



## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

# 4. Realni izvori, snaga i mjerni instrumenti

© [Sveučilište u Zagrebu](#) · [Fakultet elektrotehnike i računarstva](#)  
[Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja](#)



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](#).

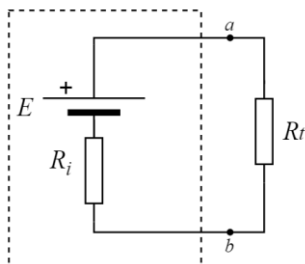


## Realni izvori

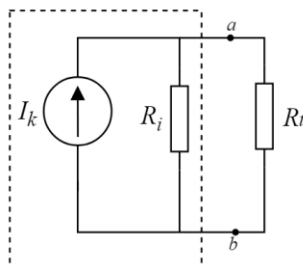
- ponašanje **idealnih izvora** ne ovisi o priključenom trošilu
  - **idealni naponski izvor** uvijek ima isti napon na priključnicama
  - **idealni strujni izvor** uvijek daje istu jakost struje u krug
- **realni izvori** su fizičke komponente sačinjene od elemenata koji **sadrže otpore**
  - unutar izvora dolazi do gubitaka energije
  - kod realnog naponskog izvora napon na priključnicama nije konstantan
  - kod realnog strujnog izvora jakost struje nije konstantna
- uvodimo pojam **unutarnjeg otpora  $R_i$**

## Modeli realnih izvora

- **realni naponski izvor** modeliramo kao **serijski spoj** idealnog naponskog izvora  $E$  i unutarnjeg otpora  $R_i$
- **realni strujni izvor** modeliramo kao **paralelni spoj** idealnog strujnog izvora unutarnje struje  $I_k$  i unutarnjeg otpora  $R_i$



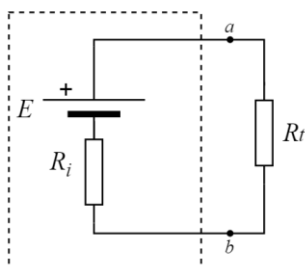
realni naponski izvor



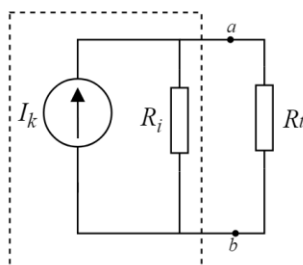
realni strujni izvor

## Primjer 1

- za koje vrijednosti  $R_i$  realni izvori postaju idealni?



realni naponski izvor

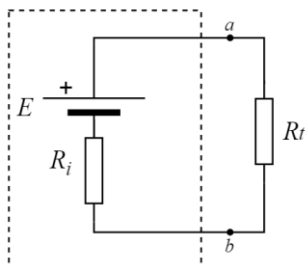


realni strujni izvor

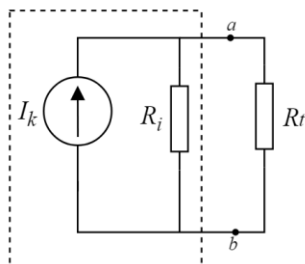
## Primjer 1

- za koje vrijednosti  $R_i$  realni izvori postaju idealni?

- realni naponski izvor:  $R_i = 0$
- realni strujni izvor:  $R_i \rightarrow \infty$



realni naponski izvor



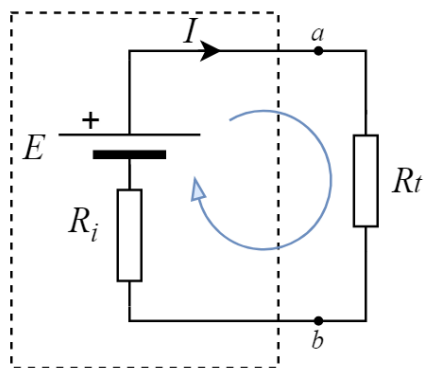
realni strujni izvor

## Realni naponski izvor: napon i struja na trošilu

$$E = I \cdot R_t + I \cdot R_i = U_{ab} + I \cdot R_i$$

$$U_{ab} = I \cdot R_t = \frac{E}{R_i + R_t} \cdot R_t = \frac{E \cdot R_t}{R_i + R_t}$$

$$I_{ab} = I = \frac{E}{R_i + R_t}$$



## Realni naponski izvor: struja kratkog spoja i napon praznog hoda

- za  $R_t = 0$  (kratki spoj)

