

**Uvodne napomene:**

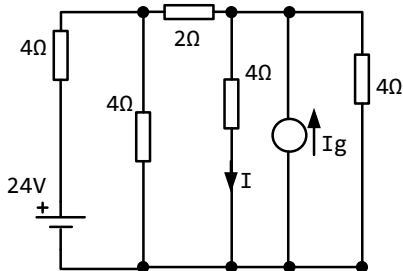
U nastavku je dan jedan primjer postupaka rješenja zadataka završnog ispita iz 2018/2019 (inačica A). Treba naglasiti da su moguća i druga rješenja koja na kraju vode do istih rezultata. Dokument je neslužben, a preporučujemo da sve zadatke **prvo pokušate samostalno riješiti**.

autor: Frano Škopljanac-Mačina

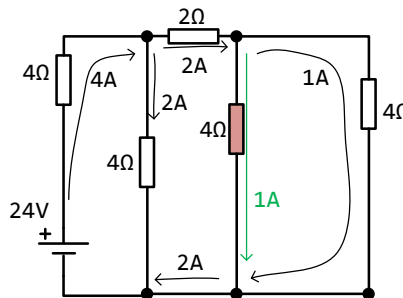
1. (3 boda) U mreži prema slici struja  $I = 2$  A. Odredite tu struju kad se prebaci sklopka u položaj 2.

39% točno  
23% krivo  
38% bez

Iz prvog slučaja tražimo doprinos strujnog izvora (nepoznato):



Superpozicija – doprinos naponskog izvora (strujni odspojen):



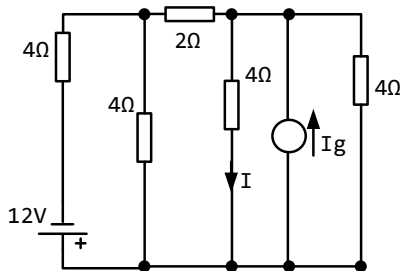
$$\text{Ukupni otpor: } 4 + 4 \parallel (2 + 4 \parallel 4) = 6 \Omega$$

$$\text{Ukupna struja: } 24/6 = 4 \text{ A}$$

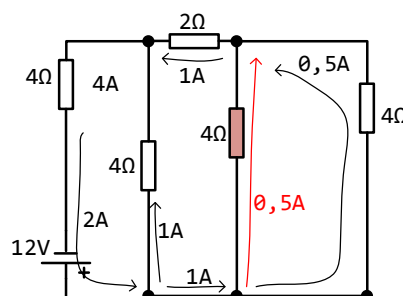
U prvom slučaju samo naponski izvor 24 V daje struju kroz označeni otpornik od 1 A smjera prema dolje. Ukupna struja (zbroy doprinosa naponskog izvora i strujnog izvora) kroz taj označeni otpornik je 2 A smjera prema dolje. Dakle, doprinos strujnog izvora je isto 1 A prema dolje.

Ovdje nije potrebno tražiti iznos strujnog izvora  $I_g$ . Možete ga za vježbu pronaći → iznosi 3 A.

Drugi slučaj:



Superpozicija – doprinos naponskog izvora (strujni odspojen):



$$\text{Ukupni otpor opet: } 4 + 4 \parallel (2 + 4 \parallel 4) = 6 \Omega$$

$$\text{Ukupna struja: } 12/6 = 2 \text{ A}$$

Doprinos strujnog izvora se nije mijenjao, opet je 1 A prema dolje.

Prema superpoziciji zbrojimo doprinose naponskog i strujnog izvora. Pazimo na predznake – doprinos strujnog izvora je pozitivan (smjer jednak zadanom), doprinos naponskog izvora je sada negativan (smjer suprotan od zadanog):

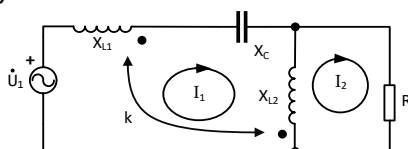
$$I' = -0,5 + 1 = \mathbf{0,5 \text{ A}}$$

Ukupna struja kroz označeni otpornik je **0,5 A zadanog smjera (prema dolje)!**

2. (3 boda) Odredite konturne struje  $I_1$  i  $I_2$ . Zadano:  $\dot{U}_1 = 20$  V,  $R = X_{L1} = X_{L2} = 10 \Omega$ ,  $k = 1$ ,  $X_C = 20 \Omega$ .

