Realni spektri

Obrada informacija

Damir Seršić

http://www.fer.hr/predmet/obrinf

Teme

- Realni spektri: motivacija i prijelaz.
- Varijante parne i periodičke ekstenzije.
- Diskretna kosinusna transformacija (DCT)
- DCT matrica i filtarski slog
- Modificirana DCT
- MDCT filtarski slog
- Wavelet transformacija: Haar

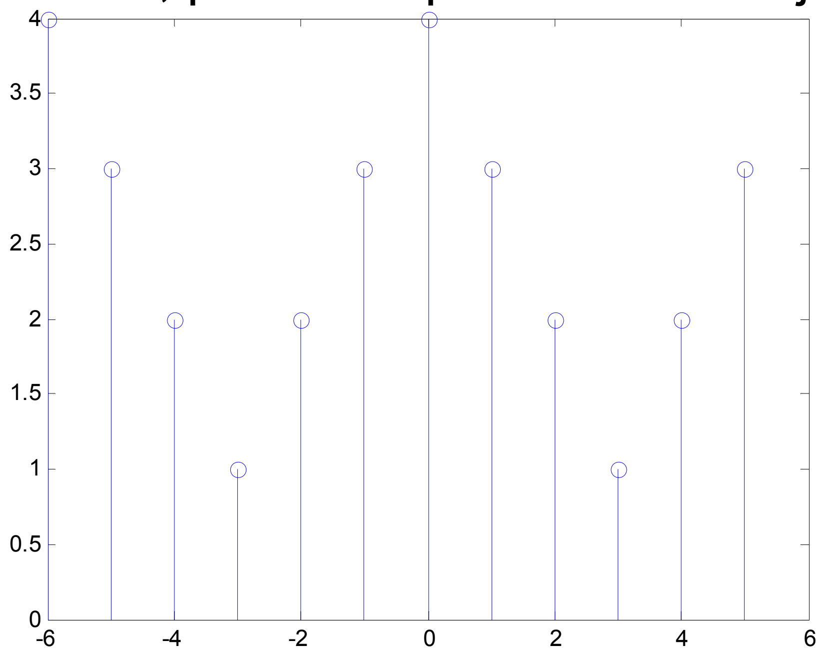
Od DFT do DCT: motivacija

- Za potrebe kompresije signala, treba nam transformacija signala koja daje sažet opis: mali broj uzoraka spektra značajno različitih od nule.
- DFT nam daje kompleksni spektar periodički proširenog signala:
  - kompleksna reprezentacija je redundantna,
  - periodičko proširenje signala često rezultira diskontinuitetom, za čiji opis treba puno DFT koeficijenata te opis nije sažet.
- Tražimo realnu transformaciju, sa sažetim opisom (mali broj “velikih” uzoraka spektra).

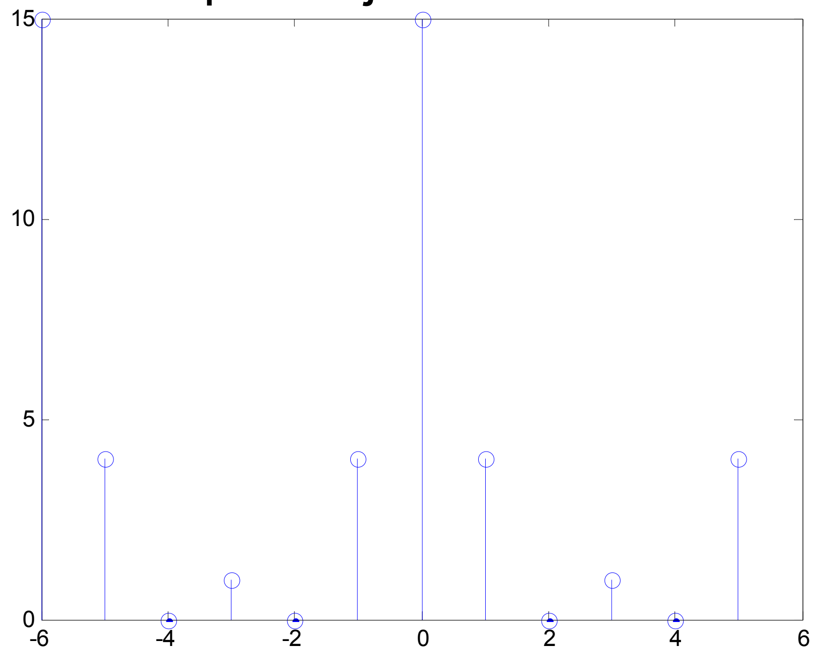
Kada DFT zadovoljava naš zahtjev?

- Parne funkcije daju samo kosinusne članove DFT spektra: imaginarni dio je jednak nuli.
- Parne funkcije su simetrične oko nule, pa njihovo periodičko proširenje ne uzrokuje diskontinuitete.

Parna, periodički proširena funkcija



DFT spektar je realan i “sažet”

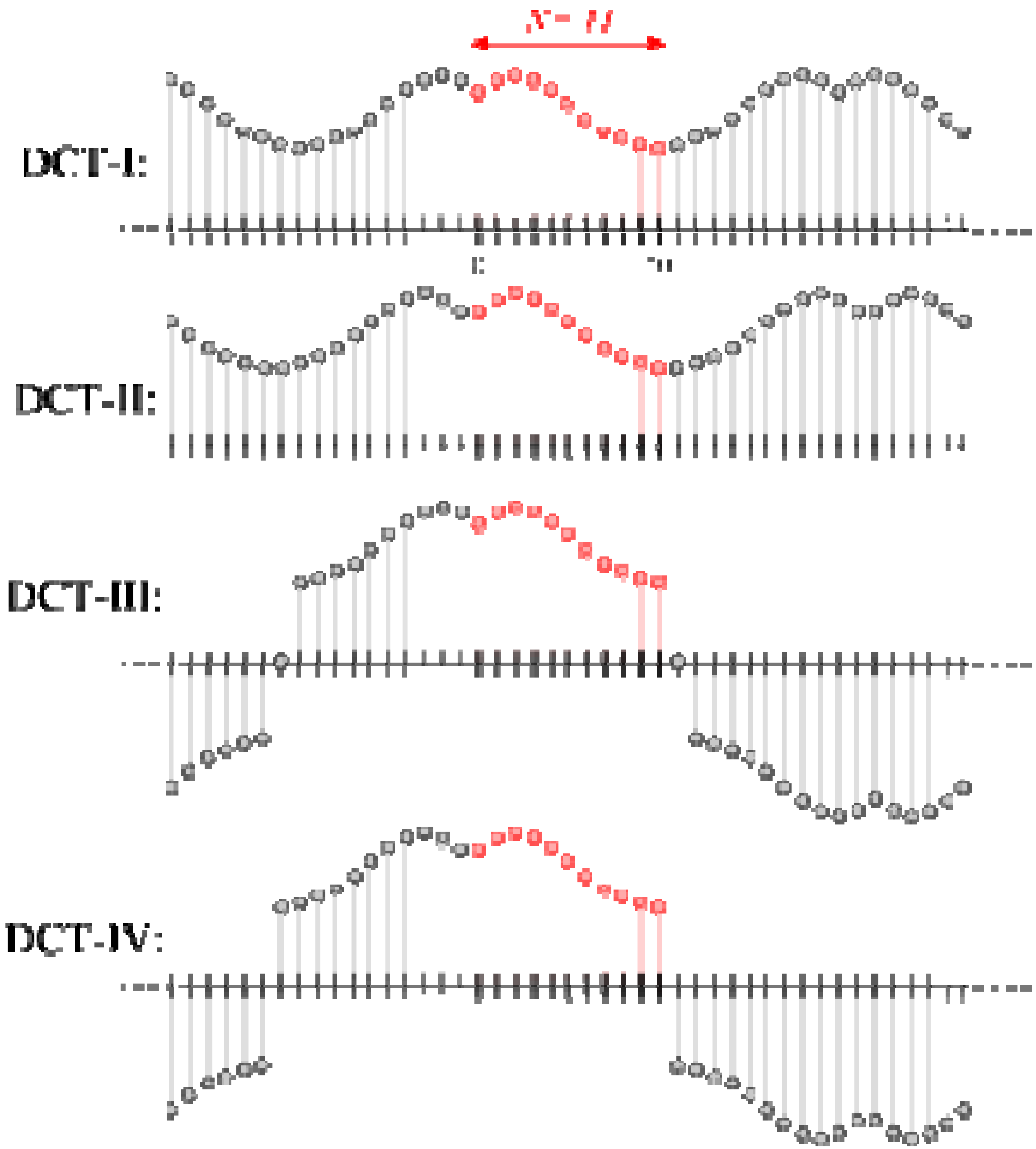


Parna nadopuna

- Općenito, signali nisu parne funkcije.
- Ideja: konačan signal trajanja N nadopuniti tako da postane paran!
- Parna, a zatim periodična ekstenzija se mogu napraviti na više načina, ovisno o točkama simetrije.
- Za signal $\{\underline{a},b,c,d,e\}$, $N=5$ imamo dvije varijante parne nadopune u nuli:
  - $\{d,c,b,\underline{a},b,c,d,e\}$, bez ponavljanja prvog i zadnjeg, ili
  - $\{e,d,c,b,a,a,b,c,d,e\}$ s ponavljanjem prvog uzorka.
- Uočimo da je u drugom slučaju os simetrije <u>između dva uzorka</u>.

