Usmeni ispit iz Obrade Informacija

3. ciklus

Dvodimenzionalni sustavi

Osnovni 2D nizovi

2D Dirac:	2D Kronecker:
$\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$	$\delta(m,n)=\delta(m)\delta(n)$
Svojstva:	Svojstva:
$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)\delta(x-s,y-t)\,dsdt=f(x,y)$ $\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)\,dxdy=1$	$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} x(i,j)\delta(m-i,n-j)=x(m,n)$ $\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(i,j)=1$
2D pravokutni impuls:	2D sinc:
$rect(x,y)=rect(x)rect(y)$	$sinc(x,y)=sinc(x)sinc(y)$
$rect(x)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert\le 0.5,\\ 0 & inače\end{cases}$	$sinc(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\pi}{x\pi} & \lvert x\rvert>0\\ 1 & x=0\end{cases}$
2D comb:	
$comb(x,y)=comb(x)comb(y)$	
$comb(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n)$	

Definicija 2D sustava

Neka je $x(m,n)$ ulaz u 2D sustav, a $y(m,n)$ izlaz.
Izlaz se dobiva kao $y(m,n)=L[x(m,n)]$
L je operator koji može biti linearan ili nelinearan.

Linearnost 2D sustava, impulsni odziv, odziv sustava na pobudu

2D sustav opisan operatorom L je linearan ako za svaki x, y, a, b vrijedi sljedeći izraz:
$L[a\cdot x(m,n)+b\cdot y(m,n)]=a\cdot L[x(m,n)]+b\cdot L[y(m,n)]$

Ako je ulaz u linearni 2D sustav jednak $x(m,n)=\delta(m-i,n-j)$, pripadni odziv se naziva impulsnim odzivom $h(m,n,i,j)=L[\delta(m-i,n-j)]$. U optici se impulsni odziv naziva još i PSF (Point Spread Function – funkcija razmazivanja točke).

Ukoliko je poznat impulsni odziv, moguće je naći odziv na bilo koju pobudu korištenjem konvolucije:

$$y(m,n)=\sum_i\sum_j x(i,j)h(m,n,i,j)$$

Linearni 2D sustav invarijantan na pomak, 2D konvolucija

Linearni 2D sustav je invarijantan na pomak (Space-Invariant), tj. prostorno invarijantan ako vrijedi:
$h(m,n,i,j)=h(m-i,n-j,0,0)=h(m-i,n-j)$

U tom slučaju odziv sustava je
$y(n)=\sum_i \sum_j x(i,j)h(m-i,n-j)=u(m,n)**h(m,n)$

Kao i za 1D signale, vrijedi flip-and-slide algoritam.

Definicija i svojstva kontinuirane 2D Fourierove transformacije

2D FT se formira slično kao 1D FT, samo što se istovremeno prate dvije prostorne varijable (x i y) i dobivaju se dvije prostorne frekvencije ξ_1 i ξ_2.

Periodički signali	Aperiodički signali
$F(\xi_{1,}\xi_2)=\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi\xi_1 x}e^{-j2\pi\xi_2 y}dxdy$ $f(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)e^{j2\pi\xi_1 x}e^{j2\pi\xi_2 y}d\xi_1 d\xi_2$	$X(\omega_{1,}\omega_2)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n)e^{-j\omega_1 m}e^{-j\omega_2 n}$ $x(\omega_{1,}\omega_2)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\pi}^{\pi} X(\omega_{1,}\omega_2)e^{j\omega_1 m}e^{j\omega_2 n}$

Svojstva kontinuiranog 2D FTa:

