



© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

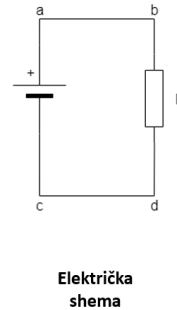
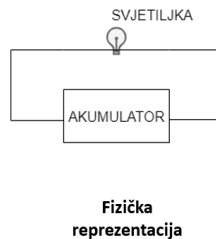
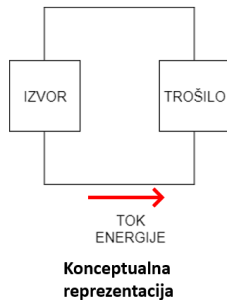


Idealizirani elementi u strujnim krugovima

- **električni uređaji i naprave** su složeni fizički objekti
 - prikazujemo ih pojednostavljeno
 - to nam omogućuje da dobijemo rezultate koji su dovoljno precizni i relevantni
- prikaz pomoću idealiziranih jednostavnih bezdimenzionalnih elemenata predstavlja idealiziranu sliku stvarnog fizikalnog stanja u realnim uređajima i napravama
- ovaj pristup naziva se **koncept krugova**

Fizička reprezentacija spoja i električka shema

- Određene spojeve iz stvarnog svijeta možemo prikazati na različite načine



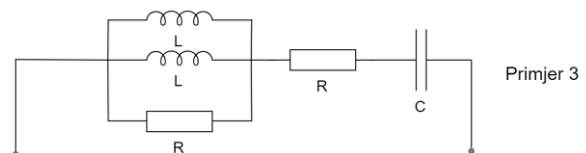
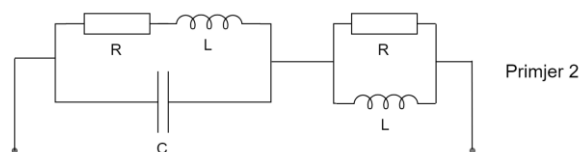
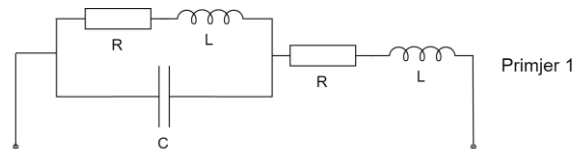
- Električkom snemom prikazujemo koristene elemente i veze između njih
 - i elementi i veze su bezdimenzionalni
 - točke **a** i **b**, te točke **c** i **d** su u električkom smislu identične točke

Osnovna građa mreže

- Primjeri istih elemenata koji su spojeni na različite načine

➤ **Različita topologija spajanja**

- Ako prikazane odsječke spojimo na izvor istosmjernog napona, kroz iste elemente će u različitim topologijama teći različita struja, odnosno na njima će biti različit napon

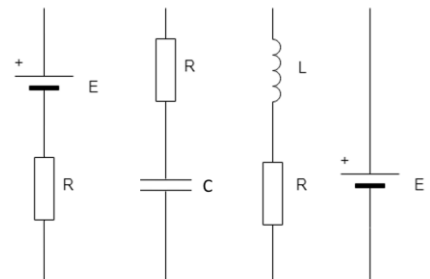


Osnovna građa mreže (2)

- Bitni pojmovi:
 - **Električka (ili električna) mreža** (engl. *electrical network*)
 - Sustav međusobno povezanih električkih elemenata kroz koje može teći električna struja
 - Aktivni elementi – izvori
 - Pasivni elementi – otpornici, kondenzatori i zavojnice
 - Čest naziv – **strujni krug**
 - **Jednostavna električka mreža**
 - Jednostavni strujni krug
 - Sastoji se od barem jednog aktivnog elementa i jednog ili više pasivnih elemenata (trošila)
 - Kako bi u jednostavnom strujnom krugu *tekla struja* potrebno je imati *zatvoren vodljivi krug* s izvorom koji stalno daje struju
 - Ako strujni krug *nije zatvoren* – kažemo da je *otvoren*, krug je *u prekidu*

Osnovna građa mreže (3)

- **Grana mreže** (engl. *branch*)
 - Dio električke mreže koji se sastoji od jednog ili više električnih elemenata povezanih u niz (bez dodatnih grananja)
 - Elementi su serijski spojeni
 - Kroz sve elemente u jednoj grani teče struja iste jakosti

