



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

9. Naponsko i strujno djelilo, mosni spoj

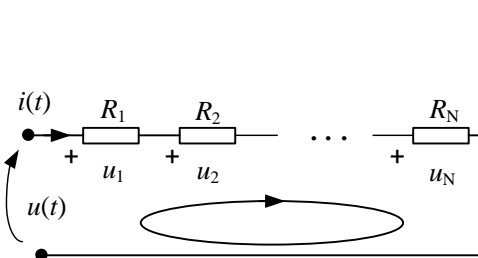
© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerađavanja 3.0 Hrvatska](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/hr/).

Naponsko djelilo

- Ako je poznat napon $u(t)$ na nizu od N serijski spojenih elemenata jednadžba naponskog djelila omogućava određivanje napona na k -tom elementu u nizu, a da se pri tom ne mora direktno odrediti struja koja teče kroz spoj.



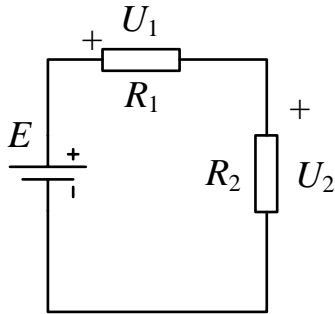
$$u(t) = i(t) \sum_{j=1}^N R_j = i(t)(R_1 + R_2 + \dots + R_N) = i(t)R_{eq}$$

$$u_k(t) = i(t)R_k$$

- Jednadžba naponskog djelila:** $u_k(t) = \frac{R_k}{R_{eq}} u(t)$

Naponsko djelilo (dva otpornika)

- Za spoj od 2 serijski spojena otpornika, vrijedi:

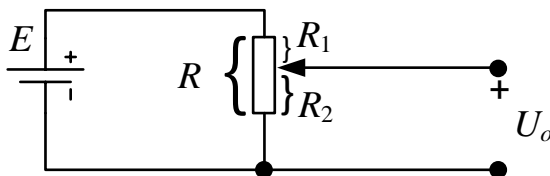
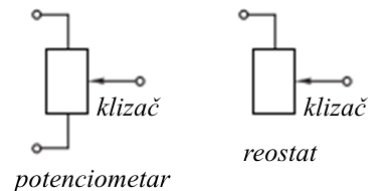


$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Promjenjivi otpornik u potencijometarskom spoju

- Ako se koristi u potencijometarskom spoju, **promjenjivi otpornik** predstavlja djelitelj napona.



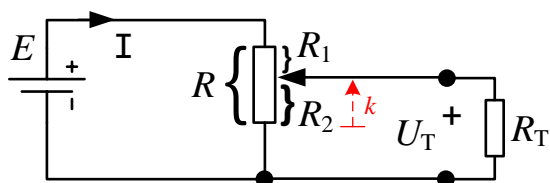
- Jednadžba naponskog djelila modelira rad potencijometra. Napon U_o ovisi o položaju klizača i moguće ga je podešavati u granicama $[0, E]$.

$$U_o = \frac{R_2}{R} E$$

Promjenjivi otpornik u potencijometarskom spoju (2)

- Ako na potencijometar spojimo trošilo R_T , možemo analizirati utjecaj otpora trošila na promjenu napona na trošilu U_T , a u ovisnosti o položaju klizača potencijometra k . Vrijednost parametra koji opisuje položaj klizača može se mijenjati u granicama $0 \leq k \leq 1$. Vrijedi: $R_1 = (1-k)R$ i $R_2 = kR$.

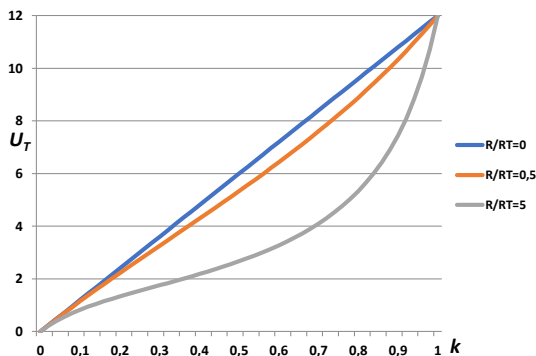
$$I = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_T}{R_2 + R_T}} = \frac{E}{(1-k)R + \frac{kR R_T}{kR + R_T}} = \frac{E(kR + R_T)}{R[R_T + k(1-k)R]}$$