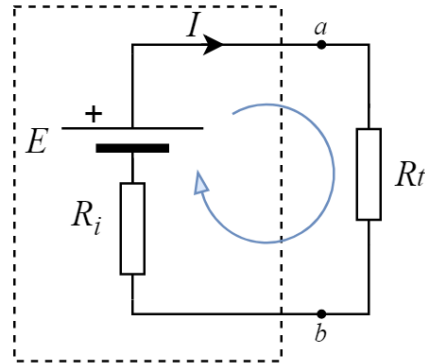
$$U_{ab} = I \cdot R_t = 0$$

$$I_{ab} = \frac{E}{R_i + R_t} = \frac{E}{R_i} = I_k \text{ struja kratkog spoja}$$

- za  $R_t \rightarrow \infty$  (prazan hod)

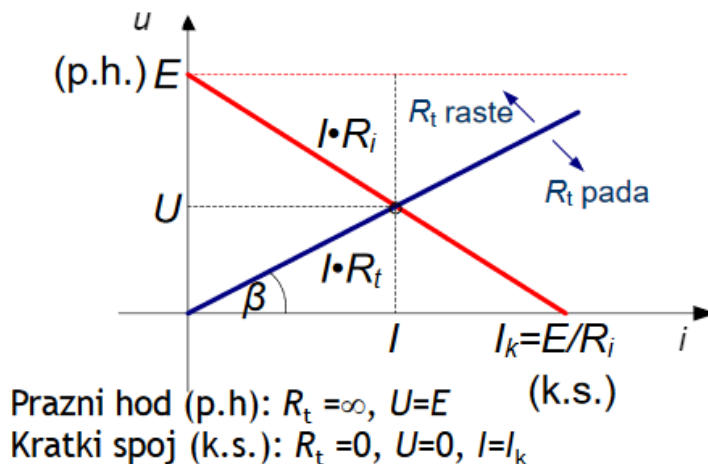
$$U_{ab} = \lim_{R_t \rightarrow \infty} \frac{E \cdot R_t}{R_i + R_t} = \lim_{R_t \rightarrow \infty} \frac{E}{\frac{R_i}{R_t} + 1} = E$$

$$I_{ab} = \lim_{R_t \rightarrow \infty} (I) = \lim_{R_t \rightarrow \infty} \frac{E}{R_i + R_t} = 0$$



kod praznog hoda struje nema, napon na priključnicama jednak je unutarnjem naponu  $E$

## Naponsko-strujna karakteristika realnog naponskog izvora



## Primjer 2

---

- Ako je napon praznog hoda realnog naponskog izvora 5 V, a struja kratkog spoja 0,1 A, koliko iznosi unutarnji otpor izvora?

## Primjer 2

---

- Ako je napon praznog hoda realnog naponskog izvora 5 V, a struja kratkog spoja 0,1 A, koliko iznosi unutarnji otpor izvora?