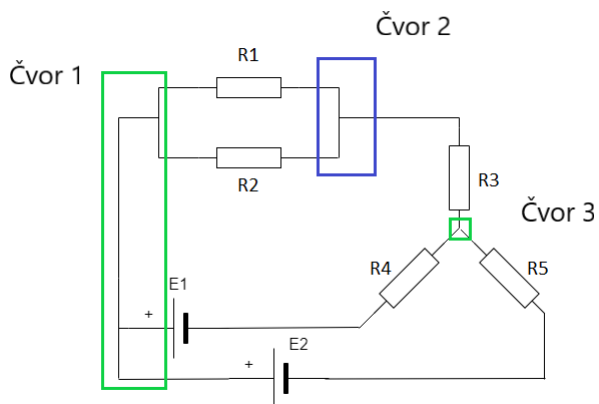


Primjeri grana

Osnovna građa mreže (4)

- Čvor mreže (engl. *node*)

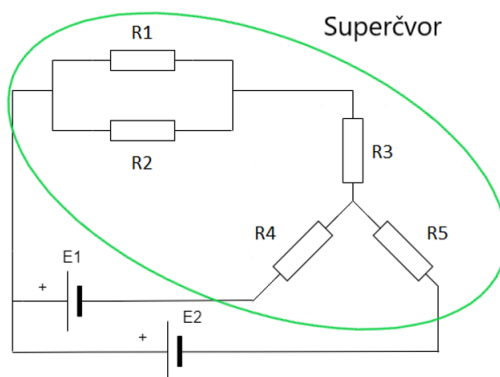
- Mjesto ili točka na kojem se sastaju tri ili više vodiča mreže, odnosno tri ili više **grana**
- *Trivijalni ili jednostavni čvor* – samo dva vodiča – pri korištenju pojma čvor nećemo misliti na trivijalne čvorove!
- Slika prikazuje električnu mrežu s 3 čvora



Osnovna građa mreže (5)

- Superčvor (engl. *supernode*)

- Superčvor se dobiva definiranjem zatvorene regije koja sadrži više od jednog čvora
- Slika prikazuje superčvor kojemu pripadaju otpornici R_1 , R_2 , R_3 , R_4 i R_5 .



Osnovna građa mreže (6)

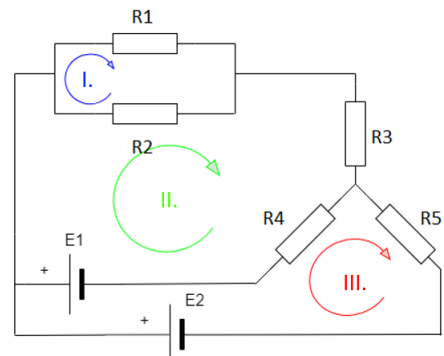
- **Kontura ili petlja** (engl. *loop*)

- Zatvoreni put sastavljen od više grana mreže
- Konturu smo prošli ako krenemo od jednog čvora i pređemo zatvoreni put bez prolaženja kroz bilo koji element ili čvor mreže više od jedanput, a da se vratimo natrag na početni čvor

- **Nezavisna kontura** (engl. *mesh*)

- Ona koja se od svih drugih (već odabranih) razlikuje za barem jednu granu
- Važan koncept korišten u metodama analize električkih mreža
- Na slici su označene 3 nezavisne konture

- pokušajte identificirati sve petlje na danoj slici
- koliko ih ima?



Grupacije problema

- Dvije osnovne skupine problema koje se rješavaju vezano uz električke mreže:

- **Analiza električke mreže**

- Za električnu mrežu sa svim zadanim elementima i međusobnim vezama između elemenata određuju se struje i naponi

- **Sinteza električke mreže**

- Potrebno je odrediti elemente električne mreže i veze između njih kako bi ta električna mreža zadovoljavala unaprijed definirano ponašanje

- mi ćemo se u ovome predmetu baviti analizom električke mreže

Relacije među varijablama

- Varijable su međusobno povezane različitim relacijama:

1. Relacije koje povezuju **varijable različitog tipa**, a proizlaze iz prirode varijabli te su utemeljene ili na prirodnim zakonima ili u prihvaćenim definicijama. Primjeri:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad - \text{definicija}$$

$$U = I \cdot R \quad - \text{Ohmov zakon u istosmjernoj mreži}$$

$$u(t) = i(t)R \quad - \text{Ohmov zakon za vremenski promjenjive struje i napone}$$

2. Relacije koje se odnose na **nekoliko varijabli istog tipa (struja i napona)**, a posljedica su načina na koji su elementi mreže međusobno povezani, tj. posljedica su konfiguracije odnosno topologije mreže

