minimalno fazni. Odredite pripadni minimalno-fazni sustav $H_{\mathrm{mf}}(z)$ i pripadni inverz $H_{\mathrm{mf}}^{-1}(z)$. Pokažite da vrijedi $\left|H(e^{j\omega})H_{\mathrm{mf}}^{-1}(e^{j\omega})\right| = 1$!

5. Definirajte DFT_N transformaciju, kompleksnu eksponencijalu W_N i pripadnu matricu transformacije $\mathbf{W}_N$. Za sustav zadan slikom (DFT_4 analizirajući filtarski slog) odredite izlaze $y_0[n]$, $y_1[n]$, $y_2[n]$ i $y_3[n]$ na pobudu $x[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 0\}$. Ispitajte jesu li uzorci odziva $y_k[n]$, $k = 0, 1, 2, 3$ u trenutku $n = 0$ jednaki uzorcima $X[k] = \mathrm{DFT}_4\big[x[n]\big]$, odnosno pokažite da vrijedi $y_k[0] = X[k]$.



OI, 1. međuispit, 2008. 3. 26. Tomislav Petković

① Signal je funkcija nezavisnih varijabli koja nosi informaciju. Općenito, neka su D i K dva neprazna skupa. Signal $f: D \to K$ je pridruživanje koje svakom elementu iz skupa D pridruži točno jedan element iz skupa K.

Prema prebrojivosti domene D i kodomene K signale klasificiramo na:

1) kontinuirani signali imaju neprebrojivu domenu i kodomenu,
2) vremenski diskretni signali imaju prebrojivu domenu i neprebrojivu kodomenu,
3) kvantizirani signali (ili amplitudno-diskretni signali) imaju prebrojivu kodomenu i neprebrojivu domenu, i
4) digitalni signali imaju prebrojivu domenu i kodomenu.

Sustav obično promatramo sa stanovišta odnosa ulaza i izlaza i opisujemo ga kao proces koji transformira, pohranjuje ili prenosi signal. Preciznije, neka su $[D_u \to K_u]$ i $[D_y \to K_y]$ dva neprazna prostora ulaznih i izlaznih signala. Sustav $S: [D_u \to K_u] \to [D_y \to K_y]$ je pridruživanje koje svakom elementu $u \in [D_u \to K_u]$ pridruži barem jedan element $y \in [D_y \to K_y]$.

Informacija je ono što smanjuje neizvjesnost (C. Shannon), odnosno bilo što što korisniku/primatelju daje novo znanje.

② Neka je $x[n]$ kvadratno sumabilan signal.

$$DTFT[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

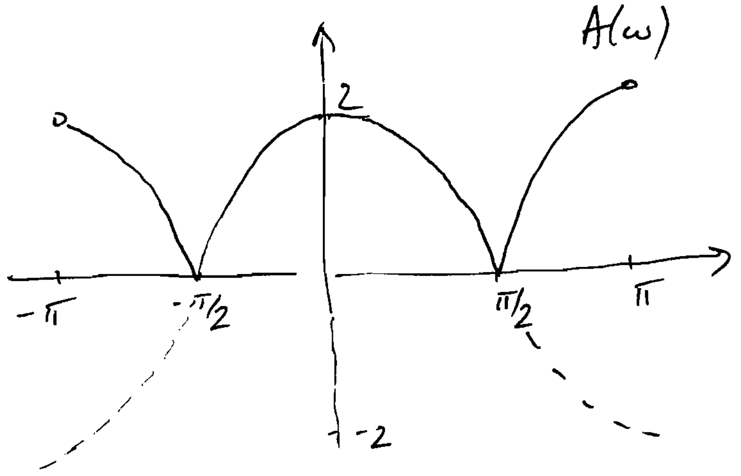
$$IDTFT[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} = x[n]$$