Periodična nadopuna

- Nadalje, periodična ekstenzija se može napraviti na više načina.
- Simetrična:
  - $\{d,c,b,\underline{a},b,c,d,e\}_{2N-2}$
  - $\{e,d,c,b,a,a,b,c,d,e\}_{2N}$
- Antisimetrična:
  - $\{0,d,c,b,\underline{a},b,c,d,e,-0,-d,-c,-b,-a,-b,-c,-d,-e\}_{4N}$
  - $\{e,d,c,b,a,a,b,c,d,e,-e,-d,-c,-b,-a,-a,-b,-c,-d,-e\}_{4N}$
- U sve 4 varijante imamo parne funkcije, pa DFT spektar sadrži samo kosinusne članove.


N = 11
DCT-I:
DCT-II:
DCT-III:
DCT-IV:

Od DFT do DCT-I, primjer

- Naš signal neka je $\{\underline{1},2,3,4,5\}$, $N = 5$.
- Razmotrimo prvi slučaj: parno i periodično proširenje signala: $\{4,3,2,\underline{1},2,3,4,5\}_8$.
- DFT/2 je: $\{12,-3.41,\ 0,-0.59,\ 0,-0.59,0,-3.41\}$.
- Uzorci se periodički ponavljaju, a sva informacija sadržana je u prvih 5 uzoraka rezultata: $\{12,\ -3.41,\ 0,\ -0.59,\ 0\}$.
- Postupak nazivamo DCT (*eng. Discrete Cosine Transform*), tip 1.

Još o DCT-I

- Inverzna DCT-I je DCT-I pomnožena sa $2/(N-1)$!
- Kako se prvi i zadnji uzorak (u primjeru 1 i 5) javljaju u ekstenziji samo jednom, a ostali dvaput, često se ti uzorci množe s faktorom $\sqrt{2}$, dok se prvi i zadnji koeficijent spektra dijele s istim faktorom $\sqrt{2}$.
- Ako se cijeli rezultat dodatno skalira množenjem svih uzoraka spektra sa $\sqrt{[2/(N-1)]}$, tako skalirana DCT-I transformacija čuva energiju, te za nju vrijedi Parsevalov teorem.

Od DFT do DCT-I, analitički

- Izraz za DFT:

$$X_{DFT}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}$$

- DFT/2 uz parno proširenje $x(n)$, varijanta 1:

$$X(k)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N-2}nk}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-2}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N\text{-}2}(2N-2-n)k}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N\text{-}2}nk}+\frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{2N\text{-}2}(2N-2)k}}_{1}\sum_{n=1}^{N-2}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N\text{-}2}(-n)k}$$

Od DFT do DCT-I, analitički

$$X(k)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\,e^{-j\frac{2\pi}{2(N\text{-}1)}nk}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-2}x(n)\,e^{+j\frac{2\pi}{2(N\text{-}1)}nk}$$

Prva suma ima dva pribrojnika više (prvi i zadnji), koje izdvojimo posebno:

Dvije sume s istim brojem pribrojnika udružimo:

$$=\frac{1}{2}x(0)+\frac{1}{2}x(N-1)\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{(\text{N-1})}(N-1)k}}_{-1^{k}}+\sum_{n=1}^{N-2}x(n)\cos\left(\frac{\pi}{N-1}nk\right)$$

$$X(k)=\frac{1}{2}\left[x(0)+x(N-1)\left(-1\right)^{k}\right]+\sum_{n=1}^{N-2}x(n)\cos\left(\frac{\pi}{N-1}nk\right)$$

- što je direktni izraz za (neskalirani) DCT-I.

DCT-II (ili samo DCT)

- Najčešće je korištena druga varijanta ekstenzije.
- Os simetrije je na polovici između dva uzorka.
- Obično oznaka "DCT" označava upravo DCT-II, koja u skaliranoj varijanti glasi:

$$X(k) = w_k \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k$$

između
dva uzorka

$$w_k = \begin{cases} \sqrt{1/N} & k = 0 \\ \sqrt{2/N} & k \neq 0 \end{cases}$$

IDCT, izraz

- Izraz za inverznu DCT je:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k \cdot X(k) \cos \frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k$$

$$w_k = \begin{cases} \sqrt{1/N} & k = 0 \\ \sqrt{2/N} & k \neq 0 \end{cases}$$

DCT – IDCT: zamijenjene uloge *k* i *n*!

Matrica DCT

- Primjer, N=4

stupac redak

$$X(k) = w_k \cdot \sum_{n=0}^{3} x(n) \cos \frac{\pi}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)k \qquad w_k = \begin{cases} 1/2 & k = 0 \\ \sqrt{2}/2 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot 0 & \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 0 & \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot 0 & \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 0 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 1 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot 2 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot 2 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 2 \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot 3 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 3 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot 3 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 3
\end{bmatrix}$$

DCT i IDCT matrice

DCT

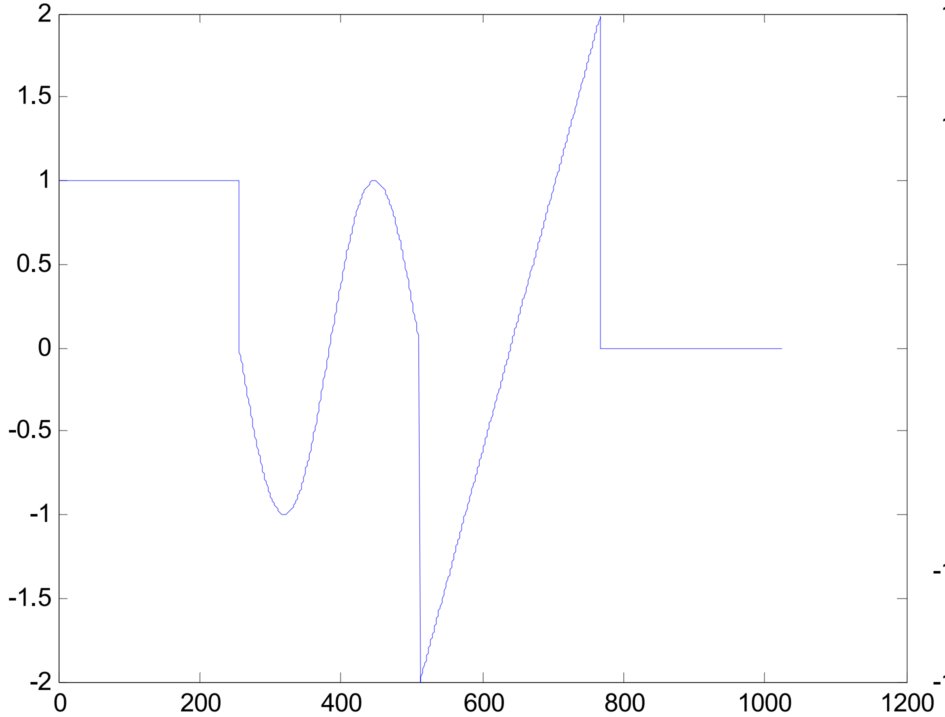
$$\begin{bmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.65 & 0.27 & -0.27 & -0.65 \\ 0.50 & -0.50 & -0.50 & 0.50 \\ 0.27 & -0.65 & 0.65 & -0.27 \end{bmatrix}$$

