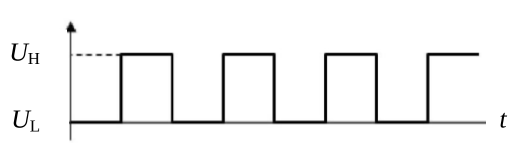
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

10. Frekvencijske karakteristike

Periodički promjenjive električne veličine

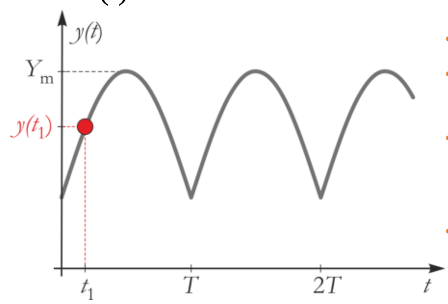
- U naravi naponi i struje često nisu čistog sinusnog oblika
- Primjerice: tonovi glazbenih instrumenata, govor, razni upravljački i sinkronizacijski naponi



Primjer – sinkronizacijski (taktni) napon u digitalnom sustavu

Periodički promjenjive električne veličine

- **Periodičke veličine** - promjene njihovih trenutnih vrijednosti tijekom vremena periodički se ponavljaju
- Vremenske ovisnosti periodičkih električkih veličina $u(t)$ ili $i(t)$ nazivamo **valni oblici.**

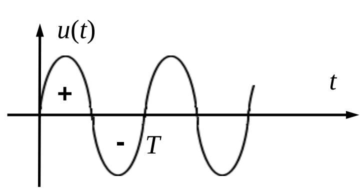


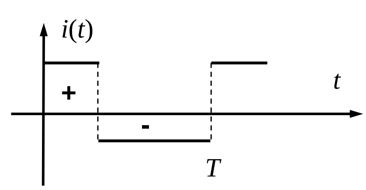
- $y(t_1)$ - **trenutna vrijednost**
- T - **period** ponavljanja (u sekundama)
- $f = 1/T$ - **frekvencija** (u Hz) - broj ponavljanja perioda u jednoj sekundi
- Y_m – maksimalna ili tjemena vrijednost

- Matematički se periodičnost veličine (funkcije) izražava kao: $y(t) = y(t+T) = \ldots = y(t+kT)$, $k \in \mathrm{N}$ gdje je $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Periodički promjenjive električne veličine

- Čista izmjenična veličina: ima jednake pozitivne i negativne površine u vremenskom dijagramu





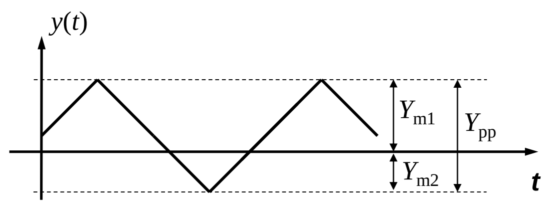
- Čista izmjenična veličina: srednja vrijednost je nula

Periodički promjenjive električne veličine

- Srednja vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt \qquad U_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

- ♦ predstavlja **istosmjernu komponentu** električke veličine (struje ili napona).



- Y_{pp} Vrijednost od vrha do dna (engl. *peak to peak*):

$$Y_{pp} = Y_{m1} - Y_{m2}$$

Periodički promjenjive električne veličine

- Efektivna vrijednost struje/napona definira se kao:

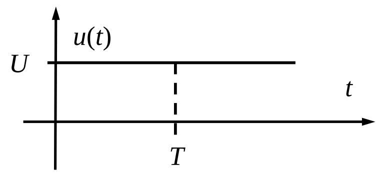
$$I_{ef} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \qquad U_{ef} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

- Efektivnu vrijednost periodički promjenjive struje određujemo tako da usporedimo toplinu koju razvija ta struja na otporniku s toplinskim učinkom konstantne, istosmjerne struje u istom periodu vremena T
- **Faktor oblika** omogućava određivanje efektivnih vrijednosti mjerene veličine kod mjernih instrumenata kod kojih je pokazivanje proporcionalno srednjoj vrijednosti. Definira se kao:

$$\xi = \frac{I_{ef}}{I_{sr}} \qquad \xi = \frac{U_{ef}}{U_{sr}}$$

Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 1: Parametri konstantnog valnog oblika



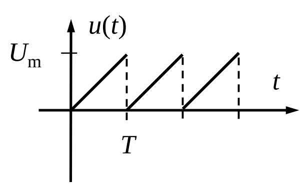
$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2 dt = \frac{1}{T} U^2 \int_0^T dt = \frac{1}{T} U^2 T = U^2 \Rightarrow U_{ef} = U$$

Srednja vrijednost: $U_{sr} = U$

Efektivna vrijednost: $U_{ef} = U$

Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 2: Parametri pilastog valnog oblika



Srednja vrijednost: $U_{sr} = \frac{U_m}{2}$

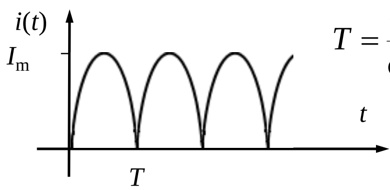
$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{U_m}{T}\right)^2 t^2 dt = \frac{U_m^2}{T^3}\int_0^T t^2 dt = \frac{U_m^2}{3T^3} T^3 = \frac{U_m^2}{3} \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

Efektivna vrijednost: $U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$

Faktor oblika: $\xi = \frac{U}{U_{sr}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 3: Punovalno ispravljena sinusoida



$$T=\frac{\pi}{\omega}\qquad I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\qquad I_{sr}=\frac{2I_m}{\pi}=0{,}637I_m$$

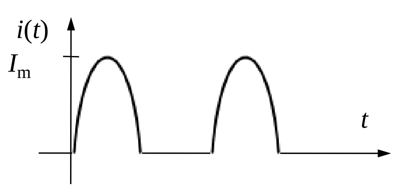
$$\xi=\frac{I}{I_{sr}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\approx 1{,}11$$

Faktor oblika najčešće se koristi vezano uz mjerne ili ispravljačke uređaje u kojima se izmjenični napon ili struja ispravljaju pomoću odgovarajućih sklopova. Stoga se u literaturi ponegdje definira faktor oblika kao omjer efektivne vrijednosti i srednje vrijednosti ispravljenog valnog oblika:

$$\frac{I}{\frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|dt}$$

Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 4: Poluvalno ispravljena sinusoida



$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$I=\frac{I_m}{2}\qquad I_{sr}=\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_m\sin(\omega t)dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}0dt\right)=\frac{2I_m}{T\omega}=\frac{I_m}{\pi}=0{,}318I_m$$

$$\xi=\frac{I}{I_{sr}}=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$$

Periodički promjenjive električne veličine

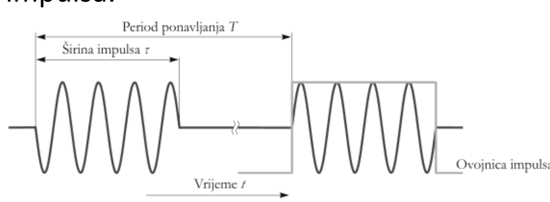
- Funkcijski generatori:
    - Sinusni valni oblik
    - Trokutasti valni oblik
    - Pravokutni valni oblik

- Generiranje ispitnih valnih oblika

Periodički promjenjive električne veličine

- **Impulsi** su pojave djelovanja napona ili struje različitih oblika unutar određenog vremenskog intervala.
- Neki od oblika impulsa su **pravokutni, pilasti, trokutasti, sinusni**
- **Periodički niz impulsa** dobije se tako da je osnovni valni oblik ograničenog trajanja τ, a ponavlja se s vremenom ponavljanja T, duljim od trajanja impulsa.