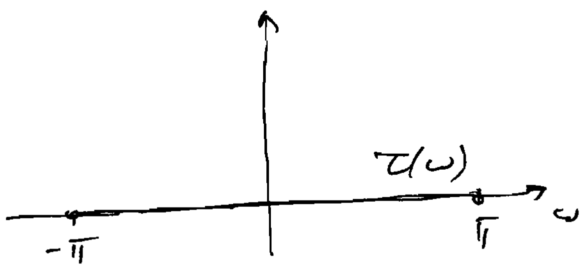
$$h[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$$

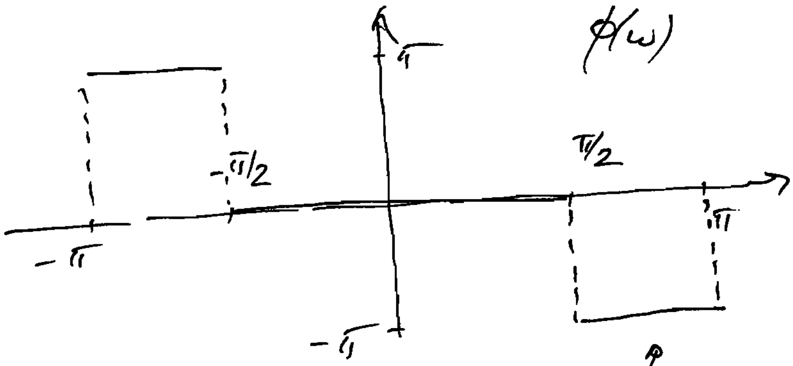
$$H(\omega) = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos(\omega)$$

$$A(\omega) = |2\cos(\omega)| \quad , \quad \phi(\omega) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ \pi, & \omega \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \phi(\omega) = 0$$







može i +π

③ Postupak rekonstrukcije ulaznog signala $x[n]$ iz poznatog izlaznog signala $y[n]$ i impulsnog odziva sustava $h[n]$ naziva se dekonvolucija:

$$x[n] = \frac{1}{h[0]} \left(y[n] - \sum_{i=1}^{n} x[n-i]\, h[i] \right)$$

$$h[n] = \{ \underline{2}, 3, 2 \}$$

$$y[n] = \{ \underline{2}, 1, 1, -1, -1, -2 \}$$

$$x[0] = \frac{1}{2} (2) = 1$$

$$x[1] = \frac{1}{2} (1 - (1 \cdot 3)) = -1$$

$$x[2] = \frac{1}{2} (1 - ((-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2)) = 1$$

$$x[3] = \frac{1}{2} (-1 - (1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2)) = -1$$

$$x[4] = \frac{1}{2} (-1 - ((-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2)) = 0$$

$$x[5] = \frac{1}{2} (-2 - (0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2)) = 0$$

$$x[6] = \frac{1}{2} (0 - (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2)) = 0$$

Kako $h[n]$ ima tri elementa svi ostali uzorci ulaza su jednaki nuli, dakle:

$$x[n] = \{ \underline{1}, -1, 1, -1 \}$$

4) $H(z) = (1-2z^{-1})(3-1z^{-1}) \Rightarrow z_1 = 2, \quad z_2 = \frac{1}{3}$

Zadani sustav $H(z)$ je FIR sustav koji nema polove te je stabilan. Kako je nula $z_1 = 2$ izvan jedinične kružnice u z-ravnini zadani sustav NIJE minimalno-fazni.

$$H_{mf}(z) = (z^{-1}-2)(3-z^{-1}) = -6+5z^{-1}-z^{-2}$$

$$H_{mf}^{-1}(z) = \frac{1}{(z^{-1}-2)(3-z^{-1})} = \frac{1}{-6+5z^{-1}-z^{-2}}$$

$$H_{mf}(z)\cdot H_{mf}^{-1}(z) = 1$$

$$H(z)\cdot H_{mf}^{-1}(z) = \frac{(1-2z^{-1})(3-1z^{-1})}{(z^{-1}-2)(3-z^{-1})} = \frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}-2} = \frac{z-2}{1-2z}$$

$$\left|H(e^{j\omega})H_{mf}^{-1}(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{e^{j\omega}-2}{1-2e^{j\omega}}\right| = \left|\frac{\cos(\omega)-2+j\sin(\omega)}{1-2\cos(\omega)-2j\sin(\omega)}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2(\omega)-4\cos(\omega)+4+\sin^2(\omega)}{1-4\cos(\omega)+4\cos^2(\omega)+4\sin^2(\omega)}} = \sqrt{\frac{5-4\cos(\omega)}{5-4\cos(\omega)}} = 1$$

