



## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

# 7. Kirchhoffovi zakoni za sinusne veličine

© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerađada 3.0 Hrvatska](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/hr/).

### I. Kirchhoffov zakon

- Suma trenutnih vrijednosti struja u čvoru mreže jednaka je nuli u svakom trenutku
  - Struje referentnog smjera koje ulaze u čvor su pozitivne, a one izlaznog smjera su negativne

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0$$

- Ako trenutne vrijednosti prikažemo fazorima vrijedi:

$$\sum_{j=1}^n \text{Im}\{\sqrt{2} \dot{I}_j e^{j\omega t}\} = \text{Im}\left\{\sum_{j=1}^n \sqrt{2} \dot{I}_j e^{j\omega t}\right\} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \dot{I}_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n_{ul}} \dot{I}_j = \sum_{k=1}^{n_{iz}} \dot{I}_k$$

- Suma fazora struja u čvoru jednaka je nuli, odnosno suma fazora ulaznih struja jednaka je sumi fazora izlaznih struja

## II. Kirchhoffov zakon

- Suma trenutnih vrijednosti napona u konturi mreže s  $n_{iz}$  izvora napona  $u_{iz}(t)$  i  $n_{pas}$  pasivnih elemenata na kojima su naponi  $u_{pas}(t)$  jednaka je nuli

$$\sum_{j=1}^{n_{iz}} u_{iz}(t) = \sum_{k=1}^{n_{pas}} u_{pas}(t)$$

- Naponi izvora čiji je smjer djelovanja u smjeru obilaska konture su pozitivni
- Naponi na pasivnim elementima kroz koje je smjer struje podudaran sa smjerom obilaska su pozitivni

## II. Kirchhoffov zakon za fazore

- Prikaz fazorima:

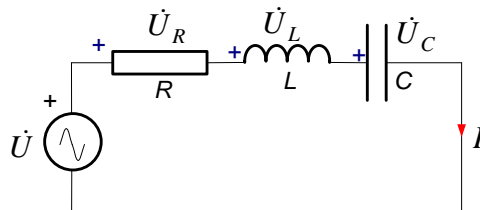
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_{iz}} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{2} \dot{U}_{iz} e^{j\omega t} \right\} &= \sum_{k=1}^{n_{pas}} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{2} \dot{U}_{pas} e^{j\omega t} \right\} \\ \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n_{iz}} \left\{ \sqrt{2} \dot{U}_{iz} e^{j\omega t} \right\} &= \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n_{pas}} \left\{ \sqrt{2} \dot{U}_{pas} e^{j\omega t} \right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n_{iz}} \dot{U}_{iz} = \sum_{k=1}^{n_{pas}} \dot{U}_{pas} \end{aligned}$$

- I. i II. Kirchhoffovi zakoni vrijede za fazore

## Serijski R-L-C krug, impedancija

- II. Kirchhoffov zakon

$$\dot{U} - \dot{U}_R - \dot{U}_L - \dot{U}_C = 0 \quad \text{ili}$$
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$



- Padovi napona na pojedinim elementima jesu:

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R \quad ; \quad \dot{U}_L = \dot{I} \cdot jX_L \quad ; \quad \dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jX_C) \quad \left( X_L = \omega L, X_C = \frac{1}{\omega C} \right)$$

- Slijedi:

$$\dot{U} = \dot{I}(R + jX_L - jX_C) = \dot{I}[R + j(X_L - X_C)]$$

## Impedancija

- Impedancija kruga** – omjer fazora napona i fazora struje

- Kompleksni broj

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$$
$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad ; \quad \tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

- Kut  $\varphi$  zovemo fazni kut impedancije

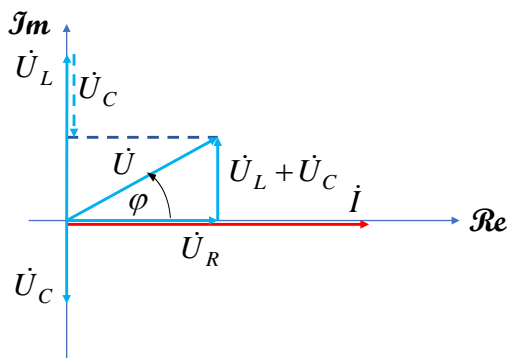
- fazni pomak između napona i struje u krugu