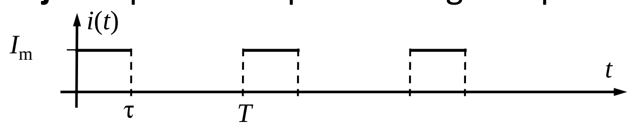
Primjer: radarski signal



faktor popunjenosti (engl. duty cycle): τ/T

Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 5: parametri periodičkog niza pravokutnih impulsa



$$\frac{\tau}{T} = 1/3$$

Efektivna vrijednost niza impulsa:

$$I_{ef} = I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^\tau I_m^2 dt} = \sqrt{\frac{\tau}{T}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau I_m^2 dt} = I_m\sqrt{\frac{\tau}{T}}$$

$$I_{ef} = I_{ef\ osnovno}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m\cdot\sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m\cdot 0{,}577$$

Srednja vrijednost impulsa:

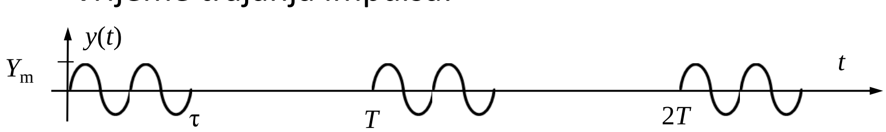
$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^\tau I_m dt = \frac{\tau}{T}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau I_m dt = I_m\frac{\tau}{T} \qquad I_{sr} = I_{sr\ osnovno}\cdot\frac{\tau}{T} = I_m\cdot 0{,}333$$

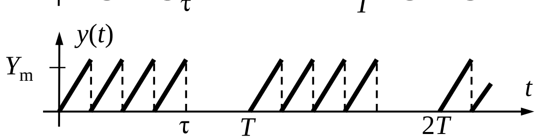
Periodički promjenjive električne veličine

- Općenito vrijedi:

$$Y_{ef} = Y_{ef\ osnovno}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{T}} \qquad Y_{sr} = Y_{sr\ osnovno}\cdot\frac{\tau}{T}$$

- Period ponavljanja: T
- Vrijeme trajanja impulsa: τ

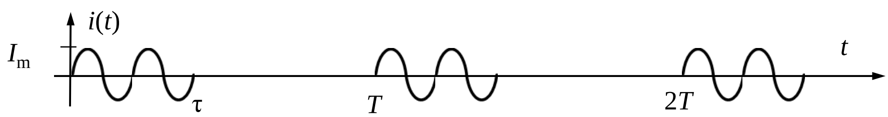




Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 6:

Za niz sinusnih strujnih impulsa poznat je omjer $\tau / T = 0{,}4$. Odredite snagu koju bi takva struja razvijala prolazeći kroz otpor $R = 4\ \Omega$. Zadano: $I_m = 2$ A.

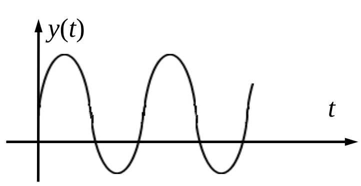


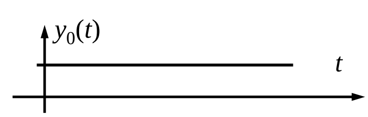
$$I_{ef} = I_{ef\ osnovno} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} 0{,}632$$

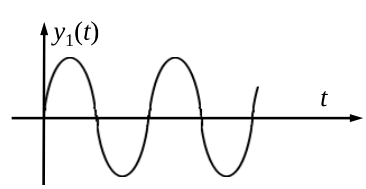
$$P = I_{ef}^2 R = 3{,}2\ \mathrm{W}$$

Periodički promjenjive električne veličine

- **Složeni valni oblici**: mogu se prikazati zbrojem više valnih oblika koje nazivamo **komponente**
- Osobito su nam zanimljivi složeni valni oblici koje možemo prikazati zbrojem čistog izmjeničnog valnog oblika i konstante (istosmjerne komponente)







Periodički promjenjive električne veličine

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} (U_{sr} + u_{izmj})^2(t)dt} =$$

$$\sqrt{U_{sr}^2 + U^2{}_{ef\_izmj} + \frac{2}{T}U_{sr}\int_0^T u_{izmj}(t)dt} = \sqrt{U_{sr}^2 + U^2{}_{ef\_izmj}}$$

Treba uočiti da je vrijednost integrala $\frac{2}{T}U_{sr}\int_0^T u_{izmj}(t)dt = 0$

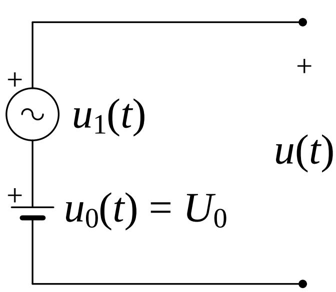
jer je srednja vrijednost čisto izmjeničnog valnog oblika jednaka nuli.

$$U_{ef} = \sqrt{U_{sr}^2 + U^2{}_{ef\_izmj}}$$

Periodički promjenjive električne veličine

Primjer 7: Odredite efektivnu vrijednost napona $u(t)$ prema slici. Zadano:

$$u_1(t) = U_{1m}\sin\omega t$$
$$u(t) = U_0 + u_1(t)$$



Rješenje:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2}}$$

Harmonički složeni valni oblici

- U naravi naponi i struje često nisu čistoga sinusnog oblika
- Nesinusoidne periodičke napone ili struje možemo prikazati sumom napona ili struja sinusnog oblika
- **Fourierova analiza**

Jean Baptiste Joseph **Fourier** (Auxerre,1768. – Pariz, 1830.), francuski matematičar i fizičar

- funkcija mora zadovoljiti **Dirichletove uvjete** da bi Fourierova analiza bila primjenjiva:

  - Ukoliko funkcija nije neprekinuta, broj prekida na periodu T mora biti konačan
  - Funkcija mora imati konačnu srednju vrijednost na periodu T
  - Broj pozitivnih i negativnih maksimuma mora biti konačan

Johann Peter Gustav Lejeune **Dirichlet** (Düren, 1805. – Göttingen, 1859.), njemački matematičar

Harmonički složeni valni oblici

- Fourierov red:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t) + ...$$
$$+ b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + b_3\sin(3\omega t) + ...$$

- Suma sinusoida kojima su frekvencije višekratnici frekvencije *f* periodičkog napona ili struje koju prikazujemo : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.
- Fourierovi koeficijenti:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Harmonički složeni valni oblici

- Fourierov red možemo izraziti na još dva načina:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_n c_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_n c_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

- Pojedine članove reda nazivamo **harmonicima**
- Harmonike imenujemo rednim brojevima prema množitelju osnovne frekvencije n
- Prvi **harmonik**, kružne frekvencije ω nazivamo i **osnovnim harmonikom**
- **Viši harmonici:** $n > 1$

Harmonički složeni valni oblici

- Amplitude harmonika

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

- Fazni kutevi harmonika

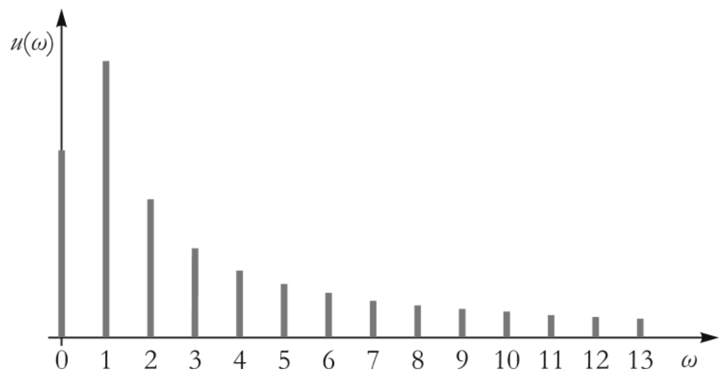
$$\theta_n = arctg\frac{b_n}{a_n} \qquad \phi_n = arctg\frac{a_n}{b_n}$$

- srednja vrijednost (istosmjerna komponenta): $\frac{1}{2}a_0$

grč. *ἁρμονία* (*harmonía*): spajanje, slaganje, sklad

Harmonički složeni valni oblici

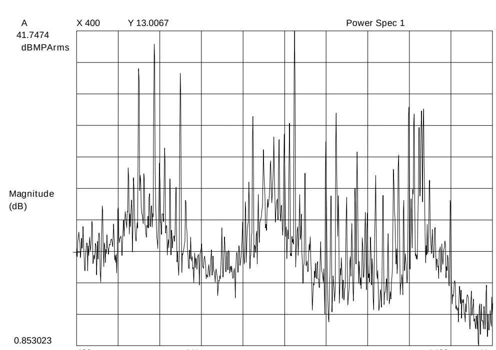
- **Linijski spektar:** grafički prikaz harmoničkih amplituda ovisno o frekvenciji



Harmonički složeni valni oblici

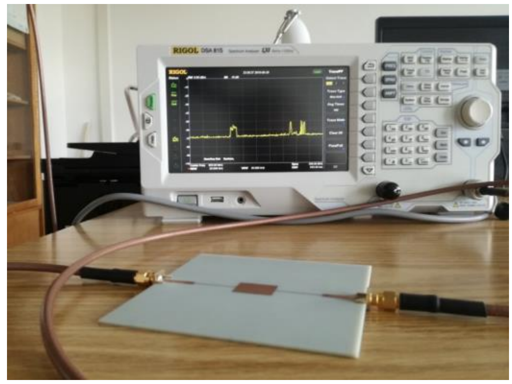
- Analizatori spektra su uređaji koji mjere i prikazuju frekvencijski spektar ulazne električne veličine

