TINF 2_MI 2009/2010

Contents

[Predloži obavijest]

Drugi međuispit (3.12.2009. u 15:00 sati)

17.11.2009. u 08:39
Uređeno: 23.11.2009. u 09:30

Drugi međuispit iz predmeta *Teorija informacije* održat će se **03.12. u 15:00 sati**. Raspored studenata po dvoranama bit će objavljen 1.12. 2009.

Napomena: Studenti na ispitu pored knjige mogu imati jedan A4 list papira s formulama koje moraju biti napisane na računalu.

Vedran Mikac

[Komentiraj (0)]

Zadaci za vježbu-zaštitno kodiranje

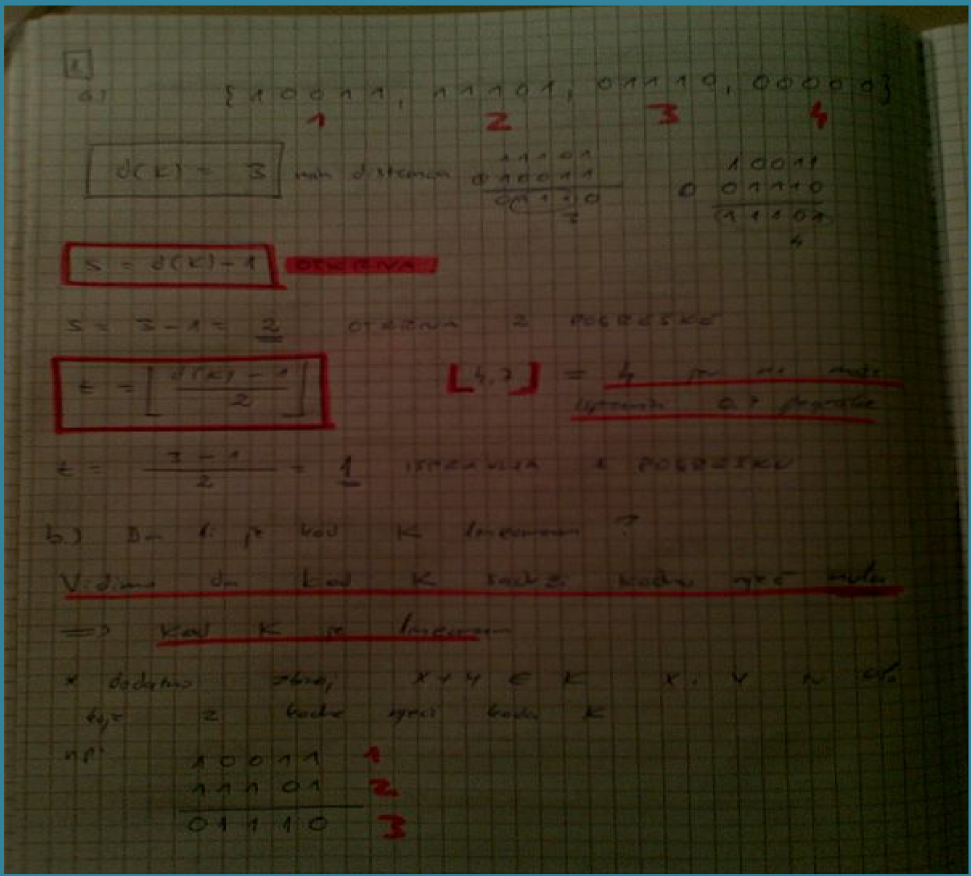
***Teorija informacije* (34315)**
Akademska godina: 2008./2009.

Zadaci za vježbu (Zaštitno kodiranje)

1. Dan je binarni blok kôd K s kodnim riječima {10011, 11101, 01110, 00000}.
   a) Koliko pogrešaka dani kôd može otkriti i ispraviti?
   b) Da li je kôd K linearan?

R: [a) $s = 2$; $t = 1$ b) da]

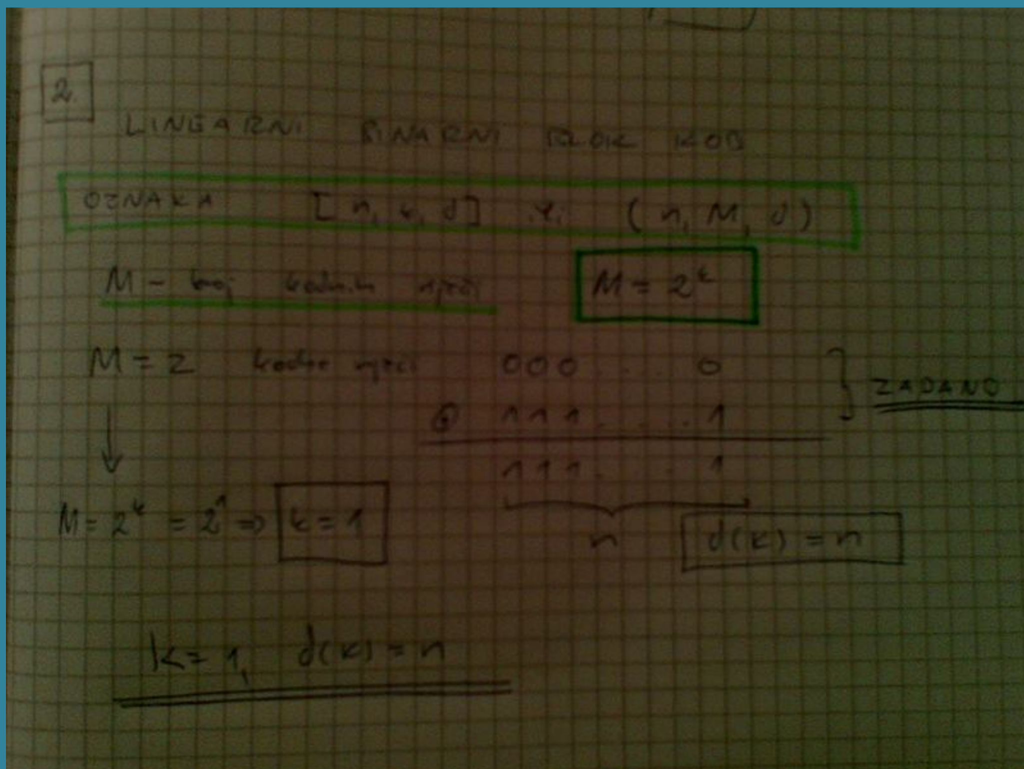
Rješenje:



2. Za bilo koji $n \geq 1$ linearni binarni blok kôd K ($[n, k, d]$) ima samo dvije kodne riječi, i to 000...0 i 111...1 i iste su duljine n. Odredite k i udaljenost koda – d.

R: $[k = 1; d = n]$

Rješenje:



3. Odredite sve kodne riječi linearnog binarnog blok koda K čija je matrica provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R: [0000000, 0110111, 0111100, 0001011, 1110000, 1000111, 1001100, 1111011]

Rješenje:

maky
Bitchy bitch

(3.)

$$H = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim H' = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$A^T \quad , \quad I_4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G' = [I_k \mid A] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = G$$

provjera:

$G \cdot H^T = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kodne riječi

000 · G = 0000000
001 · G = 0110111
010 · G = 0111100
011 · G = 0001011
100 · G = 1110000
101 · G = 1000111
110 · G = 1001100
111 · G = 1111011

4. Dan je linearni binarni blok kôd K s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}' = [110110]$, odredite kodnu riječ koja je poslana.

