



## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

# 2. Osnovni elementi strujnih krugova



© [Sveučilište u Zagrebu](#) · [Fakultet elektrotehnike i računarstva](#)  
[Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja](#)



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](#).

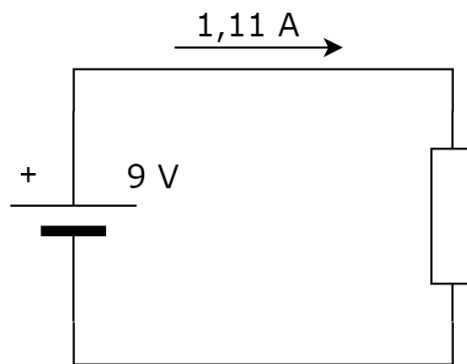


## Električni ili strujni krugovi

- **električni ili strujni krugovi** su zatvorene vodljive petlje dizajnirane za kontrolirano gibanje naboja
- krug se sastoji od **aktivnih elemenata** (koji unose energiju u strujni krug) i **pasivnih elemenata** (koji troše ili pohranjuju energiju)
  - ove elemente međusobno spajamo **vodičima**
- idealni strujni krug smatramo **sustavom bez gubitka energije**
  - sva energija koju aktivni elementi unose u krug potroši se ili pohranjuje na pasivnim elementima
  - vodiče smatramo idealnim elementima koji provode struju bez gubitaka

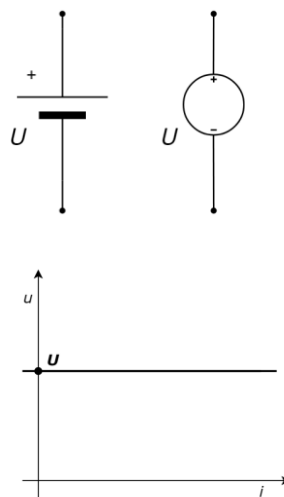
## Aktivni elementi strujnih krugova - Idealni istosmjerni naponski izvor

- na slici vidimo shematski prikaz strujnog kruga iz prethodne lekcije
- bateriju smo modelirali **idealnim naponskim izvorom**
  - aktivni element strujnog kruga koji **uvijek zadržava isti iznos napona na priključnicama**, dok struja ovisi o priključenom trošilu



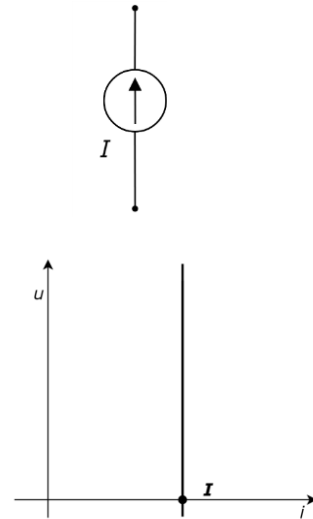
## Idealni istosmjerni naponski izvor (2)

- simbol idealnog istosmjernog naponskog izvora je prikazan na slici
  - u pravilu ćemo koristiti simbol prikazan na lijevoj strani
- umjesto oznake  $U$  često ćemo vidjeti i oznaku  $E$  ("elektromotorna sila")
  - obje notacije označavaju isto – iznos napona na polovima izvora
- s desne strane možemo vidjeti i naponsko-strujnu karakteristiku idealnog istosmjernog naponskog izvora



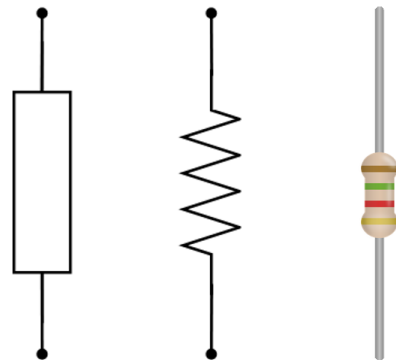
## Idealni istosmjerni strujni izvor

- idealni istosmjerni strujni izvor **zadržava isti iznos struje kroz granu u kojoj se nalazi**, dok iznos napona na priključnicama ovisi o priključenom trošilu
- simbol za istosmjerni strujni izvor vidimo na slici
- s desne strane možemo vidjeti naponsko-strujnu karakteristiku idealnog istosmjernog strujnog izvora