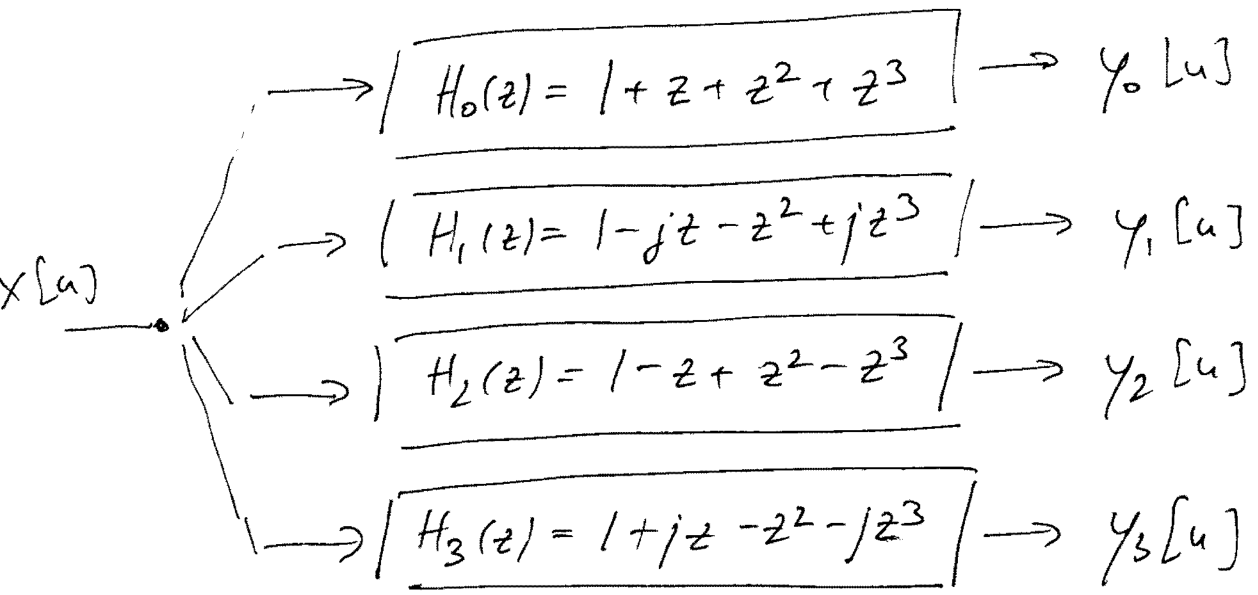
5) $DFT_N\left[x[n]\right] \overset{DEF}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk} = X[k]$

$W_N \overset{DEF}{=} e^{-2\pi j \frac{1}{N}}$

Matrica W_N je kvadratna matrica dimenzija $N \times N$ koja u i-tom retku i j-tom stupcu ima element $W_N^{(i-1)(j-1)}$.

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$x[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 0\}$ $\quad DFT_4\left[x[n]\right] = W_4 \cdot x[n] = \{\underline{1}, -j, -1, j\}$



$$Y_0(z) = H_0(z)\cdot X(z) = z^{-1} + 1 + z + z^2$$
$$Y_1(z) = H_1(z)\cdot X(z) = z^{-1} - j - z + jz^2$$
$$Y_2(z) = H_2(z)\cdot X(z) = z^{-1} - 1 + z - z^2$$
$$Y_3(z) = H_3(z)\cdot X(z) = z^{-1} + j - z - z^2$$

$$\left.\begin{matrix} y_k[0] = \{\underline{1}, -j, -1, +j\} \\ X[k] = \{\underline{1}, -j, -1, j\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_k[0] = X[k]$$