R: [pogreška na drugom bitu, 100110]

Rješenje:

4. ZADATAK

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c' \cdot H^T = 0$$

$$c' = [1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$$

$$c' \cdot H^T = [1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{[1\ 1\ 0]} \Rightarrow \text{greška na 2. bitu}$$

$\Rightarrow$ poslana poruka $c = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]$

5. ZADATAK Hamming [5,2]

a) $G = [I\,A]$

$$H = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow G$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\quad I_2 \quad | \quad A$$

b) kodne riječi

$[0\ 0] \cdot G = 0\ 0\ 0\ 0\ 0$

$[0\ 1] \cdot G = 0\ 1\ 1\ 0\ 1$

$[1\ 0] \cdot G = 1\ 0\ 1\ 1\ 0$

$[1\ 1] \cdot G = 1\ 1\ 0\ 1\ 1$

c) kod je linearan

(postoji kodna riječ 00000, lin kombinacijom se mogu dobiti ostale)

5. Dan je Hammingov [5, 2] binarni blok kôd.
   a) Odredite generirajuću matricu **G**=[**I A**] za dani kôd.
   b) Odredite sve kodne riječi danog koda.
   c) Da li je dani kôd linearan?

R: [a) **G**=[1 0 1 1 0; 0 1 1 0 1]; b) 00000, 01101, 10110, 11011; c) da]

Rješenje:

4. ZADATAK

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c' \cdot H^T = 0$$

$$c' = [1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]$$

$$c' \cdot H^T = [1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{[1\ 1\ 0]}$$ → greška na 2. bitu

⇒ poslana poruka $c = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0]$

5. ZADATAK Hamming [5,2]

a) $G = [I\ A]$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ H = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow G$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_2 | A

b) kodne riječi

$[0\ 0] \cdot G = 0\ 0\ 0\ 0\ 0$
$[0\ 1] \cdot G = 0\ 1\ 1\ 0\ 1$
$[1\ 0] \cdot G = 1\ 0\ 1\ 1\ 0$
$[1\ 1] \cdot G = 1\ 1\ 0\ 1\ 1$

c) kod je linearan

(postoji kodna riječ 00000, lin kombinacijom se mogu dobiti ostale)

6. Tri poruke p_1=[1011], p_2=[0110] i p_3=[1011] kodiraju se Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja, a potom se dobivene kodne riječi upisuju u tablicu kao na slici 1. Na mjestima A1, B1, C1, A2, B2, C2, A4, B4 i C4 nalaze se kontrolni bitovi. Kodne riječi se potom čitaju iz tablice i odašilju u kanal i to tako da se čitanje provodi kolona po kolona počevši od A1, potom B1, C1, A2, B2,... Na kanalu se pojavljuju pogreške u nizu tj. jedna iz druge (tzv. snopovite pogreške).

a) Odrediti kolika može biti maksimalna duljina snopa pogrešaka tako da dekoder na prijemnoj strani može provesti dekodiranje bez pogreške.

b) Ako je primljeni slijed bitova: ***0***10011100000010111101. Provedi dekodiranje! Bit ***0*** je prvi pročitan iz tablice na predajnoj strani.

Napomena: Na prijemnoj strani primljeni slijed bitova se prvo složi u tablicu, a potom se provodi dekodiranje.

	1	2	3	4	5	6	7	
A								kodna riječ p_1 -
B								kodna riječ p_2 -
C								kodna riječ p_3

Slika 1

R: [a) 3; b) pogreška u prvoj kodnoj riječi na drugom bitu i pogreška u trećoj kodnoj riječi na trećem bitu]

Rješenje:

(6) $p_1 = [1011]$ $c_0 c_1 1 c_2 011 \rightarrow 0110011$

$p_2 = [0110]$ $c_0 c_1 0 c_2 110 \rightarrow 1100110$

$p_3 = [1011]$ $c_0 c_1 1 c_2 011 \rightarrow 0110011$

a) 010/111/101/000/010/111/101

$d(K) = 3$

b) 010/011/100/000/010/111/101

A 0010011
B 1100110
C 0100011

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. bit

3. bit

Sindrom $= x \cdot H^T$

A → [010]

B → [000]

C → [110]

7. Izvorište generira 128 poruka, iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola $\mathbf{X} = \{x_0 \ldots x_{127}\}$, koje se kodiraju ravnomjernim binarnim kodom. Poruke se prije odašiljanja u kanal kodiraju Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja. Komunikacijski kanal ima širinu pojasa prijenosa 4 kHz dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite koliko se poruka u sekundi može prenositi danim komunikacijskim kanalom.

R: [≈ 3624 poruka/s]

NE ULAZI U 2_MI

7. ZADATAK

128 poruka skup 128 simbola $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{127}\}$

$B = 4$ kHz $2^7 \Rightarrow 7$ binarnih znam.

$S/N_{dB} = 30$ dB $\rightarrow$ $30\,dB = 10 \log S/N \Rightarrow S/N = 10^3$

Hammingovo kodiranje

$c_0 c_1 w_1 c_2 w_2 w_3 w_4 c_3 w_5 w_6 w_7 \Rightarrow n = 11$ znamenaka

$$X_{poruka} = \frac{C}{n} = \frac{B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}{n} \approx 3624 \text{ poruka/s}$$

8. Dan je binarni kôd $[n, k] = [6, 3]$ čije su kodne riječi oblika $d_1d_2d_3c_4c_5c_6$ i gdje su d_i-ovi i c_i-ovi bitovi poruke, odnosno, bitovi zaštite. Bitovi zaštite proračunavaju se na sljedeći način:

$$c_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3$$

$$c_5 = d_1 \oplus d_3$$

$$c_6 = d_2 \oplus d_3$$

Ako je primljena kodna riječ $\mathbf{y} = [010111]$. Odredite kodnu riječ koja je poslana.

R: [010101]

Rješenje:

Yura

Pa evo moje verzije:
prvo se izracuna matrica A preko onih uvjeta kako se racunaju zastitni bitovi.
c4=1*d1+1*d2+1*d3 znaci da u matricu A u prvi stupac stavimo 1 1 1,
a za c5=1*d1+0*d2+1*d3 stavimo 1 0 1
sad imamo A=
1 1 0
1 0 1
1 1 1

iz cega dobijemo H= [A' | I] =
1 1 1 1 **0** 0
1 0 1 0 **1** 0
0 1 1 0 **0** 1
i sad onu rijec y=[010111] pomnozimo s H(transponirano) i dobijemo sindrom
s=[0 1 0]
i sad taj sindrom nadjemo u matrici H, boldano oznaceno i u kojem je stupcu, na tom mjestu je greska, sto znaci na 5. bitu, odnosno poslana rijec je [0 1 0 1 0 1]

2_Međuispit 2008 grupa: A

Teorija informacije
Akademska godina: 2008./2009.
2. međuispit

1. prosinca 2008.