Primjer: spektar zvučnog tlaka (buke) asinkronog motora



Harmonički složeni valni oblici

Analizator spektra
9 kHz – 1,5 GHz



Efektivna vrijednost nesinusnog periodičnog valnog oblika

$$i(t) = I_0 + I_{10}\sin(\omega t + \phi_1) + I_{20}\sin(2\omega t + \phi_2) + I_{30}\sin(3\omega t + \phi_3) + ...$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n0}\sin(n\omega t + \phi_n)$$

- Ako se kvadrira izraz za struju dobije se:

$$i^2(t) = I_0^2 + 2I_0\sum_{n=1}^{\infty} I_{n0}\sin(n\omega t + \phi_n) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{n0}\sin(n\omega t + \phi_n)\right)^2$$

- Za kvadrat zbroja vrijedi u općem slučaju:

$$(x + y + z + ... + t + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + ... + t^2 + u^2 +$$
$$+ 2xy + 2xz + ... + 2xu + 2yz + ... + 2yu + ... + 2tu$$

Efektivna vrijednost nesinusnog periodičnog valnog oblika

- Za članove $k \neq i \quad (k = 1,2,..... \quad ; \quad i = 1,2,....)$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{k0} I_{i0} \sin(k\omega t + \phi_k)\sin(i\omega t + \phi_i)dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_{k0} I_{i0} \frac{1}{2}\{\cos[(k-i)\omega t + (\phi_k - \phi_i)] - \cos[(k+i)\omega t + (\phi_k + \phi_i)]\}dt = 0$$

- Iz čega slijedi:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{n0} \sin(n\omega t + \phi_n)\right)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} I_{n0}^2 \sin^2(n\omega t + \phi_n)dt$$

Efektivna vrijednost nesinusnog periodičnog valnog oblika

- Možemo rastaviti izraz za efektivnu vrijednost:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n0} \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$i^2(t) = I_0^2 + 2I_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{n0} \sin(n\omega t + \phi_n) + \left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{n0} \sin\ (n\omega t + \phi_n)\right]^2$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$I_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 dt +$$ Komponenta 1

$$+\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_{n0} \sin(n\omega t + \phi_n)dt +$$ Komponenta 2

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} I_{n0}^2 \sin^2(n\omega t + \phi_n)dt$$ Komponenta 3

Efektivna vrijednost nesinusnog periodičnog valnog oblika

Komponenta 1 $= I_0^2$

Komponenta 2 $= 0$

Komponenta 3 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{n0}^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{nef}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2$

$$I_{ef} = \sqrt{I_o^2 + \frac{I_{10}^2}{2} + \frac{I_{20}^2}{2} + \ldots + \frac{I_{n0}^2}{2}}$$

$$I_{ef} = \sqrt{I_o^2 + I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + \ldots I_{nef}^2}$$

Poopćenje ranije izvedenog izraza za efektivnu vrijednost valnog oblika koji se sastoji od istosmjerne i čisto izmjenične komponente !

Efektivna vrijednost nesinusnog periodičnog valnog oblika

Efektivna vrijednost nesinusnog periodičnog valnog oblika:

$$u(t) = U_0 + U_{10}\sin(\omega t + \phi_1) + U_{20}\sin(2\omega t + \phi_2) + U_{30}\sin(3\omega t + \phi_3) + \ldots..$$

$$U_{ef} = \sqrt{U_o^2 + \frac{U_{10}^2}{2} + \frac{U_{20}^2}{2} + \ldots + \frac{U_{n0}^2}{2}}$$

$$U_{ef} = \sqrt{U_o^2 + U_{1ef}^2 + U_{2ef}^2 + \ldots + U_{nef}^2}$$

Poopćenje ranije izvedenog izraza za efektivnu vrijednost valnog oblika koji se sastoji od istosmjerne i čisto izmjenične komponente !

Harmonički složeni valni oblici

- Radna snaga nesinusnog periodičkog valnog oblika

$$u = U_0 + \sum U_{n0} \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

$$i = I_0 + \sum I_{n0} \sin(n\omega t + \psi_n)$$

$$p = ui = \left[U_0 + \sum U_{n0} \sin(n\omega t + \varphi_n) \right] \left[I_0 + \sum I_{n0} \sin(n\omega t + \psi_n) \right]$$

integriranjem po periodu T daje radnu snagu

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\theta_1 + ... + U_n I_n \cos\theta_n$$

$$P = P_0 + P_1 + ... + P_n$$

Harmonički složeni valni oblici

Primjer 8: Otpornik R = 10 Ω priključen je na izvor nesinusnog napona zadanog izrazom:
$u(t) = 1{,}27 + 2\sin(\omega t) + 0{,}85\sin(2\omega t - \pi/2) + 0{,}17\sin(4\omega t - \pi/2)$ V
Odredite efektivnu vrijednost napona te snagu na otporniku.

Rješenje:

$U_0 = 1{,}27$ V $\quad U_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$ V $\quad U_2 = \frac{0{,}85}{\sqrt{2}}$ V $\quad U_4 = \frac{0{,}17}{\sqrt{2}}$ V

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_4^2} = 1{,}997 \text{ V}$$

$$P = \frac{U^2}{R} = 400 \text{ mW}$$

Frekvencijske karakteristike

- Reaktancije induktiviteta i kapaciteta frekvencijski su ovisne

$$x_C = \frac{1}{C\omega} \qquad x_L = L\omega$$

- U svakoj električnoj mreži, koja sadrži induktivitete i/ili kapacitete naponi i struje u pojedinim granama su frekvencijski ovisni
- Primjena: konstrukcija uređaja sa svojstvima potiskivanja ili naglašavanja pojedinih sinusnih komponenti u složenom valnom obliku

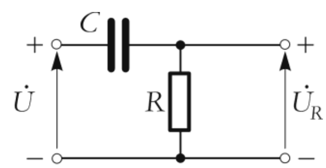
Frekvencijske karakteristike

- Primjena: prijamnici, audiotehnika, mjerna tehnika, komunikacije ....

Analogno/digitalni pretvornici: sadrže filtre za antialiasing

Tonski stol za miješanje

Frekvencijske karakteristike *RC* spoja – visoki propust



$$\dot{U}_R = \dot{U}\frac{R}{R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \dot{U}\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Omjer amplitude napona na otporniku u odnosu na ulazni napon

$$H(\omega) = \frac{U_R}{U} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Fazni pomak $\alpha(\omega) = 90^0 - \mathrm{arctg}(\omega RC)$

Frekvencijske karakteristike *RC* spoja – visoki propust

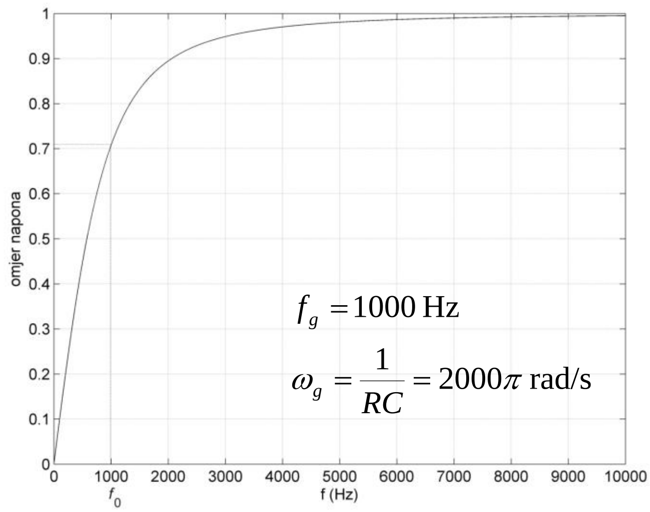
- promatrani *RC* spoj propušta komponente visokih frekvencija složenog ulaznog napona
- visokopropusni filtar
- granična frekvencija (dogovorno): $H(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Za promatrani spoj $\omega_g = 1/(RC)$

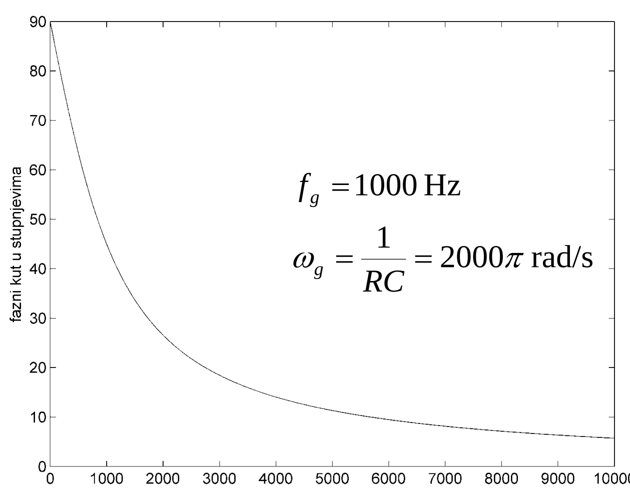
Granična frekvencija dijeli **propusni pojas** od **pojasa zapiranja.**

Električni filtar je mreža s dva para priključnica koja se kod složenih valnih oblika primjenjuje za razdvajanje sinusnih komponenti različitih frekvencija.