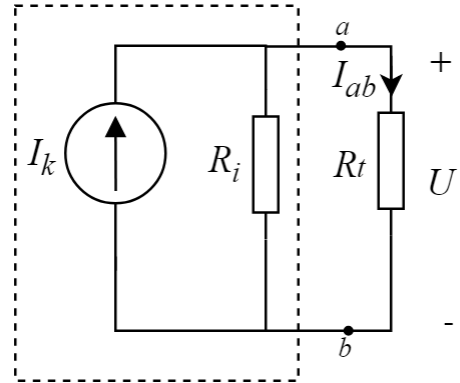
$$U_{ph} = E = 5V$$

$$I_{ks} = E/R_i \Rightarrow R_i = E/I_{ks} = 5/0,1 = 50\Omega$$

## Realni strujni izvor: napon i struja na trošilu

$$U_{ab} = U = \frac{I_k}{G_i + G_t}$$

$$I_{ab} = \frac{U}{R_t} = U \cdot G_t = \frac{I_k}{G_i + G_t} \cdot G_t = I_k \cdot \frac{G_t}{G_i + G_t}$$



## Realni strujni izvor: struja kratkog spoja i napon praznog hoda

- za  $R_t = 0$  (tj.  $G_t \rightarrow \infty$ , kratki spoj)

$$U_{ab} = \lim_{G_t \rightarrow \infty} \frac{I_k}{G_i + G_t} = 0$$

kod kratkog spoja  
sva struja ide kroz  
granu trošila

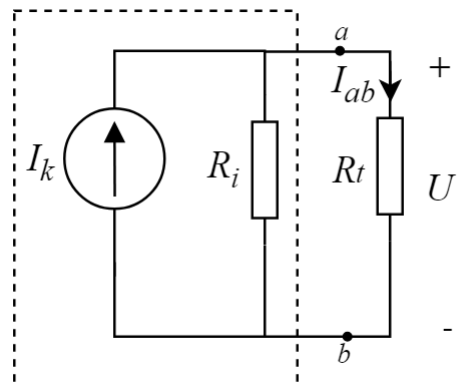
$$I_{ab} = \lim_{G_t \rightarrow \infty} I_k \cdot \frac{G_t}{G_i + G_t} = \lim_{G_t \rightarrow \infty} \frac{I_k}{\frac{G_i}{G_t} + 1} = I_k$$

- za  $R_t \rightarrow \infty$  (tj.  $G_t = 0$ , prazan hod)

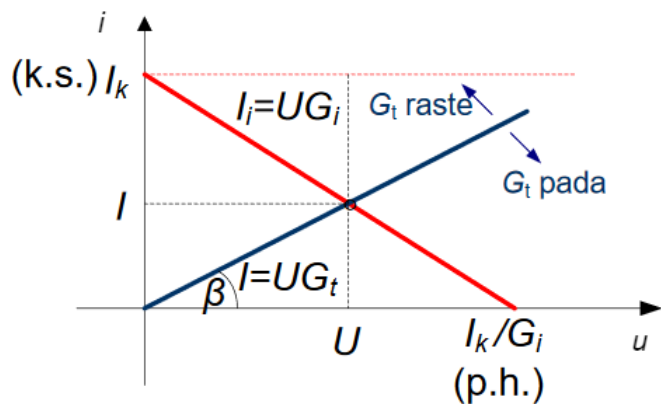
$$U_{ab} = \frac{I_k}{G_i + G_t} = \frac{I_k}{G_i} = U_{ph}$$

napon praznog hoda

$$I_{ab} = I_k \cdot \frac{G_t}{G_i + G_t} = 0$$



## Strujno-naponska karakteristika realnog strujnog izvora



Prazni hod (p.h):  $R_t = \infty$ ,  $I = 0$   
 Kratki spoj (k.s.):  $R_t = 0$ ,  $I = I_k$

