Obrada informacija

Završni ispit – 27. lipnja 2008.

1. Navedite izraze za računanje 4-udaljenosti $d_4(p,q)$ i 8-udaljenosti $d_8(p,q)$ za dvije točke p, q iz $\mathbb{Z}^2$. Izračunate 4-udaljenost i 8-udaljenost između točaka $(2,3)$ i $(10,14)$. Skicirajte barem jednu najkraću 4-putanju i 8-putanju koja spaja zadane točke. Što možete reći o jedinstvenosti dobivenih putanja?

2. Neka je $f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega_1,\omega_2)$ 2D Fourierov transformacijski par i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ dvije konstante. Izrazite transformaciju signala $f(x-ay, y-bx)$ pomoću $F(\omega_1,\omega_2)$ te konstanti a i b.

3. Promatramo 2D diskretni LSI sustav s impulsnim odzivom

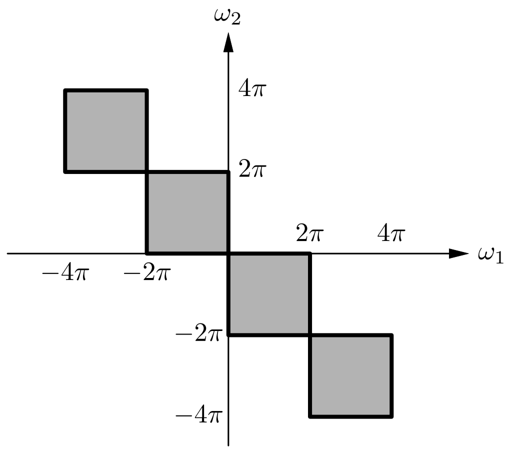
$$h(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \underline{-1} \end{Bmatrix}.$$

Je li zadani impulsni odziv separabilan? Izračunajte i skicirajte amplitudnu frekvencijsku karakteristiku danog sustava. Izračunajte odziv dobivenog sustava na pobudu

$$f(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \underline{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

4. Kontinuirani 2D signal ima spektar $F_k(\omega_1,\omega_2)$ koji je jednak jedinici za područje označeno slikom, dok je za sve ostale vrijednosti kontinuiranih kružnih frekvencija ω_1 i ω_2 spektar jednak nuli. Za koje vrijednosti razmaka uzorkovanja Δx i Δy neće doći do preklapanja spektra? Skicirajte pripadni spektar diskretnog signala za $\Delta x = \frac{1}{2}$ i $\Delta y = \frac{1}{2}$ ako znate da je spektar dobivenog diskretnog signala opisan izrazom

$$F_d(\Omega_1,\Omega_2) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F_k\Big(\frac{\Omega_1 + 2\pi i}{\Delta x}, \frac{\Omega_2 + 2\pi j}{\Delta y}\Big).$$



5. Definirajte dvodimenzionalnu Fourierovu transformaciju za sliku dimenzija $N_1 \times N_2$. Korištenjem izraza $\mathbf{W}_3\mathbf{F}\mathbf{W}_6^T$ izračunajte dvodimenzionalnu diskretnu Fourierovu transformaciju slike

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

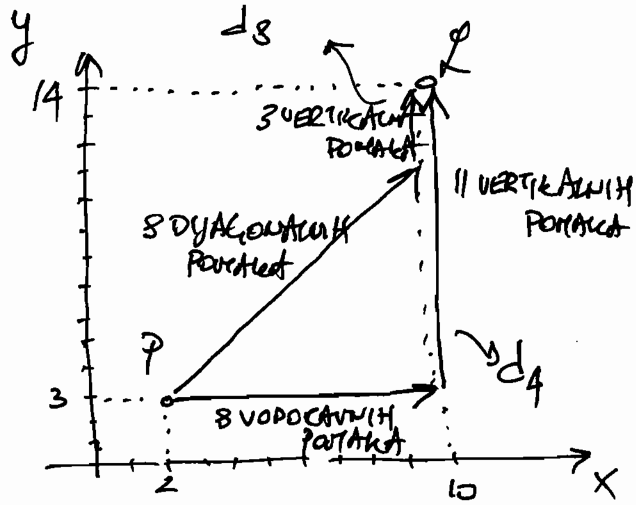
završni ispit, 2008. 6.27. Tomislav Petković

