



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Signalni i sustavi

Profesor
Branko Jeren

28. veljače 2017.



Signal

- izgovaram rečenicu (koja je ujedno i motivacijska):

'RECITE DA - SIGNALIMA I SUSTAVIMA'

- izgovorena rečenica je i napisana, pa je informaciju koju nosi moguće predati primatelju na dva načina:
 - kao zvučni signal
 - slušatelj prima informaciju kao varijaciju tlaka zraka koju njegovo uho osjeća, transformira i prosljeđuje prema mozgu gdje je odgovarajuće interpretirana
 - kao signal slike
 - napisanu rečenicu čitatelj prima putem oka koje prima, transformira i prosljeđuje ovaj oblik signala prema mozgu koji ga odgovarajuće interpretira



Govorni signal

- informacija prenesena iz mozga govornika, do mozga slušatelja, doživljava više transformacija
 - mozak govornika željenu poruku pretvara u neuronske signale koje upućuje prema njegovom vokalnom traktu gdje upravljaju s postupkom artikulacije
 - dijafragma, pluća i glasnice stvaraju strujanje zraka odgovarajuće frekvencije
 - jezik i usne moduliraju strujanje zraka, izazivajući odgovarajuću vremensku varijaciju tlaka okolnog zraka, i tako nastaje zvučni (akustički) signal koji nosi informaciju iz mozga govornika
 - zvučni signal propagira kroz zrak prema slušatelju
 - slušateljevi ušni bubnjići registriraju varijaciju tlaka, pretvarajući u živčane impulse, i upućuju prema mozgu



Uvod u signale i sustave

Signalni kao
funkcije
Signalni u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Transformacije zvučnog signala

- zvučni signal generiran je govornikovim izgovorom a propagiranjem kroz zrak doživljava razne transformacije (prigušenje, jeka, ...)
- otvara se pitanje kako odgovarajućim tehničkim postupcima i sustavima zvučni signal pojačati i učiniti ga dostupnim većem auditoriju
- zvučni (govorni) signal pojačan je i prenesen auditoriju uz pomoć audio sustava koji tvore mikrofon, pojačalo i zvučnici
- provode se sljedeće transformacije govornog signala:
 - mikrofon transformira varijaciju tlaka u varijaciju napona
 - varijaciju napona iz mikrofona električko pojačalo transformira u varijaciju napona odnosno struje i pobuđuje zvučnik
 - varijaciju napona iz pojačala zvučnik finalno transformira u varijaciju tlaka okolnog zraka (dakako veće amplitude nego je to bila na ulazu u mikrofon)



Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

Signalni u
frekvenčnom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Signal nosi informaciju

- naslovi i opisi prethodnih primjera sadrže ključne riječi koje se inače koriste u svakodnevnom govoru, a i u imenu su predmeta koji izučavamo,
 - signal
 - sustav
- u kontekstu ovih primjera, ali i sasvim generalno, možemo zaključiti:
 - signal nosi informaciju
 - obično je to varijacija fizikalne veličine koja može biti transformirana, pohranjena, ili prenesena nekim fizikalnim procesom
 - sustav transformira, pohranjuje ili prenosi signal



Signal kao funkcija

- zvuk je brza promjena tlaka zraka u vremenu i možemo ga prikazati kao funkciju

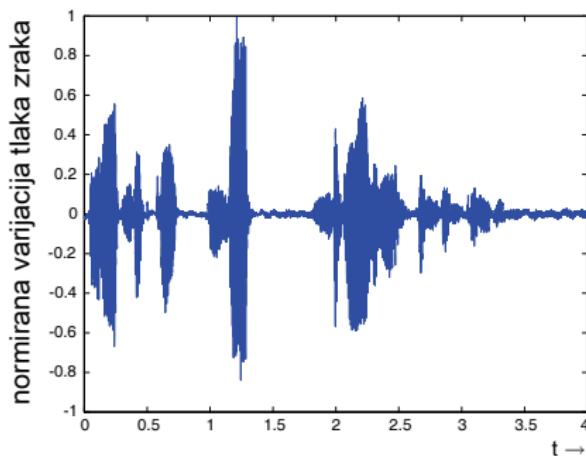
$$Zvuk : Vrijeme \rightarrow Tlak$$

- *Vrijeme* je skup koji predstavlja vremenski interval u kojem definiramo signal i predstavlja područje definicije ili domenu signala (funkcije)
- ovdje je *Tlak* skup koji se sastoji od mogućih vrijednosti tlaka zraka i predstavlja područje vrijednosti ili kodomenu signala (funkcije)
- ako je područje definicije, ovdje označeno kao *Vrijeme*, kontinuirani interval oblika $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ tada signal nazivamo vremenski kontinuiranim signalom
- sukladno tome zvučni signal možemo promatrati kao vremenski kontinuiran signal



Govorni signal prikazan kao funkcija

- reproduciramo u računalu pohranjeni signal govora (sl. 1)
■ Reprodukciju, samo u edukativne svrhe, dozvolio autor.
- izgovoren signal, u trajanju 4 sekunde, predstavljen je na slici kao varijacija tlaka zraka oko normalnog tlaka ambijenta (100000 N m^{-2})

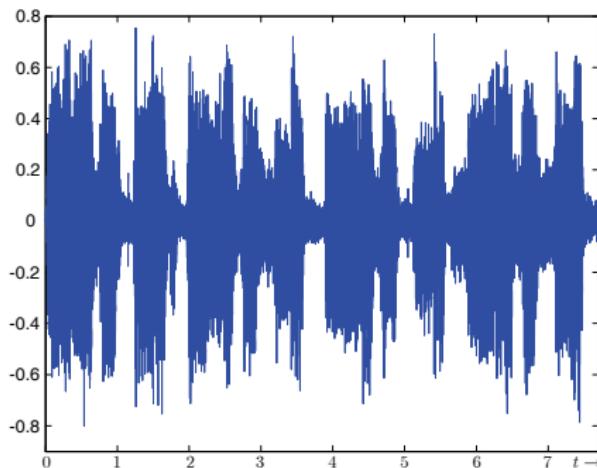


Slika 1: Govorni signal prikazan kao funkcija



Signal glazbe

- neovisno o načinu nastanka slušatelj prima kao zvučni signal
- reproduciramo u računalu pohranjeni signal glazbe (sl. 2)



Slika 2: Prvih 7.7 sekundi pjesme "Bam bam ba ba lu bam" grupe "Mi". Reprodukciju, u edukativne svrhe, dozvolio autor.



Vremenski kontinuirani i vremenski diskretni signali

- primjer signala glazbe je zvučni signal i možemo ga prikazati kao funkciju

$$\text{BamBam} : \text{Vrijeme} \rightarrow \text{Tlak} \quad \text{Vrijeme} = [0, 7.7] \subset \mathbb{R}$$

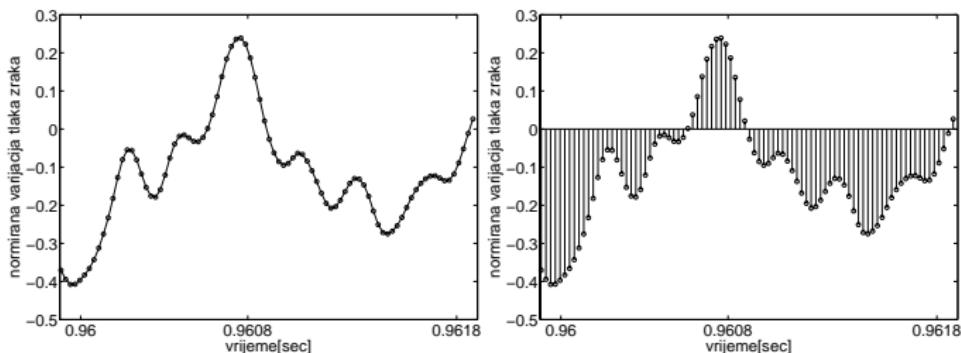
- signal glazbe, BamBamDigital , pohranjen u računalu, je:
 - zbog ograničene raspoložive memorije računala, pohranjen kao konačan skup od 339571 trenutnih vrijednosti signala za diskretne trenutke vremena definiranih svakih $1/44100$ sekundi,
 - kvantiziranih trenutnih vrijednosti zbog konačne dužine riječi (npr. 16 bita) računala, pa definiramo

$$\begin{aligned}\text{BamBamDigital} &: \text{DiskretnoVrijeme} \rightarrow \text{Cjelobrojni}_{16} \\ \text{DiskretnoVrijeme} &= \{0, 1/44100, \dots, 339571/44100\} \\ \text{Cjelobrojni}_{16} &= \{-32768, -32767, \dots, 32767\}\end{aligned}$$

- domena signala, DiskretnoVrijeme , je diskretan skup pa je signal BamBamDigital vremenski diskretan signal

Signal glazbe kao vremenski diskretan signal

- snimljeni signal glazbe prikazivan je kao vremenski kontinuirani signal, no, rastegnemo li prikaz signala na vrlo kratkom odsječku, možemo prepoznati da se radi o vremenski diskretnom signalu čije su trenutne vrijednosti definirane samo u diskretnim trenucima vremena (sl. 3)¹



Slika 3: Signal glazbe kao vremenski diskretni signal

¹na desnoj slici je vremenski diskretni signal dan u uobičajenom peteljkastom (eng. stem) prikazu



Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

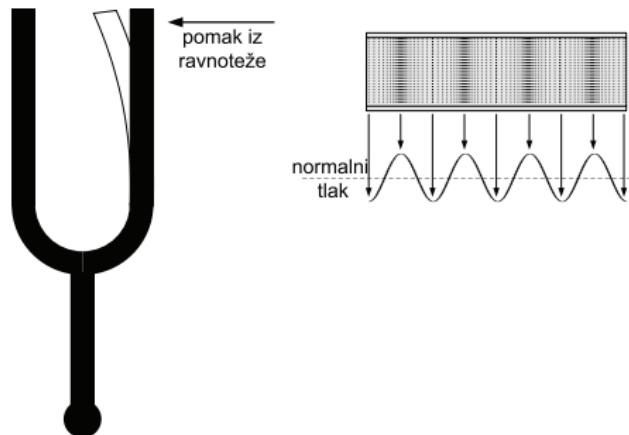
Signali u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Glazbena vilica

Glazbena vilica potaknuta na titranje izaziva varijaciju okolnog tlaka zraka (sl. 4) koju ljudsko uho registrira kao zvučni signal frekvencije 440 Hz što odgovara signalu glazbene note A-440 Hz.



Slika 4: Glazbena vilica



Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

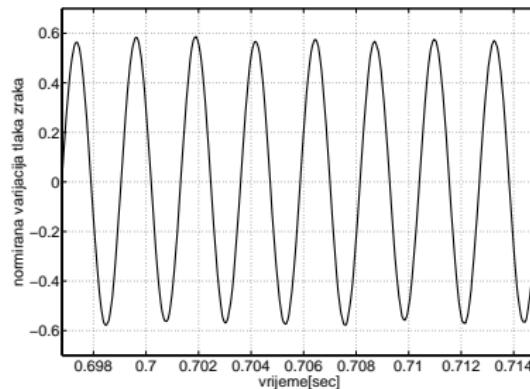
Signalni u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Signal glazbene vilice prikazan kao funkcija

- prikazan je, sl. 5, dio snimljenog signala glazbene vilice



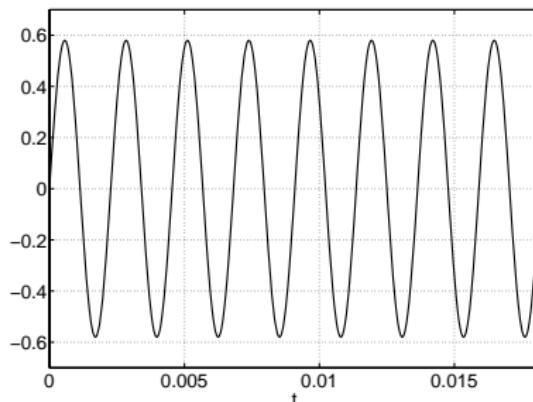
Slika 5: Dio signala glazbene vilice

- signal je sinusoidnog oblika i frekvencije je točno 440Hz i odgovara glazbenoj noti A 🎵



Električka glazbena vilica

- tonu A možemo generirati i numerički pomoću računala ☺
- na sl.6 je prikaz numerički generiranog signala $0.58 \sin(2\pi \cdot 440t)$



Slika 6: Numerički generirani signal note A



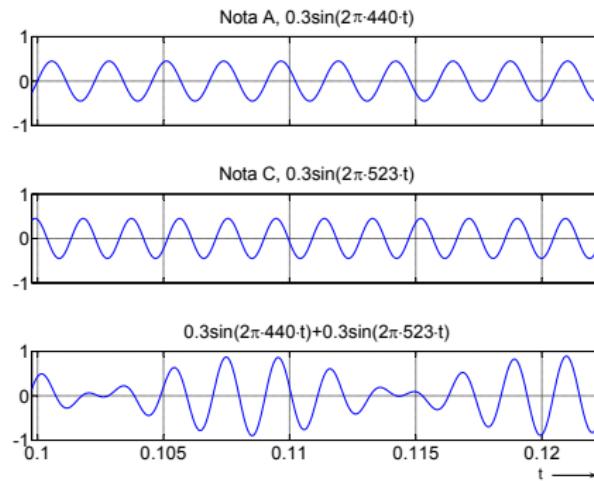
Zbroj dva sinusoidna signala 1

- pokazano je kako je signal koji generira glazbena vilica sinusoidni signal frekvencije 440 Hz
- pokazano je da je sinusoidni signal te frekvencije možemo generirati računalom
- generirajmo sada sinusoidni signal frekvencije 523 Hz koji odgovara noti C
- istovremeno “sviranje” nota A i C kao rezultat daje



Zbroj dva sinusoidna signala 2

- istovremeno "sviranje" nota A i C je zapravo zbroj sinusoidnih signala frekvencije 440Hz i 523Hz i njihov zbroj je prikazan na slici

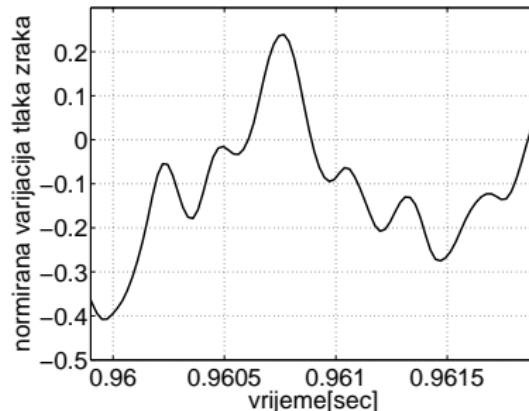


Slika 7: Nota A + Nota C



Signal je suma više sinusoida

- podsjetimo li se kratkog odsječka signala glazbe



Slika 8: Signal glazbe

- možemo prepoznati da je i taj signal moguće prikazati kao zbroj više sinusoidnih signala različitih frekvencija



Generiranje signala glazbe

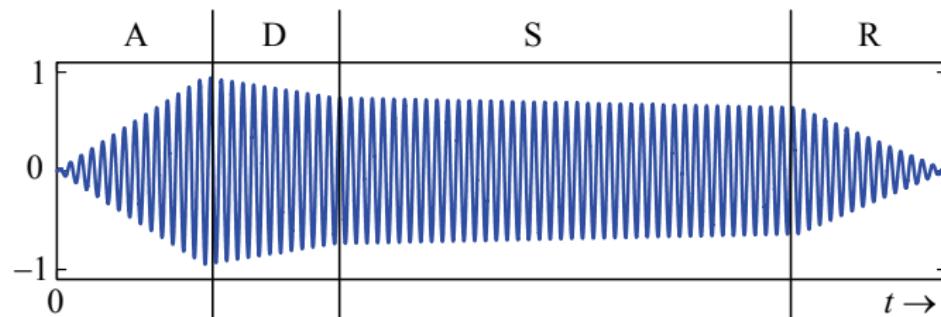
- svakoj glazbenoj noti pridružuje se signal odgovarajuće frekvencije
- vrlo izravan, i vrlo pojednostavljen, način "sviranja" neke glazbe svodi se na generiranje "sinusoidnih" signala čija frekvencija odgovara potrebnim notama
- poslušajmo jednu takvu računalnu "svirku" 
- svakoj glazbenoj noti pridružuje se sinusoidni signal odgovarajuće frekvencije
- kako note mogu biti različite duljine trajanja sinusoidni signal treba vremenski ograničiti odgovarajućim vremenskim otvorom
- za potrebe danog primjera korišten je vremenski ADSR otvor² prikazan na sl. 9

²ADSR - attack, decay, sustain, release



Jedan način numeričkog generiranja glazbenih nota

- na slici je prikaz generacije note A modulacijom sinusoidnog signala frekvencije 440 Hz s vremenskim otvorom



Slika 9: Osminka note A





Signalni i
sustavi

Školska godina

2016/2017

Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

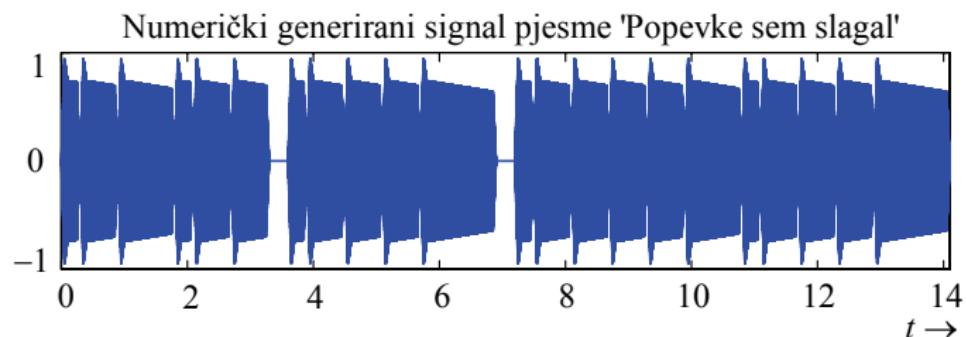
Signalni kao
funkcije

Signalni u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenti-
jalne
funkcije

Signal glazbe u vremenskoj domeni



Slika 10: Signal glazbe u vremenskoj domeni





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

Signali u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Digital Sound Synthesis³

- Wavetable Synthesis
- Recorded or synthesized musical events stored in internal memory and played back on demand
- Playback tools consists of various techniques for sound variation during reproduction such as pitch shifting, looping, enveloping and filtering
- Example: Giga Sampler 

³Dobrotom autora: Prof. dr. Sanjit Mitra, University of California,
Santa Barbara



Digital Sound Synthesis⁴

- Physical Modeling
- Models the sound production method
- Physical description of the main vibrating structures by partial differential equations
- Most methods based on wave equation describing the wave propagation in solids and in air
- Example: Tenor saxophone, (CCRMA, Stanford)
- više na:

<https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/>

a više zvukova potražite na istoj adresi pod *Sound Examples*

⁴Dobrotom autora prikaznice: Prof. dr. Sanjit Mitra, University of California, Santa Barbara



Spektrogram

- prije prikazani signal glazbe za pjesmu "Popevke sam slagal" možemo interpretirati i na sljedeći način
- sintetiziraj vremenski ograničenu sinusoidu frekvencije koja odgovara prvoj noti u trajanju prve note, pa zatim sintetiziraj vremenski ograničenu sinusoidu frekvencije koja odgovara drugoj noti ...
- ovaj postupak možemo prikazati i slikom i kasnije će biti objašnjeno kako se ovakav način prikaza signala zove spektrogram
- slika koja slijedi ilustrira kako notni zapisi po kojima ljudi sviraju slijede upravo ovaj način prikaza informacije koju nosi signal glazbe



Note i spektrogram



Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

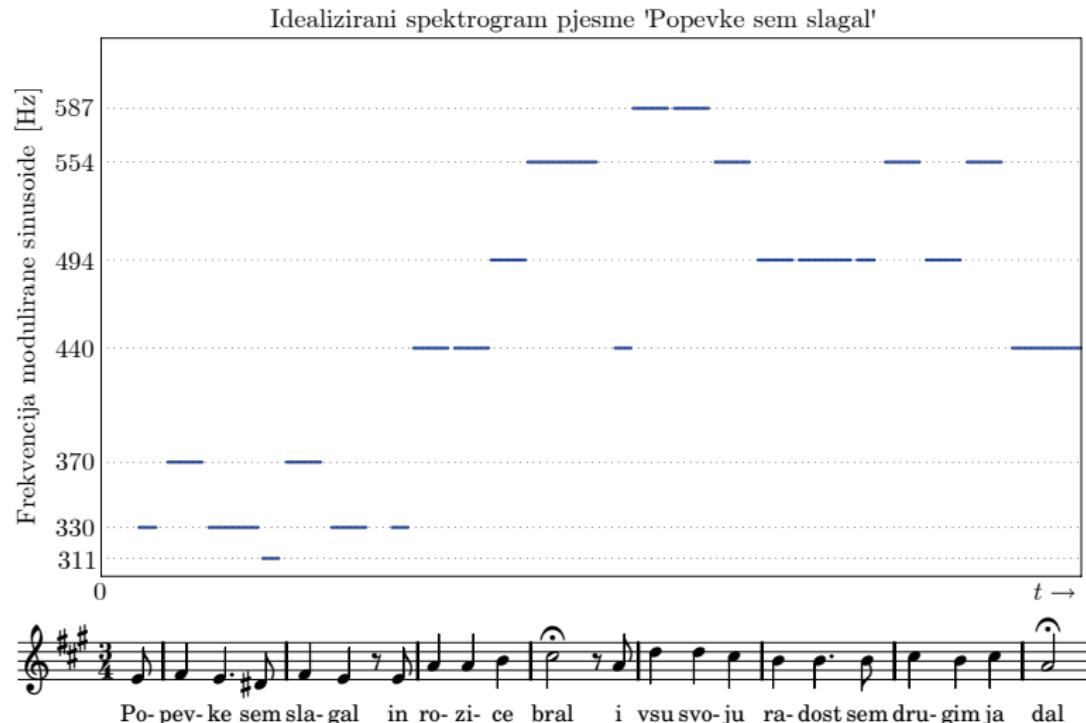
Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

Signalni u
frekvenčijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije



Slika 11: Spektrogram i notni zapis.



Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

Signalni u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

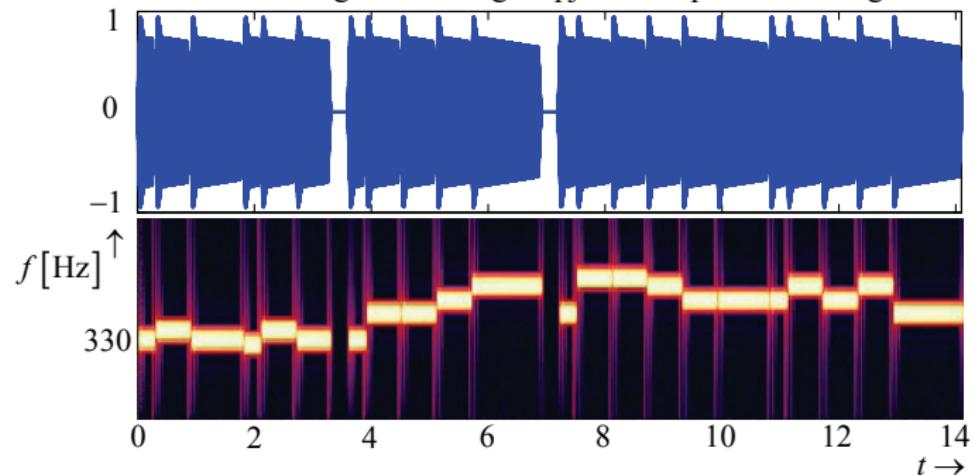
Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Note i spektrogram

- usporedba vremenske domene i spektrograma



Numerički generirani signal pjesme 'Popevke sem slagal'





Jednadžba modela mehaničke glazbene vilice

- glazbena vilica je mehanički sustav i diferencijalna jednadžba koja predstavlja matematički model vilice dobije se iz ravnoteže sila
- neka je k koeficijent elastičnosti kraka vilice, b konstanta prigušenja zraka oko krakova, m je masa vilice i zahvaćenog zraka, $F(t)$ sila koja djeluje na krak, a y je pomak kraka vilice iz ravnotežnog položaja
- ravnoteža sila na masu u titranju je:

$$my''(t) = F(t) - ky(t) - by'(t)$$

- pa je diferencijalna jednadžba za ovaj sustav:

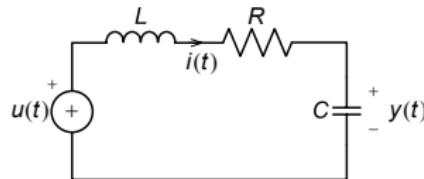
$$y''(t) + \frac{b}{m}y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

- gornja jednadžba predstavlja model sustava s ulazno-izlaznim varijablama



Jednadžba jednostavnog električnog kruga

- iz



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + y(t)$$

i

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

Slika 12: RLC krug

- slijedi

$$u(t) = LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

- ulazni signal – napon izvora $u(t)$
- izlazni signal – napon na kapacitetu $y(t)$

- i finalno

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t) \quad (1)$$

- jednadžba predstavlja model sustava s ulazno-izlaznim varijablama



Model ljubavnog odnosa Romea i Julije – 1

- razmatramo jednostavni model ljubavnog odnosa ⁵ Romea i Julije
- neka je $R(t)$ stanje privrženosti (ili odbojnosti ako je $R(t) < 0$) Romea Juliji, a $J(t)$ stanje privrženosti Julije Romeu u nekom trenutku
- mjera promjene privrženosti Romea proporcionalna je i njegovom i Julijinom emocionalnom stanju, te je modeliramo jednadžbom

$$\frac{dR(t)}{dt} = aR(t) + bJ(t) \quad (2)$$

- a mjera promjene privrženosti Julije je

$$\frac{dJ(t)}{dt} = cR(t) + dJ(t) \quad (3)$$

⁵preuzeto iz S. H. Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos



Model⁶ ljubavnog odnosa Romea i Julije – 2

- parovi koeficijenta a , i b , odnosno c i d , u jednadžbama (2) i (3), predstavljaju tzv. romantične stilove⁷ Romea odnosno Julije

⁶više na <http://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper277.pdf>; i <http://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper281.pdf>

⁷Ovdje ne ulazimo u detalje ali Strogatz, prvenstveno njegovi studenti, definira četiri stila:

- 1 Eager beaver (gorljivi udvarač): $a > 0$, $b > 0$ (Romeo ohrabren svojim osjećajima kao i Julijinim)
- 2 Narcistički bedak: $a > 0$, $b < 0$ (Romeo hoće više od onoga što osjeća ali se istovremeno povlači na Julijine osjećaje)
- 3 Oprezni udvarač: $a < 0$, $b > 0$ (Romeo se boji svojih osjećaja ali je ohrabren Julijinim)
- 4 Pustinjak: $a < 0$, $b < 0$ (Romeo bježi od svojih osjećaja ali i Julijinih osjećaja.)

Ista klasifikacija se primjenjuje za Julijine koeficijente c i d . Niz psihologa u svojim radovima daje preciznije definicije ovih parametara.



Model ljubavnog odnosa Romea i Julije – 3

- jednostavnim transformacijama jednadžbi (2) i (3) slijede diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$\frac{d^2 R(t)}{dt^2} - (a + d) \frac{dR(t)}{dt} + (ad - bc)R(t) = 0 \quad (4)$$

odnosno

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} - (a + d) \frac{dJ(t)}{dt} + (ad - bc)J(t) = 0 \quad (5)$$



Diferencijalna jednadžba općeg sustava drugog reda

- glazbena vilica, RLC mreža, i ljubavni odnos $R&J$, modelirani su kao sustavi drugog reda i opisani su diferencijalnim jednadžbama drugog reda

$$y''(t) + \frac{b}{m}y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

$$R''(t) + (-a - d)R'(t) + (ad - bc)R(t) = 0$$

- linearne vremenski kontinuirane sustave drugog reda općenito možemo opisati diferencijalnom jednadžbom drugog reda

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = b_0u''(t) + b_1u'(t) + b_2u(t) \quad (6)$$

i prepoznajemo da se problem određivanja odziva $y(t)$ na pobudu $u(t)$ svodi na problem rješavanja ove jednadžbe



Odziv glazbene vilice

- odziv glazbene vilice možemo odrediti rješavanjem diferencijalne jednadžbe

$$y''(t) + \frac{b}{m}y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

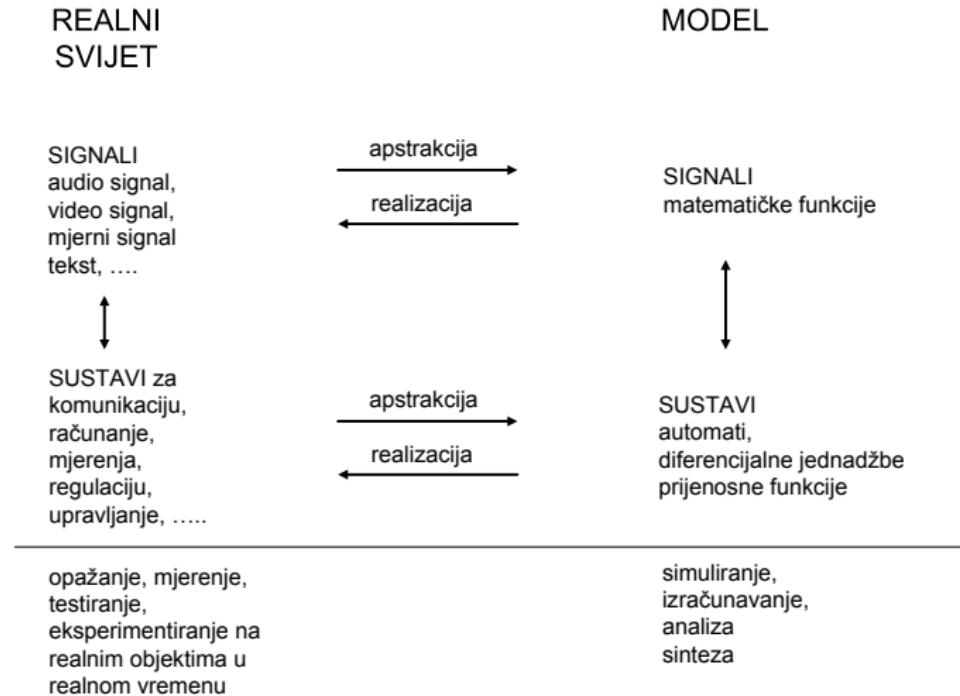
- zanemarimo li, u prvoj aproksimaciji, prigušenje zraka oko krakova i analiziramo jednadžbu neposredno nakon primjene sile (vrlo kratkog udarca u krak u $t = 0$) jednadžba prelazi u

$$t > 0, \quad y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(t) = -\frac{k}{m}y(t)$$

- rješenje ove jednadžbe je signal (funkcija) koja je proporcionalna svojoj drugoj derivaciji, a to je upravo sinusoida do koje smo došli snimanjem zvuka glazbene vilice



Veza realni svijet – model



Slika 13: Realni svijet – model



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Signalni kao
funkcije

Signalni u
frekvencijskom
području

Matematičko
modeliranje
sustava

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

DODATAK – SAMOSTALNI RAD STUDENATA



Crtice iz povijesti kompleksnih brojeva⁸

- jednostavna jednadžba $x^2 + 1 = 0$ nema rješenja u realnom području, jer nema realnog broja kome bi kvadrat bio -1, kako je već u 9. stoljeću istakao indijski matematik MAHAVĪRA, a u 12. st. BHĀSKARA.
- Prvi koji je računao s kompleksnim brojevima bio je G. CARDANO (1501-1576); on je naišao u jednom geometrijskom problemu na čudan rezultat da je produkt $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40$, da dakle produkt dviju veličina koje nemaju značenja u realnom području može dati realan broj.
- Korijene iz negativnih brojeva Cardano naziva "izvještačenim" veličinama, kao čista bića razuma i uviđa da se u njima krije "neka treća skrovita narav", jer nisu ni pozitivni ni negativni.

⁸iz Željko Marković: Uvod u višu analizu, Zagreb, 1947.



Crtice iz povijesti kompleksnih brojeva⁹

- DECARTES u svojoj *Géométrie* (1637.) govori o imaginarnim rješenjima algebarskih jednačaba; pri tome "imaginarno" znači kod Decartesa veličinu koja samo u misli postoji, a ne treba joj odgovarati nikakova realna veličina.
- LEIBNIZu su ove veličine "čudo analize, izrod idejnoga svijeta, gotovo neki dvoživac između bivstva i nebivstva" (1702.), i on ih zove "nemoguće ili imaginarne veličine" kojih je narav čudesna, a kojih se korist ipak ne smije prezreti te on s njima i računa.
- Carl Friedrich GAUSS¹⁰, osjetivši već rano (1796/7.) potrebu da se te veličine svedu na "jasne pojmove", izgradio je njihovu teoriju, zabacivši predodžbu o "nemogućim brojevima", i kompleksni brojevi su ušli u višu analizu kao sasvim ravnopravni realnim brojevima.

⁹iz Željko Marković: Uvod u višu analizu, Zagreb, 1947

¹⁰rođen 1777., dakle tada devetnaestogodišnjak



Crtice iz povijesti kompleksnih brojeva¹¹

- Od Gaussa potječe i naziv kompleksan broj, da se naglasi da je nastao spajanjem dvaju realnih brojeva.
- oznaku i za imaginarnu jedinicu¹² upotrijebio je EULER (1777.), no ona se proširila tek Gaussovim istraživanjima
- naziv konjugirano kompleksnog broja uveo je CAUCHY (1821.)

¹¹iz Željko Marković: Uvod u višu analizu, Zagreb, 1947

¹²U elektrotehnici je slovo i rezervirano za struju, pa je to razlog da u strukama bliskim elektrotehnici za imaginarnu jedinicu prevladava oznaka j .

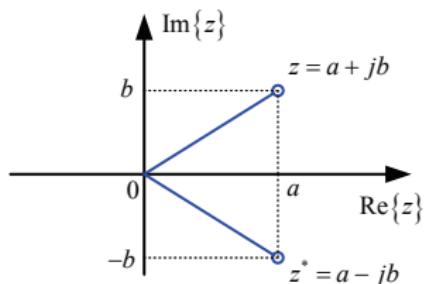


Kratko ponavljanje kompleksnih brojeva

- kompleksni broj z je uređeni par realnih brojeva $z = (a, b)$, gdje su $a = \operatorname{Re}\{z\}$ realni dio, a $b = \operatorname{Im}\{z\}$ imaginarni dio od z
- kompleksni broj $z \in \mathbb{C}$ pišemo, u Kartezijevom zapisu, kao

$$z = a + jb$$

- kompleksni broj z prikazujemo točkom u kompleksnoj (Gaussovoj) ravnini čije su horizontalna i vertikalna koordinata realni i imaginarni dio broja





Kratko ponavljanje kompleksnih brojeva¹³

- drugi je način prikaza kompleksnog broja u polarnom zapisu, pri čemu je kompleksni broj prikazan vektorom duljine $r = |z|$ i kutom θ koji taj vektor zatvara s pozitivnim dijelom realne osi (koristi se i oznaka $\angle z$)
- broj $r = |z|$ nazivamo apsolutnom vrijednošću ili modulom kompleksnog broja z
- skup svih kutova $\theta = \text{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, koji odgovaraju kompleksnom broju z nazivamo argumentom od z i označavamo $\text{Arg}(z)$
- pogodno je, i uobičajeno, služiti se s glavnom vrijednosti argumenta, $\arg(z)$ koja zadovoljava nejednakost

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi \quad \text{ili} \quad 0 \leq \arg(z) < 2\pi$$

¹³Preporuka studentima: Ponovite V. Čepulić, D. Žubrinić: MAT1,
Realni i kompleksni brojevi



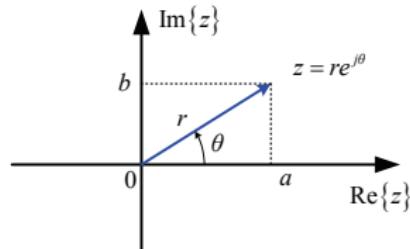
Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Kratko ponavljanje kompleksnih brojeva



- očigledne su veze a , b , r i θ

$$a = r \cos(\theta) \quad \text{i} \quad b = r \sin(\theta)$$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{i} \quad \angle z = \theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right)$$

pa, uz korištenje Eulerove formule, slijedi

$$z = |z| e^{j\angle z} = r e^{j\theta} = r \cos(\theta) + j r \sin(\theta) = a + jb$$



Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije

Kratko ponavljanje kompleksnih brojeva

- potreban oprez u određivanju $\arg(z)$

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & a > 0 \text{ I i IV kvadrant} \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \text{ poz. dio imag. osi} \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \text{ neg. dio imag. osi} \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & a < 0, b \geq 0 \text{ II kvadrant} \\ -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & a < 0, b < 0 \text{ III kvadrant} \end{cases}$$

- z i z^* su konjugirano kompleksni brojevi i vrijedi

$$z = re^{j\theta} = r \cos(\theta) + jr \sin(\theta) = a + jb$$

$$z^* = re^{-j\theta} = r \cos(\theta) - jr \sin(\theta) = a - jb$$

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\operatorname{Re}\{z\}$$

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2$$



Kratko ponavljanje kompleksnih brojeva

- množe se dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + jb_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ i $z_2 = a_2 + jb_2 = r_2 e^{j\theta_2}$
- pogodnije je koristiti polarni oblik kompleksnog broja pa je produkt

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- množenje se ilustrira s dva primjera
- kompleksni broj $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$, množimo s
 - ① kompleksnim brojem $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ što daje rezultat kao gore

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

- ② kompleksnim brojem $z_2 = e^{j\theta_2}$ što daje rezultat

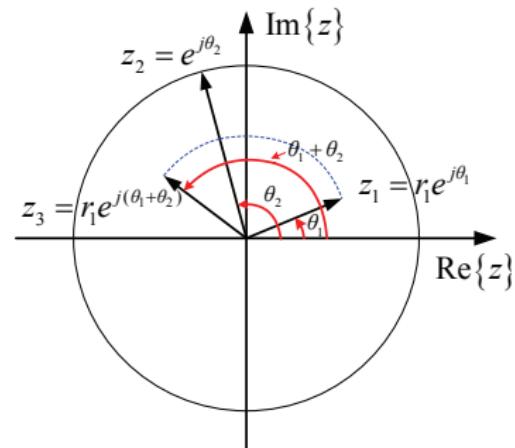
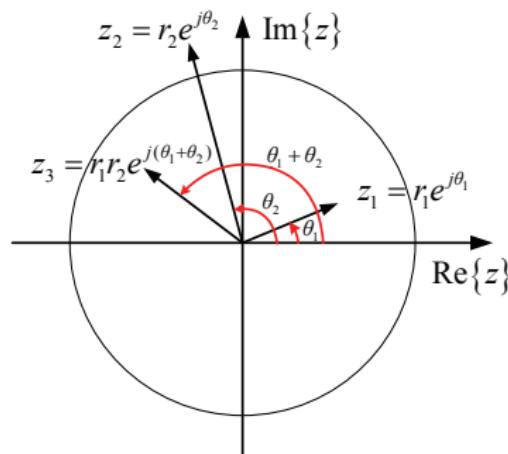
$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 e^{j(\theta_1 + \theta_2)},$$

ovdje treba uočiti da prvi kompleksni broj množimo s kompleksnim brojem čiji je modul jednak jedan



Kratko ponavljanje kompleksnih brojeva

- množenje ilustriramo grafički



- zaključujemo: ako jedan kompleksni broj prikažemo fiksnim vektorom u kompleksnoj ravnini tada množenje s drugim vektorom skalira dužinu prvog vektora s modulom drugog kompleksnog broja i rotira ga za kut drugog kompleksnog broja.



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal definira se kao

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \in \mathbb{C},$$

$$C = Ae^{j\theta} \in \mathbb{C}, \quad A, \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = Ce^{s_0 t} = Ae^{j\theta} e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

- primjenom Eulerove relacije vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal prikazujemo i kao

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(t) = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \theta)} = Ae^{\sigma_0 t} [\cos(\omega_0 t + \theta) + j \sin(\omega_0 t + \theta)]$$

- na prikaznicama Cjelina 3 detaljno su razmotreni svi oblici kompleksne eksponencijale za razne σ_0 i ω_0 , dakle za $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ u cijeloj kompleksnoj ravnini
- dalje se posebno razmatraju kompleksne eksponencijale za koje je $\sigma_0 = 0$ – kompleksna frekvencija s_0 na $j\omega$ osi



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- razmatramo kompleksni eksponencijalni signal definiran, za $\forall t \in \mathbb{R}$, kao

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} = A\cos(\omega_0 t + \theta) + jA\sin(\omega_0 t + \theta)$$

- treba naglasiti kako se radi o kompleksnoj funkciji realne varijable, gdje je modul $|z(t)| = A$, a $\angle(z)$ je $\arg(z) = (\omega_0 t + \theta)$
- očigledno je kako je realni dio gornje kompleksne eksponencijale realni kosinusni signal, a imaginarni dio realni sinusni signal.

$$A\cos(\omega_0 t + \theta) = \operatorname{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t + \theta)}\}$$

odnosno

$$A\sin(\omega_0 t + \theta) = \operatorname{Im}\{Ae^{j(\omega_0 t + \theta)}\}$$



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- geometrijska interpretacija množenja kompleksnih brojeva omogućuje korisnu interpretaciju vremenski kontinuiranog kompleksnog signala pomoću kompleksnog vektora koji rotira kako vrijeme teče
- definiramo li kompleksni broj $X = Ae^{j\theta}$ tada kompleksnu eksponencijalu možemo pisati i kao

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} = Xe^{j\omega_0 t},$$

dakle $z(t)$ je produkt kompleksnog broja X i kompleksne funkcije $e^{j\omega_0 t}$, pri čemu se X naziva kompleksna amplituda ili fazor

- očigledno je kako su kompleksna amplituda $X = Ae^{j\theta}$ i frekvencija ω_0 dovoljne za prikaz $z(t)$, odnosno realnog kosinusnog signala $A \cos(\omega_0 t + \theta)$
- uporaba fazora razmatrana na predmetima Osnove elektrotehnike i Električni krugovi



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- razmotrimo još jednom kompleksni eksponencijalni signal

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \theta)} = Xe^{j\omega_0 t} = Ae^{j\theta} e^{j\omega_0 t} = Ae^{j\theta(t)}$$

gdje je

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta \quad [\text{radijana}]$$

- za neki fiksni trenutak t , vrijednost kompleksnog eksponencijalnog signala, $z(t)$, je kompleksni broj čiji je modul A , a argument je $\theta(t)$, i može biti grafički prikazan kao vektor u kompleksnoj ravnini
- vrh tog vektora leži na kružnici radijusa A
- kako t raste vektor $z(t)$ rotira konstantnom brzinom, određenom kružnom frekvencijom ω_0
- dakle množenje fazora X s $e^{j\omega_0 t}$ rezultira u rotaciji fazora, pa se kompleksnu eksponencijalu naziva i rotirajući fazor



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- za $\omega_0 > 0$ smjer rotacije će biti suprotan gibanju kazaljke na satu ($\theta(t)$ raste kako raste vrijeme) i za rotirajući fazor (kompleksnu eksponencijalu) kažemo da je pozitivne frekvencije
- za $\omega_0 < 0$ smjer rotacije će biti u smjeru gibanja kazaljke na satu ($\theta(t)$ se mijenja u negativnom smjeru kako raste vrijeme) i za tako rotirajući fazor (kompleksnu eksponencijalu) kažemo da je negativne frekvencije
- rotirajući fazor postiže jedan okret svaki puta kada se kut $\theta(t)$ promjeni za 2π , a vrijeme za koje se to dogodi jednako je periodi T_0 kompleksne eksponencijale

$$\omega_0 T_0 = (2\pi f_0) T_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{f_0}$$



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- naredna slika (lijevi dio) ilustrira vezu jednog rotirajućeg fazora i realnog kosinusnog signala
- prikazuje se vektor (crveno) i njegov kut u trećem kvadrantu kompleksne ravnine koji predstavlja signal

$$z(t) = e^{j(t - \frac{\pi}{3})}$$

za $t = 1.5\pi$

- horizontalni vektor (plavo) predstavlja realni dio vektora $z(t)$ za $t = 1.5\pi$

$$\operatorname{Re}\{z(1.5\pi)\} = \cos\left(1.5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



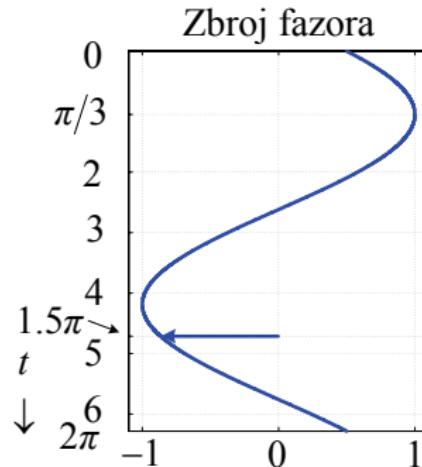
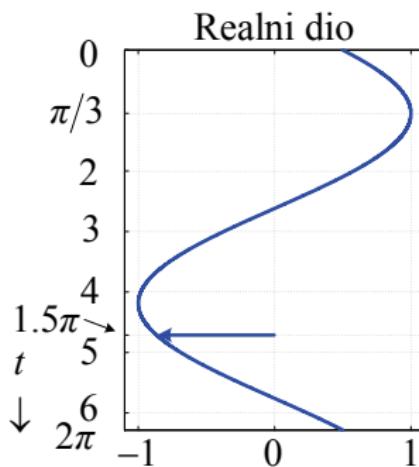
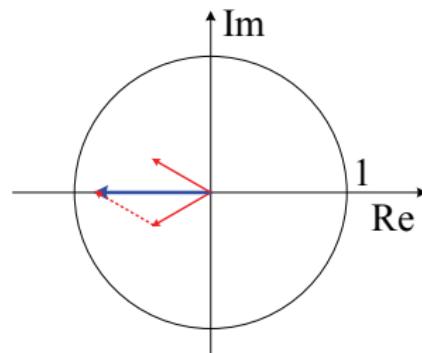
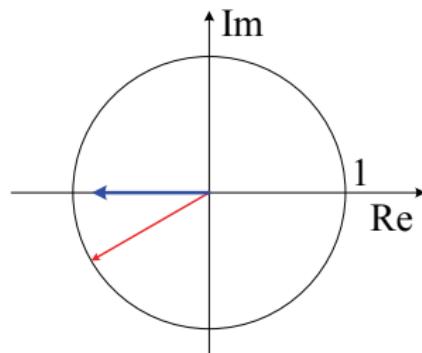
Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 1.

Profesor
Branko Jeren

Uvod u signale
i sustave

Kratko
ponavljanje
kompleksnih
brojeva i
kompleksne
eksponenci-
jalne
funkcije





Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- koristenjem inverzne Eulerove formule moguce je realni kosinusni signal prikazati kao

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t + \theta) &= A \left(\frac{e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} X e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} X^* e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2} z(t) + \frac{1}{2} z^*(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\} \end{aligned}$$

- možemo zaključiti kako realni kosinusni signal frekvencije ω_0 možemo interpretirati kao zbroj dvaju kompleksnih eksponencijalnih signala: jednog, kompleksne amplitude $\frac{1}{2}X = \frac{1}{2}Ae^{j\theta}$ i pozitivne frekvencije ω_0 , te drugog s negativnom frekvencijom $-\omega_0$ i kompleksnom amplitudom $\frac{1}{2}X^* = \frac{1}{2}Ae^{-j\theta}$



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- desna strana prethodne slike ilustrira vezu dva, konjugirano kompleksna, rotirajuća fazora i realnog kosinusnog signala
- vektor s kutom u trećem kvadrantu je kompleksni rotirajući fazor $\frac{1}{2}z(t)$ u trenutku $t = 1.5\pi$, a s porastom t kut će rasti u smjeru suprotnom kazaljci na satu.
- vektor s kutom u drugom kvadrantu je kompleksni rotirajući fazor $\frac{1}{2}z^*(t)$ u trenutku $t = 1.5\pi$, a s porastom t kut će rasti u smjeru kazaljke na satu.
- horizontalni vektor je suma gornjih konjugirano kompleksnih rotirajućih fazora



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Signalni i sustavi

Signalni kao funkcije

Profesor
Branko Jeren

1. ožujka 2017.



U cjelini 2 razmatramo

- signali kao funkcije
- klasifikacija signala
 - realni i kompleksni signali
 - vremenski diskretni i vremenski kontinuirani signali
 - kauzalni, antikauzalni i nekauzalni signali
 - signali s konačnim značajkama
 - apsolutno zbrojivi i apsolutno integrabilni signali
 - kvadratno zbrojivi i kvadratno integrabilni signali
 - signali konačne energije i konačne snage
- neke operacije nad signalima
 - diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala
 - vremenska ekspanzija i kompresija signala
 - konvolucija signala
- parni i neparni signali
- konjugirano simetrični signali



Signalni kao funkcije

- funkcija

$$f : W \rightarrow Y,$$

definira pravilo pridruživanja, po kojem se svakom elementu w u skupu W pridružuje vrijednost (element) $y = f(w)$, u skupu Y

- skup W se naziva područje definicije, ili domena, funkcije f , i označava kao $\mathcal{D}(f)$
- područje vrijednosti, označimo ga $\mathcal{K}(f) \subseteq Y$, je skup svih vrijednosti $f(w)$ odnosno

$$\mathcal{K}(f) = \{f(w) \in Y | w \in W\}.$$

- treba naglasiti kako, za razliku od f , $f(w)$ predstavlja konkretnu vrijednost funkcije f za neki $w \in \mathcal{D}(f)$.



Signali kao funkcije

- na primjeru signala glazbe u trajanju 7.7 sekundi ilustrirano je da ovaj signal možemo predstaviti funkcijom

$$\text{BamBam} : \text{Vrijeme} \rightarrow \text{Tlak} \quad \text{Vrijeme} = [0, 7.7] \subset \mathbb{R}$$

- signal *BamBam* definiran je
 - područjem definicije, označenom kao skup *Vrijeme*, koji predstavlja vremenski interval $[0, 7.7] \subset \mathbb{R}$
 - područjem vrijednosti, ovdje označenom kao *Tlak*, skupom koji se sastoji od mogućih vrijednosti tlaka i
 - zbog karaktera signala funkciju *BamBam* ne možemo prikazati deklarativnim matematičkim izrazom, pa se koristimo grafom ili tablicom
- ovdje su korištena “duga” imena za funkciju i varijable jer u ovom konkretnom slučaju imaju konkretne interpretacije
- korištenje “dugih” imena korisno je jer, kao i u programiranju, donosi bolju preglednost i garantira nedvosmislenost



Signalni kao funkcije

- općenito signal je definiran funkcijom

$$f : W \rightarrow Y$$

$$\forall w \in \mathcal{D}(f), f(w) \in \mathcal{K}(f)$$

$$f(w) = \text{izraz po } w.$$

- iskaz "izraz po w " može biti dan matematičkim izrazom, grafom funkcije f , tablicom, ili procedurom koja definira način pridruživanja.
- pod grafom funkcije f podrazumijevamo skup $Graf(f) \subseteq W \times Y$ definiran kao

$$Graf(f) = \{(w, y) | w \in W \text{ i } y = f(w)\}$$



Realni i kompleksni signali

- ovisno o svojstvima skupova \mathcal{D} i \mathcal{K} klasificiramo signale na
 - realne ¹ signale za koje su

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$$

- kompleksne signale realne nezavisne varijable za koje su

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{C}$$

- kompleksne signale kompleksne nezavisne varijable za koje su

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{C}$$

¹Da bi signal bio realan \mathcal{D} i \mathcal{K} mogu biti i podskupovi skupa \mathbb{Z} .



Realni i kompleksni signali

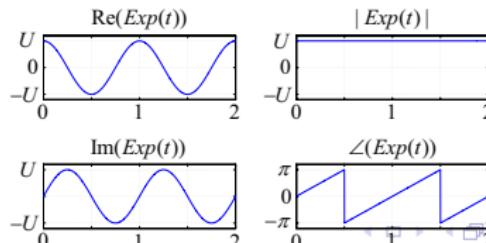
- signal definiran kao kompleksna eksponencijala realne varijable $\text{Exp}(t) = Ue^{j2\pi t}$, zadana u intervalu $t \in [0, 2] \subset \mathbb{R}$, i uz $U \in \mathbb{R}$, je

$$\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall t \in [0, 2] \subset \mathbb{R}, \quad U \in \mathbb{R}$$

$$\text{Exp}(t) = Ue^{j2\pi t} = U \cos(2\pi t) + jU \sin(2\pi t).$$

- područje vrijednosti kompleksne eksponencijale je iz skupa \mathbb{C} pa je pri grafičkom prikazu potrebno crtati dva grafa, za realni i imaginarni dio funkcije Exp , ili modul i argument (prikazujemo glavnu vrijednost)





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signalni kao
funkcije

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

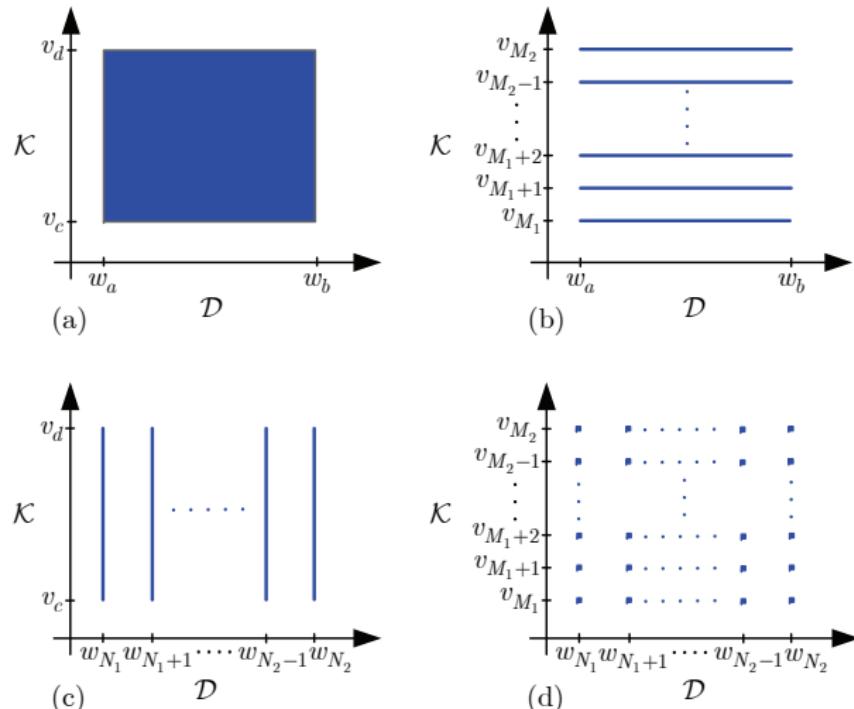
Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti



Slika 1: Kartezijevi produkti skupova $\mathcal{D} \times \mathcal{K}$



Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- signali za koje je

$$\mathcal{D} = [w_a, w_b] \subset \mathbb{R}$$

nazivamo po nezavisnoj varijabli kontinuirani signali Sl.1a i Sl.1b

- najčešće je nezavisna varijabla vrijeme, pa zato uobičajeni naziv – vremenski kontinuirani signali
- signali za koje je

$$\mathcal{D} = \{w_n \mid N_1 \leq n \leq N_2; n, N_1, N_2 \in \mathbb{Z}; \}$$

su po nezavisnoj varijabli diskretni signali (Sl.1c i Sl.1d)

- za nezavisnu varijablu vrijeme, govorimo o vremenski diskretnim signalima



Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- signale za koje je $\mathcal{D} = [w_a, w_b] \subset \mathbb{R}$ i $\mathcal{K} = [y_c, y_d] \subset \mathbb{R}$ nazivamo analogni signali Sl.1a
- signale za koje je

$$\mathcal{K} = \{y_q \mid M_1 \leq q \leq M_2; q, M_1, M_2 \in \mathbb{Z}; \},$$

nazivamo amplitudno kvantizirani signali (Sl.1b i Sl.1d)

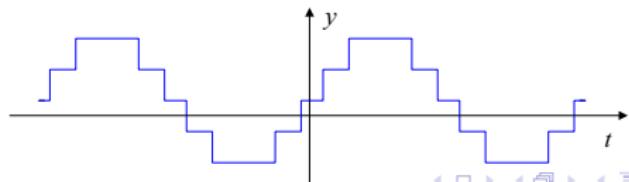
- vremenski diskretne signale koji su i amplitudno kvantizirani nazivamo digitalni signali² (Sl.1d)

²da bi signal nazvali digitalnim potrebno je još vrijednosti signala kodirati kao binarne brojeve



Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- za vremenski kontinuirani signal y kažemo da je prekinut – diskontinuiran – u nekoj točki t_1 ako vrijedi $y(t_1^-) \neq y(t_1^+)$, pri čemu su $t_1 - t_1^-$ i $t_1^+ - t_1$ neizmjerno mali pozitivni brojevi
- signal y je neprekinut u nekoj točki t_1 ako vrijedi $y(t_1^-) = y(t_1^+)$
- ako je signal neprekinut za sve vrijednosti područja definicije, osim za prebrojivi skup točaka prekida, nazivamo ga po odsjećima neprekinutim
- treba naglasiti kako po odsjećima neprekinute signale klasificiramo kao vremenski kontinuirane signale





Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala

- analogni signal digitaliziramo postupkom kvantizacije vrijednosti signala te diskretizacijom po nezavisnoj varijabli
- kvantizaciju definiramo kao preslikavanje iz neprebrojivog skupa vrijednosti u prebrojivi skup vrijednosti signala
- na slici 3 je prikazana jednolika raspodjela mogućih vrijednosti³, gdje je Q korak kvantizacije. **Područje vrijednosti** kvantiziranih signala je konačni skup diskretnih vrijednosti

$$\{nQ \mid n \in \mathbb{Z}, Q \in \mathbb{R} \text{ i } nQ \in [y_c, y_d] \subset \mathbb{R}\}$$

- kvantizacijom se fiksira konačan broj jednoliko razmaknutih vrijednosti i svaka vrijednost iz područja vrijednosti se pridruži najbližoj od njih (zaokruživanje)

³nejednoliku kvantizaciju signala po amplitudi ovdje ne razmatramo



Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala

- diskretizaciju signala po nezavisnoj varijabli provodimo postupkom očitavanja⁴
- na Sl.3 je prikazana jednolika diskretizacija po nezavisnoj varijabli⁵, gdje je T korak diskretizacije
- vremenski diskretan signal y_s nastaje očitavanjem kontinuiranog signala $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y_s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y_s(n) = y(nT)$$

- vrijednosti $y_s(n)$ nazivaju se očitci (uzorci) vremenski kontinuiranog signala y

⁴U uporabi su još i termini uzorkovanje (izravni prijevod engl. termina – sampling), te otipkavanje (izravni prijevod njemačkog termina – Abtastung).

⁵nejednoliku kvantizaciju signala po nezavisnoj varijabli ovdje ne razmatramo



Signalni i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signalni kao
funkcije

Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

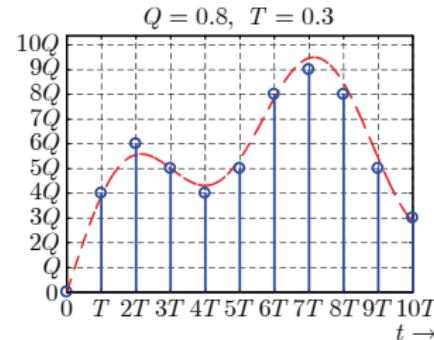
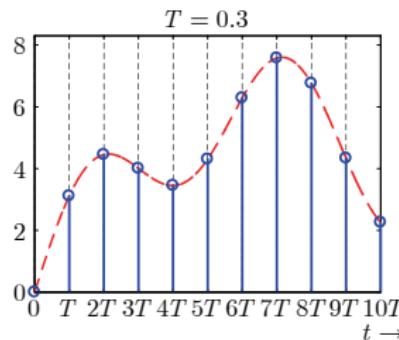
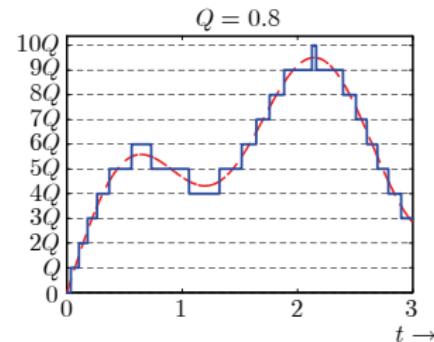
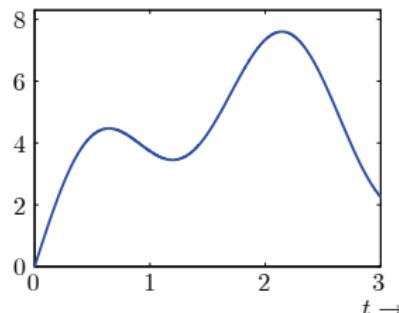
Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala



Slika 3: Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude



Vremenski kontinuirani i vremenski diskretni signali

- u najvećem broju primjena susrećemo se sa signalima koji su vremenske funkcije
- zato u ovom predmetu pod terminom signal podrazumijevamo (gotovo isključivo) vremenski signal
- jednaku pozornost dajemo vremenski diskretnim i vremenski kontinuiranim signalima⁶, pa ih studiramo paralelno (ili neposredno jedne iza drugih)
- isto tako, pod terminima diskretni signal, ili kontinuirani signal, podrazumijeva se da govorimo o signalima čija je nezavisna varijabla diskretna, odnosno, kontinuirana
- efekte kvantizacije zavisne varijable (amplitude) ne razmatramo u ovom predmetu
- vremenski diskretan signal predstavlja niz brojeva, pa se vremenski diskretni signali često nazivaju nizovi

⁶Isto vrijedi i za sustave



Klasifikacija signala – notacija

- klasifikaciju prema svojstvima nezavisne varijable zaokružujemo definicijom četiri skupa signala

① $KontSignali = [\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}]$.

Ovaj skup signala uključuje vremenski kontinuirane signale ali njihovo područje definicije može biti interpretirano i kao prostor, ili frekvencija, ili nešto treće. Očigledno je kako su u ovaj skup signala uključeni i signali čije je područje vrijednosti iz skupa \mathbb{R} .

② $DisktSignali = [\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}]$.

Ovaj skup signala uključuje vremenski diskretne signale, ali i one čije područje definicije nije nužno interpretirano kao vrijeme.

③ $KontPeriod_{T_0} \subset KontSignali$.

Ovaj skup signala čine svi kontinuirani signali periodični s periodom $T_0 \in \mathbb{R}$

④ $DisktPeriod_N \subset DisktSignali$.