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \alpha_u}{I \angle \alpha_i} = |\underline{Z}| \angle (\alpha_u - \alpha_i) \quad ; \quad \varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

## Vektorski dijagram serijskog $R$ - $L$ - $C$ kruga

- Vektorski dijagram je grafički prikaz fazora struja i napona u kompleksnoj ravnini

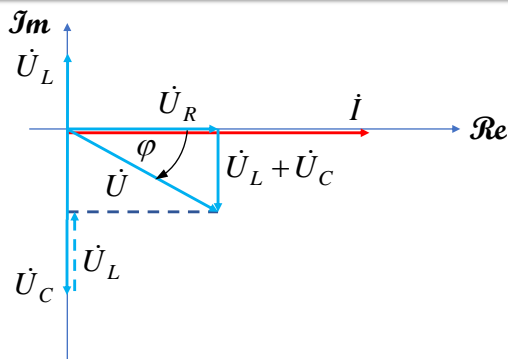
- $X_L > X_C$



- $\varphi > 0$ , napon prethodi struji, odnosno struja zaostaje za naponom (induktivno ponašanje)

## Vektorski dijagram serijskog $R$ - $L$ - $C$ kruga

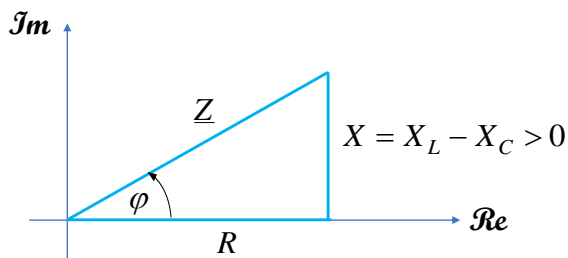
- $X_L < X_C$



- $\varphi < 0$ , napon zaostaje za strujom, odnosno struja prethodi naponu (kapacitivno ponašanje)

## Trokut impedancije – pretežno induktivno trošilo

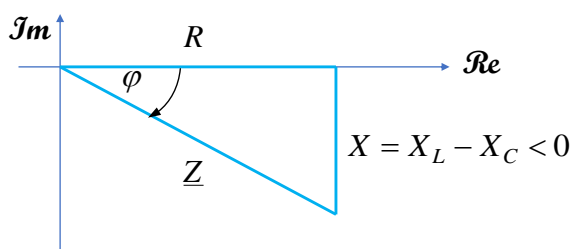
- Podijelimo li vektorski dijagram s fazorom struje dobije se **trokut impedancije**:
- $X_L > X_C$  induktivno ponašanje



- Vrijedi ( $\varphi > 0$ ):  $R = |\underline{Z}| \cdot \cos \varphi$  ;  $X = X_L - X_C = |\underline{Z}| \cdot \sin \varphi > 0$

## Trokut impedancije – pretežno kapacitivno trošilo

- $X_L < X_C$  – kapacitivno ponašanje



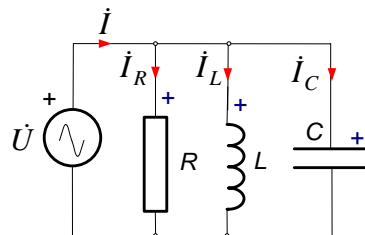
- Vrijedi ( $\varphi < 0$ ):  $R = |\underline{Z}| \cdot \cos \varphi$  ;  $X = X_L - X_C = |\underline{Z}| \cdot \sin \varphi < 0$

## Paralelni R-L-C krug, admitancija

- I. Kirchhoffov zakon

$$\dot{I} - \dot{I}_R - \dot{I}_L - \dot{I}_C = 0 \quad \text{ili}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$



- Struje kroz pojedine elemente jesu:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \dot{U} \cdot G \quad ; \quad G - \text{vodljivost}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \dot{U}(-jB_L) \quad ; \quad B_L = \frac{1}{\omega L} - \text{induktivna susceptancija}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \dot{U}(jB_C) \quad ; \quad B_C = \omega C - \text{kapacitivna susceptancija}$$

## Admitancija kruga

- Slijedi:

$$\dot{I} = \dot{U}(G - jB_L + jB_C) = \dot{U}[G + j(-B_L + B_C)]$$

- Admitancija kruga – omjer fazora struje i fazora napona

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + j(-B_L + B_C) = G + jB = |\underline{Y}|e^{j\psi}$$

$$|\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} \quad ; \quad \tan \psi = \frac{B}{G} = \frac{-B_L + B_C}{G}$$

