

8. Snaga izmjenične struje



© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/hr/).



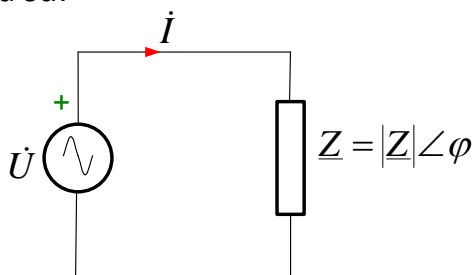
Izračun snage u vremenskom području

- Fazori napona izvora i struje izvora su:

$$\dot{U} = U \angle \alpha_u$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \angle \alpha_u}{|Z| \angle \varphi} = I \angle \alpha_i$$

$$I = \frac{U}{|Z|} ; \alpha_i = \alpha_u - \varphi$$



- Napon i struja u vremenu su:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_u) ; i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha_i)$$

Trenutna snaga na impedanciji

- Trenutna snaga na impedanciji je:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \sin(\omega t + \alpha_u) \sin(\omega t + \alpha_i)$$

- Vrijedi: $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

- pa je trenutna snaga:

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \{\cos(\alpha_u - \alpha_i) - \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)\}$$

$$p(t) = U_{ef} I_{ef} \{\cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)\}$$

Trenutna snaga na impedanciji

- Trenutna snaga $p(t) = U_{ef} I_{ef} \{\cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)\}$ sadrži:

- konstantni član: $p(t) = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi$

- sinusno promjenjivi član (s 2ω):

$$p(t) = -U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)$$

Za $\alpha_u = 0$, $\alpha_i = -\varphi$, sinusno promjenjivi član je:

$$p(t) = -U_{ef} I_{ef} \cos(2\omega t - \varphi)$$

Trenutna i srednja vrijednost snage

- Trenutna snaga u vremenu je:

- $p(t) > 0$ – energija se iz izvora predaje trošilu
- $p(t) < 0$ – energija se iz trošila vraća izvoru
 - to je energija pohranjena u kapacitetima (električnom polju) i induktivitetima (magnetskom polju) trošila

- Srednja vrijednost snage je:

$$P_{sr} = P = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T p(t) dt = \frac{1}{T} U_{ef} I_{ef} \int_{t=0}^T \{\cos \varphi - \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)\} dt$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (\text{W})$$

- Srednja vrijednost snage izmjenične struje je **korisna** ili **radna** snaga.

Uvijek je: $P \leq U \cdot I$

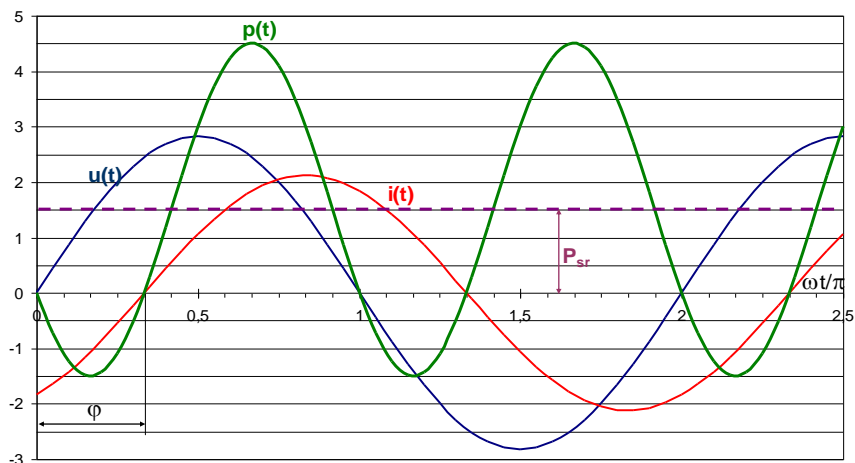
Primjer:

- Odredite trenutnu i srednju vrijednost snage ako je zadano:

$$\dot{U} = 2 \angle 0^\circ;$$

$$\underline{Z} = \frac{4}{3} \angle 60^\circ;$$

$$\dot{I} = 1,5 \angle -60^\circ$$



Faktor snage

- Uvodi se **faktor snage**: $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$
- Ako se u krugu iznos impedancije ne mijenja, a mijenja se njezin kut φ , onda se ne mijenja niti iznos struje, ali se promjenom kuta impedancije mijenja radna snaga
- Produkt efektivnih vrijednosti napona i struje samo prividno predočava snagu u krugu, pa se naziva **prividna snaga**:

$$S = U \cdot I \text{ (VA)}$$

Radna, jalova i prividna snaga

- Trenutna snaga može se izraziti i na sljedeći način:

- Za $\alpha_u=0$, $\alpha_i = -\varphi$ trenutna snaga je:

$$p(t) = U \cdot I \{\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\}$$

- Vrijedi: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$\cos(2\omega t - \varphi) = \cos(2\omega t) \cdot \cos \varphi + \sin(2\omega t) \cdot \sin \varphi$$

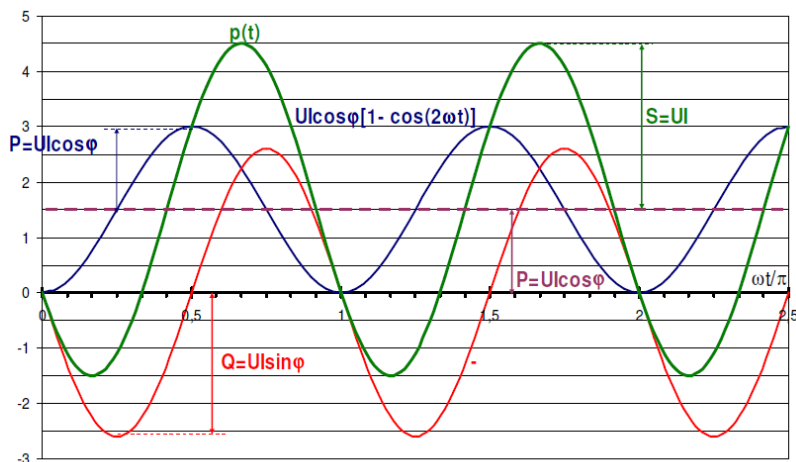
- Trenutna je snaga:

$$p(t) = (U \cdot I \cdot \cos \varphi)(1 - \cos(2\omega t)) - (U \cdot I \cdot \sin \varphi) \sin(2\omega t)$$

- Prvi član je sinusna funkcija, amplitude $U I \cos \varphi$ koja oscilira dvostrukom frekvencijom oko radne snage $P = U I \cos \varphi$
- Drugi član je sinusna funkcija, amplitude $Q = U I \sin \varphi$ koja oscilira dvostrukom frekvencijom oko nulte srednje vrijednosti

Radna, jalova i prividna snaga – grafički prikaz

- Prikažimo grafički $p(t) = (U \cdot I \cdot \cos \varphi)(1 - \cos(2\omega t)) - (U \cdot I \cdot \sin \varphi) \sin(2\omega t)$



Radna, jalova i prividna snaga

- Član $Q = U I \sin \varphi$ predstavlja nekorisnu, **jalovu (reaktivnu) snagu** koja se izmjenjuje između izvora i trošila:
 $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$ (VAr)
 - za $\varphi > 0$ (induktivno ponašanje):
 - $Q > 0$ – trošilo jalove snage
 - za $\varphi < 0$ (kapacitivno ponašanje):
 - $Q < 0$ – izvor jalove snage
- Jalova snaga (energija) koja oscilira između izvora i trošila nepotrebno opterećuje izvore el. energije i prijenosne sustave pa se nastoji minimizirati, odnosno stvoriti na mjestu trošila koja trebaju jalovu snagu

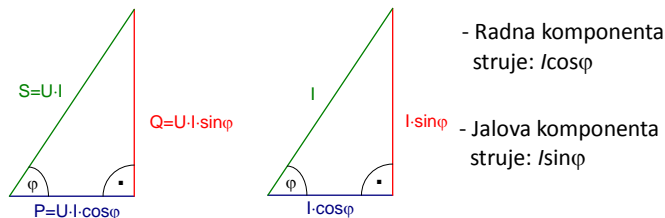
Radna, jalova i prividna snaga

- Jalova energija potrebna za rad trošila (koja su uglavnom induktivna) priskrbljuje se iz kondenzatora dodanih uz trošilo – **kompenczacija jalove energije**

