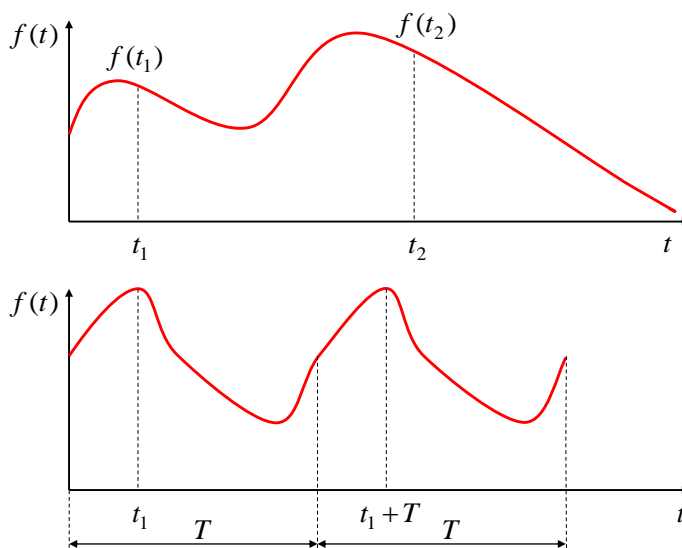




Promjenjive i periodički promjenjive veličine



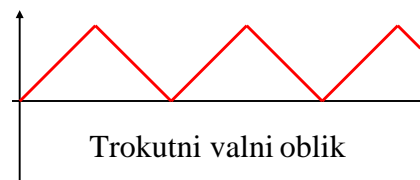
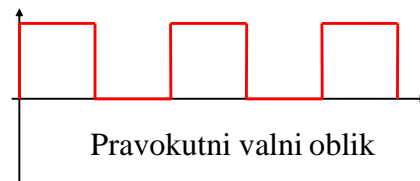
Svojstva promjenjivih veličina

- Valni oblik
 - Graf funkcije u ovisnosti o vremenu (kutu)
- Amplituda
 - Vršna (maksimalna) vrijednost funkcije
- Periodički valni oblik
 - Valni oblik koji se neprekidno ponavlja s istom periodom

Ciklus i frekvencija

- Ciklus
 - Najmanji neponovljivi dio periodičkog vala
- Frekvencija
 - Broj ciklusa (perioda) u 1s

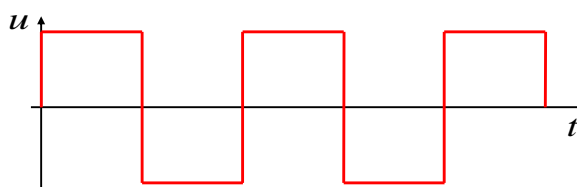
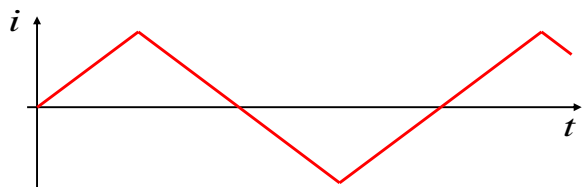
$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{Hz}) \quad ; \quad 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$



- U Europi je frekvencija električne mreže 50 Hz, a u Americi 60 Hz

Izmjenične (periodičke) veličine

- U jednoj periodi mijenjaju smjer
 - Ukupna površina ispod valnog oblika jednaka nuli
- U elektrotehnici koristimo razne izmjenične veličine



Sinusno promjenjive izmjenične veličine

- Posebno važne u elektrotehnici
 - Valni oblik se ne mijenja
 - Zbrajanjem sinusnih oblika iste frekvencije

$$A \sin(t + \alpha) + B \sin(t + \beta) = C \sin(t + \gamma)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\beta - \alpha)} \quad ; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}$$