44% točno  
24% krivo  
32% bez

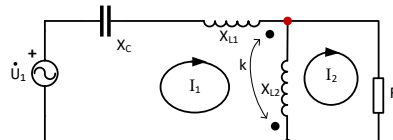
1) Početna shema:



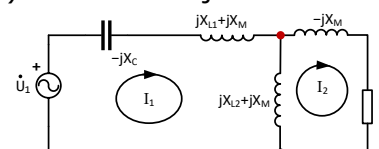
Izračunamo  $X_M$ :

$$X_M = k\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} = \mathbf{10 \Omega}$$

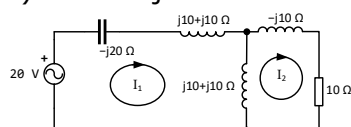
2) Priprema za transformaciju – točka je na kraju  $L_1$  bliže zajedničkom čvoru, a kod  $L_2$  je na suprotnom kraju.



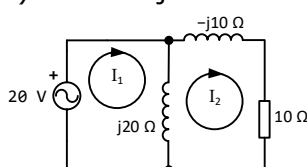
3) Transformacija:



4) Unos vrijednosti:



5) Sređivanje:



6) Primjena metode konturnih struja:

$$\begin{aligned} 1: & \dot{I}_1(j20) - \dot{I}_2(j20) = +20 \\ 2: & -\dot{I}_1(j20) + \dot{I}_2(j20 - j10 + 10) = 0 \end{aligned}$$

$$1: \dot{I}_1(j20) - \dot{I}_2(j20) = 20$$

$$2: -\dot{I}_1(j20) + \dot{I}_2(10 + j10) = 0$$

$$1 + 2: \dot{I}_2(10 - j10) = 20$$

$$\dot{I}_2 = \frac{20}{10 - j10} = \frac{2}{1 - j} = \frac{2}{1 - j} \cdot \frac{1 + j}{1 + j} = \mathbf{1 + j \text{ A}}$$

$$\text{Iz 1: } \dot{I}_1(j20) - (1 + j)(j20) = 20 \rightarrow \dot{I}_1 = \mathbf{1 \text{ A}}$$

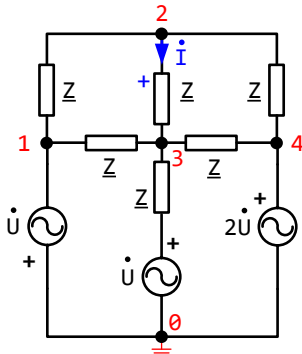
3. (3 boda) Odredite struju  $\dot{I}$ . Zadano:  $\dot{U} = 110 \text{ V}$ ,  $\underline{Z} = j5 \Omega$ .

12% točno 37% krivo 51% bez  
[22% 0 A → krivo jer ovo nije most u ravnoteži zbog srednje grane 3-0]

Označimo sve čvorove – nije ništa zadano pa sami odabiremo referentni (uzemljeni = 0 V) čvor 0 (npr. donji čvor). Potom direktno iz sheme očitamo potencijale čvora 1:  $\phi_1 = -\dot{U}$  te čvora 4:  $\phi_4 = 2\dot{U}$ . Zadan je smjer struje od čvora 2 prema čvoru 3. Dakle, referentan plus napona na impedanciji  $\underline{Z}$  u toj grani je kod čvora 2. Napon na toj impedanciji je onda  $\dot{U}_{23} = \phi_2 - \phi_3$ . Struja kroz tu impedanciju je po Ohmovom zakonu:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\phi_2 - \phi_3}{\underline{Z}}$$

Moramo odrediti potencijale čvorova 2 i 3, npr. preko metode potencijala čvorova.