- Vrijedi: $S = U \cdot I$
 $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$; $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$

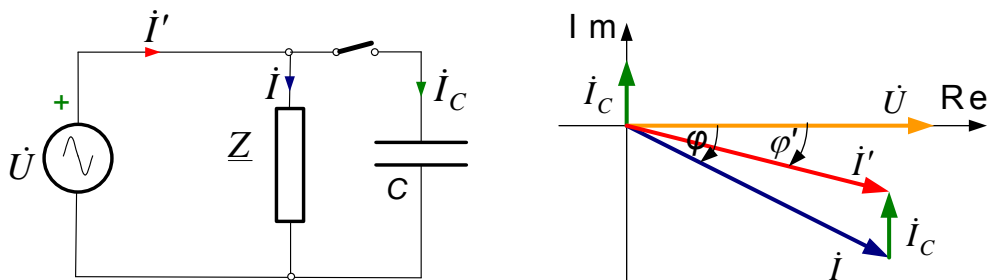
- pa je: $P = S \cdot \cos \varphi$; $Q = S \cdot \sin \varphi$

- Slikovito se snage mogu prikazati preko pravokutnog trokuta – **trokut snaga**:



Primjer

- Odrediti koliki treba biti kapacitet C kondenzatora kojeg dodajemo paralelno trošilu impedancije $\underline{Z} = 20 \angle 30^\circ \ (\Omega)$ da bi faktor snage trošila povećali na 0,95? Napon izvora iznosi 120 V, uz $f = 50$ Hz.



Izračun snage u kompleksnom području

- Neka su zadani fazori napona i struje:

$$\dot{U} = Ue^{j\alpha_u} \quad ; \quad \dot{I} = Ie^{j\alpha_i} \quad ; \quad \varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

- Kompleksna prividna snaga je:

$$\underline{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^*$$

$$\underline{S} = Ue^{j\alpha_u} \cdot Ie^{-j\alpha_i} = U \cdot Ie^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = U \cdot Ie^{j\varphi}$$

- gdje je \dot{I}^* konjugirano kompleksni broj od fazora struje \dot{I}

- Kompleksna prividna snaga u pravokutnom obliku je:

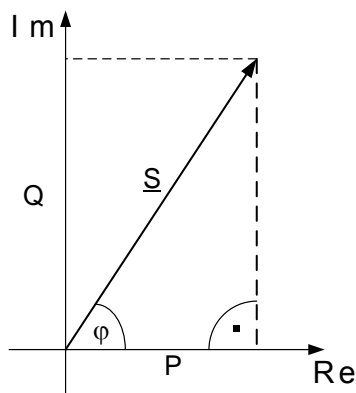
$$\underline{S} = U \cdot I(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ$$

$$P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\} = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\} = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Prikaz radne, jalove i prividne snage

- Prividna snaga može se prikazati u kompleksnoj ravnini:



Snaga serijskog spoja

- Fazor napona može se prikazati preko impedancije:

$$\underline{\dot{U}} = \underline{\dot{I}} \cdot \underline{Z} \quad ; \quad \underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$$

- Kompleksna prividna snaga je (uz $\underline{\dot{I}} \cdot \underline{\dot{I}}^* = |\underline{\dot{I}}|^2$):

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{I}}^* = \underline{\dot{I}} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{\dot{I}}^* = |\underline{\dot{I}}|^2 \cdot \underline{Z} = |\underline{\dot{I}}|^2 (R + jX) = |\underline{\dot{I}}|^2 \cdot R + j \cdot |\underline{\dot{I}}|^2 \cdot X$$

$$\underline{S} = P + jQ \quad ; \quad P = |\underline{\dot{I}}|^2 \cdot R \quad ; \quad Q = |\underline{\dot{I}}|^2 \cdot X$$

- Za serijski spoj od n impedancija Z_i vrijedi:

$$\underline{\dot{U}} = \underline{\dot{U}}_1 + \underline{\dot{U}}_2 + \dots + \underline{\dot{U}}_i + \dots + \underline{\dot{U}}_n = \sum_{i=1}^n \underline{\dot{U}}_i$$