- Množenjem s konstantom
- Deriviranjem i integriranjem

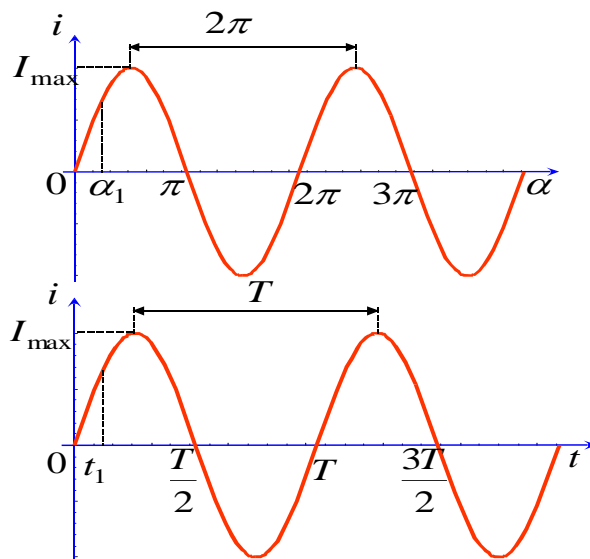
$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \int \sin t dt = -\cos t = -\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Kružna frekvencija

- Veza između kuta sinusne funkcije i vremena
- Veličinu $\omega = 2\pi f$ zovemo **kružna frekvencija**
- Slijedi:

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$$

$$t : T = \alpha : 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi f t = \omega t$$



Fazni kut

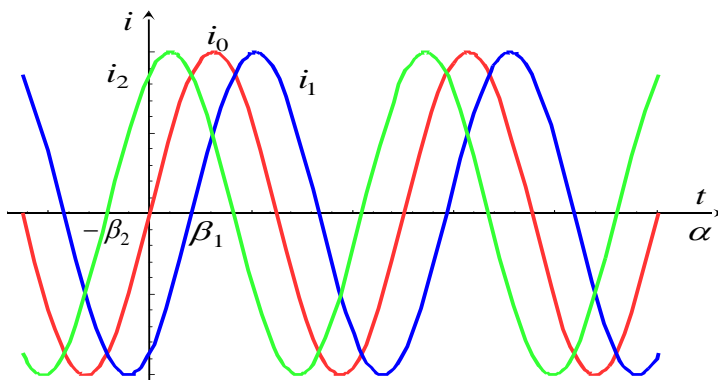
- Sinusna veličina može biti pomaknuta u odnosu na ishodište
- Trenutne vrijednosti struja jesu:

$$i_0(t) = I_{\max} \sin(\omega t)$$

$$i_1(t) = I_{\max} \sin(\omega t - \beta_1)$$

$$i_2(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \beta_2)$$

- Kut β nazivamo **faza** ili **fazni kut**



Fazni pomak

- Razliku faznih kutova dviju veličina zovemo fazni pomak φ

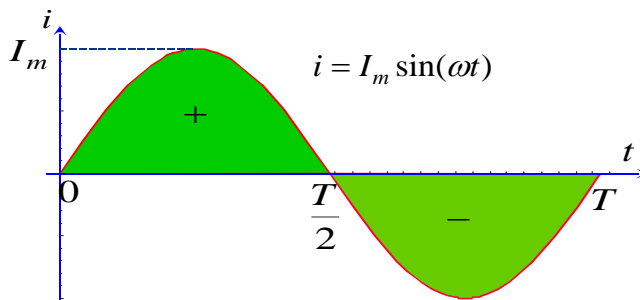
$$i_a(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \alpha_a) \quad ; \quad i_b(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \alpha_b)$$

$$\varphi_{ab} = \alpha_a - \alpha_b$$

- Za $\varphi_{ab} > 0$ kažemo da veličina "a" prethodi veličini "b": i_2
- Za $\varphi_{ab} < 0$ kažemo da veličina "a" zaostaje za veličinom "b": i_1
- Za $\varphi_{ab} = 0$ kažemo da je veličina "a" u fazi s veličinom "b"

Trenutna i srednja vrijednost sinusne veličine

- Trenutna vrijednost $i(t)$



- Srednja vrijednost

- Sinusna struja

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin(\omega t) dt = \frac{I_m}{T} \int_0^{\omega T} \sin(\omega t) \frac{d(\omega t)}{\omega} = \frac{I_m}{\omega T} [-\cos(\omega t)]_0^{2\pi} = 0$$

Efektivna vrijednost sinusne struje

- Efektivna vrijednost

- mjera učinkovitosti predaje snage otporu

- Vrijednost istosmjerne struje koja bi stvorila istu količinu topline na istom otporu kao i izmjenična struja

$$P_{=} = I_{=}^2 \cdot R = P_{\sin} = I_{ef}^2 \cdot R$$

- Trenutna snaga koju izmjenična struja preda otporu jest

$$p(t) = i^2(t) \cdot R$$

- Srednja snaga je $P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot R dt$