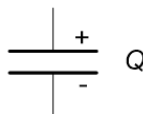
Referentni smjerovi i polariteti

- Pri analizi mreža često ne znamo unaprijed stvarni smjer struje, odnosno polaritet napona, smjer snage ili polaritet naboja na kondenzatoru
- Za fizikalne veličine koje su funkcije vremena ili su istosmjerne, ali su im smjerovi odnosno polariteti neodređeni, uvode se **referentni smjerovi ili polariteti**
 - **Referentni smjer (polaritet)** definira se konvencijom (proizvoljno), a stvarni smjer (polaritet) iskazuje se pozitivnim odnosno negativnim predznakom u odnosu na referentni

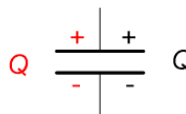
Referentni smjerovi i polariteti (2)

- Referentni polaritet za naboj

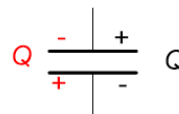
- pretpostavka i postavljanje referentnog polariteta naboja na kondenzatoru: pozitivni naboj na „gornjoj” stezaljci



Referentni polaritet



Stvarni polaritet
 $Q > 0$



Stvarni polaritet
 $Q < 0$

- u slučaju da je uistinu tako, izračunom ćemo dobiti $Q > 0$

- u suprotnome, izračun će dati $Q < 0$

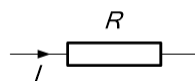
Referentni smjerovi i polariteti (3)

- Referentni smjer struje

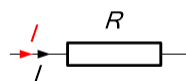
- pretpostavljamo smjer struje prikazan crnom strelicom – to je referentni smjer struje

- u slučaju kada je to i stvaran smjer struje, račun ili mjerenje će dati pozitivnu vrijednost

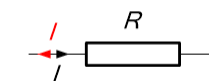
- u slučaju kada je stvarni smjer struje suprotan, račun ili mjerenje dat će negativnu vrijednost



Referentni smjer



Stvarni smjer
 $I > 0$

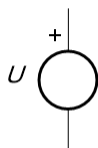


Stvarni smjer
 $I < 0$

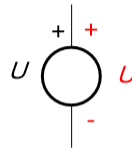
Referentni smjerovi i polariteti (4)

• Referentni polaritet za napon

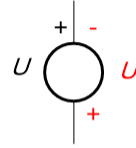
- pretpostavljamo da referentni polaritet napona takav da je gornja stezaljka na višem potencijalu nego donja stezaljka



Referentni polaritet



Stvarni polaritet
 $U > 0$



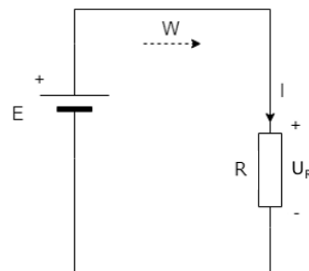
Stvarni polaritet
 $U < 0$

- ako je tome uistinu tako računom ili mjerenjem dobit ćemo pozitivnu vrijednost za dani napon
- u suprotnom ćemo dobiti negativni napon

Referentni smjerovi i polariteti (5)

• Smjer energije u električnoj mreži

- Ako promatramo jednostavan strujni krug u kojem imamo istosmjerni izvor te idealni otpornik, tada je otpornik taj za kojeg kažemo da „troši” energiju, a izvor ju „daje”. Smjer energije, odnosno snage u ovom je slučaju od izvora prema trošilu (crtkana strelica).
- Ako energiji koju trošilo prima pripišemo pozitivni predznak, onda energija predana od struje izvora u strujni krug ima negativni predznak. Naravno i za ovdje prikazani sustav vrijedi zakon očuvanja energije:

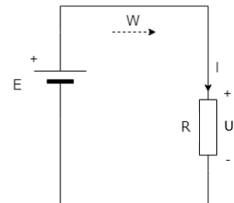


$$W_{\text{trosila}} + W_{\text{izvora}} = 0$$

Referentni smjerovi i polariteti (6)

• Smjer energije u električnoj mreži

- Prema dogovoru
brojka koja prikazuje energiju koju trošilo dobiva biti će pozitivna,
dok će **brojka koja prikazuje energiju koju izvor daje biti negativna**.