Rotacija	$f(\pm x,\pm y)\Leftrightarrow F(\pm\xi_{1,}\pm\xi_2)$
Linearnost	$a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y)\Leftrightarrow a\cdot F(\xi_{1,}\xi_2)+b\cdot F(\xi_{1,}\xi_2)$
Separabilnost	$f(x)g(y)\Leftrightarrow F(\xi_1)G(\xi_2)$
Skaliranje	$f(a\cdot x,b\cdot y)\Leftrightarrow\frac{F\left(\xi_1/a,\xi_2/b\right)}{\lvert a\cdot b\rvert}$
Pomak	$f(x\pm a,y\pm b)\Leftrightarrow F(\xi_{1,}\xi_2)\cdot e^{j2\pi\xi_1 a}e^{j2\pi\xi_2 b}$
Modulacija	$e^{\pm j2\pi\eta_1 x}e^{\pm j2\pi\eta_2 y}f(x,y)\Leftrightarrow F(\xi_1\pm\eta_{1,}\xi_2\pm\eta_2)$
Linearna konvolucija	$h(x,y)**f(x,y)\Leftrightarrow H(\xi_{1,}\xi_2)F(\xi_{1,}\xi_2)$
Multiplikacija	$h(x,y)f(x,y)\Leftrightarrow H(\xi_{1,}\xi_2)**F(\xi_{1,}\xi_2)$

2D Z-transformacija i veza s Fourierovom transformacijom, OTF, MTF

Definicija 2D ZTF-a je

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n} .$$

ZTF impulsnog odziva nam daje transfer-funkciju diskretnog sustava:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(m,n) z_1^{-m} z_2^{-n}$$

Ako se ZTF računa na jediničnoj kružnici (za $|z_1|=1, |z_2|=1$), dobiva se Fourierova transformacija:

$$z_1 = e^{j\omega_1}, z_2 = e^{j\omega_2}$$

2D sustav je stabilan ako vrijedi:

$$\sum_m \sum_n |h(m,n)| < \infty$$

OTF vrijednost je definirana za svaki LSI (Linear, Space-Invariant) sustav:

$$OTF = \frac{H(\xi_1, \xi_2)}{H(0,0)}$$

MTF vrijednost je definirana za svaki LSI sustav:

$$MTF = |OTF| = \frac{|H(\xi_1, \xi_2)|}{|H(0,0)|}$$

Otipkavanje i kvantizacija

Osnovni preduvjet za digitalnu obradu slike je slika u digitalnom obliku (kao polje brojeva konačne preciznosti). Prostornu sliku je dakle potrebno otipkati i svaki uzorak kvantizirati konačnim brojem bitova. Slika se naknadno može digitalno obraditi.

Slika s M redaka i N kolona (M x N) moze se predstaviti na sljedeći način:

$$f(x,y)=\begin{bmatrix} f(0,0) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

Otipkavanje slike (tj. diskretizacija prostornih koordinata) se obično vrši prolaskom kroz sliku red po red i otipkavanjem elemenata reda.

Vrste 2D senzora slike

Standardni 2D senzori slike se dijele u tri kategorije: CCD, CMOS i scan-in uređaji.
Prve dvije vrste senzora rade na principu pretvaranja svjetlosne energije u električni naboj i konačno električni signal. Najčešće se primjenjuju u kamerama i fotoaparatima.

CCD: mala složenost senzora, mali šum
CMOS: mala složenost popratne logike, manja potrošnja

Scan-in uređaji su tipično laserski uređaji koji osvjetljavaju točku po točku dokumenta, a leće prenose reflektirano svjetlo na fotodetektor. Koriste se obično za visoko-rezolucijske svrhe kao u plošnim skenerima (kolimirano svjetlo i R-G-B CCD senzori) ili rotacijskim skenerima.

2D teorija otipkavanja

2D otipkavanje možemo prikazati kao množenje kontinuirane slike s 2D comb-funkcijom, to jest "poljem" Dirac funkcija: $comb(x,y;\Delta x,\Delta y)=\sum_m \sum_n \delta(x-m\Delta x)\delta(y-n\Delta y)$

gdje su $\Delta x, \Delta y$ dimenzije pravokutnog rastera otipkavanja.