Primijenimo metodu potencijala čvorova na nepoznate potencijale čvorova 2 i 3:

$$-\phi_1 \left( \frac{1}{\underline{Z}} \right) + \phi_2 \left( \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} \right) - \phi_3 \left( \frac{1}{\underline{Z}} \right) - \phi_4 \left( \frac{1}{\underline{Z}} \right) = 0$$

$$-\phi_1 \left( \frac{1}{\underline{Z}} \right) - \phi_2 \left( \frac{1}{\underline{Z}} \right) + \phi_3 \left( \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}} \right) - \phi_4 \left( \frac{1}{\underline{Z}} \right) = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}$$

$$\frac{\dot{U}}{\underline{Z}} + \frac{3\phi_2}{\underline{Z}} - \frac{\phi_3}{\underline{Z}} - \frac{2\dot{U}}{\underline{Z}} = 0 \quad / \cdot \underline{Z}$$

$$\frac{\dot{U}}{\underline{Z}} - \frac{\phi_2}{\underline{Z}} + \frac{4\phi_3}{\underline{Z}} - \frac{2\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} \quad / \cdot \underline{Z}$$

$$3\phi_2 - \phi_3 = \dot{U}$$

$$-\phi_2 + 4\phi_3 = 2\dot{U}$$

$$3\phi_2 - \phi_3 = 110 \quad / \cdot 4$$

$$- \phi_2 + 4\phi_3 = 220$$

zbrojimo jednačbe i dobijemo:

$$11\phi_2 = 660$$

$$\phi_2 = 60 \text{ V}$$

vratimo se u npr. u prvu jednačbu:

$$3 \cdot 60 - \phi_3 = 110$$

$$\phi_3 = 70 \text{ V}$$

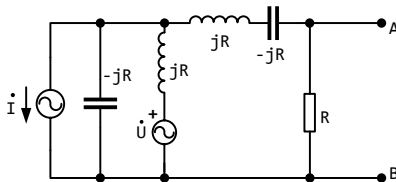
i na kraju računamo struju  $\dot{I}$ :

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\phi_2 - \phi_3}{\underline{Z}} = \frac{-10}{j5} = j2 \text{ A}$$

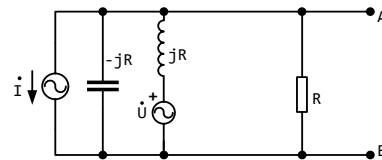
4. (3 boda) Odredite parametre Nortonovog nadomjesnog spoja obzirom na stezaljke A i B u mreži prema slici. Zadano:  $R = X_L = X_C$ .

51% točno  
31% krivo  
18% bez

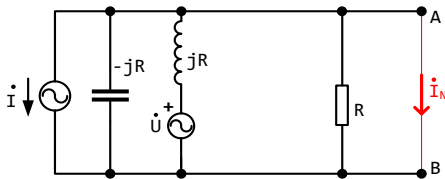
1) Početna shema:



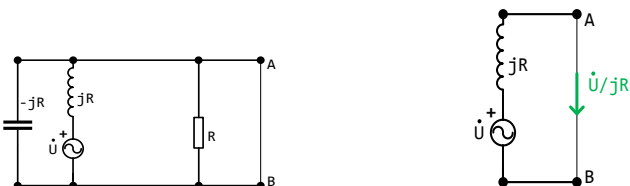
2) Nakon sređivanja shema je jednostavnija:



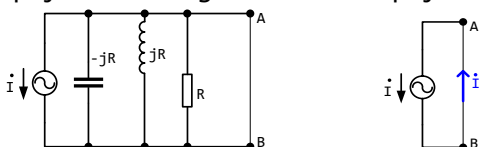
3) Prvo kratko spojimo čvorove A i B i tražimo Nortonovu struju, npr. preko superpozicije:



Samo naponski izvor (strujni izvor odspojen, grane  $-jR$  i  $R$  kratko spojene):