## Pasivni elementi strujnih krugova – otpornik

- **otpornik je pasivni element koji troši energiju u strujnom krugu**
  - električna energija se u otporniku pretvara u toplinsku energiju
- simbol za otpornik možemo vidjeti na slici
  - mi ćemo se držati simbola "pravokutnika"
  - s krajnje desne strane možemo vidjeti primjer otpornika iz stvarnog svijeta



## Električni otpor i električna vodljivost

- Električni otpor vodiča  $R$  ovisan je o vrsti materijala, duljini vodiča  $l$  te površini poprečnog presjeka  $S$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

- mjerna jedinica za električni otpor je **om** (simbol  $\Omega$ ):  $[R] = \Omega = \text{V/A}$
- $\rho$  je električna otpornost i svojstvo je materijala  $[\rho] = \Omega\text{m}$

- Električna vodljivost je recipročna vrijednost električnog otpora

$$G = 1/R$$

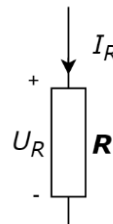
mjerna jedinica za električnu vodljivost je **simens**  $[G] = \text{S} = \text{A/V}$

## Ohmov zakon

- Odnos napona i struje na otporu  $R$  je:

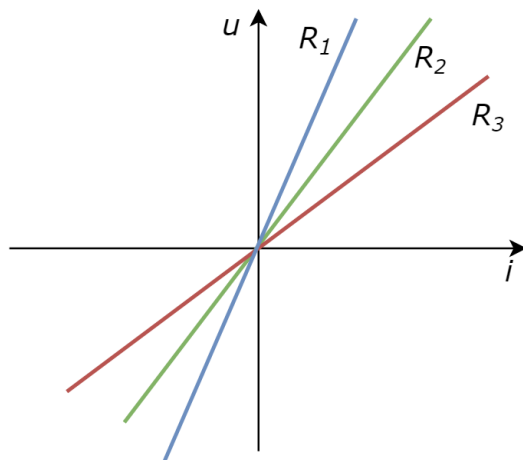
$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

- ova formula je **Ohmov zakon**, koji kaže da je **napon na linearnom otporniku direktno proporcionalan struji koja prolazi kroz otpornik**
- simbolima "+" i "-" označavamo mjesta višeg, odnosno nižeg potencijala
- struja ulazi u otpor  $R$  na njegov kraj koji je na višem potencijalu a izlazi na kraju koji je na nižem potencijalu – pad napona na otporu  $U_R$



## Naponsko-strujna karakteristika linearnih otpornika

- kao što i samo ime govori, naponsko-strujna karakteristika linearnih otpornika je pravac čiji nagib odgovara iznosu otpora
- odgovorite:
  - koji od linearnih otpornika s naponsko-strujnim karakteristikama sa slike ima najveći, a koji najmanji otpor?

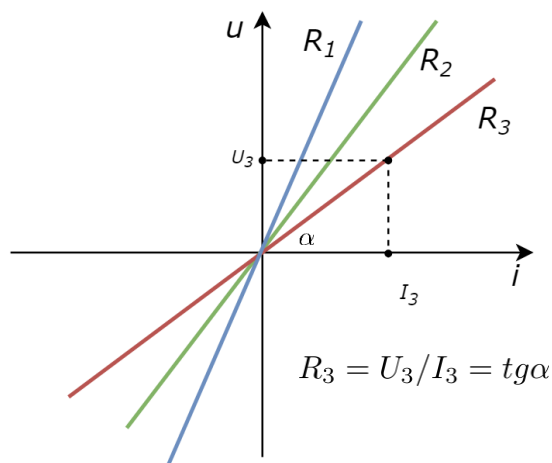


## Naponsko-strujna karakteristika linearnih otpornika

- za isti iznos napona kroz otpornik  $R_1$  ide najmanja, a kroz otpornik  $R_3$  najveća struja, što znači da vrijedi:

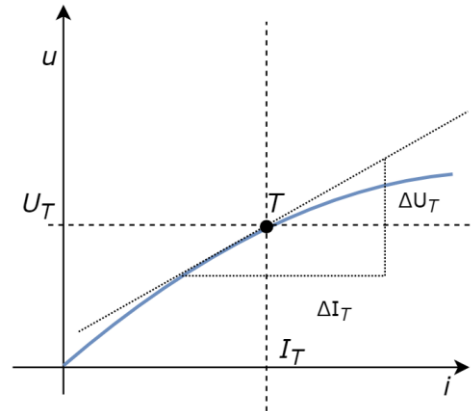
$$R_1 > R_2 > R_3$$

- ili, jednostavnije:  
veći kut  $\alpha$  = jače "protivljenje" =  
= veći otpor



## Nelinearni otpornici

- za razliku od linearnih otpornika, kod **nelinearnih otpornika omjer napona i struje nije konstantan**
  - žaruljica je primjer nelinearnog otpornika
- budući da kod nelinearnih otpornika ne postoji jedinstvena konstanta  $R$ , za njih uvodimo pojmove **statičkog** i **dinamičkog** otpora

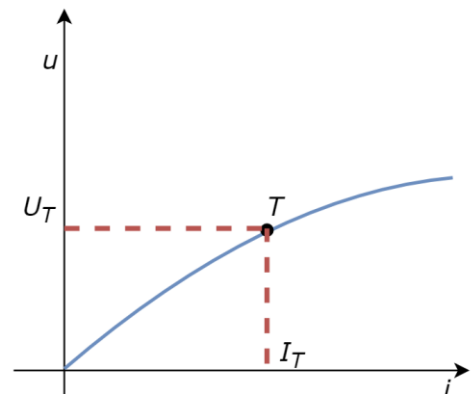


## Statički električni otpor

- statički električni otpor opisuje koja je **vrijednost otpora u odabranoj radnoj točki**

$$R_{sT} = U_T / I_T$$

- različite radne točke imaju različite vrijednosti statičkog otpora

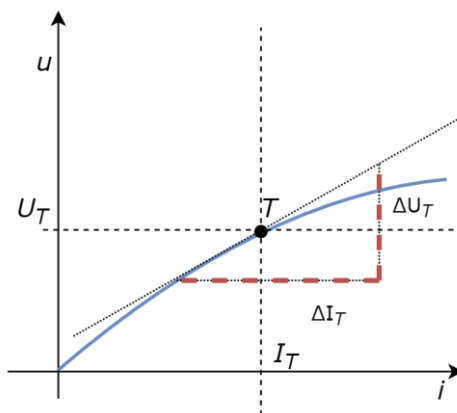


## Dinamički električni otpor

- dinamički električni otpor opisuje **kako se mijenja napon sa malim izmjenama struje kroz element (i obrnuto)**
- računamo ga kao derivaciju funkcije ovisnosti napona o struji (ili nagib tangente) u odabranoj radnoj točki

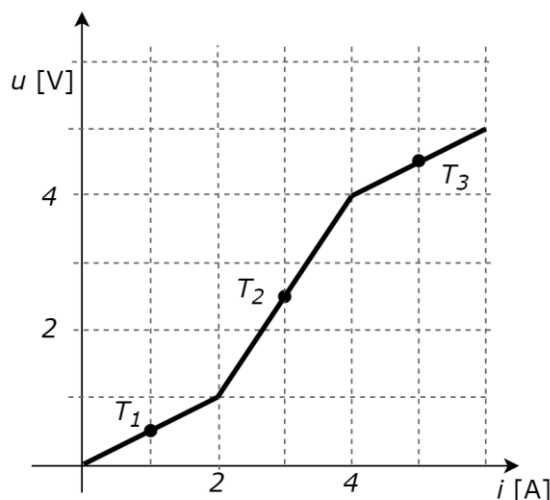
$$R_{dT} = (dU/dI)_T$$

- uočimo da kod linearnih otpornika za svaku radnu točku T vrijedi  $R_{sT} = R_{dT} = R$



## Primjer 1

- odgovorite:
  - koliki su statički i dinamički otpori u točkama  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$ ?