Ovaj skup signala čine svi diskretni signali periodični s periodom $N \in \mathbb{Z}$



Svevremenski i kauzalni signali

- zadani su signali u_{1s} , u_{2s} , u_{1k} , u_{2k} , u_{1a} , u_{2a} , u_{1n} , i u_{2n} definirani kao:

$$u_{1s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{1k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{1a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{1n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$u_{2s} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{2k} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{2a} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{2n} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}.$$

- signale nazivamo *svevremenim*⁷ signala kada je u_{1s} definiran za $-\infty < t < \infty$, a u_{2s} definiran za $-\infty < n < \infty$
- signali u_{1k} , odnosno u_{2k} , su *kauzalni* ako vrijedi, za $t \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$,

$$u_{1k}(t) = 0, \text{ za } t < 0; \quad u_{2k}(n) = 0, \text{ za } n < 0.$$

⁷svevremenske signale nije moguće generirati u praksi ali zbog svojih svojstava imaju važnu ulogu u studiju signala i sustava.



Antikauzalni i nekauzalni signali⁸

- za *antikauzalne* signale vrijedi

$$u_{1a}(t) = 0, \text{ za } t \geq 0; \quad u_{2a}(n) = 0, \text{ za } n \geq 0,$$

- nekauzalni* signali u_{1n} i u_{2n} , započinju prije $t = 0$, odnosno $n = 0$, definirani su za

$$t_1 \leq t \leq t_2, \text{ uz } -\infty < t_1 < 0 \text{ i } 0 < t_2 < \infty,$$

odnosno

$$N_1 \leq n \leq N_2, \text{ uz } -\infty < N_1 < 0 \text{ i } 0 < N_2 < \infty.$$

⁸kauzalnost signala vezana je uz pojam kauzalnosti sustava što će biti razmatrano kasnije



Kauzalni, antikauzalni i nekauzalni signal

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signalni kao
funkcije

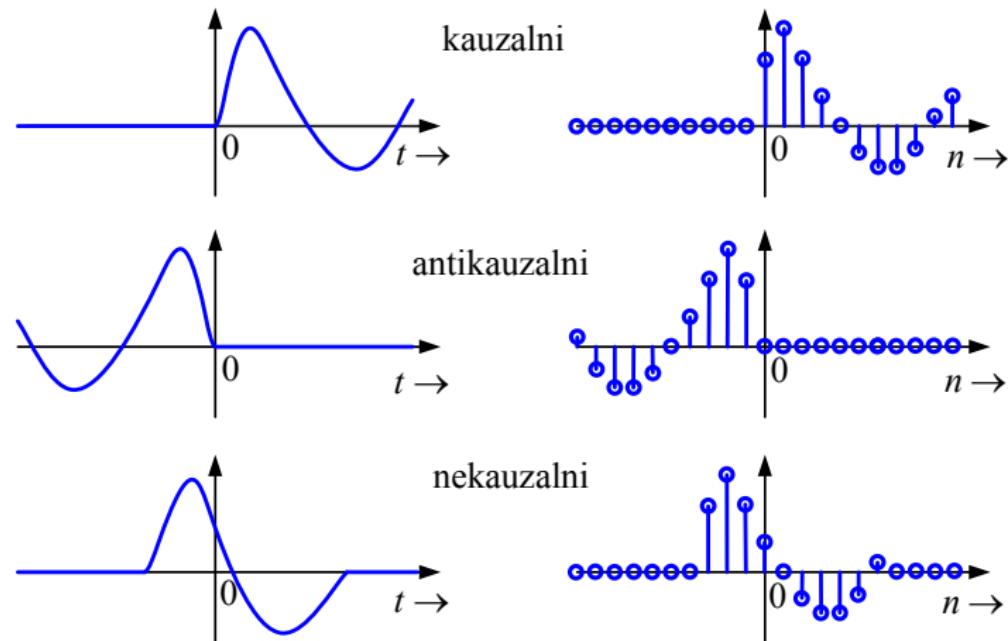
Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signallima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak



Slika 4: Primjeri kauzalnih, antikauzalnih, i nekauzalnih signala



Signali s konačnim značajkama

- U realnom fizikalnom svijetu fizikalne veličine odlikuju se realnim i konačnim značajkama. Zato ih se obično opisuje jednim, konačnim, realnim brojem (duljina, volumen, težina, energija, ...) ili vektorom (brzina, sila, ...). To je razlog za razmatranje konačnih značajki signala.
- želimo li npr. biti precizniji u izričaju kako je neki čovjek krupan potrebno je definirati i odgovarajuću mjeru
 - samo visina ili samo opseg pojasa nisu dostatni
 - mera koja odgovara volumenu sigurno je prihvatljivija
 - u pojednostavljenom modelu izračuna volumena čovjeka, visine H , modeliramo ga s valjkom promjenljiva radijusa pa volumen računamo kao

$$V = \pi \int_0^H r^2(h) dh$$

- cilj je naći odgovarajuću mjeru, izraženu s jednim brojem, i za signale



Signalni s konačnim značajkama

- kažemo da je signal f omeđen ako, za $M < \infty$, vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| < M < \infty, \quad \text{ili} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |f(n)| < M < \infty$$

- signali konačnog trajanja, su signali za koje vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t < t_1, \quad t > t_2, \quad t_2 > t_1 \quad f(t) = 0,$$

odnosno,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n < n_1, \quad n > n_2, \quad n_2 > n_1 \quad f(n) = 0$$



Signali s konačnim značajkama

- vremenski kontinuiran signal f je, $\forall t \in \mathbb{R}$, absolutno integrabilan, a vremenski diskretan signal je, $\forall n \in \mathbb{Z}$, absolutno zbrojiv ako vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty.$$

- vremenski kontinuiran signal f je, $\forall t \in \mathbb{R}$, kvadratno integrabilan, a vremenski diskretan signal je, $\forall n \in \mathbb{Z}$, kvadratno zbrojiv ako vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty.$$

- za kvadratno integrabilne, odnosno kvadratno zbrojive, signale kažemo da imaju konačnu energiju.



Energija i snaga signala

- prva ideja za mjeru signala, npr. površina ispod funkcije koja opisuje signal, uzima u obzir interval u kojem je definirana nezavisna varijabla, kao i sve vrijednosti zavisne varijable, no nedostatak ove mjere je u mogućem poništavanju pozitivnih i negativnih područja ispod funkcije, te može dati krivu informaciju o veličini signala
- jedan od načina uklanjanja ovog nedostatka je definiranje mjere kao površine signala ispod kvadrata funkcije signala
- razmotrimo signal struje i koji prolazi kroz otpor R i koji ima jasno fizikalno značenje
- energija koja se u vremenskom intervalu $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ disipira kao toplina na otporu R kroz koji teče struja i dana je s

$$E_{[t_1, t_2]} = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$



Energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- analogno kazanom, za signal f , definiran u vremenskom intervalu $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, dakle signal trajanja $L = t_2 - t_1$, označujemo **energiju vremenski kontinuiranog signala** kao⁹

$$E_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

- srednja snaga vremenski kontinuiranog signala f , definiranog u vremenskom intervalu $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, je

$$P_{[t_1, t_2]} = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

⁹ova definicija vrijedi i za kompleksne signale pa se stoga uzima modul (apsolutna vrijednost) signala



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signalni kao
funkcije
Klasifikacija
prema
svojstvima
područja
definicije

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Totalna energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- totalna energija i totalna srednja snaga vremenski kontinuiranog signala su

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_{\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 dt$$



Srednja snaga periodičnog vremenski kontinuiranog signala

- srednja vrijednost bilo koje periodične funkcije je jednaka srednjoj vrijednosti za bilo koji period
- kako je kvadrat periodične funkcije također periodična funkcija, tada je srednja snaga periodičnog¹⁰ vremenski kontinuiranog signala \tilde{y} , **periode T_0** ,

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P_{\tilde{y}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt$$

- studentima se sugerira pogledati, u DODATKU ovoj cjelini, odgovarajuće prikaznice koje se odnose na periodične signale.

¹⁰ \sim je grafički znak tilda. Riječ dolazi iz španjolskog i označuje ponavljanje. Zato, kad god želimo naglasiti periodičnost signala y , pišemo \tilde{y}

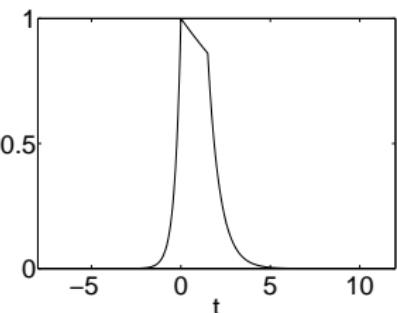


Primjer izračuna energije signala

- zadan je signal

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{3t} & -6 \leq t < 0 \\ e^{-0.1t} & 0 \leq t < 1.5 \\ 0.86e^{-1.5(t-1.5)} & 1.5 \leq t < 10 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

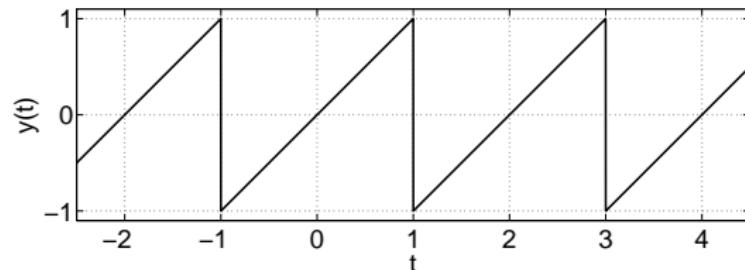


- totalna energija E_∞ ovog signala je

$$\begin{aligned} E_\infty &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \\ &= \int_{-6}^0 e^{6t} dt + \int_0^{1.5} e^{-0.2t} dt + \int_{1.5}^{10} 0.86^2 e^{-3(t-1.5)} dt \\ &= 0.1667 + 1.2959 + 0.247 = 1.7091 \end{aligned}$$



Primjer izračuna totalne srednje snage signala



Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Signalni kao
funkcije

Klasifikacija prema
svojstvima
područja
definicije

Energija i snaga
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

- periodični signal nije vremenski omeđen i njegova totalna energija je beskonačna i odgovarajuća je mjera signala njegova snaga
- postupak izračuna se može pojednostaviti jer se radi o periodičnom signalu pa je dovoljno računati srednju snagu jednog perioda

$$P_y = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$



Energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- energija vremenski diskretnog signala (niza) y , definiranog u intervalu $[n_1, n_2] \subset \mathbb{Z}$, je

$$E_{[n_1, n_2]} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$

- srednja snaga vremenski diskretnog signala y , definiranog u intervalu $[n_1, n_2] \subset \mathbb{Z}$, je

$$P_{[n_1, n_2]} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$



Totalna energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- totalna energija E_∞ niza y , definira se kao:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

- niz beskonačna trajanja, s konačnim vrijednostima očitaka, može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja, s konačnim vrijednostima očitaka, ima konačnu energiju
- totalna srednja snaga P_∞ neperiodičnog niza definira se kao:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad P_\infty = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |y(n)|^2$$

- srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna



Srednja snaga periodičnog vremenski diskretnog signala

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, P_{\tilde{y}} = \frac{1}{N} \sum_{n=b}^{b+N-1} |\tilde{y}(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |\tilde{y}(n)|^2$$

gdje je $b \in \mathbb{Z}$ a oznaka $\sum_{n=<N>}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja zbrajanja duljine N gdje je N temeljna perioda

- studentima se sugerira pogledati, u DODATKU ovoj cjelini, odgovarajuće prikaznice koje se odnose na periodične signale.

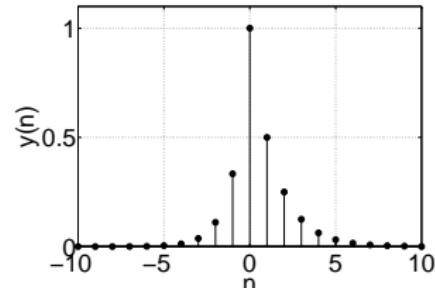


Primjer izračuna energije vremenski diskretnog signala

- razmotrimo vremenski diskretan signal

$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$



- energija signala je

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} - 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{35}{24}$$



Uzlazna i silazna diferencija vremenski diskretnih signala

- definiraju se uzlazna diferencija¹¹

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \Delta u(n) = u(n+1) - u(n)$$

- i silazna diferencija

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

¹¹Pogledati dodatne primjere u DODATKU



Primjer uzlazne i silazne diferencije

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signala

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

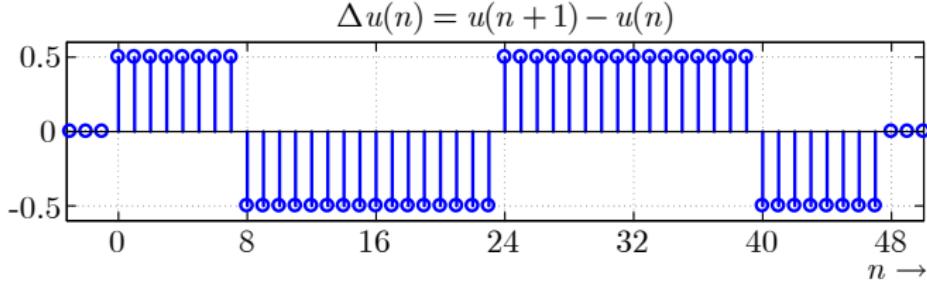
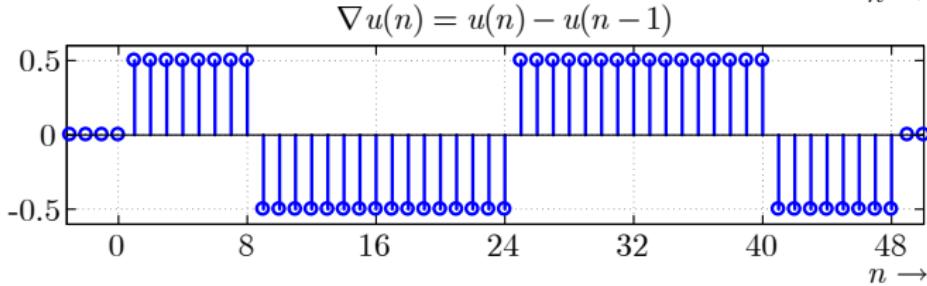
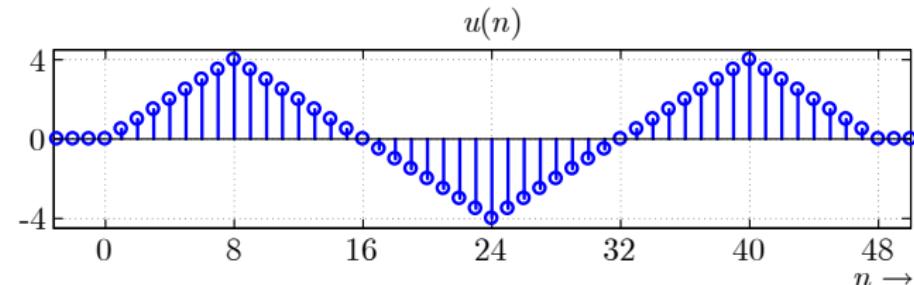
Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak





Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- ako pretpostavimo da je vremenski diskretan signal ekvivalentan diskretnim vrijednostima vremenski kontinuiranog signala (očitavanje) možemo ustanoviti da diferencija daje vrijednosti koje aproksimiraju očitke derivacije vremenski kontinuiranog signala
- promatramo vremenski diskretan signal čije su vrijednosti

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(n) = u_a(t)|_{t=nT}$$

- označimo s y_a derivaciju signala u_a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_a(t) = \frac{d}{dt} u_a(t)$$

za $t = nT$ vrijedi

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt} u_a(t)|_{t=nT}$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

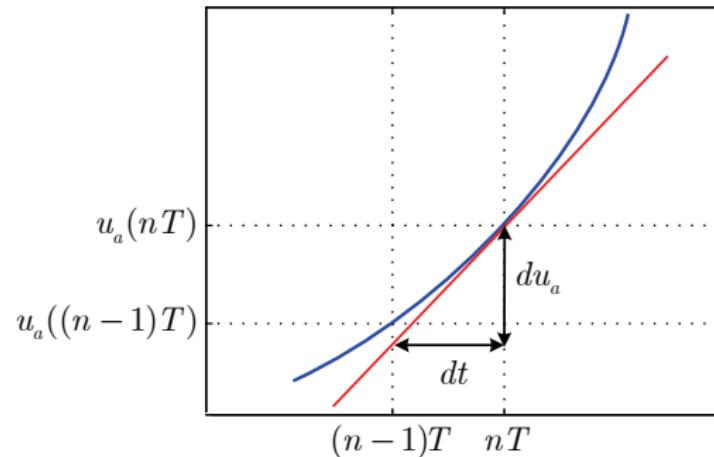
Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- sa slike za izvod derivacije zaključujemo



Slika 6: Definicija derivacije

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt} u_a(t)|_{t=nT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \{ u_a(nT) - u_a((n-1)T) \}$$



Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- dakle iz

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt} u_a(t)|_{t=nT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \{ u_a(nT) - u_a((n-1)T) \},$$

uz $y(n) = y_a(nT)$, zaključujemo

$$y(n) = \frac{1}{T} \{ u(n) - u(n-1) \} = \frac{1}{T} \nabla(u(n))$$

- dobiveni izraz se naziva jednadžba diferencija koja opisuje vremenski diskretni sustav koji nazivamo digitalni diferencijator
- dobivenim algoritmom numerički aproksimiramo derivaciju vremenski kontinuiranog signala
- postupak je aproksimativan i točnost izračuna ovisi o T , te o kontinuiranom signalu u



Numerička aproksimacija derivacije vremenski kontinuiranog signala

Signalni i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signala

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

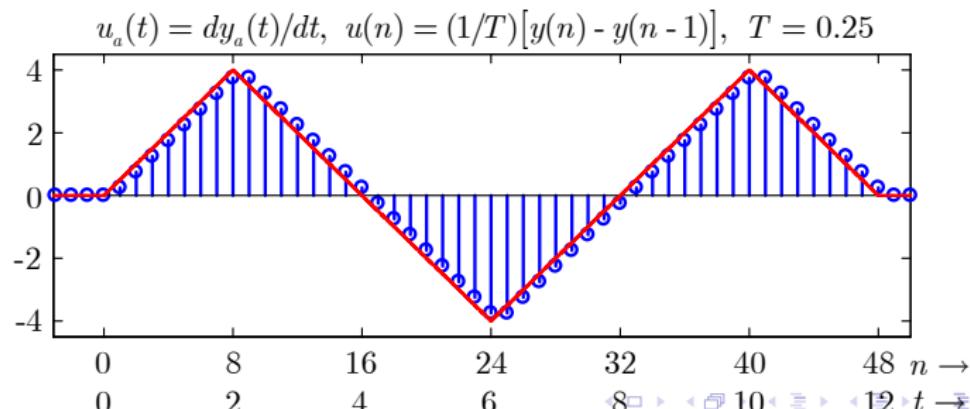
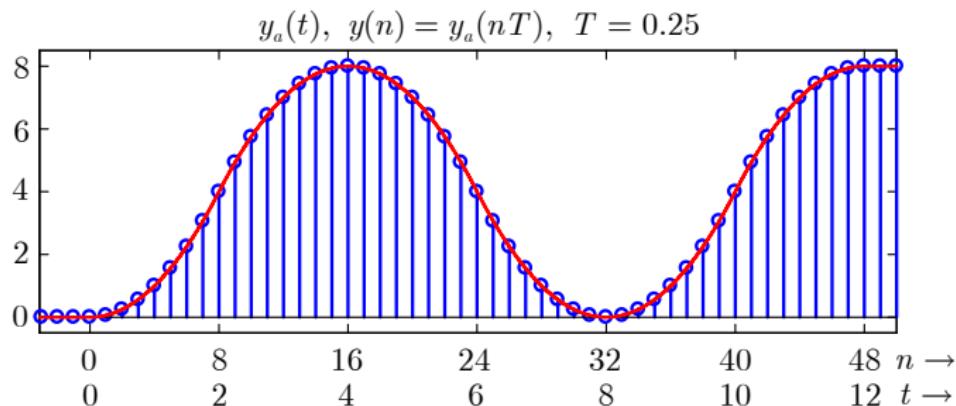
Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
eksploracija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- poznato je¹² je kako derivaciji vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencija vremenski diskretnog signala
- integraciji za vremenski kontinuirane signale odgovara operacija akumulacije za vremenski diskretne signale
- kako su derivacija i integracija signala suprotne operacije tako su i operacije diferencije i akumulacije suprotne operacije

¹²Pogledati odgovarajuće prikaznice u DODATKU



Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- Akumulacija signala $u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ je novi signal $y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ definiran kao:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n u(m) \quad (1)$$

- signale obično razmatramo u konačnim intervalima pa jednadžbu (1) možemo pisati kao

$$y(n) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{n_0-1} u(m)}_{y(n_0-1)} + \sum_{m=n_0}^n u(m) = y(n_0-1) + \sum_{m=n_0}^n u(m) \quad (2)$$

- očigledno je kako akumulaciju vremenski diskretnog signala, zadanog u intervalu $[n_0, n]$, možemo jednoznačno odrediti tek ako znamo $y(n_0 - 1)$, što znači da moramo uzeti u obzir "povijest" signala prije $n = n_0$.



Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

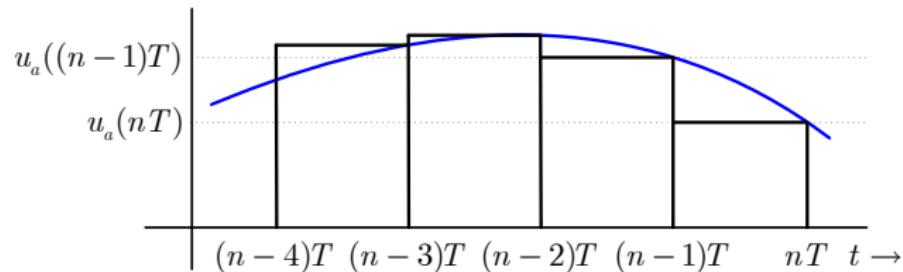
- operacija akumulacije je obratna operaciji diferencije pa je rezultat diferencije signala y , nastalog akumulacijom signala u , ponovo isti signal u :

$$\begin{aligned}\nabla y(n) &= y(n) - y(n-1) \\&= \sum_{m=-\infty}^n u(m) - \sum_{m=-\infty}^{n-1} u(m) \\&= \sum_{m=-\infty}^{n-1} u(m) + u(n) - \sum_{m=-\infty}^{n-1} u(m) \\&= u(n)\end{aligned}$$



Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- uz pretpostavku da su studenti samostalno ponovili operacije integracije i derivacije, kroz odgovarajuće prikaznice u DODATKU, ovdje razmatramo numeričku integraciju, odnosno vezu integracije i akumulacije
- određeni integral signala, u_a , geometrijski interpretiramo kao površinu ispod funkcije signala



Slika 8: Geometrijska interpretacija integracije



Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- operaciju integracije vremenski kontinuiranog signala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_a(t) = \int_{-\infty}^t u_a(\tau) d\tau$$

možemo, za $t = nT$, sukladno prethodnoj slici, izraziti kao:

$$y_a(nT) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^n T u_a(mT)$$

- uz uobičajene oznake $u_a(mT) = u(m)$ i $y_a(nT) = y(n)$, i dovoljno mali T , $y(n)$ aproksimira integral $y_a(t)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = T \sum_{m=-\infty}^n u(m)$$

- zaključujemo, postupku integracije vremenski kontinuiranog signala odgovara postupak akumulacije vremenski diskretnog signala



Integracija i akumulacija signala – primjer

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signala

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

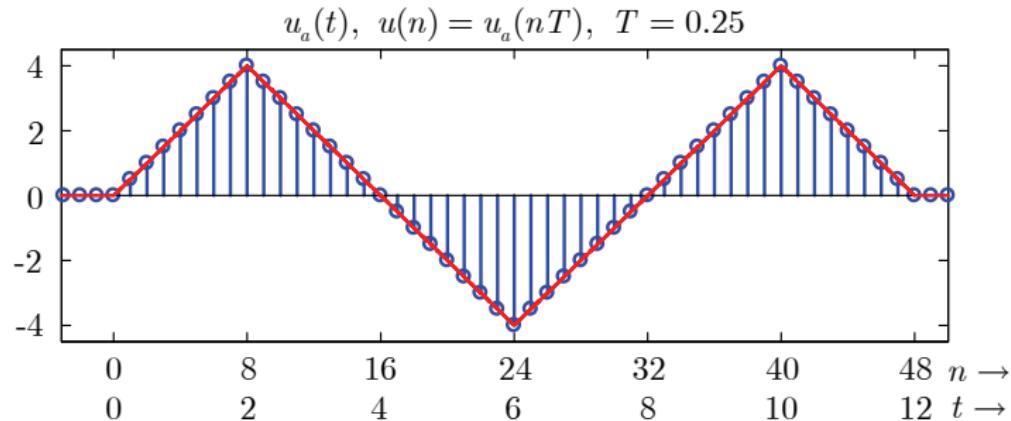
Vremenska
eksplansija i
kompresija

Konvolucija
signala

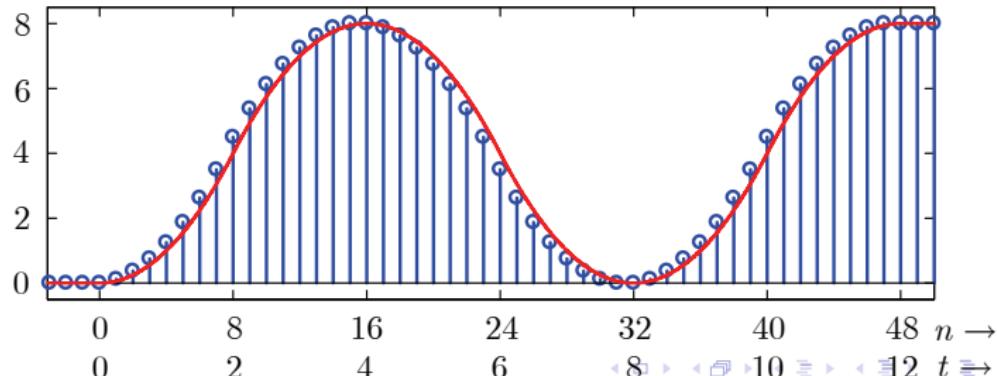
Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak



$$y_a(t) = \int u_a(\tau) d\tau, \quad y(n) = T \sum u(m), \quad T = 0.25$$





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala

- ekspanzija i kompresija signala po nezavisnoj varijabli naziva se vremensko skaliranje signala
 - za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska kompresija kao

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(bt) \quad \text{za} \quad b > 1$$

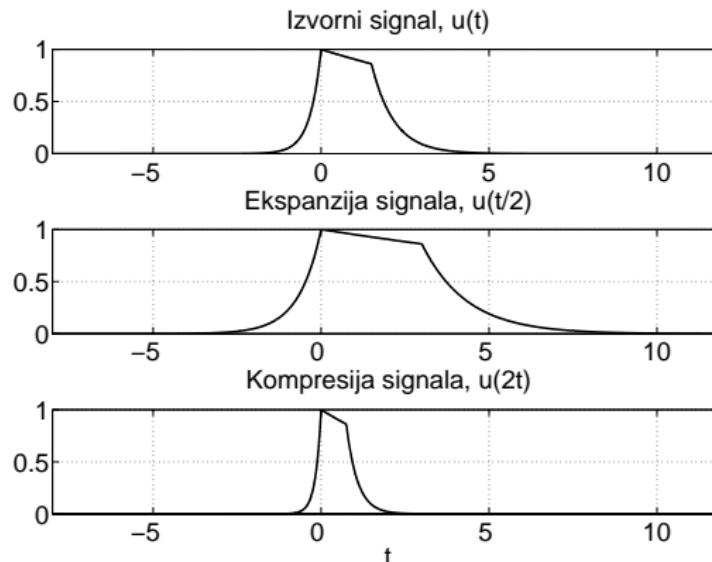
- a vremenska ekspanzija kao

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u\left(\frac{t}{b}\right) \quad \text{za} \quad b > 1$$



Primjer eksplanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala

- primjer eksplanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala za faktor $b = 2$ (Sl.10)



Slika 10: Vremenska eksplanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala za faktor 2



Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala

- vremenskom kompresijom vremenski kontinuiranih signala oni se "ubrzavaju" bez gubitka informacije, a pokazuje se kako kod vremenski diskretnih signala to nije uvijek slučaj
- za diskretni signal definirana je vremenska kompresija kao

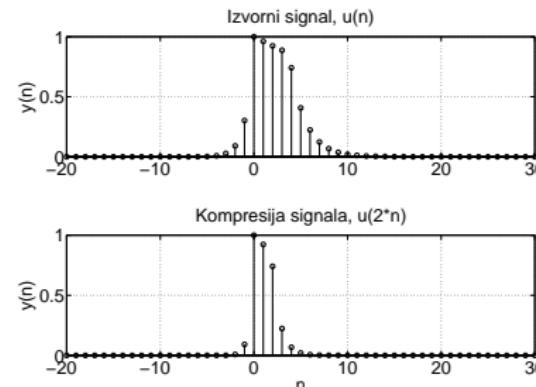
$$\begin{aligned} u : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{Z}, M &\in \mathbb{Z}, M > 1 \\ y(n) &= u(Mn) \end{aligned}$$

- vrijednosti $u(Mn)$ za $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ su $u(0), u(M), u(2M), u(3M), \dots$ što znači da $u(Mn)$ izdvaja svaki M -ti očitak od $u(n)$, a ostale očitke briše, pa se ovaj postupak naziva decimacija u vremenu
- ako je vremenski diskretni signal nastao očitavanjem vremenski kontinuiranog signala postupak kompresije ima za rezultat redukciju takta očitavanja za faktor M pa se postupak tada naziva i *podočitavanje*



Primjer kompresije vremenski diskretnog signala

- primjer kompresije – decimacije – vremenski diskretnog signala za faktor $M = 2$ (Sl.11)



Slika 11: Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala za faktor 2

- vidljiv je gubitak očitaka što znači gubitak informacije
- ako je signal $u(n)$ bio rezultat nadočitavanja nekog vremenski kontinuiranog signala, postupkom decimacije se nužno ne gubi informacija o izvornom $u(t)$



Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 1

- vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala vezana je uz postupak interpolacije i provodi su u dva koraka
- prvo se $u(n)$ ekspandira za cijelobrojni faktor L kako bi se dobio ekspandirani $u_e(n)$

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$y(n) = u_e(n) = \begin{cases} u\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- postupak ilustriramo na primjeru ekspanzije u za faktor 2 ($L = 2$) i ekspandirani signal je tada u_e
- za n neparan, $n/2$ nije cijeli broj i $u\left(\frac{n}{2}\right)$ nije definiran za neparne vrijednosti
- zato, za neparne n , definiramo $u_e(n) = 0$, dakle,
 $u_e(1) = u_e(3) = u_e(5) = \dots = 0$



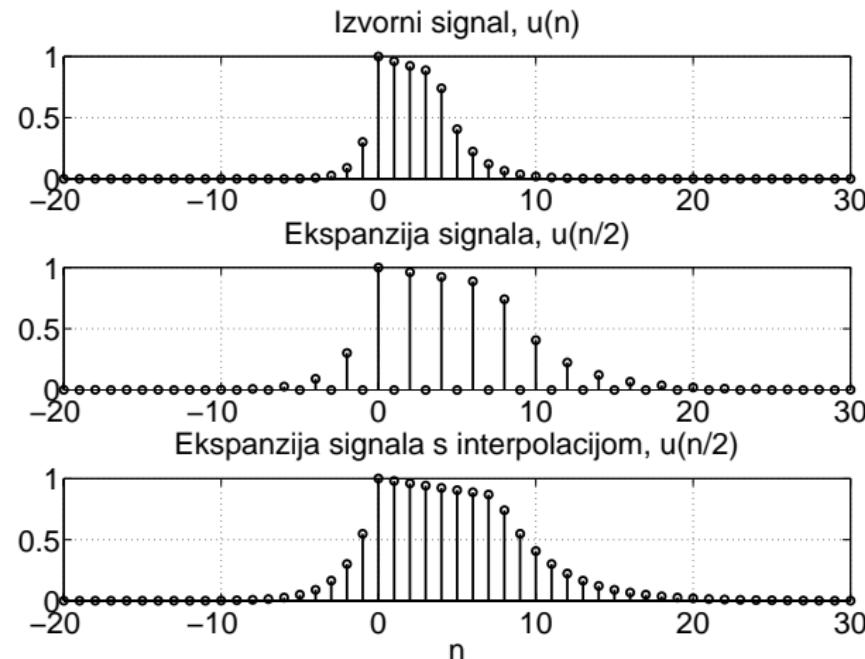
Vremenska eksplanzija vremenski diskretnog signala 2

- eksplandirani signal u_e čuva sve očitke u
- odgovarajućim postupkom interpolacije, zamjenom očitaka vrijednosti nula s očitcima čija je vrijednost slična vrijednosti susjednih očitaka, moguće je postići interpolirani eksplandirani vremenski diskretni signal kao na slici
- u postupku interpolacije koriste se interpolacijski filtri, no oni se kasnije razmatraju
- interpolirane su vrijednosti izračunate iz postojećih podataka pa postupak interpolacije ne donosi nove informacije o signalu



Primjer ekspanzije vremenski diskretnog signala

- primjer ekspanzije–interpolacije–vremenski diskretnog signala za faktor $L = 2$



Slika 12: Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala



Konvolucija vremenski kontinuiranih signala

- neka su $x, y \in [\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}]$ dva vremenski kontinuirana signala,
- konvolucija, označimo je funkcijom *Konvolucija*, pridružuje im novi vremenski kontinuirani signal z , dakle,

Konvolucija : $[\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}] \times [\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}] \rightarrow [\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}]$

$$z = \text{Konvolucija}(x, y) = x * y$$

- konvoluciju definiramo s konvolucijskim integralom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau$$



Konvolucija vremenski kontinuiranih signala – komutativnost

- vrijedi svojstvo komutativnosti konvolucije

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

što proizlazi iz konvolucijskog integrala, zamjenom varijabli
 $t - \vartheta = \tau$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad (x * y)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \vartheta)y(\vartheta) d\vartheta = (y * x)(t) \end{aligned}$$

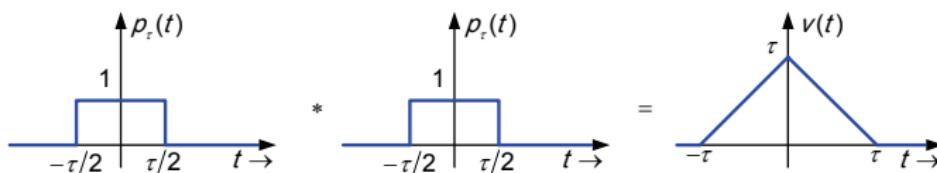
- vrijedi i svojstvo linearnosti konvolucije, dakle, uz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x * (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1(x * y_1) + a_2(x * y_2)$$



Konvolucija vremenski kontinuiranih signala – primjer

- određuje se konvolucija signala p_τ i p_τ zadanih slikom
- na istoj slici dan je i rezultat konvolucije¹³ $v = p_\tau * p_\tau$



¹³Studente se upućuje da samostalno pokušaju odrediti konvoluciju korištenjem konvolucijskog integrala. Detaljna diskusija bit će provedena kasnije, tijekom semestra.



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
eksploracija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Konvolucija vremenski diskretnih signala

- neka su $x, y \in [\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}]$ dva vremenski diskretna signala,
- konvolucija diskretnih signala x i y je diskretni signal, označen kao $x * y$, definiran konvolucijskim zbrojem

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$



Konvolucija vremenski diskretnih signala – komutativnost

- vrijedi svojstvo komutativnosti konvolucije

$$(x * y)(n) = (y * x)(n)$$

što proizlazi iz konvolucijskog zbroja, zamjenom varijabli
 $n - m = j$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (x * y)(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(n-j)y(j) = (y * x)(n)\end{aligned}$$

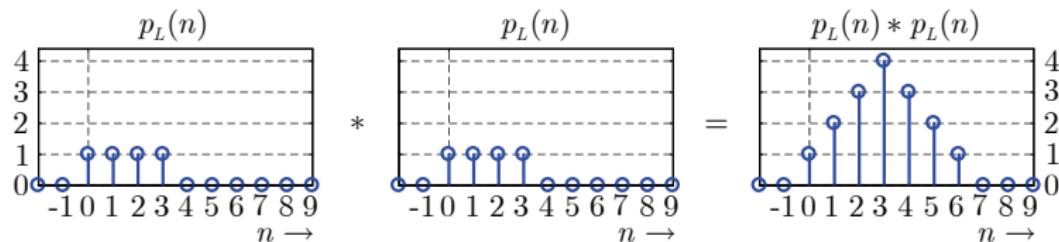
- vrijedi i svojstvo linearnosti konvolucije, dakle, uz
 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x * (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1(x * y_1) + a_2(x * y_2)$$



Konvolucija vremenski diskretnih signala – primjer

- određuje se konvolucija signala zadanih slikom
- na istoj slici dan je i rezultat konvolucije¹⁴



¹⁴ Studente se upućuje da samostalno pokušaju odrediti konvoluciju korištenjem konvolucijskog zbroja. Detaljna diskusija biti će provedena kasnije, tijekom semestra.



Parne i neparne funkcije

- realne funkcije u , odnosno v , su parne funkcije ako vrijedi

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = u(-t)$$

ili

$$v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = v(-n)$$

- realne funkcije u , odnosno v , su neparne funkcije ako vrijedi

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = -u(-t)$$

ili

$$v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = -v(-n)$$



Parna i neparna komponenta signala

- svaki realni signal u može biti prikazan kao zbroj njegove parne i neparne komponente

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = u_p(t) + u_n(t)$$

budući da vrijedi

$$u(-t) = u_p(-t) + u_n(-t) = u_p(t) - u_n(t)$$

slijede, zbrajanjem i oduzimanjem gornjih jednadžbi, njegove parna i neparna komponenta

$$u_p(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)]$$

i

$$u_n(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)]$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
eksplanzija i
kompresija

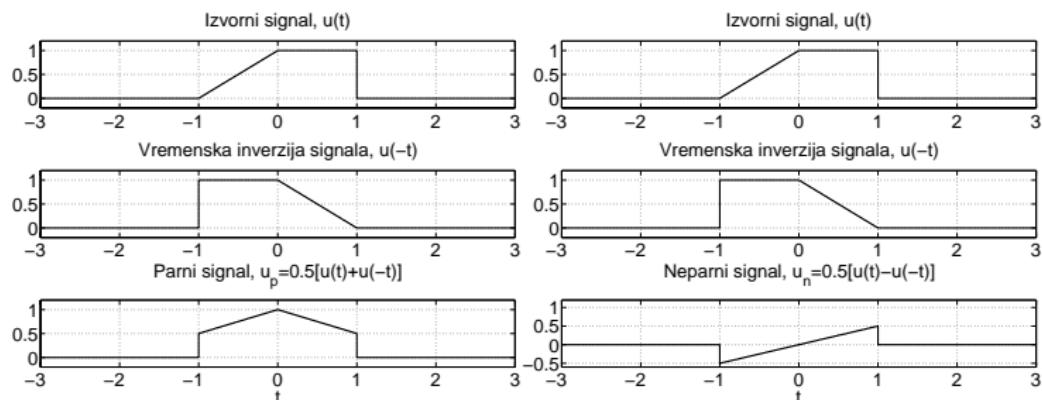
Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Parna i neparna komponenta signala

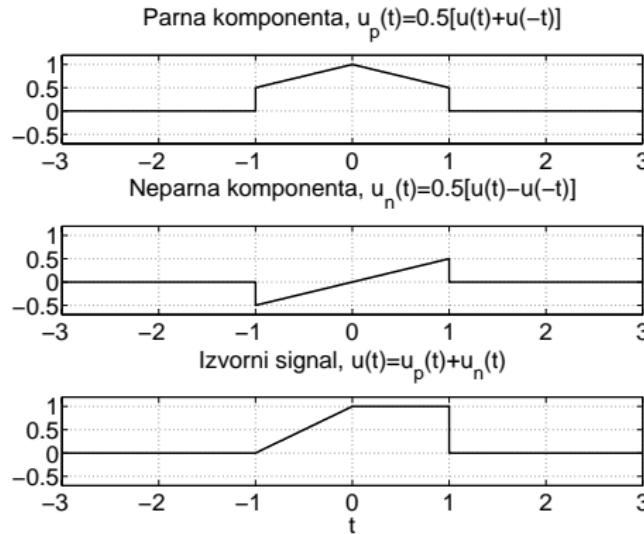


Slika 13: Parna i neparna komponenta signala



Signal kao zbroj parne i neparne komponente

- signal može biti prikazan zbrojem parne i neparne komponente¹⁵ $u = u_p + u_n$



Slika 14: Signal kao zbroj parne i neparne komponente

¹⁵isto vrijedi i za vremenski diskretne signale



Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signali u , odnosno v , su konjugirano simetrični signali ako vrijedi

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = u^*(-t)$$

odnosno

$$v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = v^*(-n)$$

- kompleksni signali u , odnosno v , su konjugirano antisimetrični signali ako vrijedi

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = -u^*(-t)$$

odnosno

$$v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = -v^*(-n)$$



Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signal u možemo prikazati kao zbroj njegove konjugirano simetrične u_{ks} i njegove konjugirano antisimetrične komponente u_{ka}
- za vremenski kontinuiran kompleksni signal vrijedi

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$u(t) = u_{ks}(t) + u_{ka}(t)$$

$$u_{ks}(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u^*(-t)]$$

$$u_{ka}(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u^*(-t)]$$

odnosno, za vremenski diskretni kompleksni signal,

$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$u(n) = u_{ks}(n) + u_{ka}(n)$$

$$u_{ks}(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u^*(-n)]$$

$$u_{ka}(n) = \frac{1}{2}[u(n) - u^*(-n)]$$



Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- za konjugirano simetrični kompleksni signal u , vrijedi
 $u(t) = u^*(-t), \forall t \in \mathbb{R}$, pa iz

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}\{u(t)\} + j\operatorname{Im}\{u(t)\} \\ u^*(-t) &= \operatorname{Re}\{u(-t)\} - j\operatorname{Im}\{u(-t)\} \end{aligned} \right\} =$$

slijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{u(t)\} &= \operatorname{Re}\{u(-t)\} \\ \operatorname{Im}\{u(t)\} &= -\operatorname{Im}\{u(-t)\} \end{aligned}$$

dakle, realni dio konjugirano simetričnog kompleksnog signala je parna funkcija a imaginarni dio je neparna funkcija



Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer1

Za kompleksni signal realne varijable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad f(\omega) = \frac{1}{b + j\omega},$$

ispitujemo svojstvo konjugirane simetričnosti. Iz

$$f(\omega) = \frac{1}{b + j\omega} \cdot \frac{b - j\omega}{b - j\omega} = \frac{b - j\omega}{b^2 + \omega^2} = \frac{b}{b^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{b^2 + \omega^2}$$

nalazimo

$$\operatorname{Re}[f(\omega)] = \frac{b}{b^2 + \omega^2} \Rightarrow \operatorname{Re}[f(\omega)] = \operatorname{Re}[f(-\omega)],$$

$$\operatorname{Im}[f(\omega)] = -\frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \Rightarrow \operatorname{Im}[f(\omega)] = -\operatorname{Im}[f(-\omega)],$$

$$|f(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} \Rightarrow |f(\omega)| = |f(-\omega)|,$$

$$\angle f(\omega) = -\operatorname{arc tg} \frac{\omega}{b} \Rightarrow \angle f(\omega) = -\angle f(-\omega),$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

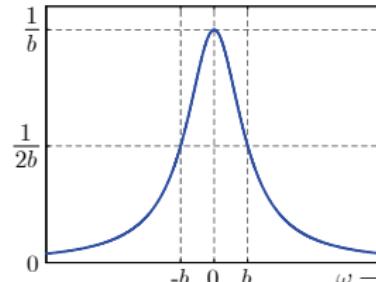
Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

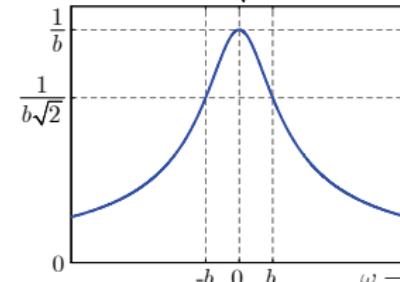
Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer1

zaključujemo da je f konjugirano simetričan signal

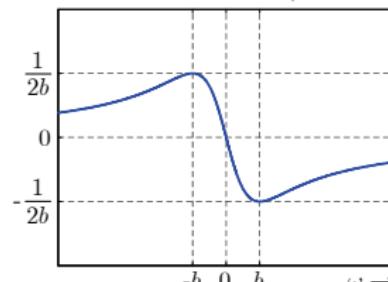
$$\operatorname{Re}[f(\omega)] = \frac{b}{b^2 + \omega^2}$$



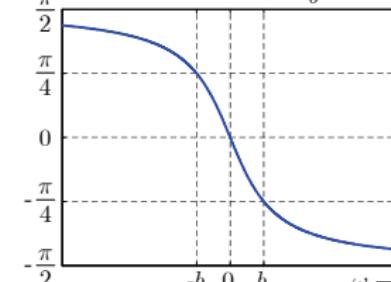
$$|f(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{b^2 + \omega^2}}$$



$$\operatorname{Im}[f(\omega)] = -\frac{\omega}{b^2 + \omega^2}$$



$$\angle f(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{b}$$



Slika 15: Konjugirano simetričan, po nezavisnoj varijabli kontinuiran, signal.



Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer2

Za vremenski kontinuirani kompleksni signal, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{j(t+\frac{\pi}{3})},$$

određujemo konjugirano simetričnu komponentu f_{ks} , i
konjugirano antisimetričnu komponentu f_{ka} .

Iz $f(t)$ određujemo $f^*(t)$ i $f^*(-t)$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^*(t) = e^{-j(t+\frac{\pi}{3})} \Rightarrow f^*(-t) = e^{j(t-\frac{\pi}{3})},$$

pa su

$$f_{ks}(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f^*(-t)] = \frac{1}{2} \left[e^{j(t+\frac{\pi}{3})} + e^{j(t-\frac{\pi}{3})} \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{jt} \left[e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \right] = e^{jt} \cos \frac{\pi}{3} = 0.5e^{jt}$$

$$f_{ka}(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f^*(-t)] = \frac{1}{2} \left[e^{j(t+\frac{\pi}{3})} - e^{j(t-\frac{\pi}{3})} \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{jt} \left[e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{\pi}{3}} \right] = j e^{jt} \sin \frac{\pi}{3} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{jt} \sin \frac{\pi}{3} = 0.866 e^{j(t+\frac{\pi}{2})}.$$



Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer2

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signala

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

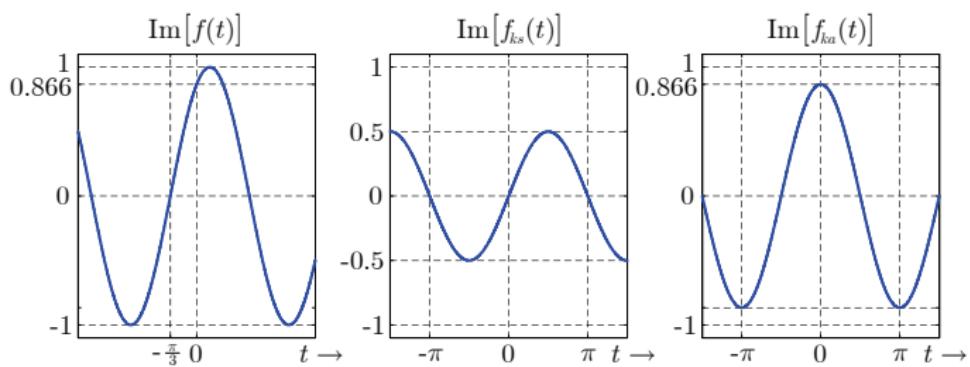
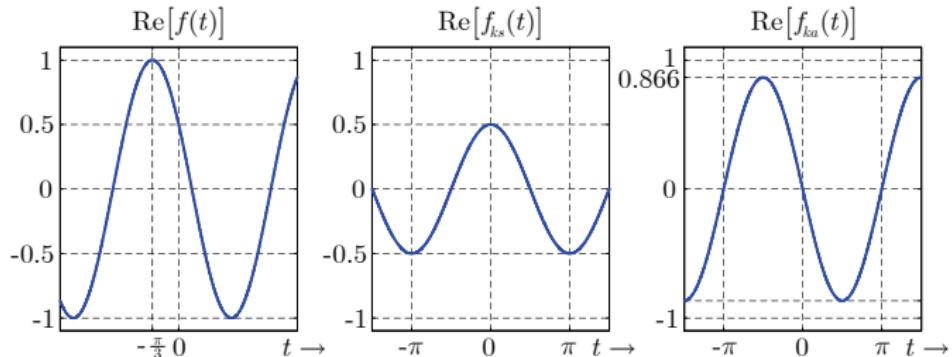
Vremenska
ekspanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak



Slika 17: Konjugirano simetričan, po nezavisnoj varijabli kontinuiran, signal.



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Diferencija
vremenski
diskretnog
signala

Akumulacija
vremenski
diskretnog
signala

Vremenska
eksplanzija i
kompresija

Konvolucija
signala

Parni i neparni
signali

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Višedimenzionalni
signali

Klasif. sig.
primjeri

Periodični i
neperiodični
signali

Oper. nad sig.
- dodatak

Višedimenzionalni signali

- višedimenzionalni signali definirani funkcijama s više nezavisnih varijabli

$$f : W_1 \times W_2 \times \dots \times W_N \rightarrow Y$$

$$\forall (w_1, w_2, \dots, w_N) \in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_N$$

$$y = f(w_1, w_2, \dots, w_N) \in Y.$$



Višedimenzionalni signali

Primjer:

- primjer dvodimenzionalnog signala je crnobijela fotografija

FotoCrnobijela : VertikalnaOs × HorizontalnaOs → Intenzitet,

gdje je *Intenzitet* = [crno, bijelo] mјeren u odgovarajućoj skali i predstavlja svjetlinu (razinu sivila)

- dakle, dvije nezavisne varijable su dvije prostorne varijable, a vrijednost funkcije predstavlja razinu svjetline u pojedinoj točki fotografije



Višedimenzionalni signali

- Crnobijela fotografija na slici, dimenzija je 55 mm po vertikalnoj osi i 60 mm po horizontalnoj osi, i definiramo je kao dvodimenzionalni signal *Leica*

Leica : $[0, 55] \times [0, 60] \rightarrow [0, I_{max}]$

$\forall (y, x) \in [0, 55] \times [0, 60], \quad I = \text{Leica}(y, x) \in [0, I_{max}],$

gdje je I_{max} maksimalna vrijednost svjetline (0 je crno, a I_{max} je bijelo).





Višekanalni signali

- signal koji generira jedan izvor naziva se skalarni signal i do sada smo razmatrali upravo takve signale
- na ovom mjestu uvode se u razmatranje i signali koji sadrže više komponenti i koje generira više izvora ili senzora. Takvi signali nazivaju se vektorski ili višekanalni signali. Višekanalni signali mogu biti jedno i višedimenzionalni, pa tako K -kanalni N -dimenzionalni signal zapisujemo kao

$$\begin{aligned} f: W_1 \times W_2 \times \dots \times W_N &\rightarrow V_1 \times V_2 \times \dots \times V_K, \\ \forall (w_1, w_2, \dots, w_N) \in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_N, \\ \forall (v_1, v_2, \dots, v_K) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_K, \\ (v_1, v_2, \dots, v_K) &= f(w_1, w_2, \dots, w_N). \end{aligned} \tag{3}$$



Slika u boji

- sliku u boji razmatramo kao višekanalni (višekomponentni) signal
- reflektirano svjetlo se definira preko RGB (*red, green, blue*) vrijednosti pa je:

Slika_u_Boji : VertikalnaOs \times HorizontalnaOs \rightarrow Intenzitet³,

- bilo kojoj točki (y, x) domene odgovara trojka $(I_r, I_g, I_b) \in$ Intenzitet³ pa su RGB vrijednosti pridružene signalu *Slika_u_Boji*

$$(I_r, I_g, I_b) = Slika_u_Boji(y, x)$$



Slika u boji

- dakle, slika u boji je signal koji se sastoji od tri 2D signala koji predstavljaju tri osnovne boje: crveno (r), zeleno (g) i plavo (b)
- tri komponente slike u boji prikazane su ovim primjerom:





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Višedimenzionalni
signali

Klasif. sig.
primjeri

Periodični i
neperiodični
signali

Oper. nad sig.
- dodatak

Slika u boji

- potpuna slika u boji dobiva se kombinacijom prethodne tri slike:





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Višedimenzionalni
signali

Klasif. sig.
primjeri

Periodični i
neperiodični
signali

Oper. nad sig.
- dodatak

Slika u boji

- uvećana finalna kombinacija





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Višedimenzionalni
signali

Klasif. sig.
primjeri

Periodični i
neperiodični
signali

Oper. nad sig.
- dodatak

Realni signal

Signal *Kosinus*, zadan u intervalu $Vrijeme \subset \mathbb{R}$,

$$\text{Kosinus: } Vrijeme \rightarrow \mathbb{R}, \\ \forall t \in Vrijeme \subset \mathbb{R}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{Kosinus}(t) = \cos(\omega_0 t), \quad (4)$$

primjer je realnog signala realne varijable.



Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

Iznimno važan kompleksan signal realne varijable je signal opisan s kompleksnom eksponencijalnom funkcijom. Neka je kompleksna funkcija, $KomplExp(t) = e^{j\omega_0 t}$, zadana u intervalu $t \in [0, 4\pi/\omega_0] \subset \mathbb{R}$, definirana kao

$$KomplExp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\forall t \in [0, 4\pi/\omega_0] \subset \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$KomplExp(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t).$$

Područje vrijednosti kompleksne eksponencijalne funkcije je iz skupa \mathbb{C} pa je pri grafičkom prikazu potrebno crtati dva grafa.



Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

Za realni i imaginarni dio funkcije $KomplExp$,

$$\begin{aligned}Graf_1(KomplExp) &= \{(t, \operatorname{Re}[KomplExp(t)]) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\}, \\Graf_2(KomplExp) &= \{(t, \operatorname{Im}[KomplExp(t)]) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\},\end{aligned}\quad (6)$$

ili, dva grafa za modul i argument funkcije $KomplExp$,

$$\begin{aligned}Graf_3(KomplExp) &= \{(t, |KomplExp(t)|) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\}, \\Graf_4(KomplExp) &= \{(t, \angle(KomplExp(t))) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\},\end{aligned}\quad (7)$$

kao na slici (18).



Signalni i
sistemi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

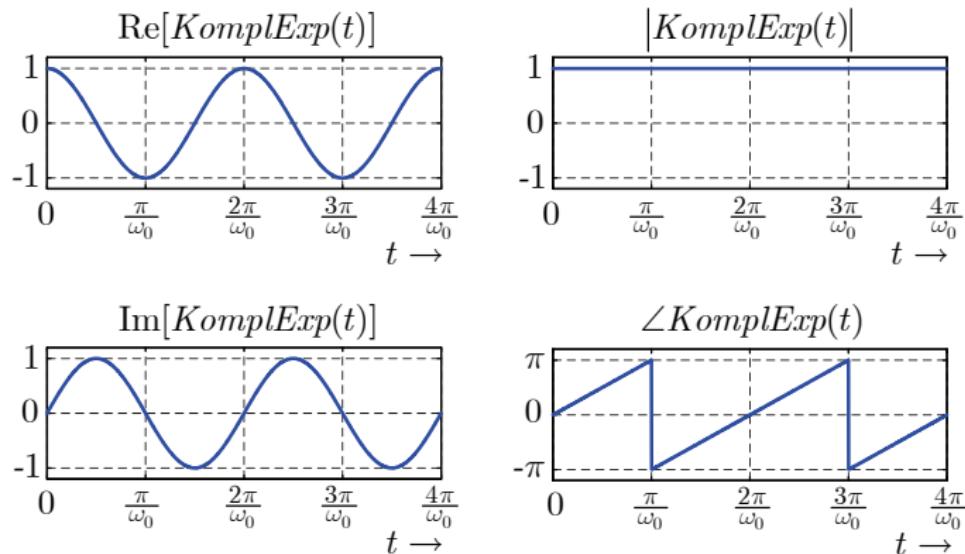
Višedimenzionalni
signali

Klasif. sig.
primjeri

Periodični i
neperiodični
signali

Oper. nad sig.
- dodatak

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable na slici 18 je, kako je to uobičajeno, prikazana glavna vrijednost argumenta $-\pi < \arg(KomplExp(t)) \leq \pi$



Slika 18: Grafovi signala $KomplExp(t) = e^{j\omega_0 t}$.



Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable U konkretnom slučaju su

$$\operatorname{Re}[KomplExp(t)] = \cos(\omega_0 t)$$

$$\operatorname{Im}[KomplExp(t)] = \sin(\omega_0 t)$$

$$|KomplExp(t)| = \sqrt{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)} = 1$$

$$\begin{aligned}\angle KomplExp(t) &= \operatorname{arc tg} \left[\frac{\operatorname{Im}[KomplExp(t)]}{\operatorname{Re}[KomplExp(t)]} \right] \\ &= \operatorname{arc tg} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t)} \right] = \omega_0 t.\end{aligned}$$

Podsjećamo kako su $|KomplExp(t)| = 1$ i
 $\angle KomplExp(t) = \omega_0 t$ mogli biti očitani izravno iz (5).



Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

Očigledna je primjena kompleksne eksponencijalne funkcije u prikazu realnih sinusoidnih signala i ovdje se, primjenom Eulerovih formula, ilustrira njezina uporaba:

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}. \quad (8)$$



Primjer kompleksnog signala kompleksne nezavisne varijable

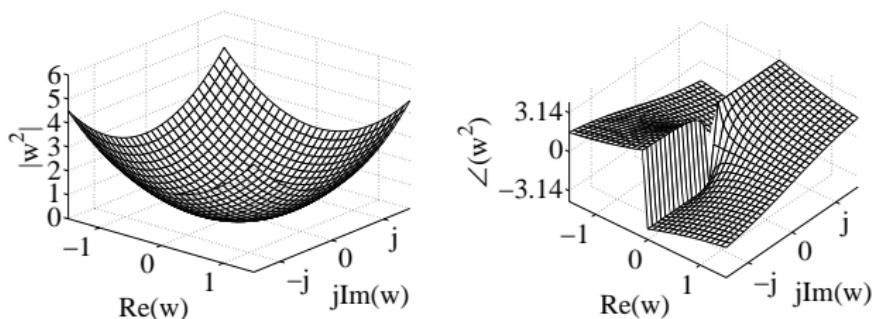
- Kompleksni signal je definiran kompleksnom kvadratnom funkcijom $Kvadrat(w) = w^2$, kompleksne varijable $w = Re(w) + jIm(w)$, zadanom kao

$$Kvadrat : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall w = Re(w) + jIm(w) \in \mathbb{C},$$

$$\forall Re(w) \in [-1.5, 1.5] \subset \mathbb{R}, \forall Im(w) \in [-1.5, 1.5] \subset \mathbb{R},$$

$$Kvadrat(w) = w^2.$$



Slika 19: Grafovi kompleksne funkcije $Kvadrat(w) = w^2$



Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

Primjer: po nezavisnoj varijabli diskretan signal

- studenti rješavaju neki zadatak i svaki od njih treba neko vrijeme rješavanja
- signal (funkcija) $VrijemeRješavanjaZadatka$, pridružuje vrijeme rješavanja svakom od studenata

$VrijemeRješavanjaZadatka : Studenti \rightarrow Vrijeme,$
 $Studenti = \{Alić, Barec, \dots, Zorko, Zrno\},$
 $Vrijeme \subset \mathbb{R}_+$

Primjer: signal diskretan po nezavisnoj varijabli i kvantiziran po amplitudi

- signal $BrojStudenataPoRedovima$,

$BrojStudenataPoRedovima : Redovi \rightarrow BrojStudenata,$
 $Redovi = \{1, 2, \dots, 14\} \subset \mathbb{Z}$
 $BrojStudenata = \{0, 1, \dots, 83\} \subset \mathbb{Z}$



Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala

Signalni i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija signala

Neke operacije nad signalima

Klasifikacija sig. - dodatak

Višedimenzionalni signali

Klasif. sig. primjeri

Periodični i neperiodični signali

Oper. nad sig.
- dodatak

$DiskretnaVertikalnaOs = \{1, 2, \dots, 450\}$,
 $DiskretnaHorizontalnaOs = \{1, 2, \dots, 500\}$,
 $Z_8 = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$

$DiskretnaVertikalnaOs = \{1, 2, \dots, 45\}$,
 $DiskretnaHorizontalnaOs = \{1, 2, \dots, 50\}$,
 $Z_8 = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$



- slika se može zamisliti kao matrica čiji elementi predstavljaju svjetlinu slike u toj točki
- slikovni elementi (picture element, pixel, pel)



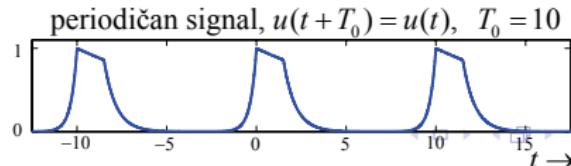
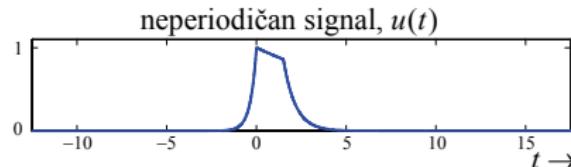
Periodični i neperiodični vremenski kontinuirani signali

- periodičan vremenski kontinuiran signal, periode T_0 , definiran je kao

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_0 \in \mathbb{R}_+ \quad u(t) = u(t + T_0)$$

- signal u ponavlja se svakih T_0 ali i svakih $2T_0, 3T_0, \dots$ pa vrijedi $u(t + rT_0) = u(t)$ za $r \in \mathbb{Z}$
- najmanji $T_0 < \infty$, koji zadovoljava periodičnost signala, naziva se osnovna perioda signala





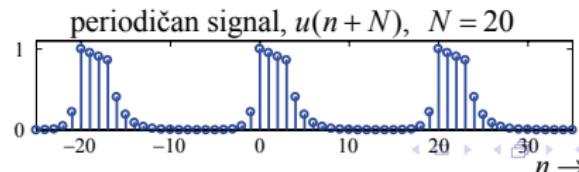
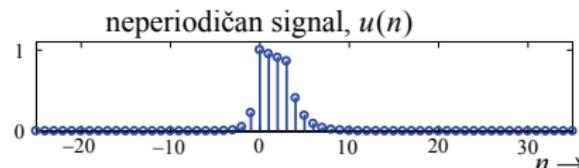
Periodični i neperiodični vremenski diskretni signali

- periodičan vremenski diskretan signal, periode N , definiran je kao

$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}_+, \quad u(n) = u(n + N)$$

- signal u ponavlja se svakih N ali i svakih $2N, 3N, \dots$ pa vrijedi $u(n + rN) = u(n)$ za $r \in \mathbb{Z}$
- najmanji $N < \infty$, koji zadovoljava periodičnost signala, naziva se osnovna perioda signala





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Višedimenzionalni
signali

Klasif. sig.
primjeri

Periodični i
neperiodični
signali

Oper. nad sig.
- dodatak

Važna svojstva periodičnih signala

- iz definicije slijedi
 - periodični signali su svezvremenski signali
 - vremenskim pomakom periodičnog signala za jednu periodu (ili njegove višekratnike) signal ostaje nepromijenjen
- periodični signal može nastati periodičnim produženjem neperiodičnog signala trajanja T_0 odnosno N

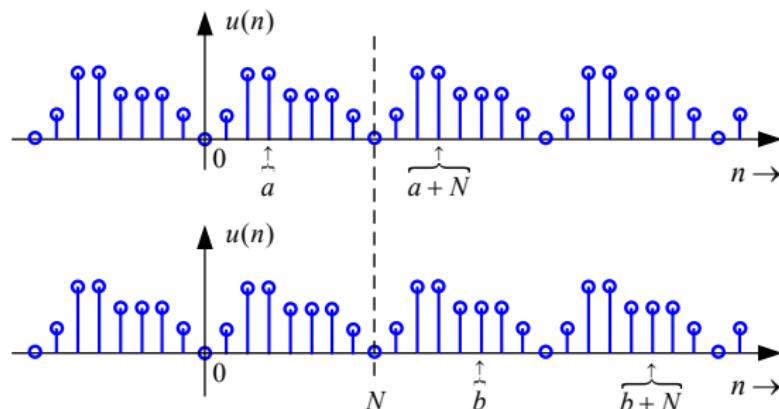


Važna svojstva periodičnih signala

- za periodične vremenski diskretne signale vrijedi

$$\sum_{n=a}^{a+N-1} u(n) = \sum_{n=b}^{b+N-1} u(n) = \sum_{n=<N>} u(n)$$

gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ a oznaka $\sum_{n=<N>} u(n)$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja zbrajanja duljine N , gdje je N temeljna perioda

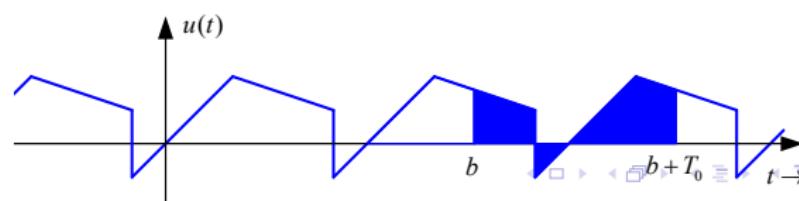
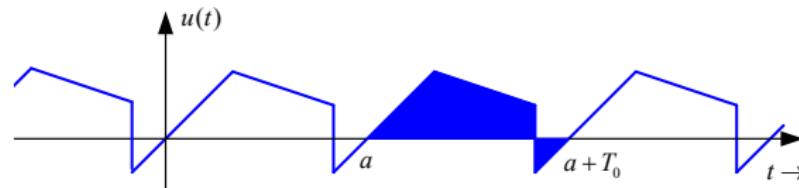




Važna svojstva periodičnih signala

- sličan zaključak vrijedi za periodične vremenski kontinuirane signale
- površina ispod funkcije u periodičnog signala, osnovnog perioda T_0 , jednaka je za bilo koji interval trajanja T_0 , dakle

$$\int_a^{a+T_0} u(t) dt = \int_b^{b+T_0} u(t) dt = \int_{T_0} u(t) dt$$





Zbrajanje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$u_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$$

tada je njihov zbroj $y_z = u_1 + u_2$

$$y_z : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiran kao

$$\forall w \in \mathcal{D}, \quad y_z(w) = u_1(w) + u_2(w)$$

- zbrajanje dvaju signala je bezmemorijska operacija jer zbroju dvaju signala za neki $w \in \mathcal{D}$ odgovara zbrajanje njihovih vrijednosti za taj isti w



Množenje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$u_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$$

tada je njihov umnožak $y_p = u_1 \cdot u_2$

$$y_p : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$$

definiran kao

$$\forall w \in \mathcal{D}, \quad y_p(w) = u_1(w) \cdot u_2(w)$$

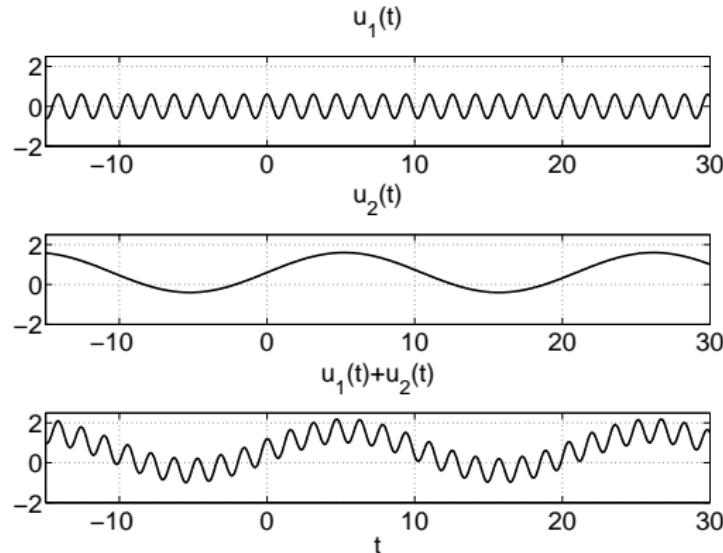
- množenje dvaju signala je također bezmemorijska operacija

Primjer zbrajanja vremenski kontinuiranih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 22

$$u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6 \cos(4t)$$

$$u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = \sin(0.3t) + 0.6$$



Slika 22: Zbroj vremenski kontinuiranih signala

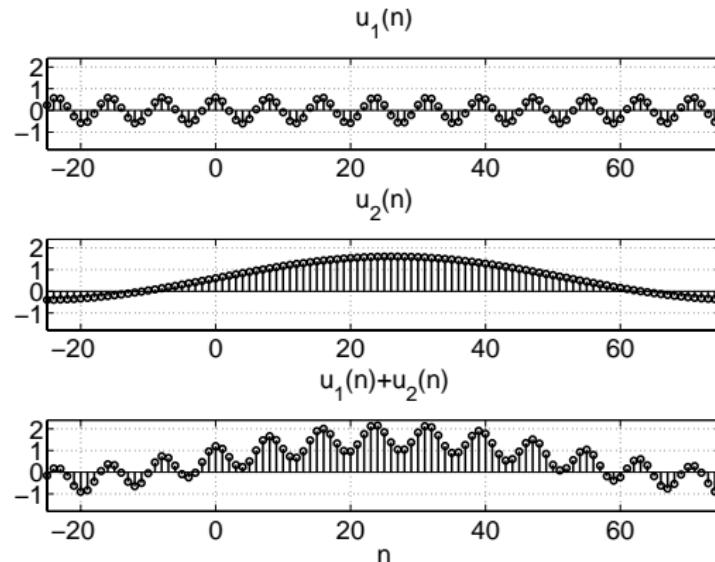


Primjer zbrajanja vremenski diskretnih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 23

$$u_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6 \sin(0.8n)$$

$$u_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = \sin(0.06n) + 0.6$$



Slika 23: Zbroj vremenski diskretnih signala

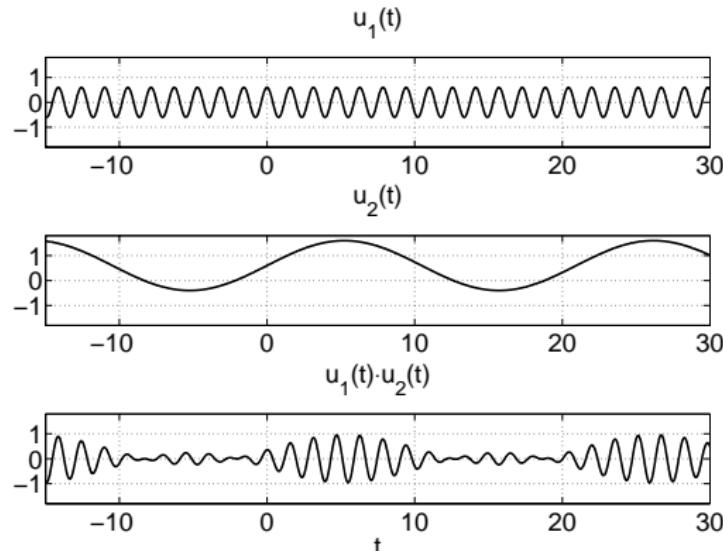


Primjer množenja vremenski kontinuiranih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 24

$$u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6 \cos(4t)$$

$$u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = \sin(0.3t) + 0.6$$



Slika 24: Umnožak vremenski kontinuiranih signala

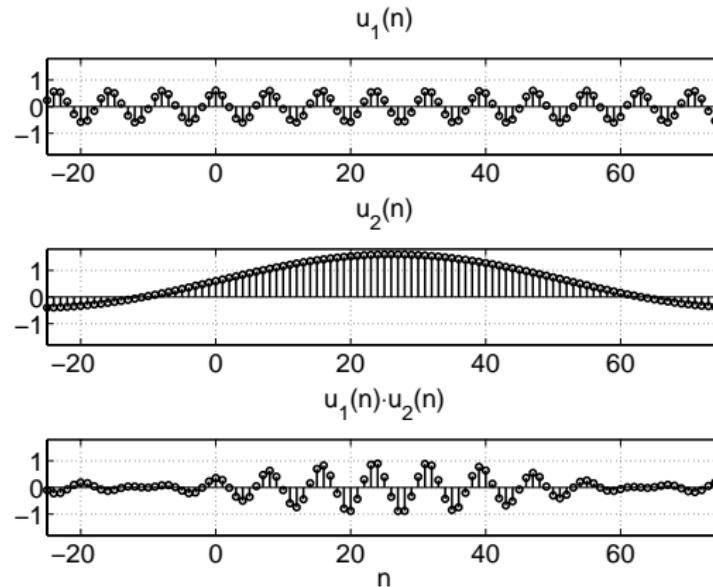


Primjer množenja vremenski diskretnih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 25

$$u_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6 \sin(0.8n)$$

$$u_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = \sin(0.06n) + 0.6$$



Slika 25: Umnožak vremenski diskretnih signala



Vremenski pomak vremenski kontinuiranog signala

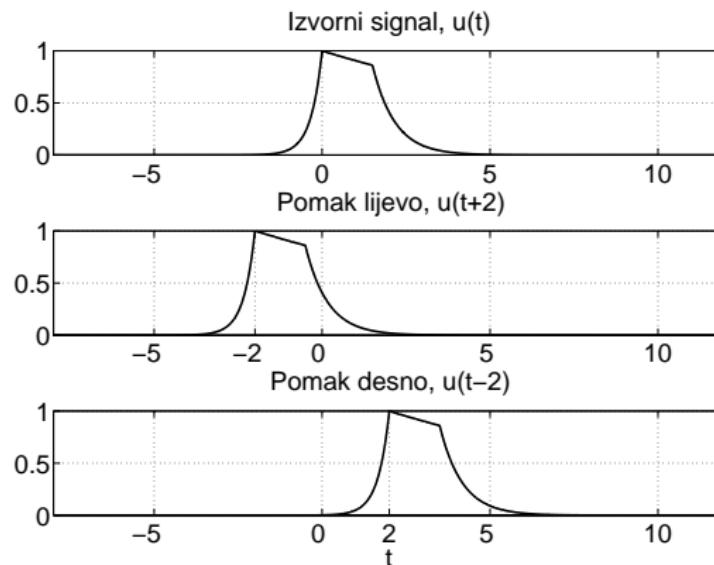
- pomak je po nezavisnoj varijabli, a ona je vrlo često vrijeme, pa koristimo uobičajeni termin *vremenski pomak*
 - za vremenski kontinuiran signal definiran je vremenski pomak

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(t - \tau) \quad \text{za} \quad \tau \in \mathbb{R}$$



Primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala

- primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala za $\tau = 0$,
 $\tau = -2$, $\tau = 2$ (Sl.26)



Slika 26: Pomak vremenski kontinuiranog signala



Vremenski pomak vremenski diskretnog signala

- slično prethodnom pokazujemo
 - za vremenski diskretni signal definiran je vremenski pomak

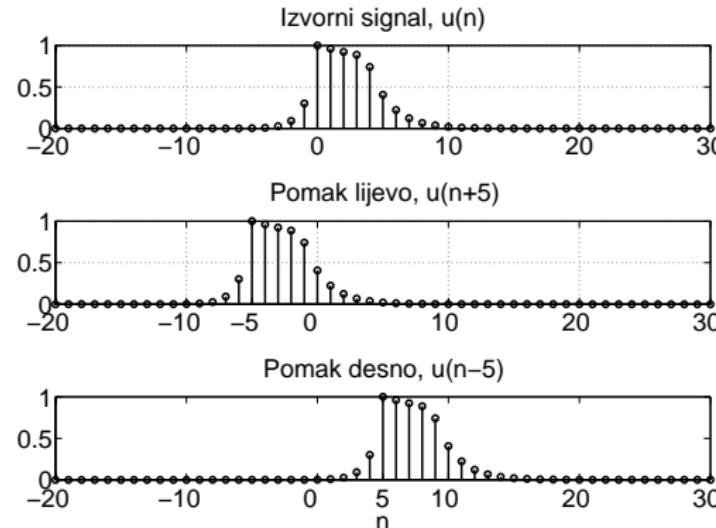
$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = u(n - N) \quad \text{za} \quad N \in \mathbb{Z}$$



Primjer pomaka vremenski diskretnog signala

- primjer pomaka vremenski diskretnog signala za $N = 0$,
 $N = -5$, $N = 5$ (Sl.27)



Slika 27: Pomak vremenski diskretnog signala



Derivacija vremenski kontinuiranog signala

- derivacija vremenski kontinuiranog signala¹⁶ definirana je kao derivacija funkcije koja opisuje signal
- derivacija funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je nova funkcija $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- oznake za derivaciju funkcije f su i $\dot{f}, Df, f'(t), Df(t), \frac{df(t)}{dt}$
- derivacija funkcije f definirana je kao:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija predstavlja mjeru promjene i preko nje se određuju područja u kojima funkcija raste ili pada
- iz definicije derivacije vidljivo je da je ona memorijska operacija

¹⁶Derivaciju, po odsjećima neprekinutih, vremenski kontinuiranih signala razmatramo nešto kasnije

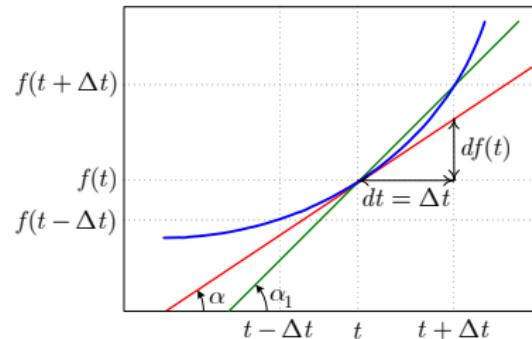


Geometrijska interpretacija derivacije

- na slici 28 je geometrijska interpretacija definicije derivacije funkcije

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{ ili } f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija u točki t odgovara koeficijentu smjera tangente u toj točki



Slika 28: Geometrijska interpretacija derivacije



Diferencijal

- diferencijal nezavisne varijable t je njezin prirast i on se definira kao $dt = \Delta t$
- diferencijal funkcije definiramo kao prirast koji dobiva tangenta u danoj točki t što je linearna aproksimacija prirasta funkcije u okolini točke t

$$df(t) = f'(t)dt$$

- dakle, za malo Δt , vrijedi

$$df(t) \approx f(t + \Delta t) - f(t)$$



Integral vremenski kontinuiranog signala

- integral vremenski kontinuiranog signala definiran je kao integral funkcije koja opisuje signal
- integral funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je nova funkcija $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana kao:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

- integracija je također memorijska operacija
- geometrijska interpretacija određenog integrala kazuje kako integral $\int_a^b f(\tau) d\tau$ predstavlja površinu ispod krivulje $f(t)$ za interval $t \in [a, b]$



Primjer derivacije i integracije signala

Operacije deriviranja i integriranja ilustriramo za vremenski kontinuiran signal

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_a(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ 2t, & 0 \leq t \leq 2 \\ -2t + 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ 2t - 16, & 6 \leq t \leq 10 \\ -2t + 24, & 10 \leq t \leq 12 \\ 0, & t \geq 12. \end{cases} \quad (9)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'_a(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ 2, & 0 \leq t < 2 \\ -2, & 2 \leq t < 6 \\ 2, & 6 \leq t < 10 \\ -2, & 10 \leq t < 12 \\ 0, & t \geq 12. \end{cases} \quad (10)$$



Primjer derivacije i integracije signala

Integral signala $u_a(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, je

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^t u_a(\tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^t (0) d\tau = 0, & -\infty < t \leq 0 \\ y_a(0) + \int_0^t (2\tau) d\tau = t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ y_a(2) + \int_2^t (-2\tau + 8) d\tau = -t^2 + 8t - 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ y_a(6) + \int_6^t (2\tau + 16) d\tau = t^2 - 16t + 64, & 6 \leq t \leq 10 \\ y_a(10) + \int_{10}^t (-2\tau + 24) d\tau = -t^2 + 24t - 136, & 10 \leq t \leq 12 \\ y_a(12) = 8, & t \geq 12, \end{cases} \quad (11)$$

gdje su $y_a(0)$, $y_a(2)$, $y_a(6)$, $y_a(10)$, i $y_a(12)$ sukcesivno izračunati iz izraza (11). Grafovi ovih signala prikazani su na slici 29.



Primjer derivacije i integracije signala

Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Zbrajanje i
množenje

Vremenski
pomak

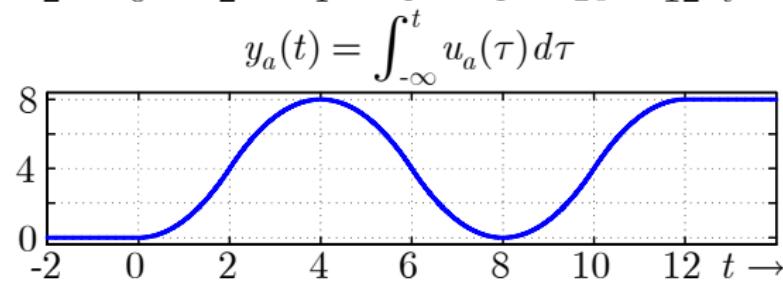
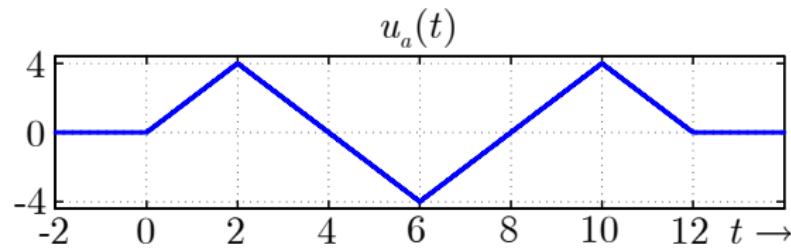
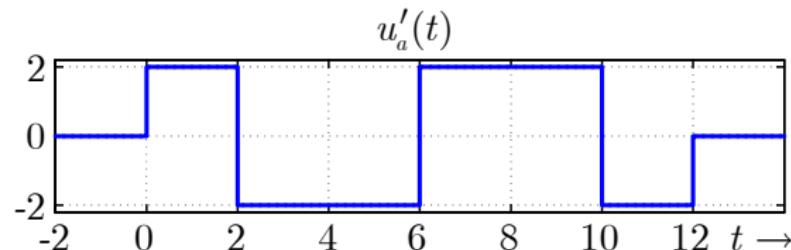
Derivacija

Integralacija

Diferencija

Integralacija i
akumulacija

Vremenska
inverzija



Slika 29: Derivacija i integralacija vremenski kontinuiranog signala



Primjer derivacije i integracije signala

Treba se podsjetiti da su operacije deriviranja i integriranja obrnute operacije. Tako da grafove na slici 29 možemo interpretirati i kao niz njihovih integracija, gledano odozgo prema dolje, odnosno niz derivacija gledano odozdo prema gore. Zaista integracijom funkcije u'_a dobivamo u_a , a njezinom integracijom $y_a = \int u_a$. Taj niz integracija bi mogli nastaviti po volji, ili potrebi, daleko. Isto tako, uzastopno derivirajući signale, odozdo prema gore, iz $y_a = \int u_a$ dobivamo u_a , a narednom derivacijom u' . I ovdje bi mogli nastaviti s operacijom deriviranja međutim tada bi trebalo uporabiti generaliziranu derivaciju zbog činjenice da postoje diskontinuiteti signala koji deriviramo na mjestima $t = 0, 2, 6, 10, \text{ i } 12$. Generalizirana derivacija definira se nešto kasnije.



Primjer silazne i uzlazne diferencije

Za vremenski diskretni signal u , zadan kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(n) = \begin{cases} 0.5n, & 0 \leq n \leq 7 \\ -0.5n + 8, & 8 \leq n \leq 23 \\ 0.5n - 16, & 24 \leq n \leq 39 \\ -0.5n + 24, & 40 \leq n \leq 47 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (12)$$

izračunava se silazna diferencija, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$\nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$ kao

$$\nabla u(n) = \begin{cases} (0.5n) - 0.5(n-1) = 0.5, & 1 \leq n \leq 8 \\ [-0.5n + 8] - [-0.5(n-1) + 8] = -0.5, & 9 \leq n \leq 24 \\ [0.5n - 16] - [0.5(n-1) - 16] = 0.5, & 25 \leq n \leq 40 \\ [-0.5n + 24] - [-0.5(n-1) + 24] = -0.5, & 41 \leq n \leq 48 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (13)$$



Primjer silazne i uzlazne diferencije

i uzlazna diferencija, $\forall n \in \mathbb{Z}, \Delta u(n) = u(n+1) - u(n)$ kao

$$\Delta u(n) = \begin{cases} 0.5(n+1) - 0.5n = 0.5, & 0 \leq n \leq 7 \\ [-0.5(n+1) + 8] - [-0.5n + 8] = -0.5, & 8 \leq n \leq 23 \\ [0.5(n+1) - 16] - [0.5n - 16] = 0.5, & 24 \leq n \leq 39 \\ [-0.5(n+1) + 24] - [-0.5n + 24] = -0.5, & 40 \leq n \leq 47 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (14)$$



Primjer silazne i uzlazne diferencije

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 2.

Profesor
Branko Jeren

Klasifikacija
signala

Neke operacije
nad signalima

Klasifikacija
sig. - dodatak

Oper. nad sig.
- dodatak

Zbrajanje i
množenje

Vremenski
pomak

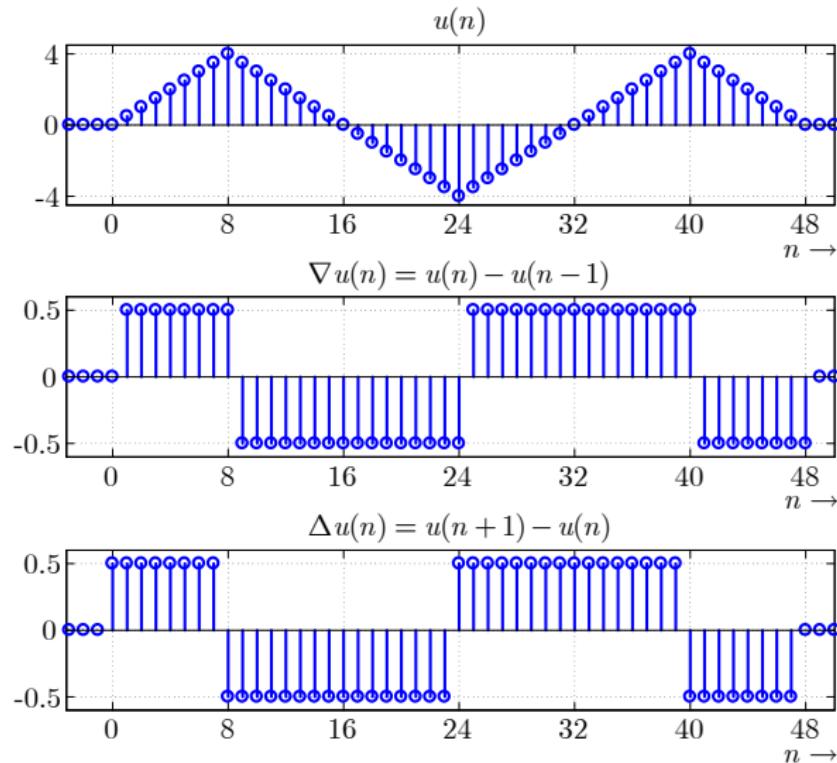
Derivacija
Integracija

Diferencija

Integracija i
akumulacija

Vremenska

inverzija



Slika 30: Silazna i uzlazna prva diferencija vremenski diskretnog signala.



Primjer veze derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

Razmatra se vremenski kontinuiran signal y_a , definiran kao

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ -t^2 + 8t - 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ t^2 - 16t + 64, & 6 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 24t - 136, & 10 \leq t \leq 12 \\ 8, & t \geq 12. \end{cases} \quad (15)$$

Derivacija ovog signala je

$$u_a(t) = \frac{dy_a}{dt} = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ 2t, & 0 \leq t \leq 2 \\ -2t + 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ 2t - 16, & 6 \leq t \leq 10 \\ -2t + 24, & 10 \leq t \leq 12 \\ 0, & t \geq 12. \end{cases} \quad (16)$$



Primjer veze derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

Očitavanjem vremenski kontinuiranog signala y_a , svakih $T = 0.25$, nastaje vremenski diskretan signal $y(n) = y_a(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$y(n) = \begin{cases} 0, & -\infty < n \leq 0 \\ 0.25^2 n^2, & 0 \leq n \leq 8 \\ -0.25^2 n^2 + 2n - 8, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.25^2 n^2 - 4n + 64, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.25^2 n^2 + 6n - 136, & 41 \leq n \leq 48 \\ 8, & n \geq 49, \end{cases} \quad (17)$$

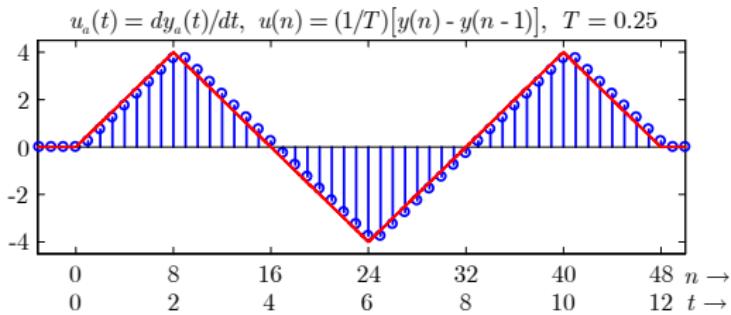
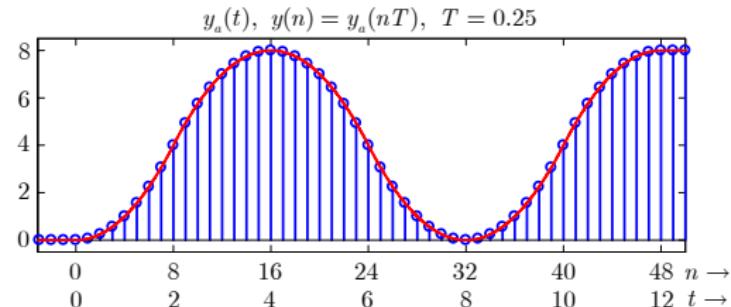
a diferenciju signala određujemo iz $u(n) = \frac{1}{T} [y(n) - y(n-1)]$,

$$u(n) = \begin{cases} 0, & -\infty < n \leq 0 \\ 0.5n - 0.25, & 1 \leq n \leq 8 \\ -0.5n + 8.25, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.5n - 16.25, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.5n + 24.25, & 41 \leq n \leq 48 \\ 0, & n \geq 49, \end{cases} \quad (18)$$



Primjer veze derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

Kada bi očitali $u_a(t)$ svakih $t = nT = 0.25n$, lako bi uočili kako je $u(n) \approx u_a(nT)$ što je i razvidno na slici 31.

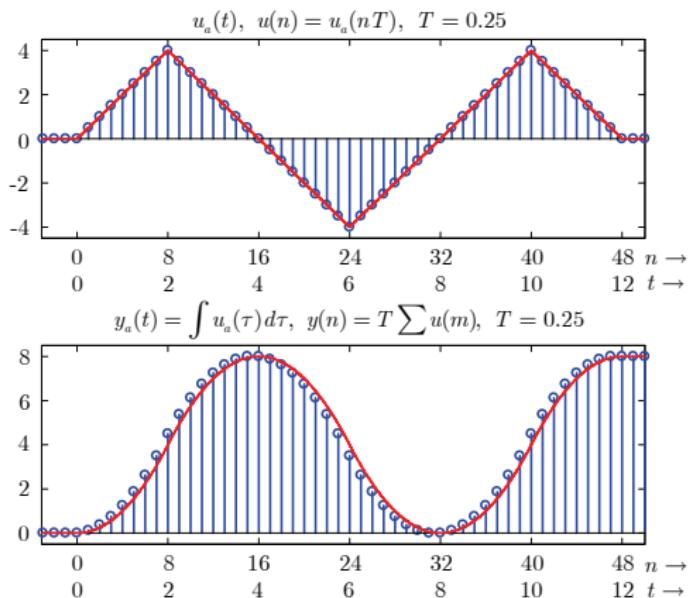


Slika 31: Veza derivacije i diferencije. Vremenski kontinuirani signal i njegova derivacija prikazani su crveno.



Primjer veze integracije vremenski kontinuiranog signala i akumulacije vremenski diskretnog signala

Vremenski kontinuiran signal isti kao signal, označen izrazom (9), i njegov integral, označen izrazom (11), prikazani su na slici 32 crvenom bojom i označeni kao u_a i y_a .



Slika 32: Veza integriranja i akumulacije.



Primjer veze integracije vremenski kontinuiranog signala i akumulacije vremenski diskretnog signala

Vremenski diskretan signal u , nastao očitavanjem signala u_a svakih $T = 0.25$ je

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(n) = \begin{cases} 0.5n, & 0 \leq n \leq 8 \\ -0.5n + 8, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.5n - 16, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.5n + 24, & 41 \leq n \leq 48 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (19)$$

Operacijom akumulacije, $y(n) = y(n_0 - 1) + T \sum_{m=n_0}^n u(m)$,

$$y(n) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq n \leq -1 \\ 0.0625n^2 + 0.0625n, & 0 \leq n \leq 8 \\ -0.0625n^2 + 1.9375n - 7, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.0625n^2 - 3.9375n + 62, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.0625n^2 + 5.9375n - 133, & 41 \leq n \leq 48 \\ 8, & n \geq 49 \end{cases} \quad (20)$$



Primjer veze integracije vremenski kontinuiranog signala i akumulacije vremenski diskretnog signala

Prikažimo samo izračun $y(n)$ za $9 \leq n \leq 24$.

$$y(n) = y(8) + T \sum_{m=9}^n (-0.5m + 8)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{y(8)}_{4.5} - 0.25 \cdot 0.5 \underbrace{\sum_{m=9}^n m}_{\frac{n(1+n)}{2}} + 0.25 \underbrace{\sum_{m=9}^n 8}_{\frac{n(8+8)}{2}} \\ &\quad - \frac{8(1+8)}{2} - \frac{8(8+8)}{2} \end{aligned}$$

$$= 4.5 - 0.0625(n^2 + n) + 4.5 + 2n - 16$$

$$= -0.0625n^2 + 1.9375n - 7,$$

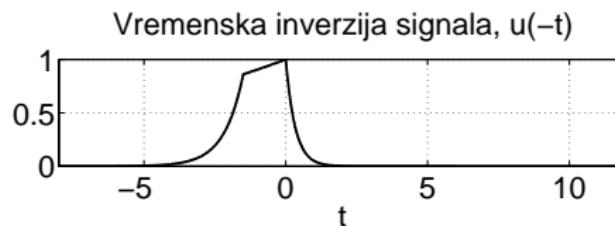
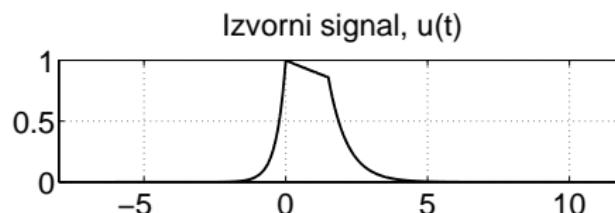
gdje je $y(8)$ prethodno dobiven izračunom akumulacije signala y za $0 \leq n \leq 8$. Za ostale odsječke signala u , akumulaciju izračunavamo na isti način. Slika 32 ilustrira operaciju akumulacije vremenski diskretnog signala, te prikazuje kako operacija akumulacije aproksimira operaciju integriranja.



Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala

- za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(-t)$$



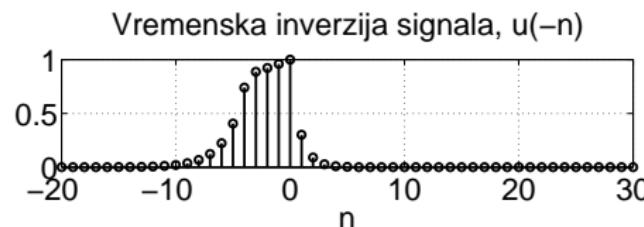
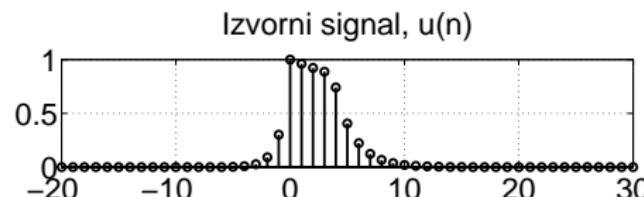
Slika 33: Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala



Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala

- za vremenski diskretni signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = u(-n)$$



Slika 34: Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala



Signali i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

8. ožujka 2017.



Signali i
sistemi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

U cjelini 3 razmatramo

- osnovni signali
 - jedinični skok
 - jedinična kosina
 - jedinični impuls
 - sinusoidni signal
 - eksponencijalni signal
- očitavanje vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala

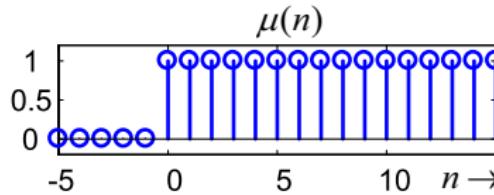


Vremenski jedinični skok – vremenska jedinična step funkcija

- vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao:

$\forall n \in \mathbb{Z},$

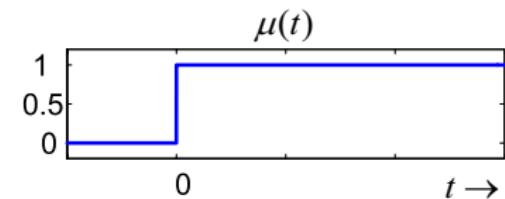
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



- vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao:

$\forall t \in \mathbb{R},$

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



- u literaturi se koriste i druge definicije: $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

ili

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Jedinična kosina

- vremenski diskretna

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{kosina}(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

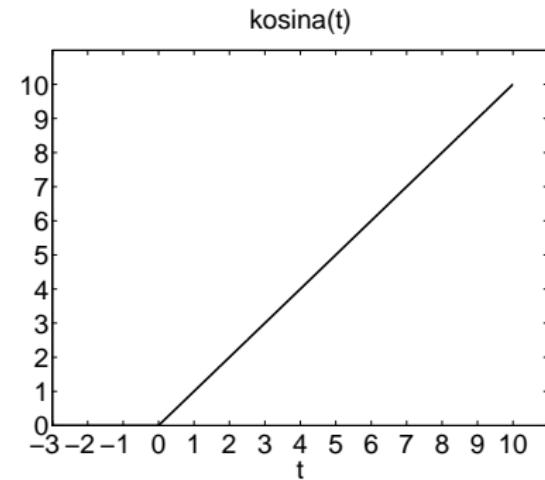
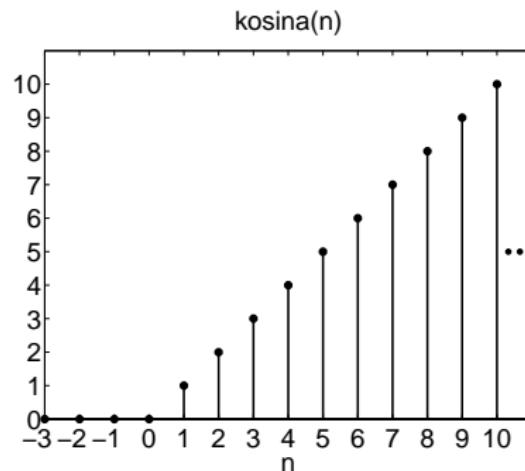
- vremenski kontinuirana

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\text{kosina}(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal
Vremenski
diskretn
kompleksni
eksponencijalni
signal
Vremenski
diskretn
sinusoidni signal



Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

- veza vremenski diskretne jedinične kosine i jediničnog skoka je

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} \text{kosina}(n) &= \sum_{m=-\infty}^n \mu(m-1) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mu(m) \end{aligned}$$

- vremenski diskretan jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao diferenciju

$$\mu(n) = \text{kosina}(n+1) - \text{kosina}(n)$$

- veza vremenski kontinuirane jedinične kosine i jediničnog skoka je

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\text{kosina}(t) = \int_{-\infty}^t \mu(\tau) d\tau = t\mu(t)$$

- vremenski kontinuiran jedinični skok možemo definirati pomoću kosine kao

$$\mu(t) = \frac{d(\text{kosina}(t))}{dt}, \quad t \neq 0$$



Veza jediničnog skoka i jedinične kosine

- važno je uočiti analogiju

- vremenski diskretan jedinični skok i vremenski diskretna jedinična kosina vezani su operacijama akumulacije i diferencije
- vremenski kontinuiran jedinični skok i vremenski kontinuirana jedinična kosina vezani su operacijama integriranja i deriviranja
- uočava se prije pokazane analogije
 - derivacija vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencija vremenski diskretnog signala
 - integracija vremenski kontinuiranih signala odgovara operacija akumulacije za vremenski diskrete signale
 - derivacija i integracija signala suprotne su operacije, tako su i operacije diferencije i akumulacije suprotne operacije



Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Vremenski diskretan jedinični impuls – Kroneckerova delta funkcija

- vremenski diskretan jedinični impuls δ je vremenski diskretan signal definiran kao:

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

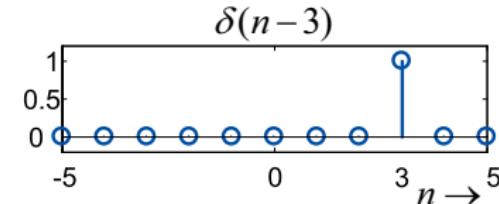
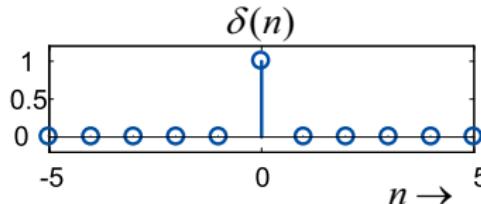
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- za m koraka pomaknuti vremenski diskretan jedinični impuls definiran je kao

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\delta(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

gdje je $m \in \mathbb{Z}$





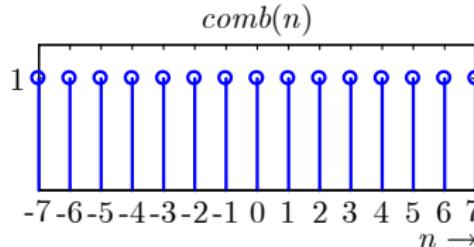
Niz vremenski diskretnih jediničnih impulsa

- definiraju se nizovi jediničnih impulsa označenih vremenski diskretnom funkcijom *comb* (prema engleskom nazivu ove funkcije – *comb* = češalj)

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$m \in \mathbb{Z},$$

$$comb(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - m)$$

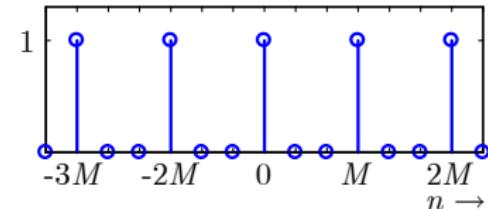


$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$m \in \mathbb{Z}, \forall M \in \mathbb{N},$$

$$comb_M(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mM)$$

$$comb_M(n), M = 3$$





Veza jediničnog skoka i jediničnog impulsa

- analogno vezi vremenski diskretnog jediničnog skoka i vremenski diskretne jedinične kosine, vremenski diskretan jedinični skok i vremenski diskretan jedinični impuls vezani su operacijama akumulacije i diferencije
- vremenski diskretan jedinični skok odgovara akumulaciji jediničnog impulsa

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mu(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$$

- s druge strane, jedinični impuls odgovara prvoj diferenciji vremenski diskretnog jediničnog skoka

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$$



Jedinični impuls – svojstvo očitavanja

- analiziramo svojstvo očitavanja vremenski diskretnog jediničnog impulsa
- pomnožimo li neki vremenski diskretan signal f s jediničnim impulsem $\delta(n - n_0)$, koji se javlja u n_0 , dobijemo signal koji je impuls u n_0 čija je amplituda jednaka vrijednosti signala f u n_0
- kažemo kako jedinični impuls $\delta(n - n_0)$ "vadi" vrijednost, dakle, očitava funkciju f u n_0

$$f(n)\delta(n - n_0) = f(n_0)\delta(n - n_0)$$

- drugi način iskaza svojstva očitavanja jediničnog impulsa proizlazi iz zbroja

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(m - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n_0)\delta(m - n_0) = f(n_0)$$



Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

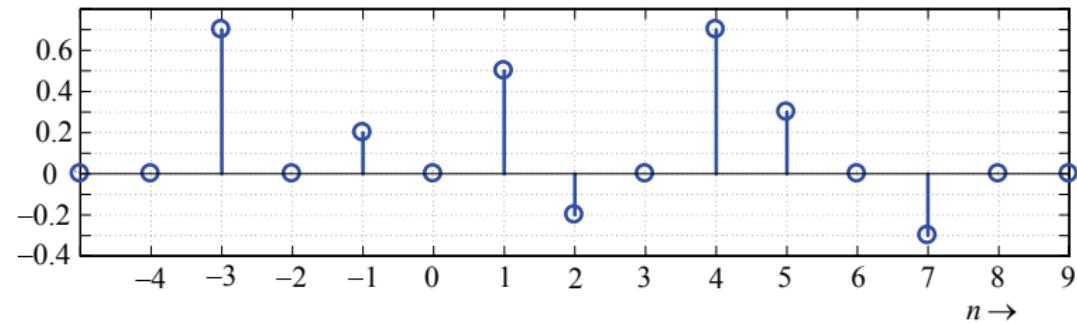
Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Vremenski diskretan jedinični impuls – primjena

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

$$u(n) = u(n) \cdot \text{comb}(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$



$$\begin{aligned} u(n) = & 0.7\delta(n+3) + 0.2\delta(n+1) + 0.5\delta(n-1) - \\ & - 0.2\delta(n-2) + 0.7\delta(n-4) + 0.3\delta(n-5) - 0.3\delta(n-7) \end{aligned}$$



Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jedinični impuls

- definira se vremenski kontinuiran jedinični impuls ili Diracova delta funkcija
- zbog svojih svojstava ona se izdvaja iz skupa uobičajenih matematičkih funkcija i svrstava se u klasu tzv. distribucija ili generaliziranih funkcija
- teorija generaliziranih funkcija razvijana je koncem devetnaestog i u prvoj polovici dvadesetog stoljeća, a prvenstveno zbog potreba izučavanja električnih krugova i nekih problema u fizici
- za potrebe ovog predmeta ovdje se uvodi vremenski kontinuirani jedinični impuls ne ulazeći u strogi matematički postupak



Diracova delta funkcija – vremenski kontinuirani jedinični impuls

- vremenski kontinuiran jedinični impuls δ , prvi je definirao P. A. M. Dirac kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{za } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- u čast Diracu vremenski kontinuiran jedinični impuls δ naziva se i Diracova delta funkcija
- Diracova delta funkcija je parna funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \delta(-t)$$



Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok

Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

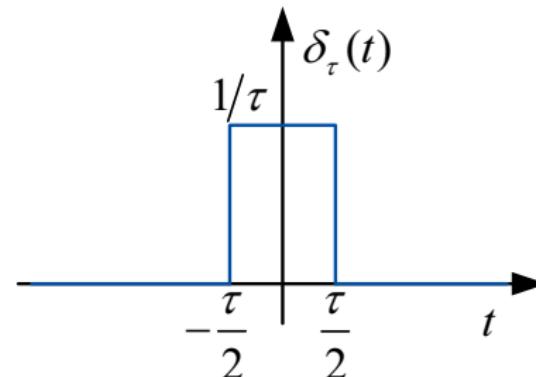
Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Diracova delta funkcija

- izvod za Diracovu delta funkciju započinje s definicijom pravokutnog pulsa površine jednake jedan

$\forall t \in \mathbb{R},$

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & t < -\frac{\tau}{2}, t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$





Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

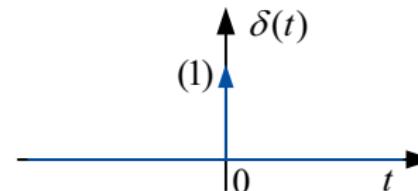
Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Diracova delta funkcija

- za $\tau \rightarrow 0$ pravokutni puls δ_τ postaje sve uži i sve viši ali pri tome površina ostaje uvijek vrijednosti jedan
- za granični slučaj slijedi

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_\tau(t)$$

- Diracovu delta funkciju prikazujemo kao na slici



- strelica u $t = 0$ ukazuje kako je površina impulsa koncentrirana u $t = 0$, a visina strelice i oznaka "1" označuje jediničnu površinu impulsa
- površina ispod impulsa se naziva "težina" ili njegov "intenzitet"



Umnožak Diracove delta funkcije i vremenski kontinuirane funkcije

- razmatra se umnožak Diracove delta funkcije s nekom vremenski kontinuiranom funkcijom f koja je konačna i neprekinuta u $t = 0$
- kako je jedinični impuls različit od nule samo za $t = 0$, a vrijednost od f u $t = 0$ je $f(0)$, pa slijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (1)$$

- dakle, umnožak vremenski kontinuirane funkcije f i δ rezultira s impulsom "intenziteta" ili "težine" $f(0)$ (što je vrijednost funkcije f na mjestu impulsa)
- isto tako, za funkciju koja je konačna i kontinuirana u $t = t_0$, vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (2)$$



Svojstvo očitavanja Diracove delta funkcije

- iz jednadžbe (1) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (3)$$

- isto tako, iz jednadžbe (2), slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0) \quad (4)$$

- što znači da je površina produkta funkcije i impulsa δ jednaka vrijednosti funkcije u trenutku u kojem je definiran jedinični impuls
- može se također reći da Diracova delta funkcija “vadi” ili “očitava” vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran, dakle, funkciji f pridružuje broj $f(t_0)$

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



Diracova delta funkcija kao generalizirana funkcija

- Diracovu delta funkciju se ne može promatrati kao uobičajenu funkciju jer ona ima vrijednost nula za sve vrijednosti osim za vrijednost $t = 0$, a za taj t nije definirana
- zato Diracovu delta funkciju definiramo u smislu teorije distribucija ili generaliziranih funkcija
- generaliziranu funkciju, umjesto njezinih vrijednosti za sve vrijednosti domene, definiramo preko njezina djelovanja na druge, "testne" ("ispitne"), funkcije
- definicija Diracove delta funkcija u smislu teorije distribucija je dana u jednadžbama (3) i (4) dakle:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(t_0) \quad (5)$$

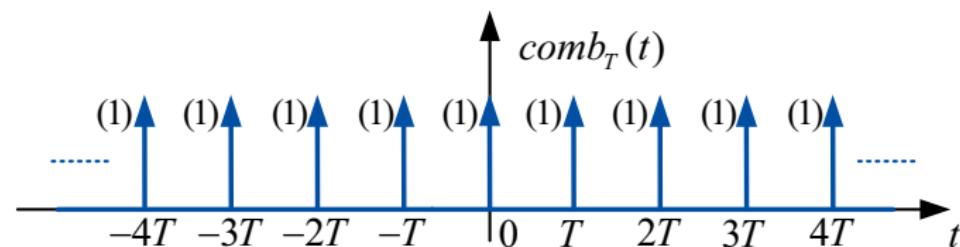


Niz Diracovih delta funkcija

- niz Diracovih delta funkcija, označen kao funkcija comb_T prema engleskom nazivu ove funkcije, definiran je kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\text{comb}_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT), \quad m \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$$





Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

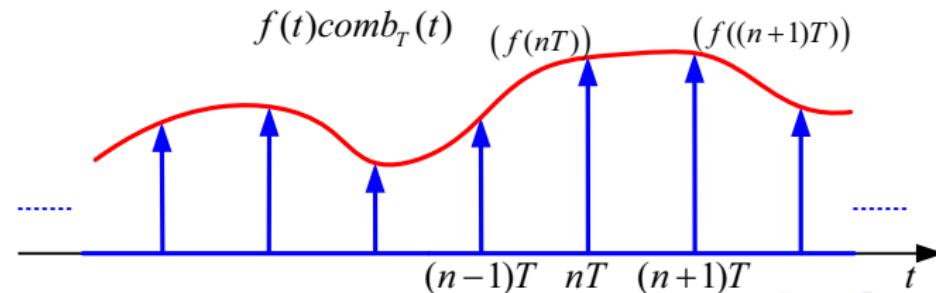
Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Produkt niza Diracovih delta funkcija i vremenski kontinuiranog signala

- produkt niza Diracovih delta funkcija, razmaknutih za T , i kontinuiranog signala f naziva se impulsno očitavanje kontinuiranog signala ili impulsna modulacija
- rezultat množenja je niz δ funkcija intenziteta koji odgovaraju trenutnim vrijednostima funkcije f na mjestima $t = nT$ za $n \in \mathbb{Z}$ i $T \in \mathbb{R}$

$$f_{\delta}(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$





Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

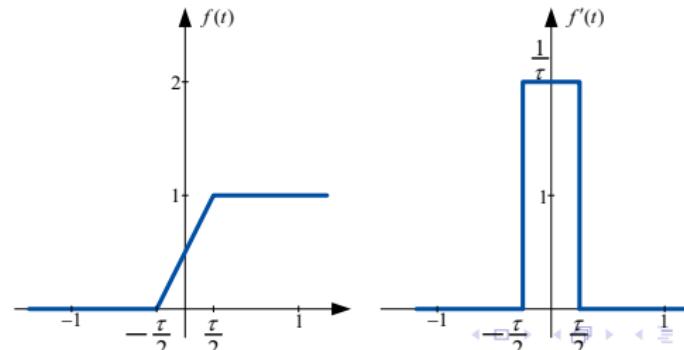
Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka

- derivacija funkcije jediničnog skoka svuda je nula osim na mjestu diskontinuiteta u $t = 0$ gdje derivacija nije definirana
- uvodi se tzv. generalizirana derivacija i pokazuje se kako je Diracova δ funkcija generalizirana derivacija funkcije jediničnog skoka
- do ovog zaključka dolazi se sljedećim razmatranjem
- za funkciju f na slici prikazana je i njezina derivacija





Veza vremenski kontinuiranog jediničnog impulsa i vremenski kontinuiranog jediničnog skoka

- derivacija funkcije f definirana je za svaki t osim za $t = -\tau/2$ i $t = \tau/2$
- smanjivanjem τ funkcija f se u konačnici približava jediničnom skoku, a pravokutni puls, površine jedan, koji predstavlja $df(t)/dt$, prelazi u jediničnu Diracovu δ funkciju
- ovako postignuta derivacija naziva se generalizirana derivacija, a jedinični impuls je generalizirana derivacija jediničnog skoka

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$$

- iz ovoga slijedi i

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda$$



Generalizirana derivacija vremenski kontinuiranog jediničnog skoka μ

- generaliziranu derivaciju jediničnog skoka možemo odrediti parcijalnom integracijom¹ integrala

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t)f(t)dt &= \mu(t)f(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)f'(t)dt \\ &= f(\infty) - 0 - \int_0^{\infty} f'(t)dt \\ &= f(\infty) - f(t)|_0^{\infty} = f(0)\end{aligned}$$

- očigledno je kako μ' zadovoljava svojstvo očitavanja Diracove delta funkcije δ , pa smo pokazali da vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)$$

¹podsjeta: iz $(uv)' = uv' + u'v$ integracijom obje strane slijedi

$$\int_a^b u'v dt = uv|_a^b - \int_a^b uv' dt$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetom u $t = t_0$

- generalizirana derivacija funkcije g , s diskontinuitetom (prekinute) u $t = t_0$ definirana je kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \frac{d}{dt}(g(t))_{t \neq t_0} + [g(t_0^+) - g(t_0^-)]\delta(t - t_0)$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Primjer generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetima

- neka je funkcija $g(t), \forall t \in \mathbb{R}$, zadana s

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ -t + 3, & 1 \leq t < 4 \\ 0.5(t - 6), & 4 \leq t < 8 \\ 2, & 8 \leq t < 9 \\ -t + 11, & 9 \leq t < 11 \\ 0, & t \geq 11 \end{cases}$$

- odnosno

$$\begin{aligned} g(t) = & (-t + 3)[\mu(t - 1) - \mu(t - 4)] + \\ & + 0.5(t - 6)[\mu(t - 4) - \mu(t - 8)] + \\ & + 2[\mu(t - 8) - \mu(t - 9)] + \\ & + (-t + 11)[\mu(t - 9) - \mu(t - 11)] \end{aligned}$$



Generalizirana derivacija funkcije s diskontinuitetima

- za funkciju g

$$\begin{aligned} g(t) = & (-t+3)[\mu(t-1) - \mu(t-4)] \\ & + 0.5(t-6)[\mu(t-4) - \mu(t-8)] \\ & + 2[\mu(t-8) - \mu(t-9)] \\ & + (-t+11)[\mu(t-9) - \mu(t-11)] \end{aligned}$$

- generalizirana derivacija je

$$\begin{aligned} g'(t) = & -1 \cdot [\mu(t-1) - \mu(t-4)] \\ & + 0.5[\mu(t-4) - \mu(t-8)] \\ & - 1 \cdot [\mu(t-9) - \mu(t-11)] \\ & + [g(1^+) - g(1^-)]\delta(t-1) \\ & + [g(8^+) - g(8^-)]\delta(t-8) \end{aligned}$$

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

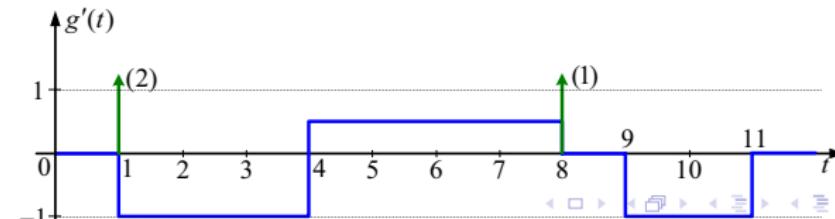
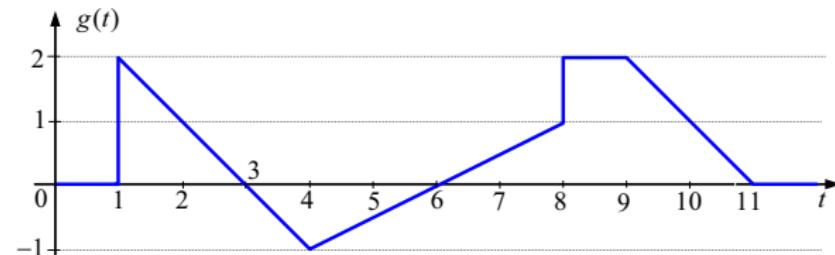
Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

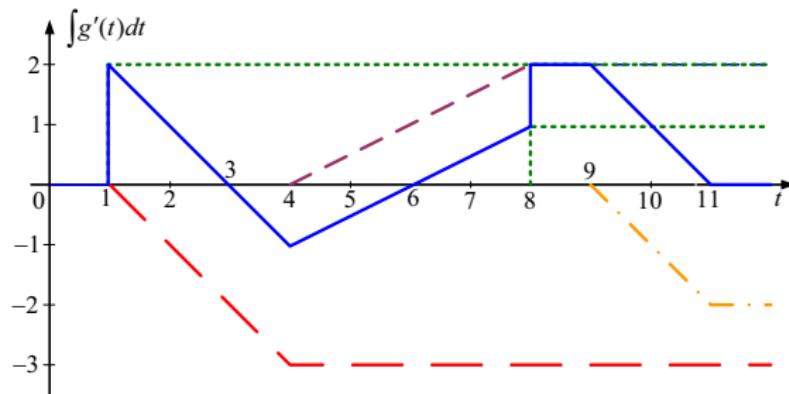
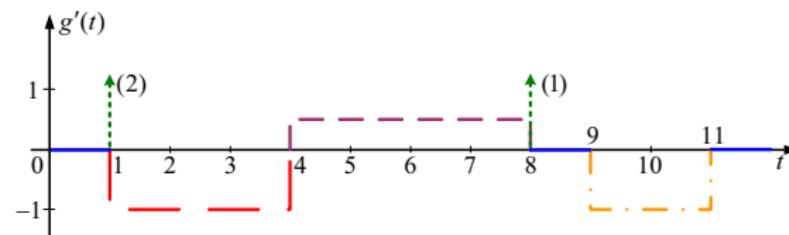
Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide





Generalizirana derivacija funkcije g s diskontinuitetom

- izračunava se integral funkcije g' iz prethodnog primjera





Derivacija kontinuiranog jediničnog impulsa δ

- vremenski kontinuirani jedinični impuls δ definiran je, u smislu teorije distribucija, kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

- derivaciju kontinuiranog jediničnog impulsa δ' definiramo kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

- gornji je izraz izведен parcijalnom integracijom integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = \underbrace{f(t)\delta(t)|_{-\infty}^{\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = -f'(0)$$



Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Derivacija kontinuiranog jediničnog impulsa δ

- dakle, iz

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$$

prepoznajemo svojstvo očitavanja, jer je očito kako derivacija Diracove delta funkcije očitava derivaciju signala u $t = 0$ (uz negativni predznak)

- za N -tu derivaciju δ , potrebno je parcijalnu integraciju provesti N puta, i tada se dolazi do

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(N)}(t)dt = (-1)^N f^{(N)}(0)$$



Konvolucija signala i Diracove delta funkcije

- konvoluciju dvaju signala f i g definiramo s konvolucijskim integralom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

- razmatramo konvoluciju signala f i Diracove delta funkcije

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad (f * \delta)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t) \Rightarrow \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

- vrijedi da konvolucija signala f sa zakašnjelim Diracovim jediničnim impulsom $(D_{t1}(\delta))(t) = \delta(t - t_1)$ rezultira u kašnjenju signala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (D_{t1}(\delta) * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1)f(t - \tau) d\tau = f(t - t_1)$$



Razlaganje signala pomoću Diracove delta funkcije

- izraz (6) ukazuje da svaki vremenski kontinuiran signal možemo razložiti pomoću Diracovih delta funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- podsjecamo kako svaki vremenski diskretni signal možemo razložiti pomoću Kroneckerovih delta funkcija

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \delta(n - m)$$



Vremenski kontinuiran sinusoidni signal

- u uvodnim izlaganjima navedena je važnost sinusoidnog signala
- vremenski kontinuiran sinusoidni signal definiramo funkcijom

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \theta\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

gdje su

A = realna amplituda sinusoidnog signala

T_0 = realna osnovna perioda signala

f_0 = realna osnovna frekvencija signala, [Hz]

ω_0 = realna kutna (kružna) frekvencija (kutna brzina) signala, [rad/s]

θ = faza, [rad]



Signalni i
sustavi

Školska godina

2016/2017

Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok

Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

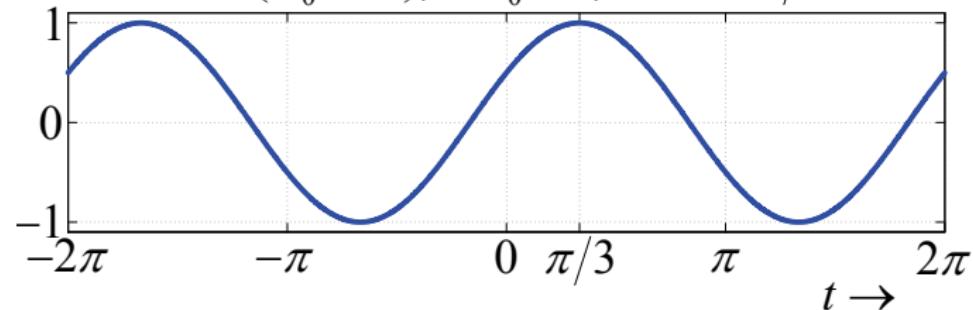
Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Vremenski kontinuiran sinusoidni signal

$$\cos(\omega_0 t + \theta), \quad \omega_0 = 1, \quad \theta = -\pi/3$$



Slika 1: Vremenski kontinuiran sinusoidni signal



Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

- kompleksna eksponencijalna funkcija odlikuje se nizom značajki koje mogu poslužiti u jednostavnijem i boljem razumijevanju pojava i postupaka kod realnih signala i sustava
- zato se definira vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal²

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \in \mathbb{C},$$

$$C = Ae^{j\theta} \in \mathbb{C}, \quad A, \theta \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = Ce^{s_0 t} = Ae^{j\theta} e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

²Kompleksnu eksponencijalu moguće je definirati i kao

$$f(t) = Ce^{s_0 t} = C(e^{s_0})^t = C\gamma^t.$$

Pokazuje da je u analizi vremenski kontinuiranih signala i sustava povoljnije koristiti oblik $Ce^{s_0 t}$, i u nastavku koristimo taj oblik.



Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal

- primjenom Eulerove relacije vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal prikazujemo i kao

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(t) = Ae^{\sigma_0 t} e^{j(\omega_0 t + \theta)} = Ae^{\sigma_0 t} [\cos(\omega_0 t + \theta) + j \sin(\omega_0 t + \theta)]$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

gdje su

A = realna amplituda kompleksnog eksponencijalnog signala

s_0 = kompleksna frekvencija

T_0 = realna osnovna perioda sinusoidnog signala

f_0 = realna osnovna frekvencija sinusoidnog signala, [Hz]

ω_0 = realna kutna (kružna) frekvencija sinusoidnog signala, [rad/s]

σ_0 = prigušenje

θ = faza, [rad]



Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije

- za $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, i $\theta = 0$, kompleksna eksponencijala je

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = Ae^{s_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} [\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)]$$

- neka je na primjer $\sigma_0 = -0.1$, $\omega_0 = 1$ i $A = 1$ tada je

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = e^{(-0.1+j)t} = e^{-0.1t} e^{jt} = e^{-0.1t} [\cos(t) + j \sin(t)]$$

- za danu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati realni i imaginarni dio, te modul i fazu³

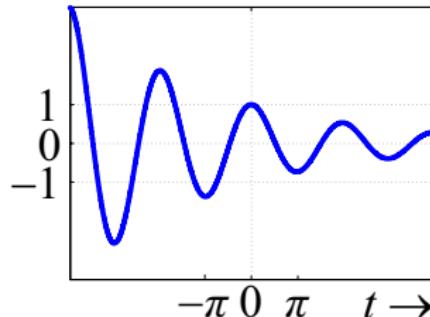
³prikazuje se glavna vrijednost argumenta, dakle, u intervalu

$-\pi < \arg[e^{jt}] \leq \pi$

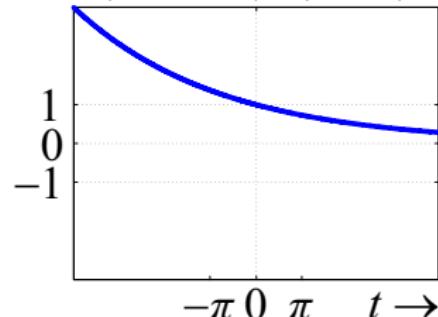


Primjer vremenski kontinuirane kompleksne eksponencijalne funkcije

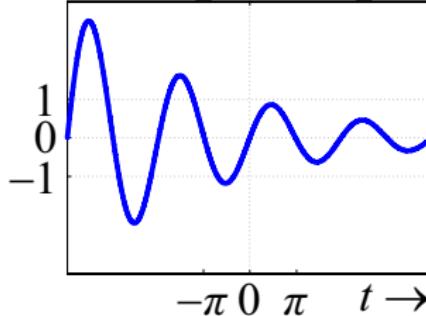
$$\operatorname{Re}[e^{(-0.1+j)t}]$$



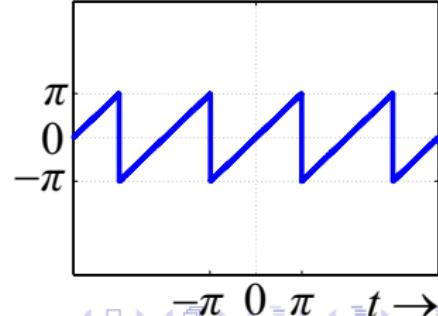
$$|e^{(-0.1+j)t}| = |e^{-0.1t}|$$



$$\operatorname{Im}[e^{(-0.1+j)t}]$$



$$\arg[e^{(-0.1+j)t}]$$





Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Primjena kompleksne eksponencijale $Ae^{s_0 t}$ u prikazu nekih realnih funkcija

- za $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, vremenski kontinuiranu kompleksnu eksponencijalu prikazujemo kao

$$Ae^{s_0 t} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} [\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)]$$

- za $s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$, konjugirano od s_0 , vrijedi

$$Ae^{s_0^* t} = Ae^{(\sigma_0 - j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} [\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)]$$

- pa dalje slijedi kako prigušenu realnu sinusoidu možemo prikazati uz pomoć kompleksnih eksponencijala

$$Ae^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$$



Signalni i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

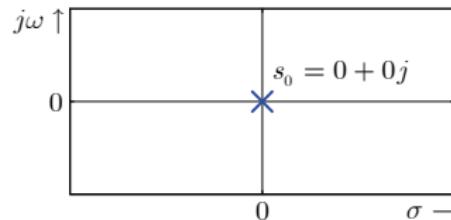
Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

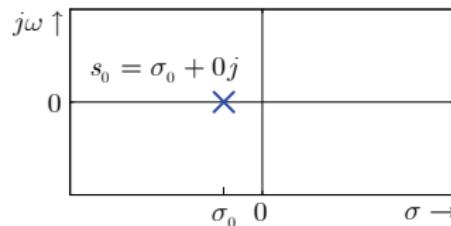
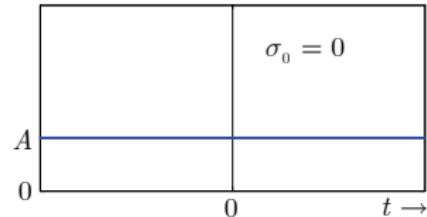
Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Primjena kompleksne eksponencijale Ae^{st}

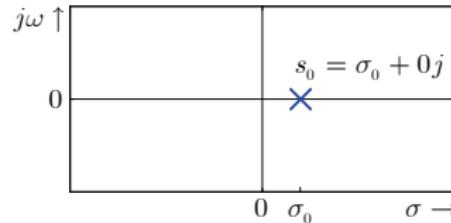
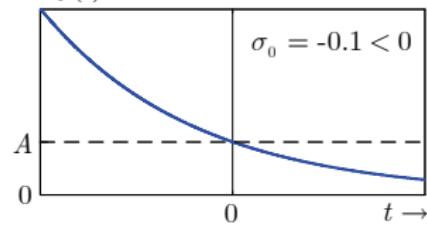
Prikazuju se $Ae^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$ za razne σ_0 i ω_0



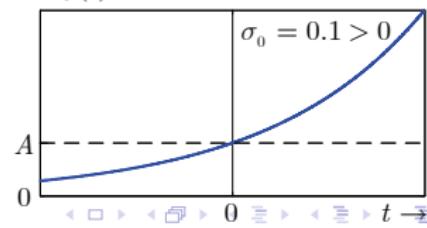
$$f(t) = Ae^{s_0 t} = A$$



$$f(t) = Ae^{s_0 t} = Ae^{\sigma_0 t} = Ae^{-0.1t}$$



$$f(t) = Ae^{s_0 t} = Ae^{\sigma_0 t} = Ae^{0.1t}$$





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

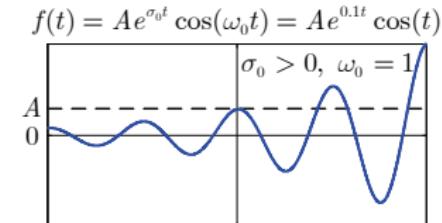
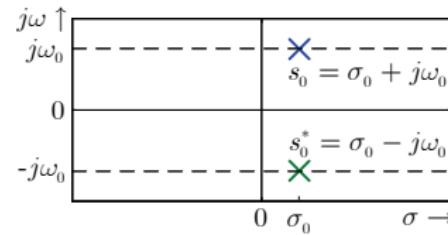
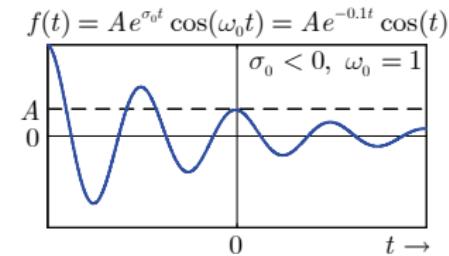
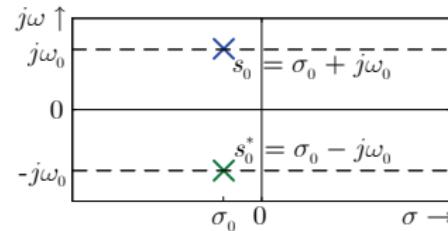
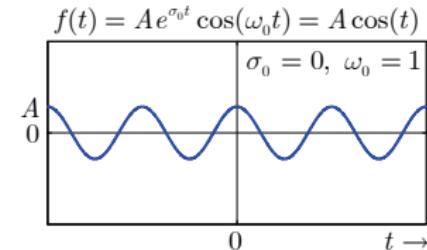
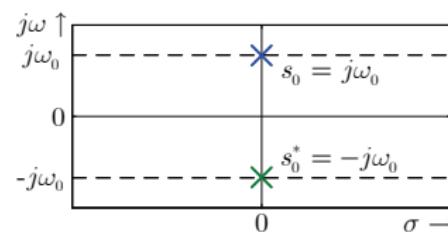
Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Primjena kompleksne eksponencijale Ae^{st}

Prikazuju se $Ae^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}[Ae^{s_0 t} + Ae^{s_0^* t}]$ za razne σ_0 i ω_0





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

- vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal može nastati očitavanjem vremenski kontinuiranog kompleksnog eksponencijalnog signala
- iz $f_a(t) = Ce^{(\sigma_0+j\omega_0)t}$, slijedi za $t = nT$

$$f(n) = f_a(nT) = f_a(t)|_{t=nT}$$

odnosno

$$f(n) = Ce^{(\sigma_0+j\omega_0)Tn} = C \left(e^{\sigma_0 T} e^{j\omega_0 T} \right)^n = Cq^n = C|q|^n e^{j\Omega_0 n}$$

gdje su

$$q = e^{(\sigma_0+j\omega_0)T}, \quad |q| = e^{\sigma_0 T}, \quad \Omega_0 = \omega_0 T$$



Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

- neovisno o načinu nastajanja, vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal (ili niz) prikazujemo funkcijom

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$f(n) = Cq^n$$

gdje su $C, q \in \mathbb{C}$

- za

$$C = Ae^{j\theta}, \quad A, \theta \in \mathbb{R}, \quad A > 0$$

i

$$q = |q|e^{j\Omega_0}, \quad |q|, \Omega_0 \in \mathbb{R}$$

vremenski diskretnu kompleksnu eksponencijalu možemo prikazati kao

$$f(n) = Ae^{j\theta}|q|^n e^{j\Omega_0 n} = A|q|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta)}$$



Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Kompleksni eksponencijalni niz

- primjenom Eulerove relacije slijedi

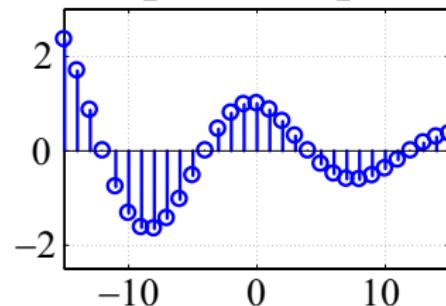
$$f(n) = A|q|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + jA|q|^n \sin(\Omega_0 n + \theta)$$

- $|q|$ i Ω_0 definiraju ponašanje kompleksne eksponencijale
 - za $|q| = 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi.
 - za $|q| < 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se prigušuje te
 - za $|q| > 1$ realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijale su sinusoidni nizovi množeni s eksponencijalom koja se raspiruje

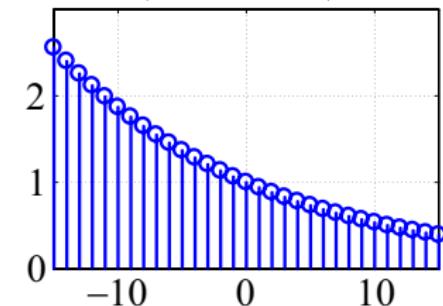


Primjer eksponencijalnog niza

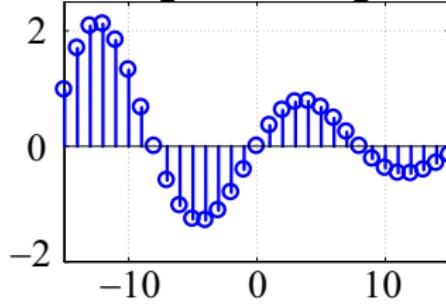
$$Re \left[\left(0.94e^{j\frac{\pi}{8}} \right)^n \right]$$



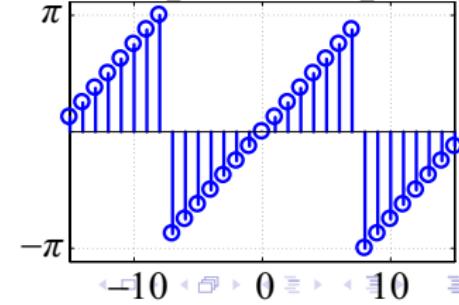
$$\left| \left(0.94e^{j\frac{\pi}{8}} \right)^n \right|$$



$$Im \left[\left(0.94e^{j\frac{\pi}{8}} \right)^n \right]$$



$$\angle \left[\left(0.94e^{j\frac{\pi}{8}} \right)^n \right]$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski

kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran

kompleksni
eksponencijalni

signal

Vremenski
diskretni

kompleksni
eksponencijalni

signal

Vremenski
diskretni

sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza

- za kompleksni niz

$$Aq^n = A|q|^n \cos(\Omega_0 n) + jA|q|^n \sin(\Omega_0 n)$$

- je njegov konjugirano kompleksni

$$A(q^*)^n = A|q|^n \cos(\Omega_0 n) - jA|q|^n \sin(\Omega_0 n)$$

- pa vrijedi

$$A|q|^n \cos(\Omega_0 n) = \frac{1}{2}[Aq^n + A(q^*)^n]$$



Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls
Vremenski

kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni

eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Eksponencijalni niz u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza

- analiziramo $A|q|^n \cos(\Omega_0 n)$ za razne vrijednosti $|q|$ i Ω_0
- za $\Omega_0 = 0$
 - $|q| = 1, |q| < 1, |q| > 1$
- za $\Omega_0 = \pm\frac{\pi}{8}$
 - $|q| = 1, |q| < 1, |q| > 1$



Primjena kompleksne eksponencijale Aq^n u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza

Signalni i sustavi

Školska godina
2016/2017

Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni signalni

Jedinični skok
Jedinična kosina

Jedinični impuls
Vremenski kontinuirani sinusoidni signal

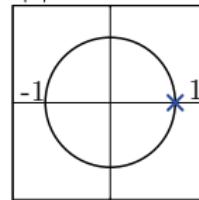
Vremenski kontinuiran kompleksni eksponencijalni signal

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

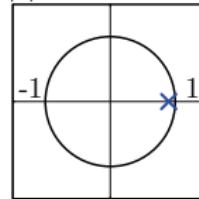
Vremenski diskretan sinusoidni signal

Očitavanje vremenski kontinuirane sinusoide

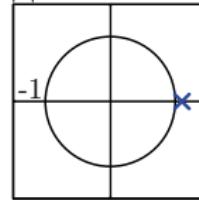
$$|q| = 1, \Omega = 0$$



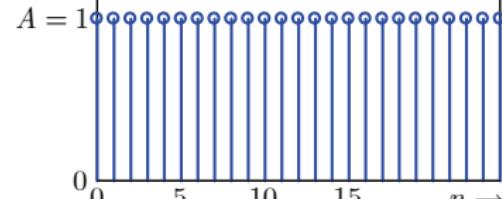
$$|q| = 0.9, \Omega = 0$$



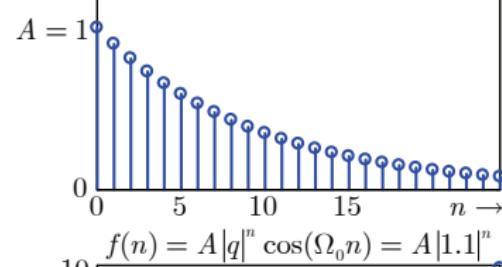
$$|q| = 1.1, \Omega = 0$$



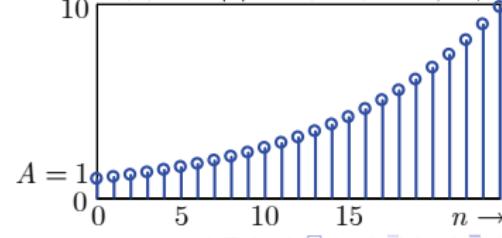
$$f(n) = A |q|^n \cos(\Omega_0 n) = A$$



$$f(n) = A |q|^n \cos(\Omega_0 n) = A |0.9|^n$$



$$f(n) = A |q|^n \cos(\Omega_0 n) = A |1.1|^n$$





Primjena kompleksne eksponencijale Aq^n u tvorbi realnog prigušenog sinusoidnog niza

Signalni i sustavi

Školska godina
2016/2017

Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni signali

Jedinični skok

Jedinična kosina

Jedinični impuls

Vremenski kontinuirani sinusoidni signal

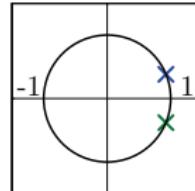
Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

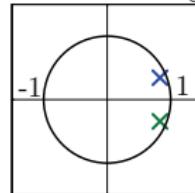
Vremenski diskretan sinusoidni signal

Očitavanje vremenski kontinuirane sinusoide

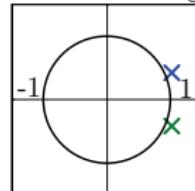
$$|q| = 1, \Omega = \frac{\pi}{8}$$



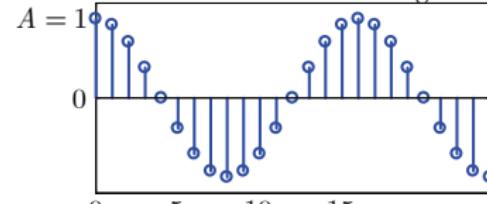
$$|q| = 0.9, \Omega = \frac{\pi}{8}$$



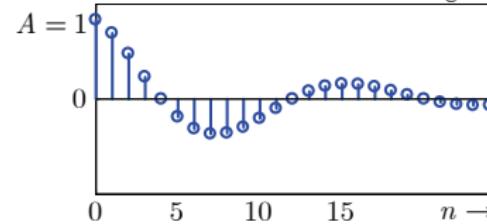
$$|q| = 1.1, \Omega = \frac{\pi}{8}$$



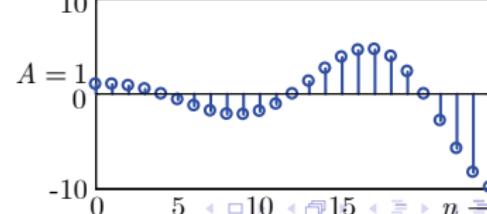
$$A|q|^n \cos(\Omega_0 n) = A \cos\left(\frac{\pi}{8} n\right)$$



$$A|q|^n \cos(\Omega_0 n) = A|0.9|^n \cos\left(\frac{\pi}{8} n\right)$$



$$A|q|^n \cos(\Omega_0 n) = A|1.1|^n \cos\left(\frac{\pi}{8} n\right)$$





Sinusoidni signal

- neovisno o načinu nastajanja vremenski diskretna se sinusoida definira kao

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = A \cos(\Omega_0 n + \theta) = A \cos(2\pi F_0 n + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

$$F_0 = \frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

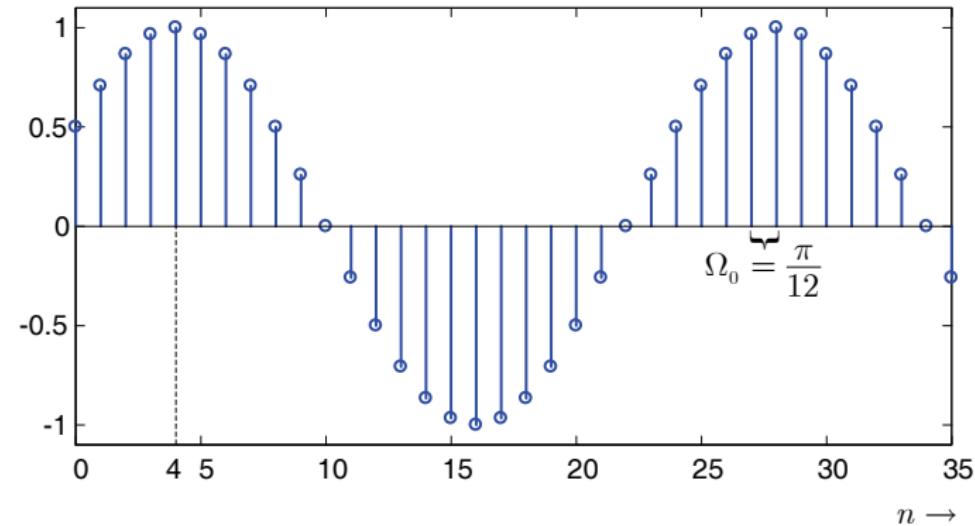
gdje su $N \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{R}$

- A je amplituda,
- Ω_0 [radijana/uzorku] je normalizirana kutna frekvencija (korak argumenta),
- θ [radijana] je faza signala,
- N je broj uzoraka jedne periode,
- F_0 je dimenzije [perioda/uzorku] i predstavlja dio periode koji odgovara jednom uzorku



Primjer realnog sinusoidnog niza

- primjer sinusoidnog niza za $\Omega_0 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow F_0 = \frac{1}{24}$, te $\theta = -\frac{\pi}{3}$



Slika 4: $\cos\left(\frac{\pi}{12}n - \frac{\pi}{3}\right)$



Periodičnost sinusoidnog niza

- niz $u(n) = \cos(\Omega_0 n + \theta)$ je periodičan ako vrijedi

$$\cos[\Omega_0(n+N) + \theta] = \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

- izvodimo

$$\cos[\Omega_0(n+N) + \theta] = \cos(\Omega_0 n + \theta) \cos(\Omega_0 N) - \sin(\Omega_0 n + \theta) \sin(\Omega_0 N)$$

desna je strana jednaka $\cos(\Omega_0 n + \theta)$ za

$$\cos(\Omega_0 N) = 1, \quad \text{i} \quad \sin(\Omega_0 N) = 0$$

a to je, uz $N \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{Z}$, samo za

$$\Omega_0 N = 2\pi k, \quad \text{iли} \quad \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N}, \quad \text{iли} \quad F_0 = \frac{k}{N}.$$

Dakle, vremenski diskretan signal je periodičan samo kada su $\frac{\Omega_0}{2\pi}$, odnosno F_0 , racionalni brojevi



Primjer periodičnog i neperiodičnog sinusoidnog niza

Signalni i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

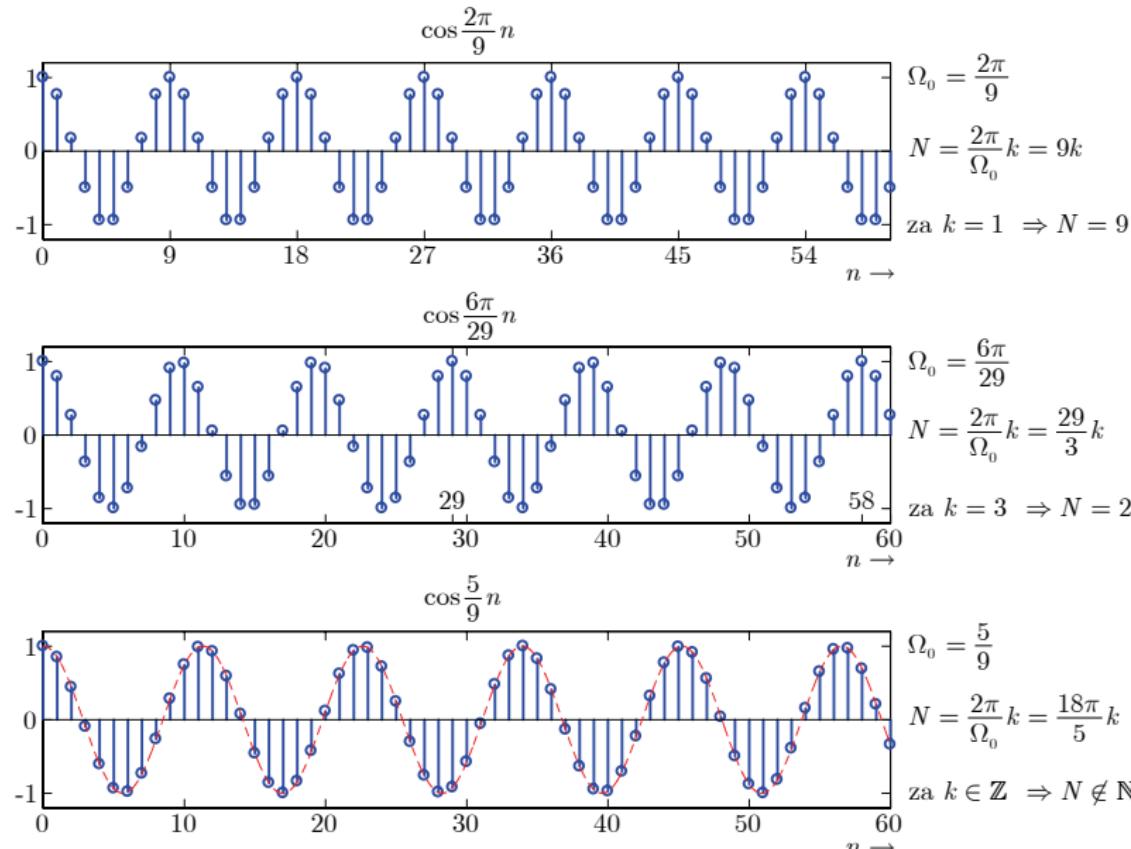
Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

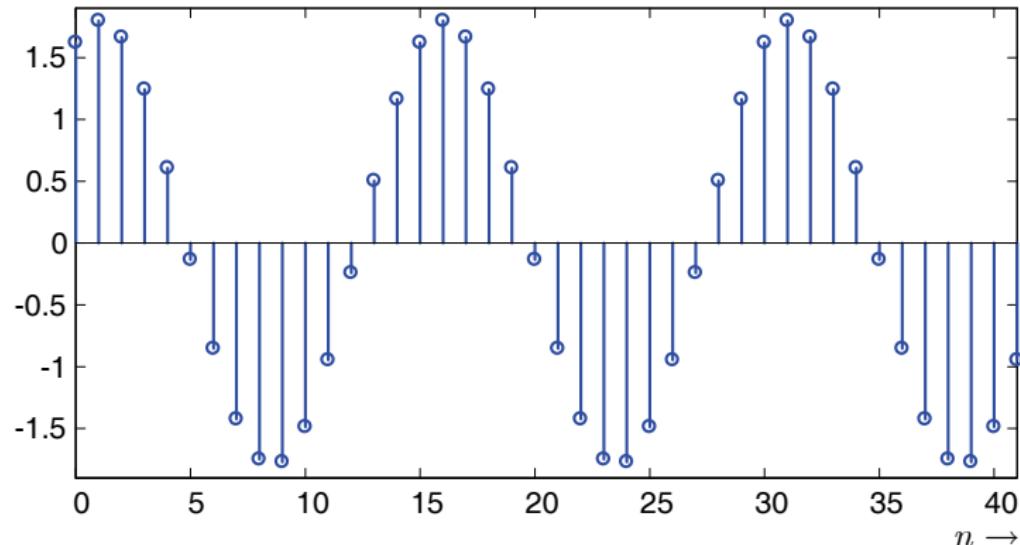




Primjer periodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8 \cos\left(\frac{2\pi}{15}n - \frac{\pi}{7}\right)$ vrijedi

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\Omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{2}{15}\pi} = 15 \text{ za } k = 1$$



Slika 5: Periodični sinusoidni niz



Primjer neperiodičnog sinusoidnog niza

- za niz $1.8 \cos\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{15}n - \frac{\pi}{7}\right)$ vrijedi

$$\Omega_0 = \frac{\sqrt{5}\pi}{15} \text{ pa je } N = \frac{2\pi k}{\Omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{\sqrt{5}}{15}\pi} = \frac{30}{\sqrt{5}}k$$

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok

Jedinična kosina

Jedinični impuls

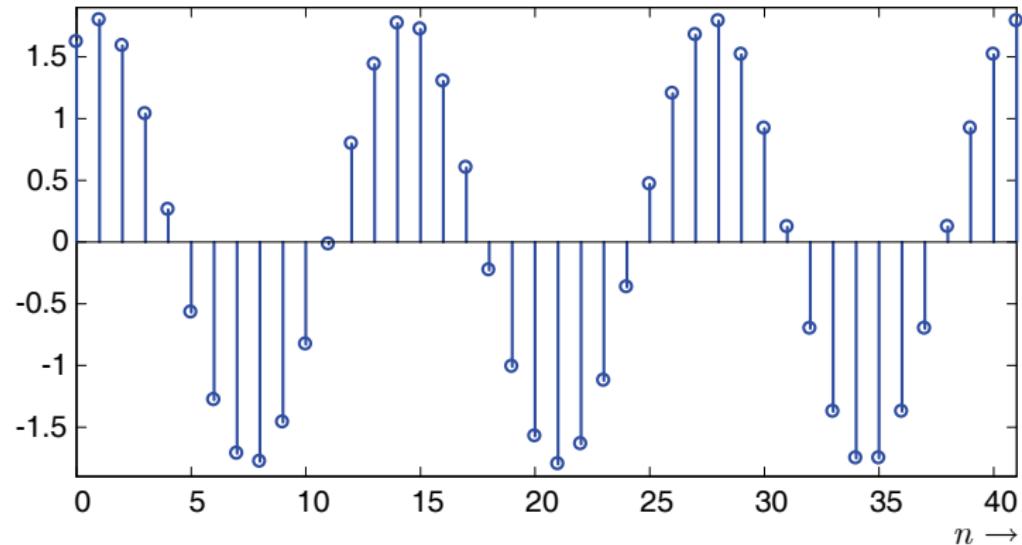
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



Slika 6: Neperiodičan sinusoidni niz



Nejednoznačnost valnih oblika vremenski diskretne sinusoide

- valni oblici vremenski kontinuirane sinusoide $\cos(\omega t)$ su jednoznačni za svaku realnu vrijednost ω iz intervala 0 do ∞
- u slučaju vremenski diskretne sinusoide imamo drugačiju pojavu
- razmotrimo sinusoidne signale kutne frekvencije $\Omega_0 + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos((\Omega_0 + 2k\pi)n + \theta) = \cos((\Omega_0 n + \theta) + 2k\pi n) = \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

- vidi se da su sinusoidni signali frekvencije $\Omega_0 + 2k\pi$ identični signalu frekvencije Ω_0
- zaključujemo kako je dovoljno razmatrati samo vremenski diskretne sinusoide čije su kutne frekvencije unutar intervala $0 \leq \Omega_0 \leq 2\pi$ odnosno $-\pi \leq \Omega_0 \leq +\pi$



Još o periodičnosti vremenski diskretne sinusoide

- zbog upravo pokazane periodičnosti vremenski diskretne sinusoide jasno je da ne postoji kontinuirani porast broja oscilacija **ovojnica** kako raste Ω_0
- na slici koja slijedi ilustrirano je kako s porastom Ω_0 od 0 prema π raste broj oscilacija, a s porastom Ω_0 od π prema 2π , smanjuje broj oscilacija
- prikazane su sinusoide $\cos(\Omega_0 n)$ za $\Omega_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$



Primjer realnog sinusoidnog niza

Signalni i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

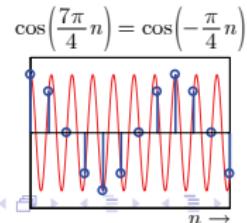
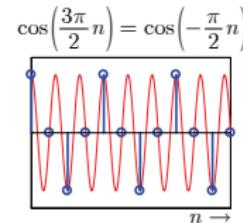
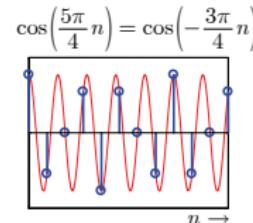
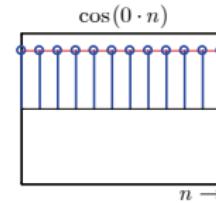
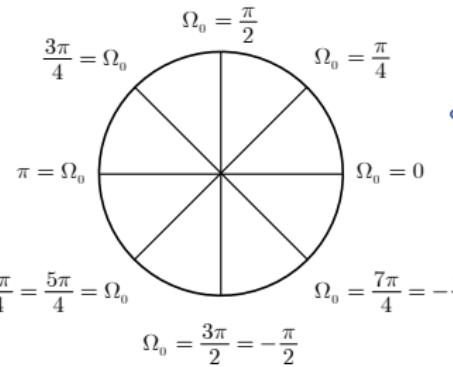
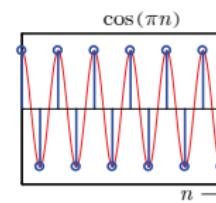
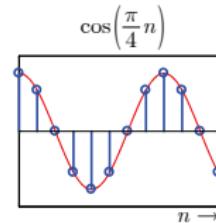
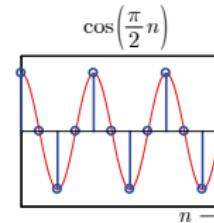
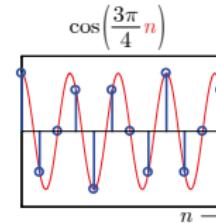
Osnovni signalni

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls
Vremenski kontinuirani sinusoidni signal
Vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal

Vremenski diskretan kompleksni eksponencijalni signal

Vremenski diskretan sinusoidni signal

Očitavanje vremenski kontinuirane sinusoide





Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal

Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

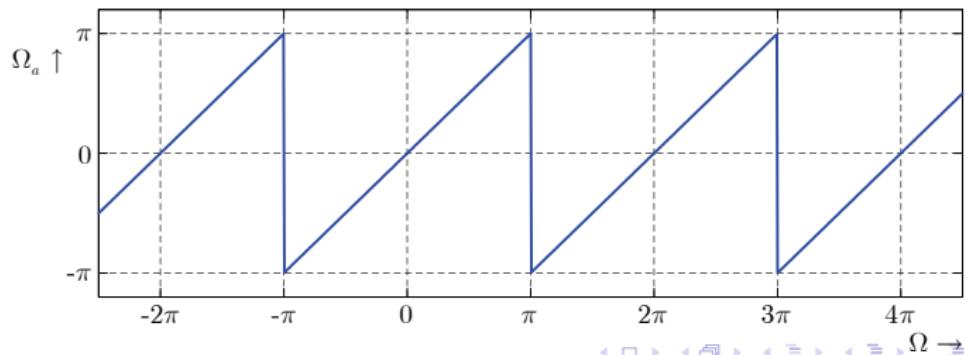
Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskretne sinusoide

- prethodni primjer potvrđuje kako će vremenski diskretna sinusoida biti jednoznačnog valnog oblika samo za vrijednosti $\Omega \in [-\pi, \pi]$, pa se ovaj interval naziva *osnovno frekvencijsko područje*
- bilo koja frekvencija Ω bez obzira na njezinu visinu bit će identična nekoj frekvenciji Ω_a u temeljnem području ($-\pi \leq \Omega_a \leq \pi$)
- dakle, $\Omega_a = \Omega - 2\pi k$, $-\pi \leq \Omega_a \leq \pi$ i $k \in \mathbb{Z}$





Još o nejednoznačnosti prikaza vremenski diskrete sinusoide

- slično se razmatranje može provesti i za prikaz sinusoide uz pomoć frekvencije F_0 koja predstavlja dio periode koja odgovara jednom uzorku
- pokazuje se da su sve sinusoide čije se frekvencije razlikuju za cjelobrojnu vrijednost identične (npr. za frekvencije 0.4, 1.4, 2.4, ...)
- ovaj zaključak slijedi iz

$$\cos[(\Omega_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos(\Omega_0 n + \theta) \quad \text{za } \Omega_0 = 2\pi F_0 \text{ vrijedi}$$

$$\cos[(2\pi F_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos[2\pi(F_0 + k)n + \theta] = \cos(2\pi F_0 n + \theta)$$

- jednoznačno može biti prikazana vremenski diskretna sinusoida $\cos(2\pi Fn + \theta)$ za vrijednosti F iz intervala $(-0.5 \leq F \leq 0.5)$



Osnovni signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuirani
kompleksni
eksponencijalni
signal

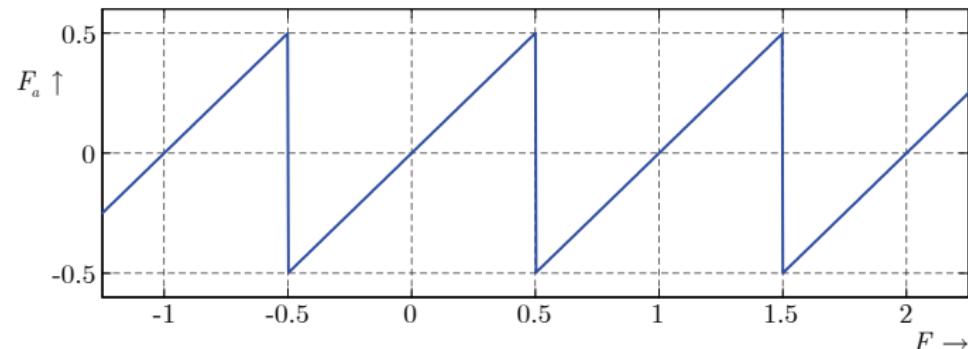
Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Veza F i F_a

- zaključujemo kako je svaka frekvencija F , bez obzira na njezin iznos, identična jednoj od frekvencija, F_a u osnovnom intervalu ($-0.5 \leq F_a \leq 0.5$)



Slika 7: Odnos F i F_a



Frekvencijski alias

- prethodna razmatranja "sugeriraju" kako za diskretnе signale ne postoje frekvencije iza $|\Omega| = \pi$ ili $|F| = \frac{1}{2}$ i kako je najviša frekvencije $\Omega = \pi$ ($F = 0.5$) i najniža 0
- treba naglasiti kako frekvencije više od ovdje navedenih postoje ali se one "predstavljaju" odgovarajućom frekvencijom unutar osnovnog područja frekvencija dakle one imaju svoj "alias"
- primjer sinusoidnih signala frekvencija unutar i izvan osnovnog frekvencijskog područja ilustrira pojavu koju nazivamo, prema engleskoj terminologiji, aliasing
- pokazano je kako signal $\cos(\frac{5\pi}{4}n)$ ima svoj "alias" u $\cos(-\frac{3\pi}{4}n)$, signal ili $\cos(\frac{7\pi}{4}n)$ u $\cos(-\frac{\pi}{4}n)$



Frekvencijski alias

- zbog

$$\cos(-\Omega_0 n + \theta) = \cos[-(-\Omega_0 n + \theta)] = \cos(\Omega_0 n - \theta)$$

zaključujemo da frekvencijsko područje $-\pi$ do 0 je identično frekvencijama u području 0 do π ali uz inverziju faze.

- nadalje zaključujemo da je "opažajna" frekvencija vremenski diskretne sinusoide bilo koje frekvencije jednaka nekoj frekvenciji iz područja 0 do π
- ovdje pokazujemo je

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right)$$

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



Frekvencijski alias

Signalni i
sustavi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Jedinični skok
Jedinična kosina
Jedinični impuls

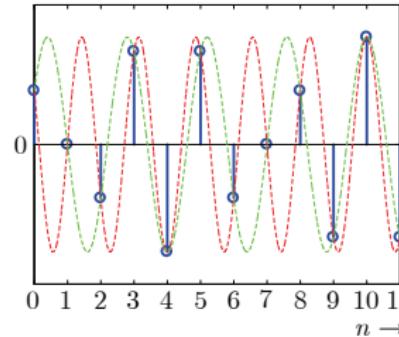
Vremenski
kontinuirani
sinusoidni signal
Vremenski
kontinuiran
kompleksni
eksponencijalni
signal

Vremenski
diskretan
kompleksni
eksponencijalni
signal

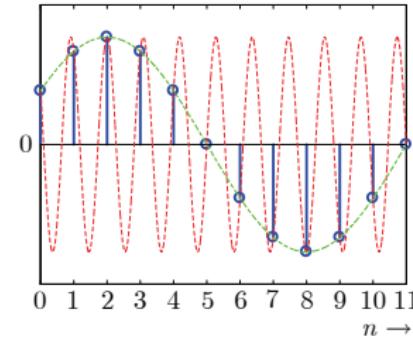
Vremenski
diskretan
sinusoidni signal

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

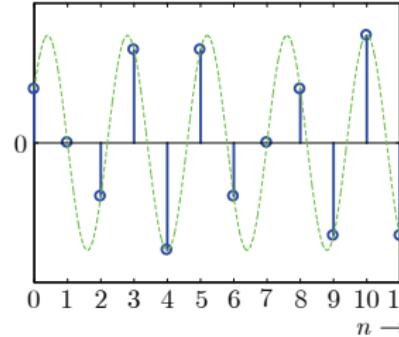
$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right)$$



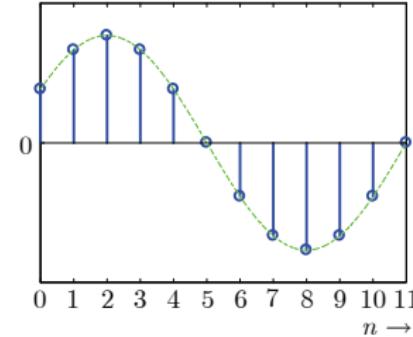
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}n - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3}\right)$$





Signalni i
sistemi

Školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Očitavanje vremenski kontinuiranih signala

- očitavanjem vremenski kontinuiranog signala

$$u_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

u diskretnim trenucima vremena $t = nT$, nastaje
vremenski diskretan signal

$$u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

dakle,

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ i } \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$u(n) = u_a(t)|_{t=nT} = u_a(nT)$$



Očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- realna vremenski kontinuirana sinusoida definirana je kao

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$u_a(t) = \cos(2\pi ft + \theta) = \cos(\omega t + \theta)$$

gdje su f frekvencija signala [Hz] i ω kutna frekvencija [rad/s]

- za $t = nT = \frac{n}{f_s} = \frac{2\pi n}{\omega_s}$ i $\forall n \in \mathbb{Z}$, slijedi

$$u(n) = u_a(nT) = \cos(2\pi fnT + \theta) = \cos(\omega Tn + \theta) =$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}n + \theta\right) = \cos\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_s}n + \theta\right) = \cos(\Omega n + \theta)$$

gdje su $f_s = 1/T$ frekvencija očitavanja i $\omega_s = 2\pi f_s$ kutna frekvencija očitavanja



Očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- dakle očitani signal je

$$u(n) = \cos(\Omega n + \theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

pri čemu je $\Omega = \omega T$ normalizirana kutna frekvencija (ili korak argumenta) [radijana/uzorku] diskretnog signala $u(n)$

- kako je ω neograničen, to će i Ω biti neograničen, pa je očigledno da se, pri očitavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala, može javiti aliasing (za $|\Omega| > \pi$)
- ovdje će se razmotriti pod kojim uvjetima očitavati vremenski kontinuirani sinusoidni signal da bi se izbjegla pojava aliasinga



Jednoznačno očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- pri očitavanju vremenski kontinuiranog sinusoidnog signala kutne frekvencije $\omega_0 = 2\pi f_0$ s frekvencijom očitavanja $f_s = \frac{1}{T}$ nastaje vremenski diskretna sinusoida (sinusoidni niz) normalizirane kutne frekvencije

$$\Omega_0 = \omega_0 T = \omega_0 \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi\omega_0}{\omega_s}$$

aliasing se ne javlja za $\Omega_0 \leq \pi$, pa iz $\frac{2\pi\omega_0}{\omega_s} \leq \pi$ slijedi

$$\omega_s \geq 2\omega_0 \quad \text{ili} \quad f_s \geq 2f_0$$

- zaključujemo: vremenski kontinuirana sinusoida će biti jednoznačno očitana ako je frekvencija očitavanja dvostruko veća od frekvencije očitavane vremenski kontinuirane sinusoide
- ovaj zaključak je specijalni slučaj *teorema očitavanja* (sampling theorem) koji će kasnije biti detaljnije analiziran



Primjeri očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala

- očitavaju se vremenski kontinuirane sinusoide frekvencija $f_1 = 4 \text{ kHz}$, $f_2 = 20 \text{ kHz}$, $f_3 = 28 \text{ kHz}$, $f_4 = 44 \text{ kHz}$, a frekvencija očitavanja neka je $f_s = 48 \text{ kHz}$
- prethodni zaključak ukazuje da će očitavanje treće i četvrte sinusoide rezultirati aliasingom, jer frekvencija očitavanja nije dvostruko veća od frekvencije vremenski kontinuirane sinusoide
- ilustrirajmo postupak očitavanja



Signali i
sistemi

Školska godina
2016/2017

Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide

Postupak očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signalâ

$\forall t \in \mathbb{R},$

$$u_1(t) = \cos(2\pi f_1 t) = \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$u_2(t) = \cos(2\pi f_2 t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$u_3(t) = \cos(2\pi f_3 t) = \cos(2\pi \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot t)$$

$$u_4(t) = \cos(2\pi f_4 t) = \cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t)$$

za $t = nT = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{48 \cdot 10^3}$

$\forall n \in \mathbb{Z},$

$$u_1(n) = \cos(2\pi f_1 nT) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

$$u_2(n) = \cos(2\pi f_2 nT) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{20 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}n\right)$$

$$u_3(n) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{28 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}n\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}n\right)$$

$$u_4(n) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{44 \cdot 10^3}{48 \cdot 10^3} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}n\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}n\right)$$



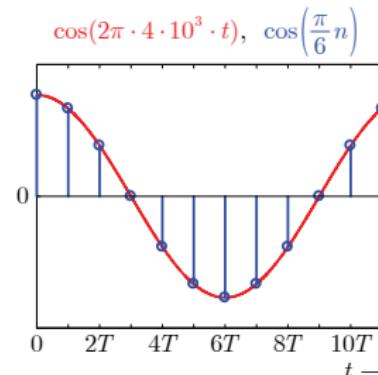
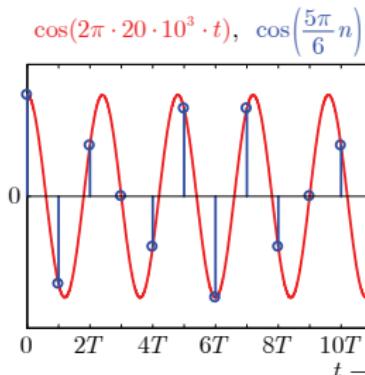
Očitavanje vremenski kontinuiranih sinusoida

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

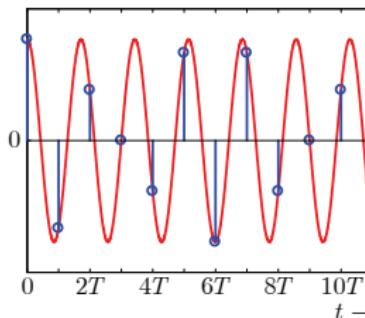
Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

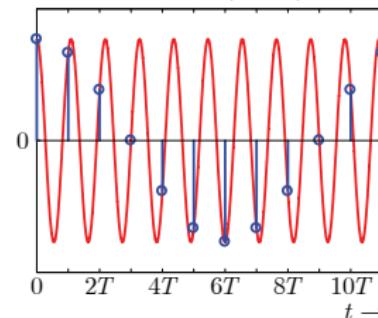
Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



$$\cos(2\pi \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot t), \cos\left(\frac{7\pi}{6}n\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}n\right)$$



$$\cos(2\pi \cdot 44 \cdot 10^3 \cdot t), \cos\left(\frac{11\pi}{6}n\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}n\right)$$



Slika 9: Aliasing kod očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala za $T = \frac{1}{48000} = 20.833 \cdot 10^{-6} s$



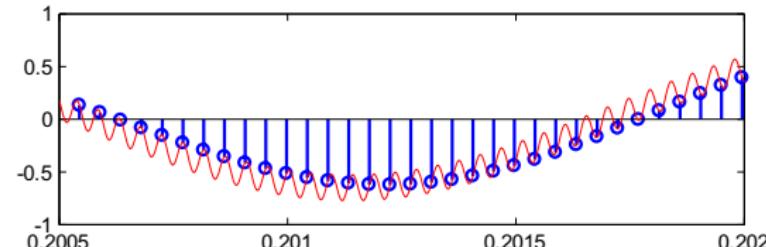
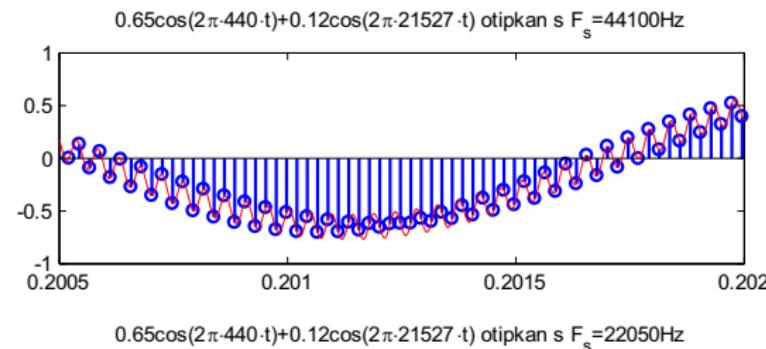
Primjer aliasinga kod audio signala

- očitava se vremenski kontinuiran signal $0.65 \cos(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12 \cos(2\pi \cdot 21527 \cdot t)$ frekvencijom očitavanja $f_s = 44100 \text{ Hz}$
- komponenta frekvencije $f = 21527 \text{ Hz}$ izvan je slušnog područja, pa je u reprodukciji čujna samo komponenta frekvencije $f = 440 \text{ Hz}$ (nota A)
- pri očitavanju signala s frekvencijom $f_s = 22050 \text{ Hz}$ dolazi do pojave aliasinga i komponenta frekvencije $f = 21527 \text{ Hz}$ zrcali se u osnovno frekvencijsko područje kao sinusoida frekvencije $f = 21527 - 22050 = -523 \text{ Hz}$ (nota C)
- u reprodukciji se čuju komponenta frekvencije $f = 440 \text{ Hz}$, te komponenta frekvencije $f = 523 \text{ Hz}$ koja je nastala aliasingom komponente frekvencije $f = 21527 \text{ Hz}$ dakle signal $0.65 \cos(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0.12 \cos(2\pi \cdot 523 \cdot t)$



Aliasing kod audio signala

- prikazan je signal očitan frekvencijom očitavanja
 $f_s = 44100 \text{ Hz}$ i frekvencijom očitavanja
 $f_s = 22050 \text{ Hz}$



Slika 10: Aliasing kod očitavanja audio signala



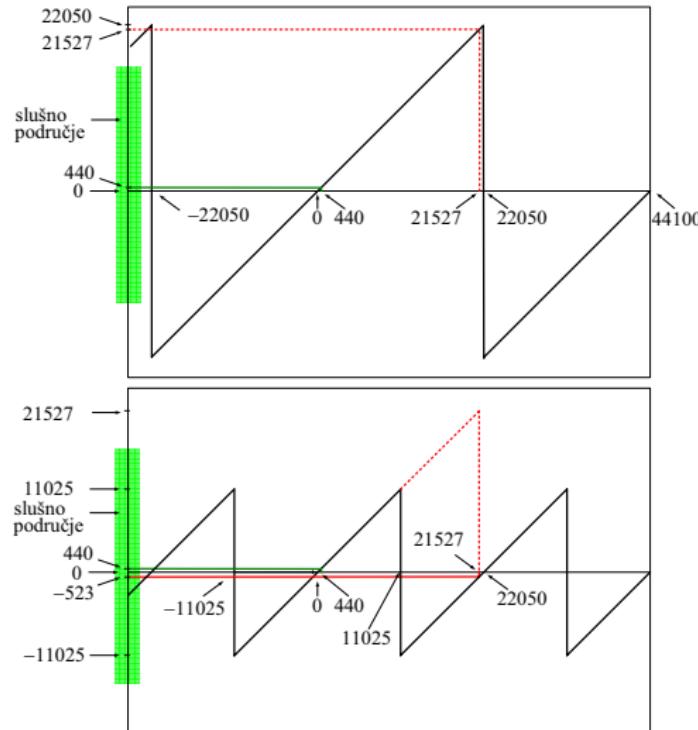
Aliasing kod audio signala

Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 3.

Profesor
Branko Jeren

Osnovni
signali

Očitavanje
vremenski
kontinuirane
sinusoide



Slika 11: Aliasing kod očitavanja audio signala



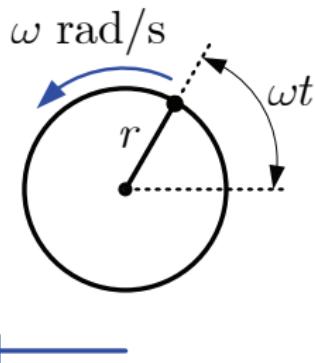
Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- u slučaju signala koji se sastoji od više vremenski kontinuiranih sinusoida očitavanje treba biti dvostruko više frekvencije od najviše frekvencije među sinusoidnim komponentama signala
- u slučaju nemogućnosti promjene frekvencije očitavanja (diskretizacije) može se pojaviti aliasing
- zanimljiv je primjer vrtnje kotača (npr. automobila Formule 1) na televizijskim ekranima gdje gledatelj često stječe dojam da se kotač povremeno vrti naprijed, povremeno nazad, a ponekad kao i da stoji na mjestu
- efekt je posljedica pojave aliasinga i biti će ilustriran narednim primjerom

Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- promatra se vrtnja kotača na televizijskom ekranu (PAL sustav), što znači da se snimljena scena reproducira s taktom od 25 mirnih slika u sekundi (dakle video signal je očitan svakih $T = 1/25 \text{ s}$)
- kotač se okreće kutnom frekvencijom $\omega \text{ rad/s}$, u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu, čemu odgovara linearni pomak osovine kotača s desne strane ekrana u lijevo

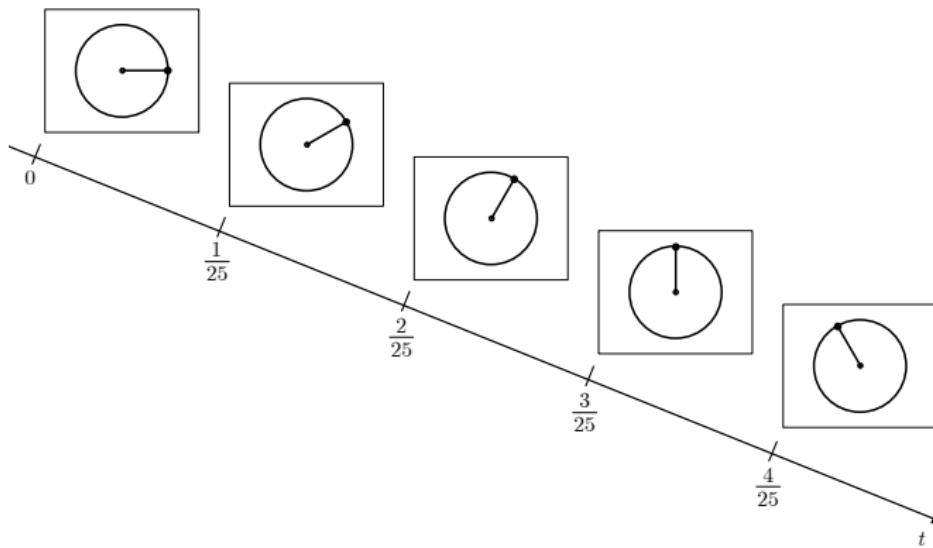
- kutnoj frekvenciji, kotača radijusa r , odgovara linearna brzina osovine, $v = \omega r \text{ m/s}$
- rotaciju kotača pratimo preko kutnog položaja markera označenog kao na slici





Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- na ekranu se reproducira niz mirnih slika svakih $T = \frac{1}{25}$ što odgovara postupku očitavanja snimljene scene u istom taktu





Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- da bi matematički opisali poziciju markera na obodu kotača, središte kotača možemo interpretirati kao ishodište kompleksne ravnine
- u nekom trenutku t pozicija markera čini kut ωt s realnom osi kompleksne ravnine, i poziciju markera možemo opisati kompleksnom eksponencijalom $re^{j\omega t}$
- pozicija markera, kako je vidimo na ekranu, predstavlja očitavanje ove kompleksne eksponencijale, dakle $re^{jn\omega T} = re^{j\Omega n}$, gdje $\Omega = \omega T$ predstavlja kut za koji se zakrene marker od jedne do druge slike
- kako se radi o očitavanju kompleksne eksponencijale, jasno je da za sve $\Omega < \pi$ ne dolazi do pojave aliasinga
- za sve $\Omega > \pi$ javlja se aliasing i, ovisno o iznosu brzine rotacije kotača, gledatelj stječe dojam da se kotač okreće ili u smjeru, ili suprotno smjeru gibanja, odnosno da miruje (iako je vidljiv linearни pomak osovine kotača)



Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- zakretu kotača, radijusa $r = 0.31 \text{ m}$, za $\Omega = \frac{\pi}{6}$, odgovara kutna frekvencija 13.09 rad/s , te linearna brzina osovine od $v = 14.61 \text{ km/h}$, što proizlazi iz

$$\Omega = \omega T = \omega \cdot \frac{1}{25} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \omega = 25 \cdot \frac{\pi}{6}$$

pa iz $v = \omega r$ slijedi

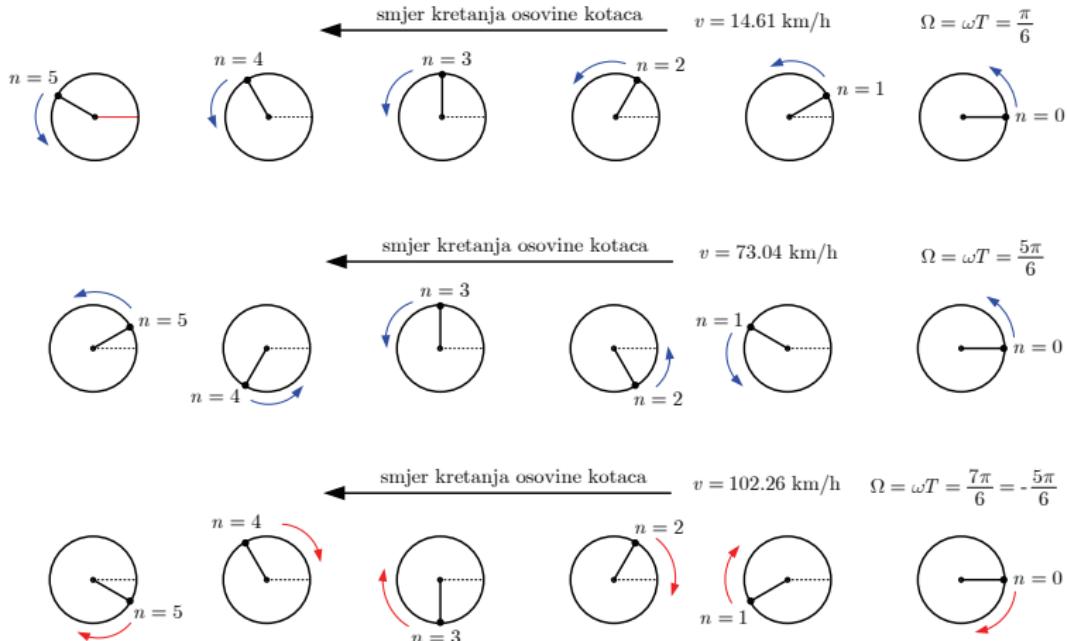
$$v = 25 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot r = 4.06 \text{ m/s} = 14.61 \text{ km/h}$$

- zakretu za $\Omega = \frac{5\pi}{6}$ odgovara kutna frekvencija 65.45 rad/s , te linearna brzina od $v = 73.04 \text{ km/h}$
- zakretu za $\Omega = \frac{7\pi}{6}$ odgovara kutna frekvencija 91.63 rad/s , a $v = 102.26 \text{ km/h}$
- aliasing nastaje pri brzinama $v > 87.65 \text{ km/h}$, jer za

$$\Omega > \pi \Rightarrow v > \frac{1}{T} \cdot \Omega \cdot r = 25\pi \cdot 0.31 = 24.35 \text{ m/s} = 87.65 \text{ km/h}$$



Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija



Slika 12: Aliasing kod očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala



Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija

- promatramo efekt aliasinga za još veće brzine vrtnje kotača (brzine vozila)
- za brzinu vozila $v = 175.30 \text{ km/h}$, odnosno $v = 48.69 \text{ m/s}$, kutna frekvencija je

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{48.69}{0.31} = 157.08 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow$$

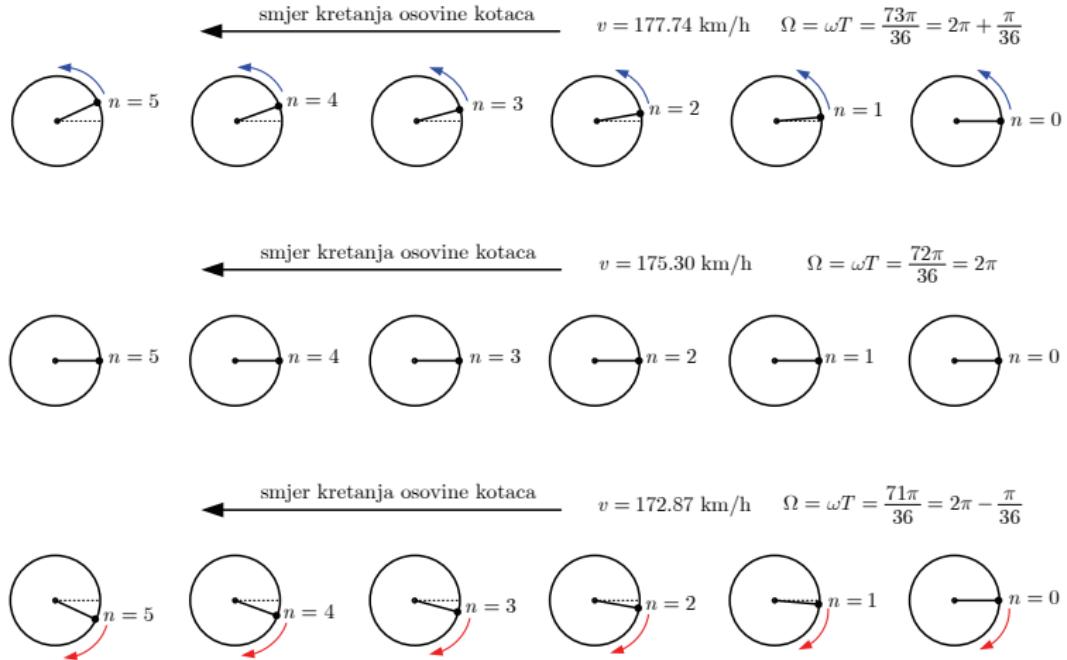
$$\Omega = \omega T = 157.08 \cdot \frac{1}{25} = 6.2832 = 2\pi$$

zaključujemo, između dvije slike marker kotača se zakrene za 2π , dakle cijeli okret, i gledatelj stječe dojam da kotač stoji jer marker miruje

- za brzine $v = 177.74 \text{ km/h}$ i $v = 172.87 \text{ km/h}$, također postoji aliasing jer su $\Omega = \frac{73\pi}{36} = 2\pi + \frac{\pi}{36}$ odnosno $\Omega = \frac{71\pi}{36} = 2\pi - \frac{\pi}{36}$, pa gledatelj opaža vrlo sporo okretanje kotača u smjeru, ili suprotno smjeru, gibanja



Još o aliasingu pri očitavanju vremenski kontinuiranih sinusoida – stroboskopija



Slika 13: Aliasing kod očitavanja vremenski kontinuiranih sinusoidnih signala



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

DODATAK

Signalni i sustavi

Profesor
Branko Jeren

15. ožujka 2017.



Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- već je prije pokazano kako svaki vremenski diskretan signal možemo prikazati kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m), \quad (1)$$

a vremenski kontinuirani signal kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

- postavlja se pitanje možemo li signale aproksimirati kao linearu kombinaciju i drugih osnovnih signala

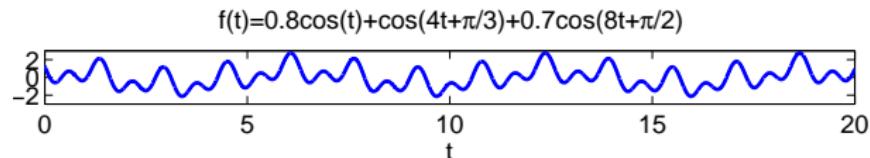
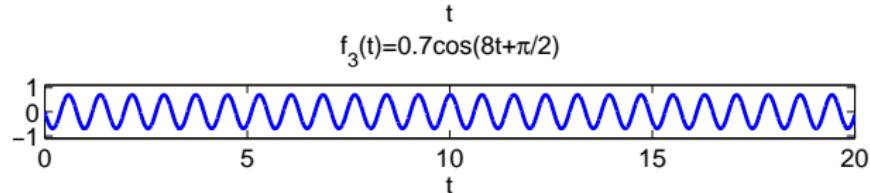
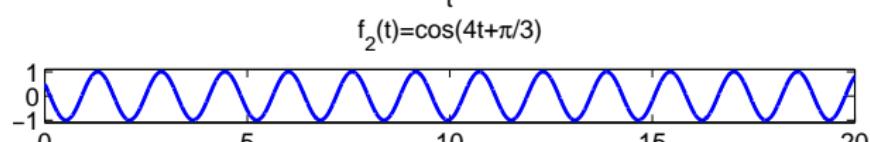
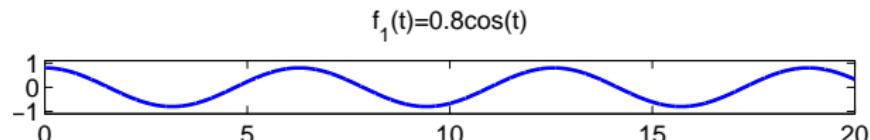
$$\forall t \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \quad f(t) \approx \hat{f}(t) = \sum_k c_k \psi_k(t), \text{ odnosno}$$

$$\forall n \in \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}, \quad f(n) \approx \hat{f}(n) = \sum_k c_k \psi_k(n)$$



Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- linearna kombinacija sinusoidnih signala, čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici osnovne frekvencije $2\pi/T_0$, generira periodični signal periode T_0





Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- na slici je prikazan zbroj sinusoida

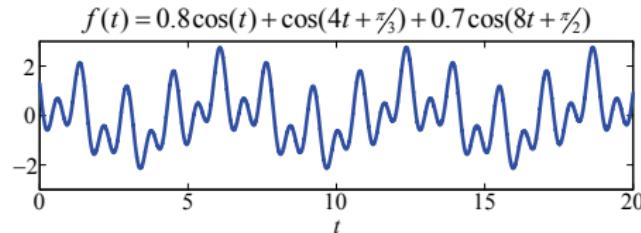
$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = 0.8 \cos(t) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.7 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

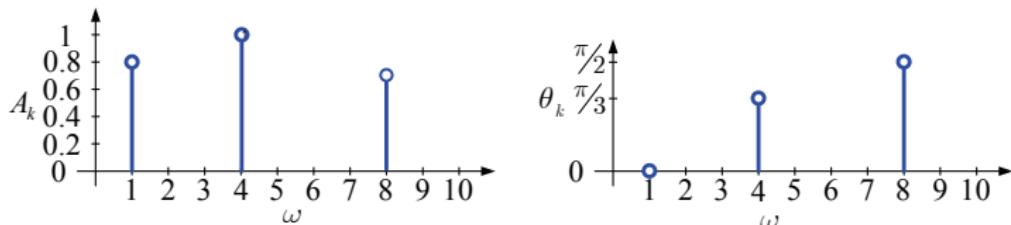
- signal f je zadan u vremenskoj domeni (funkcija vremena)
- signal f je periodičan, i nastao je linearom kombinacijom vremenski kontinuiranih sinusoida $A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$,
 $\forall t \in \mathbb{R}$
- ovo sugerira kako svaki periodični signal možemo razložiti (dekomponirati) na sinusoidne komponente $A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i $A_k \in \mathbb{R}_+$, koje ga sačinjavaju
- zaključujemo kako periodični signal može biti potpuno definiran frekvencijama ω_k , amplitudama A_k , i fazama θ_k sinusoidnih komponenti koje ga sačinjavaju



Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala



- periodičan signal f razlažemo na sinusoide frekvencija $\omega_1 = \omega_0 = 1$, $\omega_2 = 4\omega_0 = 4$, $\omega_3 = 8\omega_0 = 8$, čije su amplitude $A_1 = 0.8$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.7$, i faze $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$



Slika 1: Amplitudni i fazni spektar



Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- na prethodnoj slici prikazani su amplitudni i fazni spektar
- amplitudni spektar prikazuje amplitude sinusoidnih komponenti signala kao funkciju frekvencije ω
- fazni spektar predstavlja prikaz faze θ_k , u radijanima, kao funkciju frekvencije ω
- spektar signala potpuno opisuje signal i govorimo o prikazu signala u frekvencijskoj domeni ili u frekvencijskom području



Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- razmatrani signal, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = 0.8 \cos(t) + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.7 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right),$$

Eulerovom formulom, $\cos(\omega_0 t) = 0.5(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$, transformiramo u

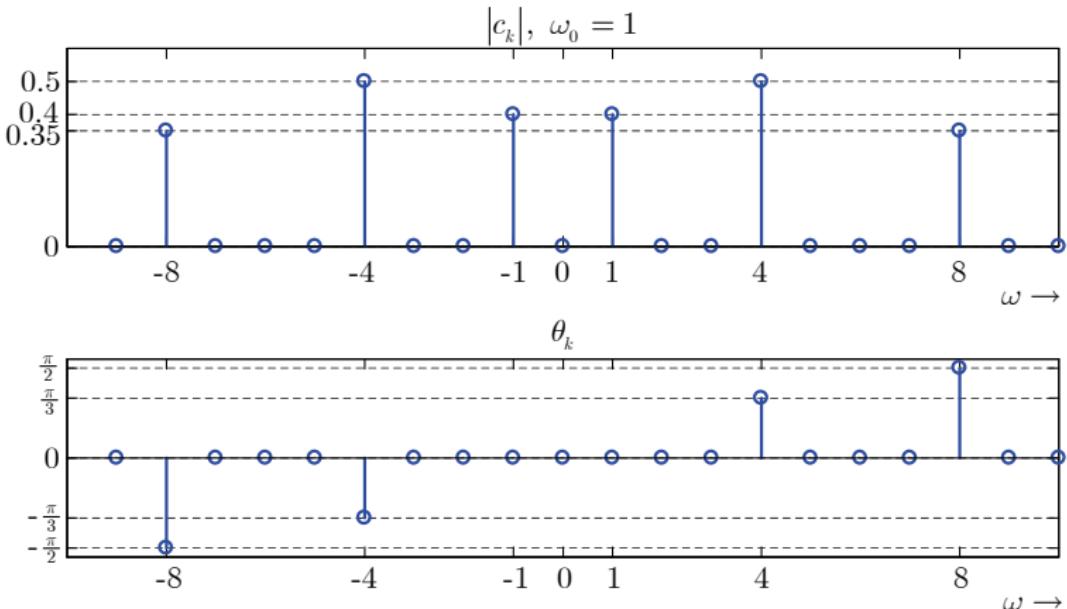
$$\begin{aligned} f(t) &= 0.4e^{jt} + 0.4e^{-jt} + 0.5e^{j(4t+\frac{\pi}{3})} + 0.5e^{-j(4t+\frac{\pi}{3})} \\ &\quad + 0.35e^{j(8t+\frac{\pi}{2})} + 0.35e^{-j(8t+\frac{\pi}{2})} \\ &= 0.4e^{jt} + 0.4e^{-jt} + 0.5e^{j4t}e^{j\frac{\pi}{3}} + 0.5e^{-j4t}e^{-j\frac{\pi}{3}} \\ &\quad + 0.35e^{j8t}e^{j\frac{\pi}{2}} + 0.35e^{-j8t}e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

i prepoznajemo da možemo zapisati u obliku

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$



Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala



Slika 2: Amplitudni i fazni spektar

Komentar: Postojanje spektra za negativne frekvencije (frekvencija je broj ponavljanja po sekundi, pa se očekuje da je pozitivan broj) je samo posljedica prikaza $\cos(\omega_0 t) = 0.5(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$.



Fourierov red periodičnih vremenski kontinuiranih signala

- prikaz periodičnog signala¹, $f \in \text{KontPeriod}_{T_0}$, linearnom kombinacijom harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

naziva se Fourierov red (engl. Continuous-time Fourier series – CTFS)

- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ određuje osnovnu periodu, a koeficijenti reda, F_k , valni oblik periodičnog signala f
- dva člana reda, za $k = \pm 1$, zajednički se nazivaju osnovne komponente, ili prve harmonijske komponente
- članovi sa $k = \pm 2$ druge harmonijske komponente, itd.

¹realnog ili kompleksnog



Koeficijenti Fourierovog reda

- da bi neki periodični vremenski kontinuirani signal prikazali uz pomoć Fourierovog reda potrebno je odrediti koeficijente reda F_k (nazivaju se i spektralni koeficijenti signala f)
- način izračuna koeficijenata $\{F_k\}$ dan je na dodatnim prikaznicama za ovo predavanje
- ovdje navodimo da koeficijente Fourierovog reda izračunavamo kao

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- koeficijenti Fourierovog reda su kompleksni² dakle, $F_k \in \mathbb{C}$

²Kasnije se pokazuje da su za parne, vremenski kontinuirane, periodične signale koeficijenti Fourierovog reda realni



Konvergencija Fourierovog reda

- pitamo se konvergira li, i pod kojim uvjetima, signal

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_K(t) = \sum_{k=-K}^K F_k e^{jk\omega_0 t}$$

prema signalu $f(t)$?

- pokazuje se da za kvadratno integrabilan periodičan signal (konačne energije u jednoj periodi)

$$\int_0^{T_0} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

vrijedi konvergencija u smislu minimuma integrala kvadrata pogreške

$$\int_0^{T_0} \left| f(t) - \sum_{k=-K}^K F_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{za } K \rightarrow \infty$$



Konvergencija Fourierovog reda

- navodimo i drugi kriterij konvergencije Fourierovih redova
- konvergencija, po točkama, signala $f_K(t)$ prema $f(t)$, je garantirana za sve vrijednosti od t , osim na mjestima mogućih diskontinuiteta, ako su zadovoljeni Dirichletovi uvjeti
- periodični signal, $\forall f \in \text{KontPeriod}_{T_0}$, zadovoljava Dirichletove uvjete
 - ako je absolutno integrabilan u bilo kojoj periodi
$$\int_{T_0} |f(t)| dt < \infty$$
 - ako ima konačni broj maksimuma i minimuma u bilo kojoj periodi
 - ako ima konačni broj diskontinuiteta u bilo kojoj periodi
- na mjestu diskontinuiteta, $(f(t_d^+) \neq f(t_d^-))$, signal konvergira prema $\frac{(f(t_d^+) + f(t_d^-))}{2}$



Fourierov red

- za periodični signal $f \in KontPeriod_{T_0}$, koji zadovoljava uvjete konvergencije,³ vrijedi par jednadžbi

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4)$$

- jednadžba (3) naziva se jednadžba Fourierove analize (često i harmonijska analiza periodičnog signala)
- jednadžba (4) naziva se jednadžba Fourierove sinteze (često i harmonijska sinteza periodičnog signala)
- par jednadžbi (3) i (4) označavamo kao CTFS prikaz periodičnih vremenski kontinuiranih signala

³Svi periodični signali od praktičnog interesa zadovoljavaju prije navedene uvjete konvergencije Fourierovog reda



Fourierov red vremenski kontinuiranih signala

- niz vrijednosti F_k , $\forall k \in \mathbb{Z}$, možemo interpretirati kao diskretni signal čija je nezavisna varijabla iz skupa diskretnih vrijednosti frekvencija $k\omega_0$
- diskretni signal F_k predstavlja prikaz, u frekvencijskoj domeni, periodičnog vremenski kontinuiranog signala f
- kažemo da smo, jednadžbom Fourierove analize, signal iz vremenske domene transformirali u signal u frekvencijskoj domeni

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

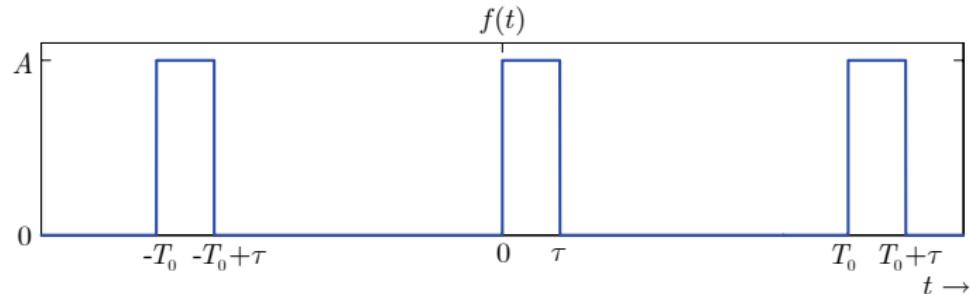
- jednadžbom Fourierove sinteze, signal iz frekvencijske domene transformiramo u signal u vremenskoj domeni

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$



Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda za signal na slici



- signal je periodičan s osnovnom periodom T_0
- signal možemo interpretirati kao periodično ponavljanje pravokutnog pulsa amplitude A i širine τ



Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda za $k = 0$, određuje se F_0 (koji inače predstavlja srednju vrijednost (istosmjernu komponentu) signala $f(t)$)

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{\tau} dt = \frac{A\tau}{T_0}$$

za $k \neq 0$

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_0^{\tau} e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-jk\omega_0 t}}{(-jk\omega_0)} \Big|_0^\tau = \frac{A}{k\omega_0 T_0} \frac{1 - e^{-jk\omega_0 \tau}}{j} \\ &= \frac{2A\tau}{T_0 k\omega_0 \tau} \frac{e^{\frac{jk\omega_0 \tau}{2}} - e^{-\frac{jk\omega_0 \tau}{2}}}{2j} e^{-\frac{jk\omega_0 \tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} e^{-\frac{jk\omega_0 \tau}{2}} \end{aligned}$$

za $k = \pm 1, \pm 2, \dots$



Linijski spektar

- koeficijenti Fourierovog reda poprimaju kompleksne vrijednosti i skup $\{F_k\}|_{k=-\infty}^{\infty}$ može biti grafički prikazan odvojenim grafovima njihove amplitude i faze
- kombinacija oba grafa $F_k = |F_k|e^{j\angle F_k}$ naziva se linijski spektar signala $f(t)$

$$|F_k| = \begin{cases} \left| \frac{A\tau}{T_0} \right|, & k = 0 \\ \left| \frac{A\tau}{T_0} \right| \left| \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} \right|, & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

$$\angle F_k = \angle A + \angle \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} - k \frac{\omega_0\tau}{2}$$

- $|F_k|$ predstavlja amplitudni spektar,
- $\angle F_k$ je fazni⁴ spektar periodičnog signala

⁴faza realne veličine je nula ako je veličina pozitivna a π , ili $-\pi$, kada je veličina negativna



Linijski spektar – primjer

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

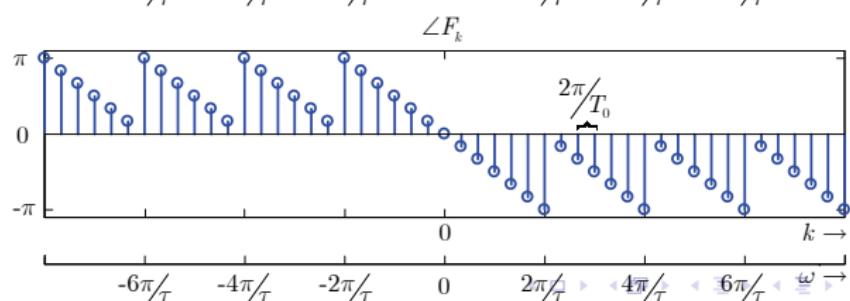
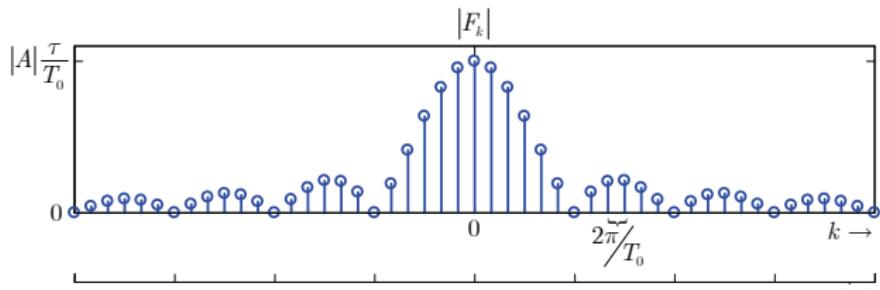
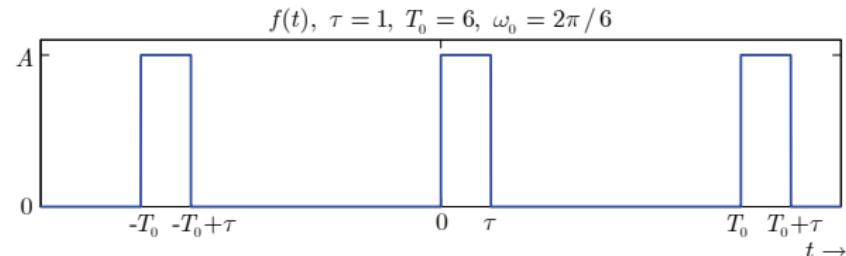
Profesor
Branko Jeren

Frekvenčijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

Fourierov red

DODATAK





Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signala

- uvidom u graf spektra zaključujemo
 - spektar periodičnog signala je diskretan, a frekvencijski razmak između uzoraka spektra je $\omega_0 = 2\pi/T_0$
 - amplitudni spektar je parna funkcija, a fazni spektar neparna funkcija (obrazlaže se kasnije, a vrijedi za sve signale koji su u vremenskoj domeni realne funkcije)
 - ovojnica amplitudnog spektra pravokutnog periodičnog signala je oblika $\left| \frac{\sin(w)}{w} \right|$
 - širina pravokutnog signala (τ) i širina glavne latice ($4\pi/\tau$) su obrnuto proporcionalne
 - prikazane su samo glavne vrijednosti faze, što znači da se faza izračunava modulo 2π i prikazuje samo u intervalu $[-\pi, \pi]$
 - ovaj način prikaza faze je uobičajen u literaturi, i interpretiran je na narednoj prikaznici



O načinu prikaza faznog spektra

Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

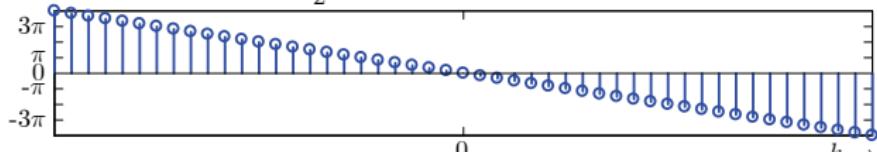
Frekvenčijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

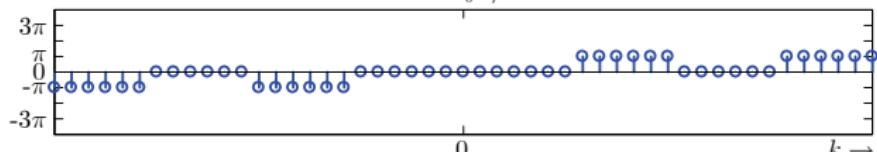
Fourierov red

DODATAK

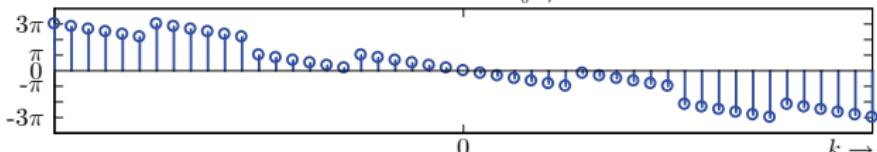
$$-k \frac{\omega_0 \tau}{2}, \tau = 1, T_0 = 6, \omega_0 = 2\pi/6$$



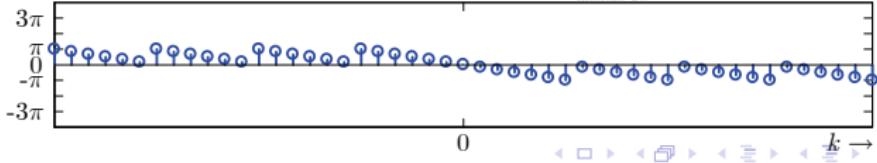
$$\angle \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}$$



$$-k \frac{\omega_0 \tau}{2} + \angle \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}$$



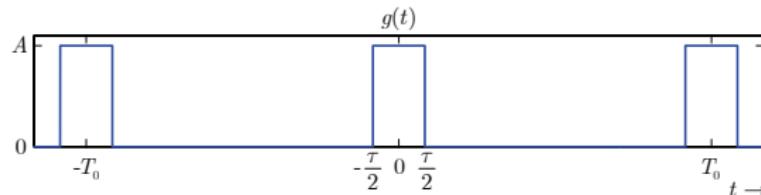
$$\left(-k \frac{\omega_0 \tau}{2} + \angle \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2} \right) \text{modulo } 2\pi$$





Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signal-a

- za periodičan signal prikazan slikom



- koeficijenti Fourierovog reda se određuju na isti način kao u prethodnom primjeru

$$G_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) dt = \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt = \frac{A\tau}{T_0},$$

za $k = 0$,

$$G_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}}$$

za $k = \pm 1, \pm 2, \dots$



Linjski spektar

- za parnu funkciju $g(t)$, koeficijenti Fourierovog reda su realni (potvrđuje se dokazom nešto kasnije)
- izračunati su koeficijenti Fourierovog reda parnog pravokutnog periodičnog signala

$$G_k = A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}}$$

- za primjetiti je kako je njihova ovojnica oblika⁵

$$\text{sinc}(w) = \frac{\sin(\pi w)}{\pi w}$$

- koeficijenti $\{G_k\}$ su realni i možemo ih prikazati i samo jednim grafom

⁵ $\text{sinc}(0) = 1$



Linijski spektar – primjer

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

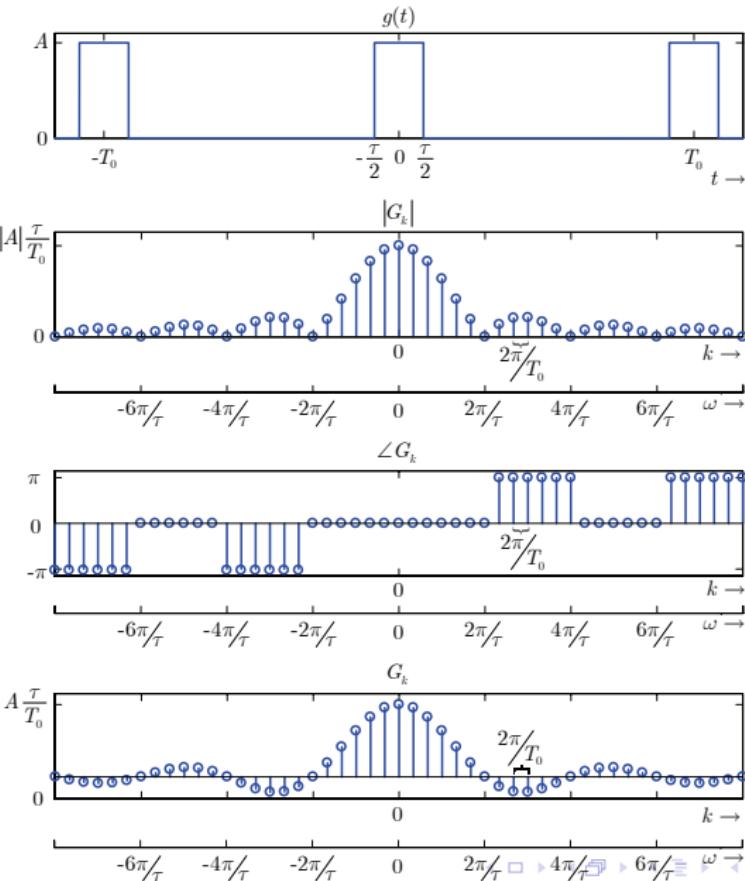
Profesor
Branko Jeren

Frekvenčijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

Fourierov red

DODATAK





Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signala

- izračunati spektri

$$|G_k| = \left| \frac{A\tau}{T_0} \right| \left| \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} \right|,$$

$$\angle G_k = \angle A + \angle \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}$$

$$|F_k| = \left| \frac{A\tau}{T_0} \right| \left| \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} \right|,$$

$$\angle F_k = \angle A + \angle \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} - k \frac{\omega_0\tau}{2}$$

su spektri pravokutnih signala $g(t)$ i $f(t) = g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ za $\forall t \in \mathbb{R}$

- zaključujemo kako kašnjenje signala za $\frac{\tau}{2}$ rezultira u linearном faznom pomaku spektra za $-\frac{k\omega_0\tau}{2}$, dok amplitudni spektar ostaje nepromijenjen



Spektar vremenski kontinuiranog pravokutnog periodičnog signal-a

- interpretirajmo prethodni zaključak
- neka $g(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$, sintetiziraju njegove Fourierove komponente koje su sinusoide odgovarajuće amplitude i faze (vidi dodatak)
- signal $f(t) = g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ čine iste sinusoidalne komponente koje su **sve pomaknute** za $\frac{\tau}{2}$
- vremensko kašnjenje $\frac{\tau}{2}$ svake sinusoide $\cos(k\omega_0 t)$ rezultira u njezinom faznom kašnjenju za $\frac{k\omega_0 \tau}{2}$

$$\cos\left[k\omega_0\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = \cos\left(k\omega_0 t - \frac{k\omega_0 \tau}{2}\right)$$

- $\frac{k\omega_0 \tau}{2}$ je linear funkcija od k , što znači da više harmonijske komponente doživljavaju proporcionalno viši fazni pomak da bi se postiglo jednako vremensko kašnjenje svih harmonijskih komponenti



Parsevalova relacija

- periodični kontinuirani signal $f(t)$ ima beskonačnu energiju ali konačnu srednju snagu koja je dana s

$$P_f = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt$$

- uz $|f(t)|^2 = f(t)f^*(t)$ možemo pisati⁶

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^* \underbrace{\left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right)}_{F_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \end{aligned}$$

- ova se jednakost naziva Parsevalova relacija

⁶ $f^*(t)$ označava konjugirano kompleksnu vrijednost od $f(t)$



Parsevalova relacija

- ilustrirajmo fizikalno značenje Parsevalove relacije

$$P_f = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

- neka se $f(t)$ sastoji samo od jedne kompleksne eksponencijale

$$f(t) = F_k e^{jk\omega_0 t}$$

- u tom slučaju svi su koeficijenti Fourierovog reda, osim F_k , jednak nuli, i sukladno tomu srednja snaga signala je

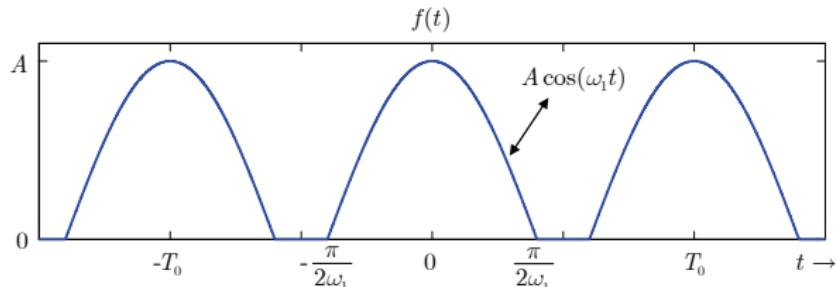
$$P_f = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |F_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |F_k|^2 dt = |F_k|^2$$

- očigledno je kako $|F_k|^2$ predstavlja srednju snagu k -te harmoničke komponente signala
- ukupna srednja snaga periodičnog signala je, prema tome, zbroj srednjih snaga svih harmonika



Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala na slici ($A = 1$, $\omega_1 = 1$, a $T_0 = \frac{5\pi}{4}$)



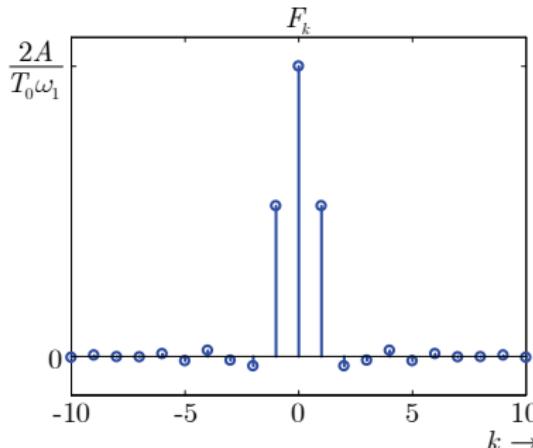
- koeficijenti Fourierovog reda su (vidi dodatak)

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} A \cos(\omega_1 t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2A\omega_1}{T_0(\omega_1^2 - k^2\omega_0^2)} \cos\left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}k\right), \end{aligned}$$



Fourierov red – primjer

- spektar signala dan je na slici



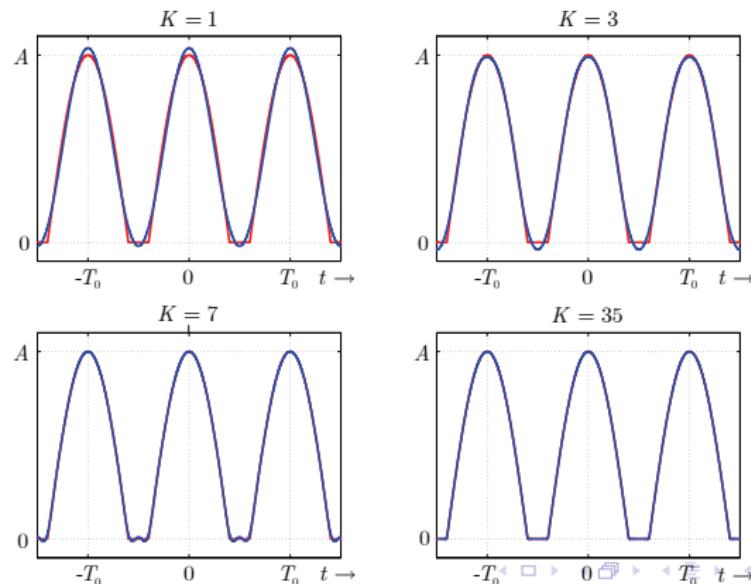
- inverznom transformacijom možemo, iz spektra, odrediti izvorni signal f u vremenskoj domeni
- postupak sinteze ilustriramo izračunom Fourierovog reda za konačni broj harmonika čime se aproksimira izvorni signal



Fourierov red – primjer

- razmatra se Fourierov red za konačni broj harmonika,
 $K = 1, 3, 7, 35$

$$f_K(t) = \sum_{k=-K}^K F_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-K}^K \frac{2A\omega_1}{T_0(\omega_1^2 - k^2\omega_0^2)} \cos\left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1} k\right) e^{jk\omega_0 t}$$





Fourierov red – primjer

- pokazano je kako za dani primjer vremenski neprekinutog signala vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \approx f_K(t) = \sum_{k=-K}^K F_k e^{jk\omega_0 t}$$

- iz primjera je evidentno kako za $K \rightarrow \infty$, ili dovoljno velik K , možemo postići perfektnu aproksimaciju signala f
- razmotrimo aproksimaciju, po odsjećima neprekinutog, signala koji ima konačni broj diskontinuiteta u periodi
- razmatra se periodični pravokutni signal i pokazuje kako se pri Fourierovoj sintezi dobiva signal s valovitostima na mjestu prekida
- ta pojava se naziva Gibbsova pojava



Gibbsova pojava

- razmatra se graf Fourierovog reda parnog periodičnog pravokutnog signala za konačni broj harmonika
- prije su izračunati koeficijenti Fourierovog reda

$$F_0 = \frac{\tau}{T_0}, \quad F_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

pa je Fourierov red za konačni broj harmonika

$$f_K(t) = \frac{\tau}{T_0} + \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} e^{jk\omega_0 t}$$

- na narednoj prikaznici su prikazani grafovi Fourierovog reda za $K = 1, 3, 9, 35$ uz $T_0 = 2$ i $\tau = 1$



Gibbsova pojava

Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

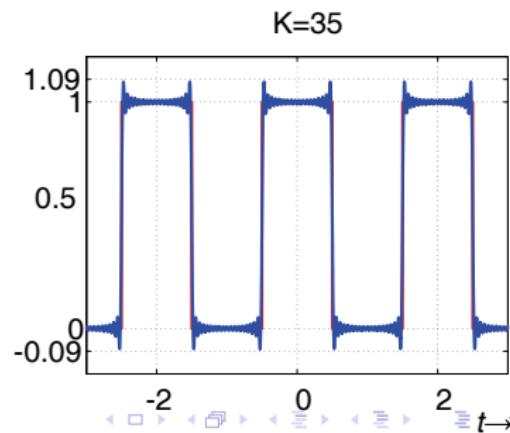
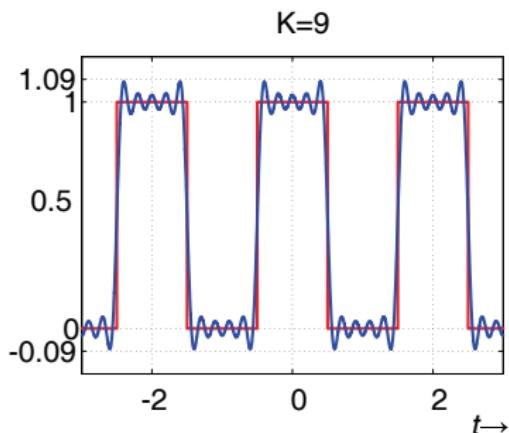
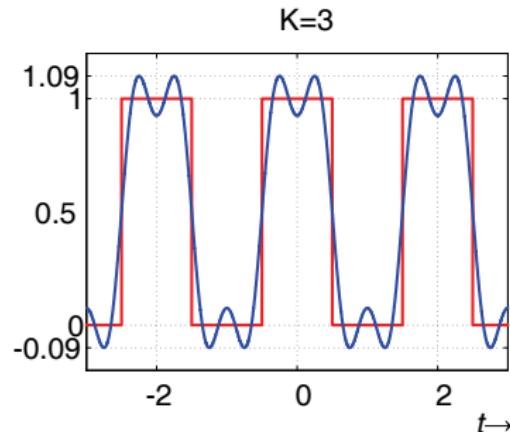
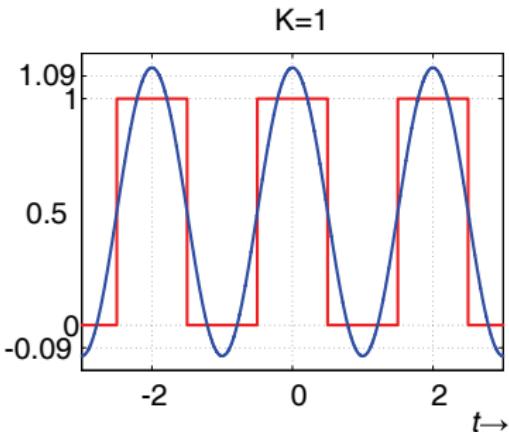
Profesor
Branko Jeren

Frekvenčijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

Fourierov red

DODATAK





Gibbsova pojava

- primjer pokazuje kako u blizini diskontinuiteta postoji nadvišenje odnosno valovitost čiji se iznos, s povećanjem K , ne smanjuje
- ova se pojava naziva Gibbsova pojava
- vidljivo je kako je, za $K \rightarrow \infty$, iznos prvog nadvišenja konstantan, 9 % veličine diskontinuiteta, ali se širina valovitosti približava nuli
- za $\forall t$, osim na mjestu diskontinuiteta, vrijednost signala prikazanog Fourierovim redom, za $K \rightarrow \infty$, približava se vrijednosti originalnog signala
- na mjestu diskontinuiteta, $(f(t_d^+) \neq f(t_d^-))$,

$$f_K(t_d) \text{ za, } K \rightarrow \infty, \text{ konvergira prema } \frac{(f(t_d^+) + f(t_d^-))}{2}$$



Gibbsova pojava

- definiramo grešku aproksimacije kao

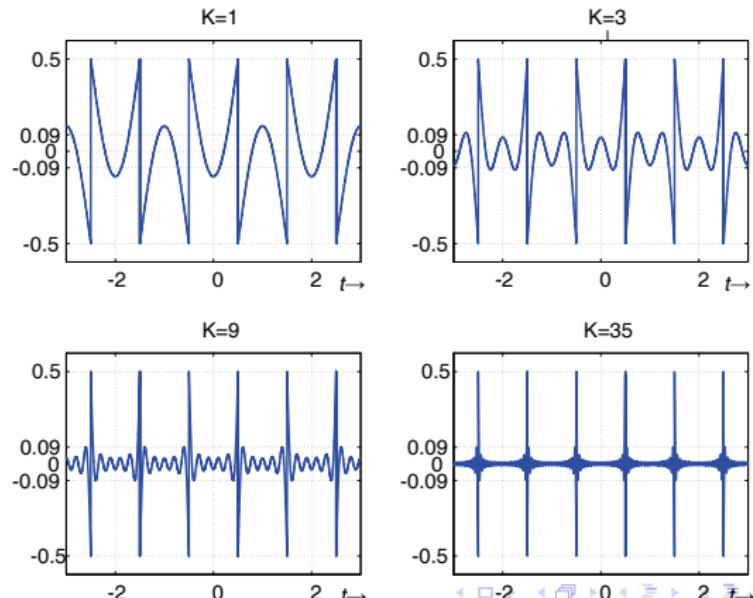
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_K(t) = f(t) - \sum_{k=-K}^K F_k e^{jk\omega_0 t}$$

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska analiza periodičnih vremenski kontinuiranih signala
Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala
Fourierov red

DODATAK





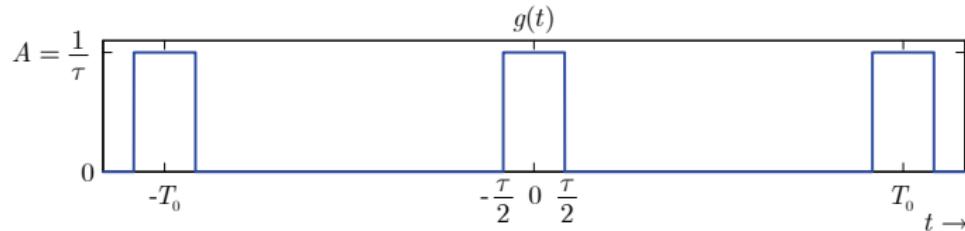
Gibbsova pojava

- ako promotrimo energiju signala greške $\int_{T_0} |e_K(t)|^2 dt$, unutar jedne periode, zaključujemo sa slike da za $K \rightarrow \infty$ ona postaje nula
- ovaj zaključak proizlazi iz činjenice da su iznosi valovitosti konstantne a njihove širine teže k nuli
- dakle, razlika između $f(t)$, $\forall t$, i njegova prikaza Fourierovim redom ima energiju nula
- zaključujemo kako izvorni signal i njegov prikaz Fourierovim redom imaju potpuno jednaku energiju signala u bilo kojoj periodi, pa stoga imaju jednako djelovanje na bilo koji realni sustav



Veza širine pravokutnog pulsa i širine glavne latice spektra

- za paran periodičan pravokutni signal



određujemo spektar za $0 < \tau < T_0$, za $\tau = T_0$ i za $\tau = 0$

- za $0 < \tau < T_0$ koeficijenti Fourierovog reda su (prije izračunato)

$$G_0 = \frac{A\tau}{T_0} = \frac{\frac{1}{\tau}\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0}, \quad \text{za } k = 0,$$

$$G_k = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} = \frac{1}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}, \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$



Veza širine pravokutnog pulsa i širine glavne latice spektra

- za $\tau = T_0$, signal $g(t) = g(t + mT_0) = \frac{1}{T_0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, a koeficijenti Fourierovog reda su, uz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

$$G_0 = \frac{A\tau}{T_0} = \frac{1}{T_0}, \quad \text{za } k = 0,$$

$$G_k = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0\tau}{2}}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} = \frac{1}{T_0} \frac{\sin k\pi}{k\pi} = 0, \quad \text{za } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

- za $\tau = 0$, pravokutni puls prelazi u Diracovu delta funkciju, pa je $g(t) = \text{comb}_{T_0}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0)$, a koeficijenti Fourierovog reda su, za $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$G_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$



Veza širine pravokutnog pulsa i širine glavne latice spektra

Signalni i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

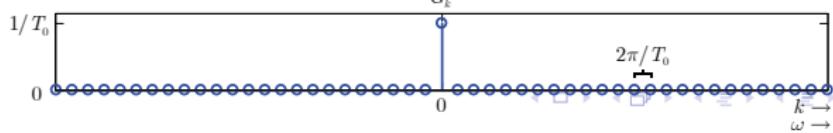
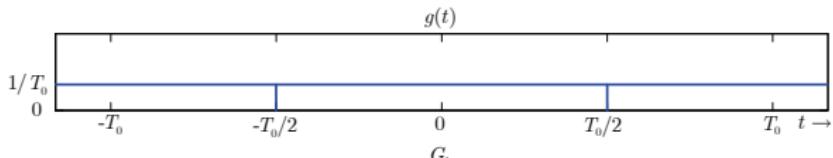
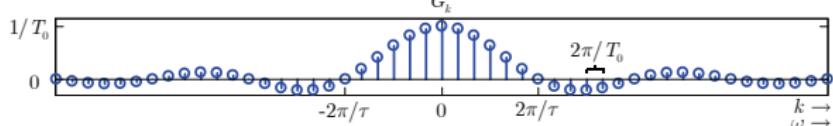
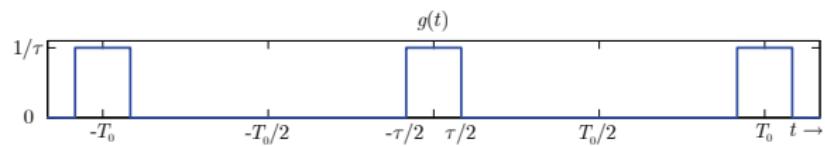
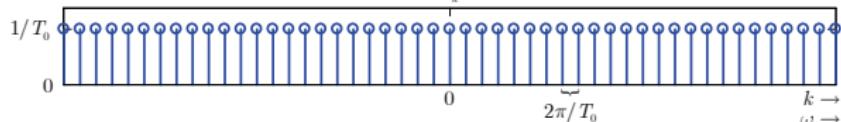
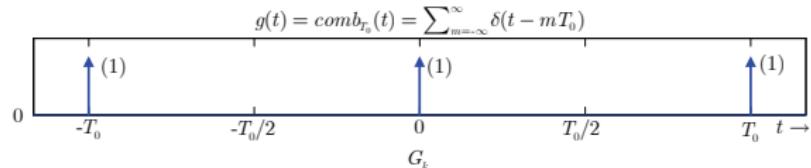
Profesor
Branko Jeren

Frekvenčijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

Fourierov red

DODATAK





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

Fourierov red

DODATAK

DODATAK – SAMOSTALNI RAD STUDENATA



DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda
Fourierov red –
primjer
Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

Koeficijenti Fourierovog reda

- da bi neki periodični vremenski kontinuirani signal prikazali uz pomoć Fourierovog reda potrebno je odrediti koeficijente reda F_k
- izračunavanje koeficijenata $\{F_k\}$ započinje množenjem, s obje strane,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

s $e^{-jm\omega_0 t}$, za $m \in \mathbb{Z}$

- slijedi integriranje s obje strane, preko jedne periode, dakle, 0 do T_0 , ili općenitije od t_0 do $t_0 + T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-j\omega_0 mt} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jm\omega_0 t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \right) dt \quad (5)$$

- desnu stranu transformiramo u



DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda
Fourierov red –
primjer
Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

Koeficijenti Fourierovog reda

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt}_{Int} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \left[\frac{e^{j(k-m)\omega_0 t}}{j(k-m)\omega_0} \right]_{t_0}^{t_0+T_0}$$

- brojnik izraza u pravokutnim zagradama jednak je na obje granice, pa je za regularni nazivnik ($k \neq m$) integral jednak nuli
- s druge strane, za $k = m$, integral Int iznosi

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = T_0$$

pa se (5) reducira u

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = F_m T_0 \Rightarrow$$



DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda

Fourierov red –
primjer

Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

Koeficijenti Fourierovog reda

- slijedi izraz za koeficijente Fourierovog reda

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad F_m = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

- budući je t_0 proizvoljan, integral može biti izračunat preko bilo kojeg intervala duljine T_0 pa je konačno, uz zamjenu $k = m$, izraz za izračun koeficijenata Fourierovog reda

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- koeficijenti Fourierovog reda, F_k , nazivaju se i spektralni koeficijenti signala f
- koeficijenti Fourierovog reda su kompleksni⁷ dakle, $F_k \in \mathbb{C}$

⁷Kasnije se pokazuje da su za parne, vremenski kontinuirane, periodične signale koeficijenti Fourierovog reda realni



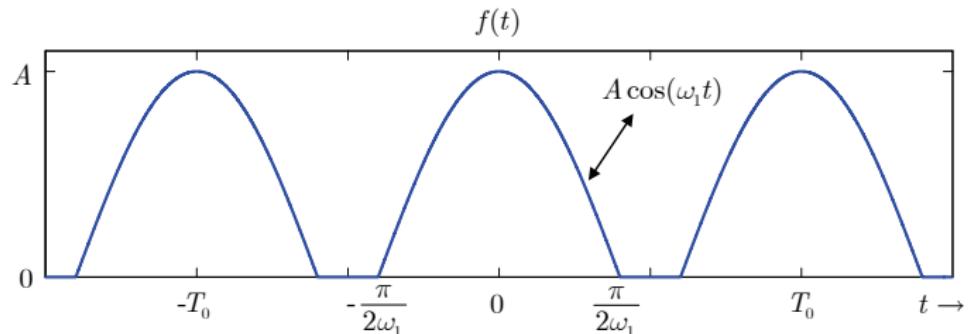
DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda
Fourierov red –
primjer

Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

Fourierov red – primjer

- određuju se koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala na slici ($A = 1$, $\omega_1 = 1$, a $T_0 = \frac{5\pi}{4}$)



- koeficijenti Fourierovog reda su

$$F_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} A \cos(\omega_1 t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



Fourierov red – primjer

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda

Fourierov red –
primjer

Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{2T_0} \left[\int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} e^{j(\omega_1 - k\omega_0)t} dt + \int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} e^{-j(\omega_1 + k\omega_0)t} dt \right] \\ &= \frac{A}{2T_0} \frac{1}{j(\omega_1 - k\omega_0)} \left[e^{j(\omega_1 - k\omega_0) \frac{\pi}{2\omega_1}} - e^{-j(\omega_1 - k\omega_0) \frac{\pi}{2\omega_1}} \right] \\ &\quad + \frac{A}{2T_0} \frac{1}{-j(\omega_1 + k\omega_0)} \left[e^{-j(\omega_1 + k\omega_0) \frac{\pi}{2\omega_1}} - e^{j(\omega_1 + k\omega_0) \frac{\pi}{2\omega_1}} \right] \\ &= \frac{A}{2T_0} \frac{1}{j(\omega_1 - k\omega_0)} \left[\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}} _j e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} - \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}} _{-j} e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} \right] \\ &\quad + \frac{A}{2T_0} \frac{1}{-j(\omega_1 + k\omega_0)} \left[\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}} _{-j} e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} - \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}} _j e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} \right] \end{aligned}$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

Frekvenčijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda

Fourierov red –
primjer

Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

Fourierov red – primjer

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{A}{2T_0} \frac{1}{\omega_1 - k\omega_0} \left[e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} + e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} \right] \\ &\quad + \frac{A}{2T_0} \frac{1}{\omega_1 + k\omega_0} \left[e^{jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} + e^{-jk\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}} \right] \\ &= \frac{A}{T_0} \cos\left(k\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}\right) \left[\frac{1}{\omega_1 - k\omega_0} + \frac{1}{\omega_1 + k\omega_0} \right] \\ &= \frac{2A\omega_1}{T_0 (\omega_1^2 - k^2\omega_0^2)} \cos\left(k\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1}\right) \end{aligned}$$

za $A = 1$, $\omega_1 = 1$, i $T_0 = \frac{5\pi}{4}$ je

$$F_k = \frac{2A\omega_1}{T_0 (\omega_1^2 - k^2\omega_0^2)} \cos\left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega_1} k\right) = \frac{40}{\pi(25 - 64k^2)} \cos\left(\frac{4\pi}{5} k\right)$$



DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda
Fourierov red –
primjer

Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

Fourierov red – kompaktni trigonometrijski oblik

- do sada smo razmatrali Fourierov red definiran kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t}$$

- pokazano je kako za realan periodičan signal vrijedi

$$|F_k| = |F_{-k}| \quad \text{i} \quad \angle F_k = -\angle F_{-k}$$

pa izraz za Fourierov red možemo transformirati u

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t} \\ &= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_{-k}| e^{j\angle F_{-k}} e^{-jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$



Fourierov red – kompaktni trigonometrijski oblik

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 4.

Profesor
Branko Jeren

Frekvencijska
analiza
periodičnih
vremenski
kontinuiranih
signala

DODATAK

Izračun
koeficijenata
Fourierovog reda
Fourierov red –
primjer

Fourierov red –
kompaktni
trigonometrijski
oblik

$$\begin{aligned}f(t) &= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|F_k| e^{j\angle F_k} e^{jk\omega_0 t} + |F_k| e^{-j\angle F_k} e^{-jk\omega_0 t} \right] \\&= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|F_k| e^{j(k\omega_0 t + \angle F_k)} + |F_k| e^{-j(k\omega_0 t + \angle F_k)} \right] \\&= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|F_k| \frac{e^{j(k\omega_0 t + \angle F_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \angle F_k)}}{2} \\&= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|F_k| \cos(k\omega_0 t + \angle F_k)\end{aligned}$$

- što je Fourierov red u kompaktnom trigonometrijskom obliku

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Signalni i sustavi

Profesor
Branko Jeren

22. ožujka 2017.



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Signal kao linearna kombinacija osnovnih signala

- već je prije pokazano kako svaki vremenski diskretan signal možemo prikazati kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m), \quad (1)$$

a vremenski kontinuirani signal kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

- periodičan vremenski kontinuiran signal, periode $2\pi/\omega_0$, razlažemo (F. red) na zbroj kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

gdje su F_k , za $\forall k \in \mathbb{Z}$ koeficijenti Fourierovog reda



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija
CTFT – osnovna
svojstva
CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija
CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Razlaganje aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala

- aperiodičan vremenski kontinuiran signal možemo razložiti pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala¹ kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

gdje je $F(j\omega)$, spektar signala $f(t)$, dan s

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

¹Ovdje nema ograničenja kojom periodičnost signala diktira korištenje eksponencijala frekvencija vezanih uz osnovnu periodu, pa je moguće razlaganje u linearu kombinaciju kompleksnih eksponencijala s kontinuumom frekvencija što je prikazano gornjim integralom. Sukladno toj interpretaciji, $F(j\omega)(d\omega/2\pi)$ prepoznajemo kao "amplitude" svake od eksponencijala u linearoj kombinaciji. Vidi dodatak.



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove transformacije

Fourierova transformacija vremenski kontinuiranih signala

- jednadžbe (4) i (3) predstavljaju transformacijski par pri čemu se definiraju kao
 - Fourierova transformacija (eng. Continuous-Time Fourier transform – *CTFT*)

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- inverzna Fourierova transformacija (eng. Inverse Continuous-Time Fourier transform – *ICTFT*)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- koriste se i oznake²

$$F(j\omega) = CTFT\{f(t)\}, \quad \text{ili} \quad f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$$

²u uobičajenoj komunikaciji koristi se oznaka *FT*, dakle jednostavno Fourierova transformacija, te oznaka $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT – definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove transformacije

Fourierova transformacija vremenski kontinuiranih signala

- Fourierovom transformacijom vremenski kontinuiranom aperiodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje se frekvencijski kontinuiran aperiodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- inverznom Fourierovom transformacijom frekvencijski kontinuiranom aperiodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje se vremenski kontinuiran aperiodičan signal, definiran u vremenskoj domeni

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



Fourierova transformacija – drugi način zapisa

- transformacijski par, za neki aperiodični signal $y(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt, \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5)$$

zamjenom $\omega = 2\pi f$, izražavamo kao

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \quad (6)$$

- jednadžbe (6) se pretežno koriste u komunikacijama i obradbi slike, a jednadžbe (5) u analizi i sintezi sustava, automatici, elektronici.
- u ovom predmetu koristimo zapis (5)



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Konvergencija Fourierove transformacije

- slično kao kod Fourierovog reda, i ovdje postoje dvije klase signala za koje Fourierova transformacija konvergira
 - ① signali konačne totalne energije za koje vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

- ② signali koji zadovoljavaju Dirichletove uvjete
 - (a) signal f je absolutno integrabilan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- (b) signal f ima konačni broj maksimuma i minimuma, u bilo kojem konačnom intervalu vremena
- (c) ima konačni broj diskontinuiteta, u bilo kojem konačnom intervalu vremena, pri čemu svaki od diskontinuiteta mora biti konačan
- (d) na mjestu diskontinuiteta, $(f(t_d^+) \neq f(t_d^-))$, signal konvergira prema $\frac{(f(t_d^+) + f(t_d^-))}{2}$



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija vremenski kontinuiranih signala

- rezultat *CTFT*,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

naziva se i Fourierov spektar ili jednostavno spektar
signala $f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

- F je kompleksna funkcija realne varijable³ ω i pišemo

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\angle F(j\omega)}$$

gdje su $|F(j\omega)|$ amplitudni spektar, a $\angle F(j\omega)$ fazni spektar

³naizgled zbunjuje oznaka $F(j\omega)$, a ne $F(\omega)$, no to je samo stvar konvencije jer se želi istaknuti kako je funkcija definirana na imaginarnoj osi (sve su frekvencije kompleksnih eksponencijala na $j\omega$ osi). Smisao konvencije postaje jasan kasnije, pri usporedbi Fourierove i Laplaceove transformacije



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija
CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

Fourierova transformacija – Parsevalova jednakost
energija aperiodičnog kontinuiranog signala⁴ $f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, čija
je Fourierova transformacija $F(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, je

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad \text{za } |f(t)|^2 = f(t)f^*(t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

što je Parsevalova jednakost za aperiodične vremenski
kontinuirane signale konačne energije, i izražava princip
očuvanja energije u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

⁴ $f(t)$ i $f^*(t)$ su konjugirano kompleksni



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa

- CTFT pravokutnog pulsa

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

je

$$CTFT\{p_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \tau \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}$$

- spektar je realna funkcija, kao posljedica parnosti signala p_τ (kasnije se detaljno objašnjava)
- razmotrimo spektar pomaknutog pravokutnog pulsa

$$g(t) = p_\tau(t - \frac{\tau}{2}) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$



Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt \\ &= \tau \underbrace{\frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}}_{\mathcal{F}\{p_{\tau}(t)\}} e^{-j\frac{\tau}{2}\omega} \end{aligned}$$

pa su amplitudni i fazni spektar

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \begin{cases} \tau, & \omega = 0 \\ \tau \left| \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} \right|, & \text{inače,} \end{cases} \\ \angle G(j\omega) &= \angle \underbrace{\frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}}_{\mathcal{F}\{p_{\tau}(t)\}} - \frac{\tau}{2}\omega \end{aligned}$$



Fourierova transformacija pravokutnog pulsa

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

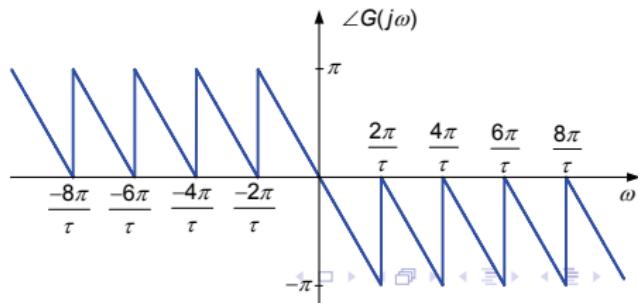
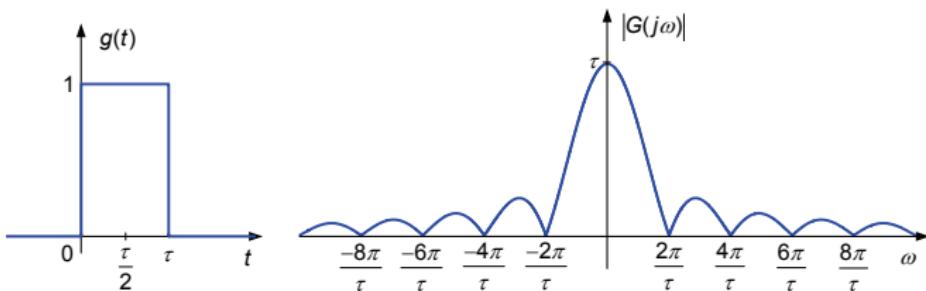
DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

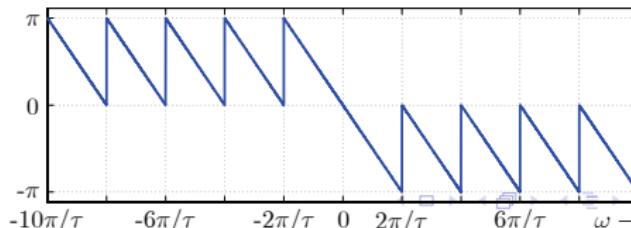
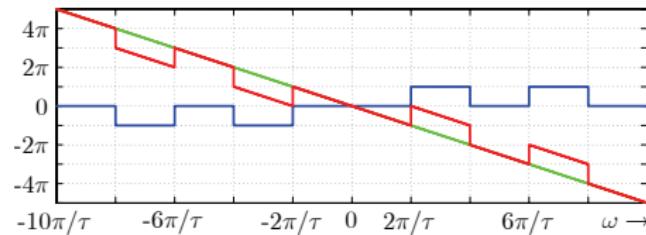
DODATAK

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \tau, & \omega = 0, \\ \tau \left| \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} \right|, & \text{inače,} \end{cases}, \quad \angle G(j\omega) = \angle \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} - \frac{\tau}{2}\omega$$



Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – pomak

- interpretira se faza pomaknutog pravokutnog pulsa
- plavo je faza nepomaknutog (parnog) pravokutnog pulsa, $\angle \mathcal{F}\{p_\tau(t)\}$, zeleno je doprinos fazi zbog pomaka signala u vremenskoj domeni $-\frac{\tau}{2}\omega$, a crveno je ukupna faza
- na donjoj slici prikazuju se samo glavne vrijednosti faze u intervalu $-\pi$ i π (dakle faza modulo 2π), i to je u literaturi uobičajeni način prikaza faze



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – svojstvo dualnosti

- očigledna je sličnost izraza za Fourierovu i inverznu Fourierovu transformaciju, pa je, znajući da je Fourierova transformacija pravokutnog pulsa sinc funkcija, za očekivati da će inverzna transformacija spektra koji je oblika pravokutnog pulsa rezultirati vremenskom funkcijom oblika sinc
- Fourierova transformacija parnog pravokutnog pulsa $p_\tau(t)$ je

$$\mathcal{F}\{p_\tau(t)\} = G_1(j\omega) = \tau \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)$$



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija
CTFT –
konvergencija
CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija
CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – svojstvo dualnosti

- inverzna F. transformacija signala čiji je spektar pravokutni signal $G_2(j\omega) = 2\pi p_\tau(-\omega) = 2\pi p_\tau(\omega)$ je

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \tau \frac{\sin \frac{\tau}{2}t}{\frac{\tau}{2}t} = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

- ovo je svojstvo dualnosti i kasnije se pokazuje da za

$$f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$$

vrijedi

$$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega)$$



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

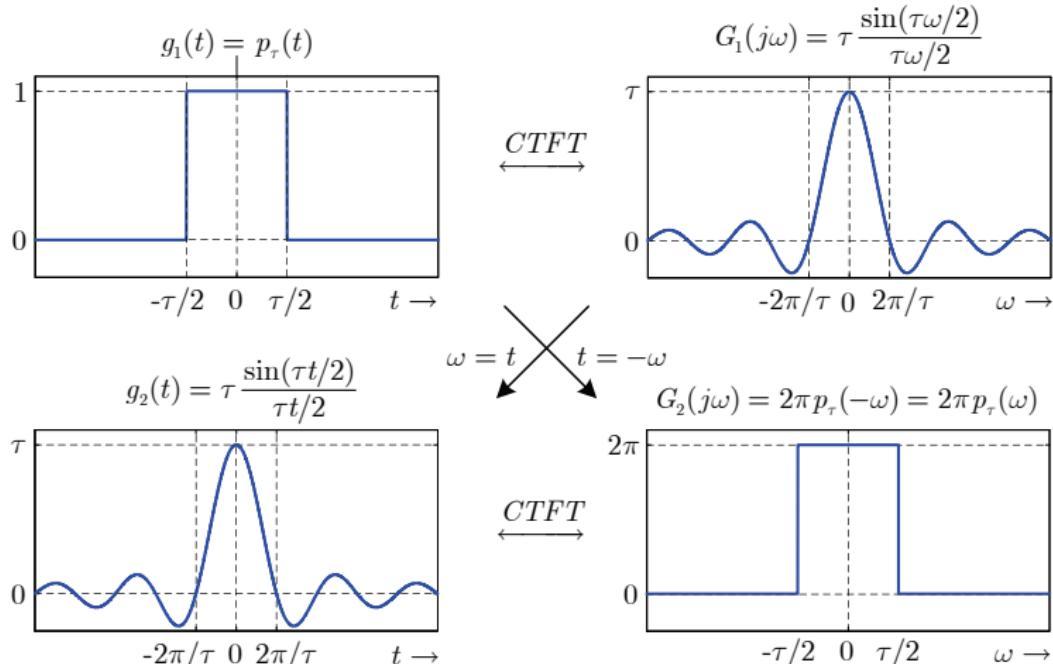
CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