GRUPA A

Jučer, 16:09

grimmjaw

grimmjaw je offline
Postovi: 130
Spol:
Raspoloženje: Cool

2.MI 2008./2009. (moja) riješenja

4. **b** (011110)
5. **a** (101101; 5,968*10^-5)
6. **c** (1101)
8. **b** (000)
9. **c** (0,1763)
10. **a** (2)

-mislim da ostale zadatke iz tog ispita nismo (još) radili

HVALA!: (2) dod007, hrvA

Zadatak-4: Dan je linearni binarni blok kôd K s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

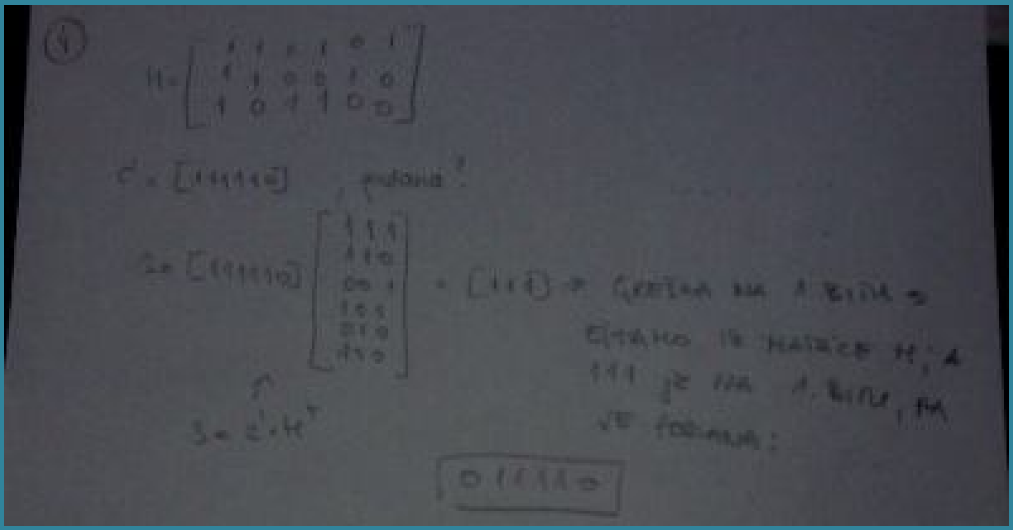
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}' = [111110]$, odredite kodnu riječ koja je poslana.

Rješenje:

a) 111111
b) 011110
c) 101110
d) 110110

Rješenje:

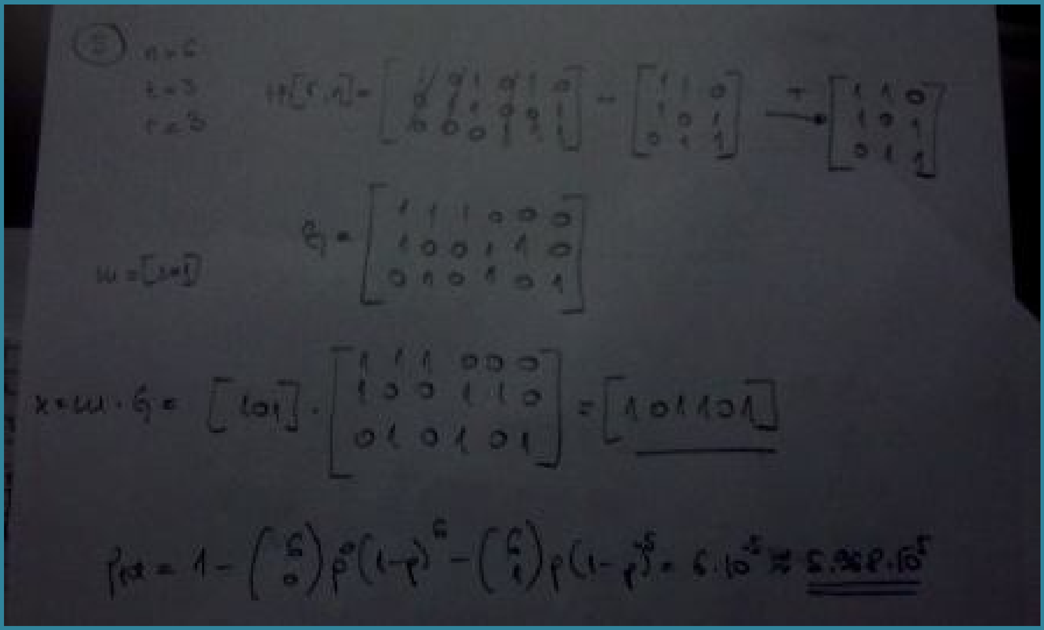


Zadatak-5: Dan je Hammingov [6, 3] binarni blok kôd s generirajućom matricom **G** u standardnom obliku. Odredite kodnu riječ koja počinje s 101, kao i vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu p_e=0,002.

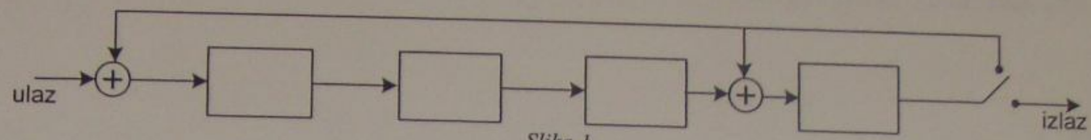
Rješenje:

a) 101101; $p_{pd} \approx 5{,}968 \times 10^{-5}$
b) 101101; $p_{pd} \approx 0{,}9999$
c) 101110; $p_{pd} \approx 4{,}129 \times 10^{-4}$
d) 101110; $p_{pd} \approx 0{,}996$

Rješenje:



Zadatak-6: Na slici 1 dan je koder za ciklični kôd [15, *k*]. Odredite cikličnu provjeru zalihosti (engl. *Cyclic Redundancy Check*, CRC) za prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu iz kodera ako se na ulazu kodera pojavljuje slijed bitova: 101010101010101...



Slika 1

Rješenje:

a) 1011
b) 1110
c) 1101
d) 0001

Rješenje:

$r = 4$
$n = 15$
$k = 11$

$d(x) = 10101010101 = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$

$(d(x) \cdot x^4) : g(x)$

$(x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4) : (x^4 + x^3 + 1) = x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^2 + 1$

$x^3 + x^2 + 1 \rightarrow \underline{[1101]} \rightarrow CRC$

Zadatak-7: Izvorište generira 4 poruke, iz skupa od 4 jednako vjerojatna simbola $\mathbf{X} = \{x_0 \ldots, x_3\}$, koje se kodiraju ravnomjernim binarnim kodom. Poruke se prije odašiljanja u kanal uvode u ciklični koder $[n, k]$ čiji je generirajući polinom $g(x) = x^4 + x^2 + 1$. Komunikacijski kanal ima širinu pojasa prijenosa 4 kHz dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite koliko se poruka u sekundi može prenositi danim komunikacijskim kanalom

Rješenje:

a) ≈39869 poruka/s
b) ≈26633 poruka/s
c) ≈6644 poruka/s
d) ≈3804 poruka/s

Rješenje:

② $B = 4kHz$

$r = 4$ $\qquad \frac{S}{N} = 30dB$

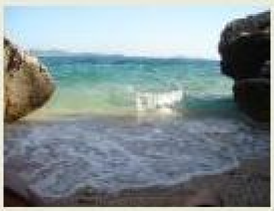
$M = 4 = 2^k$ $\qquad 30db = 10\log \frac{S}{N} \Rightarrow \frac{S}{N} = 10^3$

$k = 2$

$\underline{n = 4+2=6}$

$$X = \frac{S}{N} = \frac{B\log_2(1+\frac{S}{N})}{6} = \frac{4000 \cdot \log_2(1+10^3)}{6} = 6644 \text{ poruka/s}$$

somebody



:

B (sirina)=4kHz
r=4 (to dobijes iz g(x)=x^**4**...)
S/N =30dB, 10log (S/N)= 30dB , S/N =10^3
M=4 (4 poruke)
M=2^**2**=4, a ovaj **2** je u biti k, pa k=2
n=r+k=4+2=6
formula :
Xporuka= C/n= {B log(2)(1+ S/N) }/ 6 = 6644 poruka/s
a formula za C se nalazi na 113 str.

usput, ne vidim čemu zanimacija za 7- zadatak, nisam nigdje na predavanju čuo da se spominju decibeli ili kiloherci... a to spada u gradivo na str. 113 koje ne ulazi u ovaj ispit jer nismo radili... 2.mi pokriva gradivo od 125-183. strane u knjizi (pogledajte plan)

Zadatak-8: Generirajući polinom $g(x)=x^3+x^2+1$ koristi se u cikličnom kodu [7, k]. Odredite sindrom za prvu primljenu kodnu riječ ako se na ulazu dekodera cikličnog koda pojavljuje sljedeći slijed bitova: 1010001000110110...