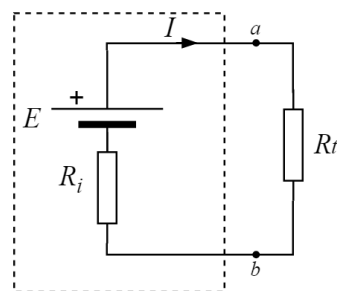
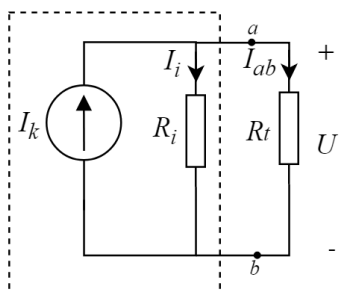
## Transformacija realnih izvora

$$I_{ab} = I_k - I_i = I_k - \frac{U_{ab}}{R_i}$$



$$U_{ab} = E - I \cdot R_i$$

$$I_{ab} = \frac{E}{R_i} - \frac{U_{ab}}{R_i}$$

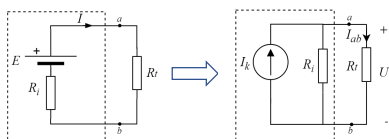


## Transformacija realnih izvora

- svaki realni naponski izvor možemo transformirati u strujni (i obrnuto), a da se strujno-naponske prilike u ostatku mreže ne promjene
- pravila za transformaciju su sljedeća:

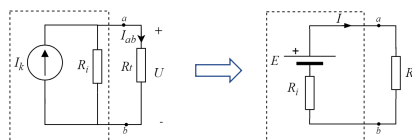
realni naponski  $\Rightarrow$  realni strujni

- 1)  $R_i$  ostaje isti
- 2)  $I_k = E/R_i$



realni strujni  $\Rightarrow$  realni naponski

- 1)  $R_i$  ostaje isti
- 2)  $E = I_k \cdot R_i$



## Primjer 3

- a) transformirajte realni naponski izvor sa karakteristikama  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R_i = 5 \Omega$  u realni strujni izvor
- b) na oba izvora priključite trošilo od  $R_t = 15 \Omega$  te za oba slučaja izračunajte napon i struju kroz trošilo

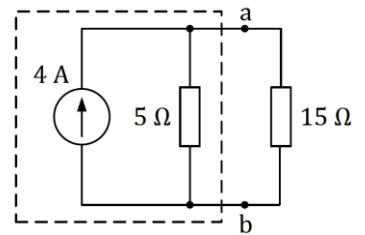
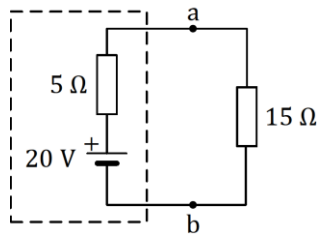


### Primjer 3

- a) transformirajte realni naponski izvor sa karakteristikama  $E = 20\text{ V}$ ,  $R_i = 5\ \Omega$  u realni strujni izvor

$$I = E/R_i = 20/5 = 4\text{ A}$$

$R_i$  se ne mijenja



### Primjer 3

- b) na oba izvora priključite trošilo od  $R_l = 15\ \Omega$  te za oba slučaja izračunajte napon i struju kroz trošilo

naponski izvor:

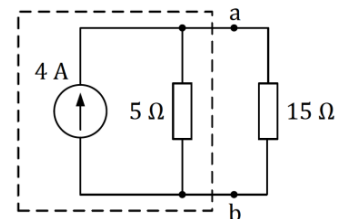
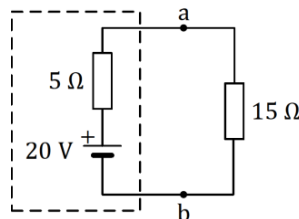
$$I_{ab} = 20/(5 + 15) = 1\text{ A}$$

$$U_{ab} = 1 \cdot 15 = 15\text{ V}$$

strujni izvor:

$$U_{ab} = 4 \cdot ((5 \cdot 15)/(5 + 15)) = 15\text{ V}$$

$$I_{ab} = 15/15 = 1\text{ A}$$



## Primjer 4

Unutarnji napon naponskog izvora je  $E = 30\text{ V}$ . Kad se na izvor priključi trošilo otpora  $R$ , struja u krugu je  $I = 3\text{ A}$ , a napon na stezaljkama izvora  $U = 18\text{ V}$ . Odrediti otpor trošila  $R$  i unutarnji otpor izvora  $R_i$ .