Fourierova transformacija pravokutnog pulsa – svojstvo dualnosti



- možemo zaključiti da je duljina trajanja signala obrnuto proporcionalna širini spektra tog signala (o tome kasnije)



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

Generalizirana Fourierova transformacija

- Fourierova transformacija nije konvergentna, u smislu regularnih funkcija, za neke vrlo uobičajene funkcije,
- kao primjer razmotrimo Fourierovu transformaciju funkcije $f(t) = A, \forall t \in \mathbb{R}$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

- gornji integral ne konvergira⁵ i mogli bi zaključiti da za dani signal ne postoji Fourierova transformacija
- ovdje se pokazuje da je, unatoč tome, moguća njihova Fourierova transformacija, uvođenjem generaliziranih funkcija, tj. Diracove funkcije u frekvencijskoj domeni i vremenskoj domeni

⁵Signal je svevremenski i nije konačne energije, pa nije zadovoljeno da vrijedi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija jediničnog impulsa

- CTFT jediničnog impulsa⁶ $\delta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, je

$$CTFT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

- CTFT pomaknutog jediničnog impulsa $\delta(t - t_0)$ je

$$CTFT\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

- očigledno je da pomak jediničnog impulsa $\delta(t)$ ne mijenja amplitudu Fourierove transformacije, ali mijenja fazu $\angle\{CTFT\{\delta(t)\}\}$ koja, za $t_0 > 0$, pada linearno
- gradijent faze odgovara iznosu pomaka jediničnog impulsa, za t_0 , u vremenskoj domeni

⁶Diracova delta funkcija ne zadovoljava Dirichletove uvjete, jer je diskontinuitet u nuli beskonačnog iznosa. Zato transformaciju ovog signala razmatramo kao generaliziranu Fourierovu transformaciju



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala

CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

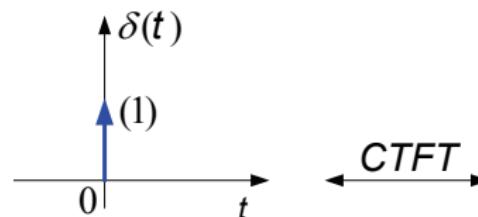
DTFS

DTFT

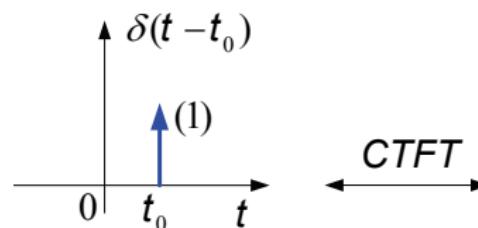
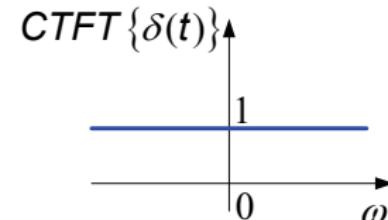
4 Fourierove transformacije

DODATAK

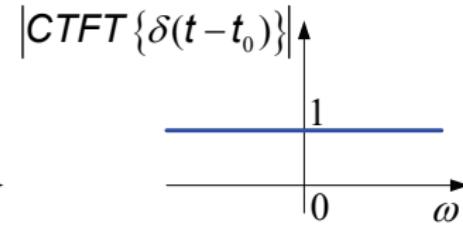
Fourierova transformacija jediničnog impulsa



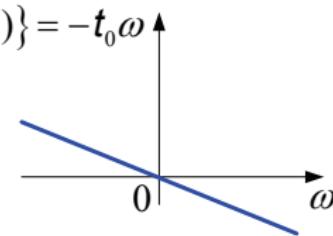
CTFT



CTFT



$$\angle \text{CTFT}\{\delta(t - t_0)\} = -t_0\omega$$





CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove transformacije

Fourierova transformacija konstante

- pokazano je kako je $CTFT\{\delta(t)\} = 1$, dakle,

$$\delta(t) \xleftrightarrow{CTFT} 1$$

- određuje se inverzna Fourierova transformacija
 $F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t) &= ICTFT\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega = 1 \end{aligned}$$

pa zaključujemo

$$1 \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi\delta(\omega)$$

- ovaj primjer također ukazuje na svojstvo dualnosti Fourierove transformacije



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija
CTFT – konvergencija
CTFT – osnovna
svojstva
CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija
CTFT – za
uociti

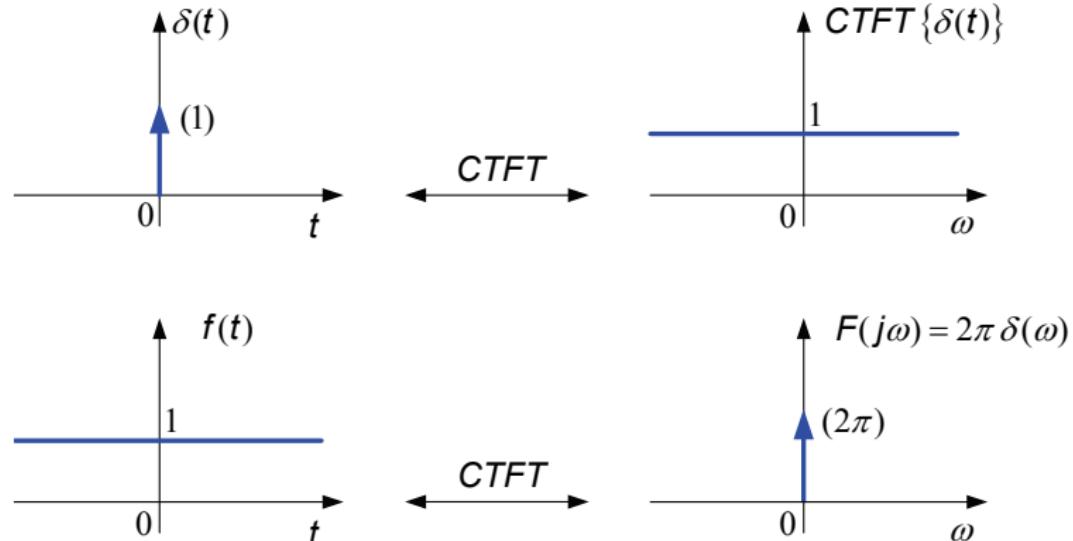
DTFS

DTFT

4 Fourierove transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija – svojstvo dualnosti



- usporedimo li ove F. transformacije s transformacijom pravokutnog pulsa $p_\tau(t)$, možemo gornje signale interpretirati kao granične slučajeve za $\tau \rightarrow 0$, odnosno $\tau \rightarrow \infty$



CTFT

Signal kao
linearna
kombinacija
osnovnih signala
CTFT –
definicija

CTFT –
konvergencija

CTFT – osnovna
svojstva

CTFT – neki
primjeri

CTFT –
generalizirana
transformacija

CTFT – za
uočiti

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Predahnilmo

- podsjetimo se da je spektar periodičnog vremenski kontinuiranog signala **diskretan** (zbog periodičnosti signala u vremenskoj domeni) i **aperiodičan**
- iz prethodnih primjera vezanih za određivanje spektra aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala možemo uočiti da je spektar aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala **kontinuiran i aperiodičan**
- zaključujemo da:
 - periodičnosti i kontinuiranosti signala u vremenskoj domeni odgovara diskretnost i aperiodičnost signala u frekvencijskoj domeni
 - diskretnosti i aperiodičnosti signala u frekvencijskoj domeni odgovara periodičnost i kontinuiranost u vremenskoj domeni
 - aperiodičnosti i kontinuiranosti signala u vremenskoj domeni odgovara kontinuiranost i aperiodičnost signala u frekvencijskoj domeni (CTFT i ICTFT)



Signal kao linearna kombinacija kompleksnih eksponencijala

- pokazano je kako periodični vremenski kontinuiran signal možemo razložiti kao linearu kombinaciju kompleksnih eksponencijala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

pri čemu je F_k , $\forall k \in \mathbb{Z}$, spektar signala f , dakle diskretna funkcija od k

- isto tako, pokazno je da aperiodičan vremenski kontinuiran signal možemo razložiti kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

pri čemu je $F(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, spektar signala f , i kontinuirana je funkcija od ω



CTFT

DTFS

DTFS –
definicija

DTFS – neki
primjeri

DTFS – za
zapamtitи

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Fourierov red periodičnih vremenski diskretnih signala

- periodičan vremenski diskretni signal $f(n) = f(n + N)$,
 $\forall n \in \mathbb{Z}$, možemo također prikazati kao linearu kombinaciju harmonijski vezanih vremenski diskretnih eksponencijala, dakle Fourierovim redom

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\Omega_0 n}$$

pri čemu su $N \in \mathbb{Z}$ osnovna perioda, a $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ osnovna frekvencija signala f

- za razliku od Fourierovog reda za vremenski kontinuirane signale ovdje je, zbog periodičnosti vremenski diskretne kompleksne eksponencijale, dovoljno samo N različitih harmonijski vezanih kompleksnih eksponencijala, jer je

$$e^{j(k+N)\Omega_0 n} = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N} n} = e^{jk\frac{2\pi}{N} n} e^{j2\pi n} = e^{jk\frac{2\pi}{N} n} = e^{jk\Omega_0 n}$$



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- zato definiramo

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, \quad (7)$$

kao Fourierov red za vremenski diskretan periodični signal ili, prema engleskoj terminologiji Discrete-Time Fourier series – DTFS

- koeficijente Fourierovog reda, izvod sličan izvodu za kontinuirane signale i dan je u dodatku, izračunavamo iz

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}, \quad (8)$$



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- iz izraza za koeficijente Fourierovog reda

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n},$$

zaključujemo kako koeficijenti Fourierovog reda F_k omogućuju prikaz $f(n)$ u frekvencijskoj domeni, tako da $F_k = |F_k| e^{j\angle F_k}$ predstavljaju amplitudu i fazu vezanu uz frekvencijske komponente $e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = e^{j\Omega_k n}$, gdje je $\Omega_k = k \frac{2\pi}{N}$

- spektar diskretnog signala je periodičan što vrijedi i za F_k koji je periodičan s osnovnim periodom N

$$F_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j(k+N) \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} e^{-jN \frac{2\pi}{N} n} = F_k$$



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- Parsevalova jednakost za periodične diskretne signale

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2$$

izvod: razmatra se srednja snaga vremenski diskretnog periodičnog signala periode N

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) f^*(n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \left(\sum_{k=0}^{N-1} F_k^* e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} F_k^* \underbrace{\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \right]}_{F_k} = \sum_{k=0}^{N-1} F_k^* F_k = \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 \end{aligned}$$



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala

- jednadžba

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n},$$

kazuje kako se periodičnom vremenski diskretnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje frekvencijski diskretan periodičan signal (spektar), definiran u frekvencijskoj domeni

- jednadžba

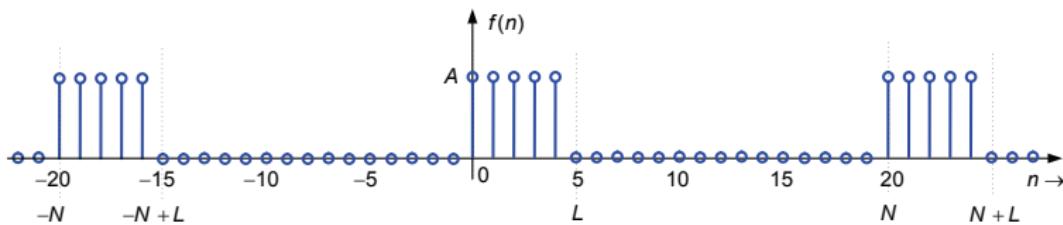
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n},$$

kazuje kako se frekvencijski diskretnom periodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje vremenski diskretan periodičan signal, definiran u vremenskoj domeni



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

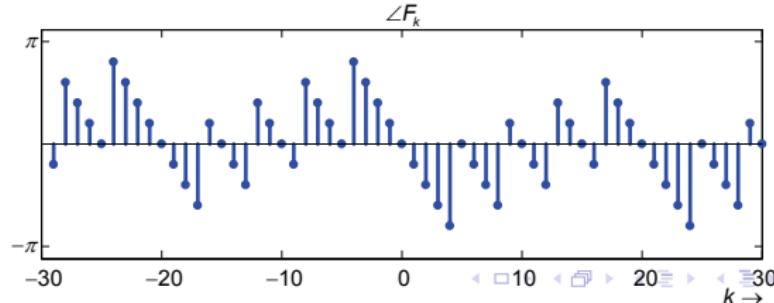
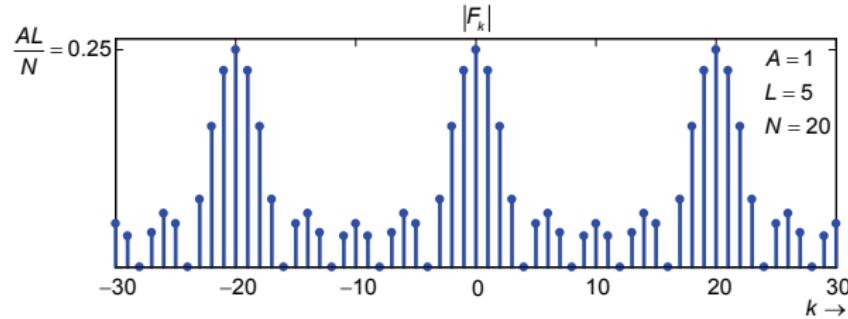
- određuje se Fourierov red periodičnog vremenski diskretnog pravokutnog signala zadanog kao



$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \\ = \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0 \\ \frac{A}{N} \frac{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} L}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



$$F_k = \begin{cases} \frac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{A}{N} \frac{\sin(k \frac{\pi}{N} L)}{\sin(k \frac{\pi}{N})} e^{-jk \frac{\pi}{N}(L-1)} & \text{inache} \end{cases}$$

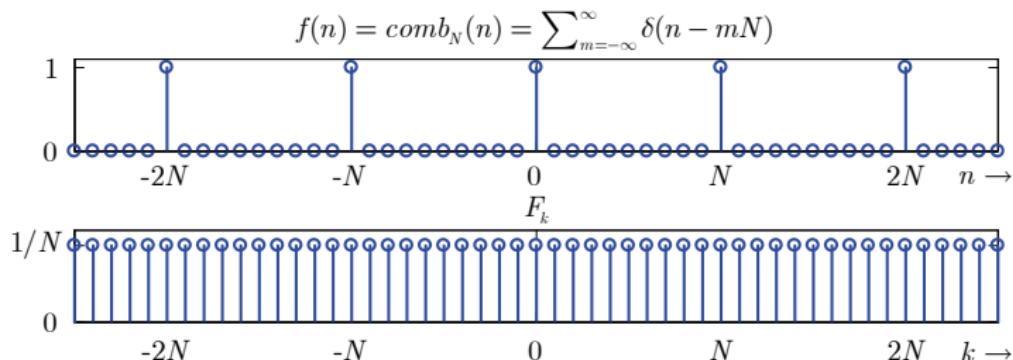


Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierov red periodičnog vremenski diskretnog signala⁷

$$f(n) = \text{comb}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN), \text{ za } \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N}$$



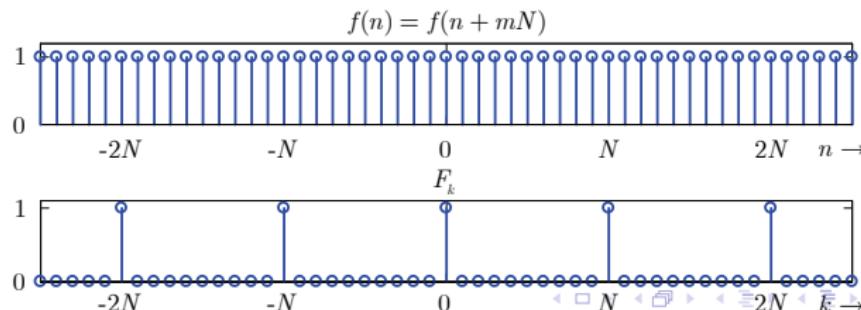
⁷Pravokutni periodičan signal iz prethodnog primjera za $L \equiv 1$, $A \equiv 1$.



Fourierov red vremenski diskretnih periodičnih signala – primjer

- određuje se Fourierov red periodičnog vremenski diskretnog signala $f(n) = f(n + mN) = 1$,

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}N}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = 0 & \text{inače} \end{cases}$$





Predahnimo još jednom

- razmotrili smo osnovne informacije o spektru periodičnog vremenski diskretnog signala i možemo prepoznati
- spektar periodičnog vremenski diskretnog signala je
 - diskretan – zato što je signal periodičan u vremenskoj domeni
 - periodičan – zato što je signal u vremenskoj domeni diskretan
- zaključujemo da:
 - periodičnosti u jednoj domeni odgovara diskretnost u drugoj domeni
 - diskretnosti u jednoj domeni odgovara periodičnost u drugoj domeni



Razlaganje aperiodičnog vremenski diskretnog signala pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala

- aperiodičan vremenski diskretan signal možemo razložiti pomoću kompleksnih eksponencijalnih signala kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (9)$$

gdje je $F(e^{j\Omega})$, spektar signala f dan s

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \quad (10)$$

- vremenski diskretni kompleksni eksponencijali jednoznačno je određena za $-\pi < \Omega \leq \pi$ pa se u razlaganju aperiodičnog vremenski diskretnog signala uzima kontinuum frekvencija iz tog intervala⁸

⁸Frekvencije kompleksnih eksponencijala leže na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini pa zato, umjesto $F(\Omega)$, po konvenciji koristimo oznaku $F(e^{j\Omega})$.



CTFT

DTFS

DTFT

DTFT –
definicija

DTFT – neki
primjeri

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Fourierova transformacija aperiodičnih vremenski diskretnih signala

- jednadžbe (10) i (9) predstavljaju transformacijski par za aperiodične vremenski diskretne signale
 - Fourierova transformacija (eng. Discrete-Time Fourier transform – *DTFT*)

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}$$

- inverzna Fourierova transformacija (eng. Inverse Discrete-Time Fourier transform – *IDTFT*)

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$$

- koriste se i oznake

$$F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}, \quad \text{ili} \quad f(n) \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega})$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- $F(e^{j\Omega}) = |F(e^{j\Omega})|e^{j\angle F(e^{j\Omega})}$, kao i u slučaju kontinuiranih signala, nazivamo spektrom signala $f(n)$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, pri čemu su

$|F(e^{j\Omega})|$ amplitudni spektar

$\angle F(e^{j\Omega})$ fazni spektar

- važno je uočiti kako je spektar aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala definiran za $\omega \in (-\infty, \infty)$, a spektar aperiodičnog vremenski diskretnog signala je iz područja $(-\pi, \pi)$ ili, ekvivalentno, $(0, 2\pi)$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- osim što je spektar $F(e^{j\Omega})$ kontinuiran, zbog aperiodičnosti signala u vremenskoj domeni, on je i periodičan, s periodom 2π , jer je

$$\begin{aligned} F(e^{j(\Omega+2\pi k)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j(\Omega+2\pi k)n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} = F(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

- ovo svojstvo je izravna posljedica činjenice da je frekvencijsko područje bilo kojeg diskretnog signala omeđeno na $(-\pi, \pi)$ ili, $(0, 2\pi)$ i da je svaka frekvencija izvan ovog intervala ekvivalentna odgovarajućoj frekvenciji unutar intervala



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- DTFT,

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}, \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

konvergira ako je diskretan signal absolutno zbrojiv

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty,$$

ili ako je signal konačne energije, dakle,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- *DTFT* vremenski diskretnom aperiodičnom signalu, definiranom u vremenskoj domeni, pridružuje frekvencijski kontinuiran periodičan signal, definiran u frekvencijskoj domeni
- *IDTFT* frekvencijski kontinuiranom periodičnom signalu (spektru), definiranom u frekvencijskoj domeni, pridružuje vremenski diskretan aperiodičan signal, definiran u vremenskoj domeni



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- Parsevalova jednakost za aperiodične diskretne signale konačne energije je

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

izvod: energija aperiodičnog diskretnog signala $f(n)$,
 $\forall n \in \mathbb{Z}$, je

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2$$

uz $|f(n)|^2 = f(n)f^*(n)$ slijedi:



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)f^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(e^{j\Omega}) e^{-j\Omega n} d\Omega \right]$$

zamjenom redoslijeda integracije i zbrajanja

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(e^{j\Omega}) \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \right]}_{F(e^{j\Omega})} d\Omega$$

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^*(e^{j\Omega}) F(e^{j\Omega}) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

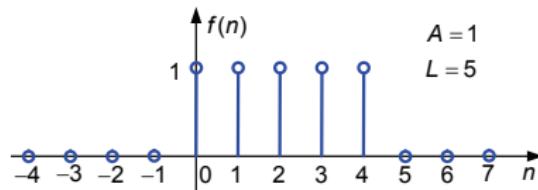
pa vrijedi: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – pravokutni signal

- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog pravokutnog pulsa zadatog kao

$$f(n) = \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$



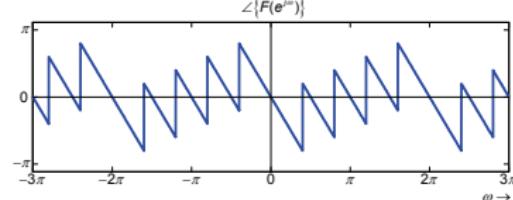
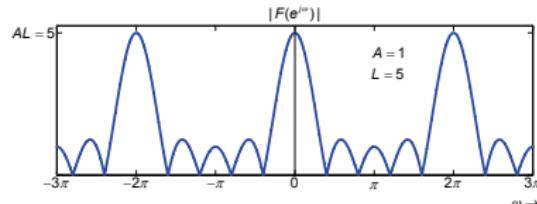
$$\begin{aligned} F(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\Omega n} = A \frac{1 - e^{-j\Omega L}}{1 - e^{-j\Omega}} = \\ &= A \frac{\sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)} \end{aligned}$$

- pa su amplitudni (paran jer je signal realan) i fazni spektar (neparan jer je signal realan) kontinuirani i periodični



$$|F(e^{j\Omega})| = \begin{cases} |A|L & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ |A| \left| \frac{\sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \right| & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

$$\angle\{F(e^{j\Omega})\} = \angle A - \frac{\Omega}{2}(L-1) + \\ + \angle \frac{\sin\left(\frac{\Omega L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$



napomena⁹

⁹faza realne veličine je nula ako je veličina pozitivna a π kada je veličina negativna.



Fourierova transformacija Kroneckerovog δ

- Fourierova transformacija vremenski diskretnog jediničnog impulsa δ je

$$DTFT\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\Omega n} = 1$$

- Fourierova transformacija vremenski pomaknutog Kroneckerovog delta $\delta(n - n_0)$ je

$$DTFT\{\delta(n - n_0)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n_0) e^{-j\Omega n} = e^{-jn_0\Omega}$$



Fourierova transformacija konstante

- određuje se inverzna Fourierova transformacija

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi m), \forall \Omega \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = 1 \end{aligned}$$

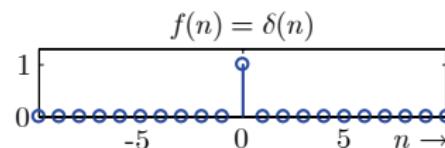
pa zaključujemo

$$1 \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi\delta(\Omega)$$

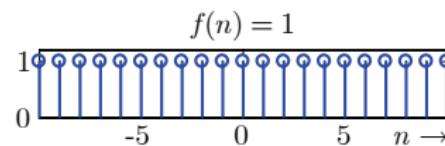
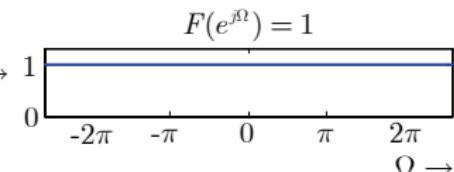
- i ovi primjeri ukazuju na obrnutu proporcionalnost duljine trajanja signala i širine spektra
- isto tako pokazali smo da, iako signal $f(n) = 1$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, ne konvergira jer nije kvadratno zbrojiv, možemo odrediti njegovu transformaciju korištenjem generalizirane Fourierove transformacije
- tu činjenicu koristimo u nizu drugih primjera



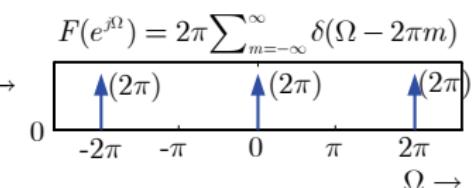
Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signalova – Kroneckerov delta i konstanta



$\longleftrightarrow DTFT$



$\longleftrightarrow DTFT$





Fourierove transformacije¹⁰

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

vremen. domena	aperiodičan (t), (n)	periodičan (t), (n)	a peri od ič an (ω)
k o n t in u ir an	$CTFT$ $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$	$CTFS$ $F_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$ $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$ $f(t)$ periode T_0 , $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	a peri od ič an (k)
d i s k r e t a n	$DTFT$ $F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}$ $f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$ $F(e^{j\Omega})$ periode 2π	$DTFS$ $F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ $f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ $f(n), F_k$ periode N , $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	p e ri od ič an (Ω)
	kontinuiran (ω), (Ω)	diskretan (k)	frekven. domena

¹⁰Fourierova transformacija je zajedničko ime sve četiri transformacije. Jasno je da u slučaju vremenski periodičnih signala transformaciju provodimo pomoću Fourierovog reda (CTFS ili DTFS).



Fourierove transformacije

Signalni i
sustavi
olska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

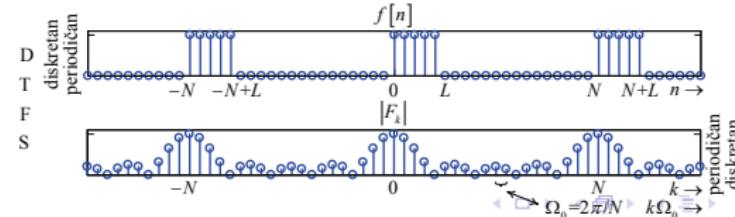
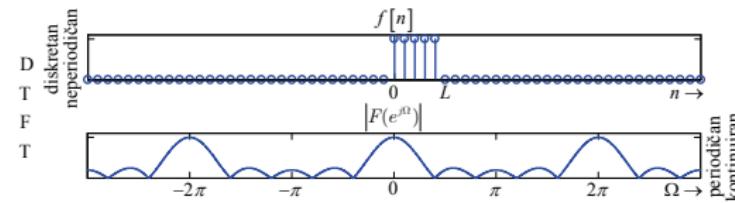
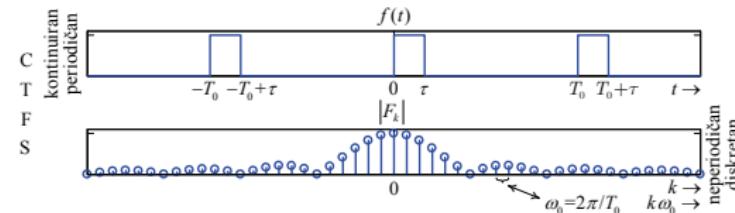
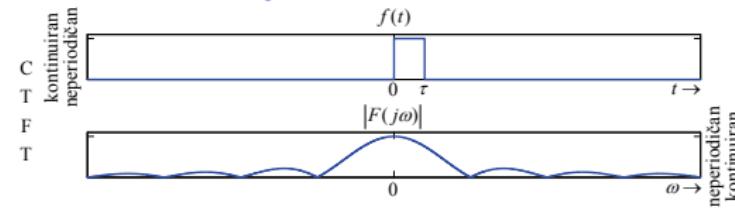
CTFT

DTES

DTFT

4 Fourierove transformacije

DODATAK





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

DODATAK – SAMOSTALNI RAD STUDENATA



Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- pokazano je kako je spektar periodičnog signala diskretan
- dan je primjer parnog periodičnog pravokutnog signala čiji je spektar

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad F_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}}$$

gdje je T_0 perioda, a τ širina pravokutnog pulsa

- razmatra se spektar tri pravokutna signala, za tri vrijednosti periode T_{01} ; $T_{02} = 2.5 T_{01}$ i $T_{03} = 2 T_{02} = 5 T_{01}$, uz fiksirani τ
- na slici koja slijedi prikazuju se normalizirani amplitudni spektri $T_{01}F_{k1}$, $T_{02}F_{k2}$ i $T_{03}F_{k3}$ (normaliziranjem se zadržava ista amplituda, τ , sva tri normalizirana spektra)



Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

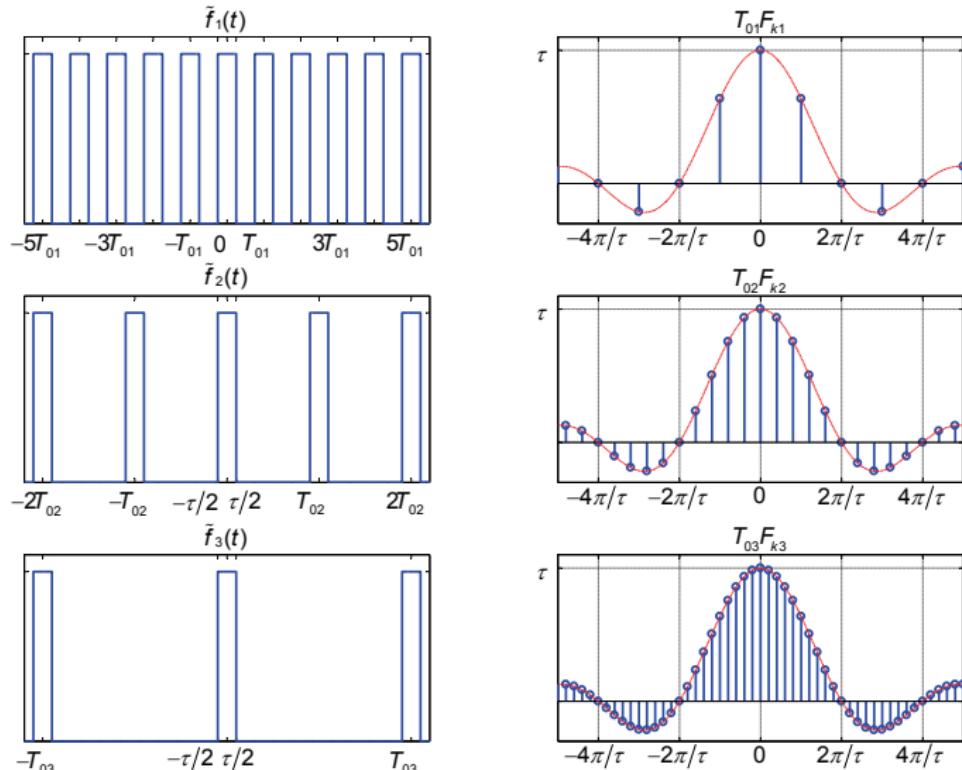
Prijelaz CTFS u
CTFT

CTFT –
kauzalne
eksponečijale

CTFT –
jediničnog skoka

DTFS – izračun
koeficijenata

DTFT – izvod
inverzne
transformacije



Slika 1: Periodični signali $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ i normalizirani spektri
 $T_{01}F_{k1}, T_{02}F_{k2}, T_{03}F_{k3}$



Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- periodični pravokutni signal¹¹ $\tilde{f} \in KontPeriod_{T_0}$ možemo interpretirati kao signal koji je nastao periodičnim ponavljanjem aperiodičnog pravokutnog pulsa $f \in KontSignali$ trajanja τ
- normalizirani koeficijenti spektra $T_0 F_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, mogu se interpretirati kao uzorci sinc funkcije koji čine linijski spektar signala \tilde{f}
- očigledno je kako s povećanjem osnovne periode spektar periodičnog signala \tilde{f} postaje gušći i gušći no ovojnica ostaje nepromijenjena

¹¹oznakom \tilde{f} želi se, zbog potrebe izvoda koji slijedi, naglasiti periodičnost signala



Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- intuitivno zaključujemo kako za $T_0 \rightarrow \infty$ linijski spektar postaje kontinuirana funkcija frekvencije ω identična ovojnici
- naime, kako se normalizirani koeficijenti spektra $T_0 F_k$ izračunavaju iz

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad T_0 F_k = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

za očekivati je onda kako se vremenski kontinuirana ovojnica izračunava iz¹²

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11)$$

¹²gdje simbol \triangleq označava "jednako po definiciji"



Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- dakle, za pravokutni signal,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \tau \frac{\sin \frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega}$$

- pa koeficijente Fourierovog reda možemo prikazati kao očitke $F(j\omega)$ jer vrijedi

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} = \frac{1}{T_0} F(jk\omega_0)$$

- općenito, periodični signal \tilde{f} prikazujemo Fourierovim redom oblika

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} F(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$



Spektar vremenski kontinuiranog periodičnog signala

- odnosno, uz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

- za $T_0 \rightarrow \infty$, dakle kad periodični signal prelazi u aperiodičan, možemo interpretirati
 - $\omega_0 \rightarrow d\omega$ – osnovna frekvencija postaje neizmjerno malom veličinom
 - $k\omega_0 \rightarrow \omega$ – harmonijske frekvencije postaju tako bliske da prelaze u kontinuum
 - suma teži k integralu
 - $\tilde{f}(t) \rightarrow f(t)$ – periodični signal prelazi u aperiodičan
 - pa gornji izraz prelazi u

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (12)$$



Fourierova transformacija aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala

- jednadžba (11) predstavlja Fourierovu transformaciju ili spektar signala f , a (12) inverznu Fourierovu transformaciju koja omogućuje određivanje signala f iz njegova spektra
- dakle, jednadžbe (11) i (12) predstavljaju transformacijski par
 - Fourierova transformacija

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- inverzna Fourierova transformacija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- koriste se i oznake

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \text{ili} \quad \triangleleft \square f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)$$



Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale
 $f(t) = e^{-bt} \mu(t), \forall t \in \mathbb{R}, \text{ i } b \in \mathbb{R}, \text{ je}$

$\forall \omega \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt} \mu(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(b+j\omega)t} dt = -\frac{1}{b+j\omega} [e^{-(b+j\omega)t}]_{t=0}^{t=\infty} \end{aligned}$$

integral konvergira¹³ samo za $b > 0$, pa je

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

¹³Prvi Dirichletov uvjet $\int_0^{\infty} |e^{-bt}| dt = \int_0^{\infty} e^{-bt} dt = -\frac{1}{b} e^{-bt} \Big|_0^{\infty}$, a ovaj izraz je konačan samo za $b > 0$



CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Prijelaz CTFS u
CTFT

CTFT –
kauzalne
eksponencijale

CTFT –
jediničnog skoka

DTFS – izračun
koeficijenata

DTFT – izvod
inverzne
transformacije

Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- iz

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

slijedi

$$Re\{F(j\omega)\} = \frac{b}{b^2 + \omega^2}, \quad Im\{F(j\omega)\} = -\frac{\omega}{b^2 + \omega^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}, \quad \angle F(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{b}$$

- na narednoj prikaznici dani su realni i imaginarni dio spektra te, amplitudni i fazni spektar¹⁴
- uočiti parnost realnog i amplitudnog spektra i neparnost imaginarnog i faznog spektra (signal f je realan)

¹⁴spektar je aperiodičan i neomeđen, a na slikama je prikazan dio spektra



Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 5.

Profesor
Branko Jeren

CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

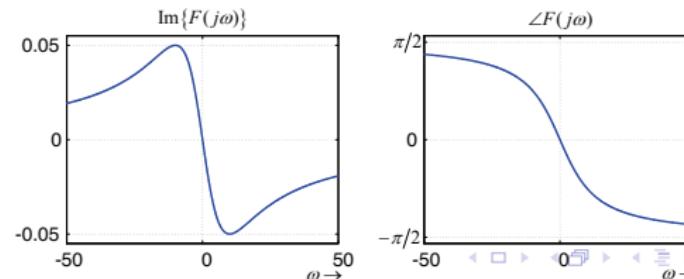
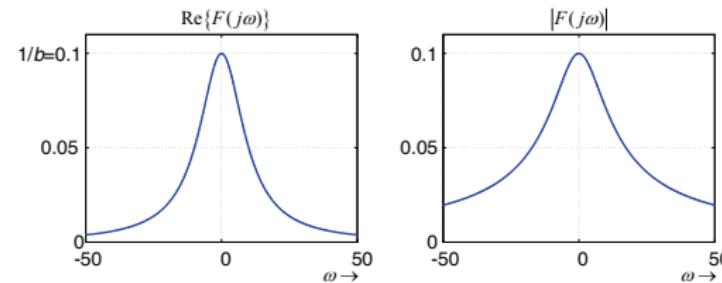
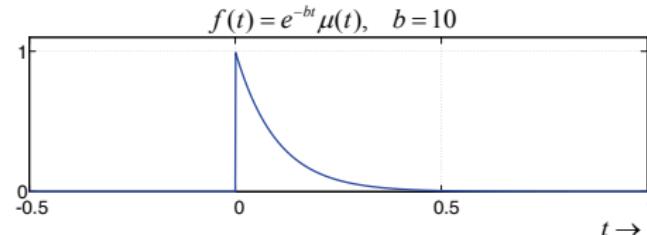
DODATAK

Prijelaz CTFS u
CTFT
CTFT –
kauzalne
eksponencijale

CTFT –
jediničnog skoka

DTFS – izračun
koeficijenata

DTFT – izvod
inverzne
transformacije





Fourierova transformacija kauzalne eksponencijale

- primjer Fourierove transformacije kauzalne eksponencijale $f(t) = e^{-bt} \mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i $b \in \mathbb{R}$, ukazuje na sljedeću važnu činjenicu
- pokazano je da Fourierov integral, za ovaj signal, postoji samo za $b > 0$
- za $b = 0$, gornja se kauzalna eksponencijala transformira u $f(t) = \mu(t)$
- zaključujemo kako za jedinični skok, $\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ne postoji Fourierova transformacija
- pokazuje se da za jedinični skok, i još neke druge signale, definiramo generaliziranu Fourierovu transformaciju



Fourierova transformacija jediničnog skoka

- pokazano je kako kauzalna eksponencijala, $e^{-bt}\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ima Fourierovu transformaciju za $b > 0$
- jedinični skok možemo interpretirati kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu(t) = \lim_{b \rightarrow 0} e^{-bt}\mu(t)$$

korištenjem izraza za F. transformaciju kauzalne eksponencijale možemo pisati

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mu(t)\} &= \lim_{b \rightarrow 0} \mathcal{F}\{e^{-bt}\mu(t)\} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b + j\omega} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{b}{b^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{b}{b^2 + \omega^2} \right] + \frac{1}{j\omega}\end{aligned}$$

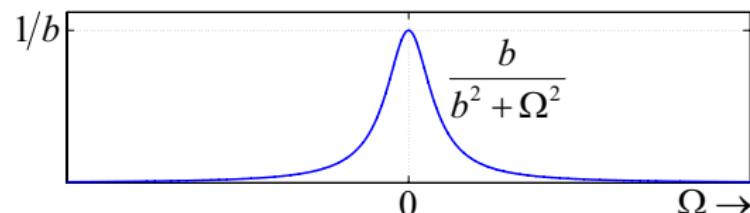


Fourierova transformacija jediničnog skoka

- član $\lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{b}{b^2 + \omega^2} \right]$ ima svojstvo da je površina ispod njegove krivulje jednaka π , neovisno o vrijednosti b ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{b^2 + \omega^2} d\omega = \arctan \frac{\omega}{b} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

uvidom u graf funkcije zaključujemo kako, za $b \rightarrow 0$, funkcija prelazi u Diracov δ , intenziteta π , u $\omega = 0$



$$\text{pa uz } \lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{b}{b^2 + \omega^2} \right] = \pi \delta(\omega) \Rightarrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\{\mu(t)\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



DTFS – izračun koeficijenata

- izračunavaju se koeficijenti F_k u

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

- u izračunu se koristi formula za zbroj prvih N članova geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} N, & q = 1 \\ \frac{1-q^N}{1-q}, & q \neq 1, \end{cases}$$

i, uz primjenu ove formule, zbroj

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jm \frac{2\pi}{N} n} = \begin{cases} N, & m = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (13)$$



CTFT

DTFS

DTFT

4 Fourierove
transformacije

DODATAK

Prijelaz CTFS u
CTFT

CTFT –
kauzalne
eksponencijale

CTFT –
jediničnog skoka

DTFS – izračun
koeficijenata

DTFT – izvod
inverzne
transformacije

DTFS – izračun koeficijenata

- izračun započinjemo množenjem obje strane

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

s eksponencijalom $e^{-jm \frac{2\pi}{N} n}$, te zbrajanjem umnožaka od $n = 0$ do $n = N - 1$, pa je

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} F_k \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m) \frac{2\pi}{N} n}}_A = \begin{cases} N, & k - m = 0, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} = NF_m \Rightarrow$$

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jm \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{odnosno} \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- kako je spektar periodičan, izraz za DTFT predstavlja Fourierov red¹⁵, a $f(n)$ koeficijente tog Fourierovog reda

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n}, \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

- koeficijente Fourierovog reda, dakle $f(n)$, određujemo sličnim izvodom kao i prije u slučaju Fourierovog reda periodičnih kontinuiranih signala,
- množenjem obje strane s $e^{j\Omega m}$, i integracijom preko intervala $(-\pi, \pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega m} d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \right] e^{j\Omega m} d\Omega$$

¹⁵ovaj puta u frekvencijskoj domeni



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega m} d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \right] e^{j\Omega m} d\Omega$$

- desna strana se preuređuje i izračunava:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(m-n)} d\Omega = \begin{cases} 2\pi f(m) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

pa je konačno:

$$f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega m} d\Omega$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih vremenski diskretnih signala je

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} \quad (14)$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega \quad (15)$$

- izraz za Fourierovu transformaciju vremenski diskretnih aperiodičnih signala (DTFT) konvergira za

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty,$$

ili za,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

DODATAK

Signalni i sustavi

Profesor
Branko Jeren

29. ožujka 2017.



Fourierove transformacije aperiodičnih i periodičnih signala

- Fourierovu transformaciju vremenski aperiodičnih signala provodimo pomoću parova jednadžbi označenih s *CTFT* odnosno *DTFT*, a spektar aperiodičnih signala je kontinuiran
- Fourierovu transformaciju vremenski periodičnih signala provodimo pomoću parova jednadžbi označenih s *CTFS* odnosno *DTFS*, a spektar periodičnih signala je diskretan
- razmatramo primjenu Fourierove transformacije u slučaju operacija između
 - periodičnih i aperiodičnih signala (razmatra se u ovoj cjelini)
 - vremenski diskretnih i vremenski kontinuiranih signala (razmatra se u Cjelini 7)



Fourierove transformacije aperiodičnih i periodičnih signala

- razmotrimo li $CTFT$ sinusoidnog signala $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$, lako zaključujemo da za ovaj signal ne postoji $CTFT$ jer signal nije konačne energije
- međutim, $CTFT$ vremenski omeđenog sinusoidnog signala, dakle aperiodičnog signala, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = p_\tau(t) \cos(\omega_0 t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \frac{\tau}{2} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}} + \frac{\tau}{2} \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}} \end{aligned}$$



Fourierova transformacija vremenski omeđenog sinusoidnog signala

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

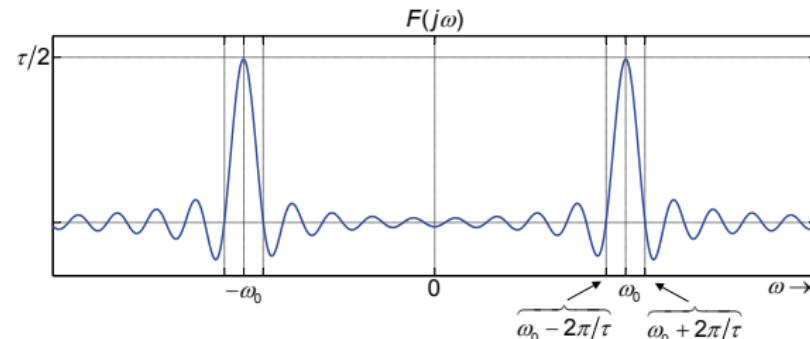
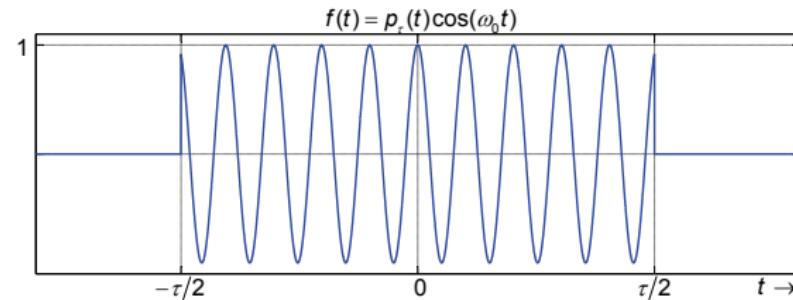
Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvenčijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvenčijskoj
domeni

Dualnost
Spektar vrem.
omeđenih i
neomeđenih
signala



- prepoznajemo kako za $\tau \rightarrow \infty$ spektar prelazi u Diracove funkcije na frekvencijama ω_0 i $-\omega_0$



Fourierova transformacija periodičnih signala

- već je pokazano kako je Fourierova transformacija Diracove funkcije konstanta, te kako je Fourierova transformacija konstante Diracova funkcija (svojstvo dualnosti)
- isto tako je pokazano kako je Fourierova transformacija pomaknute Diracove funkcije kompleksna eksponencijala
- može se zaključiti da će, primjenom svojstva dualnosti, pomaknuta Diracova funkcija, u frekvencijskom području, za inverznu transformaciju imati kompleksnu eksponencijalu u vremenskoj domeni
- razmotrimo signal $f(t), \forall t \in \mathbb{R}$, čija je Fourierova transformacija Diracova funkcija, težine (intenziteta) 2π , na frekvenciji $k\omega_0$
- *ICTFT* ovog impulsa je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{jk\omega_0 t}$$



Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala

- Fourierova transformacija signala $e^{jk\omega_0 t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, je

$$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

- zaključujemo kako će za proizvoljni periodični signal, prikazan Fourierovim redom,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$$

Fourierova transformacija biti, za $\forall \omega \in \mathbb{R}$, i $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$F(j\omega) = \text{CTFT} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

dakle, niz Diracovih funkcija, intenziteta $2\pi F_k$, koji se pojavljuju na frekvencijama $k\omega_0$



Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala

- zaključno: Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

gdje su F_k koeficijenti Fourierovog reda periodičnog signala, a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ osnovna frekvencija signala $f(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$



Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer pravokutni signal

- određuje se *CTFT* periodičnog pravokutnog signala prikazanog na slici na narednoj prikaznici
- Fourierovi koeficijenti pri razvoju ovog signala u *CTFS* su prije izračunati

$$F_k = A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}}$$

pa je *CTFT* zadanog periodičnog vremenski kontinuiranog pravokutnog signala

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= 2\pi \frac{A\tau}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_0 \tau}{2}}{\frac{k\omega_0 \tau}{2}} \delta(\omega - k\omega_0)$$



Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer pravokutni signal

Signali i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost

Konvolucija u
vremenskoj
domeni

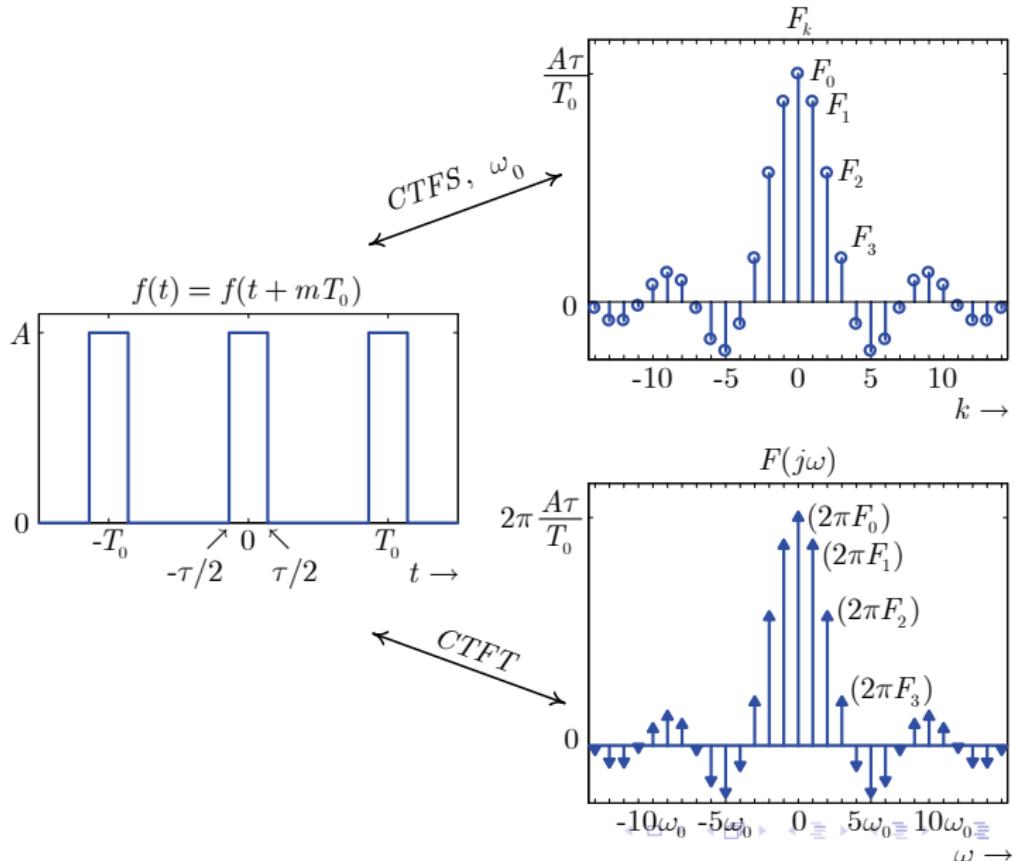
Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvenčijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvenčijskoj
domeni

Dualnost

Spektar vrem.
omedenih i
neomedenih
signala

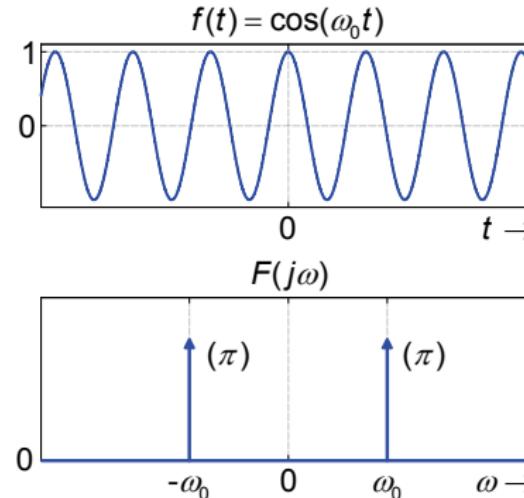




Fourierova transformacija sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija svevremenskog sinusoidnog signala $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} CTFT\{\cos(\omega_0 t)\} &= CTFT\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$





Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer sinusoidnog signala

- određuje se Fourierova transformacija sivevremenskog sinusoidnog signala $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} CTFT\{\sin(\omega_0 t)\} &= CTFT\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \\ &= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

- općenito, za sivevremenski sinusoidni signal, vrijedi

$$A \cos(\omega_0 t + \theta) \xleftrightarrow{CTFT} \pi A e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0)$$



Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- određuje se Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{comb}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- kako se radi o periodičnom signalu, s periodom¹ T ,
moguće ga je prikazati pomoću Fourierovog reda

$$\text{comb}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

- jer su Fourierovi koeficijenti

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

¹Oznake T i $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ izabrane i prilagođene za kasniju uporabu



Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

- pa se prema izrazu za *CTFT* periodičnih signala, periode $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_s)$$

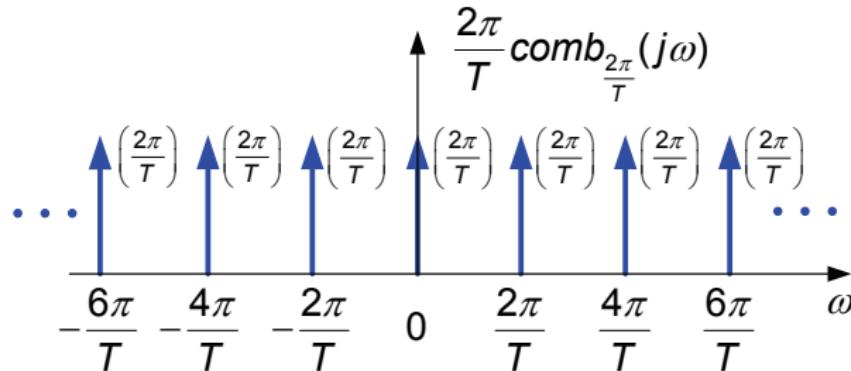
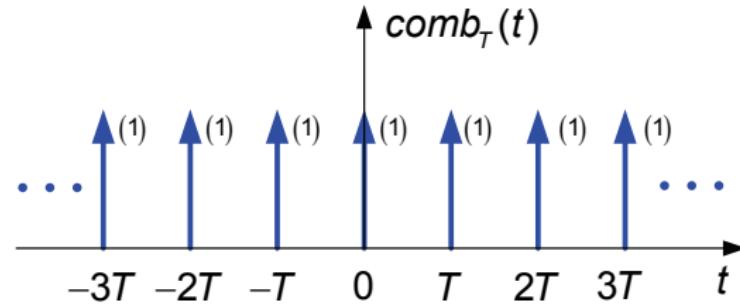
određuje Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} CTFT\{comb_T(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T} \delta(\omega - k\omega_s) = \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = \frac{2\pi}{T} comb_{\frac{2\pi}{T}}(j\omega) \end{aligned}$$



Fourierova transformacija niza Diracovih δ funkcija





Fourierova transformacija periodičnih vremenski diskretnih signala

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvencijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni

Dualnost
Spektar vrem.
omeđenih i
neomeđenih
signala

- DTFT za periodičan vremenski diskretan eksponencijalni signal (izvod identičan vremenski kontinuiranom eksponencijalnom signalu, uočiti periodičnost spektra!) je

$$e^{j\Omega_1 n} \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_1 - m \cdot 2\pi)$$

- iz ove transformacije slijede i transformacije, za $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$1 = e^{j0n} \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$$

$$\cos(\Omega_1 n) \xleftrightarrow{DTFT} \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_1 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi m)$$

$$\sin(\Omega_1 n) \xleftrightarrow{DTFT} j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_1 - 2\pi m) - j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi m)$$



Fourierova transformacija periodičnih vremenski diskretnih signala

- isto tako, iz *DTFS* za periodičan vremenski diskretan signal, periode N ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\Omega_0 n},$$

gdje su $F_k = F_{k+mN}$, koeficijenti *DTFS*, isto periode N , te korištenjem

$$e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi)$$

izražavamo *DTFT* proizvoljnog periodičnog vremenski diskretnog signala f kao

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

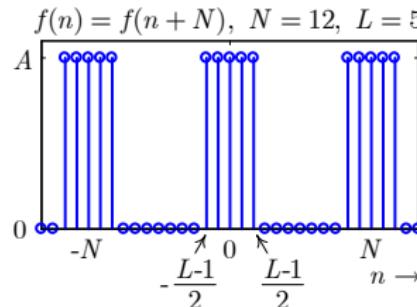
Linearnost
Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvenčijskoj
domeni
Konvolucija u
frekvenčijskoj
domeni

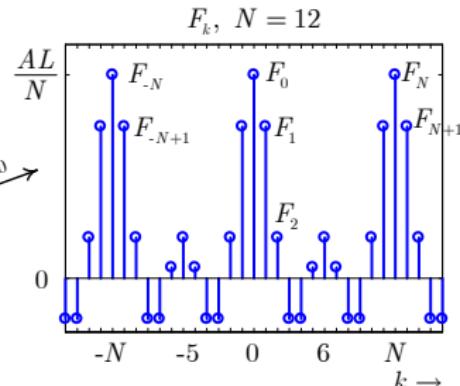
Dualnost
Spektar vrem.
omedjenih i
neomedjenih
signala

Fourierova transformacija periodičnih vremenski kontinuiranih signala – primjer pravokutni signal

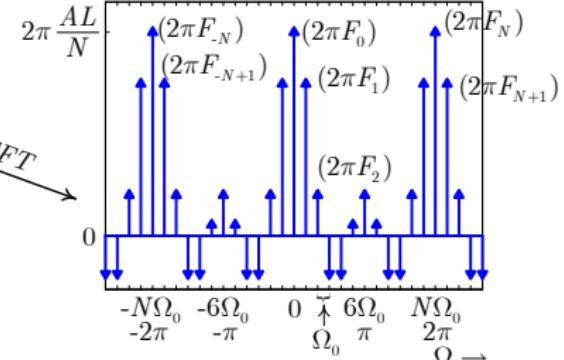


$$N\Omega_0 = N \frac{2\pi}{N} = 2\pi$$

DTFS, Ω_0



$$F(e^{j\Omega}), \Omega_0 = 2\pi/N$$





Svojstva Fourierovih transformacija – linearnost

- sve četiri transformacije zadovoljavaju svojstvo linearnosti

$$af(t) + bg(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} aF(j\omega) + bG(j\omega)$$

$$a\tilde{f}(t) + b\tilde{g}(t) \xleftrightarrow{\text{CTFS; } \omega_0} aF_k + bG_k$$

$$af(n) + bg(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} aF(e^{j\Omega}) + bG(e^{j\Omega})$$

$$a\tilde{f}(n) + b\tilde{g}(n) \xleftrightarrow{\text{DTFS; } \Omega_0} aF_k + bG_k$$

pri čemu su periodični signali \tilde{f} i \tilde{g} jednake osnovne
periode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ odnosno $N = \frac{2\pi}{\Omega_0}$

- izvod za DTFT:

$$\text{DTFT}\{af(n) + bg(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [af(n) + bg(n)]e^{-j\Omega n}$$

$$= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-j\Omega n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\Omega n} = aF(e^{j\Omega}) + bG(e^{j\Omega})$$



Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- razmotrimo svojstvo simetričnosti za *CTFT*
- iz $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ slijedi

$$F^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{j\omega t} dt \quad (1)$$

za realan signal $f(t)$ vrijedi $f(t) = f^*(t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$ pa je

$$F^*(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t} dt}_{F(-j\omega)}$$

što upućuje na konjugiranu simetričnost kompleksnog
signala spektra $F(j\omega)$

$$F^*(j\omega) = F(-j\omega)$$



Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- prije je pokazano da za konjugirano simetričan kompleksni signal vrijedi

$$\operatorname{Re}\{F(j\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(-j\omega)\} \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\{F(j\omega)\} = -\operatorname{Im}\{F(-j\omega)\}$$

odnosno

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)| \quad \text{i} \quad \angle F(j\omega) = -\angle F(-j\omega)$$

- zaključujemo da je amplitudni spektar realnog signala parna, a fazni spektar realnog signala neparna funkcija, te da je realni dio spektra realnog signala paran, a imaginarni dio spektra neparan signal (već u više navrata naglašavano)
- na sličan način pokazuju se svojstva simetričnosti za ostale Fourierove transformacije



Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- razmatra se spektar realnog i parnog vremenski kontinuiranog signala za koji zbog $f^*(t) = f(t)$ i $f(t) = f(-t)$ vrijedi

$$f^*(t) = f(-t)$$

uvrštenjem u jednadžbu (1)

$$\begin{aligned} F^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j(-\omega)t} dt = |\tau = -t| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F(j\omega) \end{aligned}$$

- gornja jednakost vrijedi samo kada je imaginarni dio $F(j\omega)$ jednak nuli, dakle kada je $F(j\omega)$ realan, što potvrđuje prije kazano da je spektar parnog realnog signala realan



Svojstva Fourierovih transformacija – simetričnost

- prethodna razmatranja svojstva simetričnosti spektra pri izračunu $CTFT$ se mogu na sličan način proširiti na preostale Fourierove transformacije

transformacija	realni signal	parni realni signal
$CTFT$	$F^*(j\omega) = F(-j\omega)$	$F^*(j\omega) = F(j\omega)$
$CTFS$	$F_k^* = F_{-k}$	$F_k^* = F_k$
$DTFT$	$F^*(e^{j\Omega}) = F(e^{-j\Omega})$	$F^*(e^{j\Omega}) = F(e^{j\Omega})$
$DTFS$	$F_k^* = F_{-k}$	$F_k^* = F_k$
	spektar konjugirano simetričan	spektar realan



Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija aperiodičnih signala u vremenskoj domeni

- određujemo konvoluciju dva aperiodična vremenski diskretna signala $f(n)$ i $g(n)$, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, čiji su spektri $F(e^{j\Omega})$ i $G(e^{j\Omega})$, za $\forall \Omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} DTFT\{(f * g)(n)\} &= DTFT\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m)\right\} = \\ &= F(e^{j\Omega})G(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

izvod:

$$\begin{aligned} DTFT\{(f * g)(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m) \right] e^{-j\Omega n} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n-m)e^{-j\Omega n} \right] \end{aligned}$$

zamjenom $n - m = k$ slijedi



Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija aperiodičnih signala u vremenskoj domeni

- slijedi nastavak izvoda s prethodne prikaznice

$$\begin{aligned} DTFT\{(f * g)(n)\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\Omega(m+k)} \right] \\ &= \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{-j\Omega m}}_{F(e^{j\Omega})} \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\Omega k} \right]}_{G(e^{j\Omega})} \\ &= F(e^{j\Omega}) G(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

- slično se pokazuje da za konvoluciju aperiodičnih vremenski kontinuiranih signala vrijedi

$$CTFT\{(f * g)(t)\} = F(j\omega) G(j\omega)$$



Svojstvo konvolucije aperiodičnih signala u vremenskoj domeni – primjer

- pokazano je kako je DTFT pravokutnog signala,

$$p_L(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

$$DTFT\{p_L(n)\} = \begin{cases} L, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)} \frac{\sin(\frac{\Omega L}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$

$$DTFT\{(p_L * p_L)(n)\} = DTFT\{p_L(n)\} DTFT\{p_L(n)\}$$

$$DTFT\{(p_L * p_L)(n)\} = \begin{cases} L^2, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \dots \\ \left[e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)} \frac{\sin(\frac{\Omega L}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \right]^2, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \dots \end{cases}$$

$$DTFT\{(p_5 * p_5)(n)\} = \begin{cases} 25, & \Omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ e^{-j4\Omega} \frac{\sin^2(\frac{5\Omega}{2})}{\sin^2(\frac{\Omega}{2})}, & \Omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \end{cases}$$