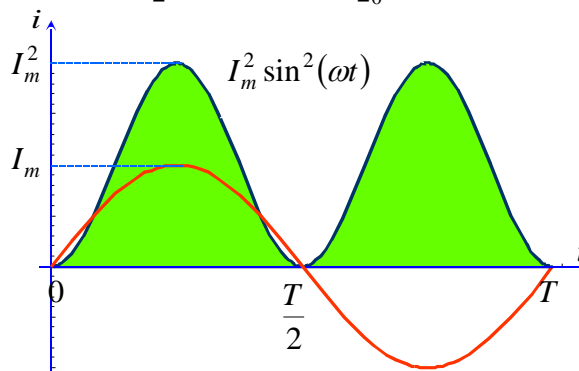
- Slijedi $I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$

Efektivna vrijednost sinusne struje

- Izvod iznosa efektivne vrijednosti struje

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{2I_m^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{I_m^2}{T} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_m^2}{2}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$



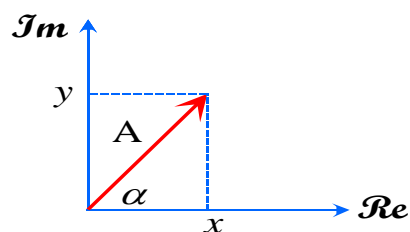
Kompleksni brojevi

- Pravokutni oblik: $\underline{a} = x + jy$
 - x - realni dio
 - y - imaginarni dio
- Eksponencijalni oblik: $\underline{a} = Ae^{j\alpha}$
 - A - modul
 - α - argument (kut)
- Polarni oblik: $\underline{a} = A \angle \alpha$
- Vrijedi:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$x = A \cos \alpha \quad ; \quad y = A \sin \alpha$$

$$\underline{a} = A \cdot \cos \alpha + jA \sin \alpha$$



Kompleksni brojevi

- Zbrajanje kompleksnih brojeva

- Pravokutni oblik

$$\underline{a} = x + jy \quad ; \quad \underline{b} = z + jv \quad ; \quad \underline{a} + \underline{b} = (x + z) + j(y + v)$$

- Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

- Pravokutni oblik

$$\underline{a} = x + jy \quad ; \quad \underline{b} = z + jv$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (xz - yv) + j(xv + yz)$$

$$\frac{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{xz + yv}{z^2 + v^2} + j \frac{zy - xv}{z^2 + v^2}$$

Kompleksni brojevi

- Polarni oblik

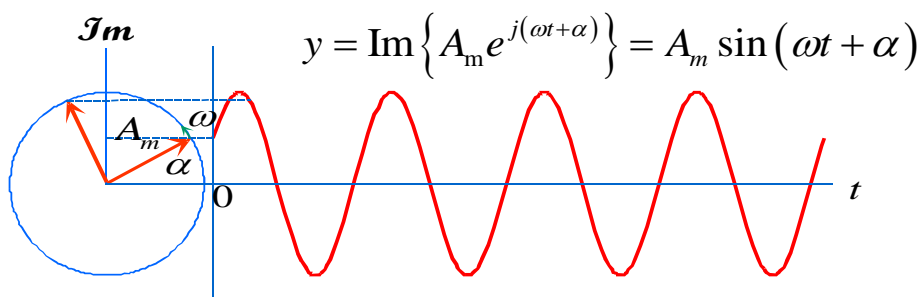
$$\underline{a} = A \angle \alpha \quad ; \quad \underline{b} = B \angle \beta \quad ; \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = A \cdot B \angle (\alpha + \beta) \quad ; \quad \frac{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{A}{B} \angle (\alpha - \beta)$$

- Eksponencijalni oblik

$$\underline{a} = A e^{j\alpha} \quad ; \quad \underline{b} = B e^{j\beta} \quad ; \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = A \cdot B e^{j(\alpha + \beta)} \quad ; \quad \frac{\underline{a}}{\underline{b}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha - \beta)}$$

Sinusna funkcija i fazor

- Eulerova formula: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$
- Kompleksni broj rotira kutnom brzinom ω
 - Smjer suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu
 - Kut (argument) se nakon vremena t povećava za ωt
 - Imaginarni dio se mijenja po sinusnom zakonu



Sinusna funkcija i fazor

- Sinusoidu možemo predstaviti kompleksnim brojem – fazorom
 - Modul fazora jednak je efektivnoj vrijednosti sinusoide
 - Argument (kut) fazora jednak je faznom kutu sinusoide (kutu za $t = 0$)