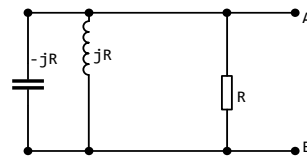
Samo strujni izvor (naponski zamijenjen s kratkim spojem → sve grane kratko spojene):



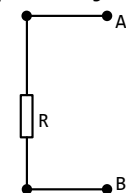
Potom nalazimo Nortonovu struju zbrajanjem doprinosa svakog izvora (pazite na smjerove struja: pozitivna ako ima pretpostavljeni smjer A→B, inače negativna):

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}}{jR} + (-I) = -j\frac{\dot{U}}{R} - I$$

4) Potom tražimo Nortonovu impedanciju (na isti način kao i Theveninovu impedanciju). Naponski izvor zamijenimo s kratkim spojem, strujni izvor odspajamo:



Dvije lijeve grane zajedno daju beskonačan otpor ( $-jR || jR = \infty$ ) pa ostaje samo:



I samo očitamo Nortonovu impedanciju:

$$\underline{Z}_N = R$$

5. (2 boda) Prividna snaga simetričnog induktivnog trošila spojenog u trokut je 4,5 kVA, a radna snaga trošila je 3,6 kW uz linijsku struju od 30 A. Odredite impedancije trošila.

62% točno  
26% krivo  
12% bez

Ukupna prividna snaga trofaznog trošila je  $S_{uk} = \sqrt{P_{uk}^2 + Q_{uk}^2}$ . Ukupna jalova snaga trofaznog trošila je onda  $Q_{uk} = \sqrt{S_{uk}^2 - P_{uk}^2} = 2,7 \text{ kVAr}$  (induktivno).

Fazna struja simetričnog trofaznog trošila u trokutu je za  $\sqrt{3}$  puta manja od linijske struje:

$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ A}$$

Radna snaga svake faze simetričnog trošila je  $I_f^2 \cdot \text{Re}\{Z\}$ , a jalova snaga svake faze  $I_f^2 \cdot \text{Im}\{Z\}$ :

$$P_{uk} = P_1 + P_2 + P_3 = 3 \cdot I_f^2 \cdot \text{Re}\{Z\} \rightarrow \text{Re}\{Z\} = \frac{P_{uk}}{3 \cdot I_f^2} = \frac{3600}{900} = 4 \Omega$$

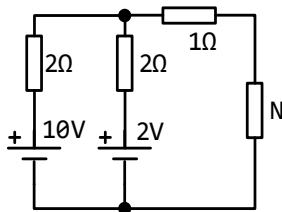
$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3 \cdot I_f^2 \cdot \text{Im}\{Z\} \rightarrow \text{Im}\{Z\} = \frac{Q_{uk}}{3 \cdot I_f^2} = \frac{2700}{900} = 3 \Omega$$

$$\underline{Z} = \text{Re}\{Z\} + j \text{Im}\{Z\} = 4 + j3 \Omega$$

6. (2 boda) Odredite napon na nelinearnom otporniku čija je  $U - I$  karakteristika zadana kao:  $I = 0,5U^2 \text{ [A]}$ .

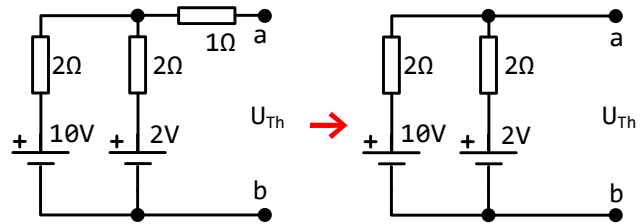
32% točno  
25% krivo  
43% bez

Početna shema:



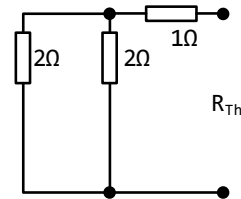
Izvadimo nelinearni otpornik i ostatak mreže nadomjestimo po Theveninu. Na kraju vratimo nelinearni otpornik na Theveninov realni naponski izvor i izračunamo traženi napon.