Svojstvo konvolucije aperiodičnih signala u vremenskoj domeni – primjer

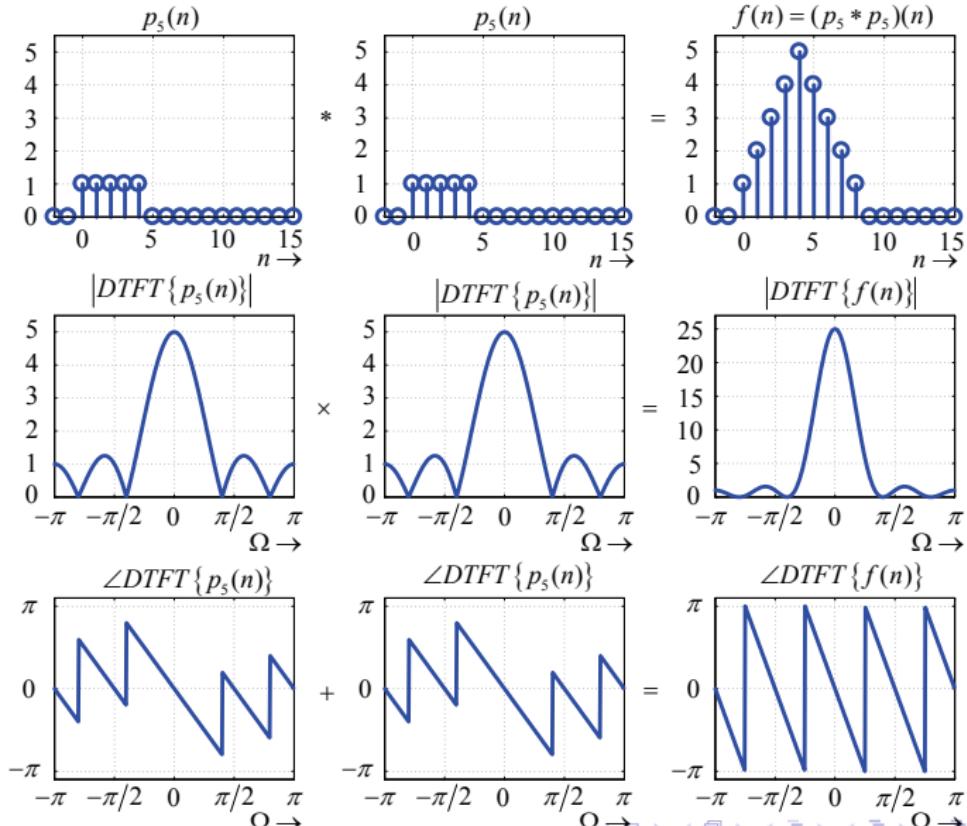
Signalni i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala
DTFT
periodičnih
signala
Linearnost
Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni
Pomak u
frekvencijskoj
domeni
Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni
Dualnost
Spektar vrem.
omedjenih i
neomedjenih
signala





Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija periodičnih signala u vremenskoj domeni

- za periodične vremenski diskretne signale f i g , osnovne periode N , definiramo periodičnu konvoluciju

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)g(n-m)$$

- za periodične vremenski kontinuirane signale f i g , osnovne periode T_0 , definiramo periodičnu konvoluciju

$$(f \circledast g)(t) = \int_0^{T_0} f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

- pokazuje se da vrijedi (izvod za DTFS u dodatku)

$$(f \circledast g)(n) \xleftarrow{DTFS; \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}} NF_k G_k$$

$$(f \circledast g)(t) \xleftarrow{CTFS; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}} T_0 F_k G_k$$



Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija u vremenskoj domeni

- zaključujemo razmatranje svojstva konvolucije periodičnih signala u vremenskoj domeni sljedećom tablicom

$(f * g)(t)$	\xleftrightarrow{CTFT}	$F(j\omega)G(j\omega)$
$(f \circledast g)(t)$	$\xleftrightarrow{CTFS; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$	$T_0 F_k G_k$
$(f * g)(n)$	\xleftrightarrow{DTFT}	$F(e^{j\Omega})G(e^{j\Omega})$
$(f \circledast g)(n)$	$\xleftrightarrow{DTFS; \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}}$	$N F_k G_k$



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u vremenskoj domeni

- za $F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \Omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$DTFT\{f(n - m)\} = e^{-j\Omega m} F(e^{j\Omega})$$

izvod:

$$DTFT\{f(n - m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n - m) e^{-j\Omega n}$$

zamjenom $n - m = r$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(r) e^{-j\Omega(m+r)}$$

$$= e^{-j\Omega m} \underbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(r) e^{-j\Omega r}}_{F(e^{j\Omega})} = e^{-j\Omega m} F(e^{j\Omega})$$



Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – pomak u vremenskoj domeni

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

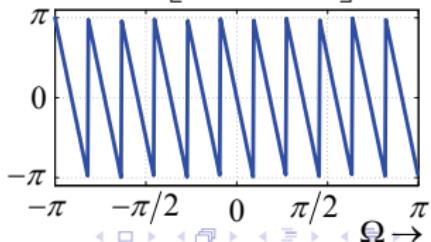
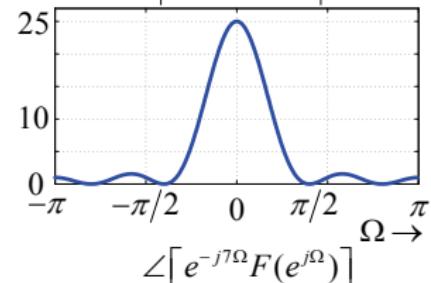
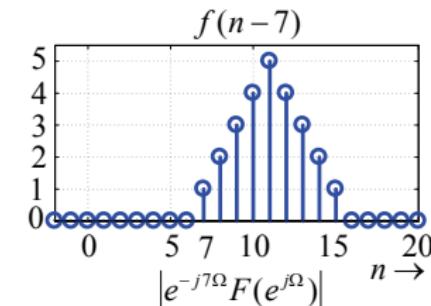
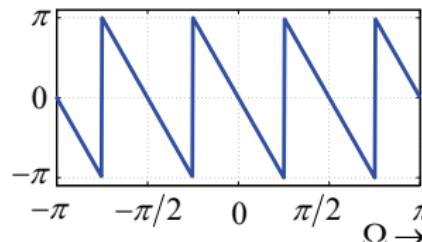
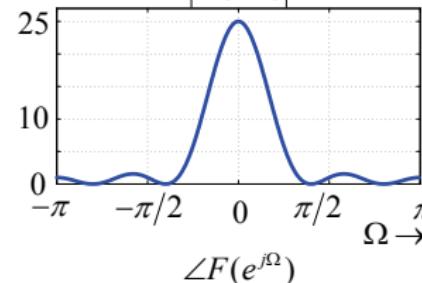
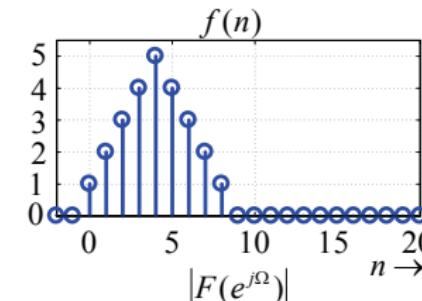
Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvencijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni

Dualnost

Spektar vrem.
omedenih i
neomedenih
signala





Svojstva Fourierovih transformacija – pomak u vremenskoj domeni

- na sličan način se pokazuje svojstvo pomaka u vremenskoj domeni ostalih Fourierovih transformacija

$f(t - t_1)$	$\xleftarrow{\text{CTFT}}$	$e^{-j\omega t_1} F(j\omega)$
$f(t - t_1)$	$\xleftarrow{\text{CTFS; } \omega_0}$	$e^{-jk\omega_0 t_1} F_k$
$f(n - m)$	$\xleftarrow{\text{DTFT}}$	$e^{-j\Omega m} F(e^{j\Omega})$
$f(n - m)$	$\xleftarrow{\text{DTFS; } \Omega_0}$	$e^{-jk\Omega_0 m} F_k$



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u frekvencijskoj domeni

- za $F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \Omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$DTFT\{e^{j\Omega_1 n} f(n)\} = F(e^{j(\Omega - \Omega_1)})$$

izvod:

$$DTFT\{e^{j\Omega_1 n} f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_1 n} f(n) e^{-j\Omega n}$$

$$DTFT\{e^{j\Omega_1 n} f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j(\Omega - \Omega_1)n} = F(e^{j(\Omega - \Omega_1)})$$

primjer: $\Omega_1 = \frac{\pi}{4}$

$$DTFT\{e^{j\frac{\pi}{4}n} f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j(\Omega - \frac{\pi}{4})n} = F(e^{j(\Omega - \frac{\pi}{4})})$$



Signalni i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

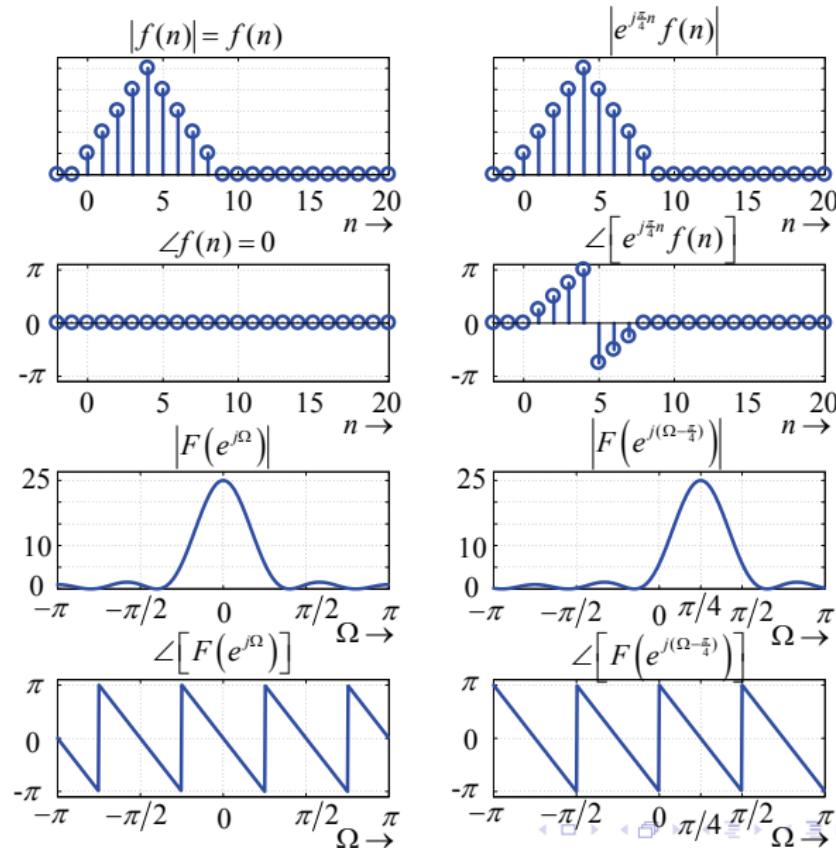
Pomak u
frekvenčijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvenčijskoj
domeni

Dualnost

Spektar vrem.
omedjenih i
neomedjenih
signala

Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – pomak u frekvenčijskoj domeni





Svojstva Fourierovih transformacija – pomak u frekvencijskoj domeni

- na sličan način se pokazuje svojstvo pomaka u frekvencijskoj domeni ostalih Fourierovih transformacija

$$\begin{array}{ccc} e^{j\omega_1 t} f(t) & \xleftrightarrow{\text{CTFT}} & F(j(\omega - \omega_1)) \\ e^{jk_1 \omega_0 t} f(t) & \xleftrightarrow{\text{CTFS; } \omega_0} & F_{k-k_1} \\ e^{j\Omega_1 n} f(n) & \xleftrightarrow{\text{DTFT}} & F(e^{j(\Omega - \Omega_1)}) \\ e^{jk_1 \Omega_0 n} f(n) & \xleftrightarrow{\text{DTFS; } \Omega_0} & F_{k-k_1} \end{array}$$



Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija u frekvencijskoj domeni

- pokazuje se kako umnošku signala u vremenskoj domeni odgovara konvolucija njihovih spektara u frekvencijskoj domeni
- spektar vremenski diskretnih signala je periodičan pa se definira periodična konvolucija
- svojstvo konvolucije u frekvencijskoj domeni često se u literaturi naziva i svojstvo umnoška u vremenskoj domeni



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvenčijskoj domeni

- uz $F(e^{j\Omega}) = DTFT\{f(n)\}$, i $G(e^{j\Omega}) = DTFT\{g(n)\}$,
 $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \Omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$f(n)g(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})G(e^{j(\Omega-\psi)}) d\psi = \frac{1}{2\pi}(F \circledast G)(e^{j\Omega})$$

izvod:

$$\begin{aligned} DTFT\{f(n)g(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(n)g(n)]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})e^{j\psi n} d\psi \right] g(n)e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j(\Omega-\psi)n} \right] d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\psi})G(e^{j(\Omega-\psi)}) d\psi = \frac{1}{2\pi}(F \circledast G)(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- određuje se $DTFT$ umnoška svezremenske vremenski diskretne sinusoide, $f(n) = \cos(\Omega_0 n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i aperiodičnog vremenski diskretnog signala $g(n)$,
- Fourierova transformacija sinusoide je periodična i iznosi

$$F(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$

odnosno, za $m = 0$,

$$F(e^{j\Omega}) = \pi\delta(\Omega + \Omega_0) + \pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvenčijskoj domeni

- pa je

$$DTFT\{\cos(\Omega_0 n)g(n)\} =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\pi\delta(\psi + \Omega_0) + \pi\delta(\psi - \Omega_0)] G(e^{j(\Omega - \psi)}) d\psi \\&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\psi + \Omega_0) G(e^{j(\Omega - \psi)}) d\psi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\psi - \Omega_0) G(e^{j(\Omega - \psi)}) d\psi \\&= \frac{1}{2} G(e^{j(\Omega + \Omega_0)}) + \frac{1}{2} G(e^{j(\Omega - \Omega_0)})\end{aligned}$$

- množenje sivevremenskog sinusoidalnog signala sa signalom g , možemo interpretirati kao modulaciju amplitudne sinusoidalnog signala sa informacijom sadržanom u signalu g
- u komunikacijama se ovaj postupak naziva amplitudna modulacija



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

- slijede dva primjera

- umnožak sinusoidalnog signala $f(n) = \cos(\frac{\pi}{4}n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, s pravokutnim signalom, $L = 16$,

$$g(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

- umnožak² dva, vremenski omeđena sinusoidalna signala

$$f(n) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}n), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

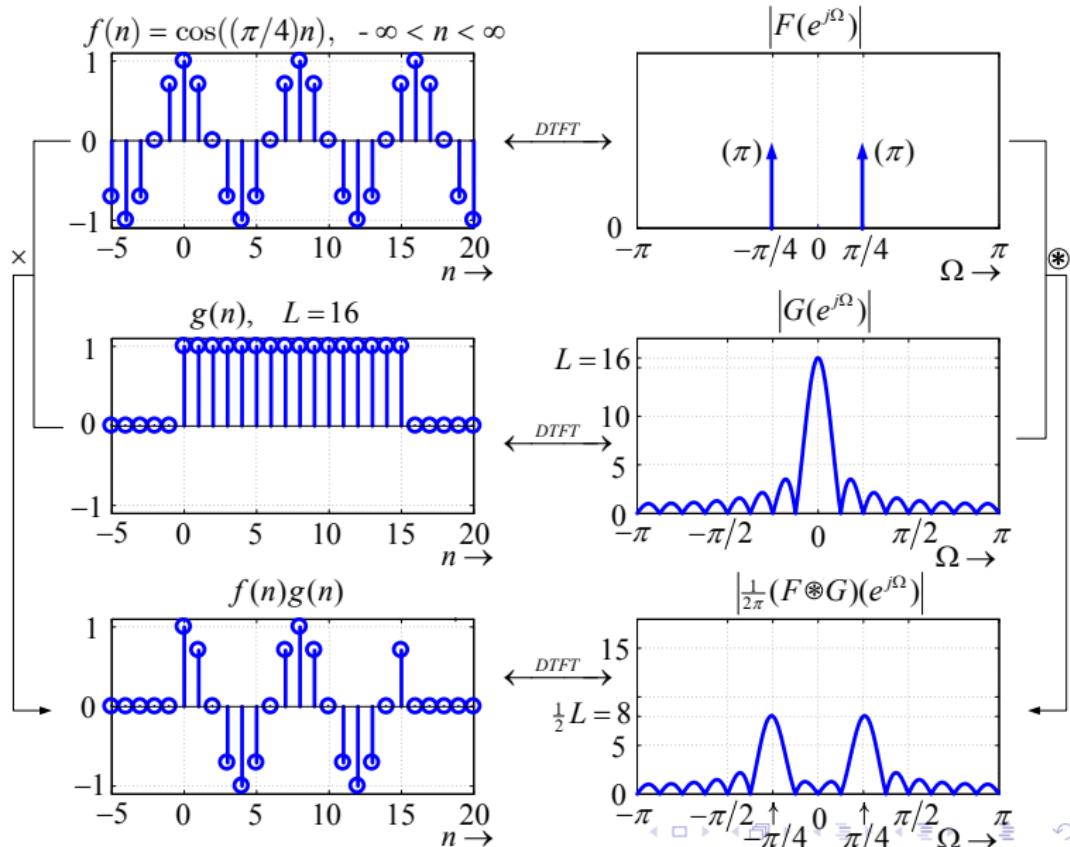
i

$$g(n) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{16}n), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases},$$

²podsjeta: $\cos(\frac{\pi}{4}n) \cos(\frac{\pi}{16}n) = \frac{1}{2} \cos(\frac{3\pi}{16}n) + \frac{1}{2} \cos(\frac{5\pi}{16}n)$



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvenčkoj domeni





Svojstva Fourierovih transformacija vremenski diskretnih signala – periodična konvolucija u frekvencijskoj domeni

Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

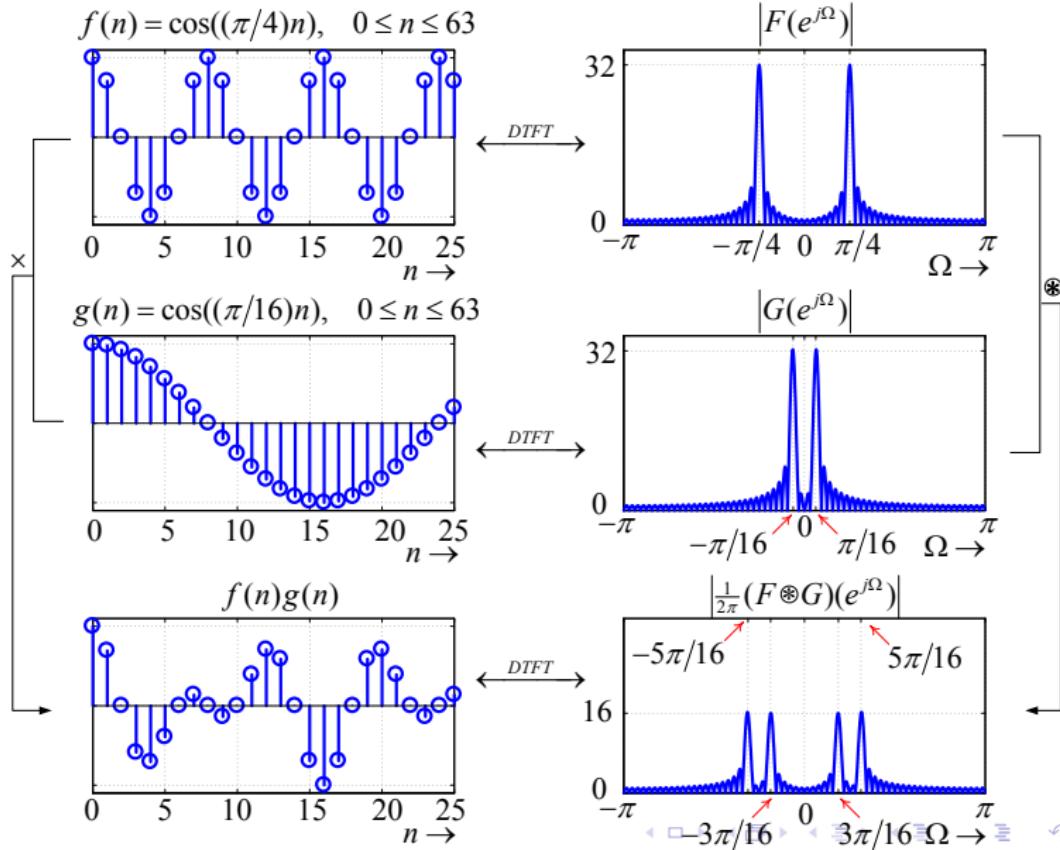
CTFT
periodičnih
signala
DTFT
periodičnih
signala
Linearnost
Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvencijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni

Dualnost
Spektar vrem.
omedenih i
neomedenih
signala





Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – konvolucija u frekvenčijskoj domeni

- uz $F(j\omega) = CTFT\{f(t)\}$, i $G(j\omega) = CTFT\{g(t)\}$,
 $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$f(t)g(t) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j(\omega - \Psi))G(j\Psi) d\Psi = \frac{1}{2\pi}(F * G)(j\omega)$$

- izvod ovog svojstva vrlo je sličan izvodu svojstva za periodičnu konvoluciju u frekvenčijskoj domeni



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – konvolucija u frekvenčijskoj domeni – primjer

- razmatramo umnožak svevremenskog sinusoidnog signala $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, za $\forall t \in \mathbb{R}$, i aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala $g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, čiji je spektar $G(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- prije je izvedeno da je

$$F(j\omega) = CTFT\{\cos(\omega_0 t)\} = CTFT\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \\ = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

pa je

$$CTFT\{\cos(\omega_0 t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\psi)G(j(\omega - \psi)) d\psi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\psi + \omega_0) + \pi\delta(\psi - \omega_0)]G(j(\omega - \psi)) d\psi \\ = \frac{1}{2}G(j(\omega + \omega_0)) + \frac{1}{2}G(j(\omega - \omega_0))$$



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – modulacija

- umnožak $g(t) \cos(\omega_0 t)$ predstavlja amplitudnu modulaciju, pri čemu se: $\cos(\omega_0 t)$ naziva prijenosni signal, $g(t)$ modulacijski signal, a sam umnožak modulirani signal
- modulacijom se postiže pomak spektra modulacijskog signala čime se omogućuje prijenos više signala po istom prijenosnom mediju
- na narednoj prikaznici dana je načelna interpretacija prijenosa dva signala, f i g , sa spektrima F i G , po istom mediju
- grafovi (a-f) ukazuju da istovremenim prijenosom (zbroj signala) signali f i g interferiraju (miješaju se) i na prijemnoj strani ih je nemoguće razdvojiti
- grafovi (g-l) ilustriraju kako primjenom modulacije (pomakom spektra) razdvajamo njihove spektre čime čuvamo informaciju o svakom od signala



Svojstva Fourierovih transformacija vremenski kontinuiranih signala – modulacija

Signalni i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

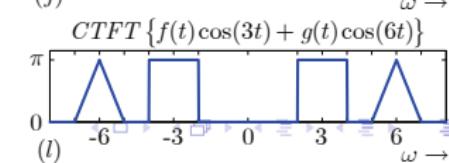
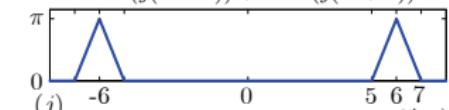
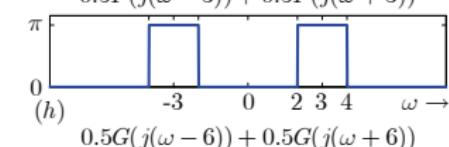
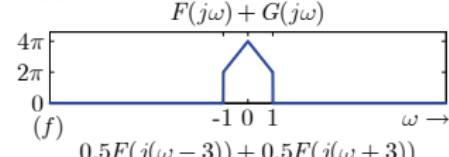
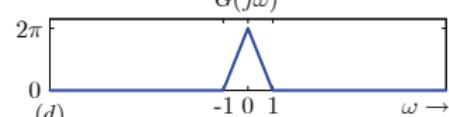
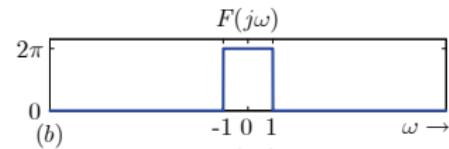
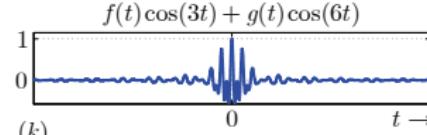
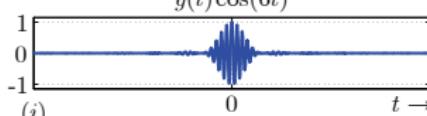
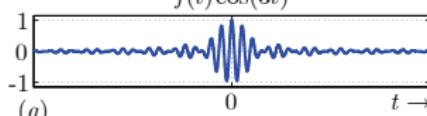
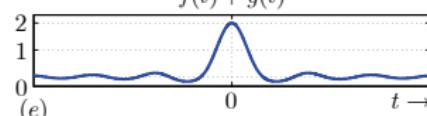
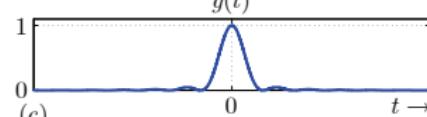
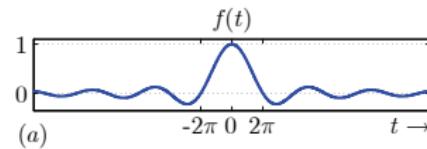
Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvenčijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvenčijskoj
domeni

Dualnost
Spektar vrem.
omedjenih i
neomedjenih
signala





Svojstva Fourierovih transformacija – konvolucija u frekvenčijskoj domeni

- navodimo svojstvo konvolucije u frekvenčijskoj domeni za sve četiri Fourierove transformacije

$f(t)g(t)$	\xleftrightarrow{CTFT}	$\frac{1}{2\pi}(F * G)(j\omega)$
$f(t)g(t)$	$\xleftrightarrow{CTFS; \omega_0=2\pi/T_0}$	$(F * G)_k$
$f(n)g(n)$	\xleftrightarrow{DTFT}	$\frac{1}{2\pi}(F \circledast G)(e^{j\Omega})$
$f(n)g(n)$	$\xleftrightarrow{DTFS; \Omega_0=2\pi/N}$	$(F \circledast G)_k$



Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- prije je, na primjeru, ilustrirano svojstvo dualnosti *CTFT*, a ovdje se ono izvodi
- pokazujemo da za $f(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} F(j\omega)$ vrijedi svojstvo dualnosti

$$F(jt) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi f(-\omega) \quad \text{ili} \quad F(-jt) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi f(\omega)$$

- izvod ovog svojstva se temelji na sličnosti *CTFT* transformacijskog para, pa višestrukim zamjenama varijabli dokazujemo ovo svojstvo
izvod: iz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

zamjenom $t = -\tau$, te množenjem obje strane s 2π , slijedi

$$2\pi f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$



Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

uz zamjenu $\omega = t$ slijedi

$$2\pi f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt)e^{-jt\tau} dt$$

finalna zamjena $\tau = \omega$ vodi nas do

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt)e^{-j\omega t} dt = CTFT\{F(jt)\}$$

čime smo dokazali³

$$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega)$$

$$\text{slično se izvodi } F(-jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(\omega)$$

³iz definicije za $F(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$, analogijom slijedi da, za $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $F(jt) = F(t)$



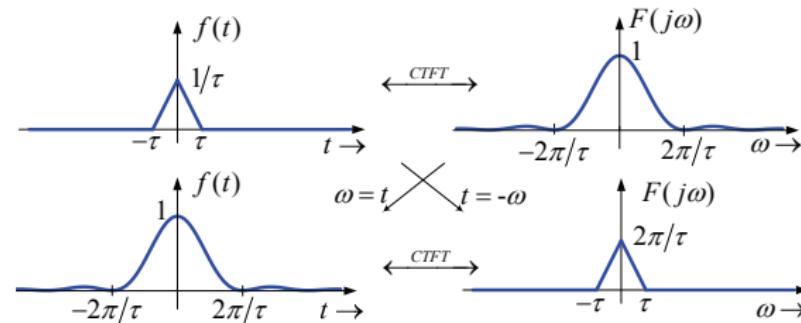
Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- svojstvo dualnosti vrijedi i za ostale Fourierove transformacije i izvodi su dani u dodatku

$CTFT$	$f(t) \xleftrightarrow{CTFT} F(j\omega)$	$F(jt) \xleftrightarrow{CTFT} 2\pi f(-\omega)$
$DTFS$	$f(n) \xleftrightarrow{DTFS; 2\pi/N} F_k$	$F_n \xleftrightarrow{DTFS; \Omega_0=2\pi/N} \frac{1}{N} f(-k)$
$DTFT$	$f(n) \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega})$	$F(e^{jt}) \xleftrightarrow{CTFS; \omega_0=1} f(-k)$
$CTFS$		



CTFT – svojstvo dualnosti – primjer



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost

Konvolucija u
vremenskoj
domeni

Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvencijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni

Dualnost

Spektar vrem.
omeđenih i
neomeđenih
signala

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{ll} \frac{1}{\tau^2}t + \frac{1}{\tau} & -\tau \leq t < 0 \\ -\frac{1}{\tau^2}t + \frac{1}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{inače} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \underbrace{\left[\frac{\sin \frac{\tau \omega}{2}}{\frac{\tau \omega}{2}} \right]^2}_{F(j\omega)} \\
 & \left. \begin{array}{ll} \left[\frac{\sin \frac{\tau t}{2}}{\frac{\tau t}{2}} \right]^2 & -\tau \leq \omega < 0 \\ -\frac{2\pi}{\tau^2}\omega + \frac{2\pi}{\tau} & 0 \leq \omega \leq \tau \\ 0 & \text{inače} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \underbrace{2\pi f(-\bar{\omega}) = 2\pi f(\omega)}_{\text{Dualnost}}
 \end{aligned}$$



DTFT/CTFS – svojstvo dualnosti – primjer

Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost

Konvolucija u
vremenskoj
domeni

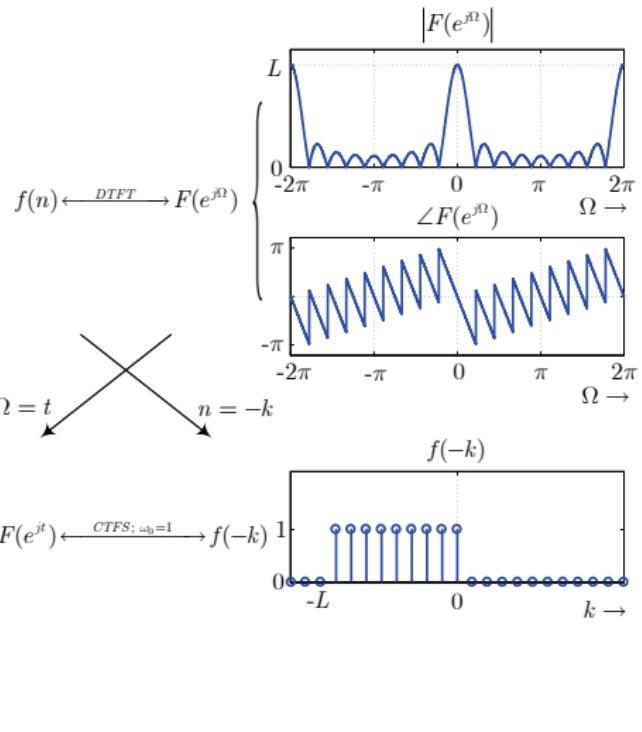
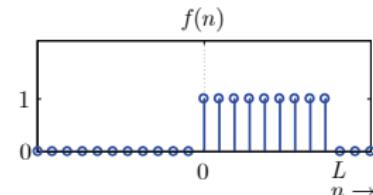
Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvencijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni

Dualnost

Spektar vrem.
omeđenih i
neomeđenih
signala

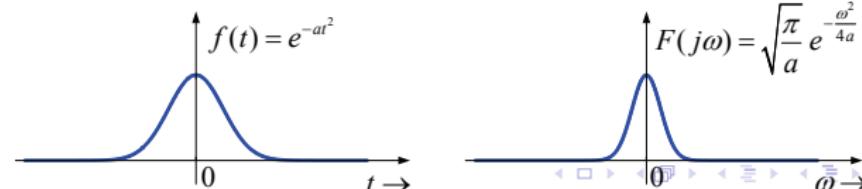




Fourierova transformacija – primjer Gaussov puls

- pokazuje se kako je Fourierova transformacija aperiodičnog vremenski kontinuiranog signala $f(t) = e^{-at^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, opet Gaussov puls

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2 + j\omega t)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(\sqrt{a}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{\omega^2}{4a}]} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{a}})^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \end{aligned}$$





Spektar vrem. omeđenih i vrem. neomeđenih signala

- iz prethodnih prikaznica zaključujemo:
 - signal neomeđen u vremenu može imati frekvenčijski neomeđen spektar - primjer Gaussovog pulsa u obje domene
 - spektar vremenski omeđenog signala je frekvenčijski neomeđen - primjer pravokutni ili trokutni puls
 - frekvenčijski omeđeni spektar je spektar vremenski neomeđenog signala - primjer signala $\sin(t)/t$, ili $\sin^2(t)/t^2$
 - signal i njegov spektar ne mogu biti istovremeno omeđeni u obje domene

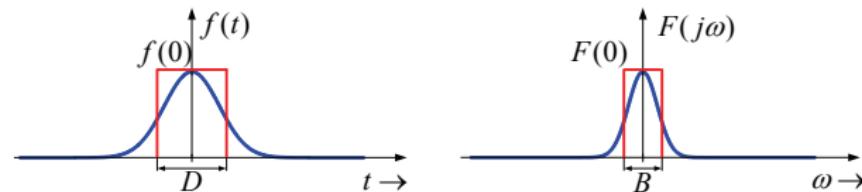


Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- u više je navrata pokazana bliska veza trajanja signala i odgovarajuće širine spektra signala
- tako u slučaju pravokutnog pulsa, spektar se "širi" kako se trajanje pulsa "skraćuje" (unatoč činjenici da je spektar pravokutnog pulsa frekvencijski neomeđen)
- isto tako, može se zaključiti kako je većina njegovog spektra ipak koncentrirana u nekom konačnom intervalu,
- taj interval možemo nazvati širina frekvencijskog pojasa spektra, i korisno je definirati odgovarajuću mjeru za trajanje signala, odnosno širinu frekvencijskog pojasa njegovog spektra

Trajanje signala i širina frekvenčijskog pojasa spektra signala

- postoji više načina definicije trajanja signala i širine frekvenčijskog pojasa spektra signala a ovdje se navodi postupak koji nazivamo, prema engleskom, pravokutnik iste površine (Equal-Area Rectangle)
- razmatramo parni realan signal



- prema ovoj definiciji trajanje signala $f(t)$ je trajanje pravokutnog signala koji je iste površine i visine kao sam signal $f(t)$
- identično se definira širina frekvenčijskog pojasa spektra signala



Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

• uz

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \& \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

i uz

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt}_{F(0)} = Df(0) \quad \& \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega}_{2\pi f(0)} = BF(0)$$

slijedi

$$D = \frac{F(0)}{f(0)} \quad \& \quad B = 2\pi \frac{f(0)}{F(0)} \quad \Rightarrow \quad DB = 2\pi$$



Trajanje signala i širina frekvenčijskog pojasa spektra signala

- očigledno su trajanje signala i širina frekvenčijskog pojasa njegovog spektra recipročni
- dakle, skraćivanje trajanja signala rezultira u širenju frekvenčijskog pojasa spektra (i obrnuto)
- zaključujemo kako je umnožak

$$(\text{trajanje signala}) \times (\text{frekvenčijski pojas spektra}) = \text{konstanta}$$

- ova činjenica je od velike važnosti u nizu primjena, a posebno u komunikacijama
- naredni primjer ilustrira utjecaj trajanja signala na njegov spektar



Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

Signali i
sistemi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

CTFT
periodičnih
signala

DTFT
periodičnih
signala

Linearnost

Simetričnost
Konvolucija u
vremenskoj
domeni

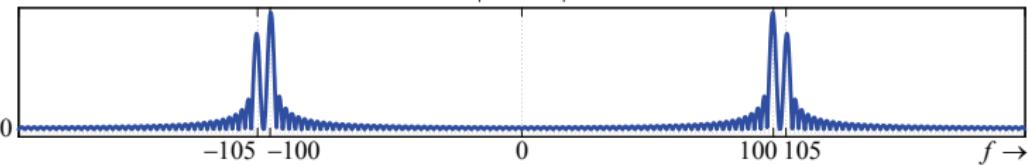
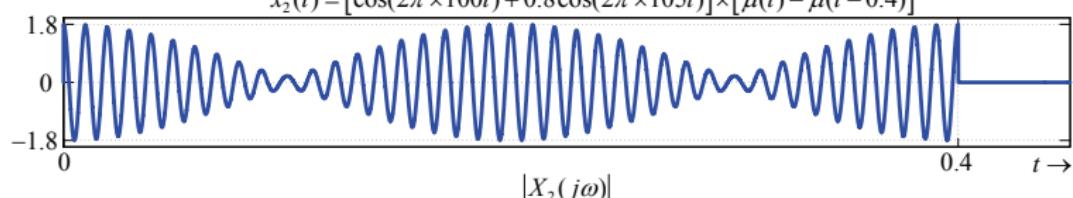
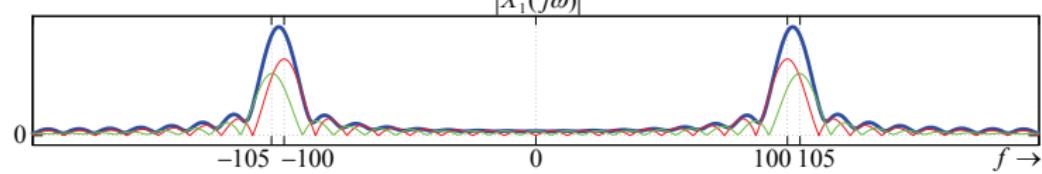
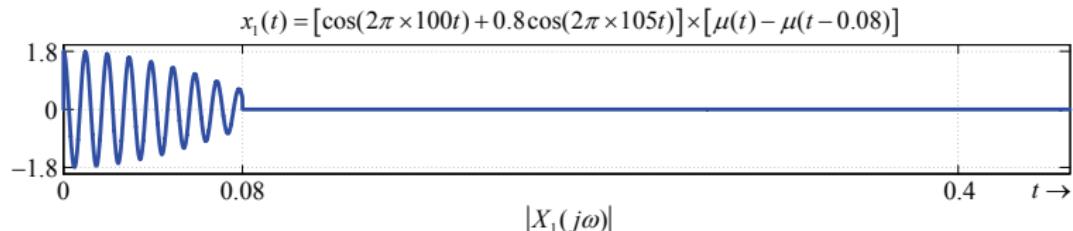
Pomak u
vremenskoj
domeni

Pomak u
frekvencijskoj
domeni

Konvolucija u
frekvencijskoj
domeni

Dualnost

Spektar vrem.
omedjenih i
neomedjenih
signala





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

DODATAK NAMJENJEN SAMOSTALNOM RADU STUDENATA



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal

- u razmatranju $DTFT$ aperiodičnih signala pokazan je izračun spektra trokutnog signala
- ovdje se spektar ovog signala određuje na drugi način (izravni)
- određuje se Fourierova transformacija aperiodičnog niza zadatog kao⁴
 $x(n) = \{\dots, 0, 0, \underline{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \dots\}$
signal se može, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, prikazati i kao

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + \\ + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) + 2\delta(n-7) + \delta(n-8)$$

⁴podcrtan nulti uzorak $x(0)$



Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodičnih signala – trokutni signal

- uzimajući u obzir Fourierovu transformaciju Kroneckerovog δ moguće je odrediti Fourierovu transformaciju signala x

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + \\ + 4\delta(n-5) + 3\delta(n-6) + 2\delta(n-7) + \delta(n-8)$$

Fourierova transformacija signala $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ je

$$X(e^{j\Omega}) = 1 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 4e^{-j3\Omega} + 5e^{-j4\Omega} + \\ + 4e^{-j5\Omega} + 3e^{-j6\Omega} + 2e^{-j7\Omega} + e^{-j8\Omega}$$

- može se zaključiti da je korištenje svojstva konvolucije pogodniji način izračuna spektra trokutnog signala
- na narednoj prikaznici prikazan je signal $x(n)$ te njegovi amplitudni i fazni spektar



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

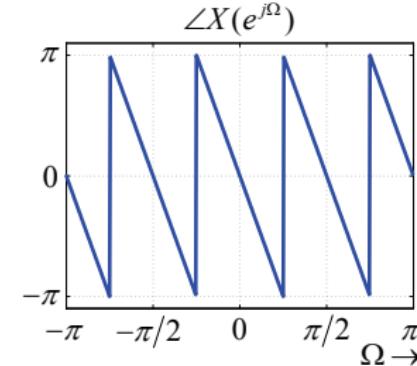
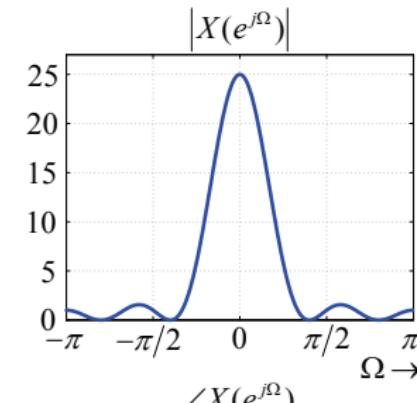
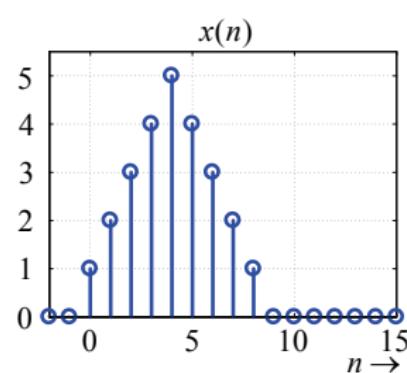
DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

Fourierova transformacija vremenski diskretnog aperiodičnog signala – trokutni signal





Svojstvo konvolucije periodičnih signala u vremenskoj domeni

- izvod svojstva konvolucije periodičnih signala u vremenskoj domeni provodimo za vremenski diskretne signale

$$(f \circledast g)(n) \xleftarrow{DTFS; \Omega_0} NF_k G_k$$

- činjenicu da su f i g periodični, naglašavamo oznakom \tilde{f} i \tilde{g} (isto tako oznakom DTFS koeficijenata \tilde{F} i \tilde{G})
- ovim izvodom se ujedno pojašnjava i definicija periodične konvolucije



DODATAK

DTFT – primjer
DTFS –
periodična
konvolucija

DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

Periodična konvolucija

- neka su $\tilde{f}(n)$ i $\tilde{g}(n)$ periodični signali čiji su DTFS

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(m) e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \quad \text{i} \quad \tilde{G}_k = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{g}(q) e^{-jk\frac{2\pi}{N}q}$$

- želimo odrediti niz $\tilde{w}(n)$ čiji je DTFS jednak $N\tilde{F}_k\tilde{G}_k$

$$\tilde{W}_k = N\tilde{F}_k\tilde{G}_k = N \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(m) e^{-jk\frac{2\pi}{N}m} \cdot \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{g}(q) e^{-jk\frac{2\pi}{N}q}$$

$$\tilde{w}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(N\tilde{F}_k\tilde{G}_k \right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(m) \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{g}(q) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-m-q)} \right] \quad (2)$$



Periodična konvolucija

- promatramo $\tilde{g}(n)$ za $0 \leq n \leq N - 1$ i dio jednadžbe (2)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}(n-m-q)} = \begin{cases} 1, & \text{za } q = (n-m) + rN \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za $\forall r \in \mathbb{Z}$

- pa (2) prelazi u jednadžbu koja podsjeća na linearnu konvoluciju i naziva se periodična konvolucija

$$\tilde{w}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(m) \tilde{g}(n-m)$$

- periodična konvolucija dvaju periodičnih vremenski diskretnih signala, perioda N , rezultira u periodičnom⁵ vremenski diskretnom signalu perioda N

⁵nizovi $\tilde{f}(m)$ i $\tilde{g}(n-m)$ su periodični po m s periodom N pa je i njihov umnožak periodičan



Periodična konvolucija

- na narednoj prikaznici su ilustrirane dvije periodične konvolucije različitih pravokutnih nizova
- može se učiti da periodična konvolucija signala $\tilde{y} \circledast \tilde{y}$ odgovara linearnoj konvoluciji ovih signala
- u slučaju periodične konvolucije signala $\tilde{x} \circledast \tilde{x}$ to nije slučaj i tu činjenicu treba uzeti u obzir
- zaključujemo: ako je trajanje linearne konvolucije jedne periode signala manje od periode periodičnog signala, tada su linearna i periodična konvolucija jednake



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

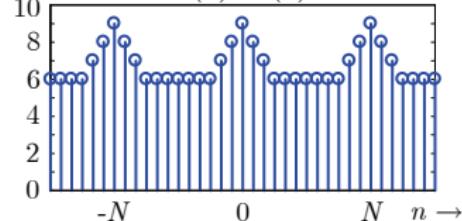
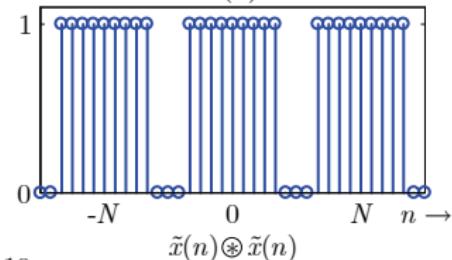
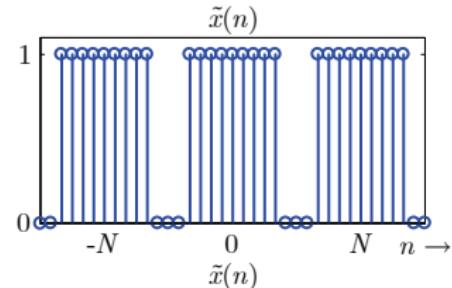
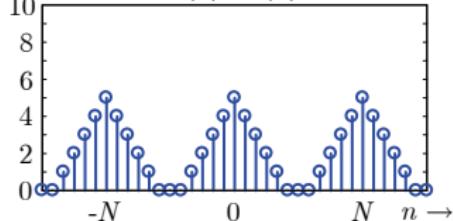
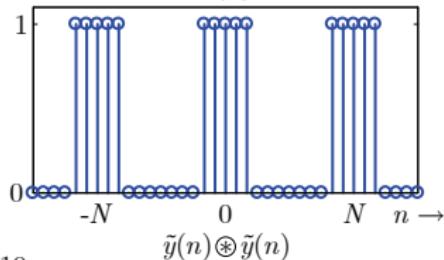
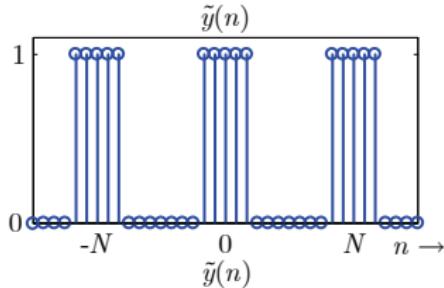
DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

Periodična konvolucija – primjer





Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- izvodimo svojstvo dualnosti za *DTFS*, dakle

$$F_n \xleftarrow{DTFS; \Omega_0=2\pi/N} \frac{1}{N} f(-k)$$

- transformacijski par

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{jk\Omega_0 n}$$

je par vrlo sličnih jednadžbi i izvod ovog svojstva i ovdje, slično izvodu za *CTFT*, provodimo nizom zamjena

- započinjemo zamjenom $n = -k'$ pa slijedi

$$f(-k') = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{-jk\Omega_0 k'} = \left| \begin{array}{c} \text{zamjenom} \\ n = k \end{array} \right| = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{-jn\Omega_0 k'}$$



Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost

- i finalno, zamjenom $k = k'$, te umnoškom obje strane s $\frac{1}{N}$,
slijedi

$$\frac{1}{N} f(-k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{-jn\Omega_0 k} = DTFS\{F_n\}$$

što znači da vrijedi

$$F_n \xleftrightarrow{DTFS; \Omega_0 = 2\pi/N} \frac{1}{N} f(-k)$$

čime je potvrđeno navedeno svojstvo dualnosti



Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost DTFT i CTFS

- uspoređuje se *CTFS* periodičnog vremenski kontinuiranog signala g

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k e^{jk\omega_0 t}$$

i *DTFT* aperiodičnog vremenski diskretnog signala f

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n}$$

- za periodu $T_0 = 2\pi$ signala g , dakle $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$ ustanovljujemo da Ω u *DTFT* odgovara t u *CTFS*, a n u *DTFT* odgovara $-k$ u *CTFS*



Svojstva Fourierovih transformacija – dualnost DTFT i CTFS

- usporedbom

$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-jkt} dt \quad \text{i} \quad f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

- ponovo zaključujemo da uloge Ω i n u *DTFT* odgovaraju ulogama t i $-k$ u *CTFS*, pa zato za

$$f(n) \xleftrightarrow{DTFT} F(e^{j\Omega})$$

vrijedi

$$F(e^{jt}) \xleftrightarrow{CTFS; \omega_0=1} f(-k)$$



DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

CTFT – vremensko skaliranje

- neka je $f(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} F(j\omega)$, tada je

$$f(at) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

izvod: za $a > 0$, uz $a = |a|$, i zamjenu $at = \tau$

$$\text{CTFT}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{j\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

za $a < 0$ i zamjenu $at = \tau$

$$\begin{aligned} \text{CTFT}\{x(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-\frac{j\omega}{a}\tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-\frac{j\omega}{a}\tau} d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor $a > 1$ rezultira u ekspanziji spektra za isti faktor
- ekspanzija $f(t)$, za $a < 1$, rezultira u kompresiji $F(j\omega)$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

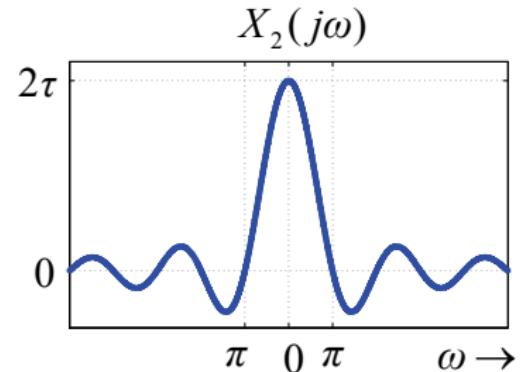
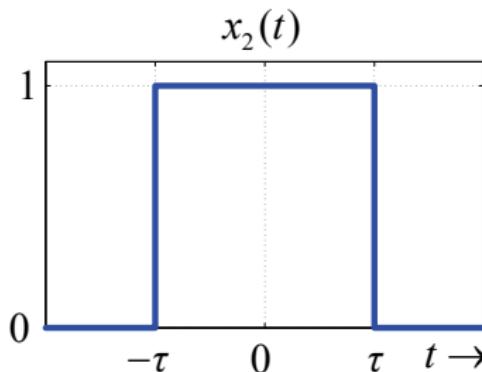
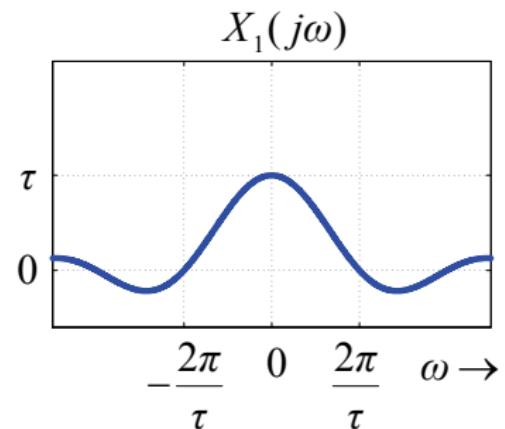
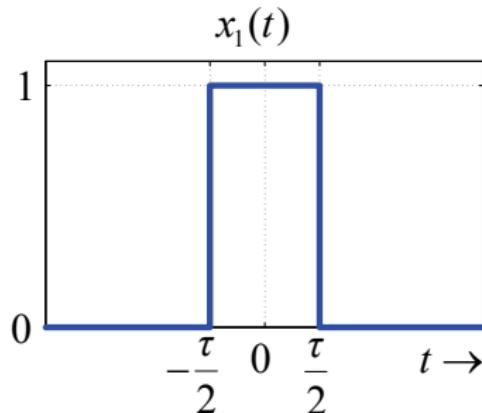
DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

CTFT – vremensko skaliranje





DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

Tablica parova osnovnih Fourierovih transformacija (CTFT)

Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\mu(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\mu(t + \frac{\tau}{2}) - \mu(t - \frac{\tau}{2})$	$\tau \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}}$
$\omega_1 \frac{\sin \frac{\omega_1 t}{2}}{\frac{\omega_1 t}{2}}$	$2\pi \left[\mu(\omega + \frac{\omega_1}{2}) - \mu(\omega - \frac{\omega_1}{2}) \right]$
$e^{-bt} \mu(t), \quad b > 0$	$\frac{1}{b+j\omega}$
$A \cos(\omega_0 t + \phi)$	$\pi A e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$



Neka svojstva Fourierove transformacije (CTFT)

Svojstvo	Vrem. domena: $x(t)$	Frek. domena: $X(j\omega)$
Linearnost	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$
Konjugiranost	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
V. inverzija	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Dualnost	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Dualnost	$X(-jt)$	$2\pi x(\omega)$
V. skaliranje	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
V. pomak	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Modulacija	$x(t)e^{j\omega t_0}$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Modulacija	$x(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} X(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} X(j(\omega + \omega_0))$
Derivacija	$\frac{d^k x(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k X(j\omega)$
Konvolucija	$(x_1 * x_2)(t)$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
Množenje	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$



DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

Tablica parova osnovnih Fourierovih transformacija (DTFT)

Vrem. domena: $x(n)$	Frek. domena: $X(e^{j\Omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}$
$\mu(n)$	$\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$
1	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$
$\begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$	$e^{-j\frac{\Omega}{2}(L-1)} \frac{\sin(\frac{\Omega L}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$
$\alpha^n \mu(n), \quad \alpha < 1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$
$(n+1)\alpha^n \mu(n), \quad \alpha < 1$	$\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}$
$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$
$\sin(\Omega_0 n)$	$j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi m) - j\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 6.

Profesor
Branko Jeren

Svojstva
Fourierovih
transformacija

DODATAK

DTFT – primjer

DTFS –
periodična
konvolucija

DTFS –
dualnost

DTFT/CTFS –
dualnost

CTFT –
vremensko
skaliranje

Tablice osnovnih
transformacija i
svojstava –
CTFT i DTFT

Neka svojstva Fourierove transformacije (DTFT)

Svojstvo	Vrem. domena: $x(n)$	Frek. domena: $X(e^{j\Omega})$
Linearost	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega})$
Konjugiranost	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\Omega})$
V. inverzija	$x(-n)$	$X(e^{-j\Omega})$
V. pomak	$x(n - n_0)$	$e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$
F. pomak	$x(n)e^{j\Omega_0 n}$	$X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$
Modulacija	$x(n) \cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2} X(e^{j(\Omega + \Omega_0)}) + \frac{1}{2} X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$
Derivacija u frek.	$nx(n)$	$(j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega})$
Konvolucija	$(x_1 * x_2)(n)$	$X_1(e^{j\Omega}) X_2(e^{j\Omega})$
Množenje	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\psi}) X_2(e^{j(\Omega - \psi)}) d\psi$
Konjugirana simetrija za realne signale	$x(n)$ realan signal	$X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$ $Re\{X(e^{j\Omega})\} = Re\{X(e^{-j\Omega})\}$ $Im\{X(e^{j\Omega})\} = -Im\{X(e^{-j\Omega})\}$ $ X(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega}) $ $\angle X(e^{j\Omega}) = -\angle X(e^{-j\Omega})$
Simetrija za realne i parne signale	$x(n)$ realan i paran	$X(e^{j\Omega})$ realan i paran



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

DFT

Signalni i sustavi

Profesor
Branko Jeren

5. travnja 2017.