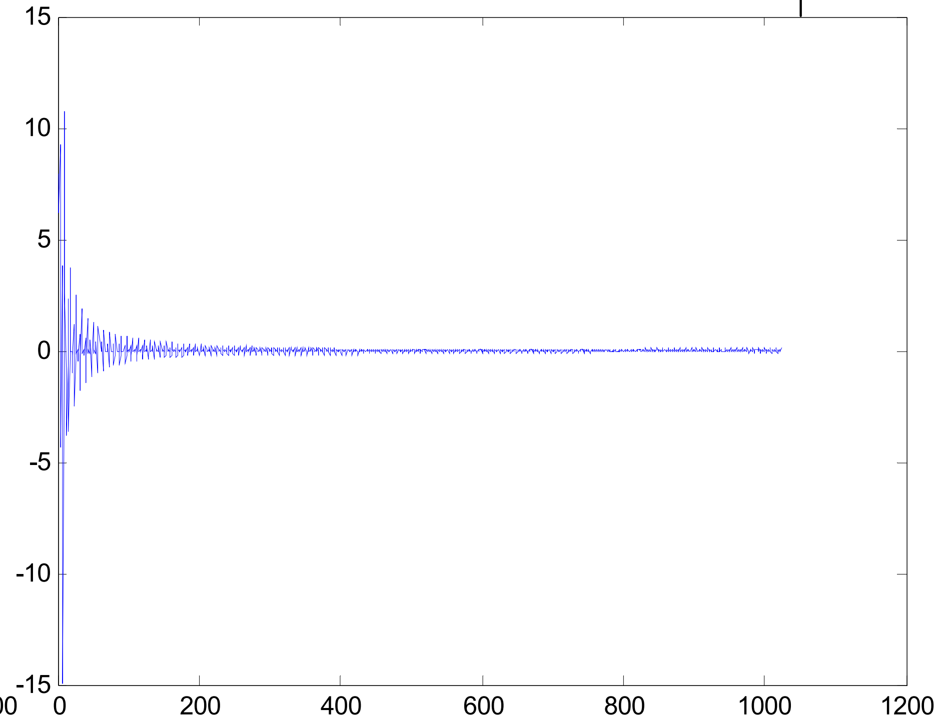
IDCT

$$\begin{bmatrix} 0.50 & 0.65 & 0.50 & 0.27 \\ 0.50 & 0.27 & -0.50 & -0.65 \\ 0.50 & -0.27 & -0.50 & 0.65 \\ 0.50 & -0.65 & 0.50 & -0.27 \end{bmatrix}$$

- Inverzna DCT matrica se dobije običnom transpozicijom (zamjenom uloga n i k) !
- Takve se matrice nazivaju unitarnim.
- MATLAB: *dct*, *idct*.

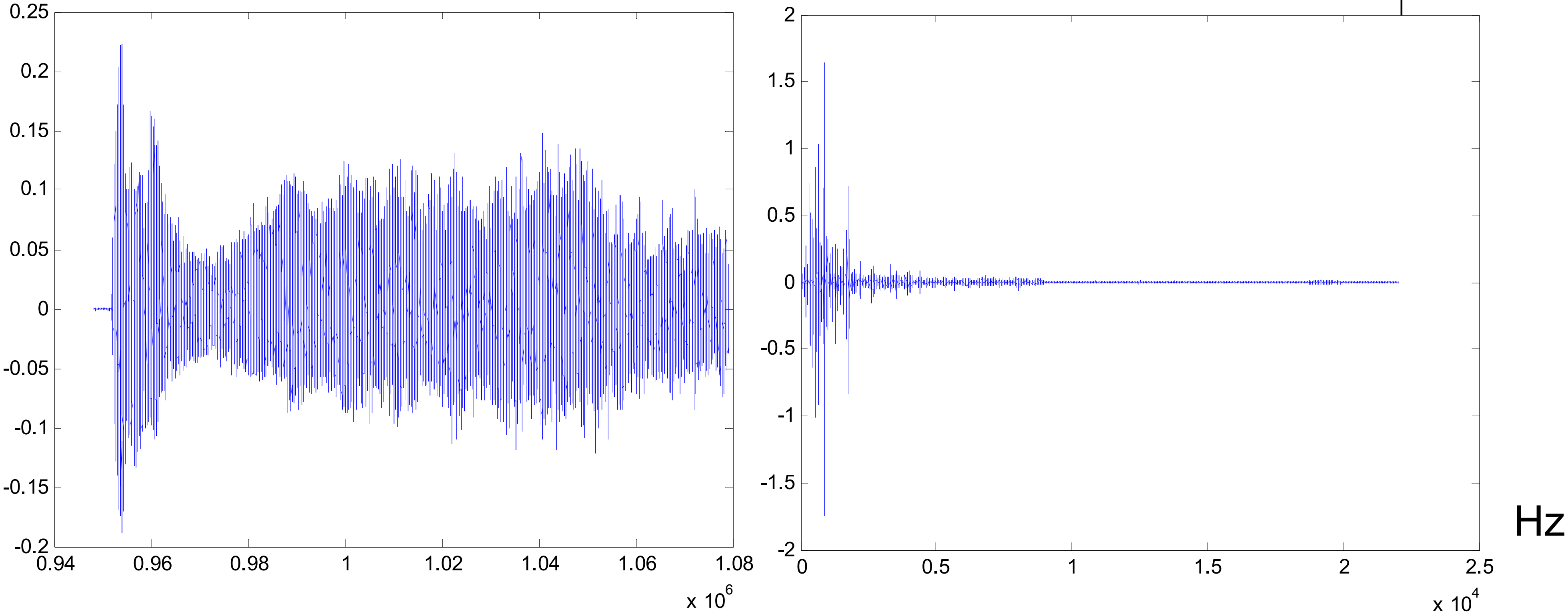
Primjer 1





- Lijevo signal, desno DCT
- Lijevo: 54% uzoraka signala čini 95% energije, desno: 1.6% uzoraka DCT spektra čini 95% energije.

Primjer 2



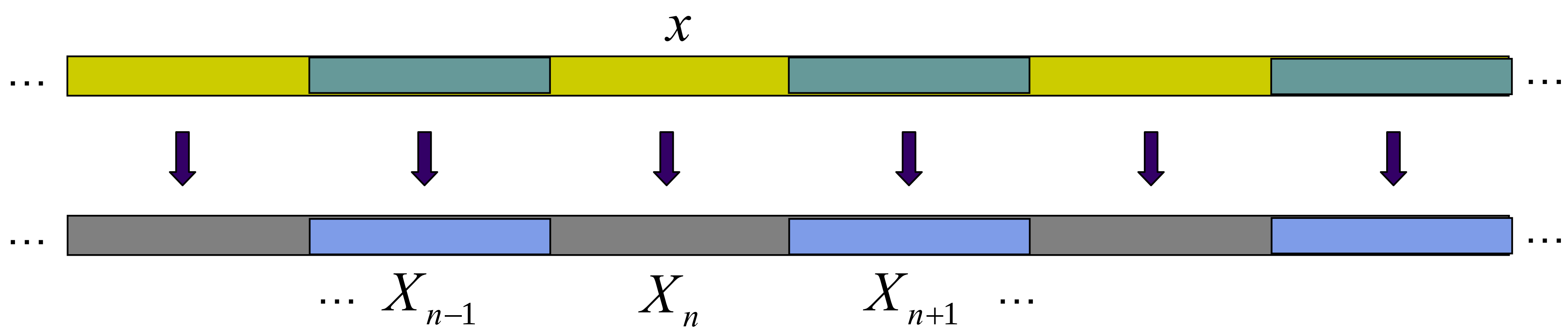
- Lijevo glazbeni signal, desno DCT.
- Lijevo: 54% uzoraka signala čini 95% energije, desno: 3.7% uzoraka DCT spektra čini 95% energije.

Numerička složenost

- Direktna implementacija DCT signala dužine N traži:
  - N x N kompleksnih množenja
  - N x (N-1) kompleksnih zbrajanja
- Sve varijante DCT se efikasno računaju preko FFT algoritama,
- iako veze mogu biti složenije od pokazane DCT-I zbog varijanti simetrije (na pola ili na cijelom uzorku, uz parni ili neparni broj uzoraka, …) te zbog raznih varijanti periodičkog proširenja u tim slučajevima.