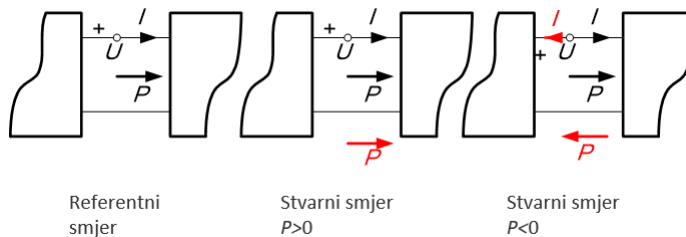


- Pogledajmo sliku:
ako struja ulazi na pozitivnu stezaljku u dio strujnog kruga, onda je taj dio trošilo koje prima energiju,
a ako struja izlazi sa pozitivne stezaljke promatranog dijela strujnog kruga, onda taj dio predstavlja izvor i on predaje energiju u strujni krug

Referentni smjerovi i polariteti (7)

• Referentni smjer za snagu

- snagu smo definirali kao umnožak napona i struje
→ pri deniranju referentnog smjera snage
treba uzeti u obzir referentni polaritet napona i referentni polaritet struje
- elementi kojima struja ulazi na pozitivnu stezaljku primaju energiju
→ snaga pozitivnog predznaka
- ako račun ili mjerenje pokaže da je jedna od veličina ima polaritet odnosno smjer suprotan referentnom, tada je i stvarni smjer snage obrnut.




Referentni smjerovi i polariteti (8)

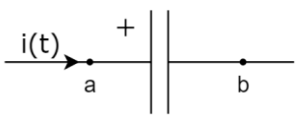
• Referentni smjerovi i polaritet za dvopolne elemente

- Za dvopolne elemente ne možemo proizvoljno i neovisno odabrati i referentni polaritet napona i referentni smjer struje
 - oni su povezani, kažemo da su „udruženi”
- Za otpornik vrijedi da struja uvijek ulazi na „+” stezaljku otpornika



- slično vrijedi za induktivitet te za kapacitet:

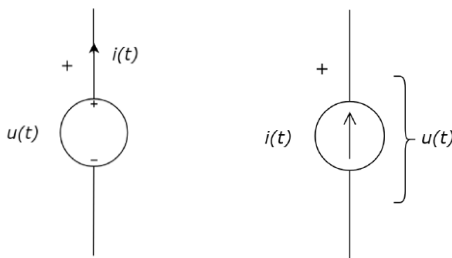

$$u_{ab}(t) = u_L(t) = L \cdot di(t)/dt$$


$$u_{ab}(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Referentni smjerovi i polariteti (8)

• Referentni smjerovi i polaritet za dvopolne elemente

- Udruženi referentni polaritet napona i smjer struje za **izvore**, naponske ili strujne, jest da struja izlazi na „+” stezaljci izvora

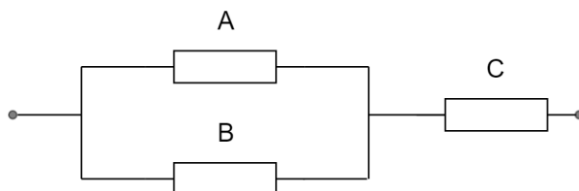


Serijski i paralelni spoj

- Dva osnovna spoja koja prepoznavamo u električkim mrežama jesu *serijski* i *paralelni spoj elemenata*:
 - **Serijski spoj** – kažemo da su određeni idealizirani elementi spojeni serijski, ako su spojeni u nizu jedan za drugim, odnosno ako su u istoj grani mreže
 - Kroz sve elemente koji su spojeni u seriju teče jednaka struja!
 - **Paralelni spoj** – paralelno spojeni elementi spojeni su između točaka koji su na istim potencijalima
 - na paralelno spojenim elementima je jednak napon!

Serijski i paralelni spoj (2)

- Kombinacijama korištenja serijskog i paralelnog spajanja različitih elemenata mogu se predstaviti složeni strujni krugovi.
- Primjer:
 - Elementi A i B spojeni su paralelno, a zajedno su spojeni u seriju s elementom C



Kirchhoffovi zakoni - KZS

- Opisuju odnose u električkoj mreži s obzirom na njezinu topologiju

- **Prvi Kirchhoffov zakon**

- Kirchhoffov zakon za struje (KZS)
- temelji se na postulatu o očuvanju električkog naboja
- Zbroj svih struja koje u čvor ulaze jednak je zbroju struja koje iz čvora izlaze
- Ako strujama koje u čvor ulaze damo predznak „+“, a strujama koje iz čvora izlaze damo predznak „-“ tada možemo pisati:

$$\sum_{j=1}^n I_n = 0$$

n – broj grana koje se u čvoru spajaju

I_n – struja pripadajuća određenoj grani

Kirchhoffovi zakoni - KZS (2)