$$U_T = I \frac{kR R_T}{kR + R_T} = \frac{k}{1 + k(1-k) \frac{R}{R_T}} E$$

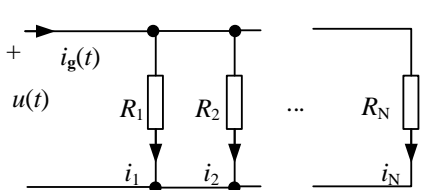
Promjenjivi otpornik u potencijometarskom spoju (3)

- Za velike vrijednosti otpora trošila, omjer $R/R_T \rightarrow 0$, a $U_T = kE$. U tom slučaju je funkcija $U_T = f(k)$ pravac (ucrtan plavom bojom u dijagramu) i predstavlja idealnu karakteristiku. Stvarna karakteristika potencijometra ovisi o omjeru R/R_T i nije linearna što je i prikazano na dijagramu (napomena: $E = 12$ V).



Strujno djelilo

- Ako je poznata ukupna struja $i_g(t)$ koja ulazi u niz od N paralelno spojenih elemenata, jednačdba strujnog djelila omogućava određivanje struje koja teče kroz k -ti element u nizu, a da se pri tom ne mora direktno odrediti napon koji vlada na elementima.



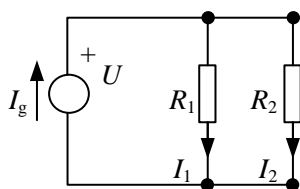
$$i_g(t) = \frac{u(t)}{R_1} + \frac{u(t)}{R_2} + \dots + \frac{u(t)}{R_N} = u(t) \sum_{j=1}^N G_j = u(t) G_{eq}$$

$$i_k = \frac{u(t)}{R_k} = u(t) G_k$$

• **Jednačdba strujnog djelila:**
$$i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i_g(t)$$

Strujno djelilo (dva otpornika)

- Za spoj sa 2 paralelno spojena otpornika, vrijedi:

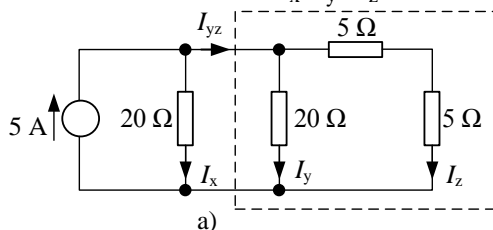


$$I_1 = \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2} \right) I_g = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I_g = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) I_g$$

$$I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) I_g$$

Primjer

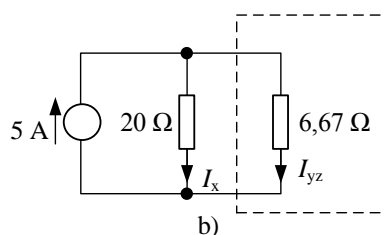
- Odredite struje I_x , I_y i I_z u mreži koja je prikazana na slici a).



$$G_{eq} = G_x + G_y + G_z = 0,05 + 0,05 + 0,1 = 0,2 \text{ S}$$

$$I_x = \frac{G_x}{G_{eq}} 5 = 1,25 \text{ A} = I_y \quad I_z = \frac{G_z}{G_{eq}} 5 = 2,5 \text{ A}$$

B) Reduciranje serijsko-paralelnog spoja.



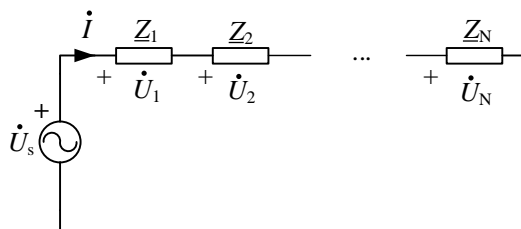
$$I_x = \frac{6,67}{20 + 6,67} \cdot 5 = 1,25 \text{ A}$$

$$I_{yz} = \frac{20}{20 + 6,67} \cdot 5 = 5 - I_x = 3,75 \text{ A}$$

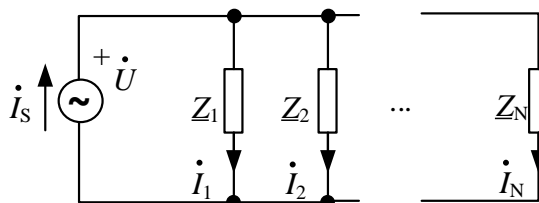
$$I_y = \frac{10}{20 + 10} \cdot I_{yz} = 1,25 \text{ A} \quad I_z = \frac{20}{20 + 10} \cdot I_{yz} = 2,5 \text{ A}$$