- Kut  $\psi$  zovemo fazni kut admitancije

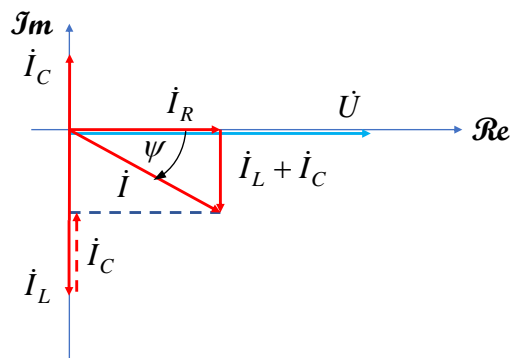
- fazni pomak između struje i napona u krugu

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \angle \alpha_i}{U \angle \alpha_u} = |\underline{Y}| \angle (\alpha_i - \alpha_u) \Rightarrow |\underline{Y}| = \frac{1}{|\underline{Z}|} \quad ; \quad \psi = -\varphi$$

## Vektorski dijagram paralelnog $R$ - $L$ - $C$ kruga

- Vektorski dijagram

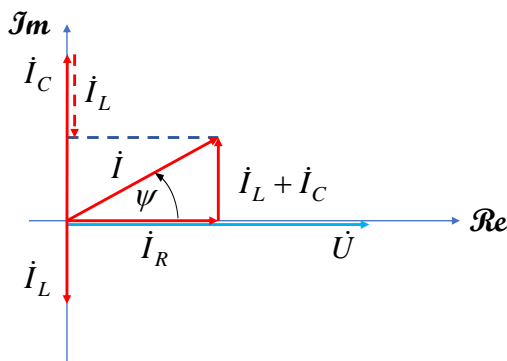
- $B_L > B_C$



- $\psi < 0$ , ( $\varphi > 0$ ) struja zaostaje za naponom, odnosno napon prethodi struji (induktivno ponašanje)

## Vektorski dijagram paralelnog $R$ - $L$ - $C$ kruga

- $B_L < B_C$

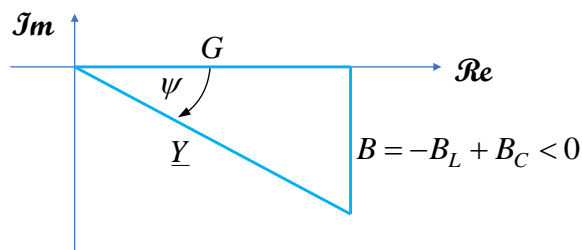


- $\psi > 0$ , ( $\varphi < 0$ ) struja prethodi naponu, odnosno napon zaostaje za strujom (kapacitivno ponašanje)

## Trokut admitancije – pretežno induktivno trošilo

- Podijelimo li vektorski dijagram s fazorom napona dobije se **trokut admitancije**:

- $B_L > B_C$

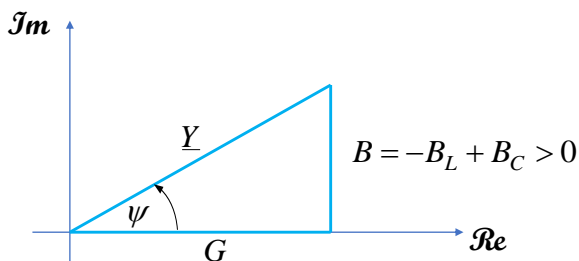


- Vrijedi ( $\psi < 0$ ):

$$G = |\underline{Y}| \cdot \cos \psi \quad ; \quad B = -B_L + B_C = |\underline{Y}| \cdot \sin \psi < 0$$

## Trokut admitancije – pretežno kapacitivno trošilo

- $B_L < B_C$



- Vrijedi ( $\psi > 0$ ):

$$G = |\underline{Y}| \cdot \cos \psi \quad ; \quad B = -B_L + B_C = |\underline{Y}| \cdot \sin \psi > 0$$



## Pretvorba admitancije u impedanciju i obratno

---

$$\underline{Z} = R + jX \quad ; \quad \underline{Y} = G + jB$$

---

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{1}{G + jB} \cdot \frac{G - jB}{G - jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} \Rightarrow$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad ; \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