## Primjer 4

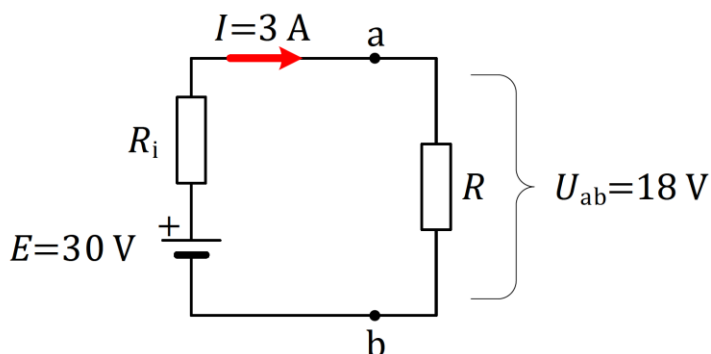
Unutarnji napon naponskog izvora je  $E = 30\text{ V}$ . Kad se na izvor priključi trošilo otpora  $R$ , struja u krugu je  $I = 3\text{ A}$ , a napon na stezaljkama izvora  $U = 18\text{ V}$ . Odrediti otpor trošila  $R$  i unutarnji otpor izvora  $R_i$ .

$$E = 30\text{V}; U_{ab} = 18\text{V}; I = 3\text{A}$$

$$R = 18/3 = 6\Omega$$

$$U_{R_i} = E - U_{ab} = 12\text{V}$$

$$R_i = U_{R_i}/I = 4\Omega$$



## Snaga u istosmjernim strujnim krugovima (ponavljanje)

- (ponavljanje) **električna snaga** na element kruga jednaka je **umnošku trenutnog iznosa napona i struje** na tom elementu:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- kod istosmjernog strujnog kruga u stacionarnom stanju napon i struja na elementima su konstantni, tako da je i snaga na elementu konstantna:

$$P = U \cdot I$$

- ista formula vrijedi i za snagu koja se daje u krug i za snagu koja se troši
  - ako je gledani element idealni izvor, radi se o snazi koju izvor daje u krug
  - ako je gledani element trošilo, radi se o snazi koja se troši na tom elementu

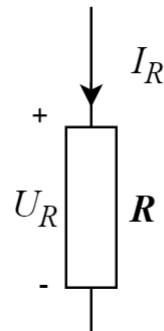
## Snaga koja se troši na otporniku (ponavljanje)

- ako nam je poznat otpor  $R$ , te jedna od veličina na njemu (napon  $U_R$  na priključnicama ili struja  $I_R$  kroz otpor), onda snagu koja se troši na otporniku možemo izračunati preko sljedećih izraza:

$$P = U_R \cdot I_R = U_R \cdot (U_R/R) = U_R^2/R$$

ili

$$P = U_R \cdot I_R = (R \cdot I_R) \cdot I_R = R \cdot I_R^2$$



## Primjer 5

Na idealni naponski izvor od 15 V serijski su priključena dva otpornika od  $5\ \Omega$  i  $10\ \Omega$ . Izračunajte iznos snage koju izvor daje u krug te iznose snaga koje se troše na otpornicima. Uvjerite se da je ukupan iznos snage dane u krug jednak ukupnom potrošenom iznosu snage.

## Primjer 5

Na idealni naponski izvor od 15 V serijski su priključena dva otpornika od  $5\ \Omega$  i  $10\ \Omega$ . Izračunajte iznos snage koju izvor daje u krug te iznose snaga koje se troše na otpornicima. Uvjerite se da je ukupan iznos snage dane u krug jednak ukupnom potrošenom iznosu snage.