Otipkana slika jednaka je produktu originala i funkcije češlja.

$$f_s(x,y)=f(x,y)\,comb(x,y,\Delta x,\Delta y)=\sum_m \sum_n f(x,y)\delta(x-m\Delta x)\delta(y-n\Delta y)$$

Fourierova transformacija comb funkcije je nova comb funkcija s razmacima

$\xi_{xs}=\frac{1}{\Delta_x}, \xi_{ys}=\frac{1}{\Delta_y}$, a frekvencijski comb glasi

$$\begin{aligned} COMB(\xi_1, \xi_2) &= F\{comb(x,y,\delta x,\delta y)\} \\ &= \xi_{xs}\xi_{ys}\sum_k \sum_l \delta(\xi_1-k\xi_{xs}, \xi_1-l\xi_{ys}) \\ &= \xi_{xs}\xi_{ys}\,comb(\xi_1, \xi_2;\xi_{xs}\xi_{ys}) \end{aligned}$$

2D aliasing efekt

Množenje u vremenskoj domeni odgovara konvoluciji u prostornoj:

$$
\begin{aligned}
F_s(\xi_{1,}\xi_2) &= F(\xi_{1,}\xi_2)*COMB(\xi_{1,}\xi_2) \\
&= \xi_{xs}\xi_{ys}\sum_k\sum_l F(\xi_{1,}\xi_2)*\delta(\xi_1-k\xi_{xs},\xi_2-l\xi_{ys}) \\
&= \xi_{xs}\xi_{ys}\sum_k\sum_l F(\xi_1-k\xi_{xs}\xi_2-l\xi_{ys})
\end{aligned}
$$

Vidi se da dolazi do ponavljanja (aliasinga) osnovnog spektra svakih ξ_{xs} u *x* smjeru i ξ_{ys} u *y* smjeru. Ukoliko je ξ_{xs} ili ξ_{ys} premalen, doći će do preklapanja spektara i do distorzije slike.

Kvantizacija vrijednosti piksela, definicija kvantizatora

Kvantizator preslikava kontinuiranu slučajnu varijablu *u* u diskretnu varijablu *v*, koja poprima vrijednosti iz skupa L. Kvantizator je stepeničasta U/I funkcija (koja je nelinearna i bezmemorijska).

Ako su prijelazni nivoi t_k, $k=1,...,L+1$, i ako je ulaz $u\in\left[t_k,t_k+1\right\rangle$ tada je izlaz $y=r_k$.

Raspored nivoa kvantizacije može biti jednolik (uniforman) ili nejednolik (neuniforman). Optimalni raspored ovisi o razdiobi sivih tonova u slici (tj. histogramu) – nivoi su gušći kod sivih tonova koji su česti. Neuniformni kvantizatori su bolji kad je potreban mali broj bitova po slici.

Uniformni kvantizator, linearni kvantizator

Lloyd-Max kvantizator minimizira srednju kvadratnu pogrešku za dani broj nivoa kvantizacije: $e=\sum_{i=1}^{L}\int_{t_i}^{t_i+1}(u-r_i)^2 p_u(u)du$. Parcijalne derivacija se izjednače s nulom i rješavanje nelinearnog sustava jednadžbi daje optimalne nivoe kvantizacije.

Ako je funkcija gustoće razdiobe $p_u(u)$ uniformna, Lloyd-Max kvantizator ima jednake intervale između nivoa prijelaza i rekonstrukcije – to je LINEARNI kvantizator.

Uniformni kvantizator opsega *A* s *B* bitova ima korak kvantizacije $q=A/2^B$.

Linearni kvantizator ima $SNR=6\cdot n\,[\mathrm{dB}]$, gdje je *n* broj bitova. Dakle, svaki dodatni bit poboljšava kvalitetu za 6 dB.

Za slike s niskim frekvencijama bolje je grubo prostorno otipkavanje i fina kvantizacija.

Za slike s visokim frekvencijama bolje je fino prostorno otipkavanje i gruba kvantizacija.

Ukoliko smanjimo rezoluciju, negativni efekt naziva se "checkerboard" (efekt šahovske ploče gdje se pri istoj veličini slike vide pojedini pikseli). Ukoliko uzmemo malen broj bitova za kvantizaciju, negativni efekt su lažne konture (zbog niskog broja boja se vide "objekti" i bridovi kojih u stvari nema).

Transformacije slika

Transformacije slika koriste se za poboljšavanje, rekonstrukciju, kodiranje i opis slika. Najčešće se koriste linearne transformacije oblika $T(a\cdot x+b\cdot y)=a\cdot T(x)+b\cdot T(y)$.