DCT filtarski slog

- DCT filtarski slog konstruiramo na isti način kao i DFT slog: razlika je što sad dobivamo realne filtre!
- Signal podijelimo u blokove dužine *N* te na svakom bloku računamo DCT:



DCT filtri

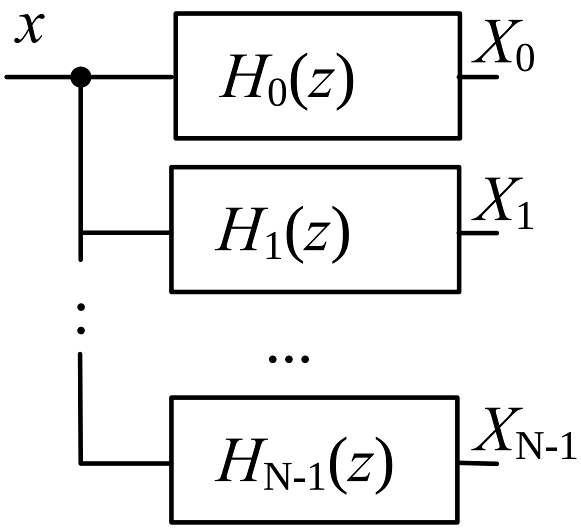
Oznaka $W_4^{3,2}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.65 & 0.27 & -0.27 & -0.65 \\ 0.50 & -0.50 & -0.50 & 0.50 \\ 0.27 & -0.65 & 0.65 & -0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

- Svaki redak matrice daje FIR filtar dužine *N*.
- Elemente matrice označimo sa $c_N^{k,n}$, pa je *k*-ti filtar:

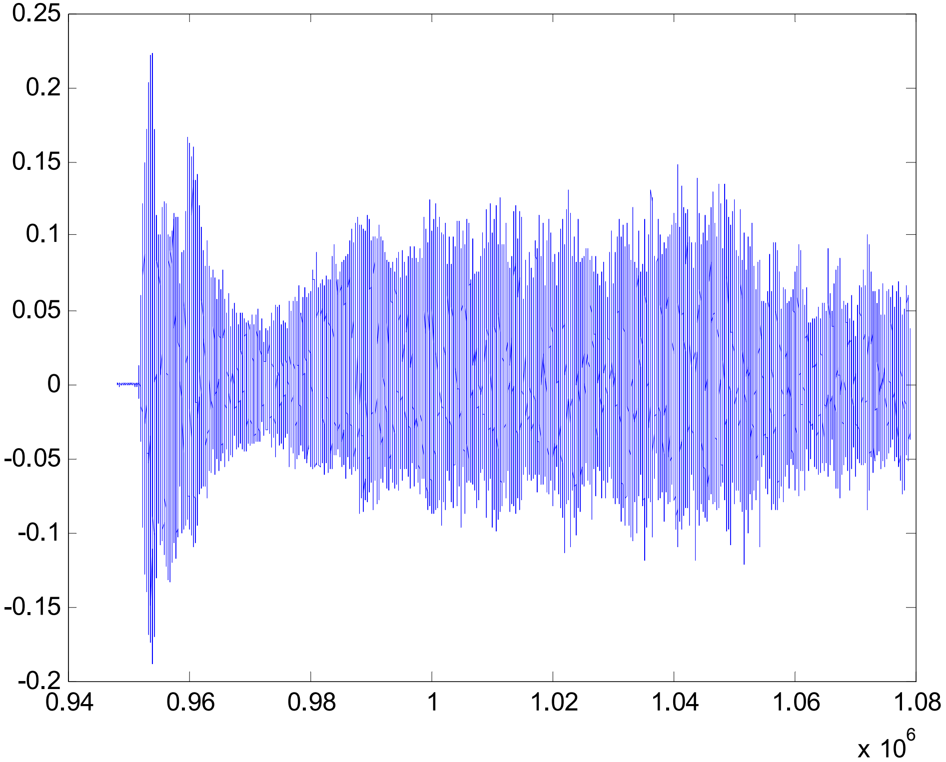
$$x \longrightarrow \boxed{H_k(z) = C_N^{k,0} + zC_N^{k,1} + z^2 C_N^{k,2} + \ldots + z^{N-1} C_N^{k,N-1}} \longrightarrow X_k$$

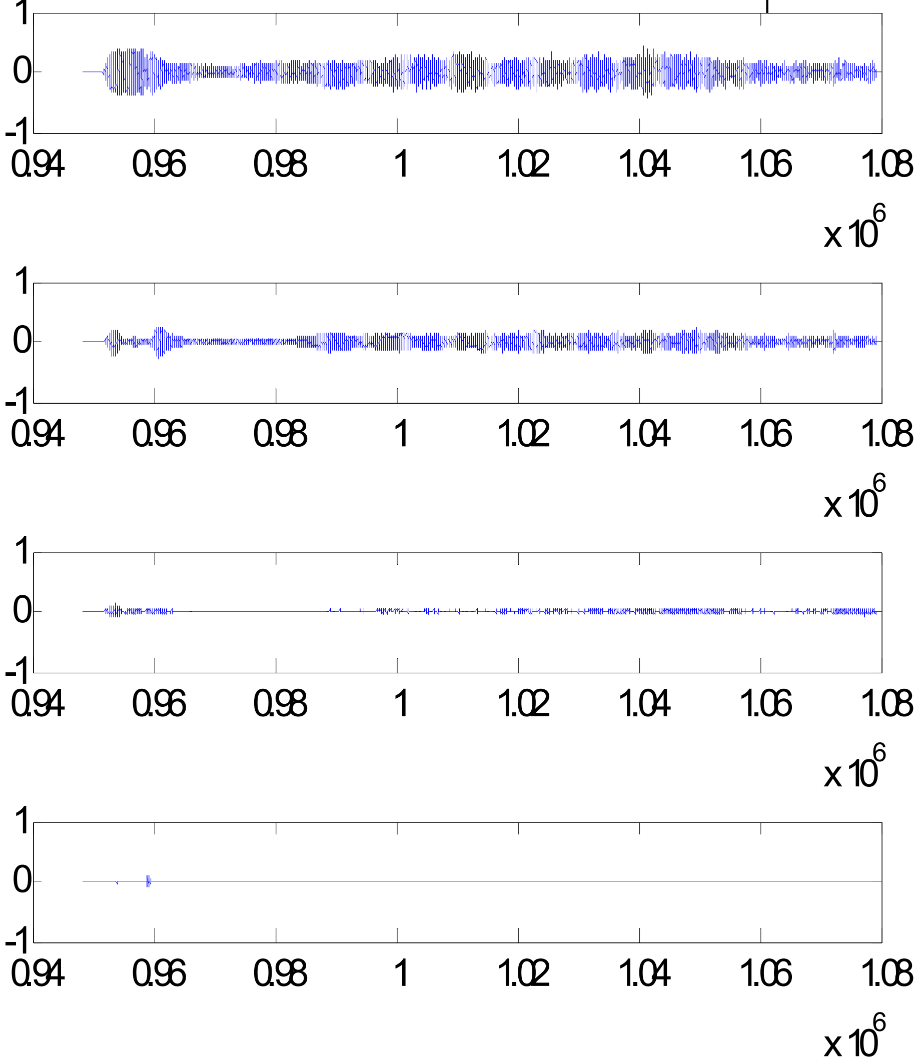
DCT filtarski slog



- Svaki filtar daje po jedan DCT koeficijent u svakom trenutku vremena, a svi filtri zajedno sačinjavaju DCT filtarski slog.

Primjer

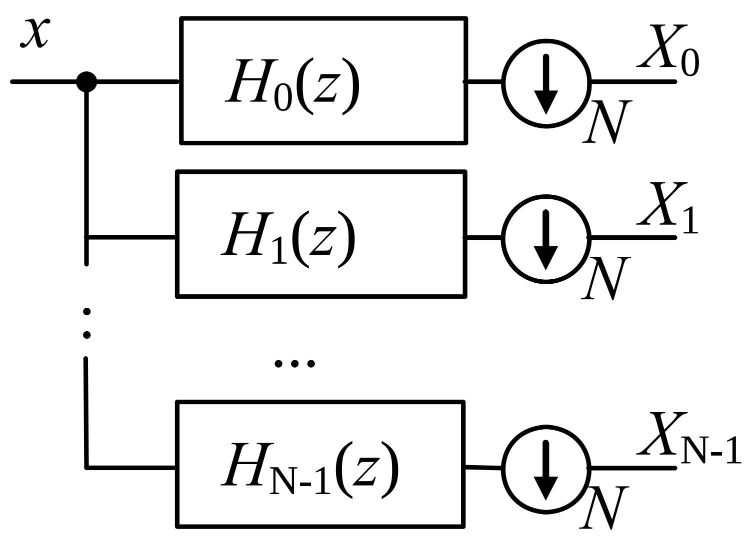




- Lijevo: glazbeni signal
- Desno: DCT32 filtarski slog, izlazi filtara $k = 0, 3, 7, 15.$

