

Kapacitet kanala u kontinuiranom vremenu

Teorija informacije

Entropija u kontinuiranim kanalima

- ◆ definicija entropije jednodimenzionalne slučajne varijable X s kontinuiranom razdiobom:

$$H(X) = E[-\log f_X(X)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx$$

- ◆ diferencijalna entropija može biti i negativna
- ◆ primjer: X ima jednoliku razdiobu na intervalu $(0, a)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad H(X) = \int_0^a \frac{1}{a} \log(a) dx = \log(a)$$

- ◆ ako je $a < 1$, tada je $\log(a) < 0$, pa je $H(X)$ negativna

Informacijske mjere kontinuiranog sustava

- ◆ ulaz u kanal – slučajna varijabla X
 - kontinuirana funkcija gustoće vjerojatnosti $f_1(x)$
- ◆ izlaz iz kanala – slučajna varijabla Y
 - kontinuirana funkcije gustoće vjerojatnosti $f_2(y)$
- ◆ zdržena funkcija gustoće vjerojatnosti od X i Y
 - kontinuirana funkcija $f(x,y)$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx.$$

Informacijske mjere kontinuiranog sustava (II)

entropija na ulazu kanala: $H(X) = E[-\log f_1(X)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \log f_1(x) dx$,

entropija na izlazu kanala: $H(Y) = E[-\log f_2(Y)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \log f_2(y) dy$

ekvivokacija: $H(X|Y) = E[-\log f_y(X|Y)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f_2(y)} dx dy$

entropija šuma: $H(Y|X) = E[-\log f_x(Y|X)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f_1(x)} dx dy$

združena entropija: $H(X,Y) = E[-\log f(X,Y)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log f(x,y) dx dy$

Transinformacija u kontinuiranom kanalu

- ♦ transinformacija je očekivanje slučajne varijable / definirane funkcijom

$$\log \left(\frac{f(X, Y)}{f_1(X)f_2(Y)} \right)$$

$$E[I] = I(X; Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_1(x)f_2(y)} dx dy$$

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

- ♦ $I(X; Y) = I(Y; X)$
- ♦ $I(X; Y) \geq 0$
- ♦ $I(X; Y) = 0$ ako su X i Y međusobno neovisne slučajne varijable

Entropija slučajnog vektora

- ◆ neka je \mathbf{X} slučajni vektor sastavljen od n kontinuiranih slučajnih varijabli $X_k, k = 1, \dots, n$
- ◆ diferencijalna entropija dana izrazom

$$H(X_1, \dots, X_n) = E\left[-\log\left\{f_{\mathbf{X}}(X_1, \dots, X_n)\right\}\right] = - \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \log\left[f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)\right] dx_1 \cdots dx_n$$

$$H(\mathbf{X}) = E\left[-\log\left\{f(\mathbf{X})\right\}\right] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \log\left[f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right] d\mathbf{x}$$

- ◆ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ združena funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnog vektora \mathbf{X}

Određivanje maksimuma entropije kontinuirane slučajne varijable

- ◆ Maksimum $H(X)$ za DSV nastupa kad su svi elementarni događaji jednako vjerojatni
 - ako je kontinuirana slučajna varijabla ograničena na neki konačan interval, tada ima smisla razmatrati koja gustoća vjerojatnosti daje maksimalnu vrijednost entropije
- ◆ od svih jednodimenzionalnih razdioba s unaprijed zadanim standardnom devijacijom najveću entropiju pruža Gaussova (normalna) razdioba

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

$$H(X) = \ln(\sigma_X \sqrt{2\pi e})$$

Prijenos informacije u prisustvu aditivnog šuma

- ◆ općenito gledano, proračun kapaciteta kontinuiranog kanala je vrlo složen problem
 - ne postoji općenita metoda za određivanje kapaciteta u svim okolnostima
 - jednostavno je proračunati kapacitet kanala s aditivnim šumom
- ◆ neka Y opisuje izlaz predajnika, a X ulaz u prijemnik
 - X i Y su kontinuirane slučajne varijable
 - uvjetna funkcija gustoće vjerojatnosti $f_x(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom

- ◆ pretpostavimo da je šum u kanalu aditivan i neovisan o X
- ◆ $Y = X + Z$ i $f_x(y|x) = f_x(z + x|x) = \phi(z)$
 - Z je slučajna varijabla koja opisuje šum
 - funkcija gustoće vjerojatnosti šuma je $\phi(z)$
 - $f_x(z + x|x)$ ovisi samo o z
 - iz toga proizlazi jednakost $H(Y|X) = H(X + Z|X) = H(Z)$
- ◆ dakle, za transinformaciju vrijedi:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Z) = H(Y) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \log[\phi(z)] dz$$

- ◆ kapacitet određujemo pronalaženjem maksimuma transinformacije $I(X;Y)$ u ovisnosti o funkciji $f_1(x)$ i pod određenim ograničenjima

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (II)

- ◆ problem:
 - određivanje **kapaciteta kanala**
 - u prisustvu **Gaussovog aditivnog šuma**
 - te uz zadalu **srednju snagu signala na izlazu predajnika i**
 - **srednju snagu šuma**
- ◆ ograničenja bitna za proračun kapaciteta
 - pretpostavka: šum ima Gaussov razdiobu
 - srednja vrijednost jednaka nuli i
 - srednja snaga jednaka σ_z^2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-z^2/(2\sigma_z^2)} dz = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx = \sigma_x^2$$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (III)

- ◆ transinformacija u kanalu

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Z) = H(Y) - \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_z^2)$$

- ◆ vrijedi: $\max I(X;Y) = \max [H(Y) - H(Z)]$
 - ◆ kapacitet kanala je moguće izračunati maksimizacijom entropije $H(Y)$ i
 - ◆ uz ranije navedena ograničenja
- ◆ nadalje, $E[Y] = E[X + Z] = E[X] + E[Z] = 0$
- ◆ $E[Y^2] = E[(X + Z)^2] = E[X^2] + 2E[X]E[Z] + E[Z^2]$
- ◆ $E[X]E[Z] = 0$ pa vrijedi $E[Y^2] = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 = \text{konst.}$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (IV)

- ◆ dakle, problem pronalaženja kapaciteta kanala svodi se na pronalaženje
 - **funkcije gustoće vjerojatnosti** koja daje
 - srednju vrijednost 0 i
 - standardnu devijaciju $\sigma_x^2 + \sigma_z^2$
 - rezultat od prije: za takvu slučajnu varijablu najveću entropiju daje **Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti**
- ◆ maksimalna entropija na ulazu u prijemnik

$$H(Y) = \ln \left[\sqrt{2\pi e (\sigma_x^2 + \sigma_z^2)} \right] \text{ [nat/simbol]}$$

$$C_1 = \max I(X;Y) = \max \left[H(Y) - \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma_z^2) \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2} \right) \text{ [nat/simbol]}$$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (V)

- ◆ ako pretpostavimo da vrijedi $\sigma_x^2 = S$ i $\sigma_z^2 = N$
 - S je srednja snaga signala na izlazu predajnika
 - N je srednja snaga šuma u kanalu

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{nat/simbol}]$$

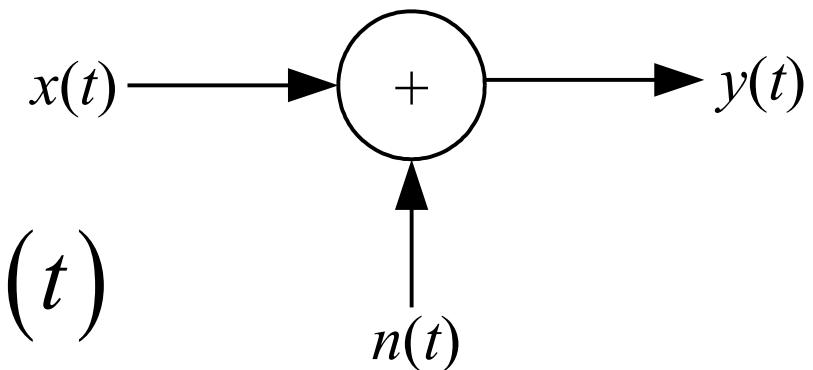
$$C_1 = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{bit/simbol}]$$