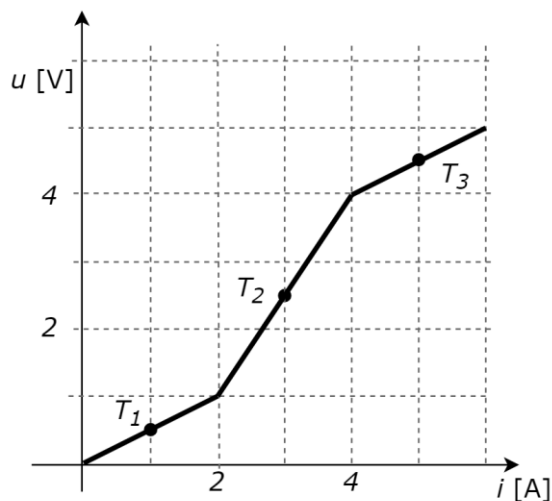
## Rješenje

- statičke otpore lako izračunamo jednostavnim očitanjem vrijednosti  $u$  u pojedinim točkama:

$$R_{sT_1} = u(T_1)/i(T_1) = 0,5/1 = 0,5\Omega$$

$$R_{sT_2} = u(T_2)/i(T_2) = 2,5/3 = 0,83\Omega$$

$$R_{sT_3} = u(T_3)/i(T_3) = 4,5/5 = 0,9\Omega$$



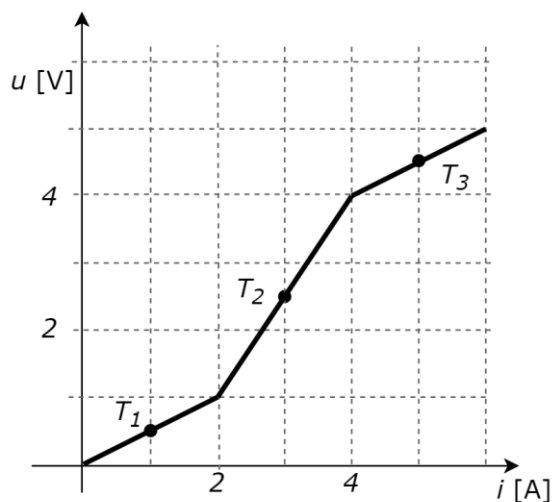
## Rješenje

- dinamički otpor odgovara nagibu u zadanoj točki, kojeg u sva tri slučaja lako računamo budući da je krivulja zapravo izlomljeni pravac:

$$R_{dT_1} = (du/di)_{T_1} = 1/2 = 0,5\Omega$$

$$R_{dT_2} = (du/di)_{T_2} = 3/2 = 1,5\Omega$$

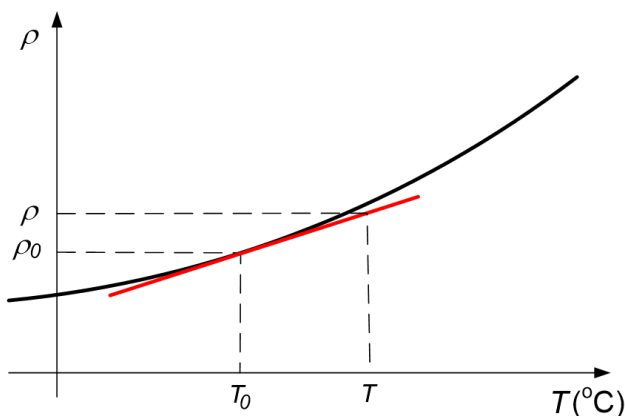
$$R_{dT_3} = R_{dT_1} = 0,5\Omega$$





## Temperaturna ovisnost otpornosti

- Otpornost metala povećava se s povećanjem temperature



## Temperaturna ovisnost otpornosti

- Tu ovisnost lineariziramo za male promjene temperature:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