Kroz otpornik od  $1 \Omega$  ne teče struja – nema pada napona (odspojen krug) pa Theveninov napon  $U_{Th} = U_{ab}$  možemo naći preko Millmanovog teorema:

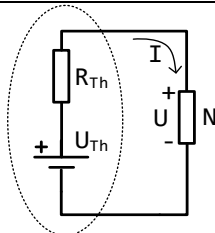


$$U_{Th} = U_{ab} = \frac{\frac{10}{2} + \frac{2}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 6 \text{ V}$$

Za Theveninov otpor naponske izvore zamijenimo s kratkim spojem:



$$R_{Th} = 2 || 2 + 1 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} + 1 = 2 \Omega$$



Theveninov izvor opisujemo s jednadžbom realnog naponskog izvora:

$$U = U_{Th} - IR_{Th}$$

$$U = 6 - 2I$$

Napon praznog hoda je ovdje Theveninov napon  $U_{Th} = 6 \text{ V}$ , a struja kratkog spoja je Nortonova struja  $I_N = \frac{U_{Th}}{R_{Th}} = 3 \text{ A}$ .

Na nelinearnom otporniku je zadano da vrijedi  $I = 0,5U^2$ . Uvrstimo izraz za struju nelinearnog otpornika u jednadžbu realnog naponskog izvora i dobijemo struju  $I$  i napon  $U$  nelinearnog otpornika:

$$U = 6 - 2(0,5U^2) = 6 - U^2 \rightarrow U^2 + U - 6 = 0 \rightarrow$$

$$U_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

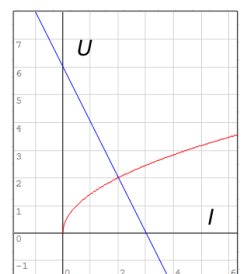
Napon na nelinearnom otporniku je onda  $U = 2 \text{ V}$  (uzimamo pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe), a struja je  $I = 0,5U^2 = 2 \text{ A}$ .

Do rješenja možemo doći i grafičkim putem – tražimo **sjecište** dvije zadane jednadžbe (izvora i trošila):

$$U = 6 - 2I$$

$$I = 0,5U^2 \rightarrow U = \sqrt{2I}$$

Sjecište je **radna točka** trošila te iz njenih koordinata izravno očitamo struju (2 A) i napon (2 V) trošila!

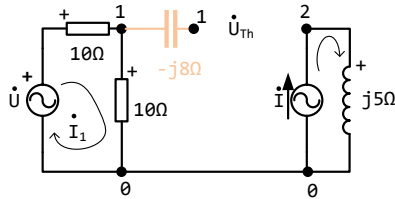


7. (2 boda) U spoju prema slici impedancija  $\underline{Z}$  je odabrana tako da se na njoj razvija maksimalna moguća radna snaga. Odredite tu snagu. Zadano:  $\dot{U} = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$  i  $\dot{I} = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$ .

55% točno  
12% krivo  
33% bez

Iz početnog kruga izvadimo promjenjivu impedanciju i ostatak kruga nadomjestimo po Theveninu.

Tražimo Theveninov napon. Zadamo referentni čvor 0 (0 V). Vidimo da kondenzator možemo zanemariti – kroz njega ne teče struja pa na njemu nema pada napona:

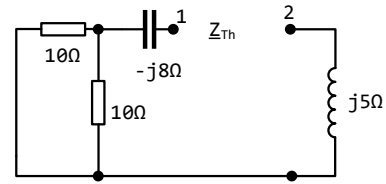


Desni i lijevi dio kruga su odvojeni pa izravno računamo:

$$\phi_1 = \dot{U}_{10} = \dot{U} \frac{10}{10 + 10} = 25 \text{ V} \quad \phi_2 = \dot{U}_{20} = \dot{I} \cdot j5 = j25 \text{ V}$$

$$\dot{U}_{Th} = \dot{U}_{12} = \phi_1 - \phi_2 = 25 - j25 \text{ V}$$

Tražimo Theveninovu impedanciju. Naponski izvor zamijenimo s kratkim spojem, a strujni odspojimo:



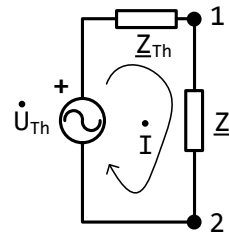
$$\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_{12} = 10 \parallel 10 - j8 + j5 = 5 - j3 \Omega$$

Vratimo promjenjivu impedanciju na Theveninov izvor. Najveća snaga na promjenjivoj impedanciji će se razvijati kada je namjestimo na:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{Th}^* = 5 + j3 \Omega$$

Tada dolazi do rezonancije (imaginarni dijelovi obiju impedanciju se ponište) i struja je u ovom serijskom krugu maksimalna. Radnu snagu na promjenjivoj impedanciji  $\underline{Z}$  računamo kao  $P = I^2 \cdot \text{Re}\{\underline{Z}\}$ :

$$P_{\text{maks}} = \left| \frac{\dot{U}_{Th}}{\underline{Z}_{Th} + \underline{Z}} \right|^2 \cdot \text{Re}\{\underline{Z}\} = \left| \frac{25 - j25}{10} \right|^2 \cdot 5 = (2,5\sqrt{2})^2 \cdot 5 = 62,5 \text{ W}$$



8. (3 boda) Ampermetar u nul vodiču mjeri struju od 60,1 A. Koliku će struju mjeriti ampermetar ako  $L$  i  $C$  zamijene svoja mjesta u trošilu? Vrijedi:  $R = X_L = X_C$ .

55% točno  
24% krivo  
21% bez

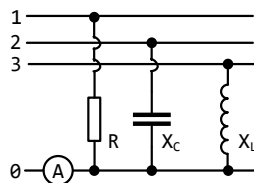
Postoji nul-vodič  $\rightarrow$  i izvor i trošilo su u zvijezda spoju. Trošilo je ovdje nesimetrično, a uobičajeno uzimamo da je izvor simetričan – napon svake faze izvora je  $U_f$  te da je redoslijed faza  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ :

$$\dot{U}_{10} = U_f \angle 0^\circ = U_f \quad \dot{U}_{20} = U_f \angle -120^\circ = U_f \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \dot{U}_{30} = U_f \angle -240^\circ = U_f \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Zbog nul-vodiča (žica bez otpora) napon na svakoj fazi trošila jednak je naponu na odgovarajućoj fazi izvora!

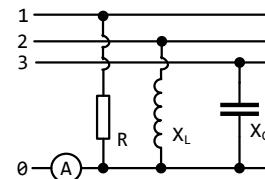
Prema KZS računamo pokazivanje ampermetra, odnosno struju kroz nul-vodič u oba slučaja (ovdje nije nula jer je trošilo nesimetrično  $R \neq -jR \neq jR$ ).

Drugi slučaj – zamjena mjesta  $L$  i  $C$ :



$$I_0 = \left| \frac{\dot{U}_{10}}{R} + \frac{\dot{U}_{20}}{-jR} + \frac{\dot{U}_{30}}{jR} \right| = \frac{U_f}{R} \left| 1 + j \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - j \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right|$$

$$60,1 = \frac{U_f}{R} |1 + \sqrt{3}| \rightarrow \frac{U_f}{R} = \frac{60,1}{1 + \sqrt{3}}$$

