



Obrada informacija – Zadaci za domaću zadaću 1. Akademska školska godina 2007./2008.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet Elektrotehnike i računarstva,
Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija

Uputa

Ovi zadaci koje je potrebno riješiti za domaću zadaću ujedno su i zadaci kakve možete očekivati na prvom međuispitu. Prvi međuispit se sastoji od 5 zadataka i piše se 120 minuta.

Zbog velikog broja zadataka svaki student za domaću zadaću mora riješiti samo manji dio zadataka, i to ovisno o zadnjoj znamenici matičnog broja:

Znamenka 0: zadatke 11, 13a, 14a, 15a, 16a, 17a, 18, 19a, 20f, 20g, 21a, 22, 23a, 24a, 25, 26, 29

Znamenka 1: zadatke 9, 13b, 14b, 15b, 16b, 17b, 18, 19b, 20d, 20e, 21b, 22, 23b, 24b, 25, 27, 29

Znamenka 2: zadatke 10, 13c, 14c, 15c, 16a, 17c, 18, 19c, 20c, 20d, 21c, 22, 23c, 24a, 25, 28, 29

Znamenka 3: zadatke 8, 13d, 14d, 15d, 16b, 17a, 18, 19d, 20a, 20b, 21d, 22, 23d, 24b, 25, 26, 29

Znamenka 4: zadatke 12, 13a, 14d, 15e, 16c, 17b, 18, 19e, 20b, 20c, 21e, 22, 23e, 24a, 25, 27, 29

Znamenka 5: zadatke 8, 13b, 14c, 15f, 16c, 17c, 18, 19a, 20e, 20f, 21f, 22, 23a, 24b, 25, 28, 29

Znamenka 6: zadatke 9, 13c, 14b, 15a, 16a, 17a, 18, 19b, 20d, 20g, 21a, 22, 23b, 24a, 25, 26, 29

Znamenka 7: zadatke 10, 13d, 14a, 15b, 16b, 17b, 18, 19c, 20c, 20f, 21b, 22, 23c, 24b, 25, 27, 29

Znamenka 8: zadatke 11, 13a, 14c, 15c, 16a, 17c, 18, 19d, 20a, 20d, 21c, 22, 23d, 24a, 25, 28, 29

Znamenka 9: zadatke 12, 13b, 14d, 15d, 16b, 17a, 18, 19e, 20b, 20g, 21d, 22, 23e, 24b, 25, 26, 29

Pri tome su zadaci iz prve skupine namijenjeni ponavljanju i preporučeno ih je riješiti ako niste sigurni u svoje predznanje, dok su zadaci iz zadnje skupine nešto teži i prvenstveno su namijenjeni studentima koji žele znati više. Na međuispitu se neće pojaviti zadaci iz zadnje skupine!

Bez obzira što je za domaću zadaću potrebno riješiti samo dio zadataka svakako je dobro pregledati i ostale zadatke, te ovisno o vremenu, riješiti barem neke od njih.

Ponavljanje gradiva predmeta Signali i sustavi

1. Zadana su dva signala $x_1[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$ i $x_2[n] = \delta[n+2] - 2\delta[n] + \delta[n-2]$.
 - a) Odredite energije oba signala.
 - b) Periodički proširite signale tako da period dobivenog signala bude 5, skicirajte ih te odredite snage tako periodički proširenih signala.
 - c) Izračunajte konvoluciju $x_1[n] * x_2[n]$.

Napomena: Periodičko proširenje signala $x_1[n]$ je $\tilde{x}_1[n] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_1[n - 5i]$.

2. Korištenjem \mathcal{Z} transformacije odredite linearnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

3. Računanjem u vremenskoj domeni odredite linearnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

Uputa: Svedite konvolucijsku sumu na sumu geometrijskog reda!

4. Neka je zadan signal

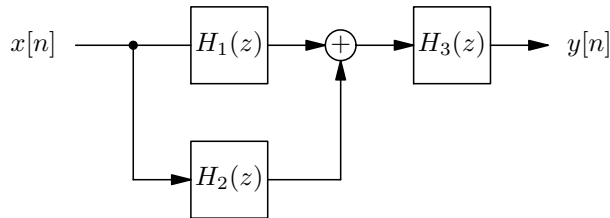
$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

Odredi linearnu konvoluciju signala $x[n]$ i $x[-n]$ (dakle $x[n] * x[-n]$).