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{I}}^* = \sum_{i=1}^n \underline{\dot{U}}_i \cdot \underline{\dot{I}}^* = \sum_{i=1}^n \underline{S}_i = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i) = \sum_{i=1}^n P_i + j \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$|\underline{S}| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Q_i \right)^2}$$

Snaga paralelnog spoja

- Fazor struje može se prikazati preko admitancije:

$$\underline{\dot{I}} = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{Y} \quad ; \quad \underline{Y} = G + jB = |\underline{Y}|e^{j\psi}$$

- Kompleksna prividna snaga je (uz $\underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{U}}^* = |\underline{\dot{U}}|^2$):

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{I}}^* = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{U}}^* \underline{Y}^* = |\underline{\dot{U}}|^2 \cdot \underline{Y}^* = |\underline{\dot{U}}|^2 (G - jB) = |\underline{\dot{U}}|^2 \cdot G - j \cdot |\underline{\dot{U}}|^2 \cdot B$$

$$\underline{S} = P + jQ \quad ; \quad P = |\underline{\dot{U}}|^2 \cdot G \quad ; \quad Q = -|\underline{\dot{U}}|^2 \cdot B$$

- Za paralelni spoj od n admitancija Y_i vrijedi:

$$\underline{\dot{I}} = \underline{\dot{I}}_1 + \underline{\dot{I}}_2 + \dots + \underline{\dot{I}}_i + \dots + \underline{\dot{I}}_n = \sum_{i=1}^n \underline{\dot{I}}_i$$

$$\underline{S} = \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{I}}^* = \sum_{i=1}^n \underline{\dot{U}} \cdot \underline{\dot{I}}_i^* = \sum_{i=1}^n \underline{S}_i = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i) = \sum_{i=1}^n P_i + j \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$|\underline{S}| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Q_i \right)^2}$$

Primjeri

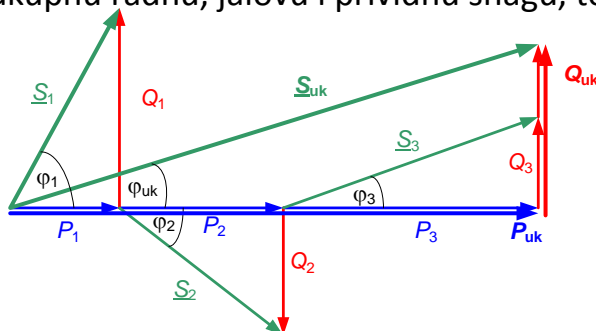
2. Na izvor napona $\dot{U} = 100 \angle 30^\circ$ (V) priključena je impedancija $\underline{Z} = 3 + j4$ (Ω). Odrediti radnu, jalovu i prividnu snagu.
3. Paralelno su spojene dvije impedancije $\underline{Z}_1 = 2 - j5$ (Ω) i $\underline{Z}_2 = 1 + j$ (Ω). Snaga na otporniku impedancije \underline{Z}_1 je 20 W. Odrediti ukupnu jalovu snagu.
4. Napon i struja nekog dvopola su:
 $u(t) = 100 \sin(\omega t)$ (V) ; $i(t) = 5 \sin(\omega t - \pi/3)$ (A)
Odrediti impedanciju dvopola, prividnu, radnu i jalovu snagu.

Primjeri

5. Na izvor su paralelno priključena tri trošila:

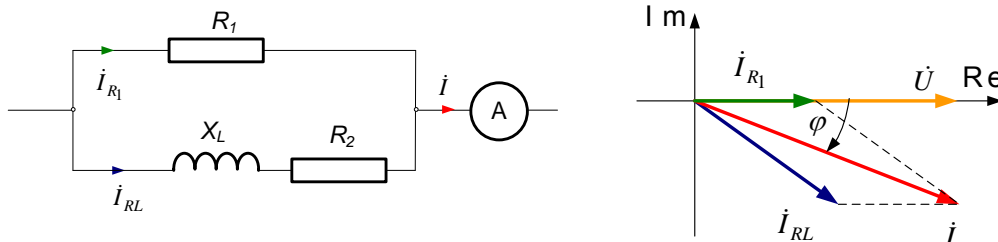
1. 250 VA, $\cos \varphi = 0,5$ (ind)
2. 180 W, $\cos \varphi = 0,8$ (kap)
3. 300 VA, 100 VAR (ind)

Odrediti ukupnu radnu, jalovu i prividnu snagu, te $\cos \varphi$.