Naponsko i strujno dijelo u mrežama sa sinusnom pobudom

- Jednadžbe naponskog i strujnog djelila imaju isti oblik kao u istosmjernim mrežama



$$\dot{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N} \dot{U}_s$$

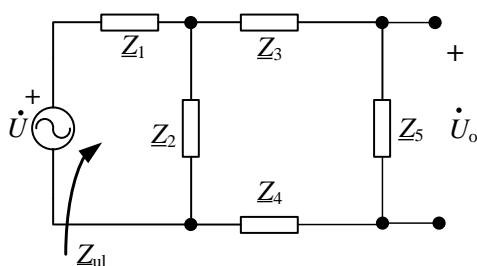


$$i_k = \frac{Y_k}{Y_{eq}} i_s$$

$$i_k = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_k}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_N}} i_s$$

Ulazna impedancija

- Ulazna impedancija** je impedancija koju "vidi" izvor priključen na pasivnu linearnu mrežu. Primjer: odredite ulaznu impedanciju \underline{Z}_{ul} i omjer fazora napona \dot{U}_o/\dot{U} za mrežu prema slici. Zadano: $\underline{Z}_1 = 2 + j4 \Omega$, $\underline{Z}_2 = 3 \Omega$, $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = 2 \Omega$.



$$\underline{Z}_{ul} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \parallel (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) = 4 + j4 \Omega$$

Struja koju daje izvor: $\dot{i} = \dot{U} / \underline{Z}_{ul}$

Struja kroz granu sa \underline{Z}_3 , \underline{Z}_4 , \underline{Z}_5 prema jednačbi strujnog djelila:

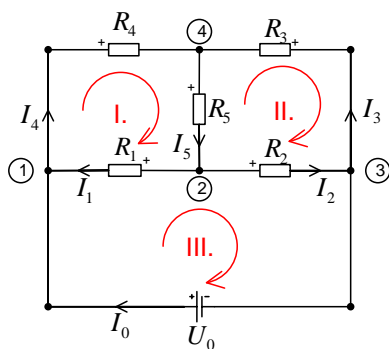
$$\dot{i}_{345} = \dot{i} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5}$$

Napon: $\dot{U}_o = \dot{i}_{345} \underline{Z}_5$, a:

$$\dot{U}_o / \dot{U} = 1 / (6 + j6)$$

Mosni spoj (Wheatstoneov most)

- Spoj pet pasivnih elemenata i jednog aktivnog, kakav je prikazan na sl. 1, naziva se **mosni spoj**. Ako su svi pasivni elementi **otporni**, mosni se spoj поближе određuje kao **Wheatstoneov most**.



Sl. 1

Mosni spoj (Wheatstoneov most) (2)

- Jednadžbe Kirchhoffovih zakona:

$$\text{čvor 1: } +I_0 + I_1 - I_4 = 0 \quad (1)$$

$$\text{čvor 2: } -I_1 - I_2 + I_5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{čvor 4: } +I_3 + I_4 - I_5 = 0 \quad (3)$$

$$\text{petlja I.: } +R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = 0 \quad (4)$$

$$\text{petlja II.: } -R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_5 \cdot I_5 = 0 \quad (5)$$

$$\text{petlja III.: } -R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U_0 \quad (6)$$

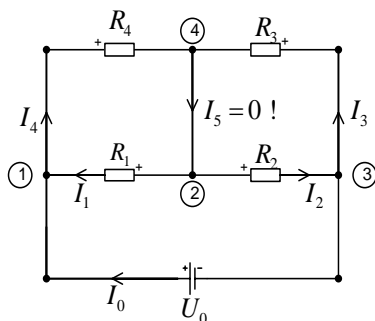
Mosni spoj (Wheatstoneov most) (3)