- Na isti način je ovisnost otpora o temperaturi:

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

- gdje je  $\alpha$  temperaturni koeficijent (1/K)
  - za bakar  $\alpha = 0,00393$  (1/K)

## Snaga na otporniku i Jouleov zakon 1

---

- Pri prolasku struje kroz vodič elektroni se ubrzavaju i sudaraju s jezgrama i drugim elektronima gubeći pri tom kinetičku energiju
- Ta kinetička energija pretvara se u toplinsku
- Količina naboja koja u vremenu  $dt$  prođe vodičem između točaka A i B je:

$$dq = i dt$$

- Naboj pri tome izgubi energiju:

$$dw = dq \cdot u_{AB} = u_{AB} \cdot i dt$$

## Snaga na otporniku i Jouleov zakon 2

---

- Snaga na otporniku je:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u(t) \cdot i(t) = i(t)^2 \cdot R$$

Jouleov zakon!

## Primjer 2

---

- Karakteristika napon - struja nelinearnog otpornika aproksimirana je parabolom  $U = 0,5I^2$ . Odrediti statički i dinamički otpor otpornika kod napona 2 V.

## Primjer 2

---

- Karakteristika napon - struja nelinearnog otpornika aproksimirana je parabolom  $U = 0,5I^2$ . Odrediti statički i dinamički otpor otpornika kod napona 2 V.

$$U_T = 2\text{V} \Rightarrow I_T = \sqrt{2 \cdot U_T} = 2 \cdot 2 = 2\text{A}$$

$$R_{sT} = U_T / I_T = 2 / 2 = 1\Omega$$

$$R_{dT} = (dU/dI)_T = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 = 2\Omega$$

## Primjer 3

---

- Otpor namota električnog motora koji se nalazi u prostoriji u kojoj je temperatura  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  iznosi  $1,3\ \Omega$ . U trajnom pogonu motora izmjeren mu je otpor namota od  $1,606\ \Omega$ . Kolika je temperatura namota motora u trajnom pogonu ako je on izrađen od bakra?

## Primjer 3

---

- Otpor namota električnog motora koji se nalazi u prostoriji u kojoj je temperatura  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  iznosi  $1,3\ \Omega$ . U trajnom pogonu motora izmjeren mu je otpor namota od  $1,606\ \Omega$ . Kolika je temperatura namota motora u trajnom pogonu ako je on izrađen od bakra?

$$\alpha_{Cu} = 0,00393\text{K}^{-1}$$

$$t_0 = 30^{\circ}\text{C}$$

$$R_0 = 1,3\ \Omega$$

$$R = 1,606\ \Omega$$

$$R = R_0(1 + \alpha_{Cu}\Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{R/R_0 - 1}{\alpha_{Cu}} = 59,89^{\circ}\text{C}$$

$$\Rightarrow t = 30 + 59,89 \approx 90^{\circ}\text{C}$$

## Primjer 4

---

- S porastom temperature otpori dva otpornika rastu linearno od iste početne vrijednosti  $R$  (pri temperaturi  $20^\circ\text{C}$ ) do vrijednosti  $3R$  za prvi odnosno  $2R$  za drugi otpornik na nekoj temperaturi  $t$ .  
Koliki je omjer  $\alpha_1/\alpha_2$ ?

## Primjer 4

---

- S porastom temperature otpori dva otpornika rastu linearno od iste početne vrijednosti  $R$  (pri temperaturi  $20^\circ\text{C}$ ) do vrijednosti  $3R$  za prvi odnosno  $2R$  za drugi otpornik na nekoj temperaturi  $t$ .  
Koliki je omjer  $\alpha_1/\alpha_2$ ?

$$3R = R(1 + \alpha_1 \Delta t)$$

$$2R = R(1 + \alpha_2 \Delta t)$$

$$\Rightarrow \alpha_1/\alpha_2 = 2$$

## Primjer 5

---

- Na otporniku za kočenje vjetrogeneratora koji ima otpor  $R=1/8 \Omega$  razvija se snaga od 2 kW. Kolika je struja kroz otpornik? Kolika se energija utroši na otporniku ako tijekom jednog dana kroz njega teče struja u ukupnom vremenu od 2 sata?