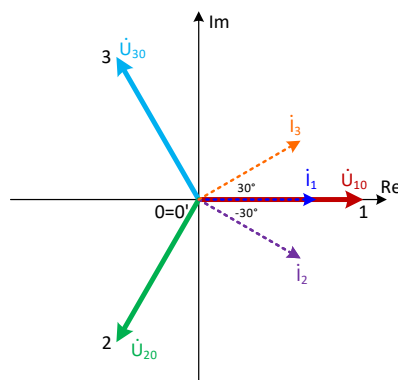


$$I'_0 = \left| \frac{\dot{U}_{10}}{R} + \frac{\dot{U}_{20}}{jR} + \frac{\dot{U}_{30}}{-jR} \right| = \frac{U_f}{R} \left| 1 - j \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right|$$

$$I'_0 = \frac{U_f}{R} |1 - \sqrt{3}| = \frac{60,1}{1 + \sqrt{3}} |1 - \sqrt{3}| \approx 16,1 \text{ A}$$

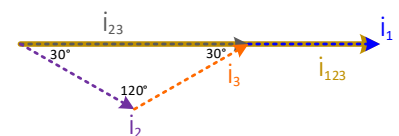
Dodatno - rješenje preko skice topografskog dijagrama:

Prvi slučaj:



- spoj simetričnog trošila u zvijezdi s nul-vodičem
- zvijezdište izvora 0 i zvijezdište trošila 0' na istom potencijalu
- naponi na fazama trošila jednaki naponima na fazama izvora
- redoslijed faza  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
- struja kroz prvu fazu trošila u fazi s naponom ( $R$ )
- struja kroz drugu fazu trošila prethodi za  $90^\circ$  ispred napona ( $C$ )
- struja kroz treću fazu trošila kasni za  $90^\circ$  iza napona ( $L$ )

fazorski zbrojimo sve tri struje



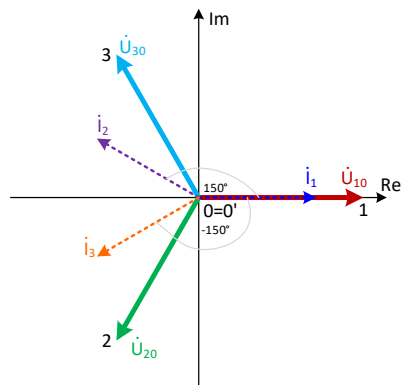
moduli sve tri struje su  $\frac{U_f}{R}$

modul zbroja  $I_{23}$  je  $\sqrt{3} \frac{U_f}{R}$

(provjerite po kosinusovom poučku)

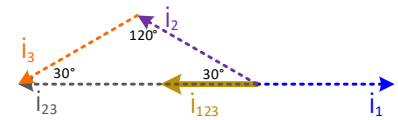
modul zbroja sve tri struje je  $\frac{U_f}{R} + \sqrt{3} \frac{U_f}{R} = 60,1 \text{ A} \rightarrow \frac{U_f}{R} = \frac{60,1}{1 + \sqrt{3}}$

Drugi slučaj:



- zamijenjena mjesta  $L$  i  $C$  – sve ostalo isto kao u prvom slučaju
- struja kroz prvu fazu trošila opet u fazi s naponom ( $R$ )
- sada struja kroz drugu fazu trošila kasni za  $90^\circ$  iza napona ( $L$ )
- a struja kroz treću fazu trošila prethodi za  $90^\circ$  ispred napona ( $C$ )

fazorski zbrojimo sve tri struje



moduli sve tri struje su  $\frac{U_f}{R}$   
modul zbroja  $i_{23}$  je opet  $\sqrt{3} \frac{U_f}{R}$   
modul zbroja sve tri struje je

$$\sqrt{3} \frac{U_f}{R} - \frac{U_f}{R} = \frac{U_f}{R} (\sqrt{3} - 1) = \frac{60,1}{1 + \sqrt{3}} (\sqrt{3} - 1) \approx 16,1 \text{ A}$$

59% točno  
22% krivo  
19% bez

9. (3 boda) Sklopka se u krugu zatvara u trenutku  $t = 0$ . Odredite napon na kondenzatoru  $u_C(t)$  u trenutku  $t = 0,078 \text{ s}$  od zatvaranja sklopke. Napomena: prije zatvaranja sklopke kondenzator je bio prazan.