DCT filtarski slog s decimacijom

- Ukoliko zadržimo samo svaki *N*-ti uzorak rezultata i odbacimo sve ostale, dobili smo realizaciju DCT-a blok po blok:



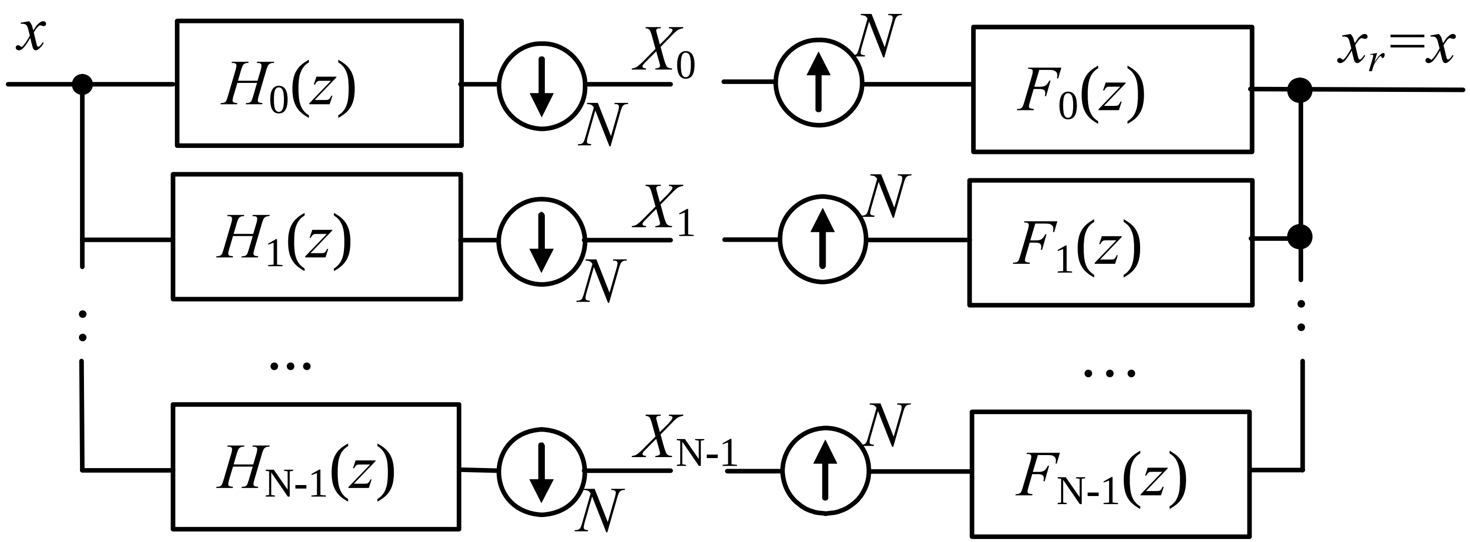
Inverzna DCT

- Inverzna DCT realizirana je kao FIR filtar čiji su koeficijenti k-ti stupac matrice DCT^{-1}, što je isto što i k-ti redak matrice DCT.

$$\{X_k, 0, 0, \cdots, 0\} \longrightarrow \boxed{F_k(z) = C_N^{k,0} + z^{-1} C_N^{k,1} + \ldots + z^{-N+1} C_N^{k,N-1}} \longrightarrow x_k$$

- Blok od *N* uzoraka signala x rekonstruiramo zbrajanjem svih doprinosa x_k.

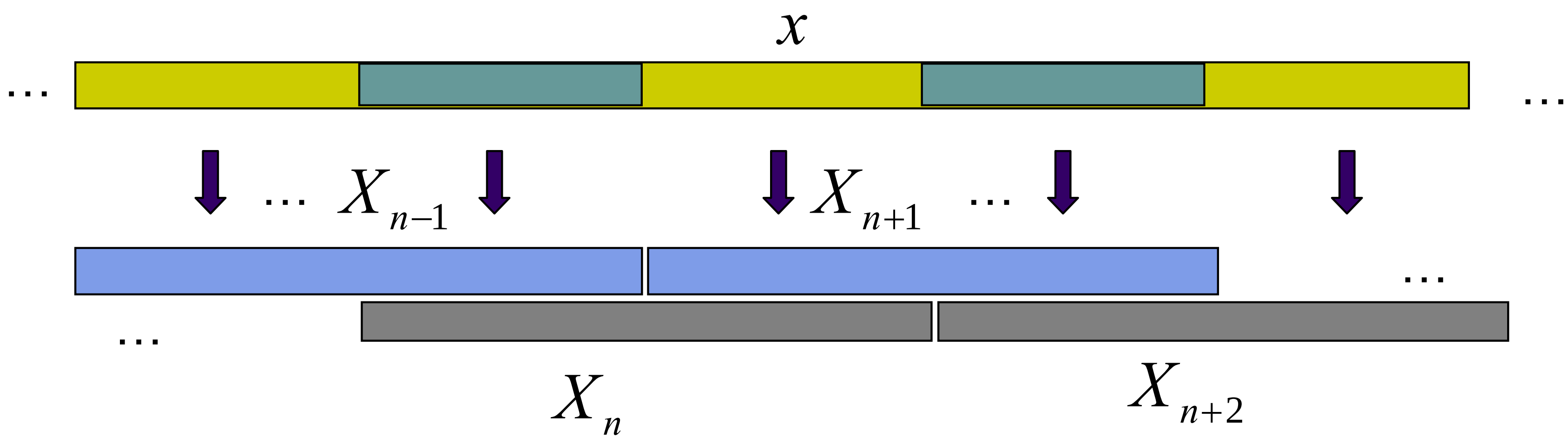
DCT filtarski slog



- Ovakav decimirani filtarski slog odgovara blok po blok izračunavanju DCT.
- Uzorci DCT spektra izračunati su za svakih *N* uzoraka vremena.

Blokovske metode s preklapanjem

- Blokovske obrade (npr. u kompresiji signala) imaju nedostatak da se javljaju diskontinuiteti na rubovima blokova (*eng. blocking artifacts*).
- To je neprihvatljivo u obradi audio signala. Stoga se koriste metode s preklapanjem blokova:



MDCT

- Modificirana DCT (MDCT), ili DCT s preklapanjem blokova je sastavni dio MP3, AC-3, Ogg Vorbis i AAC audio kodera.
- Uzimaju se blokovi signala dužine $2N$, a za svaki se računa po N DCT-IV koeficijenata.
- Nadalje, na svakom bloku mogu se primijeniti i odgovarajući vremenski otvori.
- Rekonstrukcija se vrši na temelju koeficijenata iz preklopljenih blokova.