## Primjer 5

---

- Na otporniku za kočenje vjetrogeneratora koji ima otpor  $R=1/8 \Omega$  razvija se snaga od 2 kW. Kolika je struja kroz otpornik? Kolika se energija utroši na otporniku ako tijekom jednog dana kroz njega teče struja u ukupnom vremenu od 2 sata?

$$R = 0,125\Omega$$

$$P = 2000\text{W}$$

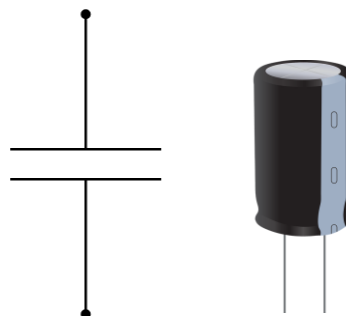
$$T = 7200\text{s}$$

$$P = RI^2 \Rightarrow I = \sqrt{P/R} = \sqrt{2000/0,125} = 126,49\text{A}$$

$$W = P \cdot T = 2000 \cdot 7200 = 14,4\text{MJ}$$

## Kondenzator

- kondenzator je pasivni element sa svojstvom **pohranjivanja električne energije**
- na slici desno možemo vidjeti simbol za kondenzator kao i primjer kondenzatora iz stvarnog svijeta (paralelne plohe su spiralno namotane unutar elementa)

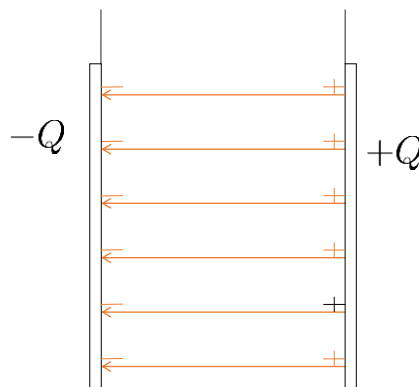


## Kondenzatori i kapacitet

- Kondenzatori su uređaji za pohranu naboja
- Kapacitet je temeljna karakteristika kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U}$$

- jednak je omjeru naboja i napona među pločama



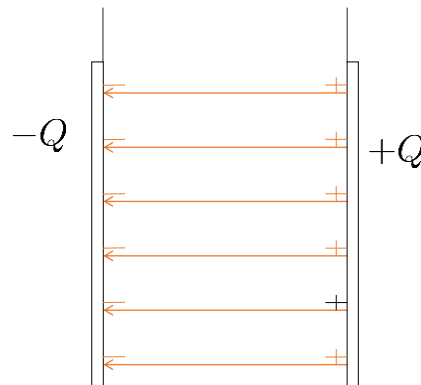
## Kondenzatori i kapacitet

- mjerna jedinica za kapacitet je **farad**

$$[C] = \text{F}$$

- ako je površina ploha  $S$ , nalaze se na udaljenosti  $d$  a između njih je dielektrik s **dielektričkom konstantom**  $\varepsilon$ , onda kapacitet možemo izračunati i preko formule:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d}$$



## Energija pohranjena u kondenzatoru

- Promjena iznosa energije  $dW$  na kondenzatoru povezana je s promjenom naboja  $dq$  jednačbom

$$dW = U \cdot dq = U \cdot C dU$$

- Ako je napon između ploča kondenzatora  $U$ , u kondenzatoru je pohranjena energija

$$W = \int_0^U C \cdot U dU = \frac{C \cdot U^2}{2}$$



## Primjer 6

---

- Zračni pločasti kondenzator je nabijen nabojem  $Q$  i odspojen od izvora. Odredite kako se promijeni napon na kondenzatoru, energija pohranjena u kondenzatoru i kapacitet ako se razmak između ploča poveća dva puta.