Primjeri

6. Kolika je struja ampermetra u krugu na slici ako je ukupna radna snaga $P_{uk}=1100 \text{ W}$? Zadano je: $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $X_L = 4 \Omega$.



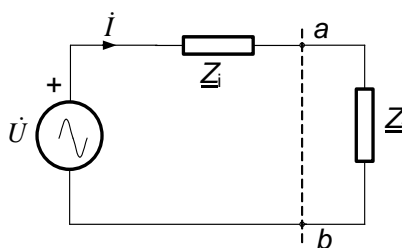
Teorem prijenosa maksimalne snage

- Priključak trošila promjenjive impedancije \underline{Z}_t na realni naponski izvor unutarnje impedancije \underline{Z}_i :

$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i \quad ; \quad \underline{Z}_t = R_t + jX_t$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_t} = \frac{\dot{U}}{(R_i + R_t) + j(X_i + X_t)}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2}}$$



- Snaga na trošilu:

$$P_t = I^2 \cdot R_t = U^2 \frac{R_t}{(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2} = f(R_t, X_t)$$

Teorem prijenosa maksimalne snage

- Za određivanje maksimuma snage trošila treba parcijalne derivacije snage po varijablama R_t i X_t izjednačiti s nulom:

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t} = U^2 \frac{(R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2 - R_t \cdot 2(R_i + R_t)}{\left((R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2\right)^2} = 0$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial X_t} = U^2 \frac{-R_t \cdot 2(X_i + X_t)}{\left((R_i + R_t)^2 + (X_i + X_t)^2\right)^2} = 0$$

- Maksimum snage trošila nastupa kad je:

$$\frac{\partial P_t}{\partial X_t} = 0 \Rightarrow X_t = -X_i \quad ; \quad \frac{\partial P_t(X_t = -X_i)}{\partial R_t} = 0 \Rightarrow R_t = R_i$$

$$\underline{Z}_t = R_i - jX_i \quad ; \quad \underline{Z}_t = \underline{Z}_i^*$$

Teorem prijenosa maksimalne snage

- Ako je trošilo sastavljeno samo od radnog otpora R_t ili se samo on može mijenjati, maksimalna snaga na otporu postiže se kad je:

$$R_i^2 - R_t^2 + (X_i + X_t)^2 = 0 \quad ; \quad R_t = \sqrt{R_i^2 + (X_i + X_t)^2}$$

- za $X_t = 0$:

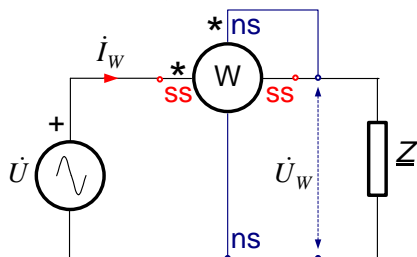
$$R_t = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |\underline{Z}_i|$$

- Ako je trošilo sastavljeno samo od reaktancije X_t ili se samo ona može mijenjati, maksimalna snaga na otporu postiže se kad je:

$$X_t = -X_i$$

Mjerenje snage izmjenične struje

- Vatmetar u izmjeničnoj mreži mjeri snagu koja je određena s:



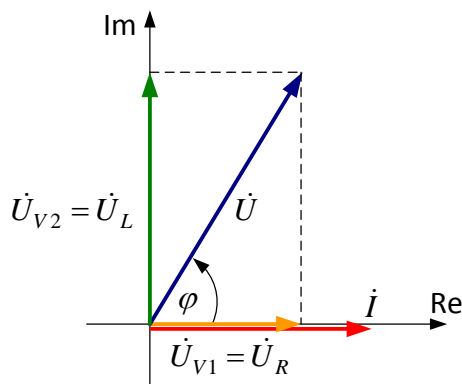
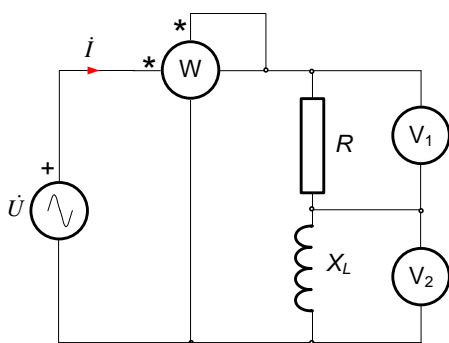
$$P_W = U_W \cdot I_W \cdot \cos \angle \dot{U}_W, \dot{I}_W$$