- Ako je n_{ul} broj ulaznih struja I_{ul} u čvor, a n_{iz} broj izlaznih struja I_{iz} iz čvora, KZS možemo također pisati:

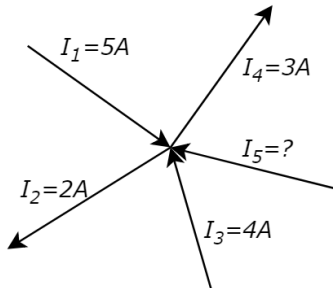
$$\sum_{j=1}^{n_{ul}} I_{ul} = \sum_{k=1}^{n_{iz}} I_{iz}$$

- KZS vrijedi u svakom trenutku za sve čvorove u mreži. U slučaju da su struje izmjenične tada u svakom trenutku vrijedi:

$$\sum_{j=1}^n i_n(t) = 0$$

Kirchhoffovi zakoni - KZS (3)

- **Primjer**



$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

$$5A - 2A + 4A - 3A + I_5 = 0$$

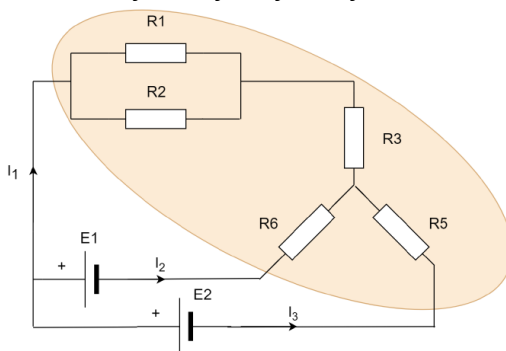
$$I_5 = -4A$$

Kirchhoffovi zakoni - KZS (4)

- **Superčvorovi**

- KZS se odnosi i na superčvorove:

- za svaku zatvorenu regiju na električkoj shemi vrijedi da je zbroj struja koje u nju ulaze jednak zbroju struja koje iz nje izlaze.



- za dani primjer i uz prikazane referentne smjerove struja, možemo pisati:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Kirchhoffovi zakoni - KZS (5)

- **Nezavisne jednadžbe**

- za električku mrežu s \checkmark čvorova na osnovu KZS možemo napisati \checkmark jednadžbi. Njih ($\checkmark - 1$) nezavisnih dok se posljednja jednadžba može dobiti kombinacijom ostalih. Ova činjenica će nam poslužiti pri rješavanju složenijih mreža pomoću Kirchhoffovih zakona.

Kirchhoffovi zakoni - KZN

- **Drugi Kirchhoffov zakon**

- Kirchhoffov zakon za napone (KZN)
- U zatvorenoj konturi koja može biti dio bilo kakve električke mreže, algebarska suma svih unutarnjih napona izvora jednaka je algebarskoj sumi svih napona na pasivnim elementima.
- U obzir se moraju uzeti i polariteti napona
 - kod izvora to ovisi kako su oni priključeni u strujni krug dok
 - kod napona na pasivnim elementima moramo uzeti u obzir smjer struje kroz element

Kirchhoffovi zakoni - KZN (2)

- Na početku se odabire po volji jedan smjer obilaska kao pozitivan i u tom smjeru se obavlja sumiranje:
 - naponi naponskih izvora čije se djelovanje (smjer u kojem nastoje protjerati struju) poklapa s odabranim smjerom obilaženja uzimaju s pozitivnim predznakom, a oni drugi s negativnim predznakom
 - naponi na pasivnim elementima kojima se referentni smjer struje poklapa sa smjerom obilaženja uzimaju se s pozitivnim predznakom, a ako je referentni smjer struje suprotan onome obilaska konture, tada se odgovarajući pad napona uzima s negativnim predznakom

Kirchhoffovi zakoni - KZN (3)

- Ako je u zatvorenoj konturi
 n_E naponskih izvora napona u_{iz} i
 n_{pas} pasivnih elemenata na kojima su naponi u_{pas} , KZN glasi:

$$\sum_{j=1}^{n_E} u_{iz}(t) = \sum_{k=1}^{n_{pas}} u_{pas}(t)$$

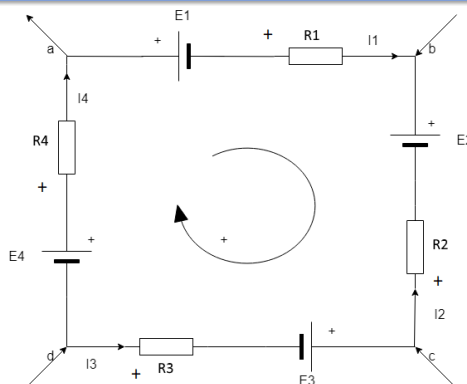
- Za svaku zatvorenu konturu u istosmjernoj otporničkoj mreži vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{n_E} U_{Iz} = \sum_{k=1}^{n_R} U_R = \sum_{k=1}^{n_R} I_k \cdot R_k$$