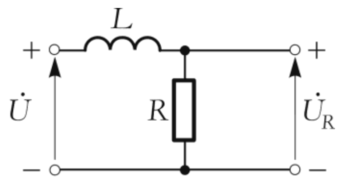
Frekvencijske karakteristike *RC* spoja – visoki propust



Frekvencijske karakteristike *RC* spoja – visoki propust



Frekvencijske karakteristike RL spoja – niski propust

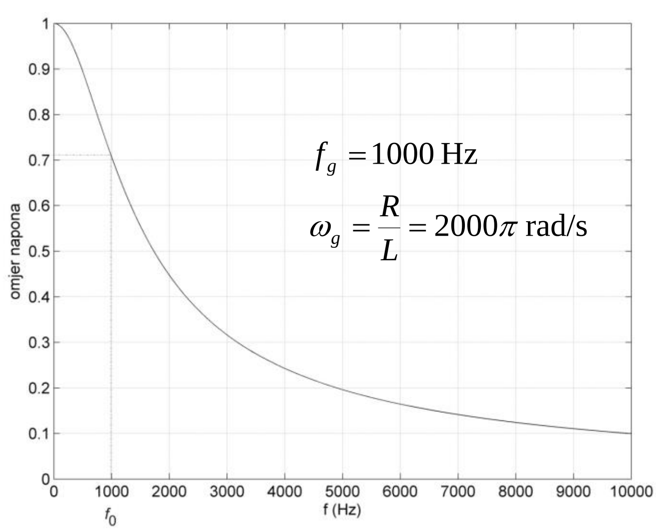


$$\dot{U}_R = \dot{U}\frac{R}{R + j\omega L} = \dot{U}\frac{1}{1 + j\omega\frac{L}{R}}$$

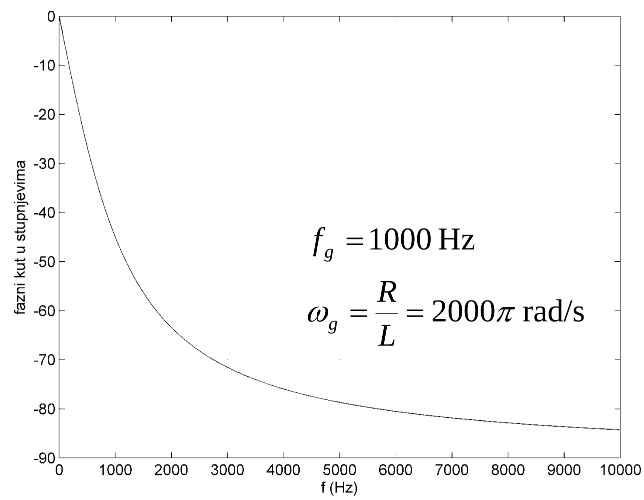
$$H(\omega) = \frac{U_R}{U} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\frac{L}{R})^2}} \qquad \alpha(\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\omega\frac{L}{R}\right)$$

- promatrani RL spoj propušta signale niskih frekvencija
- niskopropusni filtar
- granična frekvencija: $\omega_g = \frac{R}{L}$

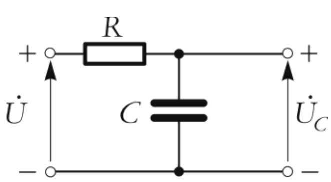
Frekvencijske karakteristike RL spoja – niski propust



Frekvencijske karakteristike *RL* spoja – niski propust



Frekvencijske karakteristike *RC* spoja – niski propust



$$\dot{U}_C = \dot{U}\,\frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \dot{U}\,\frac{1}{1 + j\omega RC}$$

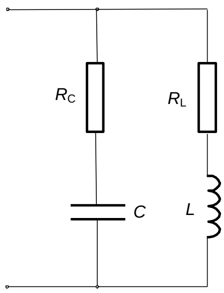
$$H(\omega) = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \alpha(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega RC)$$

$$\omega_g = 1/(RC)$$

Kompliciranijim električnim krugovima može se realizirati električne filtre s oštrijom granicom između propusnog pojasa i pojasa zapiranja – posebno područje

Frekvencijske karakteristike

Primjer 9: Odredite vrijednosti L i C tako da granična frekvencija u obje grane bude $1\ \mathrm{kHz}$. Zadano $R = R_L = R_C = 8\ \Omega$.

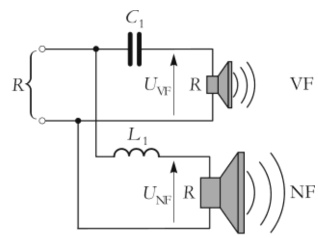


Rješenje:

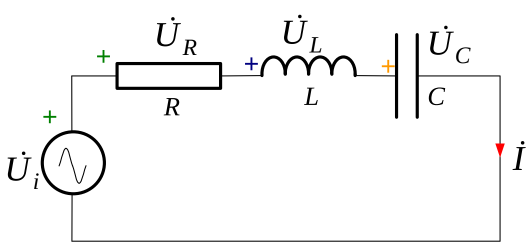
$$L = \frac{R}{2\pi f_k} = 1{,}27\ \mathrm{mH}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_k R} = 19{,}9\ \mu\mathrm{F}$$

Primjena – dvosmjerna zvučnička skretnica:



Serijski RLC krug priključen na naponski izvor



- Analiziraju se veličine u krugu pri promjeni frekvencije od 0 do ∞

- Impedancija kruga je:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Pri promjeni frekvencije:

$$R = \text{konst.} \qquad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z}(\omega) = |\underline{Z}(\omega)| e^{j\varphi}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_i}{\underline{Z}}$$

$$|\underline{Z}(\omega)| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

- Pri frekvenciji ω_0 imaginarni dio impedancije jednak je nuli. Frekvencija ω_0 naziva se **rezonantna frekvencija** i krug je **u rezonanciji.**

U rezonanciji vrijedi:

$$X(\omega_0) = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad \underline{Z}(\omega_0) = R$$

Rezonantna (kružna) frekvencija: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Naponska rezonancija $U_{L0} = U_{C0}$

Primjena: prijamnici, odašiljači, komunikacijski sustavi, bežične tehnologije ...

Rezonancija

- U rezonanciji je:

$$X_{L0} = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \qquad X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

- ρ - **valni otpor**; γ - **valna vodljivost**:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\Omega)$$

- Pri rezonanciji je:

$$I_0 = \frac{U_i}{R} \qquad U_{L0} = I_0 X_{L0} = U_i \frac{\rho}{R} \qquad U_{C0} = I_0 X_{C0} = U_i \frac{\rho}{R}$$

$$U_{R0} = I_0 \cdot R = U_i$$

Faktor dobrote

- **faktor dobrote** Q_s – određuje frekvencijsku selektivnost kruga

$$Q_s = \frac{U_{L0}}{U_i} = \frac{U_{C0}}{U_i} = \frac{\rho}{R} = \frac{X_{L0}}{R} = \frac{X_{C0}}{R}$$

Faktor dobrote možemo izraziti i omjerom maksimalne energije pohranjene u reaktivnim elementima i energije koja se utroši na otporu tijekom perioda *T*:

$$Q_S = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{2\pi}{T} \frac{\frac{LI_0^2}{2}}{R\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\pi \frac{W_{L\max}}{W_R}$$

Granične frekvencije

- Promatramo napon na otporniku u odnosu na ulazni napon $H(\omega)=\dfrac{U_R}{U}$

  - **Granične frekvencije** definiramo uvjetom $H(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