## Primjer 6

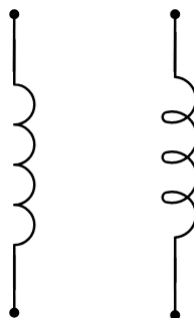
---

- Zračni pločasti kondenzator je nabijen nabojem  $Q$  i odspojen od izvora. Odredite kako se promijeni napon na kondenzatoru, energija pohranjena u kondenzatoru i kapacitet ako se razmak između ploča poveća dva puta.

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 = Q; d_2 = 2d_1 \\ C_1 &= \varepsilon \frac{S}{d_1} & C_2 &= \varepsilon \frac{S}{d_2} = \varepsilon \frac{S}{2d_1} = 0,5C_1 \\ U_1 &= \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} & U_2 &= \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{0,5C_1} = 2U_1 \\ W_1 &= \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{Q^2}{2C_1} & W_2 &= \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2 \cdot 0,5C_1} = 2W_1 \end{aligned}$$

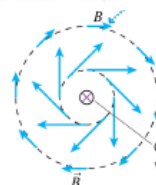
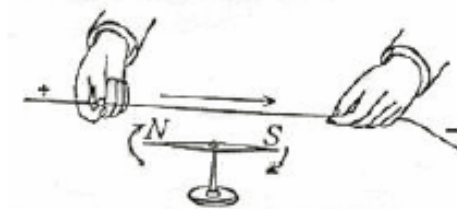
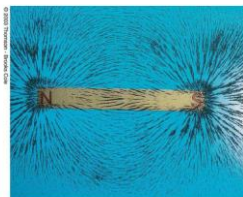
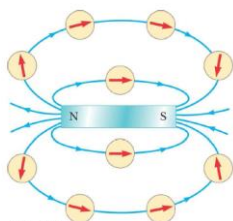
## Zavojnica

- zavojnica je element sa svojstvom **pohranjivanja magnetske energije**
- najjednostavnije ju je zamisliti kao električni vodič oblikovan u **gusti niz paralelnih zavoja**, što kod **protjecanja struje** kroz vodič ima kao rezultat **stvaranje magnetskog polja** unutar zavoja
- simbol za zavojnicu vidimo s desne strane, kao i primjere zavojnica iz stvarnog svijeta



## Osnove magnetizma (ponavljanje)

- Magnetsku indukciju uzrokuju permanentni magneti i električne struje



- Mjerna jedinica za magnetsku indukciju **tesla**  $[B] = T$

## Osnove magnetizma 3

- razmatramo tanki vodljivi prsten kojim teče struja  $I$
- magnetski tok je ovisan o iznosu struje prstena o prema jednadžbi

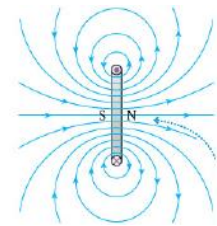
$$\Phi = L \cdot I$$

gdje je  $L$  induktivitet prstena – vodiča kojim teče struja i karakteristika je geometrije vodiča

- mjerna jedinica za magnetski tok je **veber**, dok je za induktivitet mjerna jedinica **henri**

$$[\Phi] = \text{Wb}$$

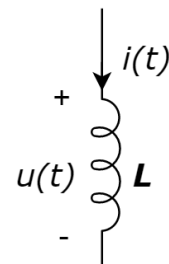
$$[L] = \text{H}$$



## Inducirani napon na zavojnici

- ako se mijenja jakost struje kroz zavojnicu, mijenja se i jakost magnetskog polja, što rezultira pojavom da se na krajevima zavojnice stvara **inducirani napon**
  - zavojnica se opire promjeni struje stvarajući inducirani napon koji nastoji kompenzirati tu promjenu
- iznos induciranog napona direktno je proporcionalan izmjeni struje u vremenu u promatranom trenutku:

$$u(t) = L \cdot di(t)/dt$$



## Energija pohranjena u induktivitetu

---

- Energija pohranjena u induktivitetu može se dobiti integracijom:

$$W = \int p(t)dt = \int u(t)i(t)dt = \int L \frac{di(t)}{dt} i(t)dt$$

$$W = \int_0^I L \cdot i di = L \frac{I^2}{2}$$

### Primjer 7

---

- Zavojnicom induktiviteta 1mH teče struja:

a)  $i(t) = 5t[\text{A}], t > 0$

b)  $i(t) = 5 \sin(t)[\text{A}], t > 0$

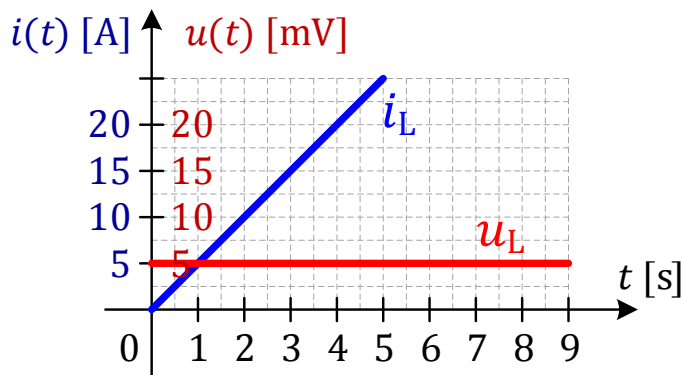
Skicirajte struju i napon na zavojnici. Odredite energiju pohranjenu u zavojnici u trenutku  $t = 3\text{s}$ .

## Primjer 7

- Zavojnicom induktiviteta 1mH teče struja:

a)  $i(t) = 5t[\text{A}], t > 0$

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = L \cdot 5 \text{V} = 5 \text{mV}$$

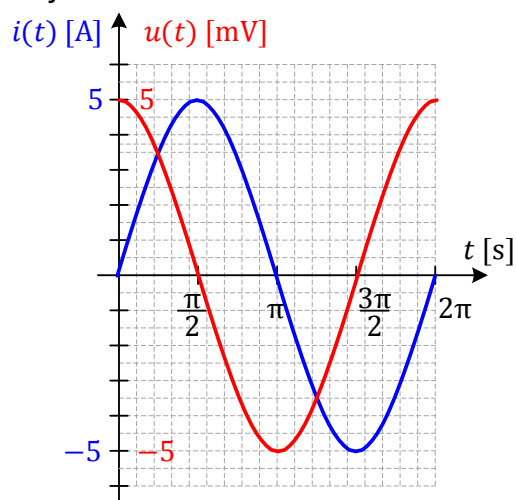


## Primjer 7

- Zavojnicom induktiviteta 1mH teče struja:

b)  $i(t) = 5 \sin(t)[\text{A}], t > 0$

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = L \cdot 5 \cos(t)[\text{V}]$$



## Primjer 7

---

- Zavoјnicom induktiviteta 1mH teče struja:

a)  $i(t) = 5t[\text{A}], t > 0$

Odredite energiju pohranjenu u zavoјnici u trenutku  $t = 3\text{s}$ .

a) 
$$W_{t=3} = \int L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = 25 \cdot L \int_0^3 t dt = 25 \cdot L \cdot \frac{t^2}{2} =$$
$$= 25 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3^2}{2} = 112,5\text{mJ}$$

ili, jednostavnije 
$$W_{t=3} = \frac{Li_{t=3}^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 15^2}{2} = 112,5\text{mJ}$$

## Primjer 7

---

- Zavoјnicom induktiviteta 1mH teče struja:

b)  $i(t) = 5 \sin(t)[\text{A}], t > 0$

Odredite energiju pohranjenu u zavoјnici u trenutku  $t = 3\text{s}$ .

b) 
$$W_{t=3} = \frac{L \cdot i_{t=3}^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot (5 \sin(3))^2}{2} = 0,2489 \text{ mJ}$$