---

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \Rightarrow$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad ; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

## Rješavanje sinusno pobuđenih mreža pomoću fazora

---

- Pri rješavanju sinusno pobuđenih mreža možemo primijeniti sve metode i postupke koji se primjenjuju u rješavanju istosmjernih mreža
- Umjesto struja i napona pišemo njihove fazore
- Otpore zamjenjujemo impedancijama
- Vodljivosti zamjenjujemo admitancijama

## Topografski dijagram

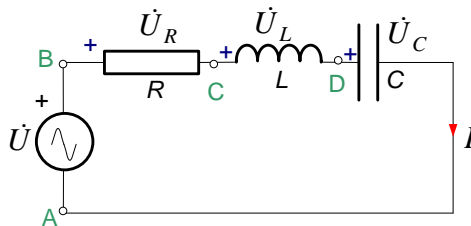
- Polazimo od vektorskog dijagrama napona u krugu
- Vektori napona nadovezani jedan na drugog onako kako su u shemi elementi spojeni jedan do drugog
- Odaberemo jedan čvor kao referentni i pridijelimo mu potencijal nula
- Potencijale ostalih čvorova gradimo temeljem potencijala susjednog čvora i napona na elementima između njih

## Primjer – serijski R-L-C krug

- Zadano je:

$$\dot{U} = 6\angle 0^\circ \text{ V} ; R = 2\Omega$$

$$X_L = 8\Omega ; X_C = 10\Omega$$



$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 2 - j2 = 2\sqrt{2}\angle -45^\circ \Omega$$

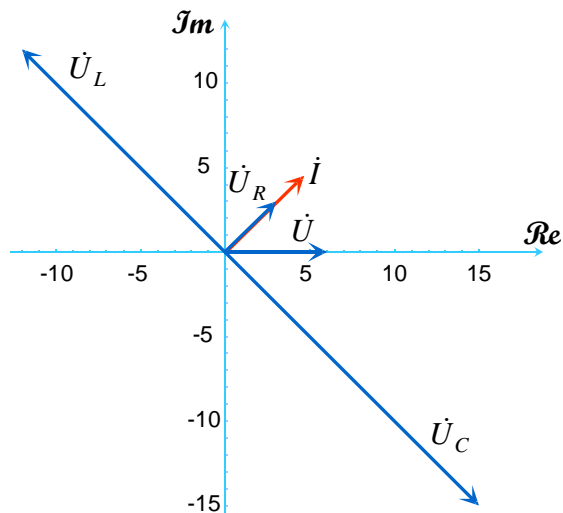
$$\underline{\dot{I}} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{6\angle 0^\circ}{2\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 1,5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = 3\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V} = 3 + j3 \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jX_L = 1,5\sqrt{2}\angle 45^\circ \cdot 8\angle 90^\circ = 12\sqrt{2}\angle 135^\circ \text{ V} = -12 + j12 \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jX_C) = 1,5\sqrt{2}\angle 45^\circ \cdot 10\angle -90^\circ = 15\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ V} = 15 - j15 \text{ V}$$