- Označavamo ga s $\dot{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}$

- Fazor je kompleksni broj, ali nije funkcija vremena i ne rotira

- Trenutna vrijednost sinusoide je

$$y(t) = \text{Im} \{ A_m e^{j(\omega t + \alpha)} \} = \text{Im} \{ A_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} \} = \text{Im} \{ \sqrt{2} \dot{A} e^{j\omega t} \} = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

Fazori

- Modul fazora struja i napona je jednak efektivnoj vrijednosti struje ili napona
 - Trenutna vrijednost struje (napona) je

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Im}\{\sqrt{2}I_{ef}e^{j(\omega t + \alpha)}\} = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}I_{ef}e^{j\alpha}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\} \\ &= \sqrt{2}I_{ef}\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Operacije s fazorima

- Zbrajanje – grafički – ili:

$$\dot{a} = x + jy \quad ; \quad \dot{b} = z + jv \quad ; \quad \dot{a} \pm \dot{b} = (x \pm z) + j(y \pm v)$$

- Deriviranje

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Im}\{\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}j\omega\dot{I}e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\left\{\sqrt{2}\omega\dot{I}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega t}\right\} \\ &= \sqrt{2}\omega I_{ef}\sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- Množenje fazora s $j\omega$
 - Modul se poveća ω puta, a kut se poveća za $\pi/2$

Operacije s fazorima

- Integriranje

$$\begin{aligned} i(t) = \operatorname{Im}\{\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\} &\Rightarrow \int i(t)dt = \operatorname{Im}\left\{\sqrt{2}\frac{1}{j\omega}\dot{I}e^{j\omega t}\right\} = \\ &= \operatorname{Im}\left\{\sqrt{2}\frac{\dot{I}}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\frac{I_{ef}}{\omega}\sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

- Dijeljenje fazora s $j\omega$
 - Modul se smanji ω puta, a kut se smanji za $\pi/2$

Primjeri

1. Sinusna struja ima prvi negativni maksimum iznosa -5 A u trenutku $t = 7\pi/8$ (ms). Ako je perioda $T = \pi$ (ms) odrediti ovisnost struje o vremenu. Odrediti fazor te struje.

Primjeri

2. Zadan je fazor napona $\dot{U} = -12 + j12$ [V]. Odrediti ovisnost tog napona o vremenu.

Primjeri

3. Dva izvora napona $u_1(t) = U_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1)$ i $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \alpha_2)$ spojena su serijski. Primjenom fazora odrediti vremensku funkciju ukupnog napona $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ ako je: $U_{m1} = U_{m2} = 155$ V, $\alpha_1 = 0$ rad i $\alpha_2 = \pi/6$ rad.

Primjeri

4. Zadana je funkcija napona u vremenskoj domeni kao:

$$u(t) = 20 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V. Odredite fazor napona } \dot{U}.$$

Primjeri

5. Zadan je fazor napona $\dot{U} = 100 \angle -30^\circ \text{ V}$. Odredite prikaz napona u vremenskoj domeni $u(t)$.

Primjeri

6. Sinusna struja prikazana je u kompleksnom području fazorom $\dot{I} = 5\angle 45^\circ$ A. Odredite trenutnu vrijednost struje u trenutku $t = 10$ ms ako je frekvencija $f = 50$ Hz.

Primjeri

7. Izračunajte fazni pomak φ između napona i struje ako je zadana sinusna funkcija napona $u(t) = 400 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ V i sinusna funkcija struje $i(t) = 5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ A.

Primjeri

8. Fazor napona je $\dot{U} = 173 + j100$ V. Kolika je trenutna vrijednost napona $u(t)$ za $t = 0$ ms ako je frekvencija $f = 50$ Hz.

Rješenja primjera

1. $i(t) = 5 \sin\left(2000t - \frac{\pi}{4}\right)$ A $\dot{I} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ$ A
2. $u(t) = 24 \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$ V
3. $u(t) = 155 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ V
4. $\dot{U} = 10\sqrt{2} \angle 60^\circ$ V
5. $u(t) = 100\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ V
6. $i(t = 0,01 \text{ s}) = -5$ A
7. $\varphi = -\frac{\pi}{12} \text{ rad} = -15^\circ$
8. $u(t = 0 \text{ s}) = 141,42$ V