- Rješavanje ovog sustava jednadžbi po I_5 daje:

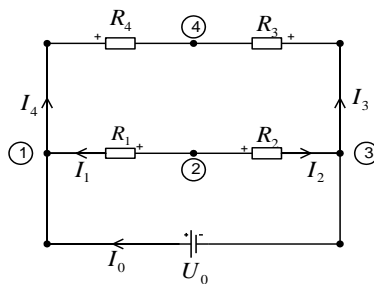
$$I_5 = \frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} + R_5 \right)} \cdot U_0 \quad (7)$$

- Kada je $R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 = 0$, izraz (7) jednak je nuli. Struja I_5 ne teče pa se sl. 1 može nadomjestiti sa sl. 1a ili sl. 1b.

Mosni spoj (Wheatstoneov most) (4)



Sl. 1a



Sl.1b

- Uz $I_5 = 0$ jednadžbe (2) i (3) reduciraju se na $-I_1 - I_2 = 0$, odnosno $I_3 + I_4 = 0$ što je iz sl. 1a-b očito.

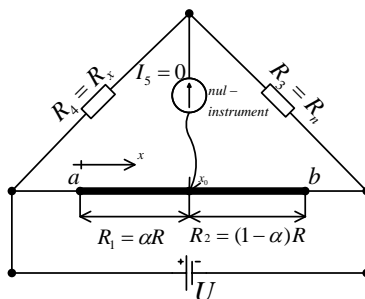
Mosni spoj (Wheatstoneov most) (5)

- Relacija

$$R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 = 0; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (8)$$

- **uvjet je ravnoteže mosta**. Kada je ona zadovoljena, dopušteno je **mosnu granu** (grana s R_5) kratko spojiti (sl. 1a) ili odspojiti (sl. 1b), jer navedeni zahvati ne mijenjaju strujno-naponske prilike u krugu, a mreža se pojednostavljuje na **serijsko-paralelni spoj otpornika R_1, R_2, R_3 i R_4** .

Primjer: Primjena u električkim mjerenjima



- Otpori R_1 i R_2 su dijelovi npr. otporne žice duljine l po kojoj se može pomicati klizač; položaj klizača (udaljenost od točke a) može se precizno očitati. Otpor R_3 je tzv. normalni otpor, čija je vrijednost stabilna i točno poznata. Otpor $R_4 = R_x$ je otpor čija se vrijednost mjeri. Ukupna vrijednost otporne žice $R_{ab} = R$ također je poznata.

Primjena u električkim mjerenjima (2)

- Mjerenje se provodi tako da se klizač pomiče do točke x_0 kada vrlo precizni nul-instrument ne registrira nikakvu struju u mosnoj grani ($I_5=0$). Tada je:

$$R_1 = \frac{x_0}{l} \cdot R = \alpha R, \quad R_2 = \frac{l - x_0}{l} \cdot R = (1 - \alpha) \cdot R \quad (9)$$

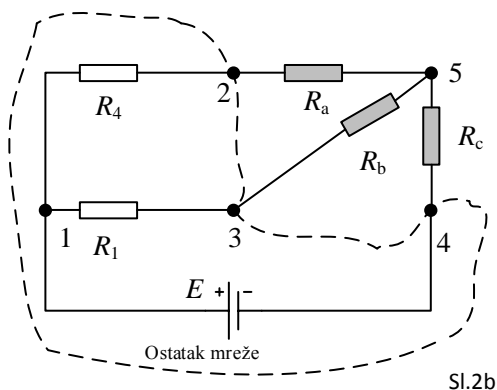
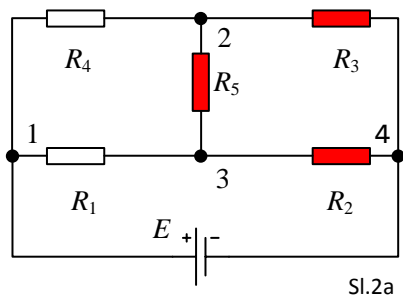
- Dobiva se:

$$R_4 = R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3 = \frac{x_0}{l - x_0} \cdot R_3 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot R_n \quad (10)$$

Wheatstoneov mjerni most jednostavna je i precizna metoda za određivanje vrijednosti nepoznatih otpora.