- ◆ **rezime:** u kanalu u kojem djeluje aditivni Gaussov šum, a srednja snaga signala na izlazu predajnika i srednja snaga šuma su ograničene, signal na ulazu kanala i signal na izlazu kanala moraju imati Gaussovu razdiobu kako bi brzina prijenosa informacije takvim kanalom bila maksimalna, tj. jednaka kapacitetu tog kanala

Informacijski kapacitet pojasno ograničenog kanala

- ◆ problem egzaktnog opisa kontinuiranih signala
 - vrijednost slučajnog kontinuiranog signala $x(t)$ u bilo kojem trenutku je nepredvidiva
 - u bilo kojem trenutku t_k , $x(t_k)$ je slučajna varijabla
 - potrebno je poznavanje statističkih svojstava praktički beskonačnog broja slučajnih varijabli
- ◆ rješenje: prikazati kontinuirani signal diskretnim signalom
 - u prelasku s kontinuiranog prikaza signala na diskretni uzorkovanje ima glavnu ulogu
 - promatrani skup signala svodi se na pojasno ograničene signale

- ◆ model AWGN-kanala



- ◆ pravilo u praksi za korištenje bijelog šuma u analizi realnih sustava
 - ◆ sve dok je širina frekvencijskog pojasa šuma na ulazu sustava znatno veća nego širina prijenosnog pojasa sustava
 - ◆ šum možemo modelirati kao bijeli šum.

Teorem o informacijskom kapacitetu AWGN-kanala

- ◆ ako signale $x(t)$ i $y(t)$ uzorkujemo sukladno teoremu uzorkovanja,
 - dobivamo diskretne signale koje je moguće prikazati n -dimenzionalnim slučajnim vektorima \mathbf{X} , odnosno \mathbf{Y}

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n] \text{ i } \mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \quad E[X_k] = 0, \\ E[X_k^2] = \sigma_{xk}^2.$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \quad E[Z_k] = 0, \\ E[Z_k^2] = \sigma_{zk}^2, \quad C_Z(Z_i, Z_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z}$$

Transinformacija u AWGN-kanalu

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y} | \mathbf{X})$$

$$f_x(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x} + \mathbf{z} | \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{z}) \quad \phi(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{1}{\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi}} e^{-z_k^2 / (2\sigma_{z_k}^2)} \right]$$

- ◆ komponente šuma međusobno neovisne
- ◆ entropija šuma jednaka je zbroju entropija njegovih pojedinačnih komponenata

$$H(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = H(\mathbf{Z}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{z}) \log[\phi(\mathbf{z})] d\mathbf{z} = \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e})$$

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{Y}) - \sum_{k=1}^n \log(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e})$$

Određivanje maksimalne vrijednosti transinformacije

- ◆ svodi se na maksimizaciju entropije $H(\mathbf{Y})$
- ◆ $\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}_k + \mathbf{Z}_k$
 - na svaku komponentu slučajnog vektora \mathbf{X} djeluje neovisna Gaussova smetnja

$$\sigma_{y_k}^2 = \sigma_{x_k}^2 + \sigma_{z_k}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- ◆ entropija $H(\mathbf{Y})$ će biti maksimalna kad su ispunjeni sljedeći uvjeti
 - ◆ sve komponente slučajnog vektora \mathbf{Y} su međusobno neovisne slučajne varijable
 - ◆ svaka komponenta ima najveću entropiju pod zadanim uvjetima

Određivanje maksimalne vrijednosti transinformacije (II)

$$I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^n \log\left(\sigma_{y_k} \sqrt{2\pi e}\right) - \sum_{k=1}^n \log\left(\sigma_{z_k} \sqrt{2\pi e}\right) = \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{\sigma_{y_k}}{\sigma_{z_k}}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_{x_k}^2}{\sigma_{z_k}^2}\right)$$

- ◆ pretpostavka: $\sigma_{x_k} = \sigma_x$, $k = 1, 2, \dots, n$
 $\sigma_{z_k} = \sigma_z$,

$$I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right) = \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right)$$

$$I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{S}{N}\right) [\text{bit/simbol}]$$

- ◆ ako je slučajni signal \mathbf{X} pojasno ograničen na pojas $0 \leq |f| \leq B$ herca - $f_u \geq 2B$ i $n = 2B$