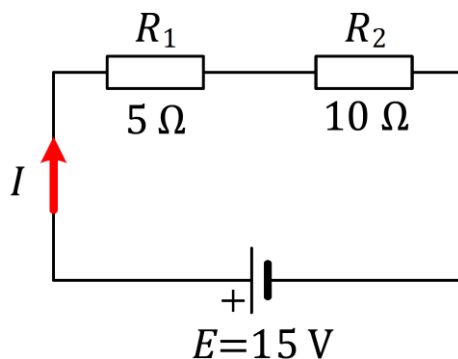
$$I = E / (R_1 + R_2) = 1\text{ A}$$

$$P_{izv} = E \cdot I = 15\text{ W}$$

$$P_1 = I^2 \cdot R_1 = 1 \cdot 5 = 5\text{ W}$$

$$P_2 = I^2 \cdot R_2 = 1 \cdot 10 = 10\text{ W}$$

$$P_{izv} = P_1 + P_2$$



## Snaga na realnim izvorima i stupanj korisnosti

$$P_{izv} = E \cdot I = E \cdot \frac{E}{R_i + R_t} = \frac{E^2}{R_i + R_t}$$

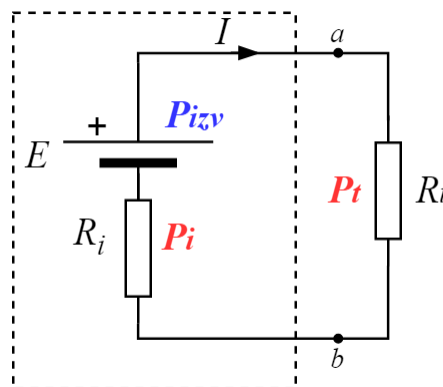
$$P_i = I^2 \cdot R_i = \frac{E^2 \cdot R_i}{(R_i + R_t)^2}$$

$$P_t = I^2 \cdot R_t = \frac{E^2 \cdot R_t}{(R_i + R_t)^2}$$

- možemo se lako uvjeriti da je  $P_{izv} = P_i + P_t$
- **stupanj korisnosti izvora**  $\eta$  je omjer snage vanjskog trošila i snage koju izvor daje u krug
- $\eta$  realnog naponskog izvora iznosi:

$$\eta = \frac{P_t}{P_{izv}} = \frac{R_t}{R_t + R_i} \leq 1$$

kada je stupanj korisnosti maksimalan?



## Teorem maksimalne snage

- Za koji  $R_t$  se na izvoru troši maksimalna snaga?

$$P_{izv} = E \cdot I = E \cdot \frac{E}{R_i + R_t} = \frac{E^2}{R_i + R_t}$$

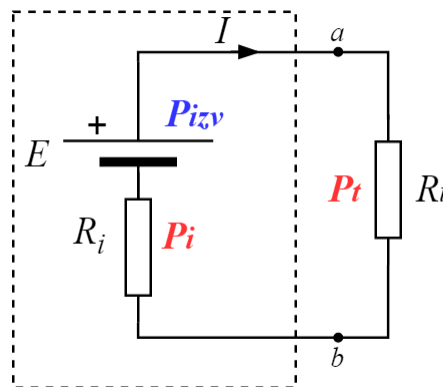
$$\Rightarrow P_{izv_{max}} = P_{izv}(R_t = 0) = \frac{E^2}{R_i}$$

- Kako izgleda snaga na trošilu za dva ekstremna slučaja  $R_t = 0$  i  $R_t \rightarrow \infty$  ?

$$P_t = \frac{E^2 \cdot R_t}{(R_i + R_t)^2}$$

$$R_t = 0 \Rightarrow P_t = 0; R_t \rightarrow \infty \Rightarrow P_t \rightarrow 0$$

maksimalna snaga na trošilu je negdje između ova dva ekstrema!