Rješenje:

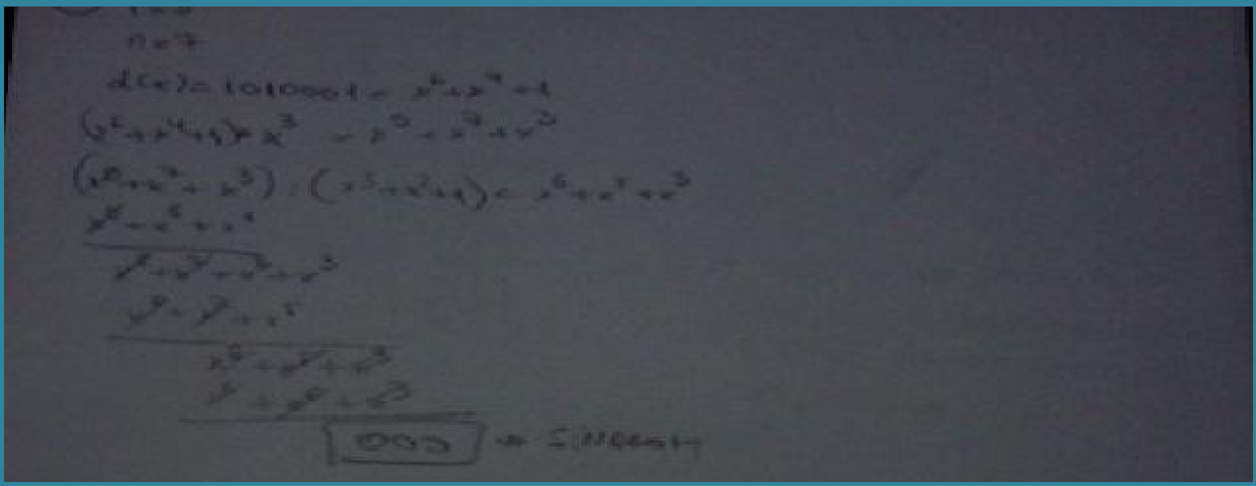
a) x^2+x+1
b) 000
c) $x+1$
d) x^2+x

Rješenje:

8. iz 2.mi
g(x) = x^3+x^2+1 -> iz tog vidiš k=n-3=7-3=4 [7,4]

dakle u dekoder ulaze prvih 7 bitova = 1010001 -> to prebaciš u polinomski oblik i ispada x^6+x^4+1 -> zatim se taj polinom pomnoži sa najvećim stupnjem g(x) što je x^3 = x^9+x^7+x^3 -> taj se novi polinom podijeli sa g(x) i dobije se ostatak 0 što odgovara odgovoru pod ***b)***

8.zadata,2.mi
U knjizi piše na stranici 181,da se sindrom za cikliči kod računa isto kao i zaštitni dio cikličkog koda,tj imamo niz bitova 1010001000110110.... i imamo g(x) = x^3+x^2+1.E sad vidimo iz ovok g(x) da je onaj dio zaštitnog koda r=3,stoga iz ovog niza uzmemo samo prva 4 bita 1010 te dobijemo d(X)= x^3+x i sa to pomnožimo s onim x^r=x^3 i dobijemo d(X)= x^6+x^4 i to pretvorimo sad u 1010000 i podjelimo sa g(x) koji je 1101
1010000:1101 i dobijemo ostatak 111 koji je ubiti x^2+x+1 i to je odgovor a na ispitu



Citiranje:

> Izvorni post od **mislav** :
> *ma ti rješavaš zadatak u međuispitu a ja ti kažem za zadatak u zbirci,pogledaj mislim da ne pričamo o isom zadatku,a ako u knjizi piše da se računa na jednak nači našto bi se onda uzimalo drukčije a nigdje ne stoji da mora u tom na ispitu biti 000,jel imaj di točna riješenja?pogledaj taj u zbirci pa ga riješ.*

Ne govorim o zadatku, nego opcenito :
CRC se racuna kako si ti rekao, a da bi dobio Sindrom, moras vec kodiranu poruku izracunat na nacin kao sto racunas CRC, s tim da za d(x) uzimas VEC KODIRANU PORUKU, a ne SAMO informacijske bitove, znaci uzimas n=k+r.

A sad ako grijesim, nek me ispravi netko, al s tobom se ne slazem,jer sam zadatak iz zbirke rjesila na ovaj nacin i dobila tocno, tako da ocito faljivamo nesto, il ti il ja.

Post zadnji uredio korisnik somebody : Danas u 15:17

Zadatak-9: Slijed bita **x** = [10101010101] ulazi u Hammingov koder $[n, k] = [15, 11]$ i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita 0,15. Odredite za koliko se smanji vjerojatnost ispravnog dekodiranja slijeda **x** ako se umjesto Hammingovog kodera kao zaštita uporabi paritet (parni!).

Rješenje:
a) 0,0564
b) 0,9436
c) 0,1763
d) 0,8264

Rješenje:

(9) $n = 15$

$k = 11$ $\quad P = \binom{15}{0} p^0 (1-p)^{15} + \binom{15}{1} p (1-p)^{14} = 0{,}31852$

$r = 4$

paritet: $11 + 1 = 12$

$P = \binom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} = 0{,}14224$

$\Delta = 0{,}31852 - 0{,}14224 = \underline{0{,}17633}$

Zadatak-10: Binarni blok kôd K ($n = 6$) definiran je na sljedeći način: $K = \{abcdef \mid d \equiv a + b,\ e \equiv b + c,\ f \equiv a + c \pmod 2\}$. Odredite koliko pogrešaka kôd K može otkriti.

Rješenje:

a) 2
b) 1
c) 0
d) 3

Rješenje:

(10)

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow d(K) = 3$$

OTKRIT POGREŠKO

$d(K) - 1 = 3 - 1 = 2$

Dodatni zadaci

Zadatak-9: Slijed bita **x** = [10101010101] ulazi u Hammingov koder $[n, k] = [15, 11]$ i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita 0,15. Odredite za koliko se smanji vjerojatnost ispravnog dekodiranja slijeda **x** ako se umjesto Hammingovog kodera kao zaštita uporabi paritet (parni!).

Rješenje:

a) 0,0564
b) 0,9436
c) 0,1763
d) 0,8264

4_DZ

Zadatak – 19:
Dvije kodne riječi "00" i "11" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa $p < 0{,}5$. Na prijemnoj strani provodi se sljedeće pravilo dekodiranja: ako su u primljenoj kodnoj riječi dva bita različita prijemnik od predajnika traži ponovno slanje te kodne riječi. U svim drugim slučajevima prijemnik (dekoder kanala) provodi dekodiranje. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja.