Kirchhoffovi zakoni - KZN (4)

• Prikaz izvoda KZN

- uzet ćemo jednu konturu unutar neke zamišljene električne mreže
- kontura se sastoji od 4 grane, gdje svaka općenito može sadržavati i izvor i potrošač
- kroz svaku granu teče imenovana struja uz pretpostavljeni referentni smjer
- krećemo od formule kojom smo definirali napon između dvije točke: $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$



Potencijal neke točke a jednak je naponu između te točke i proizvoljno odabrane **referentne** točke O za koju pretpostavljamo da ima potencijal jednak **nuli**!

$$U_{aO} = \varphi_a - \varphi_O = \varphi_a - 0 = \varphi_a$$

Referentnu točku u električkim shemama obično označavamo s oznakom: \perp

Kirchhoffovi zakoni - KZN (5)

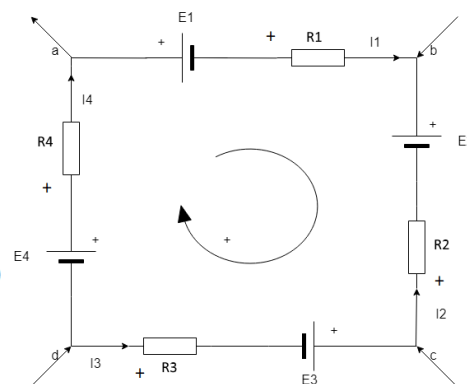
- Odavde možemo za točke a, b, c i d odrediti potencijale :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b \Rightarrow \varphi_b = \varphi_a - U_{ab} = \varphi_a - (E_1 + I_1 * R_1)$$

$$U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c \Rightarrow \varphi_c = \varphi_b - U_{bc} = \varphi_b - (E_2 - I_2 * R_2)$$

$$U_{cd} = \varphi_c - \varphi_d \Rightarrow \varphi_d = \varphi_c - U_{cd} = \varphi_c - (E_3 - I_3 * R_3)$$

$$U_{da} = \varphi_d - \varphi_a \Rightarrow \varphi_a = \varphi_d - U_{da} = \varphi_d - (-E_4 + I_4 * R_4)$$



Kirchhoffovi zakoni - KZN (6)

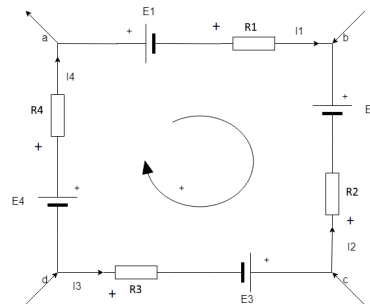
- Zbrajanjem dobivenih jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} & \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d \\ = & \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d - E_1 - E_2 - E_3 + E_4 - I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 \end{aligned}$$

te dalje:

$$-E_1 - E_2 - E_3 + E_4 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4$$

- dobivena je upravo jednačba KZN za danu konturu



Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona

- otkrivanjem struja kroz sve grane – otkrivamo i napone na svim elementima u nekoj mreži
- za mrežu s ***g* grana** imamo dakle ***g nepoznanica***
- Ako mreža ima ***č*** čvorova onda se može postaviti ***č—1*** nezavisna jednačba **KZS**
- Za preostali broj potrebnih jednačbi ***g—(č—1)*** postavljaju se jednačbe **KZN** za nezavisne konture
- Rješenje sustava jednačbi daje struje grana:
 - + predznak: smjer struje identičan s referentnim
 - - predznak: smjer struje suprotan od referentnog

Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona (2)

- Primjer:

Odrediti struje grana u mreži. Zadano je:

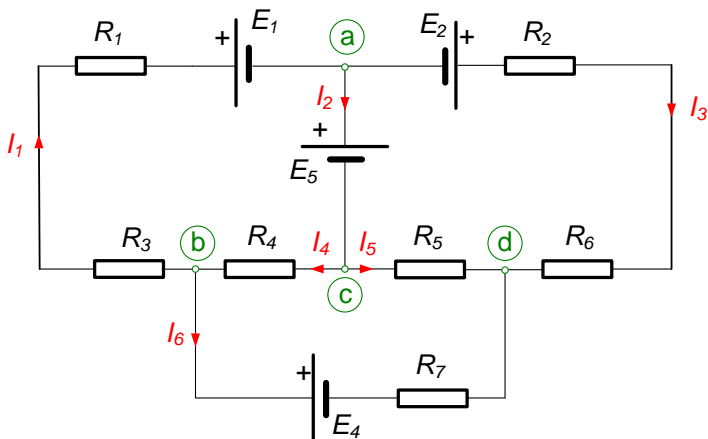
$$R_1=4\ \Omega, R_2=6\ \Omega, R_3=5\ \Omega,$$

$$R_4=1\ \Omega, R_5=2\ \Omega,$$

$$R_6=10\ \Omega, R_7=3\ \Omega,$$

$$E_1=12\ \text{V}, E_2=4\ \text{V},$$

$$E_4=12\ \text{V}, E_5=10\ \text{V}.$$



Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona (3)

- broj grana: $g=6$
- broj čvorova: $\check{c}=4$
- $\check{c} - 1=3$ jednađbe KZS
- $g - (\check{c} - 1)=3$ jednađbe KZN
- Jednađbe KZS za čvorove a, b i c :

$$\text{čvor } a: \quad I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{čvor } b: \quad I_4 = I_1 + I_6$$

$$\text{čvor } c: \quad I_2 = I_4 + I_5$$

KZS

- Jednađba za čvor d jednaka je zbroju jednađbi za čvorove a, b i c :

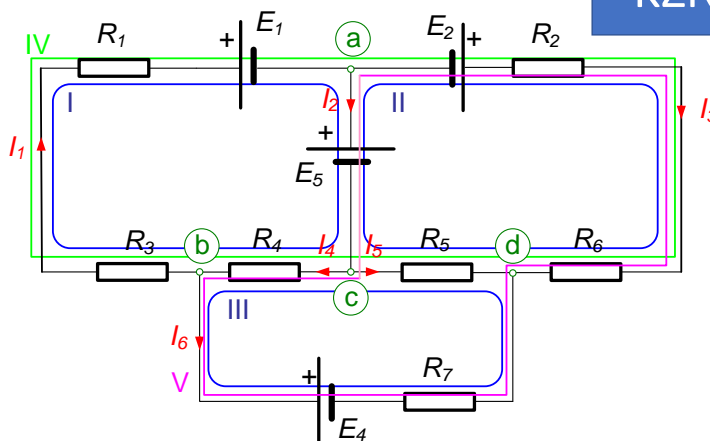
$$\text{čvor } d: \quad I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona (4)

- U mreži na slici možemo postaviti više kontura:

- Kontura I: kroz grane 1, 2 i 4
- Kontura II: kroz grane 2, 3 i 5
- Kontura III: kroz grane 4, 5 i 6
- Kontura IV: kroz grane 1, 3, 5 i 4
- Kontura V: kroz grane 2, 3, 6 i 4

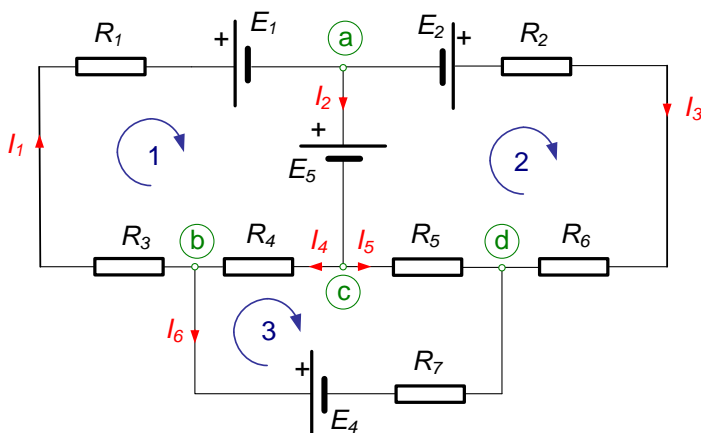
- Odabiremo nezavisne konture. U našem slučaju pogodno je odabrati konture I, II i III jer one sadrže najmanje elemenata.



KZN

Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona (5)

- Prije postavljanja jednadžbi za konture potrebno je odrediti smjerove obilaska odabranih kontura.



