Primjer: paritetno kodiranje

Teorija informacije

Tekst zadatka

Razmatrajte blok kôd s 8 kodnih riječi koji svaku poruku duljine 3 bita kodira dodatnim paritetnim bitom koristeći pri tome neparni paritet. Odredite vjerojatnost da zadani kôd otkrije pogreške bita koje mogu nastati prilikom prijenosa kodnih riječi binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,02.

Postupak rješavanja

- događaji:

$$A - \text{pogreška otkrivena}$$
$$\overline{A} - \text{pogreška nije otkrivena}$$
$$B - \text{pogreška nastupila}$$
$$\overline{B} - \text{pogreška nije nastupila}$$

- očito mora vrijediti:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
$$P(B) + P(\overline{B}) = 1$$

- nadalje:

$$P(A) = P(A, B) + P(A, \overline{B})$$
$$P(B) = P(A, B) + P(\overline{A}, B)$$

Postupak rješavanja

- p = 0,02
- pogreška je nastupila i otkrivena je:

$$P(A,B)=\underbrace{\binom{4}{1}p(1-p)^3}_{\text{jednostruka pogreška}}+\underbrace{\binom{4}{3}p^3(1-p)}_{\text{trostruka pogreška}}=75,33\cdot 10^{-3}$$

- pogreška je nastupila i nije otkrivena:

$$P(\overline{A},B)=\underbrace{\binom{4}{2}p^2(1-p)^2}_{\text{dvostruka pogreška}}+\underbrace{\binom{4}{4}p^4}_{\text{četverostruka pogreška}}=2,31\cdot 10^{-3}$$

Postupak rješavanja

- pogreška nije nastupila i otkrivena je:

$$P\left(A,\overline{B}\right)=0$$

- pogreška nije nastupila i nije otkrivena:

$$P\left(\overline{A},\overline{B}\right)=\binom{4}{0}\left(1-p\right)^4=0,98^4=0,92237$$

- provjera:

$$P\left(A,B\right)+P\left(\overline{A},B\right)+P\left(A,\overline{B}\right)+P\left(\overline{A},\overline{B}\right)=1$$

Postupak rješavanja

- sada je moguće odrediti:

$$P\left(A\right)=P(A,B)+P(A,\overline{B})=P(A,B)=75,33\cdot 10^{-3}$$

$$P\left(B\right)=P(A,B)+P(\overline{A},B)=77,63\cdot 10^{-3}=1-\left(1-p\right)^{4}$$

- također vrijedi:

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-P\left(A,B\right)=0,92467$$

$$P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=\left(1-p\right)^{4}=0,92237$$

Postupak rješavanja

- uvjetne vjerojatnosti:
  - pogreška je otkrivena ako je sigurno i nastupila:

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A,B\right)}{P\left(B\right)}=0,97$$

  - pogreška nije otkrivena ako je sigurno i nastupila:

$$P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{P\left(\overline{A},B\right)}{P\left(B\right)}=0,03$$

  - provjera: $P\left(A|B\right)+P\left(\overline{A}|B\right)=1$

Postupak rješavanja

- pogreška je otkrivena ako sigurno nije nastupila:

$$P\left(A\middle|\overline{B}\right)=\frac{P\left(A,\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=0$$

- pogreška nije otkrivena ako sigurno nije nastupila:

$$P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A},\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=1$$

- provjera:

$$P\left(A\middle|\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=1$$

Konačno rješenje

Vjerojatnost da zadani kôd otkrije pogreške bita koje mogu nastati prilikom prijenosa kodnih riječi binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,02 iznosi $\mathbf{75{,}33 \cdot 10^{-3}}$.

Primjer: linearnost cikličnih kodova

Teorija informacije

Primjer 1

Razmatrajmo ciklični kôd $K \subseteq R_3$, koji sadrži riječ 101. Pokažimo da se radi o linearnom kodu.

Ako je kodna riječ 101 element koda K, tada i svi ciklični posmaci te kodne riječi moraju biti elementi koda K.

101

011

110

Da bi kôd K bio linearan mora sadržavati i kodnu riječ sastavljenu od svih nula: 000

Primjer 1

Dakle, vrijedi

$$K = \begin{cases} 101 \\ 011 \\ 110 \\ 000 \end{cases}$$

Nadalje, za zadovoljenje linearnosti mora vrijediti:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K$,
- $a \cdot \mathbf{x} \in K$,
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ i $\forall a \in \{0, 1\}$

$$101 \oplus 011 = 110$$

$$101 \oplus 110 = 011$$

$$011 \oplus 110 = 101$$

Kôd *K* je linearan.

Primjer 2

Razmatrajmo ciklični kôd $K \subseteq R_4$, koji sadrži riječ 1011. Pokažimo da se radi o linearnom kodu.

Ako je kodna riječ 1011 element koda K, tada i svi ciklični posmaci te kodne riječi moraju biti elementi koda K.

1011

0111

1110

1101

Primjer 2

Da bi kôd *K* bio linearan mora sadržavati i kodnu riječ sastavljenu od svih nula: **0000**

Nadalje, za zadovoljenje linearnosti mora vrijediti:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K$

Promotrimo zbroj dvije kodne riječi:

$1011 \oplus 0111 = 1100$

Ta kodna riječ nije vezana cikličnim posmakom s riječima 1011 i 0111.

Primjer 2

Dakle, svi ciklični posmaci riječi 1100 moraju također biti elementi koda *K*:

1100

1001

0011

0110

Uzmemo li kodne riječi 1100 i 0011 i zbrojimo ih po modulu 2, dobit ćemo i kodnu riječ **1111**.

Primjer 2

Sada zbrojimo polaznu kodnu riječ 1011 i njen ciklični posmak 1110

$1011 \oplus 1110 = 0101$

Ciklični posmak te kodne riječi, **1010**, također mora biti element koda *K*:

0101

1010

Primjer 2

Konačno, ako zbrojimo kodnu riječ 1101 i 0101, dobivamo

$1101 \oplus 0101 = 1000$

Dakle, i svi ciklični posmaci riječi 1000 također moraju biti članovi koda K:

1000

0001

0010

0100

Primjer 2

Kako bi posjedovao svojstvo linearnosti, promatrani kôd K nužno sadrži svih 16 binarnih riječi duljine 4 bita, $K = R_4$.