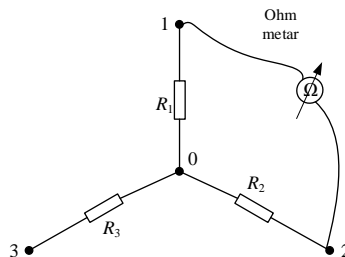
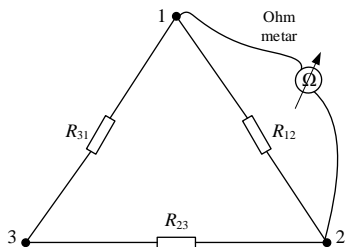
Mosni spoj za koji ne vrijedi uvjet ravnoteže

- Ako most nije u ravnoteži, tada možemo transformirati otpornike u spoju trokut (jedna takva trojka R_2 , R_3 i R_5 je istaknuta na Sl. 2a) u ekvivalentni spoj u zvijezdu čime se mosni spoj pretvara u serijsko paralelnu kombinaciju otpora (Sl. 2b) te se može jednostavno analizirati.

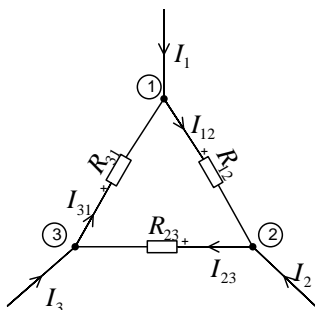


Ekvivalentnost trokut i zvijezda spojeva

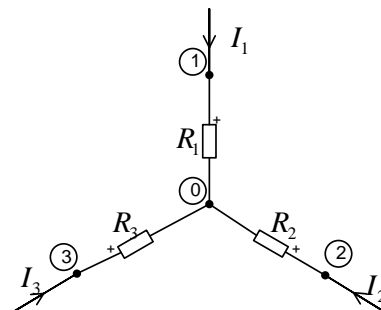
- Što treba biti ispunjeno da tri otpornika spojena u zvijezdu, odnosno u trokut, predstavljaju **ekvivalentne tropole**? Za trokut i zvijezda spojeve otpornika vrijedi da su oni ekvivalentni ako su otpori promatrani na istim parovima stezaljki u oba spoja isti.



Pretvorba trokut-zvijezda



Sl. 3a: Trokut



Sl. 3b: Zvijezda

Pretvorba trokut-zvijezda (2)

Ekvivalentnost trokuta i zvijezde slijedi iz zadovoljenja sljedećih naponskih jednadžbi:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \quad (11a)$$

$$U_{23} = I_{23} \cdot R_{23} = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 \quad (11b)$$

$$U_{31} = I_{31} \cdot R_{31} = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 \quad (11c)$$

(11a-c) sustav je triju jednadžbi s tri nepoznanice (R_1 , R_2 , R_3 , odnosno R_{12} , R_{23} , R_{31}) s parametrima (strujama) koje moraju zadovoljavati sljedeće strujne jednadžbe:

$$\text{čvor 1:} \quad + I_1 \quad - I_{12} \quad + I_{31} = 0 \quad (12a)$$

$$\text{čvor 2:} \quad + I_2 \quad + I_{12} - I_{23} = 0 \quad (12b)$$

$$\text{čvor 3:} \quad + I_3 \quad + I_{23} - I_{31} = 0 \quad (12c)$$

Pretvorba trokut-zvijezda (3)

Iz sustava (11a-c) slijedi:

$$I_{12} \cdot R_{12} + I_{23} \cdot R_{23} + I_{31} \cdot R_{31} = 0 \quad (13)$$

Iz sustava (12a-c) slijedi:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (14)$$

Pretvorba trokut-zvijezda (4)

- Poznanice: R_{12}, R_{23}, R_{31}
- Nepoznanice: R_1, R_2, R_3

U jednadžbi (12) eliminacijom struja I_{31} i I_{23} , i to zamjenom $I_{31} = I_{12} - I_1$ (12a) i $I_{23} = I_{12} + I_1$ (12b), dobiva se:

$$I_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} - I_2 \cdot R_{23}}{R_{\Delta}} \quad (15)$$

gdje je:

$$R_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31} \quad (16)$$

Pretvorba trokut-zvijezda (5)