KZN

Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona (6)

- Jednadžbe KZN za konture I, II i III:

$$I_1 * R_1 + I_4 * R_4 + I_1 * R_3 = -E_1 - E_5$$

$$I_3 * R_2 + I_3 * R_6 - I_5 * R_5 = E_2 + E_5$$

$$I_5 * R_5 - I_6 * R_7 - I_4 * R_4 = E_4$$

KZN

- Dobije se sustav jednadžbi koji je u matičnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ (R_1+R_3) & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (R_2+R_6) & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & -R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_1 - E_5 \\ E_2 + E_5 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

KZS

KZN

Rješavanje istosmjernih mreža primjenom Kirchhoffovih zakona (7)

- ili: $\underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U}$

- Ovo je **Ohmov zakon u matičnom obliku**. Struje se dobivaju određivanjem matrice $[R]^{-1}$, inverzne matrice matrici $[R]$, uz poznate vrijednosti napona izvora $[U]$:

$$\underline{I} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}$$

- Pri rješavanju složenijih mreža za rješavanje je potrebno primijeniti računalo.
- Rješavanjem se dobiju rješenja:

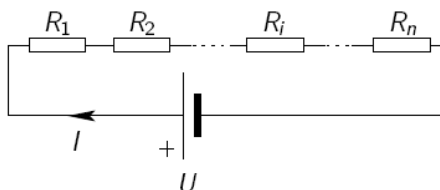
$$I_1 = -2 \text{ A}, \quad I_2 = -3 \text{ A}, \quad I_3 = 1 \text{ A},$$

$$I_4 = -4 \text{ A}, \quad I_5 = 1 \text{ A}, \quad I_6 = -2 \text{ A}.$$

- Negativni predznaci za struje I_1 , I_2 , I_4 i I_6 označavaju da su te struje smjerova suprotnih od referentnih na slici.

Serijski spoj otpora

- neka je zadano n otpornika spojenih u seriju



- tada prema KZN (II KZ) vrijedi za ukupni otpor serije:

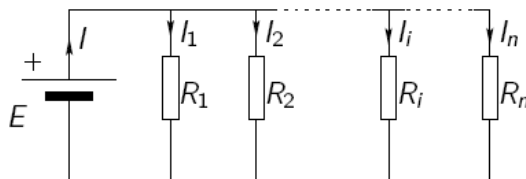
$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots I \cdot R_i + \dots I \cdot R_n = I \cdot \sum_{i=1}^n R_i = R \cdot I$$

odnosno:

$$R = R_1 + R_2 + \dots R_i + \dots R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

Paralelni spoj otpora

- neka je zadano n otpornika spojenih u paralelu:



- tada prema KZS (I KZ) vrijedi za ukupni otpor paralele:

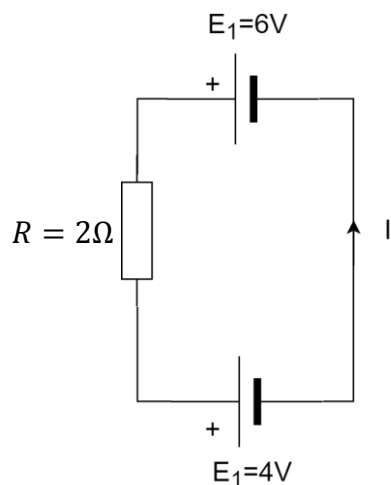
$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots \frac{U}{R_i} + \dots \frac{U}{R_n} = U \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R}$$

odnosno

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \frac{1}{R_i} + \dots \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

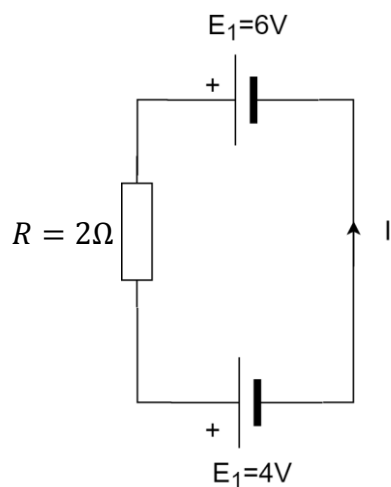
Zadatak za primjenu KZN

- U zadanom strujnom krugu izračunajte struju I primjenom KZN!



Zadatak za primjenu KZN

- U zadanom strujnom krugu izračunajte struju I primjenom KZN!



Rješenje:

$$I = 1 \text{ A}$$

(smjer jednak pretpostavljenom)

Dodatno:

Izračunajte I ako je $E_1 = 8 \text{ V}$!