  - **Gornja granična frekvencija**:

$$\omega_{gg}L-\frac{1}{\omega_{gg}C}=R \quad \Rightarrow \quad \omega_{gg}^2 LC-RC\omega_{gg}-1=0$$

$$\omega_{gg}=\frac{R+\sqrt{R^2+4\dfrac{L}{C}}}{2L}$$

Granične frekvencije

- **Donja granična frekvencija**:

$$\frac{1}{\omega_{dg}C}-\omega_{dg}L=R \quad \Rightarrow \quad \omega_{dg}^2 LC+RC\omega_{dg}-1=0$$

$$\omega_{dg}=\frac{-R+\sqrt{R^2+4\dfrac{L}{C}}}{2L}$$

- **Propusni pojas**: $\Delta\omega=\omega_{gg}-\omega_{dg} \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega=\dfrac{R}{L}$

$$Q_S=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

- Praktično za mjerenje Q

Granične frekvencije

- Odnos rezonantne frekvencije i graničnih frekvencija

$$\omega_{dg}\omega_{gg} = \frac{\left(-R+\sqrt{R^2+4\frac{L}{C}}\right)}{2L}\cdot\frac{\left(R+\sqrt{R^2+4\frac{L}{C}}\right)}{2L}$$

$$\omega_{dg}\omega_{gg} = \frac{\left(R^2+4\frac{L}{C}-R^2\right)}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0^2 = \omega_{dg}\omega_{gg} \qquad \omega_0 = \sqrt{\omega_{dg}\omega_{gg}}$$

Faktor dobrote

Primjer 10. Za serijski *RLC* krug odredite faktor dobrote i prikažite vektorski dijagram napona i struje u rezonanciji. Zadano je: $R = 1\ \Omega$, $L = 0{,}25$ H, $C = 1$ F, $\dot{U}_i = 1\angle 0^\circ$.

Rješenje:

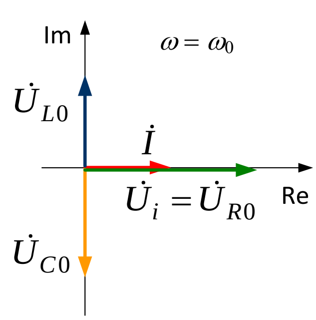
$\omega_0 = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\rho = 0{,}5\ \Omega$,

$X_{L0} = X_{C0} = 0{,}5\ \Omega$

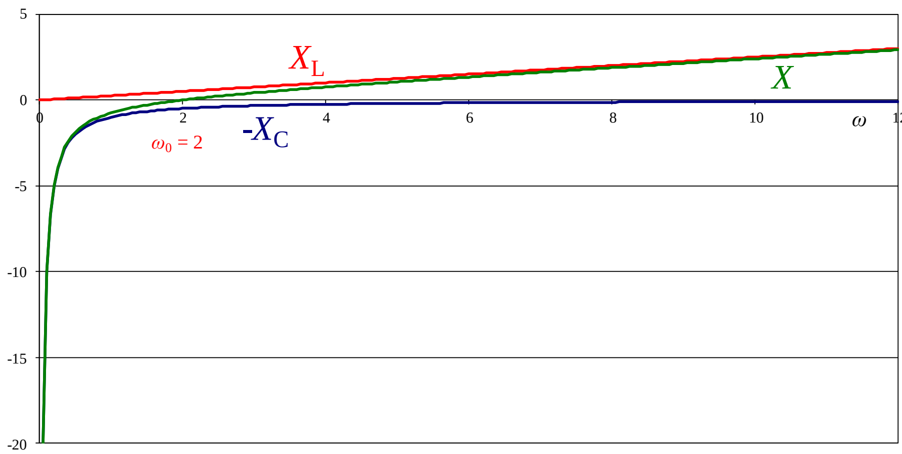
$Q_s = \rho/R = X_{L0}/R = 0{,}5$

$\dot{U}_i = \dot{U}_{R0} = 1\angle 0^\circ$; $\dot{I} = 1\angle 0^\circ$

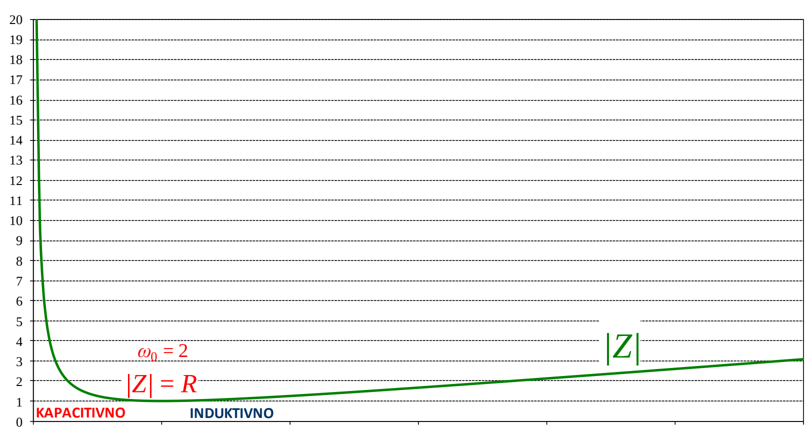
$\dot{U}_{L0} = 0{,}5\angle 90^\circ$ $\dot{U}_{C0} = 0{,}5\angle -90^\circ$



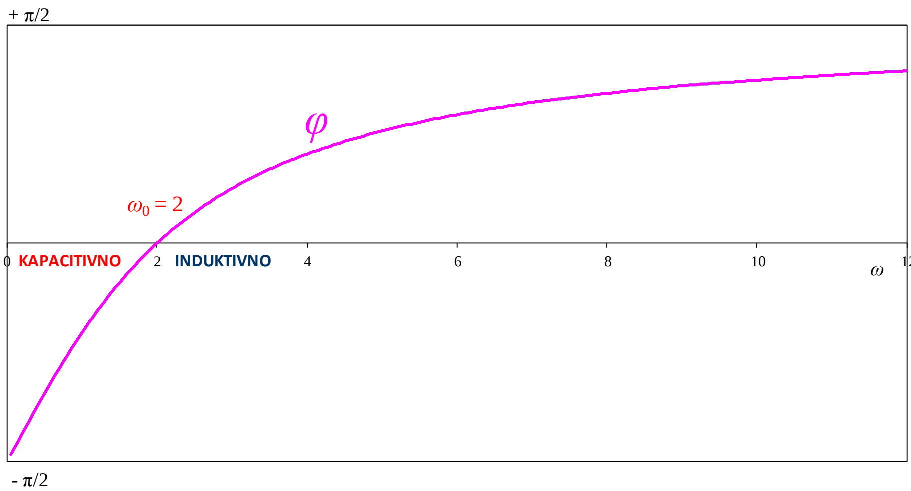
Reaktancije X_L, $-X_C$ i $X = X_L - X_C$



Modul impedancije $|Z|$



Kut impedancije φ



Nadvišenje napona u rezonanciji

- Uvodimo normiranu frekvenciju: $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

$$X_L = \omega L = RQ_s x \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{RQ_s}{x}$$

$$|\underline{Z}(\omega)| = R\sqrt{1 + Q_s^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \qquad \varphi(\omega) = arctg\left(Q_s\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_s^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Nadvišenje napona u rezonanciji

$$\frac{U_R}{U_i} = \frac{1}{\sqrt{1+Q_s^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \qquad x_{\max,U_R} = 1 \qquad \frac{U_{R,\max}}{U_i} = 1$$

$$\frac{U_L}{U_i} = \frac{Q_s x}{\sqrt{1+Q_s^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \qquad x_{\max,U_L} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q_s^2}}} \qquad \frac{U_{L,\max}}{U_i} = \frac{2Q_s^2}{\sqrt{4Q_s^2-1}}$$

$$\frac{U_C}{U_i} = \frac{Q_s}{x\sqrt{1+Q_s^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \qquad x_{\max,U_C} = \sqrt{1-\frac{1}{2Q_s^2}} \qquad \frac{U_{C,\max}}{U_i} = \frac{2Q_s^2}{\sqrt{4Q_s^2-1}}$$

Nadvišenje napona u rezonanciji

$$x_{\max,U_C} = \sqrt{1-\frac{1}{2Q_s^2}} \le 1 \le x_{\max,U_L} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2Q_s^2}}}$$