## Vektorski dijagram napona i struja



## Topografski dijagram uz uzemljen čvor A

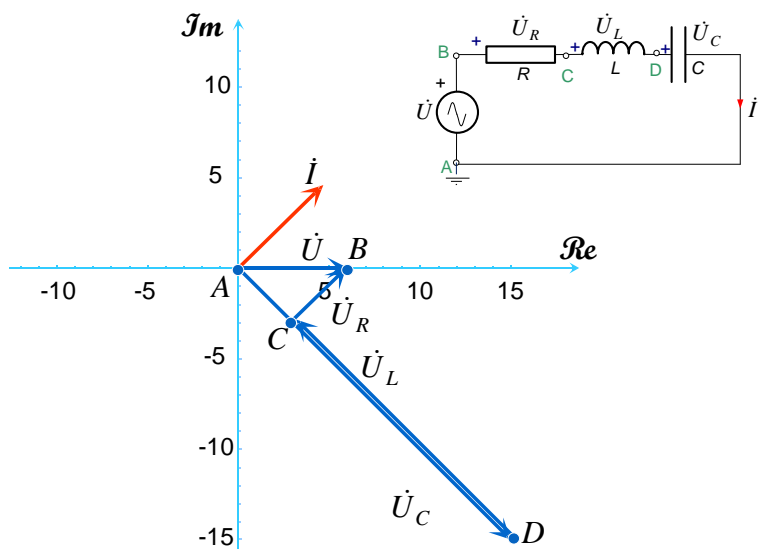
$$\varphi_A = 0 \text{ V}$$

$$\dot{\phi}_A = 0$$

$$\dot{\phi}_D = \dot{\phi}_A + \dot{U}_C = \dot{U}_C = 15 - j15 \text{ V}$$

$$\dot{\phi}_C = \dot{\phi}_D + \dot{U}_L = 3 - j3 \text{ V}$$

$$\dot{\phi}_B = \dot{\phi}_C + \dot{U}_R = 6 \text{ V} = \dot{U}$$



## Topografski dijagram uz uzemljen čvor B

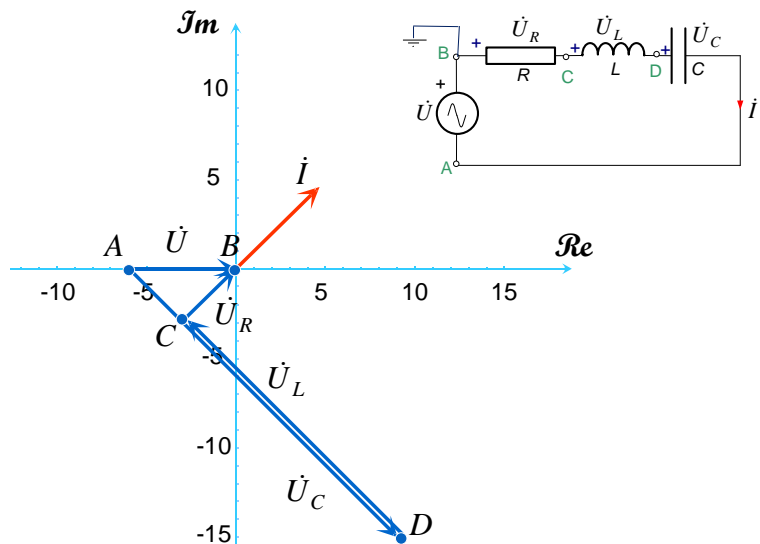
$$\varphi_B = 0 \text{ V}$$

$$\dot{\phi}_B = 0$$

$$\dot{\phi}_A = -\dot{U} = -6 \text{ V}$$

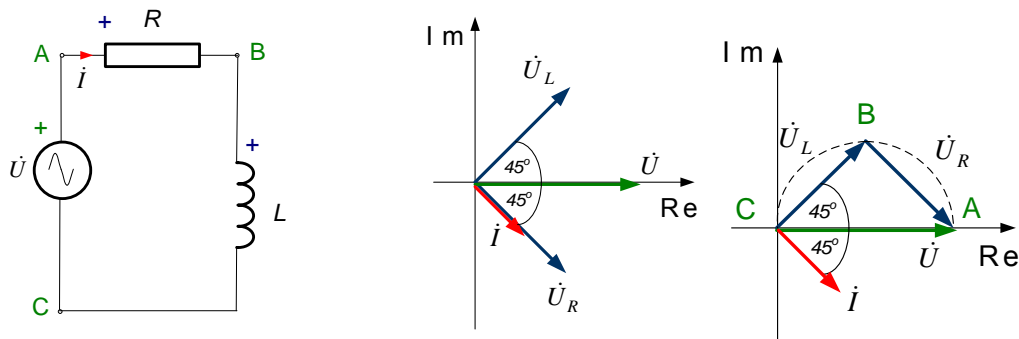
$$\dot{\phi}_D = \dot{\phi}_A + \dot{U}_C = 9 - j15 \text{ V}$$