Rješenje:

Zadatak – 20:
Dan je binarni kôd K s kodnim riječima oblika $d_1d_2d_3c_4c_5c_6$ i duljinama 6 simbola, gdje su d_1, d_2, $d_3 \in F_2 = \{0, 1\}$ proizvoljni brojevi, dok c_4, c_5 i c_6, moraju zadovoljavati sljedeće:

$$c_4 \equiv d_1 + d_2 \pmod 2$$

$$c_5 \equiv d_2 + d_3 \pmod 2$$

$$c_6 \equiv d_1 + d_3 \pmod 2$$

i) Odredite generirajuću matricu **G** za dani kôd K.
ii) Odredite sve kodne riječi danog koda.
iii) Provjerite je li zadovoljen uvjet linearnosti za kôd K.
iv) Odredite matricu provjere pariteta – **H**.

Rješenje:

(20)

- KOD K $d_1 d_2 d_3 c_4 c_5 c_6$
- $d_1, d_2, d_3 \in F_2 = \{0,1\}$

$c_4 \equiv d_1 + d_2 \pmod{2}$

$c_5 \equiv d_2 + d_3 \pmod{2}$

$c_6 \equiv d_1 + d_3 \pmod{2}$

ii

$$K \left\{ \begin{array}{cccccc|c} d_1 & d_2 & d_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & b_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & b_5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & b_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_8 \end{array} \right.$$

i

$$G = \begin{bmatrix} 100101 \\ 010110 \\ 001011 \end{bmatrix}$$

① Naš kod K ima 8 vektora u bazi i svaka riječ koda se može zapisati u obliku:

$$\boxed{x = a_i \cdot b_1 + a_i \cdot b_2 + \dots + a_i \cdot b_8}$$

$$a_i \in F_2 = \{0,1\}$$

1° OTPIŠEMO 00...000, JER NJEGA MOŽEMO UVIJEK DOBITI MNOŽEĆI S NULOM

2° IZABEREMO RIJEČI TAKVE DA NJIHOVOM KOMBINACIJOM MOŽEMO DOBITI SVE OSTALE

iii) UVJET LINEARNOSTI: ako je za sve $x, y \in K$ i $a \in F_2$ ispunjeno:

- $x + y \in K$ $\longrightarrow$ zbrajanjem bilo koje dvije riječi dobijemo riječ koja je također u našem kodu K.
- $a \cdot x \in K$ $\longrightarrow$ množenjem bilo koje riječi sa nekim od skalara $(0,1)$ dobijemo opet riječ iz koda.

– UVJET JE ISPUNJEN, da nije ne bi mogli ni odrediti gen. matricu G.

$$G = \left[I_k \mid A \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right] \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$H = \left[A^T \mid I_{n-k} \right] = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0 \\ 1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Zadatak – 21:

Dan je binarni kôd $K \subset F^4{}_2$ s generirajućom matricom

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Pronađite standardni niz koda K.
ii) Odredite tablicu sindroma koda K.

Rješenje:

24) $K \subset F_2^4$

$$G = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \end{array}$$

(*) Ostale kodne riječi koda K možemo dobiti linearnom kombinacijom vektora iz G.

$$x = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(a_1, a_2 \in \{0,1\})$$

$$[0000] = 0 \cdot [1010] + 0 [0101]$$

$$[1111] = 1 \cdot [1010] + 1 \cdot [0101]$$

i) $K \begin{cases} 0000 \\ 0101 \\ 1010 \\ 1111 \end{cases}$

ii) $G = [I_k \mid A] \Rightarrow G = \begin{array}{c} \quad I_k \quad\; A \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$H = [A^T \mid I_{n-k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SINDROM PRIMLJENE KODNE RIJEČI:

$$S(y) = y \cdot H^T$$

Zadatak – 22:

Dan je binarni kôd $K\,[n, k]=[7, 4]$ s generirajućom matricom

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

i) Odredite matricu provjere pariteta – **H**.
ii) $d(K)$=?
iii) Provjerite je li dani kôd K perfektan.
iv) Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ c=[1110100].

Rješenje:

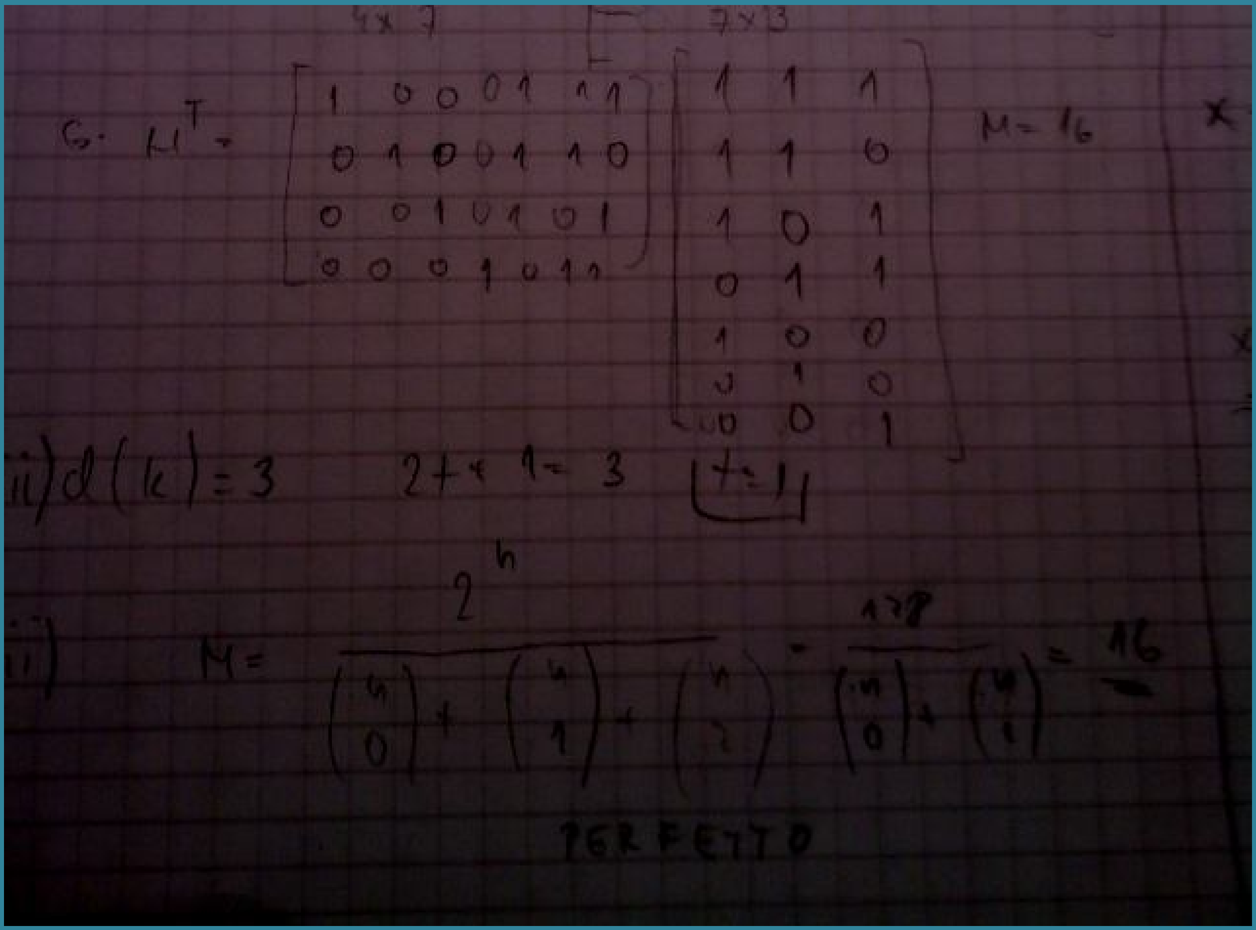
22

$K[n,k] = [7,4]$

iv)

$$G=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

i) $H=[A^T \mid I_{n-k}] = \begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$.