(1) $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$

4-udaljenost: $d_4(p,q) \overset{DEF}{=} |p_x - q_x| + |p_y - q_y|$

8-udaljenost: $d_8(p,q) \overset{DEF}{=} \max(|p_x - q_x|, |p_y - q_y|)$

$p = (2,3)$, $q = (10, 14)$



$d_4(p,q) = |2-10| + |3-14| = 19$

$d_8(p,q) = \max(|2-10|, |3-14|) = 11$

8 i 4 putanje nisu jedinstvene, odnosno postoji više različitih putanja jednake najkraće duljine

(2) $f(x,y) \circ\!\!-\!\!\circ F(\omega_1, \omega_2)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f(x-ay, y-bx)] = \iint_{R\times R} f(x-ay, y-bx) e^{-j\omega_1 x - j\omega_2 y}\, dx\, dy$$

Fourierov integral po $f(x-ay, y-bx)$ moramo svesti na integral po $f(\chi, \nu)$ zamjenom varijabli:

$$\begin{cases} \chi = x - ay \\ \nu = y - bx \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \chi \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1-ab} \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \nu \end{bmatrix}$$

$$|J| = \frac{1}{(1-ab)^2}\begin{vmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-ab}{(1-ab)^2} = \frac{1}{1-ab}$$

Sada je

$$\mathcal{F}[f(x-ay, y-bx)] = \iint_{R\times R} f(\chi,\nu)\, e^{-j\omega_1 \frac{\chi+a\nu}{1-ab} - j\omega_2 \frac{b\chi+\nu}{1-ab}} |J| \, d\chi \, d\nu$$

$$= \frac{1}{|1-ab|}\iint_{R\times R} f(\chi,\nu)\, e^{-j\chi \frac{\omega_1+b\omega_2}{1-ab} - j\nu \frac{a\omega_1+\omega_2}{1-ab}} \, d\chi \, d\nu =$$

$$= \frac{1}{|1-ab|} F\left(\frac{\omega_1+b\omega_2}{1-ab}, \frac{a\omega_1+\omega_2}{1-ab}\right)$$

3

$$h(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \underline{-1} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 \\ \underline{1} \end{Bmatrix}}_{h_y(y)} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} 1 & \underline{-1} \end{Bmatrix}}_{h_x(x)}$$

Kako je zadani $h(x,y)$ separabilan $\mathcal{F}$ transformaciju možemo jednostavnije izračunati:

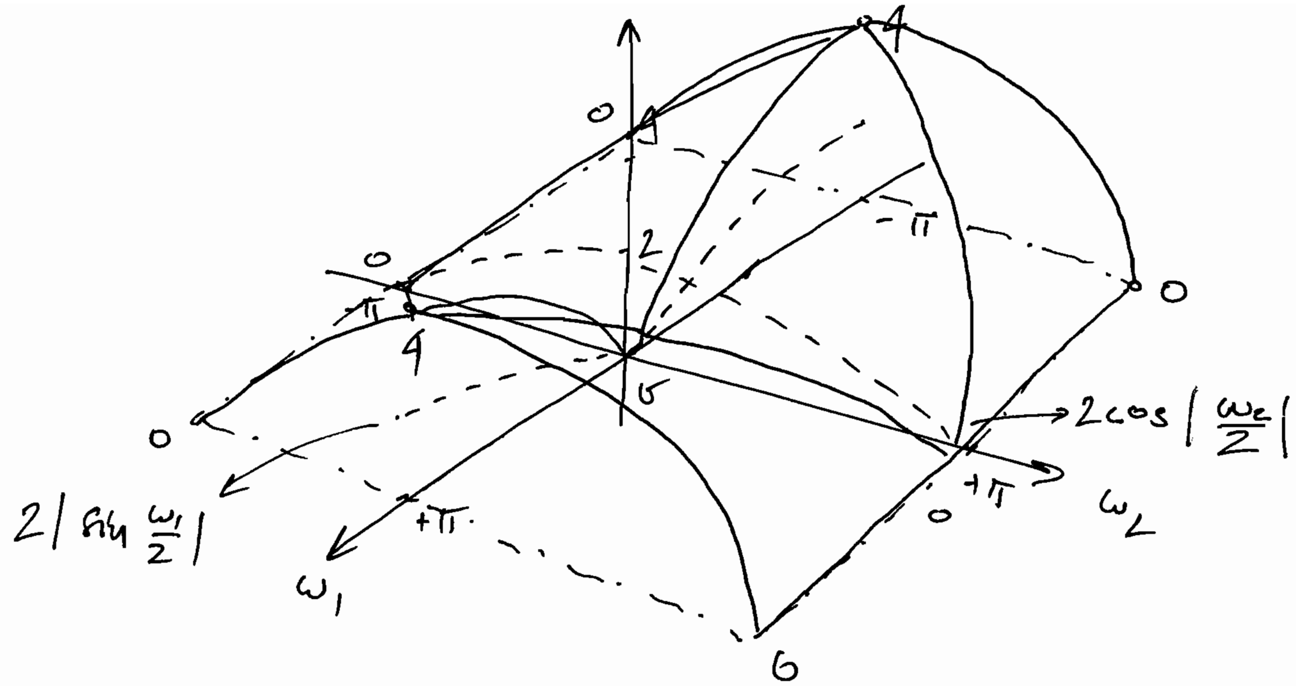
$$\mathcal{F}[h(x,y)] = \mathcal{F}[h_x(x)] \cdot \mathcal{F}[h_y(y)] = (e^{j\omega_1}-1)\cdot(e^{-j\omega_2}+1) =$$

$$= e^{j\omega_1/2}\, 2j \sin\frac{\omega_1}{2} \cdot e^{-j\omega_2/2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{\omega_2}{2} =$$

$$= e^{-j\omega_2/2 + j\omega_1/2} \cdot 4j \sin\frac{\omega_1}{2} \cdot \cos\frac{\omega_2}{2}$$

Amplitudna frekvencijska karakteristika je

$$A(\omega_1,\omega_2) = 4\left|\sin\frac{\omega_1}{2} \cdot \cos\frac{\omega_2}{2}\right|$$



$$f(x,y)=\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \underline{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Koristimo separabilnost, odnosno računamo prvo $f(x,y) * h_x(x)$ pa zatim $(f(x,y) * h_x(x)) * h_y(y)$:

$$f(x,y) * h_x(x) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \underline{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

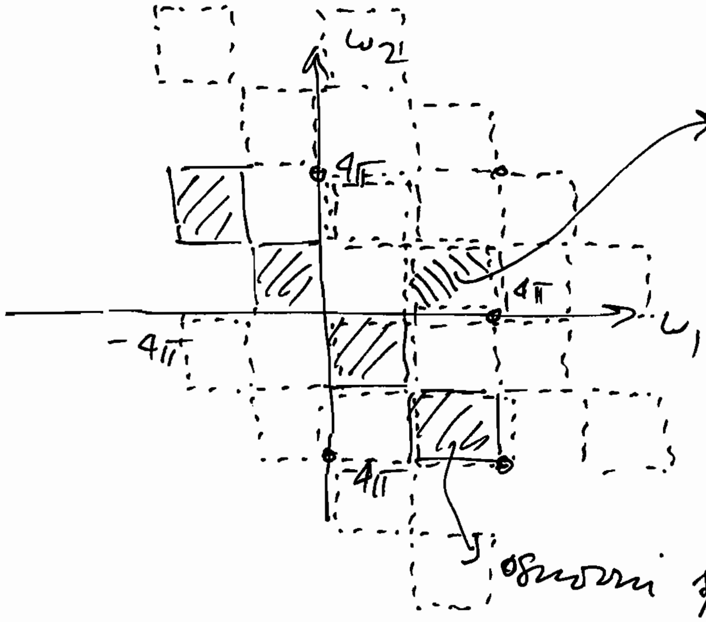
$$f(x,y) ** h(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \underline{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