5. Tri diskretna sustava s prijenosnim funkcijama

$$H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}, \quad H_2(z) = \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}, \quad \text{i} \quad H_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

spojena su kako je prikazano na slici. Odredite prijenosnu funkciju cijelog sustava. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku tako dobivenog sustava.



6. Promatramo kaskadu dva diskretna LTI sustava s prijenosnim funkcijama

$$H_1(z) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{6}z^{-1} - z^{-2}) \quad \text{i} \quad H_2(z) = \frac{1}{6}(-2 + 5z^{-1} + 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})z^{-2}).$$

Odredite prijenosnu funkciju i impulsni odziv kaskade.

7. Sustav za obradu signala na pobudu $u[n]$ daje odziv $y[n]$ i možemo ga opisati jednadžbom

$$6y[n] - 5y[n-1] + y[n-2] = n^2 u[n].$$

Ispitajte linearnost i vremensku nepromjenjivost danog sustava! Odredite odziv sustava na pobudu $u[n] = 2\delta[n-1]$ ako su početna stanja jednaka nuli.

Signali, sustavi i informacija

8. Definirajte i objasnite pojmove: informacija, medij, multimedija.
9. Definirajte signal. Klasificirajte signale s obzirom na prebrojivost domene i kodomene. Za svaku klasu navedite neki primjer iz stvarnog života!
10. Definirajte sustav. Navedite koja svojstva zadovoljava linearni sustav. Ispitajte koji od sljedećih sustava su linearni:

1. $y(t) = 5u(t)$,
2. $y(t) = 5u(t) + 2$,
3. $y(t) = 5u^2(t)$ i
4. $y(t) = 5tu(t) + 10t^2u(t - 2)$.

11. Definirajte stabilan sustav. Koji uvjet mora zadovoljavati impulsni odziv LTI sustava da bi sustav bio stabilan? Pokažite da je taj uvjet ispunjen za sustave s impulsnim odzivom:

1. $h(t) = e^{-t} \mu(t)$, i
2. $h[n] = 2^{-n} \mu[n]$.

12. Definirajte sljedeće signale:

1. diskretni jedinični impuls $\delta[n]$,
2. diskretna jedinična stepenica $\mu[n]$,
3. diskretna harmonijska funkcija, i
4. diskretna eksponencijalna funkcija.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija

13. Ako je niz $x[n]$ realan niz pokažite da njegova vremenski diskretna Fourierova transformacija (DTFT) definirana s

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \text{DTFT}[x[n]]$$

zadovoljava sljedeća svojstva:

- a) $\text{Re}[X(\omega)]$ je parna funkcija od ω ,
- b) $\text{Im}[X(\omega)]$ je neparna funkcija od ω ,
- c) $|X(\omega)|$ je parna funkcija od ω i
- d) $\arg[X(\omega)]$ je neparna funkcija od ω .

14. Za dane nizove odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) te skicirajte pripadnu amplitudnu i faznu karakteristiku:

- a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 1\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$,
- b) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- c) $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1]$ i
- d) $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$.

Diskretni LTI sustavi

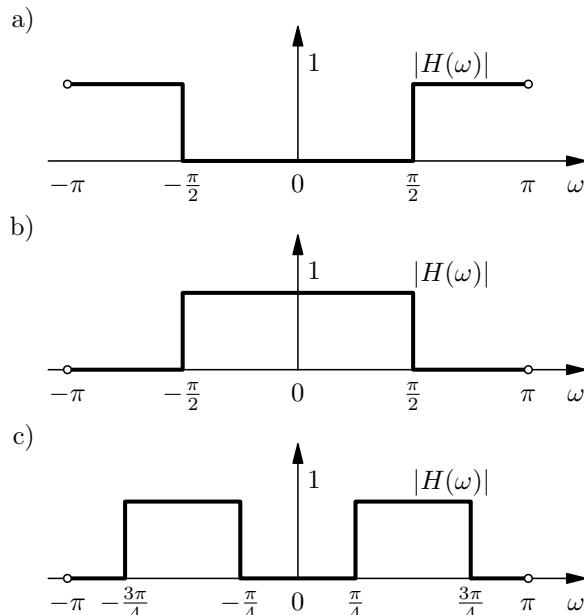
15. Za svaki od zadanih impulsnih odziva diskretnih LTI sustava izračunajte i skicirajte amplitudnu karakteristiku, faznu karakteristiku i grupno vrijeme kašnjenja:

- a) $h[n] = \{1, 2, 3, 4\}$,
- b) $h[n] = \{1, 2, 3, \underline{4}\}$,
- c) $h[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}$,
- d) $h[n] = \{\underline{1}, 1, -1, -1\}$,
- e) $h[n] = \{\underline{1}, 2, 1\}$, i
- f) $h[n] = \{\underline{1}, 2, -1\}$.

Ispitajte koji od zadanih sustava su kauzalni. Možete li iz izračunate fazne karakteristike i grupnog vremena kašnjenja odrediti koji od zadanih sustava su kauzalni? Objasnite!

Napomena: Podcrtani uzorak je vrijednost impulsnog odziva $h[n]$ za $n = 0$. Svi uzorci koji nisu zadani su jednaki nuli.

16. Zadane su tri amplitudno-frekvencijske karakteristike diskretnih LTI sustava. Odredite impulsni odziv sustava uz pretpostavku nulte faze te uz pretpostavku da je faza oblika $e^{-2j\omega}$ i $e^{+2j\omega}$.



Uputa: Impulsni odziv i amplitudna karakteristika su vezani vremenski diskretnom Fourierovom transformacijom. Potrebno je dakle izračunati IDTFT zadanog spektra! Za faze koje nisu nulte iskoristite rezultat dobiven uz nultu fazu i teorem o pomaku!

Minimalno-fazni sustavi, dekonvolucija i inverzni sustav

17. Za svaku od zadanih prijenosnih funkcija odredite položaj polova i nula u z -ravnini te ispitajte stabilnost sustava. Ispitajte postoje li vrijednosti parametra r koje zadani sustav čine minimalno-faznim.

a) $H(z) = r \frac{1 - r^{-1}z^{-1}}{1 - rz^{-1}}, 0 < r < 1,$

b) $H(z) = \frac{1 - r}{1 + r} \frac{1 + rz^{-1}}{1 - rz^{-1}}, 0 < r < 1, i$

c) $H(z) = \frac{1 - r}{1 + r} \frac{1 - rz^{-1}}{1 + rz^{-1}}, 0 < r < 1$

18. Neka su a i b realni brojevi za koje vrijedi $|a| < 1$ i $|b| < 1$. Odredi i usporedi amplitudne i fazne karakteristike te grupno vrijeme kašnjenja sustava

$$H_1(z) = \frac{z + b}{z + a} \quad i \quad H_2(z) = \frac{bz + 1}{z + a}.$$

Za koje vrijednosti parametara a i b sustav $H_1(z)$, a za koje sustav $H_2(z)$ postaje minimalno-fazni?

19. Znamo li izlaz i impulsni odziv diskretnog sustava ulaz možemo odrediti prema izrazu

$$u[n] = \frac{1}{h[0]} \left(y[n] - \sum_{i=1}^n u[n-i]h[i] \right).$$

No kako konvoluciju za FIR sustave koji su pobuđeni nizom $u[n]$ konačnog trajanja možemo opisati množenjem polinoma tako i dekonvoluciju možemo odrediti dijeljenjem polinoma u \mathcal{Z} -domeni. Odredite ulaz $u[n]$ ako znate impulsni odziv i izlaz FIR sustava prema navedenom izrazu i dijeljenjem polinoma u \mathcal{Z} domeni:

a) $y[n] = \{1, 3, 6, 9, 12, 9, 5\}, h[n] = \{1, 1, 1\},$

b) $y[n] = \{5, 9, 12, 9, 6, 3, 1\}, h[n] = \{1, 1, 1\},$

c) $y[n] = \{1, 1, 2, 1, 2, 1, 1\}, h[n] = \{1, -1, 1\},$

d) $y[n] = \{1, 4, 8, 10, 8, 4, 1\}, h[n] = \{1, 2, 1\}, i$

e) $y[n] = \{1, 0, 2, 0, 2, 0, 1\}, h[n] = \{1, 0, 1\}.$

Napomena: Podcrtani uzorak je vrijednost signala za $n = 0$. Svi uzorci signala koji nisu zadani su jednaki nuli.