MDCT, izraz

$$X(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

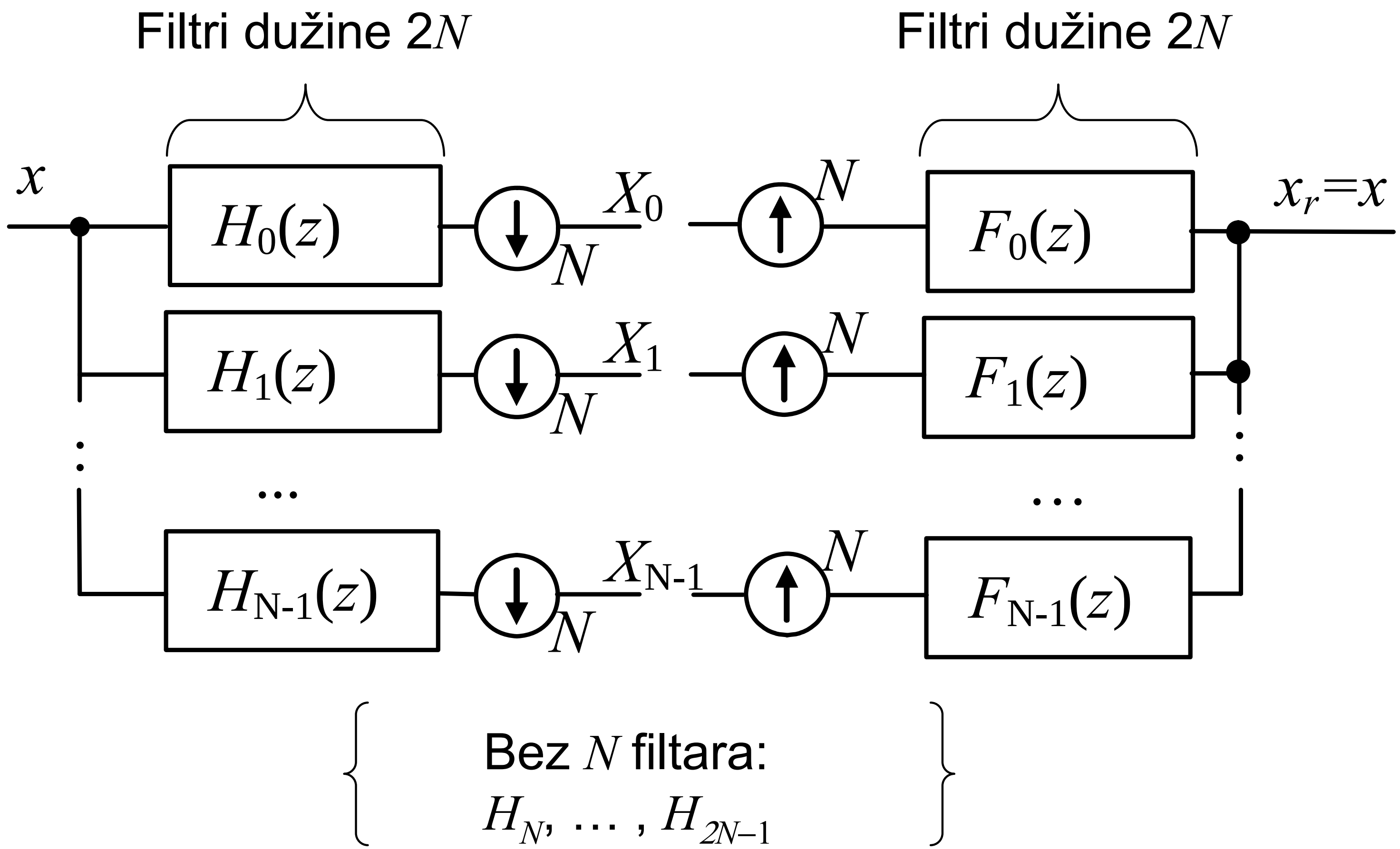
$$k=1,\ldots,N-1$$

- Razlike u odnosu na "običan" DCT-IV, gdje je gornja granica $N\!-\!1$; a argument bez pribrojnika $N/2$.

- Inverzni izraz je gotovo identičan, uz zamjenu n i k :

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

MDCT filtarski slog



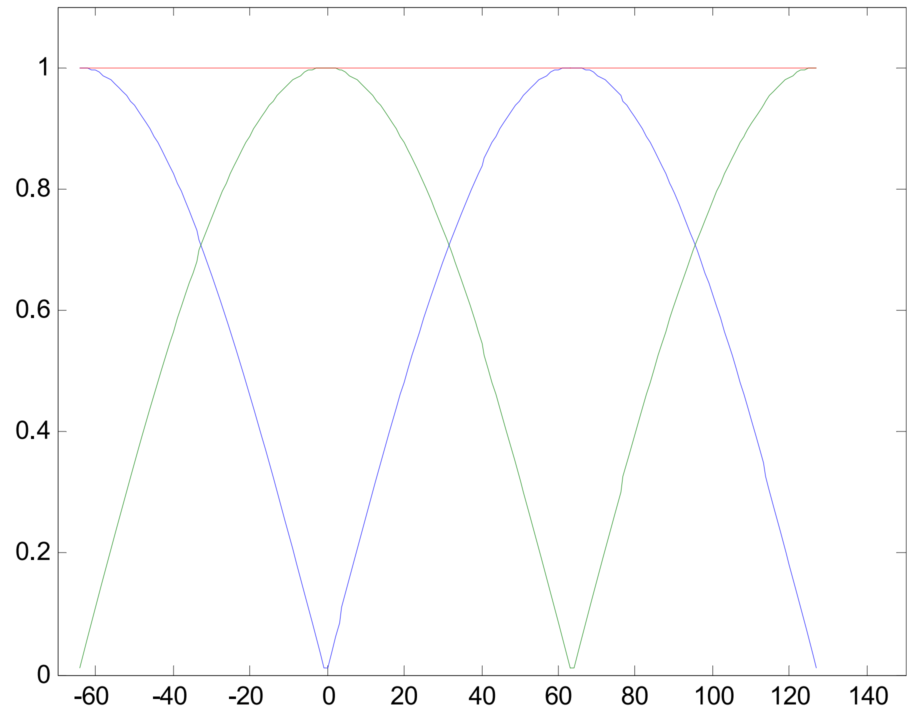
- N DCT-IV filtara dužine $2N$; decimacija i ekspanzija za faktor N; polovično preklapanje blokova.

MDCT, vremenski otvor

- Na svaki blok podataka dodatno se primjenjuje vremenski otvor:

$$w(n) = \sin \frac{\pi}{2N}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

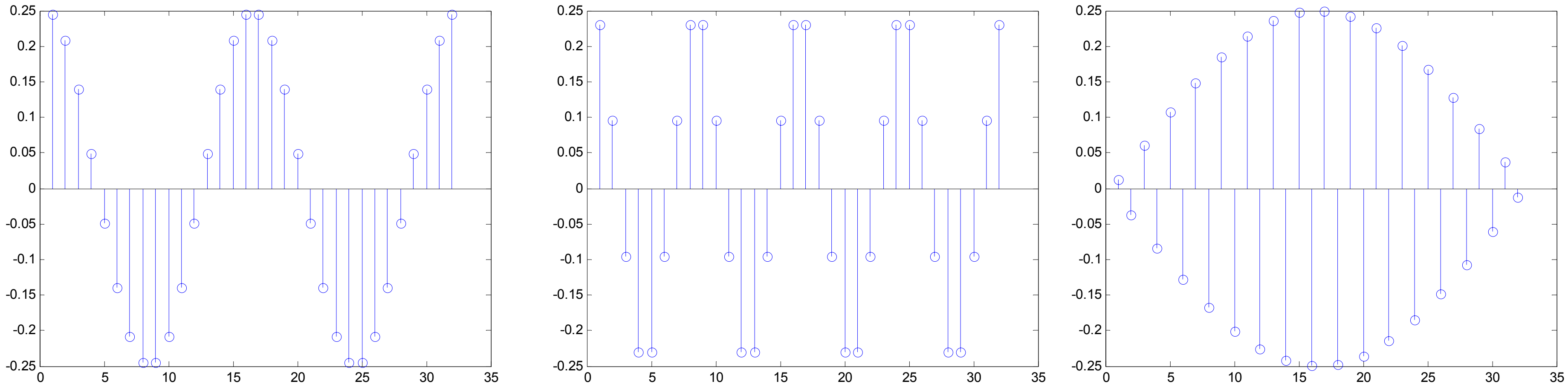
- Ovakav otvor ima svojstvo $w^2_n + w^2_{n+N} = 1$ i omogućuje potpunu rekonstrukciju.
- Primjena otvora prije MDCT i poslije IMDCT, na kraju rezultat $\times 2$.



Druge transformacije

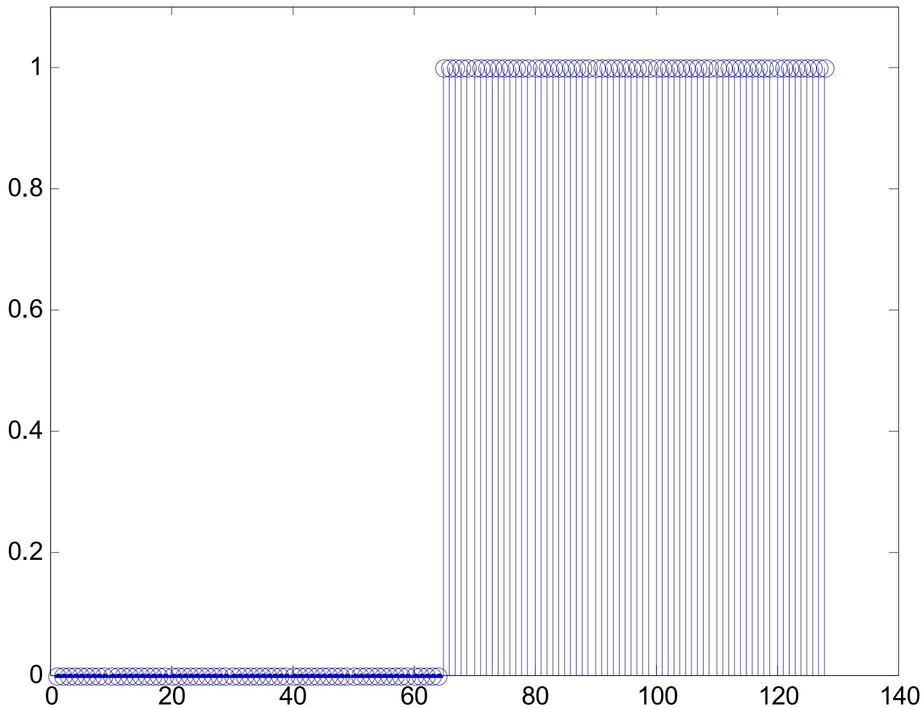
- Ako linearnu transformaciju predstavimo matricom (realnom, kompleksnom), onda svaka regularna matrica **T** definira jednu linearnu transformaciju.
- Regularnost –> postoji $\mathbf{T}^{-1}$.
- Ima li transformacija s još povoljnijim svojstvima razlaganja?
- Potraga za transformacijom s najsažetijim opisom vodit će nas ka Karhunen-Loeve transformaciji.
- S druge strane, u JPEG2000 koristi se valićna (*eng. wavelet*) transformacija, zbog dobrih svojstava i numerički efikasne realizacije.