## Teorem maksimalne snage (2)

- maksimum za  $P_t$  možemo pronaći izjednačavanjem derivacije funkcije za izračun  $P_t$  sa nulom:

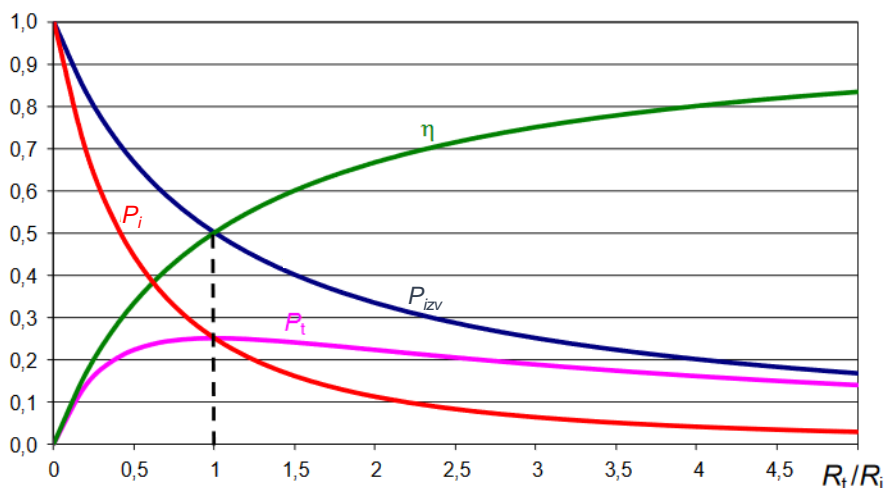
$$\frac{dP_t}{dR_t} = \frac{(R_i + R_t)^2 \cdot E^2 - 2 \cdot (R_i + R_t) \cdot E^2 \cdot R_t}{(R_i + R_t)^4} = 0$$

- ova jednadžba ima jednostavno rješenje po  $R_t$ :

$$R_t = R_i$$

⇒ snaga na trošilu je maksimalna kad je iznos otpora trošila jednak iznosu unutarnjeg otpora izvora!

## Snage u istosmjernom strujnom krugu realnog naponskog izvora - vizualizacija



## Primjer 6

Naponski izvor unutarnjeg napona  $E = 20 \text{ V}$  i unutarnjeg otpora  $R_i = 4 \Omega$  predaje trošilu otpora  $R_t$  snagu  $P_t$  uz stupanj iskorištenja  $\eta = 0,2$ .

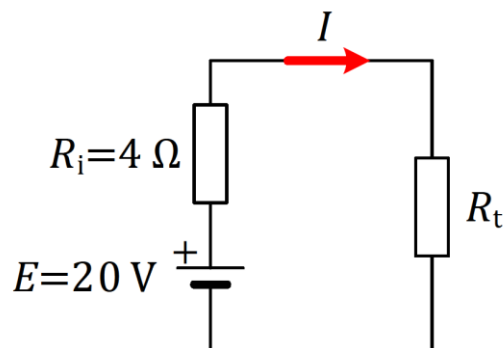
Odredi  $P_t$ .

## Primjer 6

Naponski izvor unutarnjeg napona  $E = 20 \text{ V}$  i unutarnjeg otpora  $R_i = 4 \Omega$  predaje trošilu otpora  $R_t$  snagu  $P_t$  uz stupanj iskorištenja  $\eta = 0,2$ .

Odredi  $P_t$ .

$$\begin{aligned} E &= 20\text{V}; R_i = 4; \eta = 0,2 \\ R_t / (4 + R_t) &= 0,2 \Rightarrow R_t = 1\Omega \\ P_t &= I^2 \cdot R_t = (20 / (1 + 4))^2 \cdot 1 = 16\text{W} \end{aligned}$$



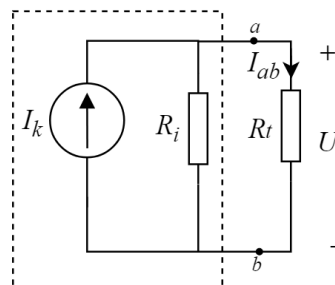
## Stupanj korisnosti i maksimalna snaga na realnom strujnom izvoru