$$\dot{\phi}_C = \dot{\phi}_D + \dot{U}_L = -3 - j3 \text{ V}$$



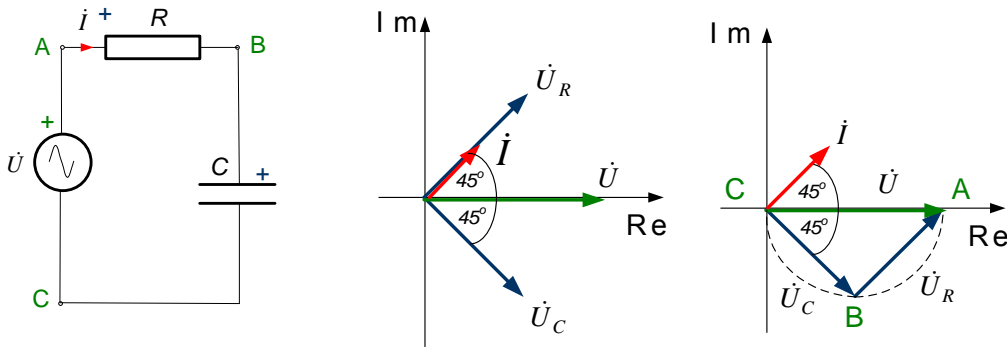
## Primjer 1

Odrediti struju i napone na elementima u serijskom  $RL$  spoju prema slici. Zadano je:  $R = X_L = 10 \Omega$ ,  $\dot{U} = 10\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V}$ .



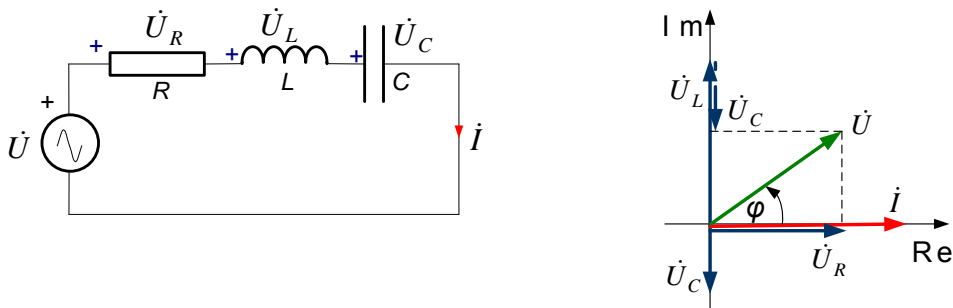
## Primjer 2

Odrediti struju i napone na elementima u serijskom  $RC$  spoju prema slici. Zadano je:  $R = X_C = 10\ \Omega$ ,  $\dot{U} = 10\sqrt{2}\angle 0^\circ\text{ V}$ .



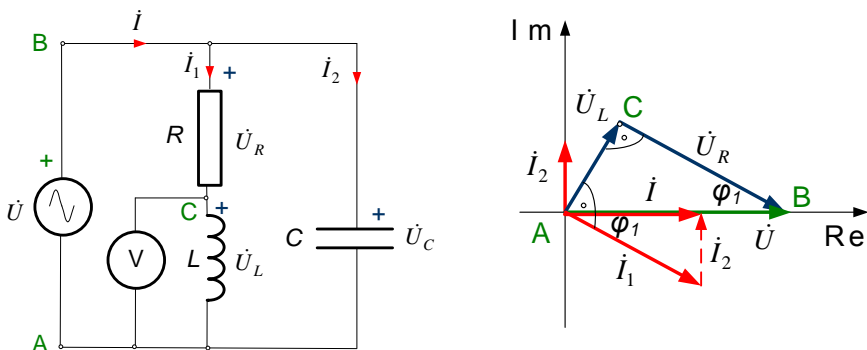
## Primjer 3

U serijskom  $RLC$  krugu priključenom na izmjenični napon frekvencije 50 Hz, efektivne vrijednosti napona  $U = 220\text{ V}$ , poznati su naponi  $U_L = 660\text{ V}$  i  $U_C = 500\text{ V}$ . Struja u krugu je iznosa 11 A. Odrediti iznose  $R$ ,  $L$  i  $C$ , te fazni pomak  $\varphi$  između napona i struje.



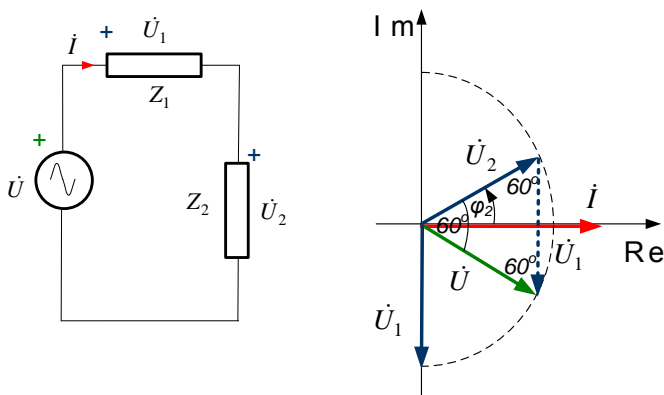
## Primjer 4

Krug prema slici priključen je na izvor čija je vremenska funkcija  $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$  [V]. Ako voltmetar mjeri napon od 60 V, a struja izvora je u fazi s naponom izvora, odrediti iznose  $R$  i  $X_L$ . Zadano je  $X_C = 10 \Omega$ .