4×7 $\qquad$ 7×3

$$G\cdot H^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad M=16$$

ii) $d(K)=3 \qquad 2t+1=3 \qquad \boxed{t=1}$

iii) $$M=\frac{2^n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}}=\frac{128}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}}=\underline{16}$$

PERFETTO

Zadatak – 23 /*neobvezan zadatak*!/:

Za ternarni kôd $K\,[n, k]=[4, 3]$ s generirajućom matricom **G** odredite matricu provjere pariteta (**H**) kao i sve kodne riječi koda $K^{\perp}$.

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\2&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

Rješenje:

5_DZ

Zadatak – 24:

Dan je Hammingov kôd K s duljinom kodne riječi $n = 3$ bita. Odredite:

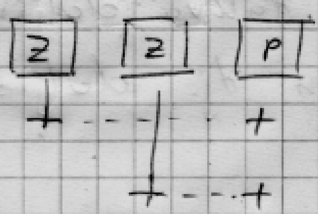
a) generirajuću matricu danog koda.

b) sve kodne riječi koda K kao i koda $K^{\perp}$.

c) vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu p_g=10^{-3}.

Rješenje:

24)



Z → zaštitni bit

P → podaci

a) $G = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right.$

$H = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K^{\perp} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right.$

$$C = P_{pd} = \underbrace{\binom{3}{2} p^2 (1-p)}_{\text{dvostruka greška}} + \underbrace{\binom{3}{3} p^3}_{\text{trostruka greška}} = 2.998 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak – 25:

Dan je Hammingov binarni kôd K $[n, k]$=[7,4]. Kodne riječi koda K se prenose komunikacijskim kanalom s brisanjem simbola. Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ c'=[101?01?].

Rješenje:

25)

$$c' = \underset{P_1}{1}\,\underset{P_2}{0}\,1\,\underset{P_3}{x_1}\,0\,1\,x_2$$

$$P_1 \Rightarrow 1 + 1 + 0 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$P_2 \Rightarrow 0 + 1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow \checkmark$$

$$P_3 \Rightarrow x_1 + 0 + 1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$c = 1011010$$

Zadatak – 26:
Mjerenjem je utvrđeno da u binarnom komunikacijskom kanalu djeluju smetnje koje mogu uzrokovati pogrešan prijenos od jednog bita u slijedu od najmanje 8 uzastopnih bita. Za zaštitu informacije uporabljen je Hammingov koder, a duljina zaštitno kodiranog bloka prilagođena je uvjetima koji vladaju u kanalu. Za slijed bitova 10100100... odredite <u>prvi</u> zaštitno kodirani blok bitova ali tako da je kodna brzina maksimalna.

Rješenje:

26) max. kodna brzina = tražimo takvu duljinu da je blok maksimalno popunjen tj. duljina je $2^k - 1$

$p = \frac{1}{8} \Rightarrow$ max. duljina je 8

biramo kod [7, 4, 3] $\Rightarrow$ kodiramo po 4 simbola

<u>1010</u>0100

$1010 \Rightarrow 1011010$

Zadatak – 27:

Prijenosna tehnologija ATM (engl. *Asynchronous Transfer Mode*) koristi 8-bitnu cikličnu provjeru zalihosti (CRC, engl. *Cyclic Redundancy Check*) kao zaštitu zaglavlja ATM ćelije. Zaglavlje ćelije veličine je 5 okteta što uključuje i polje zaštite (8 bitova). Za generiranje CRC-a koristi se polinom $g(x)=x^8+x^2+x+1$. Odredite cikličnu provjeru zalihosti za ATM ćeliju čiji je sadržaj prva četiri okteta zaglavlja sljedeći: 0000 00000000 00000000 00001111 000 0.

Rješenje:

27) $g(x) = x^8 + x^2 + x + 1$

$m(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4$

$C(x) = m(x) \cdot x^8 \ \% \ g(x)$

8 = stupanj od $g(x)$ ostatak pri dijeljenju

$$x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} : x^8 + x^2 + x + 1 = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x$$

$$x^{15} + x^9 + x^8 + x^7$$

$$x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^9 + \cancel{x^8} + \cancel{x^7}$$

$$x^{14} + \cancel{x^8} + \cancel{x^7} + x^6$$

$$x^{13} + x^{12} + x^9 + \cancel{x^6}$$

$$x^{13} + x^7 + \cancel{x^6} + x^5$$

$$x^{12} + x^9 + x^7 + \cancel{x^5}$$

$$x^{12} + x^6 + \cancel{x^5} + x^4$$

$$x^9 + x^7 + x^6 + \cancel{x^4}$$

$$x^9 + x^3 + x^2 + x$$

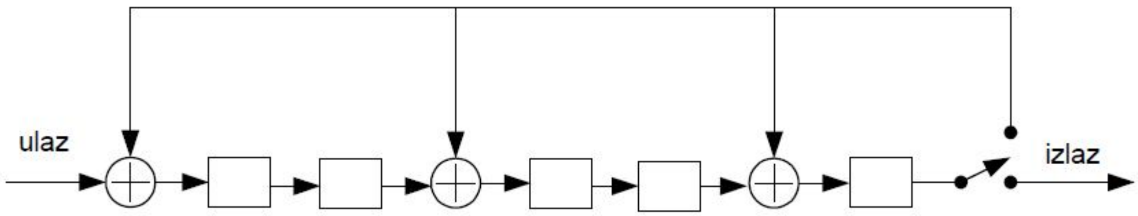
$$x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x \Rightarrow 11011110$$

Zadatak – 28:

Na slici dan je koder za ciklični kôd [15, k].

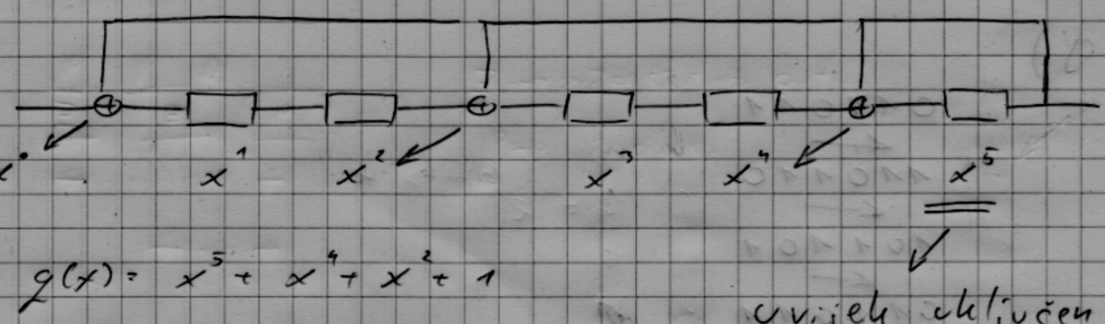
a) Odredite generirajuću matricu $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}]$.

b) Kodirajte slijed bitova 1001110100.