Prvo izvadimo kondenzator (i sklopku) i ostatak kruga nadomjestimo po Theveninu. Kada računamo Theveninov napon vidimo da kroz otpornik  $1 \Omega$  ne teče struja (prekinuta grana) pa na njemu nema pada napona te je zato Theveninov napon jednak padu napona na otporniku  $9 \Omega$ . Lako ga odredimo, npr. preko naponskog djelila:

$$U_{Th} = 18 \frac{9}{3 + 9} = 13,5 \text{ V}$$

Za Theveninov otpor naponski izvor zamijenimo s kratkim spojem:

$$R_{Th} = 3 || 9 + 1 = 3,25 \Omega$$

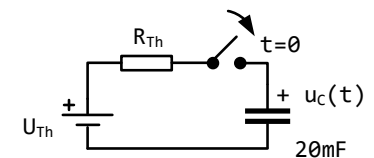
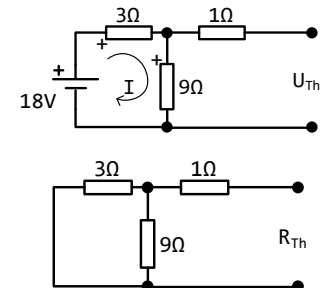
Vratimo kondenzator (i otvorenu sklopku) na Theveninov izvor. Vremenska konstanta kruga je:

$$\tau = R_{Th} \cdot C = 0,065 \text{ s}$$

Nakon zatvaranja sklopke kroz krug poteče struja (teče sve dok se kondenzator ne *napuni* do napona izvora  $U_{Th}$ ). Napon na kondenzatoru raste po eksponencijalnom zakonu:

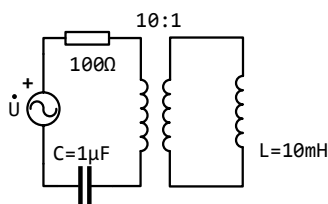
$$u_C(t) = U_{Th} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_C(0,078) = 13,5 (1 - e^{-\frac{0,078}{0,065}}) \approx 9,43 \text{ V}$$



56% točno  
15% krivo  
29% bez

10. (2 boda) U primarnom krugu idealnog transformatora nalazi se izvor  $\dot{U} = 100 | 0^\circ \text{ V}$ . Ako je struja primara  $1 \text{ A}$ , odredite kružnu frekvenciju izvora.

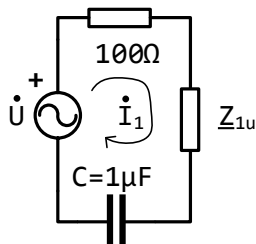


Iz sheme očitamo omjer  $\frac{N_1}{N_2} = n = 10$ . Izračunamo ulaznu impedanciju:

$$\underline{Z}_{1u} = n^2 \cdot \underline{Z}_2 = 100 \cdot j\omega L = j\omega \frac{100L}{L_{1u}} = j\omega L_{1u}$$

Vidimo da je onda taj induktivitet:  $L_{1u} = 1 \text{ H}$ .

Postavimo nadomjesnu shemu primarnog kruga – serija  $RLC$ :



Ako je napon izvora  $100 \text{ V}$  efektivno, a struja primara je  $1 \text{ A}$  efektivno onda je i napon na otporniku  $100 \text{ V}$ . Znači da je u ovome serijskom  $RLC$  krugu nastupila **rezonancija** (napon na otporniku je najveći, jednak naponu izvora). Dakle, tražimo rezonantnu kružnu frekvenciju! Sjetite se da je kod rezonancije imaginarni dio impedancije jednak **nuli**:

$$L_{1u}\omega - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow L_{1u}\omega = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L_{1u}C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L_{1u}C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1000000}}} = 1000 \text{ s}^{-1}$$

$$\underline{Z} = 100 + j \left( L_{1u}\omega - \frac{1}{\omega C} \right)$$

#### Završni komentar:

Pristupnika je bilo 558. Prosječan broj bodova je ispodprosječnih **9,91** (od 26). Uz svaki zadatak naveden je i postotak ispitanika koji su dali točan odgovor.