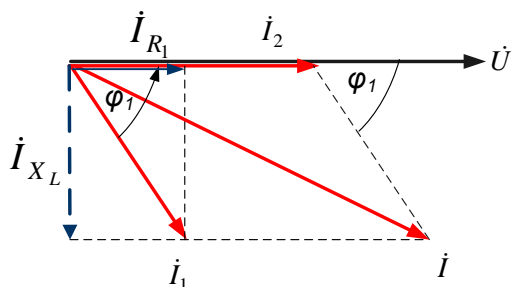
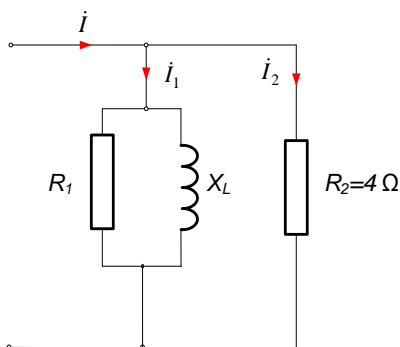
## Primjer 5

Naponi u krugu prema slici su:  $U = U_1 = U_2 = 100$  V, a struja je 10 A. Ako je fazni kut impedancije  $\underline{Z}_1$  iznosa  $\varphi_1 = -90^\circ$ , odrediti impedancije  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$ .



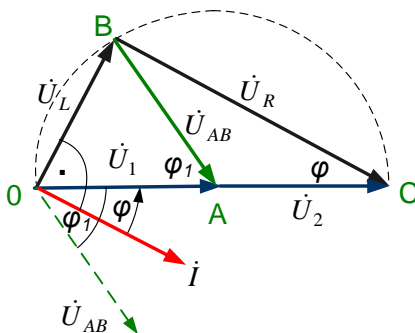
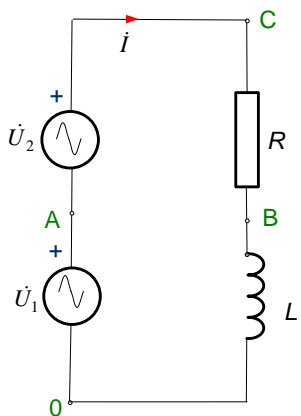
## Primjer 6

U krugu prema slici zadane su struje:  $I_1 = 18\text{ A}$ ,  $I_2 = 15\text{ A}$  i  $I = 30\text{ A}$ .  
Odrediti iznose  $R_1$  i  $X_L$ .



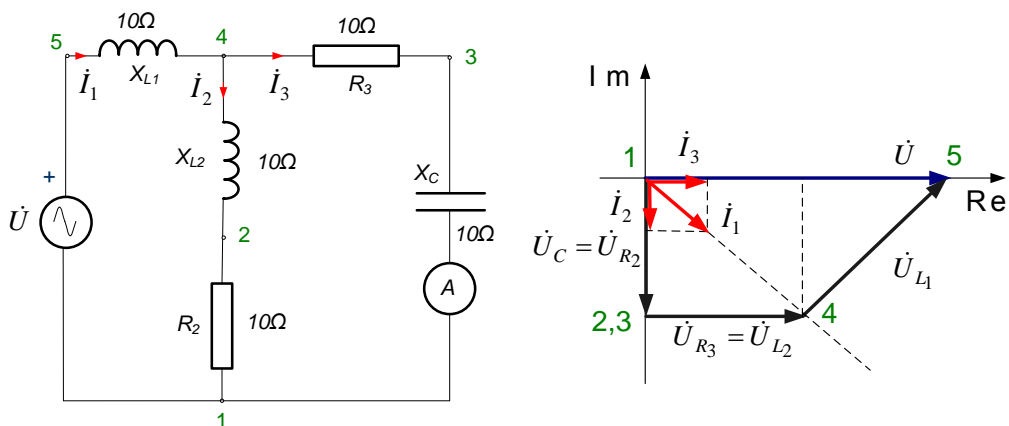
## Primjer 7

Koliki treba biti induktivitet  $L$  da bi fazni kut između napona  $\dot{U}_1$  i  $\dot{U}_{AB}$  bio  $60^\circ$  pri kružnoj frekvenciji  $3000\text{ s}^{-1}$ ? Zadano je:  $R = 100\ \Omega$ ,  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}$ .