Uvrštavanjem struje I_{12} u jednadžbu (11a) dobiva se:

$$I_1 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} - I_2 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Delta}} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \quad (17a)$$

Analognim postupkom eliminacije i uvrštavanjem u jednadžbe (11b) i (11c) dobiva se:

$$I_2 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Delta}} - I_3 \cdot \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 \quad (17b)$$

$$I_3 \cdot \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} - I_1 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 \quad (17c)$$

Pretvorba trokut-zvijezda (6)

- Sustav jednadžbi (11a-c) prelazi u jednakosti kad je:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Delta}}; \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} \quad (18)$$

čije je važno svojstvo:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = \frac{R_{12}^2}{R_{\Delta}} \quad (18a)$$

$$\frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = \frac{R_{23}^2}{R_{\Delta}} \quad (18b)$$

$$\frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} = \frac{R_{31}^2}{R_{\Delta}} \quad (18c)$$

- ♦ Relacije (18) kazuje kako se s poznatim otporima trokuta dobivaju otpori ekvivalentne zvijezde.

Pretvorba zvijezde u trokut

- Poznanice: R_1, R_2, R_3
- Nepoznanice: R_{12}, R_{23}, R_{31}

U jednadžbi (11a) eliminiraju se struje I_1 i I_2 zamjenom

$I_1 = I_{12} - I_{31}$ i $I_2 = I_{23} - I_{12}$ (12a i b), te se dobiva:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = I_{12} \cdot (R_1 + R_2) - (I_{23} \cdot R_2 + I_{31} \cdot R_1) \quad (19)$$

U drugom dijelu dobivenog izraza zamijeni se

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} \quad \text{i} \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Delta}} \quad (18), \text{ iskoristi}$$

(13) u obliku $I_{12} \cdot R_{12} = -(I_{23} \cdot R_{23} + I_{31} \cdot R_{31})$, pa se dobiva:

$$I_{23} \cdot R_2 + I_{31} \cdot R_1 = -I_{12} \cdot \frac{R_{12}^2}{R_{\Delta}} = -I_{12} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad \text{prema (18a)}$$

Pretvorba zvijezde u trokut (2)

Nakon ovoga sređivanjem (19) dobiva se:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad (19a)$$

Primjenom analognog postupka na U_{23} i U_{31} dobiva se:

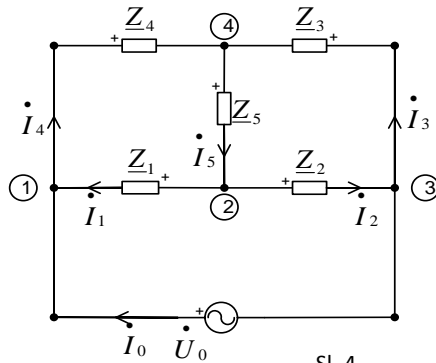
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \quad (19b)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \quad (19c)$$

Relacije (19 a-c) kazuju kako se s poznatim otporima zvijezde dobivaju otpori ekvivalentnog trokuta.

Pretvorba zvijezde u trokut, i obrnuto, omogućuje da se svaki mosni spoj pretvori u serijsko-paralelnu kombinaciju otpora.

Mosni spoj sa sinusnom pobudom

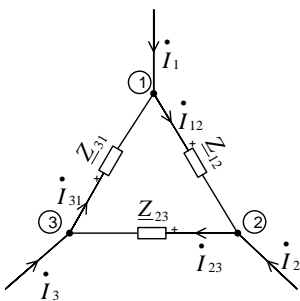


Sl. 4

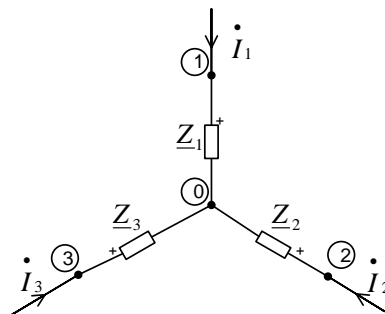
Uvjet ravnoteže mosta:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 - \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4 = 0; \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3} \quad (20)$$