20. Za zadane FIR sustave odredite inverzni sustav računanjem u \mathcal{Z} domeni. Ispitajte stabilnost i kauzalnost dobivenih inverznih sustava.

a) $h[n] = \{1, 2\},$

b) $h[n] = \{2, 1\},$

c) $h[n] = \{1, 2, 1\},$

d) $h[n] = \{1, 1, 1\},$

e) $h[n] = \{2, -7, 3\},$

f) $h[n] = \{9, 6, 2\}, i$

g) $h[n] = \{1, 6, 18\}$.

Koji od polaznih sustava su minimalno-fazni? Što možete reći o stabilnosti inverznih sustava za zadane minimalno-fazne sustave?

Napomena: Podcrtani uzorak je vrijednost impulsnog odziva $h[n]$ za $n = 0$. Svi uzorci koji nisu zadani su jednaki nuli.

21. Iz zadanih impulsnih odziva $h[n]$ neminimalno-faznih FIR sustava pronađite impulsni odziv $h_{mf}[n]$ i prijenosnu funkciju $H_{mf}(z)$ odgovarajućeg minimalno-faznog FIR sustava koji ima istu amplitudno-frekvencijsku karakteristiku. Iz dobivenog minimalno-faznog FIR sustava odredite prijenosnu funkciju $H_{mf}^{-1}(z)$ inverznog sustava. Izračunajte prijenosnu funkciju $H(z)H_{mf}^{-1}(z)$ i impulsni odziv kaskade zadanog neminimalno-faznog FIR sustava i određenog inverza. Što možete reći o amplitudnoj, a što o faznoj karakteristici dobivene kaskade?

a) $h[n] = \{1, -4, 8\}$,

b) $h[n] = \{1, 4, 8\}$,

c) $h[n] = \{2, -5, 2\}$,

d) $h[n] = \{2, 5, 2\}$,

e) $h[n] = \{2, -3, -2\}$, i

f) $h[n] = \{2, 3, -2\}$.

Napomena: Podcrtani uzorak je vrijednost impulsnog odziva $h[n]$ za $n = 0$. Svi uzorci koji nisu zadani su jednaki nuli.

Diskretna Fourierova transformacija

22. Definirajte kompleksnu eksponencijalu W_N . Definirajte DFT_N i IDFT_N transformacije i pripadne matrice \mathbf{W}_N i \mathbf{W}_N^{-1} . Pokažite da za $N = 3$ vrijedi $\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^H = N\mathbf{I}$.
23. Definirajte DFT_N transformaciju. Izračunajte diskretnu Fourierovu transformaciju DFT_N te skicirajte amplitudne i fazne spektre sljedećih signala:

a) $x[n] = \{1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1\}$ ($N = 8$),

b) $x[n] = \{\underline{1}, 1, 2, 0, 1\}$ ($N = 5$),

c) $x[n] = \{0, 2, 0, -2\}$ ($N = 4$),

d) $x[n] = \{1, 0, 0, 0, -1\}$ ($N = 5$) i

e) $x[n] = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, -1\}$ ($N = 7$).

Napomena: Podcrtani uzorak je vrijednost signala $x[n]$ za $n = 0$.

24. Definirajte IDFT_N transformaciju. Odredite i skicirajte inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju IDFT_N spektara

a) $X[k] = \{2, 1, 0, 1\}$ ($N = 4$) i

b) $X[k] = \{2, 0, 2, 0, 2, 0\}$ ($N = 6$).

Napomena: Podcrtani uzorak je vrijednost spektra $X[k]$ za $k = 0$.