* označavaju referentne vrijednosti polariteta napona i smjera struje

- Pokazivanje vatmetra razmjerno je iznosu napona na naponskim stezaljkama vatmetra U_W , struji kroz strujne stezaljke vatmetra I_W i kosinusu kuta između fazora napona na vatmetru i struje kroz vatmetar

Primjeri

7. Ako instrumenti u krugu pokazuju $U_{V1}=30$ V, $U_{V2}=50$ V i $P_W=30$ W, odrediti R , X_L i napon izvora U .



Primjeri

8. Serijski su spojeni otpor $R = 5 \, \Omega$ i impedancija $3 + j4 \, \Omega$. Odredite radnu snagu spoja ako jalova snaga spoja iznosi $100 \, \text{VAr}$ (ind.).
9. Faktor snage otpora i kapaciteta spojenih paralelno iznosi $\cos \varphi = 0,5$. Koliki je faktor snage ako ih spojimo serijski ?
10. Maksimalna trenutna snaga trošila iznosi $p_{\text{maks}}(t) = 300 \, \text{W}$, a minimalna $p_{\text{min}}(t) = -100 \, \text{W}$. Odredite radnu snagu, reaktivnu (jalovu) snagu i faktor snage ?

Primjeri

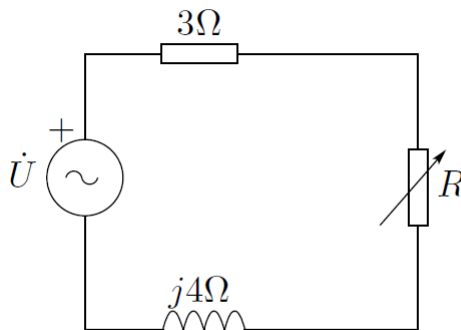
11. Na idealni naponski izvor priključen je serijski RC spoj. Što se događa s radnom snagom spoja ako frekvencija izvora pada?
12. Na idealni naponski izvor priključen je paralelni RL spoj. Što se događa s radnom snagom spoja ako frekvencija izvora raste?

Primjeri

13. Serijski su spojeni $R = 5 \Omega$ i induktivitet $X_L = 15 \Omega$. Napon na otporu je $31,6 \text{ V}$. Kolika je snaga spoja izražena u kompleksnom obliku?
14. Na impedanciju $\underline{Z} = 8 + j6 \Omega$ priključen je napon $U = 70,7 \text{ V}$. Odredite iznos radne snage.

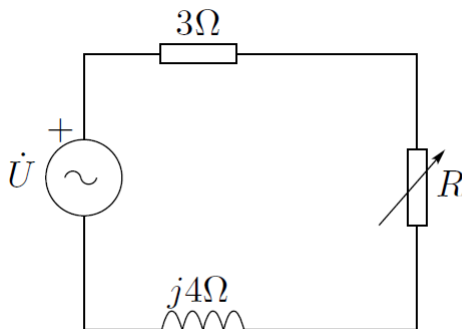
Primjeri

15. Odredite iznos promjenjivog otpora R za koji je radna snaga trošila najveća moguća?



Primjeri

16. Odredite kao se mijenja radna snaga na trošilu ako se iznos otpora R smanjuje od $8\ \Omega$ do $2\ \Omega$?



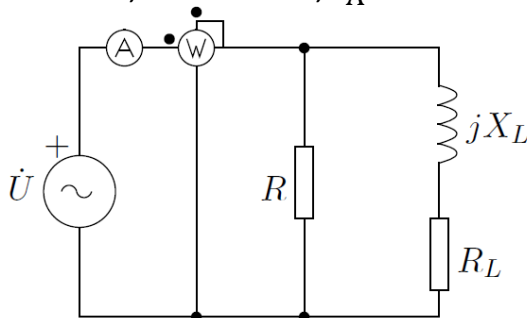
Primjeri

17. Trošilo sastavljeno od serijskog spoja kapacitivnog otpora X_C i radnog otpora R_t priključeno je na izvor napona \dot{U} i unutrašnje impedancije \underline{Z}_i . Odredite iznos otpora R_t takav da se na njemu razvija maksimalna snaga ako se otpor trošila R_t mijenja u granicama od R_1 do R_2 . Zadano: $U = 110\text{ V}$, $\underline{Z}_i = 4\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \Omega$, $X_C = 10\ \Omega$, $R_1 = 40\ \Omega$ i $R_2 = 80\ \Omega$