## Primjer 8

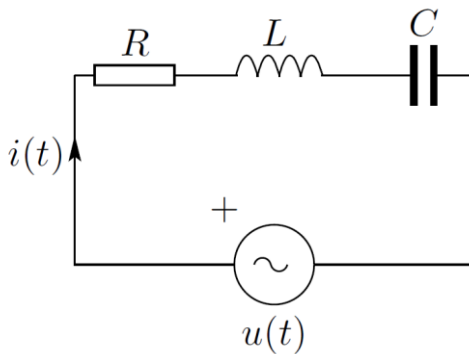
U krugu prema slici ampermetar mjeri struju od 1 A. Koliki je napon izvora?



## Primjer 9

U spoju prema slici odredite  $\dot{U}$ ,  $\dot{U}_R$ ,  $\dot{U}_L$  i  $\dot{U}_C$ .

Zadano je:  $i(t) = 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$  [mA],  $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 12 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$  i  $C = 33 \mu\text{F}$ .

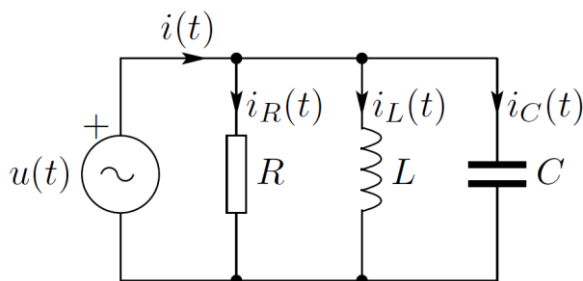




## Primjer 10

U spoju prema slici odredite  $\dot{I}$ ,  $\dot{I}_R$ ,  $\dot{I}_L$  i  $\dot{I}_C$ .

Zadano je:  $u(t) = 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  [V],  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 10 \text{ } \Omega$ ,  
 $L = 100 \text{ mH}$  i  $C = 200 \text{ } \mu\text{F}$ .



## Rješenja primjera

1.  $\dot{I} = 1 \angle -45^\circ \text{ A}$ ,  $\dot{U}_R = 10 \angle -45^\circ \text{ V}$ ,  $\dot{U}_L = 10 \angle 45^\circ \text{ V}$
2.  $\dot{I} = 1 \angle 45^\circ \text{ A}$ ,  $\dot{U}_R = 10 \angle 45^\circ \text{ V}$ ,  $\dot{U}_C = 10 \angle -45^\circ \text{ V}$
3.  $R = 13,73 \text{ } \Omega$ ,  $L = 190,99 \text{ mH}$ ,  $C = 70,03 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $\varphi = 46,66^\circ$
4.  $R = 4,8 \text{ } \Omega$ ,  $X_L = 3,6 \text{ } \Omega$
5.  $\underline{Z}_1 = 1 \angle -90^\circ \text{ } \Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = 1 \angle 30^\circ \text{ } \Omega$
6.  $R_1 = 5,13 \text{ } \Omega$ ,  $X_C = 4,39 \text{ } \Omega$
7.  $L = 19,245 \text{ mH}$
8.  $\dot{U} = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$
9.  $\dot{U} = 158,162 \angle -70,649^\circ \text{ V}$ ,  $\dot{U}_R = 120 \angle -30^\circ \text{ V}$ ,  $\dot{U}_L = 200 \angle 60^\circ \text{ V}$ ,  
 $\dot{U}_C = 303,03 \angle -120^\circ \text{ V}$
10.  $\dot{I} = 9,055 \angle 21,34^\circ \text{ A}$ ,  $\dot{I}_R = 5\sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ A}$ ,  $\dot{I}_L = 5\sqrt{2} \angle -30^\circ \text{ A}$ ,  
 $\dot{I}_C = \sqrt{2} \angle 150^\circ \text{ A}$