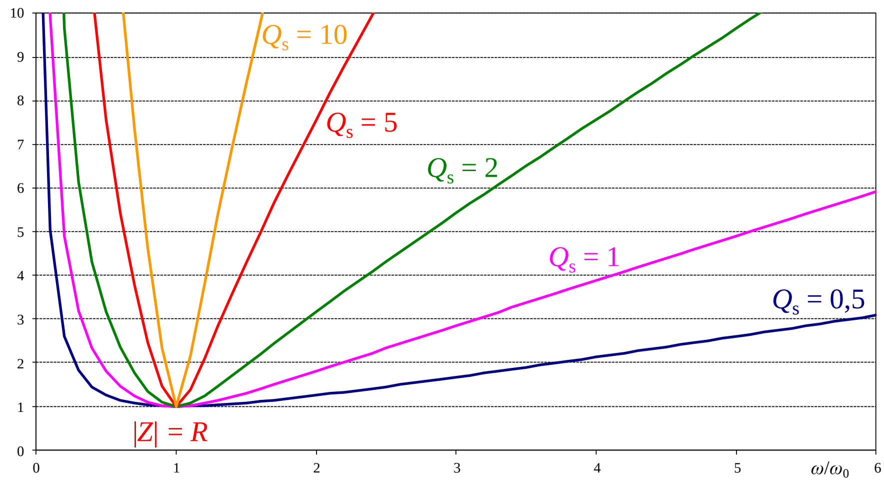
$$\frac{U_{L,\max}}{U_i} = \frac{U_{C,\max}}{U_i} = \frac{2Q_s^2}{\sqrt{4Q_s^2-1}}$$

- Maksimalne vrijednosti napona na zavojnici i kondenzatoru veće su od napona izvora:

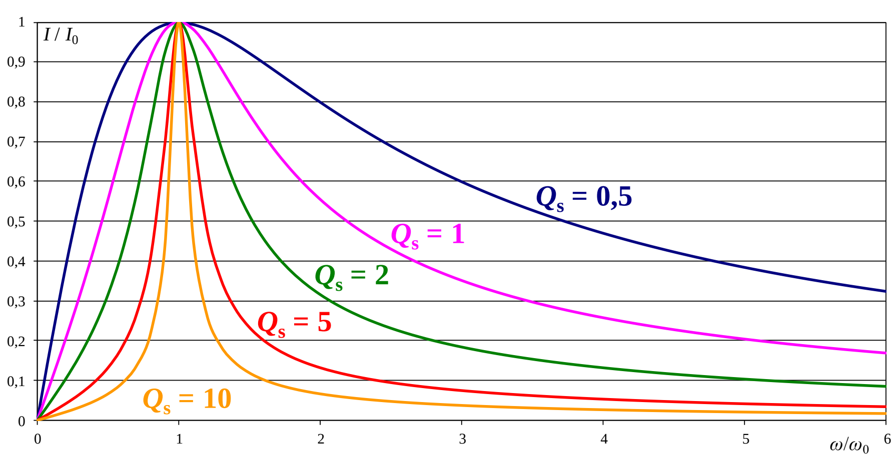
$$\frac{U_{L,\max}}{U_i} = \frac{U_{C,\max}}{U_i} = \frac{2Q_s^2}{\sqrt{4Q_s^2-1}} > 1$$ ako je: $Q_s > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$

tj. ako je: $\rho > \frac{R}{\sqrt{2}}$ $\quad R < \sqrt{2}\rho$

Modul impedancije za različite vrijednosti Q_s

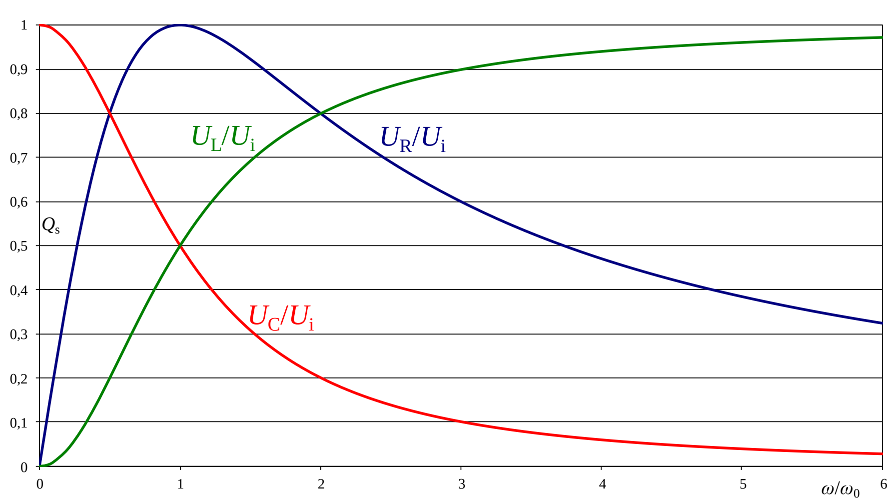


Struja izvora za različite vrijednosti Q_s

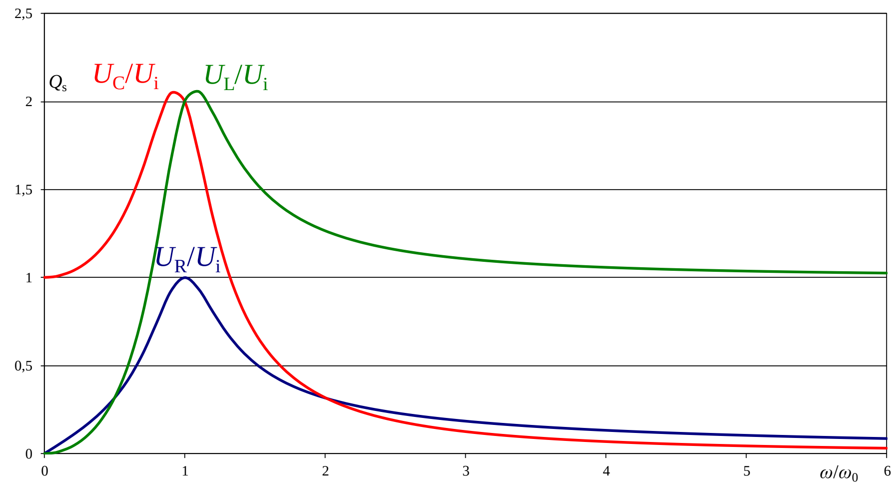


- Za $\omega = \omega_0$ – povećanje struje izvora
  - krug iz skupa frekvencija izdvaja struju određene frekvencije – selektivnije što je veći Q_s
  - Ovo svojstvo selekcije koristi se u VF uređajima
- Karakteristične točke:
  - $\omega = 0$: $X_L = 0$, $X_C = \infty$, $|\underline{Z}| = \infty$, $I = 0$
    $U_R = IR = 0$, $U_L = IX_L = 0$,
    $U_C = I\,X_C = 0 \cdot \infty = U_i$ – jer je na C otvoren krug
  - $\omega = \infty$: $X_L = \infty$, $X_C = 0$, $|\underline{Z}| = \infty$, $I = 0$
    $U_R = IR = 0$, $U_C = IX_C = 0$,
    $U_L = IX_L = 0 \cdot \infty = U_i$ – jer je na L otvoren krug
  - $\omega = \omega_0$: $X_L = X_C = \rho$, $|\underline{Z}| = R$, $I = U_i/R$
    $U_R = IR = U_i$, $U_L = IX_L = U_C = IX_C = U_i\rho/R = U_iQ_s$