Oblik linearne 2D transformacije, jezgra transformacije

2D transformacija slike (diskretnog niza) *u(m,n)* dimenzija N×N je opisana parom jednadžbi

$$v(k,l)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n)u(m,n) \quad 0\le k,l\le N-1$$, odnosno

$$u(m,n)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} b_{m,n}(k,l)u(k,l) \quad 0\le m,n\le N-1$$

gdje su $a_{k,l}(m,n)$ i $b_{m,n}(k,l)$ jezgra transformacije i jezgra inverzne transformacije.
Separabilne 2D transformacije
2D transformacija je separabilna ukoliko za njenu jezgru vrijedi:
$a_{k,l}(m,n)=c_k(m)\cdot d_l(n)$
Jezgra transformacije je simetrična ako vrijedi $c_k(m)=d_l(n) \quad \forall k,m$.

Primjer - Fourierova transformacija je separabilna i simetrična

$$a_{k,l}(m,n)=\frac{1}{N}\cdot e^{-\frac{j2\pi(mk+nl)}{N}}=c_k(m)d_l(n)$$

$$c_k(m)=\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot e^{-\frac{j2\pi mk}{N}}$$

$$d_l(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot e^{-\frac{j2\pi nl}{N}}$$

Ortogonalne 2-D transformacije, matrični prikaz

Opća formula 1D ortogonalne transformacije i njenog inverza je

$$v(k)=\sum_{n=0}^{N-1} u(n)a_k(n) \quad 0\le k\le N-1$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{N-1} u(k)a_k^*(n) \quad 0\le n\le N-1$$

, tj matrično

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}^{\mathbf{H}}\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathbf{T}}\cdot\boldsymbol{v}$$

pri čemu je jezgra inverzne transformacije A* konjugirana i transponirana matrica A i vrijedi:
$a(k,n)=a^*(n,k)$

Slično tom, opća formula 2D ortogonalne transformacije i njenog inverza je

$$v(k,l)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n)u(m,n) \quad 0\le k\le N-1$$

$$u(n,m)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a^*_{k,l}(m,n)v(k,l) \quad 0\le n\le N-1$$

gdje je $a_{k,l}$ jezgra transformacije koja je skup ortonormalnih 2D funkcija (baza).

Matrična formulacija separabilne i simetrične 2-D transformacije

2D transformacija je separabilna ako vrijedi $a_{k,l}(m,n)=a_k(m)b_i(n)=a(k,m)\cdot b(i,n)$, gdje su $\{a_k(m), k=[0..\mathrm{N}-1]\}$ i $\{b_i(n), l=[0..\mathrm{N}-1]\}$ ortonormalni skupovi vektora.
$A=\{a(k,m)\}$ i $B=\{b(l,n)\}$ su tad unitarne matrice.
2D transformacija je simetrična za ***A = B.***

Separabilna i simetrična 2D transformacija ima jednadžbu:

$$v(k,l)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a(k,m)u(m,n)a(l,n) \qquad 0\le k,l\le N-1$$

$$u(m,n)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} a^*(k,m)v(k,l)a^*(l,n) \qquad 0\le m,n\le N-1$$

Matrično gledano:

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^*$$

, gdje je *U* matrica slike veličine $N\times N$, *V* matrica transformata iste veličine, a $\boldsymbol{A}=\{a(k,m)\}$ unitarna matrica transformacije.

2D DFT, svojstva

$N \times N$ matrica F unitarne 1D DFT jednaka je $\boldsymbol{F}=\{f_{k,n}\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{W}_N^{kn}\right\}$ $\quad 0\le k, n\le N-1$, gdje je

$\boldsymbol{W}_N^{kn}=e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

2D DFT je separabilna u dvije uzastopne 1D DFT po jednoj, pa po drugoj osi:

$$v(k,l)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}u(m,n)W_N^{km}W_N^{\ln}, \quad 0\le k, n\le N-1$$

$$u(m,n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}u(v,l)W_N^{-km}W_N^{-\ln}, \quad 0\le m, n\le N-1$$

, tj matrično $\begin{matrix} V=F\,U\,F \\ U=F^*\,U\,F^* \end{matrix}$, pri čemu je

F simetrična pa transpozicija nije bitna.