Digitalna obradba kontinuiranih signala

- digitalna obradba vremenski kontinuiranih signala sastoji se od tri osnovna koraka
 - pretvorba vremenski kontinuiranog signala u vremenski diskretan signal – očitavanje signala
 - obradba vremenski diskretnog signala
 - pretvorba obrađenog vremenski diskretnog signala u vremenski kontinuiran signal – rekonstrukcija signala
- ovdje se pokazuje pod kojim uvjetima treba diskretizirati vremenski kontinuirani signal kako bi se mogao obrađivati kao vremenski diskretan signal
- također se pokazuje mogućnost rekonstrukcije vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signalata

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Anitialiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT



Očitavanje vremenski kontinuiranog signala

- aperiodični vremenski diskretan signal možemo generirati očitavanjem vremenski kontinuiranog aperiodičnog signala
- pokazuje se da je postupak očitavanja ekvivalentan amplitudnoj modulaciji periodičnog niza impulsa
- očitavani signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, množi se s nizom Diracovih δ impulsa kako bi se generirao novi signal $x_s(t)$

$$\begin{aligned}x_s(t) &= x(t) \text{comb}_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)\end{aligned}$$

- očitavanje, ili vremensku diskretizaciju, vremenski kontinuiranog signala možemo interpretirati kao pridruživanje, funkciji x , niza impulsa čiji je intenzitet proporcionalan njezinim vrijednostima na mjestu impulsa



Očitavanje vremenski kontinuiranog signala

Signali i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

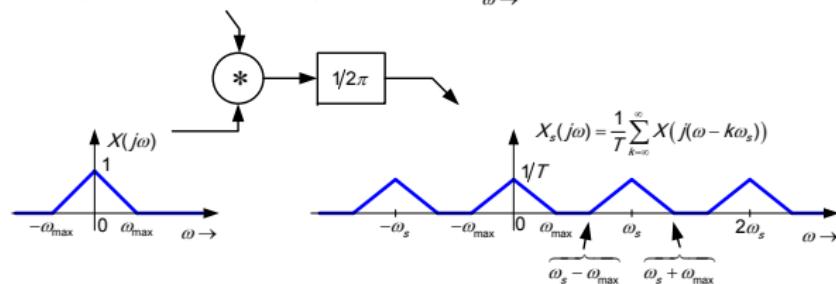
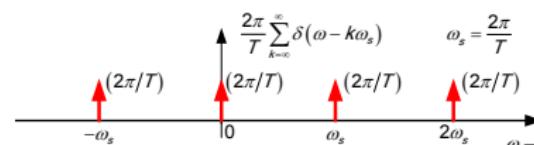
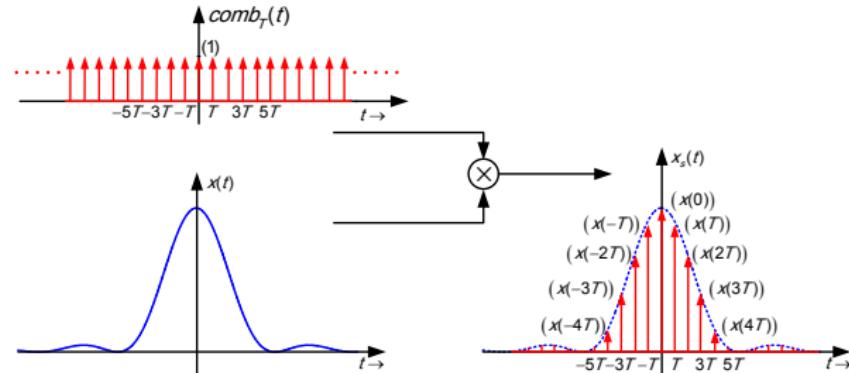
Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra





Spektar očitanog signala

- određuje se spektar signala $x_s(t) = x(t)\text{comb}_T(t)$,
 $\forall t \in \mathbb{R}$,
- umnošku signala u vremenskoj domeni odgovara konvolucija njihovih spektara (svojstvo konvolucije), a za $\forall w \in \mathbb{R}$, vrijedi $(D_{w_1}(\delta) * f)(w) = f(w - w_1)$,
vidi sis17_Cj03 prikaznica 30, pa uz prije izvedeno

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{CTFT}\{\text{comb}_T(t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

$$\text{slijedi } \text{CTFT}\{x_s(t)\} = X_s(j\omega)$$

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) * \frac{1}{2\pi} X(j\omega) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k \frac{2\pi}{T})) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Anitialiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala



Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

- razmotrimo još jednom postupak "očitavanja" postupkom modulacije niza Diracovih δ impulsa s vremenski kontinuiranim signalom $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$x_s(t) = x(t) \text{comb}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

- rezultirajući $x_s(t)$ je niz δ impulsa čiji su intenziteti (površine) jednaki vrijednostima x u trenucima $t_n = nT$
- ako izdvojimo intenzitete ovih impulsa i složimo ih u niz, nastaje vremenski diskretan niz uzoraka $x(n) \triangleq x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
- zato možemo kazati kako signal $x_s(t)$ predstavlja rezultat očitavanja vremenski kontinuiranog signala $x(t)$



Nastanak diskretnog signala očitavanjem vremenski kontinuiranog signala

Signalni i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna obrada kontinuiranih signala

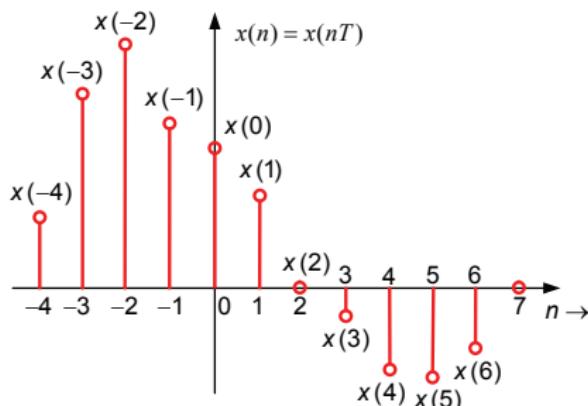
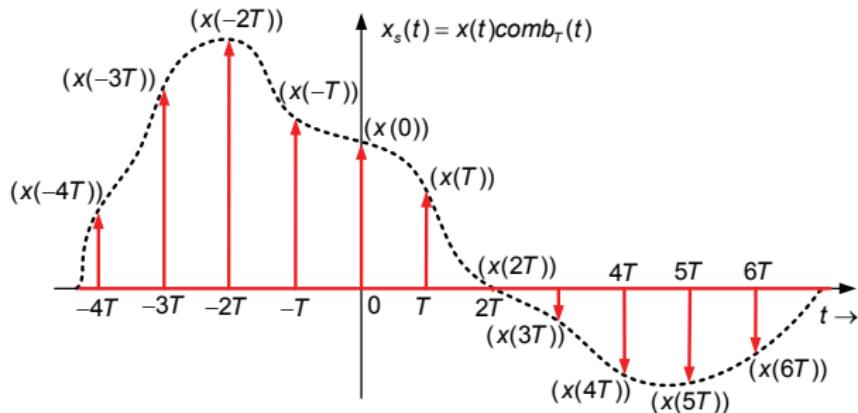
Očitavanje vremenski kontinuiranog signala

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

Obnavljanje vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija kontinuiranoga spektra

DFT





Signalni i
sustavi

Školska godina

2016/2017

Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

- usporedimo spektre ovih signala
- Fourierova transformacija signala

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT),$$

uz $CTFT\{\delta(t - nT)\} = e^{-j\omega nT}$, je¹

$$CTFT\{x_s(t)\} = X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jnT\omega}$$

¹ opet prepoznajemo kako je $X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_s}\omega}$
periodičan s $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, jer vrijedi $X_s(j(\omega + \omega_s)) =$
 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_s}(\omega + \omega_s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_s}\omega} = X_s(j\omega)$



Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala

- uz $x(n) \triangleq x(nT)$, gdje s \triangleq označavamo jednako po definiciji, i uz² $\Omega = \omega T$, Fourierovu transformaciju aperiodičnog diskretnog signala možemo izraziti kao

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jnT\omega} \triangleq \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}}_{DTFT\{x(n)\}} = X(e^{j\Omega})$$

- spektar $X_s(j\omega)$ je periodičan s periodom ω_s pa će uz,

$$\omega_s T = \omega_s \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi,$$

spektar $X(e^{j\Omega})$ biti, kao što je to prije pokazano,
periodičan s periodom 2π

²pokazano kod postupka očitavanja sinusoide



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

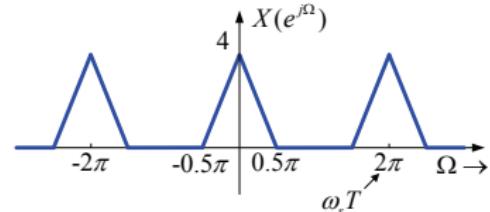
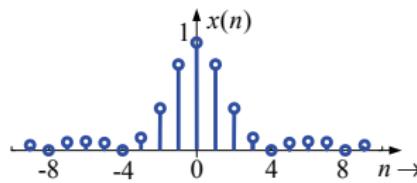
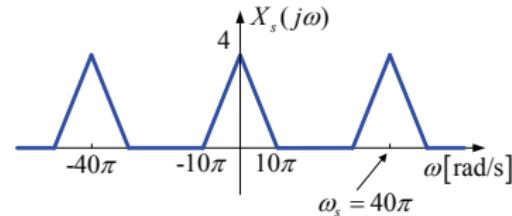
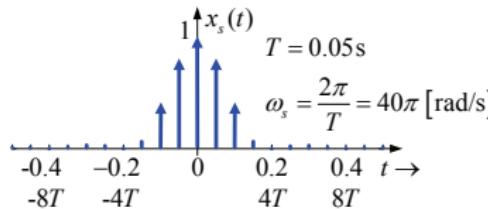
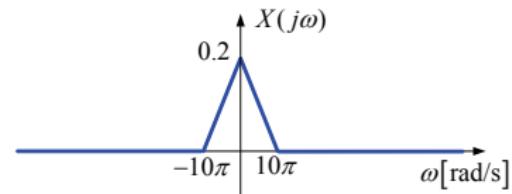
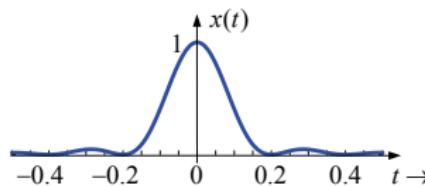
Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

Usporedba spektra očitanog vremenski kontinuiranog signala i spektra vremenski diskretnog signala





Vremenska diskretizacija očitavanjem kontinuiranog signala

- zaključujemo kako se očitavanjem kontinuiranog signala $x(t)$ čiji je spektar $X(j\omega)$, dobiva signal $x_s(t)$ čiji je spektar periodičan i vrijedi

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k \frac{2\pi}{T})) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

dakle, spektar očitanog signala $X_s(j\omega)$ je periodično ponavljeni spektar $X(j\omega)$ kontinuiranog signala

- prepostavimo da je spektar $X(j\omega)$ frekvencijski ograničen

$$X(j\omega) = 0 \text{ za } |\omega| > \omega_{max}$$

- različite frekvencije očitavanja signala $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ mogu u spektru $X_s(j\omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga je li $\omega_s - \omega_{max} > \omega_{max} \Rightarrow \omega_s > 2\omega_{max}$ ili $\omega_s - \omega_{max} < \omega_{max} \Rightarrow \omega_s < 2\omega_{max}$



Vremenska diskretizacija očitavanjem kontinuiranog signala

Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

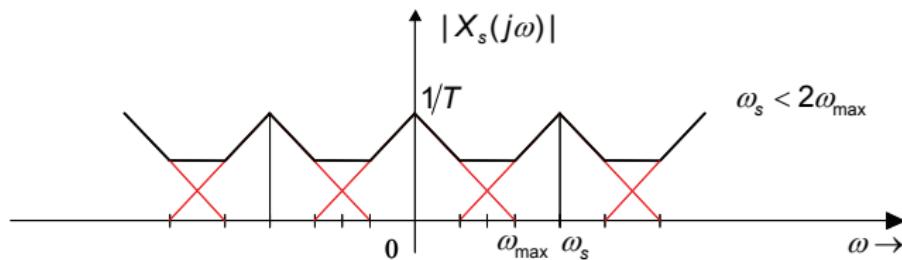
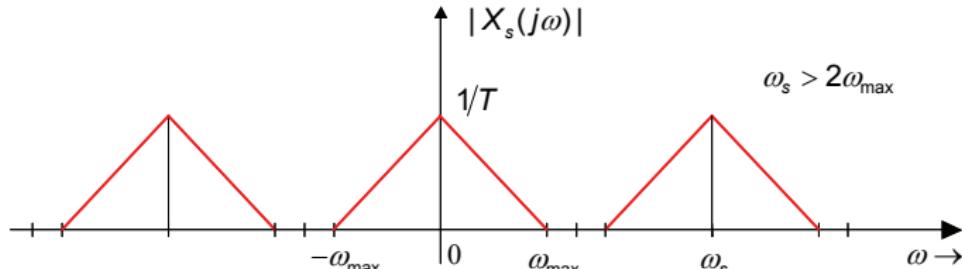
Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra



- za frekvenciju očitavanja $\omega_s < 2\omega_{max}$, na donjoj slici, javlja se preklapanje ponavljajućih sekcija spektra, i ta se pojava naziva, prema engleskoj terminologiji, aliasing



Shannonov teorem očitavanja

- vremenski diskretni signal smatramo ekvivalentnim kontinuiranom ako je moguće rekonstruirati izvorni signal $x(t)$, iz očitanog $x_s(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, odnosno, ako se iz spektra $X_s(j\omega)$ može dobiti originalni $X(j\omega)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- postupak rekonstrukcije prepostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem a to će biti moguće samo ako je spektar $X(j\omega)$ ograničen na ω_{max} te ako je frekvencija očitavanja $\omega_s > 2\omega_{max}$
- gore kazano predstavlja Shannonov teorem i možemo ga precizno iskazati kao:³

Vremenski kontinuirani signal $x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, s frekvencijama ne većim od f_{max} , može biti egzaktно rekonstruiran iz svojih očitaka $x(n) \triangleq x(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ako je očitavanje provedeno s frekvencijom $f_s = \frac{1}{T}$ koja je veća od $2f_{max}$

³teorem je iskazan, kao što je uobičajeno, frekvencijom u Hz uzimajući u obzir $\omega = 2\pi f$



Primjer očitavanja aperiodičnog vremenski kontinuiranog signal-a

- očitava se signal (slika na narednoj prikaznici)

$$x(t) = \left[\frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}} \right]^2$$

uz $\tau = 10\pi$ i $T = 0.15; 0.1; 0.05$;

- minimalna frekvencija očitavanja za koju je moguća rekonstrukcija signala x iz njegovih očitaka x_s naziva se Nyquistova frekvencija
- za ovaj primjer Nyquistova frekvencija iznosi 10 Hz
- očitavanje s $T = 0.15$ s, što znači s frekvencijom očitavanja $f_s = 6.66$ Hz, je slučaj podočitavanja i dolazi do pojave frekvencijskog aliasinga
- slučaj očitavanja s $T = 0.05$ s, dakle $f_s = 20$, predstavlja tzv. nadočitavanje i omogućuje rekonstrukciju signala primjenom realnih filtera



Očitavanje vremenski kontinuiranog signala

Signali i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

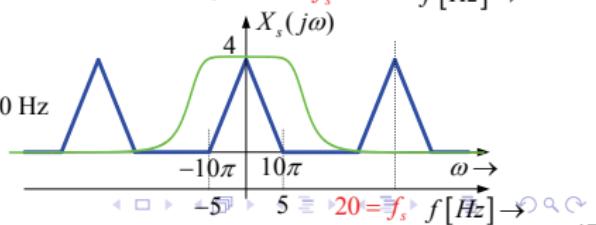
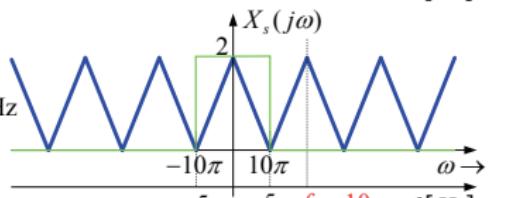
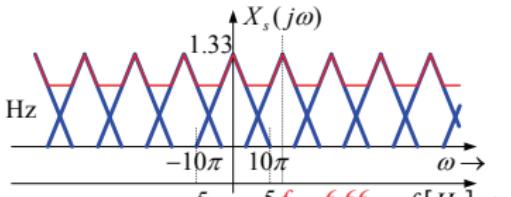
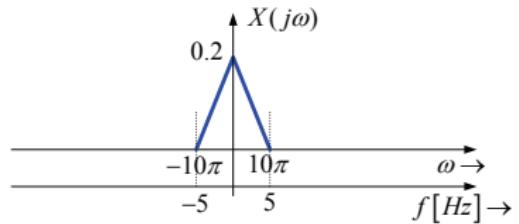
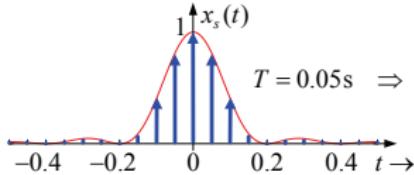
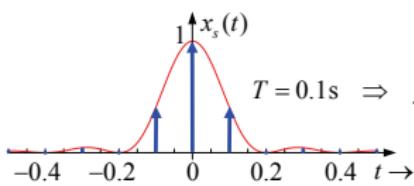
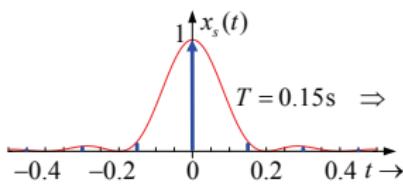
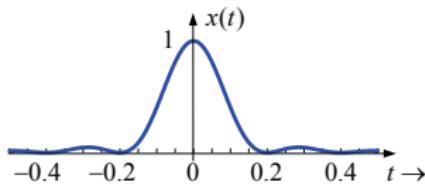
Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

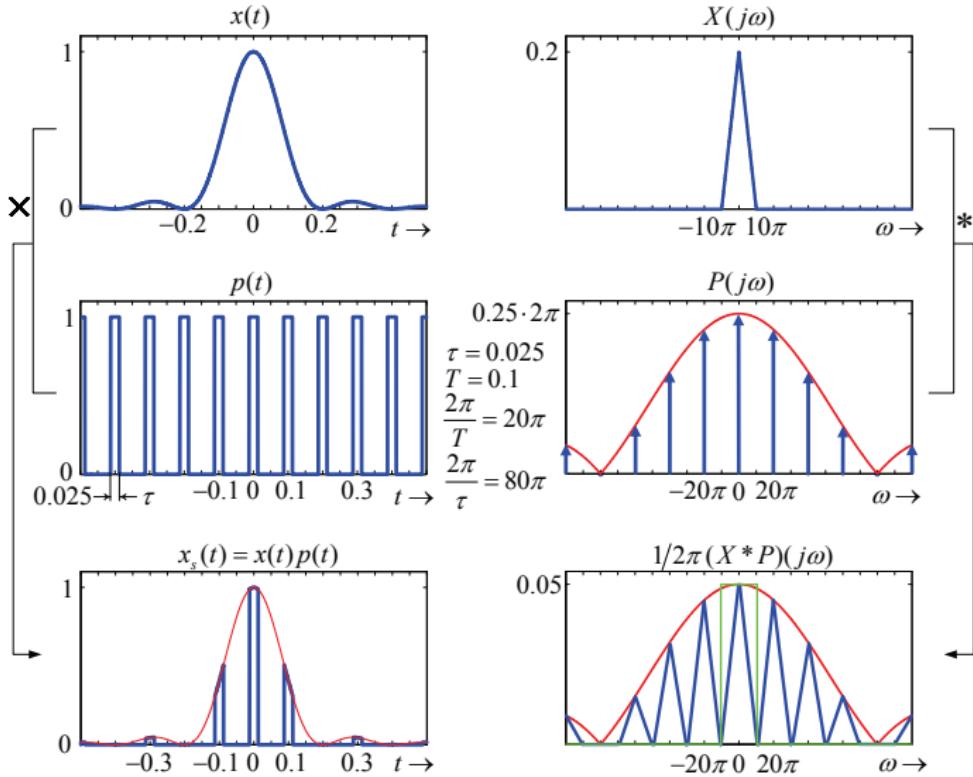
Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT





Primjer očitavanja pravokutnim pulsevima



korištenjem idealnog filtra moguća potpuna rekonstrukcija kontinuiranog signala



Primjer očitavanja pravokutnim impulsima

Signali i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}); \text{ vidi sis17_Cj06 prikaznica 7}$$

$$P_k = \frac{\tau}{T} \frac{\sin \frac{k\pi\tau}{T}}{\frac{k\pi\tau}{T}} = 0.25 \frac{\sin(0.25k\pi)}{0.25k\pi}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)p(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \Psi)) P(j\Psi) d\Psi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \Psi)) \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\Psi - k \frac{2\pi}{T}) \right] d\Psi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - \Psi)) \delta(\Psi - k \frac{2\pi}{T}) d\Psi \right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k X(j(\omega - k \frac{2\pi}{T})) = .25 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 0.25k\pi}{0.25k\pi} X(j(\omega - 20\pi k))$$



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

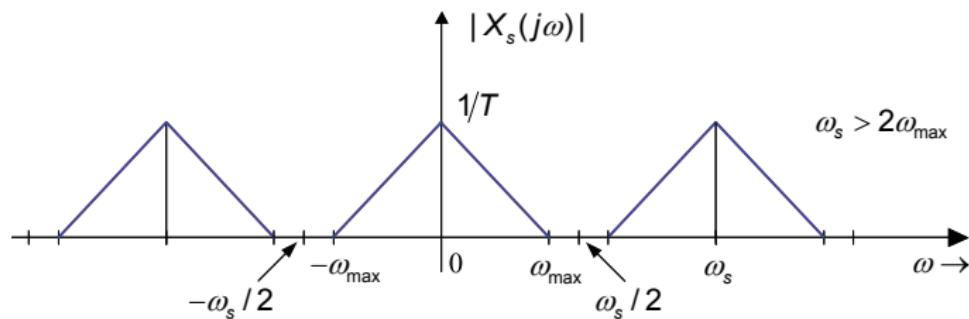
Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



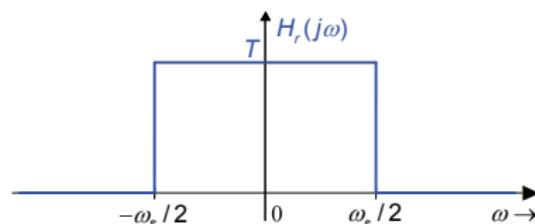
- obnavljanje ili rekonstrukciju vremenski kontinuiranog signala, iz vremenski diskretnog, postižemo izdvajanjem osnovne sekcije spektra $X_s(j\omega)$
- potrebno je filtrirati $X_s(j\omega)$ s tzv. rekonstrukcijskim filtrom frekvencijske karakteristike $H_r(j\omega)$,

$$X_c(j\omega) = X_s(j\omega)H_r(j\omega)$$



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

- pretpostavimo kako je $H_r(j\omega)$ idealan filter čija je frekvencijska karakteristika dana na slici



$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

a impulsni odziv⁴

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

⁴Impulsni odziv se definira kao odziv sustava na jedinični impuls, i detaljno razmatra kasnije. Ovdje kažimo kako se impulsni odziv može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija frekvencijske karakteristike filtra



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

- neka je frekvencija očitavanja $\omega_s > 2\omega_{max}$, takva da unutar pojasa ponavljanja $(-\omega_s/2, \omega_s/2)$ nema preklapanja sekcija spektra, pa je tada

$$X_c(j\omega) = X(j\omega) = X_s(j\omega)H_r(j\omega)$$

- podsjetimo se da je

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \xleftrightarrow{CTFT} X_s(j\omega),$$

da umnošku u frekvencijskoj domeni odgovara konvolucija u vremenskoj domeni, te da, $\forall t \in \mathbb{R}$, vrijedi⁵

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (D_{t1}(\delta)*f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1)f(t - \tau) d\tau = f(t - t_1)$$

⁵Vidi sis17_Cj03 prikaznica 30



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

- zaključujemo:

$$X(j\omega) = H_r(j\omega)X_s(j\omega) \xleftrightarrow{CTFT}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

pa je

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

što znači da je kontinuirani signal $x(t)$ rekonstruiran
iz očitaka signala $x(nT)$ interpolacijom s funkcijom

$$\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signal-a iz vremenski diskretnog

- možemo zaključiti kako je vremenski kontinuirani signal $x(t)$, koji ima frekvencijski omeđen spektar tj. $X(j\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_s/2$, jednoznačno određen trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenutcima $t_n = nT = n\frac{2\pi}{\omega_s}$
- interpolacijska funkcija predstavlja impulsni odziv idealnog filtra⁶

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

- idealni filter ima nekauzalan impulsni odziv (odziv na impuls počinje prije nego se impuls pojavio) i prema tome je neostvariv

⁶Ponavljamo: impulsni se odziv definira kao odziv na jedinični impuls, i detaljno razmatra kasnije. Ovdje kažimo kako se impulsni odziv može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija frekvencijske karakteristike filtra



Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog

Signalni i sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

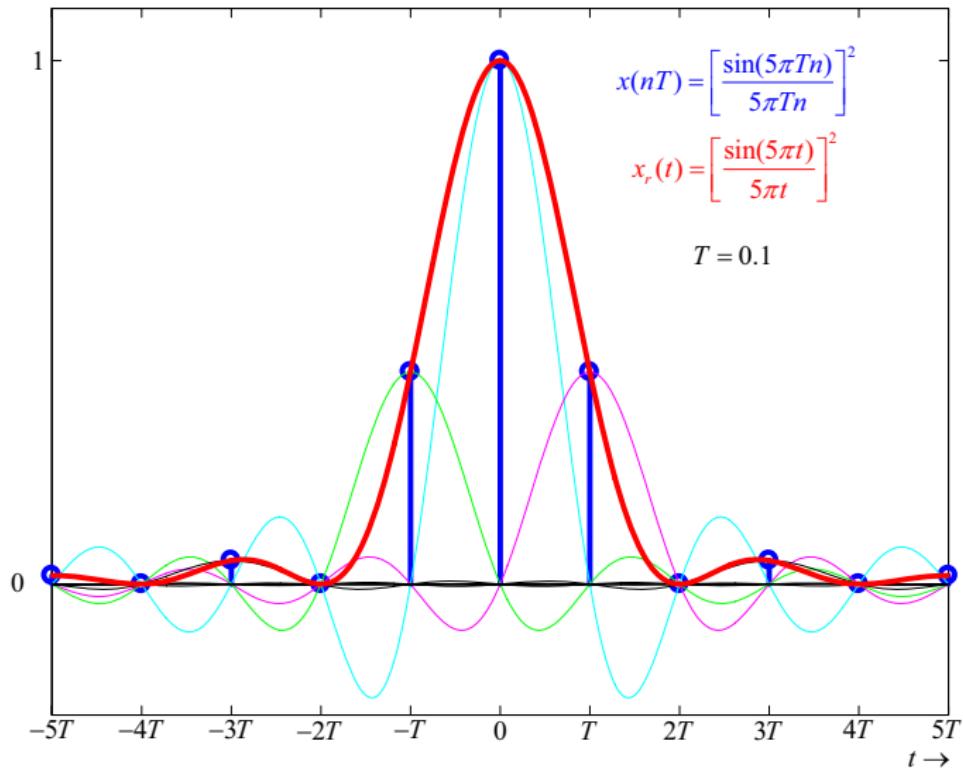
Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT



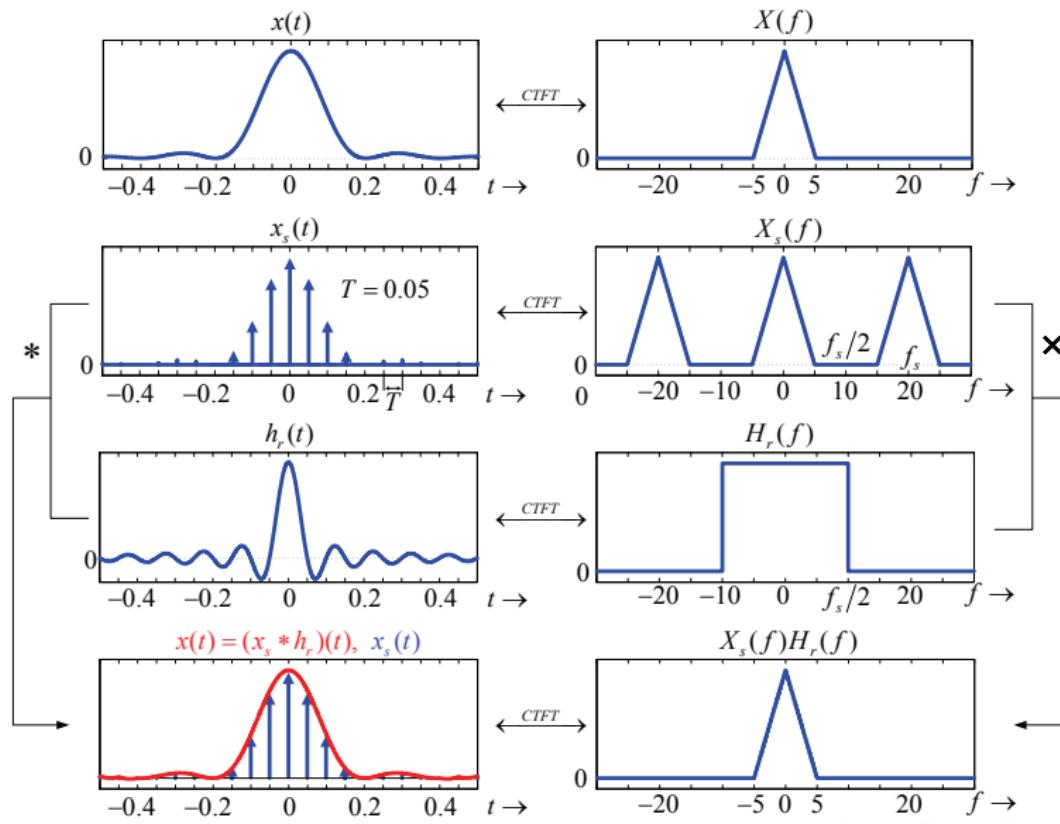


Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom

- postupku filtracije odgovara umnožak spektra signala i frekvencijske karakteristike rekonstrukcijskog filtra u frekvencijskoj domeni
- u vremenskoj domeni tome odgovara konvolucija očitanog signala i impulsnog odziva filtra
- naredna prikaznica je ilustracija obnavljanja ili rekonstrukcije vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom
- graf u donjem lijevom kutu prikaznice pokazuje rekonstruirani signal (crveno)



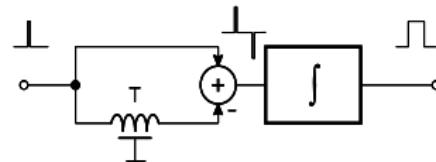
Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signal-a iz vremenski diskretnog – idealnim filtrom



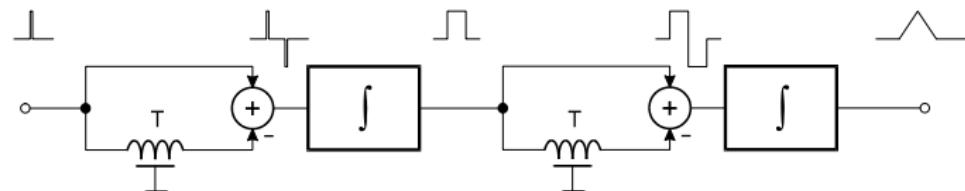


Interpolatori nultog i prvog reda

- interpolatori nultog i prvog reda mogu se jednostavno realizirati realnim sustavima
- interpolator nultog reda dan je blokovskim dijagramom



a interpolator prvog reda blokovskim dijagramom

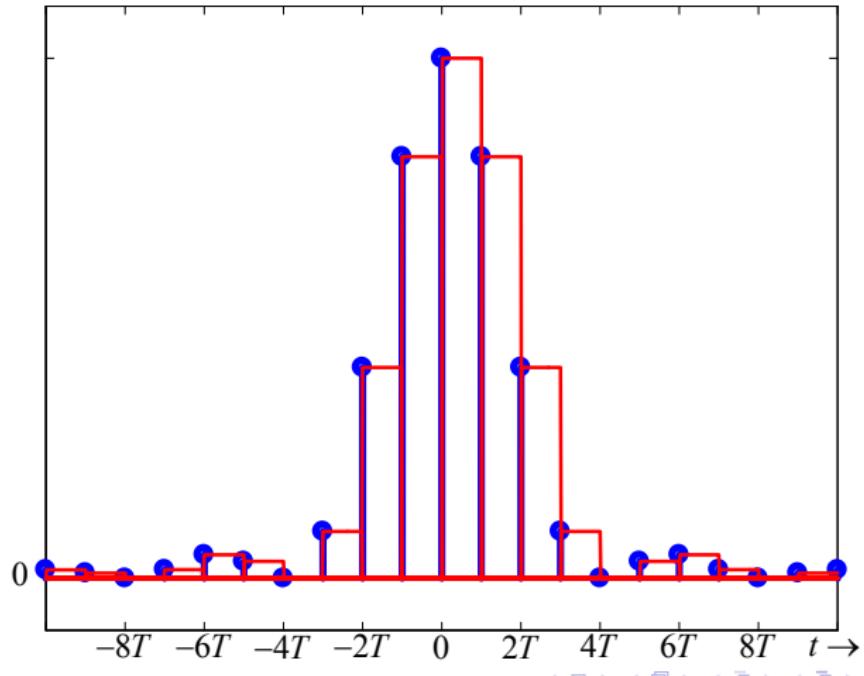


- njihova primjena ilustrirana ja na naredne tri prikaznice



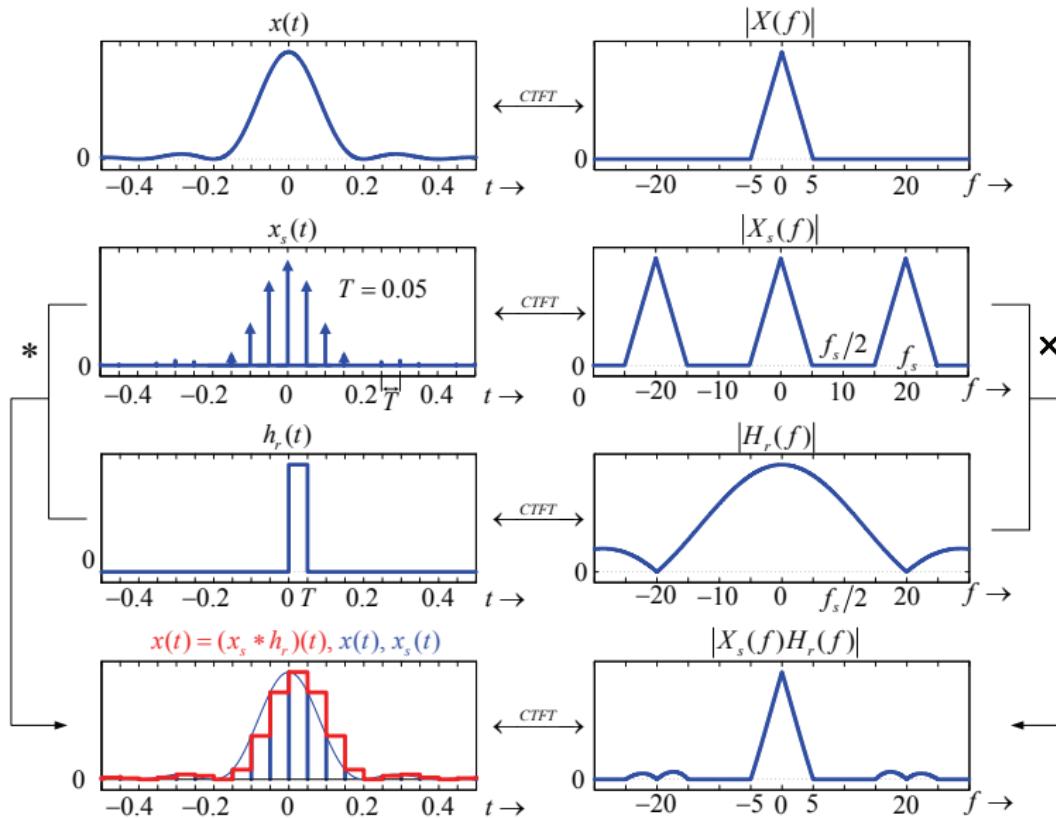
Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator nultog reda

- interpolacija vremenski diskretnog signala interpolatorom nultog reda dana je na slici





Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator nultog reda





Signali i
sistemi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

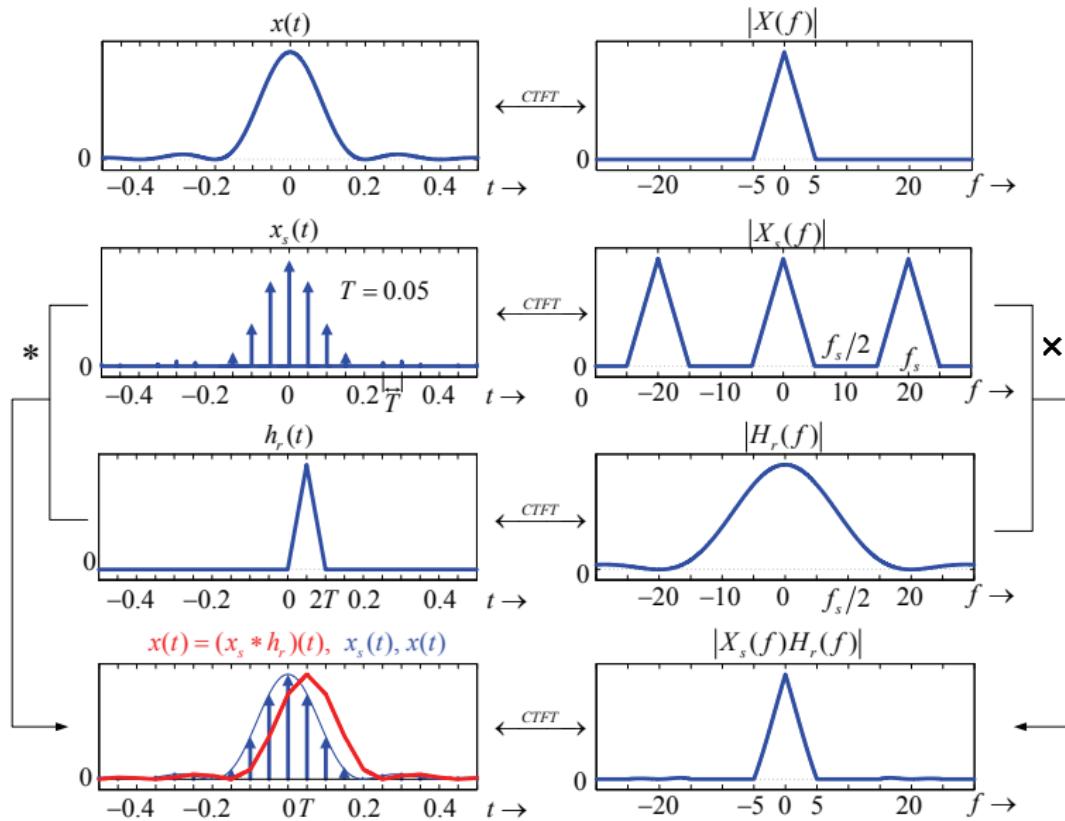
Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Anitialiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog – interpolator prvog reda





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

Analiasing filter



Očitavanje vremenski kontinuiranih signala frekvencijski neomeđenog spektra

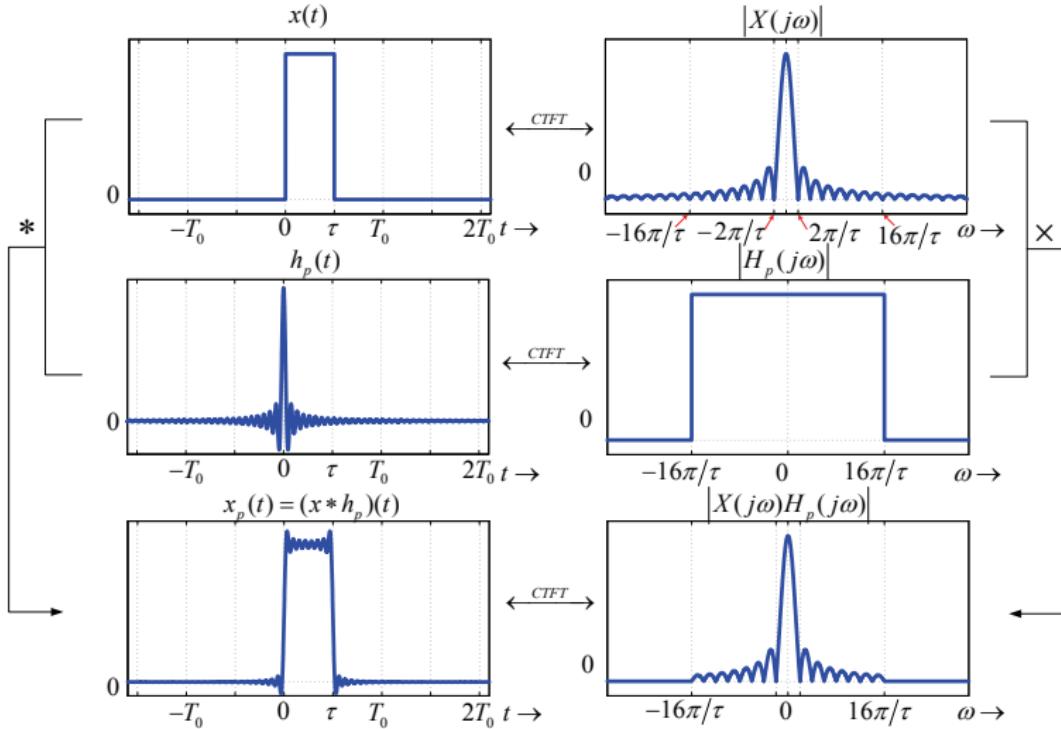
- u praksi, mnogi signali nisu frekvencijski omeđeni
- očitavanjem takvih signala pojavljuje se aliasing i time pojava greške kod rekonstrukcije očitanog signala
- da bi se ta greška smanjila potrebno je, prije očitavanja, takve signale frekvencijski omeđiti
- ovo je moguće korištenjem tzv. analognih predfiltara⁷ koje obično nazivamo antialiasing filtri
- postupak omeđenja spektra ilustriran je narednim prikaznicama

⁷ Analogni predfiltr – filtracija analognog signala prije postupka očitavanja



Idealni antialiasing filter

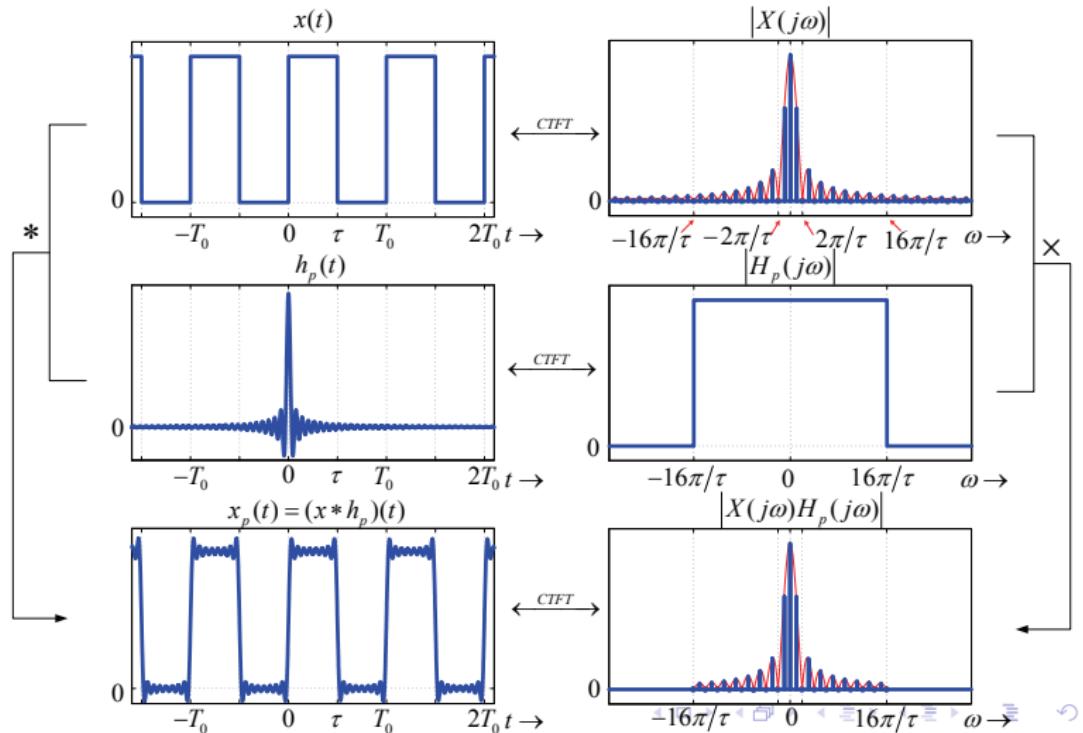
- pokazuje se omeđenje spektra - analogna predfiltracija idealnim analognim predfiltrom





Idealni antialiasing filter

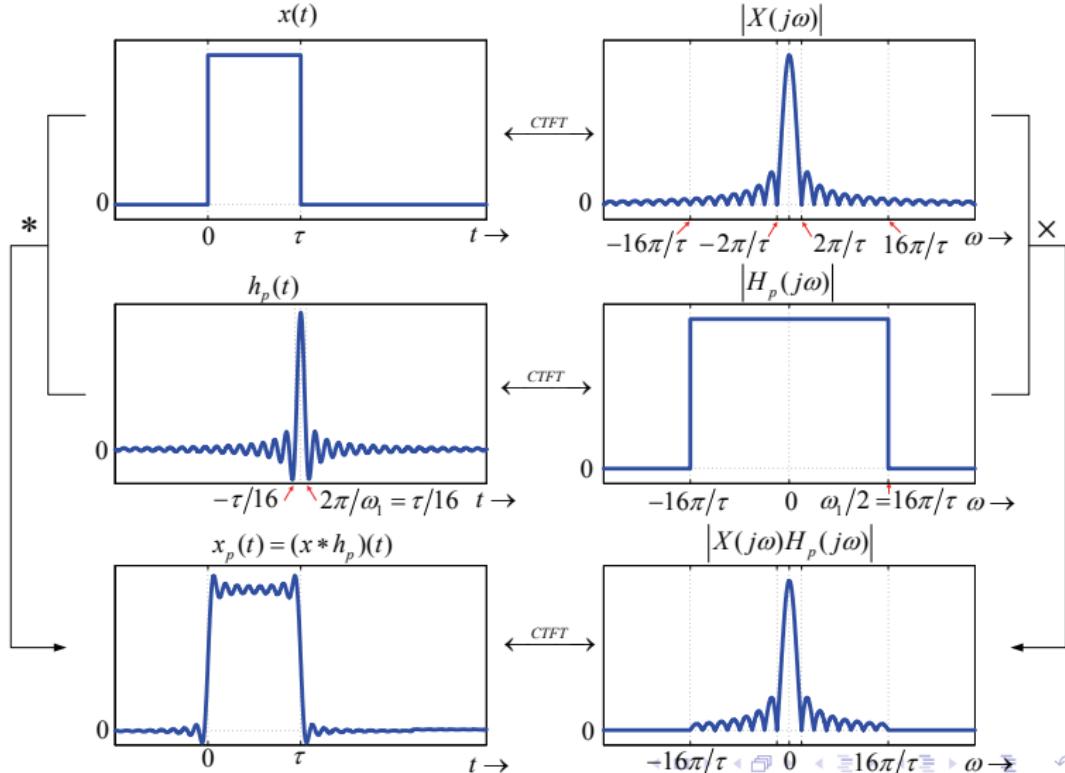
- analogna predfiltracija, periodičnog signala, idealnim analognim predfiltrom (Gibbsova pojava – pravokutni otvor)





Idealni antialiasing filter

- razmotrimo još jednom primjenu idealnog antialiasing filtra na aperiodičan vremenski kontinuiran pravokutni impuls





Realni antialiasing filter

Signalni i
sustavi
Školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

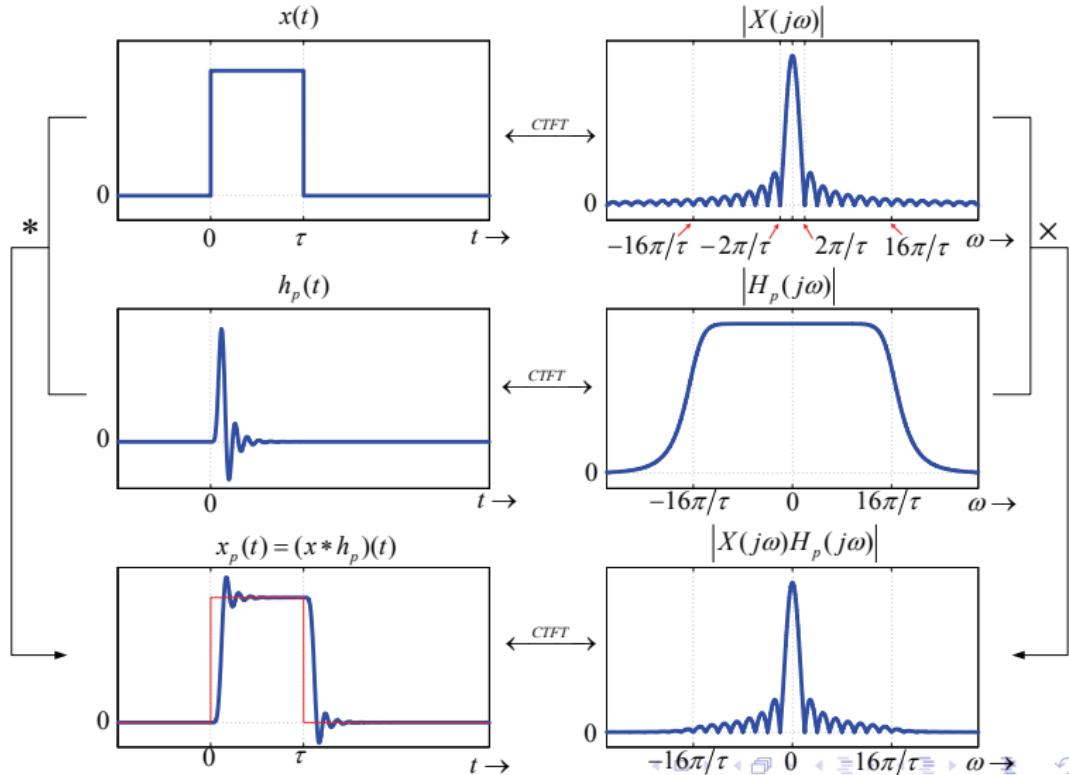
Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Antialiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT

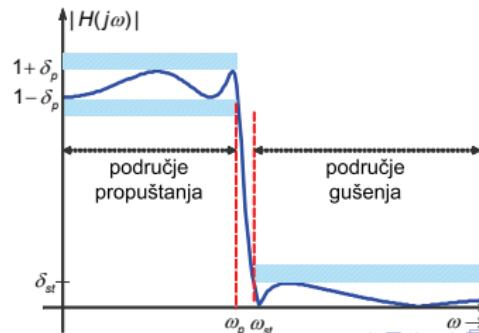
- idealni antialiasing filter ima nekauzalan impulsni odziv i kao antialiasnig filtre koristimo realne filtre





Antialiasing filtri

- aliasing koji se javlja pri očitavanju frekvencijski neomeđenog signala, izbjegava se filtriranjem kontinuiranog signala tzv. antialiasing filtrom
- antialiasing filtri su niskopropusni analogni filtri koji propuštaju komponente spektra frekvencija nižih od pola frekvencije očitavanja, dok više guše
- koriste se realni filtri koji imaju konačnu širinu prijelaznog pojasa frekvencijske karakteristike i konačno gušenje u pojasu gušenja





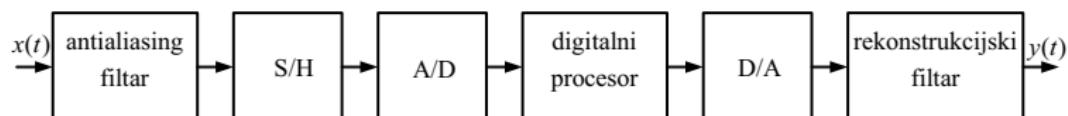
Antialiasing filtri

- zbog konačne širine prijelaznog područja realnih antialiasing filtara potrebno je signal očitavati nešto većom frekvencijom od dvostrukе maksimalne frekvencije signala
- kod digitalne obradbe glazbenih signala, čije frekvencijsko područje širine 20kHz osigurava visoko vjernu reprodukciju, frekvencija očitavanja (kod CD npr.) je 44.1 kHz što je dakle nešto više od dvostrukе maksimalne frekvencije



Digitalna obradba vremenski kontinuiranog signala

- Izlanac sklopova potrebnih za digitalnu obradbu vremenski kontinuiranih signala prikazan je blok dijagramom⁸



⁸S/H – sample-and-hold sklop; A/D – digitalno analogni pretvornik;

D/A – digitalno analogni pretvornik



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT



Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- spektar aperiodičnih kontinuiranih signala je kontinuiran
- spektar aperiodičnih diskretnih signala također je kontinuiran i još k tome i periodičan
- ovdje se razmatra postupak očitavanja spektra tj. diskretizacija u frekvencijskoj domeni
- postupak koji ćemo ovdje primijeniti identičan je postupku primjenjenom kod očitavanja vremenski kontinuiranih signala



Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- diskretizaciju kontinuiranog spektra možemo interpretirati kao

$$X_d(j\omega) = X(j\omega) \text{comb}_{\omega_o}(j\omega) = X(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_o)$$

- podsjetimo se da, uz $\omega_o = \frac{2\pi}{T_p}$, vrijedi⁹

$$\text{comb}_{T_p}(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \frac{2\pi}{T_p} \text{comb}_{\frac{2\pi}{T_p}}(j\omega) = \omega_o \text{comb}_{\omega_o}(j\omega)$$

odnosno

$$\frac{1}{\omega_o} \text{comb}_{T_p}(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} \text{comb}_{\omega_o}(j\omega)$$

⁹vidi sis17_Cj06 prikaznice 13-14



Diskretizacija kontinuiranoga spektra

- umnošku u frekvencijskoj domeni odgovara konvolucija u vremenskoj domeni, pa za $X_d(j\omega) = X(j\omega)comb_{\omega_o}(j\omega)$ vrijedi

$$x_d(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_o} comb_{T_p}(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_p)$$

podsjećajući se da vrijedi $f(t) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1)$, zaključujemo da je

$$x_d(t) = \frac{1}{\omega_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_p)$$

dakle, očitavanje kontinuiranog spektra $X(j\omega)$, signala $x(t)$, rezultira u njegovom periodičnom ponavljanju svakih $T_p = \frac{2\pi}{\omega_o} \Rightarrow$ moguć aliasing u vremenskoj domeni



Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT



Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- $x_d(t)$ je periodična funkcija
- rekonstrukciju kontinuiranog spektra realizira se izdvajanjem samo osnovne sekcije od $x_d(t)$ što se postiže množenjem $x_d(t)$ s idealnim pravokutnim otvorom u vremenskoj domeni

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \leq T_p/2 \\ 0 & |t| > T_p/2 \end{cases}$$

pa je

$$W(j\omega) = \omega_o T_p \frac{\sin \frac{T_p \omega}{2}}{\frac{T_p \omega}{2}} = 2\pi \frac{\sin \frac{T_p \omega}{2}}{\frac{T_p \omega}{2}}$$



Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- umnošku signala u vremenskoj domeni odgovara konvolucija spektara u frekvencijskoj domeni

$$x(t) = w(t)x_d(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * X_d(j\omega)$$

pa je uz $X_d(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o)\delta(\omega - k\omega_o)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{\sin \frac{T_p \omega}{2}}{\frac{T_p \omega}{2}} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o)\delta(\omega - k\omega_o)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o) \frac{\sin \frac{T_p(\omega - k\omega_o)}{2}}{\frac{T_p(\omega - k\omega_o)}{2}}$$



Obnavljanje kontinuiranog spektra iz diskretnog

- zaključujemo da je spektar $X(j\omega)$, izražen uz pomoć $X(jk\omega_o)$,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_o) \frac{\sin(\pi(\omega - k\omega_o)/\omega_o)}{\pi(\omega - k\omega_o)/\omega_o}$$

dakle, jednoznačno je određen iz njegovih očitaka $X(jk\omega_o)$ interpolacijom s funkcijom

$$\frac{\sin(\pi\omega/\omega_o)}{\pi\omega/\omega_o}$$

Zaključak: kontinuirani spektar signala koji ima omeđeno trajanje, $x(t) = 0$ za $|t| > T_p/2$, jednoznačno je određen svojim očitcima na jednoliko raspoređenim frekvencijama $\omega_k = k\omega_o = 2\pi k/T_p$



Numeričko izračunavanje Fourierove transformacije

Signalni i
sistemi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

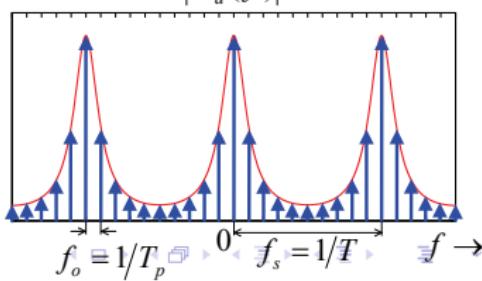
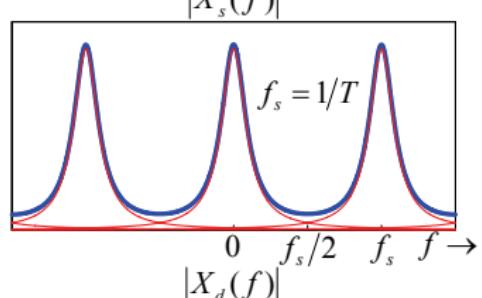
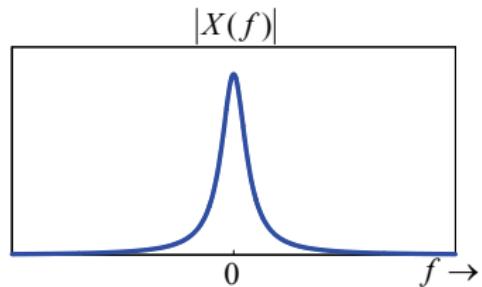
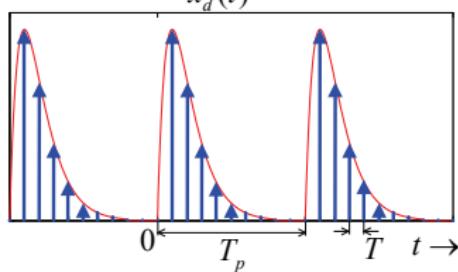
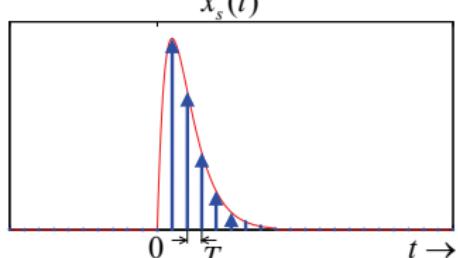
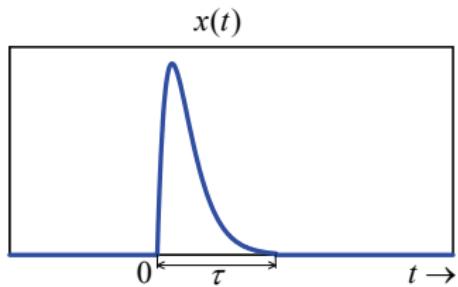
Očitavanje
vremenski
kontinuiranog
signala

Usporedba
spektra očitanog
vremenski
kontinuiranog
signala i spektra
vremenski
diskretnog
signala

Obnavljanje
vremenski
kontinuiranog
signala iz
vremenski
diskretnog

Analiasing filter
Diskretizacija
kontinuiranoga
spektra

DFT





Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

DFT

Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*



Diskretna Fourierova transformacija – DFT

- za veliku većinu signala nije moguće definirati matematički izraz, pa tako nije moguće primijeniti do sada izvedene transformacije
- zato se pristupa numeričkom određivanju spektra i uvodi se diskretna Fourierova transformacija – *DFT*
- signal i njegov spektar treba predstaviti njihovim očitcima, odnosno očitati, što znači da će se očitani signal i njegov spektar periodički produžiti
- spektar aperiodičnog očitanog signala je kontinuiran i periodičan s periodom 2π

$$\forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

- kako je spektar periodičan, dovoljno je pri očitavanju spektra uzeti samo N očitaka iz osnovnog perioda, pri čemu će razmak između očitaka biti $2\pi/N$



Diskretna Fourierova transformacija – DFT

- očitavanjem $X(e^{j\Omega})$, na frekvencijama $\Omega = \frac{2\pi}{N} k$, slijedi

$$k = 0, 1, \dots, N-1; \quad X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

zbroj se transformira u beskonačni broj zbrojeva od N članova

$$\begin{aligned} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \\ &\quad + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \dots = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$



Diskretna Fourierova transformacija – DFT

- zamjenom indeksa n u unutarnjem zbroju s $n + mN$ i zamjenom redoslijeda zbrajanja slijedi:

$$k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)}_{\tilde{x}(n)} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- signal $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$ dobiven je periodičnim ponavljanjem $x(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, i periodičan je s periodom N , te može biti prikazan s Fourierovim redom (DTFS)



Diskretna Fourierova transformacija – DFT

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- koeficijenti ovog Fourierovog reda su

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

ako se usporede X_k i $X(e^{j \frac{2\pi}{N} k})$, za $k = 0, 1, \dots, N-1$, zaključuje se da vrijedi

$$X_k = \frac{1}{N} X(e^{j \frac{2\pi}{N} k}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j \frac{2\pi}{N} k}) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



Diskretna Fourierova transformacija – DFT

- uvodimo oznaku $X(k)$ za očitke diskretnog spektra, gdje je $X(k) \triangleq X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$, pa je očitani spektar

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

- očitavanjem spektra aperiodičnog diskretnog signala može doći do pojave aliasinga u vremenskoj domeni
- za aperiodične diskrette signale x , duljine L , pri čemu je $L \leq N$, nema aliasinga i vrijedi da je:

$$x(n) = \tilde{x}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

iz svega slijedi:



Diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

- za aperiodičan diskretni signal $x(n)$, duljine L ($x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \geq L$) vrijedi par diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

inverzna diskretna Fourierova transformacija – *IDFT*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$



Diskretna Fourierova transformacija – DFT - primjer

- za aperiodičan diskretni signal $x(n) = \{2, 1, 3, 1\}$, duljine 4 ($x(n) = 0$ za $n < 0$ i $n \geq 4$) određujemo diskretnu Fourierovu transformaciju – DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{\pi}{2}kn} = \sum_{n=0}^3 x(n)(-j)^{kn},$$
$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 7$$

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0) + x(1)(-j) + x(2)(-j)^2 + x(3)(-j)^3 \\ &= 2 - j - 3 + j = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2) &= x(0) + x(1)(-j)^2 + x(2)(-j)^4 + x(3)(-j)^6 \\ &= 2 - 1 + 3 - 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(3) &= x(0) + x(1)(-j)^3 + x(2)(-j)^6 + x(3)(-j)^9 \\ &= 2 + j - 3 - j = -1 \end{aligned}$$



Diskretna Fourierova transformacija – DFT - primjer

- za izračunati spektar signala $X(k) = \{7, -1, 3, -1\}$ određujemo inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju – IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j \frac{\pi}{2} kn} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) (j)^{kn},$$
$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(0) = 0.25[X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] = 2$$

$$\begin{aligned} x(1) &= 0.25[X(0) + X(1)(j) + X(2)(j)^2 + X(3)(j)^3] \\ &= 0.25[7 - j - 3 + j] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(2) &= 0.25[X(0) + X(1)(j)^2 + X(2)(j)^4 + X(3)(j)^6] \\ &= 0.25[7 + 1 + 3 + 1] = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(3) &= X(0) + X(1)(j)^3 + X(2)(j)^6 + X(3)(j)^9 \\ &= 0.25[7 + j - 3 - j] = 1 \end{aligned}$$



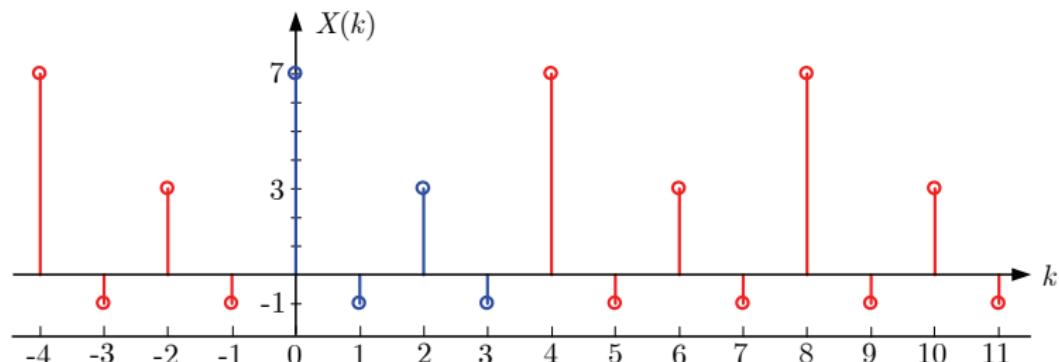
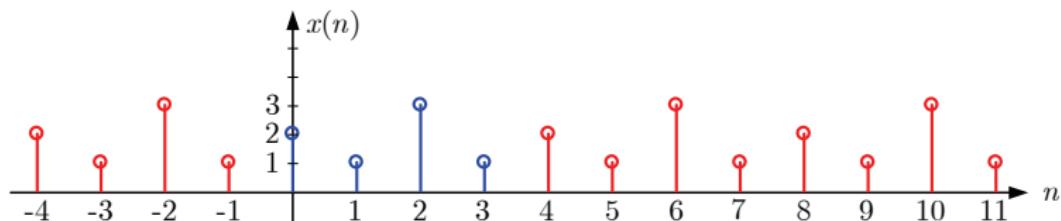
Signalni i
sustavi
školska godina
2016/2017
Cjelina 7.

Profesor
Branko Jeren

Digitalna
obradba
kontinuiranih
signala

DFT

Diskretna Fourierova transformacija – DFT - primjer





Dimenzionalnost signala

- očitavanje signala u vremenskoj domeni \Rightarrow ponavljanje spektra s ω_s (aliasing u frekvencijskoj domeni – FD)
- očitavanje signala u frekvencijskoj domeni \Rightarrow ponavljanje signala u vremenskoj domeni s T_p (aliasing u vremenskoj domeni – VD)
- relativna greška u FD i VD može biti ocijenjena energijom signala i spektra izvan izabranog trajanja signala T_p , odnosno frekvencijskog pojasa ω_s , prema ukupnoj energiji

$$\underbrace{\varepsilon_{FD} = \frac{2 \int_{\omega_s/2}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}{2 \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}}_{\text{relativna greška u FD}}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{VD} = \frac{2 \int_{T_p/2}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2 \int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt}}_{\text{relativna greška u VD}}$$

- greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $|t| > T_p/2$ odnosno $|\omega| > \omega_s/2$



Dimenzionalnost signala

- uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i f_s - trajanje i širinu pojasa signala
- potreban broj očitaka u VD

$$N_T T = T_p = N_T \frac{2\pi}{\omega_s} \Rightarrow N_T = \frac{T_p \omega_s}{2\pi} = T_p f_s$$

- potreban broj očitaka u FD

$$N_{\omega_o} \omega_o = \omega_s = N_{\omega_o} \frac{2\pi}{T_p} \Rightarrow N_{\omega_o} = \frac{T_p \omega_s}{2\pi} = T_p f_s$$

pa je dimenzija signala

$$N_{\omega_o} = N_T = \frac{T_p \omega_s}{2\pi} = T_p f_s$$



Dimenzionalnost signala – primjer

- želimo numerički odrediti spektar signala očitanog s $f_s = 44100 \text{ Hz}$, s rezolucijom $f_o = 10 \text{ Hz}$,
- za traženu rezoluciju trajanje signala mora biti minimalno

$$T_p = \frac{1}{f_o} = 0.1 \text{ s}$$

pa je potrebnii broj očitaka

$$N = T_p f_s = 0.1 \times 44100 = 4410$$