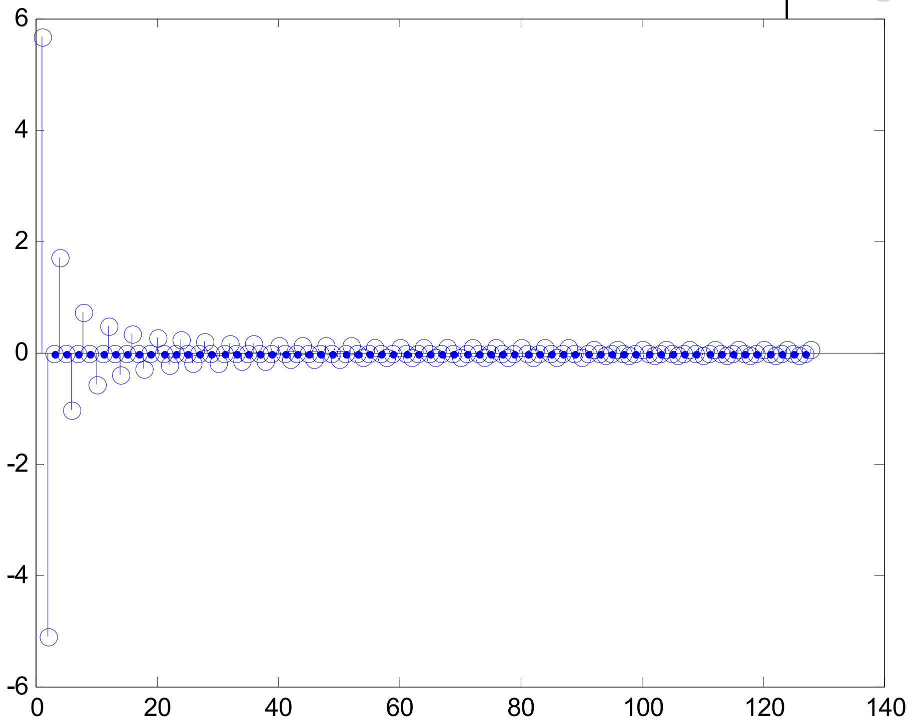
DCT funkcije



- Rekonstrukcijske DCT funkcije (impulsni odzivi filtara u DCT^{-1} slogu) su trajanja N, istog kao i analizirani signal.
- U gornjim slikama $N = 32, \;\; k = 4,8,31.$
- Ukoliko signal ima diskontinuitet, potrebno je puno koeficijenata za njegov uspješan opis.

Funkcija s diskontinuitetom





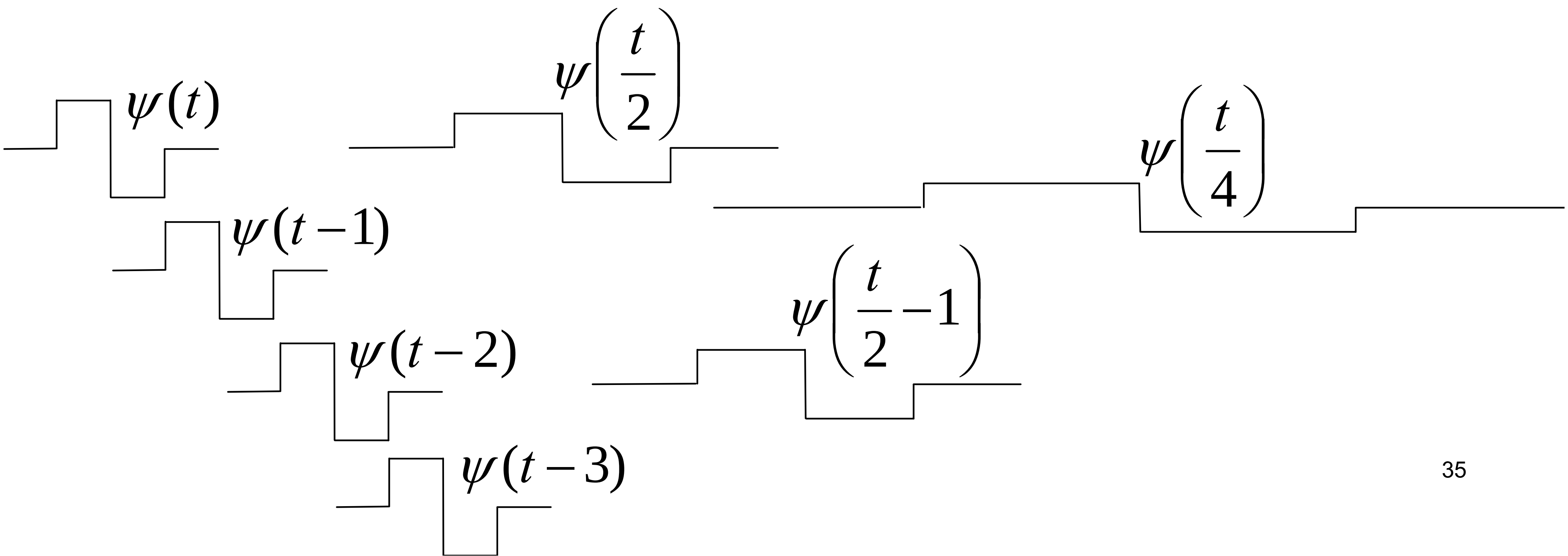
- Lijevo signal, desno DCT spektar.
- DCT spektar ima puno uzoraka koji sporo opadaju, kako bi se zbrajanjem glatkih funkcija trajanja N opisao diskontinuitet.

- Mnogi realni signali (i slike) su po dijelovima glatki, s diskontinuitetima između.
- Za sažet opis takvih signala bolje bi nam poslužio skup funkcija različitog trajanja.
- Ideja: signal ćemo razložiti na “valiće” (*eng. wavelets*), koji su rastegnute i pomaknute kopije nekog predloška (*eng. mother wavelet*).

Wavelet transformacija

- Najjednostavniji je slučaj Haarove transformacije:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le t \le 1 \\ 0 & drugdje \end{cases}$$



Diskretne analizirajuće funkcije (primjer za N=8)

- Najuže analizirajuće funkcije, 4 pomaka
  - $\{1\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\} \cdot 1/\sqrt{2}$,
  - $\{0\ 0\ 1\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\} \cdot 1/\sqrt{2}$,
  - $\{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ {-1}\ 0\ 0\} \cdot 1/\sqrt{2}$,
  - $\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ {-1}\} \cdot 1/\sqrt{2}$;
- Funkcije srednje širine, 2 pomaka
  - $\{1\ 1\ {-1}\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\} \cdot 1/2$,
  - $\{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ {-1}\ {-1}\} \cdot 1/2$;
- Najšira analizirajuća funkcija:
  - $\{1\ 1\ 1\ 1\ {-1}\ {-1}\ {-1}\ {-1}\} \cdot 1/(2\sqrt{2})$;
- DC ostatak:
  - $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\} \cdot 1/(2\sqrt{2})$;