Pretvorbe trokut-zvijezda



Sl. 4a: Trokut



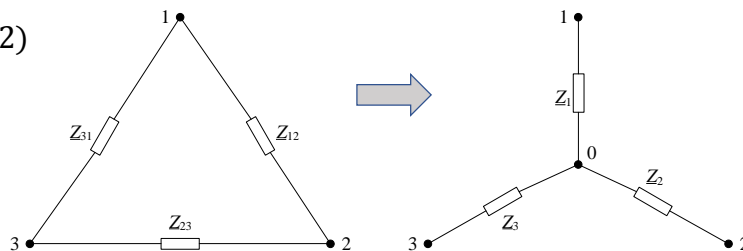
Sl. 4b: Zvijezda

Pretvorba trokuta u zvijezdu

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{\Delta}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{\Delta}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{\Delta}} \quad (21)$$

Gdje je:

$$\underline{Z}_{\Delta} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} \quad (22)$$

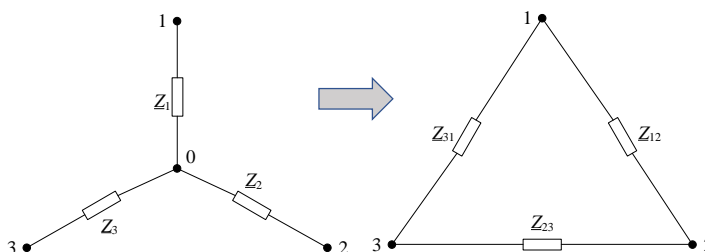


Pretvorba zvijezde u trokut

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \quad (23a)$$

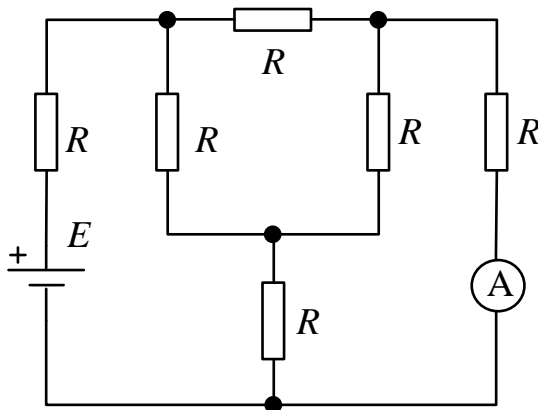
$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} \quad (23b)$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \quad (23c)$$



Primjer

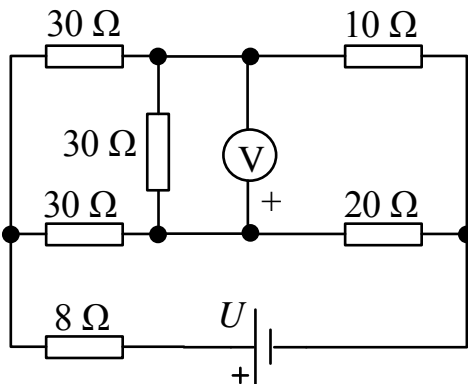
- Odredite struju koju mjeri ampermetar. Zadano: $R = 2\ \Omega$, $E = 8\text{ V}$.



Rješenje: $I_A = 1\text{ A}$

Primjer

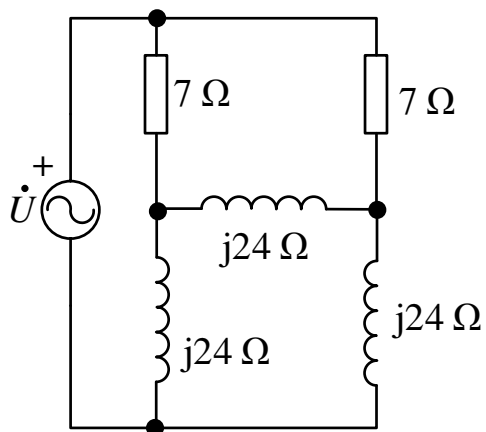
- U spoju prema slici voltmetar pokazuje $U_V = 5\text{ V}$ označenog polariteta. Odredite napon izvora U .



Rješenje: $U = 75\text{ V}$

Primjer

- Odredite radnu snagu P koja se razvija u mreži prema slici. Zadano $\dot{U} = 50 \text{ V}$.



Rješenje: $P = 56 \text{ W}$