Rješenje:

28)



$$g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$$

$$\left.\begin{matrix} r = 5 \\ n = 15 \end{matrix}\right\} k = n - r = 10$$

$$G = \left[\begin{array}{cccccccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$m = 1001110100$$

$$c = m \cdot G = 1001110100\underline{00001}$$

Zadatak – 29:

Neka je K linearni ciklični kôd kojem pripada kodna riječ 011011.

a) Ispišite sve kodne riječi danog koda u binarnom i polinomskom zapisu.
b) Odredite generirajući polinom $g(x)$ danog koda K.
c) Kodirajte poruku 11 koristeći $g(x)$.

29)

011011

$\leftarrow$

110110

$\leftarrow$

101101

$\leftarrow$

011011

$$K = \begin{cases} 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 = 0 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 = x^5 + x^3 + x^2 + 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 = x^4 + x^3 + x + 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 = x^5 + x^4 + x^2 + x \end{cases}$$

četiri kodne riječi: $4 = 2^{2}$ $2 \rightarrow k$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = x^4 + x^3 + x + 1$$

$$m(x) = x + 1$$

$$c(x) = m(x) \cdot x^4 \ \% \ g(x)$$

$$\cancel{x^5} + \cancel{x^4} : x^4 + x^3 + x + 1 = x$$

$$\underline{\cancel{x^5} + \cancel{x^4} + x^2 + x}$$

$$x^2 + x = 0110$$

ukupno $n = 6$

poruke $k = 2$

zaštite $n - k = 4$

Zadaci iz zbirke

4. Zaštitno kodiranje

Zadatak-1: Dan je kôd $[k+1, k]$ s parnim paritetom.
a) Izračunajte sve kodne riječi koda [4,3]!

b) Koje pogreške može detektirati ovakav kôd?

c) Izračunajte vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka (p_{np}), uz uvjet da se pogreške na jednom bitu pojavljuju s vjerojatnošću $p_g = 0{,}04$!

Rješenje:

a) Kodne riječi koda [4, 3] su:

0000	1001
0011	1010
0101	1100
0110	1111

b) Ovaj kôd može detektirati jednostruke i trostruke pogreške. Uslučaju parnog broja pogrešaka, poslana kodna riječ bi prešla u neku od 8 kodnih riječi koda i pogreške ne bi bile detektirane.

c) Vjerojatnost nedetktiranih pogrešaka p_{np} jednaka je zbroju vjerojatnosti dvostrukih i četverostrukih pogrešaka i iznosi:

$$p_{np} = \binom{4}{2} p_g^2 (1-p_g)^2 + \binom{4}{4} p_g^4 (1-p_g)^0 = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$$

a) n=4 duljina kodne riječi, k=3 dimenzija koda

kako se radi o parnom paritetu (broj jedinica mod2 = 0) biramo samo one kodne riječi koje imaju paran broj jedinica + kodna riječ nula 0000 kako bi bio zadovoljen uvjet linearnosti

b) otkriva s=min_distanca-1 , ispravlja t=(min_distanca-1)/2 c)

Vjerojatnost ispravnog dekodiranja (2/3)

- Primjer: Za kôd $[n, k, d] = [5, 2, 3]$ vrijedi:
  $p(00001)=p(00010)=p(00100)=p(01000)=p(10000)=$
  $= p_g(1-p_g)^4.$
- Vjerojatnost $p(K)$ da će riječ dobivena dekodiranjem **pomoću standardnog niza** biti jednaka poslanoj računa se iz:

$$p(K)=\sum_{i=0}^{n} N_i\, p_g^i (1-p_g)^{n-i}$$

  - N_i je broj vektora pogreške s i jedinica koji pripadaju standardnom nizu blok koda K duljine n.
    - Primjer (kôd [5, 2, 3]): $\{00000\} \rightarrow N_0 = 1$; $\{00001, 00010, 00100, 01000, 10000\} \rightarrow N_1 = 5$; $N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = 0$.

Teorija informacije 48 od 50

Zadatak-2: Dan je binarni kôd [6, 3] s matricom **A**:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

a) Da li je slijed [101010] kodna riječ?

b) Neka je kodna riječ dana u obliku [*X*11100]. Odredite *X*.

c) Pretpostavimo da je kodna riječ [001111] odaslana, a [001101] primljena. Odredite sindrom!

d) Ispišite sve kodne riječi u ovom kodu.

e) Koji je najmanji mogući broj pogrešaka koje jednu kodnu riječ prevode u drugu.

Rješenje:

a) Ako je slijed [101010] kodna riječ, onda vrijedi $[101010]\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$

Matrica **H** je oblika:

$$\mathbf{H}=\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\middle|\ \mathbf{I}\right]$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Vidimo da je uvijet $[101010]\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$ ispunjen i slijed [101010] je kodna riječ danog koda.

b) Znamo da svaku kodnu riječ c nekog koda mora vrijediti $\mathbf{c}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$. Ako u gornji izraz uvrstimo **c**=[11100], s lijeve strane izraza dobit ćemo [*X*0*X*] iz čega zaključujemo da *X* mora biti jednak nuli.

c) U danom slučaju sindrom iznosi:

$$\mathbf{s}=[001101]\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=[001101]\cdot\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[010]$$

d) Generirajuća matrica **G** danog koda je oblika

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

Ako sada uvrstimo sve kodirane poruke **d**, od [000] do [111] u izraz $\mathbf{c}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{G}$, dobiti ćemo sve kodne riječi **c** u ovom kodu:

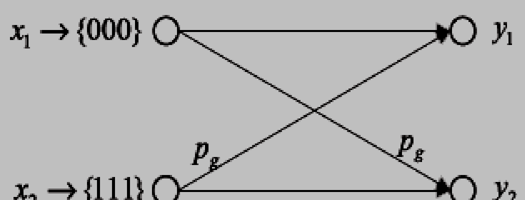
000000
001111
010011
011100
100101
101010
110110
111001

e) Najmanji mogući broj pogrešaka koje jednu kodnu riječ prevode u drugu jednak je tri.

Zadatak-3: Dvije kodne riječi "000" i "111" koriste se za prijenos informacija preko diskretnog binarnog simetričnog kanala u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa p=0,2. Na prijamnoj strani se kod dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja. Također, odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola u kojem je vjerojatnost brisanja p=0,2.

Rješenje:

a) Skicirajmo prvi kanal:



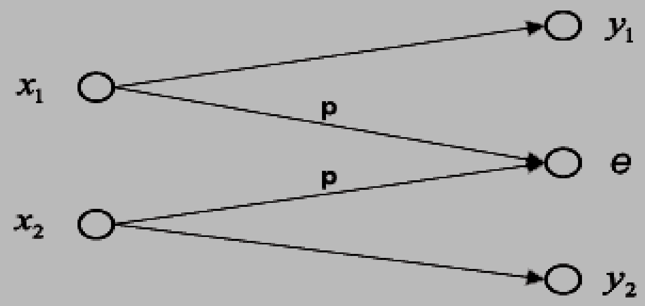
Slijed bitova na izlazu iz kanala će se dekodirati ovako:

$\underline{\underline{000}}$	$\underline{\underline{111}}$
001	101
010	110
100	011

Vjerojatnost pogrešnog kodiranja p_e iznosi:

$$p_e = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 3p^2(1-p) + p^3 = 0{,}1040$$

b) Skicirajmo kanal s brisanjem simobla:



Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja za slučaj binarnog kanala s brisanjem simbola p_e iznosi:

$$p_e = \frac{1}{2}\binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = \frac{1}{2} \cdot p^3 = 0{,}0040$$

Zadatak-4: Mjerenjem je utvrđeno da u binarnom komunikacijskom kanalu djeluju smetnje koje mogu uzrokovati pogrešan prijenos od jednog bita u slijedu od najmanje 17 uzastopnih bita. Za zaštitu informacije uporabljen je Hammingov koder, a duljina zaštitno kodiranog bloka prilagođena je uvjetima koji vladaju u kanalu.
Za informaciju zadanu s m_n binarnih elemenata:

m_1	m_2	m_3...		m_n
1	0	1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1	....	1

a) Odredite prvi zaštitno kodirani blok.
b) Za koliko će se smanjiti ili povećati kodna brzina ako se zbog promjene u djelovanju smetnji duljina kodirane poruke postavi na 11 bita?