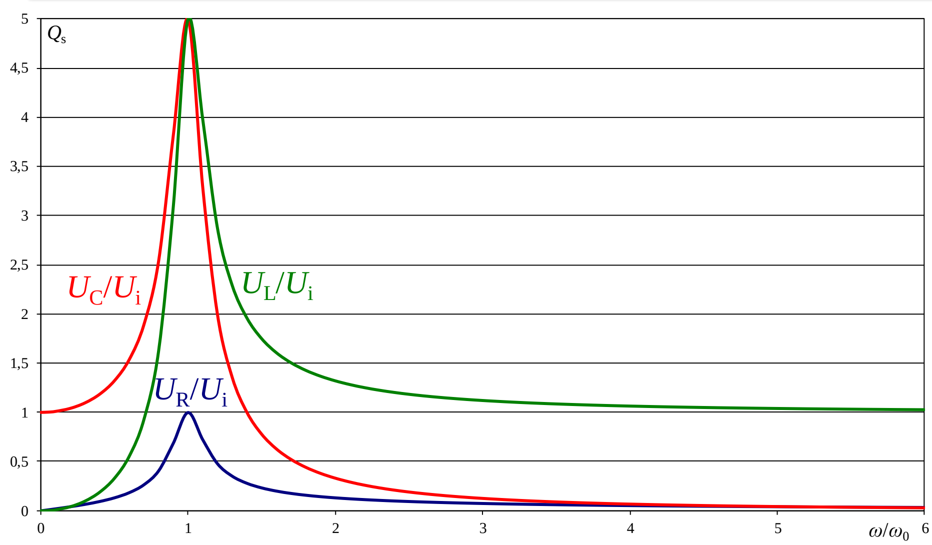
Naponi na elementima uz Q_s = 0,5



Naponi na elementima uz $Q_s = 2$

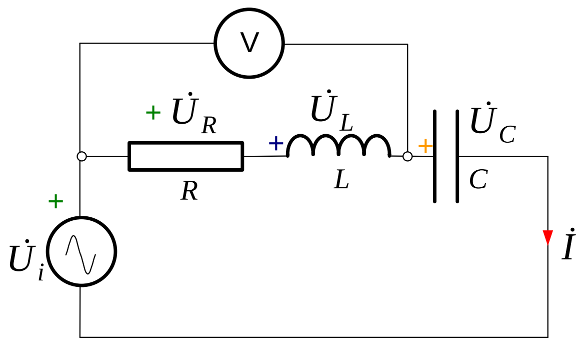


Naponi na elementima uz $Q_s = 5$



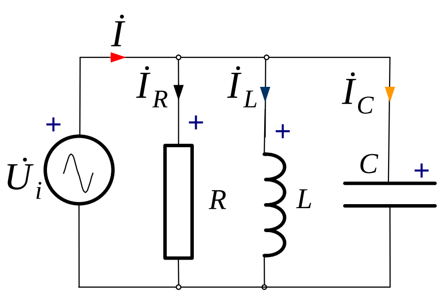
Primjer

Primjer 11. Serijski RLC krug je u rezonanciji. Ako je faktor dobrote 2, a napon izvora $5\ \mathrm{V}$, odrediti pokazivanje voltmetra.



Rješenje: $U_{\mathrm{V}} = 11{,}18\ \mathrm{V}$

Paralelni RLC krug priključen na naponski izvor



- Analiziraju se veličine u krugu pri promjeni frekvencije od 0 do ∞

- Admitancija kruga je:

$$\underline{Y} = G + jB = G + j(B_C - B_L) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Pri promjeni frekvencije

$$G = \text{konst.} \qquad B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

$$\underline{Y}(\omega) = |\underline{Y}(\omega)| e^{j\psi}$$

$$|\underline{Y}(\omega)| = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\psi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{B}{G}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

- Pri frekvenciji ω_0 imaginarni dio admitancije jednak je nuli. Frekvencija ω_0 naziva se **rezonantna frekvencija** i krug je u **rezonanciji**

Rezonancija

$$B(\omega_0) = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \underline{Y}(\omega_0) = G = \frac{1}{R}$$

- U rezonanciji je:

$$B_{C0} = \omega_0 C = \frac{1}{\sqrt{LC}} C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma \qquad B_{L0} = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$$

- γ - **valna vodljivost**; ρ - **valni otpor**:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (\Omega)$$

- Struje pri rezonanciji su:

$$I_{R0} = I_0 = U_i G \qquad I_{L0} = U_i B_{L0} = U_i \gamma \qquad I_{C0} = U_i B_{C0} = U_i \gamma$$

Faktor dobrote

- **faktor dobrote** Q_p – određuje selektivnost kruga

$$Q_p = \frac{I_{L0}}{I_i} = \frac{I_{C0}}{I_i} = \frac{\gamma}{G} = \frac{B_{L0}}{G} = \frac{B_{C0}}{G}$$

Strujna rezonancija $I_{L0} = I_{C0}$

Primjer

Primjer 12: Za paralelni RLC krug odredite faktor dobrote i prikažite vektorski dijagram napona i struja u rezonanciji. Zadano je: R = 1 Ω, L = 0,25 H, C = 1 F, $\dot{U}_i = 1\angle 0^\circ$.

Rješenje:

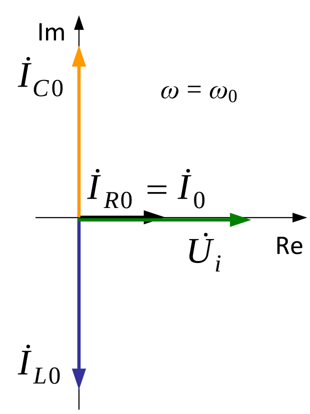
ω_0=2 s^{-1}, γ=2 S, B_{L0}=B_{C0}=2 S

$Q_\mathrm{p}=B_{\mathrm{L0}}/G=B_{\mathrm{L0}}\cdot R=2$

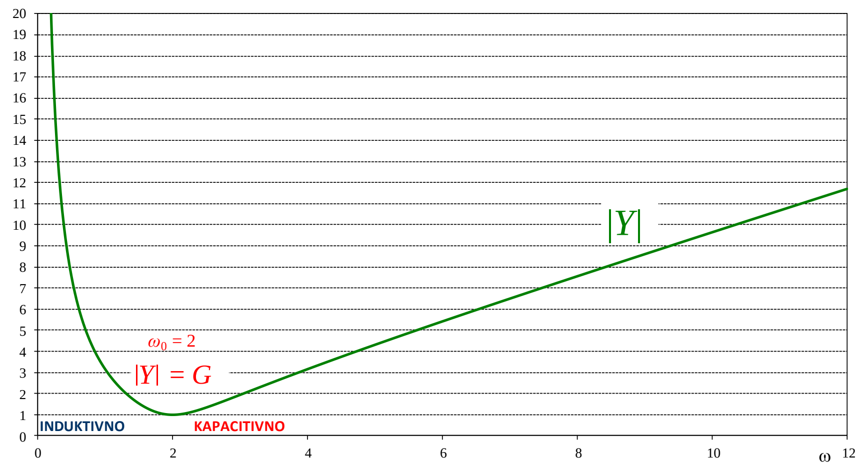
$\dot{I}_{R0} = \dot{I}_0 = 1\angle 0^\circ$

$\dot{I}_{L0} = 2\angle -90^\circ$

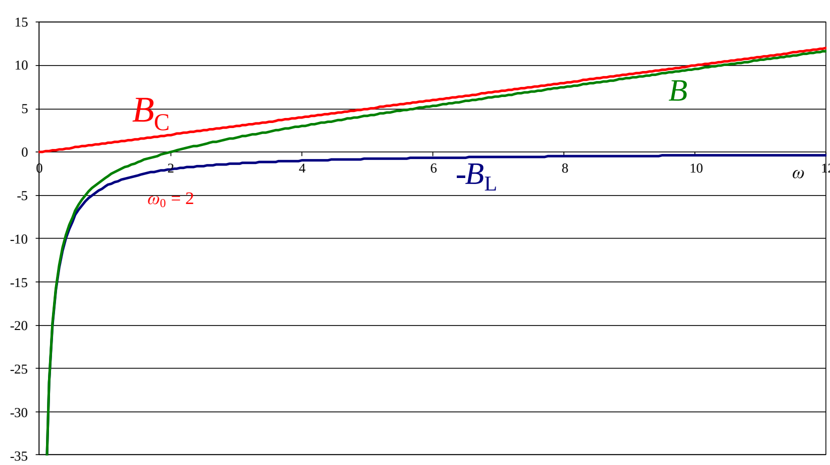
$\dot{I}_{C0} = 2\angle 90^\circ$



Modul admitancije $|Y|$



Susceptancije B_C, $-B_L$ i $B = B_C - B_L$



Impedancija paralelnog RLC kruga

- Impedancija je:

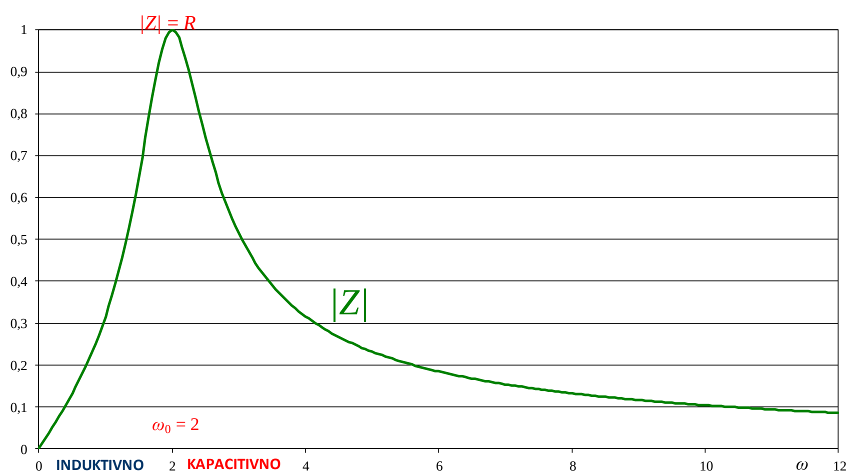
$$\underline{Z}(\omega)=\frac{1}{\underline{Y}(\omega)}=\frac{G}{G^2+B^2(\omega)}-j\frac{B(\omega)}{G^2+B^2(\omega)}=\left|\underline{Z}\right|e^{j\varphi}$$

$$\left|\underline{Z}(\omega)\right|=\frac{1}{\left|\underline{Y}(\omega)\right|}=\frac{1}{\sqrt{G^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