Primjeri

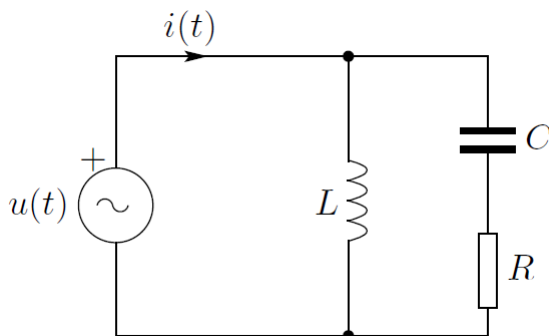
18. Trošilo se sastoji od serije otpora R_L i zavojnice X_L u paralelu s otporom R . Serija R_L i X_L predstavlja realnu zavojnicu–svitak. Ako su zadana pokazivanja instrumenata i frekvencija izvora f odredite parametre zavojnice R_L i X_L . Zadano:

$U = 100 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 600 \Omega$, $I_A = 230 \text{ mA}$ i $P_W = 17,6 \text{ W}$.



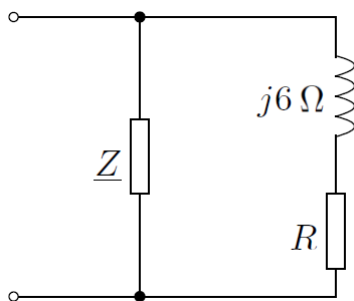
Primjeri

19. U krugu prema slici napon i struja su oblika: $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t)$. Odredite L i C . Zadano: $U_m = 100 \text{ V}$, $I_m = 2,5 \text{ A}$, $\omega = 500 \text{ s}^{-1}$ i $R = 20 \Omega$.



Primjeri

20. Izračunajte \underline{Z} u spoju prema slici ako je snaga na otporu $R = 3 \Omega$ jednaka $P_R = 666 \text{ W}$. Ukupna prividna snaga spoja iznosi $S_{\text{uk}} = 3370 \text{ VA}$, a faktor snage spoja je $\cos \varphi = 0,937$ (kap.).



Rješenja primjera 1. – 7.

1. $C = 34,27 \mu\text{F}$
2. $P = 1200 \text{ W}$, $Q = 1600 \text{ VAr (ind.)}$, $S = 2000 \text{ VA}$
3. $Q = 95 \text{ VAr (ind.)}$
4. $\underline{Z} = 20 \angle 60^\circ \Omega$, $P = 125 \text{ W}$, $Q = 216,51 \text{ VAr (ind.)}$, $S = 250 \text{ VA}$
5. $P = 587,84 \text{ W}$, $Q = 181,51 \text{ VAr (ind.)}$, $S = 615,23 \text{ VA}$
6. $I_A = 19,24 \text{ A}$
7. $U = 58,31 \text{ V}$, $R = 30 \Omega$, $X_L = 50 \Omega$

Rješenja primjera 8. – 14.

- 8. $P = 200 \text{ W}$
- 9. $\cos \varphi_{\text{serija}} = 0,5\sqrt{3}$
- 10. $P = 100 \text{ W}, Q = 100\sqrt{3} \text{ VAr}, \cos \varphi = 0,5$
- 11. P pada
- 12. P ostaje isti
- 13. $\underline{S} = 200 + j600 \text{ VA}$
- 14. $P = 400 \text{ W}$

Rješenja primjera 15. – 20.

- 15. $R = 5 \Omega$
- 16. raste pa pada
- 17. $R_t = 40 \Omega$
- 18. $L = 2,14 \text{ H}, R = 42 \Omega$
- 19. $L = 80 \text{ mH}, C = 100 \mu\text{F}$
- 20. $\underline{Z} = 2 - j2 \Omega$