25. Diskretnu Fourierovu transformaciju u četiri točke možemo zapisati i u matričnom obliku. U tom slučaju spektar računamo prema izrazu

$$X[k] = \text{DFT}_4[x[n]] = \begin{bmatrix} W_4^{0 \cdot 0} & W_4^{0 \cdot 1} & W_4^{0 \cdot 2} & W_4^{0 \cdot 3} \\ W_4^{1 \cdot 0} & W_4^{1 \cdot 1} & W_4^{1 \cdot 2} & W_4^{1 \cdot 3} \\ W_4^{2 \cdot 0} & W_4^{2 \cdot 1} & W_4^{2 \cdot 2} & W_4^{2 \cdot 3} \\ W_4^{3 \cdot 0} & W_4^{3 \cdot 1} & W_4^{3 \cdot 2} & W_4^{3 \cdot 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}.$$

Izračunajte spektar četiri signala koji odgovaraju retcima matrice DFT_4 transformacije. Za svaki od signala odredite za koji k je spektar različit od nule. Objasnite!

26. Ako je $x[n]$ realan niz duljine N pokažite da njegova diskretna Fourierova transformacija u N točaka

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = \text{DFT}_N[x[n]]$$

zadovoljava relaciju

$$X[k] = X^*[N - k].$$

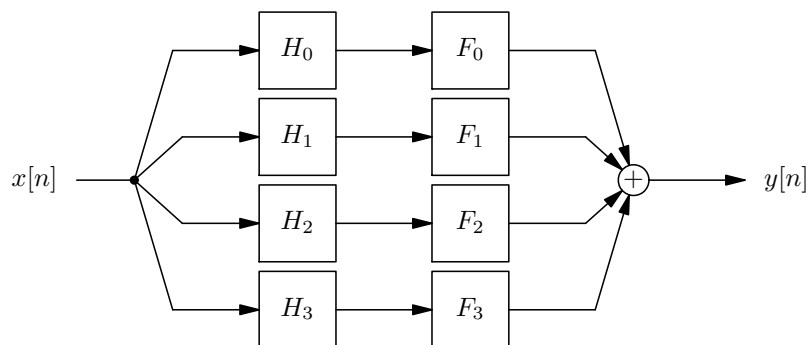
27. Ako je $x[n]$ realan paran niz duljine N pokažite da je njegova diskretna Fourierova transformacija u N točaka čisto realna.
28. Ako je $x[n]$ realan neparan niz duljine N pokažite da je njegova diskretna Fourierova transformacija u N točaka čisto imaginarna.
29. Promatramo filtarski slog prikazan slikom koji odgovara realizaciji pomičnog DFT_N bloka za $N = 4$. Pri tome je

$$F_k(z) = 1 + z^{-1}W_N^{-k} + z^{-2}W_N^{-2k} + \dots + z^{-(N-1)}W_N^{-k(N-1)}$$

i

$$H_k(z) = 1 + zW_N^k + z^2W_N^{2k} + \dots + z^{N-1}W_N^{k(N-1)}.$$

Pokažite da cijeli filtarski slog možemo nadomjestiti jednim sustavom s impulsnim odzivom $h[n] = N^2\delta[n] = 16\delta[n]$.



Zadaci za one koji žele znati više

- 30.* Za signal $x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$ odredite vrijednosti slijedećih izraza bez računanja vremenski diskretne Fourierove transformacije $X(\omega)$:

- a) $X(0)$,
- b) $\arg[X(\omega)]$,
- c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$,
- d) $X(\pi)$ i
- e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$.

31.* Autokorelacijski niz diskretnog kompleksnog signala $x[n]$ je

$$R_{XX}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]x[n+m].$$

Pokažite da je vremenski diskretna Fourierova transformacija autokorelacijskog niza $R_{XX}[m]$ upravo $|X(\omega)|^2$.

32.* Raspoložemo je jednim FIR filtrom i s jednim IIR filtrom čije su prijenosne funkcije

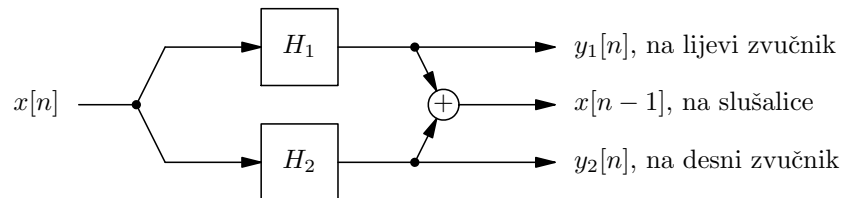
$$H_{\text{FIR}}(z) = 1 + az^{-1} - az^{-3} - z^{-4} \quad \text{i} \quad H_{\text{IIR}} = \frac{1}{1 - z^{-2}},$$

gdje je a nepoznata realna konstanta. Odredi prijenosnu funkciju kaskade ta dva filtra te odziv kaskade na pobudu

$$u[n] = \delta[n] - \sqrt{2}\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

ako znaš da FIR filtar ima nulu na frekvenciji $\omega = 3\pi/4$.