Određivanje maksimalne vrijednosti transinformacije (III)

$$C = \frac{2B}{2} I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{bit/s}]$$

- ◆ $C = 2BD$, D je dinamika

$$D = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) [\text{bit/uzorak}]$$

- ◆ spektralnu gustoću snage šuma definiramo kao

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \forall f \in \mathbb{R}$$

- ◆ $N = N_0 B$ $C = B \log \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right) [\text{bit/s}]$

Teorem o informacijskom kapacitetu AWGN-kanala (II)

- ◆ uz uvjete zadane teoremom
- ◆ kanalom je moguće prenositi C bit/s uz proizvoljno malu vjerojatnost pogreške
 - ako se primjeni sustav za kodiranje zadovoljavajuće razine složenosti
- ◆ kanalom nije moguće prenositi informaciju brzinom većom od C bit/s,
- ◆ a da je pri tome vjerojatnost pogreške proizvoljno mala
 - bez obzira na složenost kodera
- ◆ C lakše povećati povećanjem B umjesto S

Primjer određivanja kapaciteta kanala

- ◆ telefonski kanal
 - pojasni propust od 300 do 3400 herca
 - pretpostavimo kvantizaciju s 256 razina ($L = 256$, $R = 8$)
 - odnos srednje snage sinusnog signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma iznosi 49,8 dB
 - $B = 3100 \text{ Hz}$ i $S/N = 95499$
 - $C = 51283 \text{ bit/s}$
 - šum kvantizacije nije jedina smetnja u telefonском каналу
 - barem 50% krajnjih korisnika ima odnos srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma manji ili jednak 35 dB
 - $S/N = 3162$, $C = 36044 \text{ bit/s}$

Učinkovitost prijenosnog pojasa

- ◆ idealan sustav: prijenosna brzina $R_b = C$ [bit/s]
- ◆ promatramo neki signal $x(t)$ trajanja T
 - pomoću njega se bitovi informacije prenose kanalom

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{E}{T}$$

- ◆ predajnik generira R_b bit/s
 - ◆ šalje jedan bit informacije svakih $1/R_b$ sekundi
- ◆ srednja energija po svakom bitu $E_b = S/R_b$
 - ◆ u idealnom sustavu $S = E_b C$

Učinkovitost prijenosnog pojasa (II)

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \frac{C}{B} \right),$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B},$$

- ◆ općenito, omjer prijenosne brzine R_b i širine prijenosnog pojasa sustava naziva se **učinkovitost prijenosnog pojasa**
 - kako se širina prijenosnog pojasa povećava prema beskonačnosti, omjer E_b/N_0 se približava svojoj donjoj graničnoj vrijednosti

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{E_b}{N_0} \right) = \ln(2) = 0,693 \quad \lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{S}{N_0} \log_2 e$$

Odnos prijenosne brzine i kapaciteta kanala

- ◆ $R_b = C$
 - granična vrijednost prijenosne brzine
 - ◆ $R_b < C$
 - prijenos brzinom koja je manja od kapaciteta kanala moguće je realizirati s po volji malom vjerojatnošću pogrešaka simbola u prijemu
 - ◆ $R_b > C$
 - prijenos brzinom koja je veća od kapaciteta kanala nije moguće realizirati s po volji malom vjerojatnošću pogrešaka simbola u prijemu
 - ◆ realni prijenosni sustavi uvijek su projektirani tako da je $R_b < C$ – nužno zbog pouzdanosti sustava
-

Prijenosna brzina

- ◆ smanjenje odnosa srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma, Γ
 - prilikom razmatranja praktičnih prijenosnih sustava u kojima je vjerojatnost pogreške dovoljno mala
 - funkcija dozvoljene vjerojatnosti pogreške i kodnog sustava korištenog u prijenosu
 - određuje učinkovitost realnog kodnog sustava u odnosu na idealni sustav

$$\Gamma = \frac{2^{2C} - 1}{2^{2R} - 1} = \frac{(S/N)}{2^{2R} - 1}$$

$$R = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{\Gamma N} \right) [\text{bit/simbol}]$$

$$R_b = B \log \left(1 + \frac{S}{\Gamma N} \right) [\text{bit/s}]$$