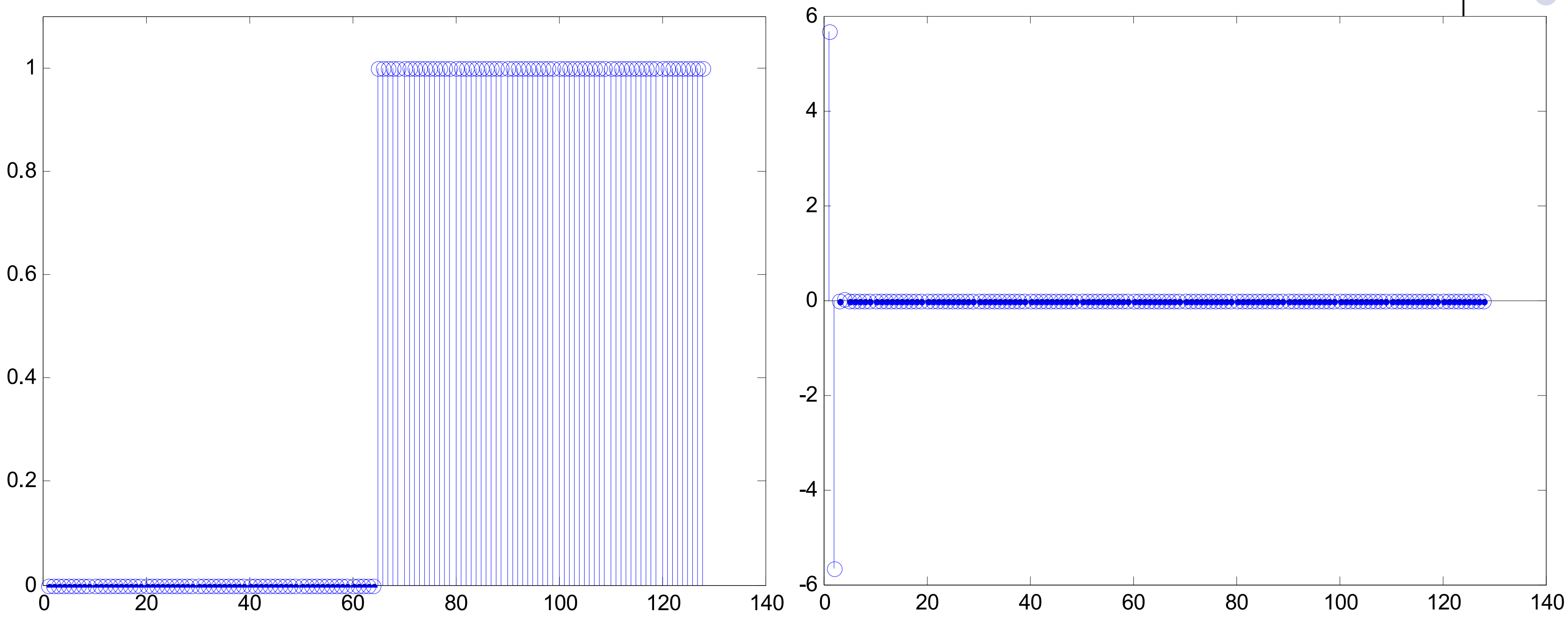
Matrica Haarove wavelet transformacije

- N=8, Haarova matrica **T**

$$T_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

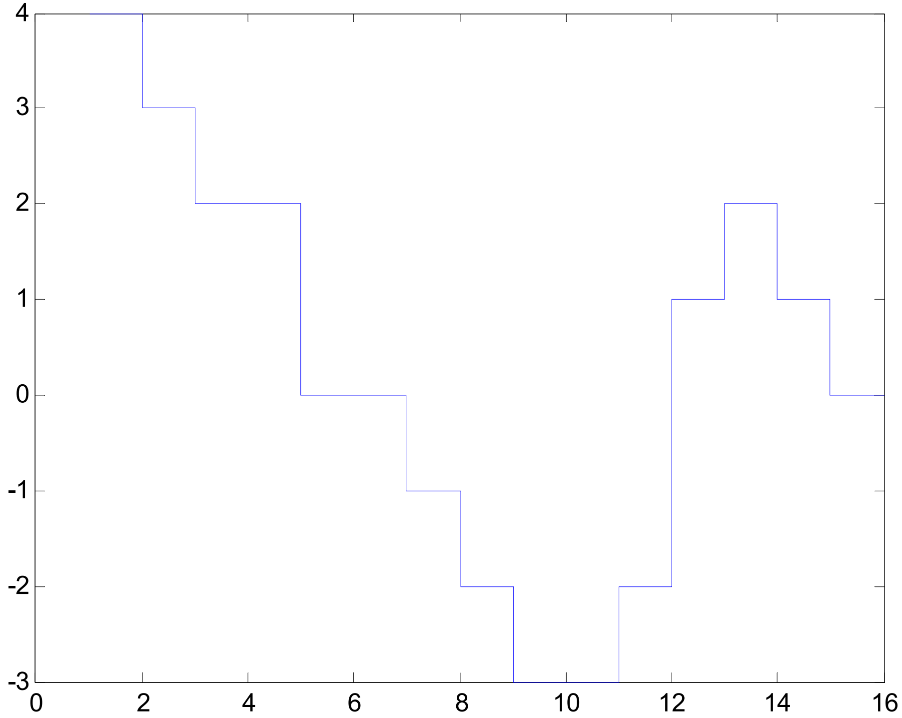
- Inverzna matrica se dobije transpozicijom: matrica je unitarna.

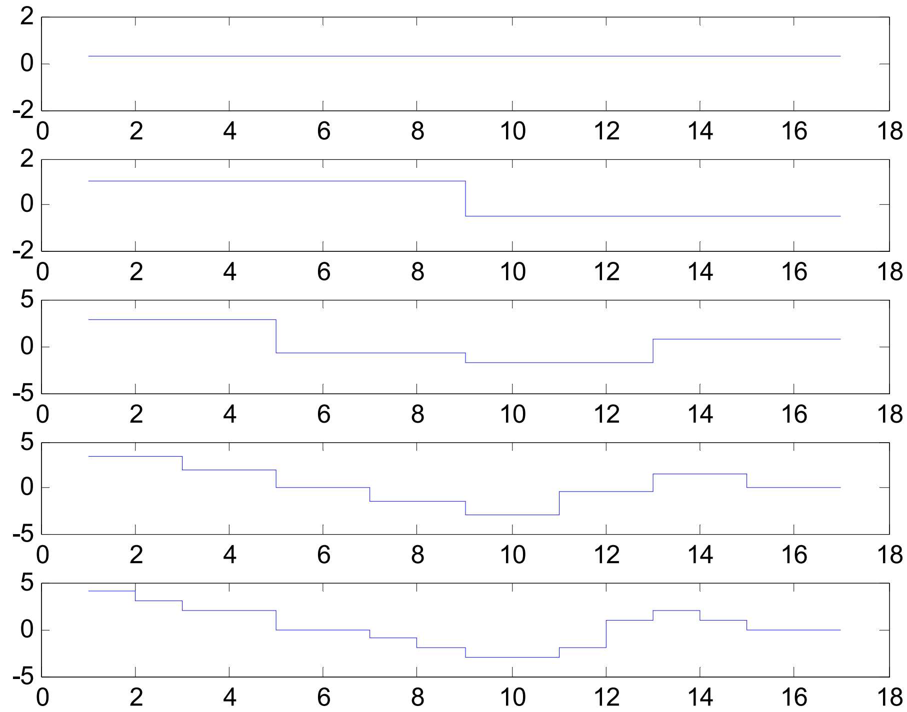
Funkcija s diskontinuitetom



- Lijevo signal, desno Haarov wavelet spektar.
- Diskontinuitet je jako dobro opisan kratkim Haarovim funkcijama!

Multirezolucijska priroda DWT





- Lijevo: signal, $N=16$. Desno: parcijalna rekonstrukcija iz jednog, dva, 4, 8 ili svih 16 koeficijenata DWT spektra.
- Novi koeficijenti sukcesivno poboljšavaju rezoluciju rekonstruiranog signala.

Drugi valići i primjene

- Postoje brze realizacije zasnovane na wavelet filtarskim slogovima (red veličine ~N operacija)
- Osim Haarovog, postoji čitav niz drugačijih izbora valića.
- Primjene:
  - Kompresija: JPEG 2000, Digital Cinema, …
  - Potiskivanje šuma
  - …

Obradili smo…

- Realni spektri: motivacija i prijelaz.
- Varijante parne i periodičke ekstenzije.
- Diskretna kosinusna transformacija (DCT)
- DCT matrica i filtarski slog
- Modificirana DCT
- MDCT filtarski slog
- Wavelet transformacija: Haar