33.* Mačak Pero je u igri pandžom oštetiо niskotonski zvučnik unutar lijeve zvučničke kutije tako da je zvuk pri pobudnoj frekvenciji od 90 Hz jednostavno nepodnošljiv. Njegova vlasnica Iva koja studira FER je odlučila privremeno riješiti problem jednim FIR filtarskim slogom realiziranim programski na računalu koje radi s zvukom otipkanim na 44,1 kHz.



Ako znate da je Iva za H_1 odabrala FIR filtar drugog reda koji potpuno potiskuje frekvenciju od 90 Hz dok frekvenciju od 2 kHz jedinično pojačava, odredite impulsni odziv $h_1[n]$ i prijenosnu funkciju $H_1(z)$ tog filtra. Nadalje, ako znate da se na slušalicama moraju čuti sve frekvencije uz eventualno kašnjenje odredite impulsni odziv $h_2[n]$ i prijenosnu funkciju $H_2(z)$ drugog FIR filtra (dakle vrijedi $H_1(\omega) + H_2(\omega) = ke^{-j\omega}$, $k \in \mathbb{R}$). Skicirajte amplitudne karakteristike te raspored nula oba FIR filtra!

34.* Linearna konvolucija dva signala $x[n]$ i $y[n]$ je definirana kao

$$x[n] * y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]y[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y[i]x[n-i].$$

Za signale konačnog trajanja od N uzoraka se umjesto linearne konvolucije definira cirkularna (ili kružna) konvolucija duljine N kao

$$x[n] \circledast y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]y[\langle n-i \rangle_N] = \sum_{i=0}^{N-1} y[i]x[\langle n-i \rangle_N]$$

Neka je h_i i -ti redak matrice \mathbf{W}_N diskretne Fourierove transformacije. Pokažite da vrijedi

$$h_i \circledast h_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N, & i = j \end{cases}.$$

- 35.*** Mali Ivica se sav sretan vratio iz dućana s najboljom 3D kraticom koju novac može kupiti, no kada ju je spojio bio je razočaran zbog loše slike i čudnih pojava na zaslonu. Ivica se zamislio nad problemom te je zaključio da se smetnje javljaju zbog nešto starijeg zaslona čija elektronika unosi smetnje. Štoviše, Ivica je odredio da se unešena smetnja može modelirati jednostavnim propuštanjem digitalnog video-signala kroz sustav s impulsnim odzivom $h[n]$ koji modelira jeku,

$$h[n] = \delta[n] - 0,1\delta[n - m],$$

gdje je m konstanta. Ivica je odlučio otkloniti problem dodatnim programiranjem kartice tako da se signal prije slanja propušta kroz filter s impulsnim odzivom $g[n]$ čime bi poništio utjecaj $h[n]$. Odziv $g[n]$ je odredio korištenjem DFT-a u $N = 4m$ točaka na slijedeći način:

1. odredio je spektar $H[k]$ kao $\text{DFT}_{4m}[h[n]]$,
2. izračunao je spektar $G[k]$ kao $G[k] = 1/H[k]$ i
3. odredio je konačni impulsni odziv $g[n]$ uzimanjem jednog perioda signala $\tilde{g}[n] = \text{IDFT}_{4m}[G[k]]$.

Korištenjem \mathcal{Z} transformacije odredi impulsni odziv sustava koji u potpunosti poništava utjecaj $h[n]$ i usporedi ga s odzivom $g[n]$ kojeg je dobio mali Ivica. Koliko je Ivica pogriješio?

Uputa: DFT transformacija u N točaka niza a^n je $\frac{1 - a^N}{1 - aW_N^k}$ (suma konačnog geometrijskog reda).