Svojstva DFTa su:

Kompleksnost	Elementi $\boldsymbol{F}$ su kompleksni
Separabilnost	$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{F}\Rightarrow \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{U})$
Translacija i modulacija	$u(m-a, n-b)\Leftrightarrow v(k,l)\cdot e^{-\frac{j2\pi ka}{N}}e^{-\frac{j2\pi lb}{N}}$ $u(m,n)\cdot e^{j2\pi\alpha m}e^{j2\pi\beta m}\Leftrightarrow v(k-\alpha, l-\beta)$
Periodičnost	$v(k,l)=v(k+N,l)=v(k,l+N)=v(k+N,l+N), \forall\, k,l$
Konjugirana simetrija	$v(k,l)=v^*(-k,-l), \qquad \lvert v(k,l)\rvert=\lvert v^*(-k,-l)\rvert$
Rotacija u r, φ	$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$
Skaliranje	$f(a\cdot x, b\cdot y)\Leftrightarrow\frac{F(u/a, v/b)}{\lvert a\cdot b\rvert}$
Laplaceov operator	$\nabla^2 f(x,y)\Leftrightarrow -4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$ (edge detector)
Linearna konvolucija	$(h*u)(m,n)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}h(m-i, n-j)u(i,j)$ $h(x,y)*u(x,y)\Leftrightarrow H(u,v)U(u,v)$ za FT diskretnih aperiodičkih *h* i *u*
Cirkularna konvolucija	$(h\otimes u)(m,n)=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}h((m-i)\,mod\,N, (n-j)\,mod\,N)u(i,j)$ $h(m,n)\otimes u(m,n)\Leftrightarrow H(k,l)U(k,l)$ za 2D DFT duljine N od *h* i *u*
Korelacija	f(x, y

2D DCT, svojstva

Matrica $\boldsymbol{C}=\{c(k,n)\}$ DCT-a definirana je kao

$$\boldsymbol{C}=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & k=0 \quad 0\le n\le N-1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}\cos\dfrac{\pi(2\mathrm{n}+1)k}{2\mathrm{N}} & 1\le k\le N-1 \quad 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

1D DCT definirana je matrično kao $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$

2D DCT dobiva se kao $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{C}$, gdje je $\boldsymbol{U}=[u(m,n)]$ ulazna slika, $\boldsymbol{V}=[v(k,l)]$ transformacija.

Svojstva DCTa:

Realnost	Koeficijenti $\boldsymbol{C}$ su realni brojevi
Ortogonalnost	$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{*}\Rightarrow\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$
Nije dio DFTa	$\boldsymbol{C}\neq\Re(\boldsymbol{F})$
Izračunljivost pomoću DFTa	DCT niza duljine N može se računati DFTom simetrično proširenog niza duljine 2N
Raspodjela energije	Najviše energije je u nižim koeficijentima, kompresijom se miču viši koeficijenti te je gubitak informacije relativno malen; dobra za slike

Karhunen-Loéve transformacija

Za realni slučajni vektor $\boldsymbol{u}$ autokorelacijska matrica je $\boldsymbol{R}=\mathrm{E}[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]$. Ako je $\boldsymbol{A}$ $N\times N$ matrica čiji su stupci ortonormirani vlastiti vektori $\boldsymbol{R}$ tako da

$\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}=\lambda_k\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}, \qquad 0\le k\le N-1, \qquad \lambda_0\ge\lambda_1\ge\ldots\ge\lambda_N-1$,

tada je matrica $\boldsymbol{A}$ unitarna i reducira $\boldsymbol{R}$ na dijagonalnu matricu $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{A}$.

1D KL transformacija vektora $\boldsymbol{u}$ definira se kao $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}$.

1D IKL transformacija vektora $\boldsymbol{v}$ definira se kao $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}$.

Kako se KLT formira iz samog signala, ona je najoptimalnija za danu sliku ili signal!