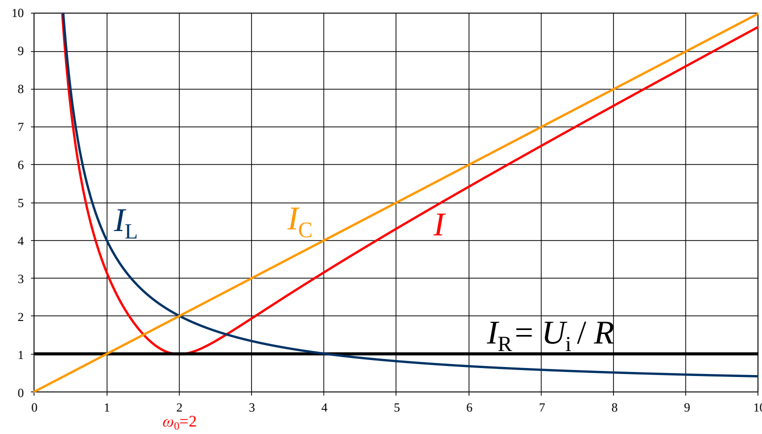
$$\varphi=\mathrm{arctg}\left(-\frac{B}{G}\right)=-\psi$$

- Struja izvora je: $\dot{I}=\dot{U}_i\cdot\underline{Y}$; $\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0}=\frac{\dot{U}_i\cdot\underline{Y}}{\dot{U}_i\cdot G}=\frac{\underline{Y}}{G}$
    - u rezonanciji je minimalna $I_0=U_iG$ pa se ova rezonancija naziva i **antirezonancija**

Modul impedancije paralelnog RLC kruga

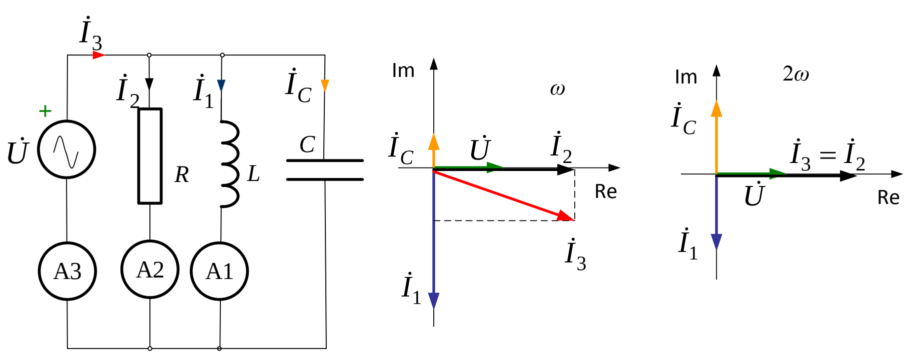


Struje u krugu



Primjer

Primjer 13. Pri frekvenciji ω instrumenti u krugu prema slici pokazuju $I_1 = 4$ A, $I_2 = 4$ A i $I_3 = 5$ A, uz $X_L < X_C$. Kolika je struja I_3 ako frekvenciju izvora udvostručimo?

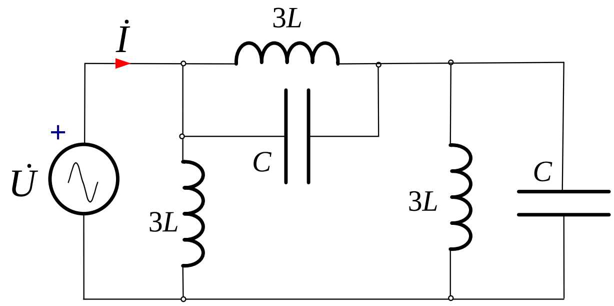


Rješenje: $I'_3 = 4$ A

Primjer

Primjer 14. Odrediti frekvenciju pri kojoj će struja izvora prema slici biti jednaka nuli. Zadano je:

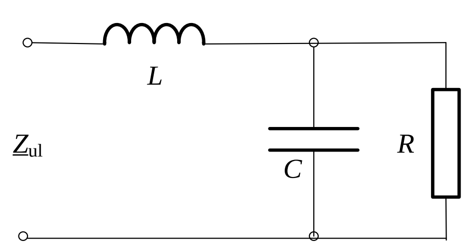
$L = 1{,}6\ \mathrm{mH},\ \ C = 100\ \mu\mathrm{F}.$



Rješenje: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2500\ \mathrm{s}^{-1}$, odnosno $f_0 = 398\ \mathrm{Hz}$

Primjer

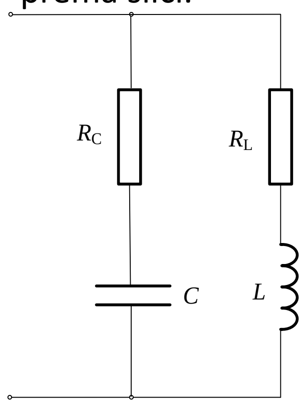
Primjer 15. Za spoj prema slici ulazna impedancija kod frekvencije $\omega = 0$ iznosi $5\ \Omega$, a kod rezonantne frekvencije je $2{,}5\ \Omega$. Koliki je X_C?



Rješenje: $X_C = 5\ \Omega$

Primjer

Primjer 16. Odrediti rezonantnu frekvenciju za krug prema slici.



$$\underline{Y} = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C - j\dfrac{1}{\omega C}}$$

$$\underline{Y} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right) +$$

$$+ j\left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}\right)$$

Rezonancija:

$$\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0 \Rightarrow \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

Primjer

$$\frac{\dfrac{1}{\omega_0 C}}{R_C^2 + \dfrac{1}{(\omega_0 C)^2}} = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - \rho^2}{R_C^2 - \rho^2}} \quad ; \quad \rho^2 = \frac{L}{C}$$

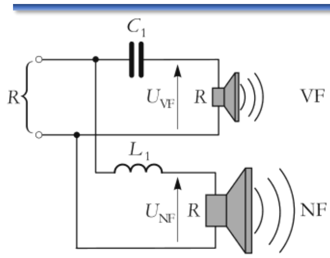
- Da bi se ispunio uvjet za rezonanciju mora biti:

$$R_L^2 > \frac{L}{C} \ \text{ i } \ R_C^2 > \frac{L}{C} \quad \text{ili} \quad R_L^2 < \frac{L}{C} \ \text{ i } \ R_C^2 < \frac{L}{C}$$

- Specijalni slučaj:

$$R_L^2 = R_C^2 = \frac{L}{C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{0}{0} \qquad \text{krug rezonira na svim frekvencijama}$$

Primjena - ulazna impedancija zvučničke skretnice



$$L = \frac{R}{2\pi f_k}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_k R}$$

$$\Rightarrow \quad f_k = \frac{R}{2\pi L} = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$R^2 = \frac{L}{C}$$

Znači krug je u rezonanciji na svim frekvencijama:

$$\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0 \qquad \underline{Y} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C - j\dfrac{1}{\omega C}}\right\}$$

Primjena - ulazna impedancija zvučničke skretnice

$$\underline{Y} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2}\right)$$

$$\underline{Y} = R\left(\frac{1}{\dfrac{L}{C} + \omega^2 L^2} + \frac{1}{\dfrac{L}{C} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}\right) = R\frac{\dfrac{L}{C} + \omega^2 L^2 + \dfrac{L}{C} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}{\left(\dfrac{L}{C} + \omega^2 L^2\right)\left(\dfrac{L}{C} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}\right)}$$

$$\underline{Y} = R\frac{\left(\omega^2 L^2 + 2\dfrac{L}{C} + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}\right)}{\omega^2 \dfrac{L^3}{C} + 2\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \dfrac{L}{\omega^2 C^3}} = R\frac{\left(\omega L + \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2\left(\omega L + \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Primjena - ulazna impedancija zvučničke skretnice

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = R$$

Ulazna impedancija je radna, jednaka otporu *R* i neovisna o frekvenciji!