- stupanj korisnosti realnog strujnog izvora iznosi:

$$\eta = \frac{P_t}{P_{izv}} = \frac{R_i}{R_t + R_i} \leq 1 \quad \text{izvesti za vježbu!}$$

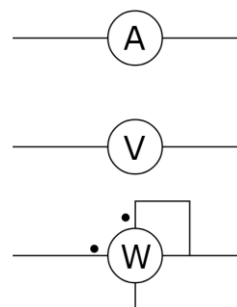
- analognim postupkom izvoda izraza maksimalne snage (ili uz pomoć transformacije strujnog izvora u naponski) lako možemo doći do zaključka da je uvjet maksimalne snage na trošilu priključenog na realni strujni izvor također:

$$R_t = R_i$$



## Mjerni instrumenti

- električni **mjerni instrumenti** omogućuju **neposredno očitavanje električnih veličina** (napon, struja, snaga) u strujnom krugu
- uloga mjernog instrumenta jest pružanje informacije o mjerenoj veličini uz **minimalni utjecaj na strujno-naponske prilike** u krugu
- upoznajemo tri mjerna instrumenta:
  - **ampermetar** – dvopolni instrument, služi za mjerenje struje, priključuje se serijski kako bi kroz njega tekla struja koju mjerimo
  - **voltmetar** – dvopolni instrument, služi za mjerenje napona, priključuje se paralelno kako bi mjerio razliku potencijala između dvije točke
  - **vatmetar** – četveropolni instrument, služi za mjerenje snage, ima strujne stezaljke koje priključujemo serijski i naponske koje priključujemo paralelno



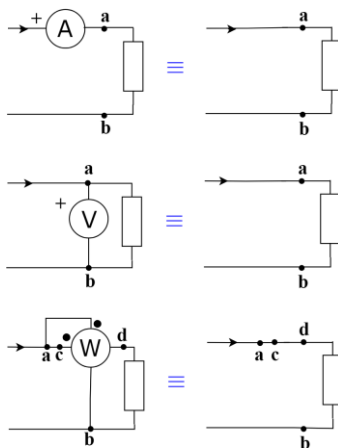
- referentni smjer struje / polaritet napona !



## Idealni mjerni instrumenti

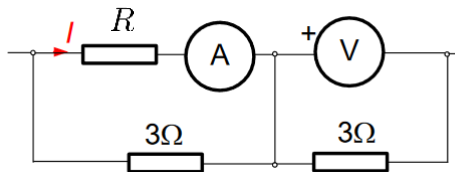
- **idealni mjerni instrumenti** su idealizirani mjerni instrumenti koji nimalo ne utječu na strujno-naponske prilike u krugu

- idealni ampermetar ima unutarnji otpor jednak nuli:  $R_A = 0$
- idealni voltmetar ima unutarnji otpor koji teži beskonačnosti:  $R_V \rightarrow \infty$
- idealni vatmetar ima otpor naponske grane beskonačan, a strujne nula



## Primjer 7

- Idealni instrumenti u dijelu strujnog kruga prema slici pokazuju  $I_A = 2\text{ A}$  i  $U_V = 18\text{ V}$ . Odrediti iznos otpora  $R$ .



## Primjer 7

- Idealni instrumenti u dijelu strujnog kruga prema slici pokazuju

$I_A = 2\text{ A}$  i  $U_V = 18\text{ V}$ . Odrediti iznos otpora  $R$ .

$$I_2 = U_v/3 = 18/3 = 6\text{ A}$$

$$I_1 + I_A = I_2 \Rightarrow I_1 = 4\text{ A}$$

$$R = U_{ab}/I_A = (I_1 \cdot 3)/2 = 12/2 = 6\Omega$$