④ Prema slici su najveće frekvencije $\omega_{1,max} = 4\pi$ i $\omega_{2,max} = 4\pi$ te su najveći razmaci otipkavanja

$$\Delta x_{max} = \frac{2\pi}{2\,\omega_{1,max}} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta y_{max} = \frac{2\pi}{2\,\omega_{2,max}} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\Delta y} = 4\pi$$

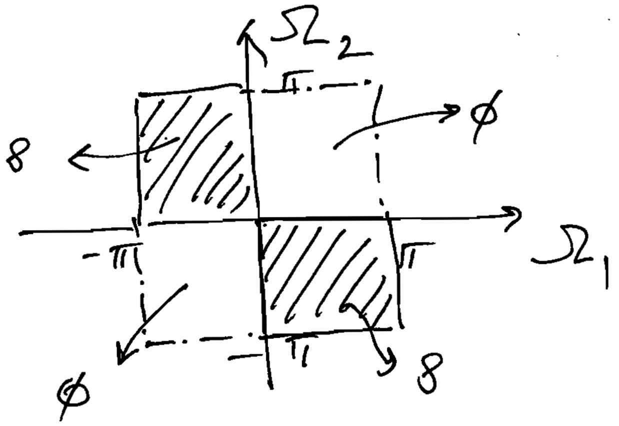


destruktivno preklapanje da je amplituda

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}(1+1) = 4\cdot 2 = 8$$

osnovni spektar kontinuiranog signala

Sada možemo skicirati osnovni period diskretnog signala:



5

$$F(k,l) = \sum_{x=0}^{N_1-1} \sum_{y=0}^{N_2-1} f(x,y)\, W_{N_1}^{kx}\, W_{N_2}^{ly}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} F(k,l)\, W_{N_1}^{-kx}\, W_{N_2}^{-ly}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, I_3 \,\vdots\, I_3 \,]$$

$$W_3 F W_6^T = W_3 \left[I_3 \,\vdots\, I_3 \right] W_6^T = \left[W_3 \,\vdots\, W_3 \right] W_6^T =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_6^2 & W_6^4 & 1 & W_6^2 & W_6^4 \\ 1 & W_6^4 & W_6^8 & 1 & W_6^4 & W_6^8 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_6^1 & W_6^2 & -1 & W_6^4 & W_6^5 \\ 1 & W_6^2 & W_6^4 & 1 & W_6^2 & W_6^4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & W_6^4 & W_6^2 & 1 & W_6^4 & W_6^2 \\ 1 & W_6^5 & W_6^4 & -1 & W_6^2 & W_6^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prilikom množenja treba sve svesti na W_6 (ne zaboravite da je $-1 = W_6^3$). Pri množenju elemenata zbrajamo eksponente te računamo modulo 6. Ukoliko u zbroju imamo svih 6 eksponenata, dakle

$$W_6^0 + W_6^1 + W_6^2 + W_6^3 + W_6^4 + W_6^5$$

rezultat zbroja je nula! Dakle vrijedi

$$1 + W_6^1 + W_6^2 - 1 + W_6^4 + W_6^5 = 0$$

$$1 + W_6^2 + W_6^4 = 0$$

$$1 + (-1) = 0$$