Rješenje:

a) Utvrđeno je da smetnje u kanalu mogu uzrokovati pogrešan prijenos jednog bita u slijedu od 17 bitova, odnosno na svakih 17 bitova prenesenih kanalom dolazi ili jedan ili nijedan pogrešan bit. Znamo da Hammingov koder može sigurno otkriti i ispraviti jednostruku pogrešku, te zaključujemo da kodna riječ može biti duljine najviše 17 bitova. Ako bi kodna riječ bila duga, npr. 18 bitova, postoji vjerojatnost da se u prijenosu dogode dvije pogreške i Hammingov kôd ih neće biti u stanju ispraviti. Dakle, za zaštitu informacije ćemo koristiti Hammingov koder [17,12], tj. kodna riječ će biti duljine 17 bitova i sastojat će se od 12 informacijskih i 5 zaštitnih bitova.

Znači prvi informacijski blok koji ćemo zaštiti je [101010101101].

Zaštitni bitovi kod kodne riječi kodirane Hammingovim kodom su postavljeni na pozicijama koje odgovaraju potencijama broja 2 (1, 2, 4, 8, 16,...) i dobivaju se kao paritetni bitovi određenih podgrupa informacijskih bitova poruke, kao što vidimo u izrazima dolje (u slučaju da nije drugačije naznačeno, pod „paritet" se zapravo podrazumjeva parni paritet):

$$x_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_4 \oplus m_5 \oplus m_7 \oplus ... = x_3 \otimes x_5 \otimes x_7 \otimes x_9 \otimes x_{11} \otimes ...$$

$$x_2 = m_1 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_6 \oplus m_7 \oplus ... = x_3 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_{10} \otimes x_{11} \otimes ...$$

$$x_4 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 \oplus m_8 \oplus m_9 \oplus m_{10} \otimes ... m_{11} \otimes =$$

$$= x_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \otimes x_{12} \otimes x_{13} \otimes x_{14} \otimes x_{15} \otimes ...$$

x_i označava *i*-ti bit kodne riječi, a m_i *i*-ti informacijski bit poruke.

Kodirajmo sada tim postupkom zadani informacijski blok [101010101101]:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
_	_	1	_	0	1	0	_	1	0	1	0	1	1	0	_	1
$\underline{1}$		1		0		0		1		1		1		0		1
	$\underline{0}$	1			1	0			0	1			1	0		
			$\underline{1}$	0	1	0					1	1	1	0		
							$\underline{0}$	1	0	1	1	1	1	0		
															$\underline{1}$	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1

b) Kodna brzina *R* nekog koda jednaka je omjeru broja informacijskih bitova i ukupnog broja bitova u kodnoj riječi.

Kodna brzina koda (17,12) iznosi: $R_1 = \frac{12}{17} = 0{,}7059\,(70{,}59\,\%)$

Ako se duljina kodne riječi ograniči na 11 bitova, analizom možemo zaključiti da će se ona sastojati od 7 informacijskih i 4 zaštitna bita (zaštitni bitovi se nalaze na pozicijama 1, 2, 4 i 8, dakle ukupno ih ima četri), tj. koristit ćemo kôd [11,7].

Kodna brzina koda [11,7] iznosi: $R_1 = \frac{7}{11} = 0{,}6364\,(63{,}64\,\%)$

Zaključujemo da se nakon postavljanja duljine kodne riječi na 11 bita kodna brzina smanjila za 0,0695 (6,95%) u odnosu na slučaj kada je duljina kodne riječi bila 17 bitova.

Zadatak-5: Slijed bita $\mathbf{x}$=[10101010101] ulazi u Hammingov koder [15, 11] i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita $p_g=2\times10^{-3}$.

a) Odredite generirajuću matricu **G**.

b) Odredite izlazni slijed iz kodera za dani ulazni slijed **x**.

c) Ako je primljena kodna riječ **c**=[11111100000000], odredite koja je kodna riječ poslana.

d) Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) na izlazu iz kodera.

Rješenje:

a) Matrica provjere pariteta **H** koda [15,11] je oblika:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Iz matrice provjere pariteta **H** možemo dobiti generirajuću matricu **G** koda [15,11] koja je oblika:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

b) Izlazni slijed iz kodera **c** možemo dobiti tako da pomnožimo ulazni slijed **x** = [10101010101] s generirajućom matricom **G**:

$$\mathbf{c}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{G}=[101101001010101]$$

c) Pomoću gore dobivene matrice provjere pariteta **H** i možemo izračinati sindrom s:

$$\mathbf{s}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=[1110]$$

Budući da je sindrom s jednak [1110], odnosno 7, zaključujemo da se dogodila pogreška u prijenosu i to na <u>sedmom bitu</u> kodne riječi.

Dakle, poslana je kodna riječ [111111100000000].

d) Vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) iznosi:

$$p_{pd}=1-\binom{15}{0}p_e^0(1-p_e)^{15}-\binom{15}{1}p_e^1(1-p_e)^{14}=4{,}129\cdot10^{-4}$$

Zadatak-6: Ciklični kôd [7, *k*] opisan je generirajućim polinomom $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

a) Odredite generirajuću matricu $\mathbf{G} = [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$.

b) Odredite kodnu riječ koja počinje s [110].

c) Nacrtajte ciklički koder.

Rješenje:

a) Odredimo generirajuću matricu **G** danog cikličnog koda:

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

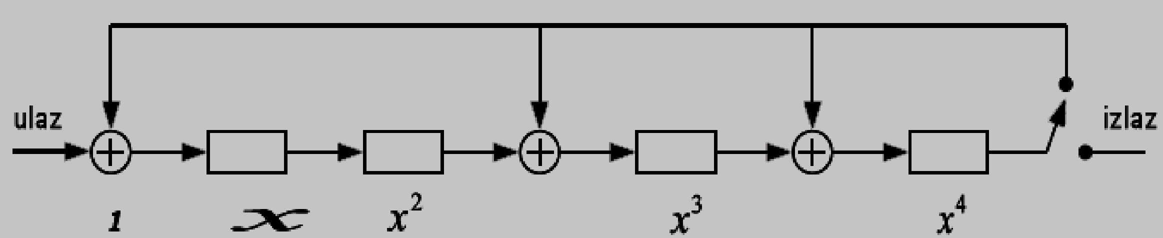
Dakle, matrica **G** iznosi:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b) Kod cikličkog koda [7,3] prva tri bita kodne riječi su informacijski bitovi te kodnu riječ možemo dobiti množenjem kodirane poruke [110] s generirajućom matricom **G**:

$$\mathbf{c} = [110] \cdot \mathbf{G} = [1101001]$$

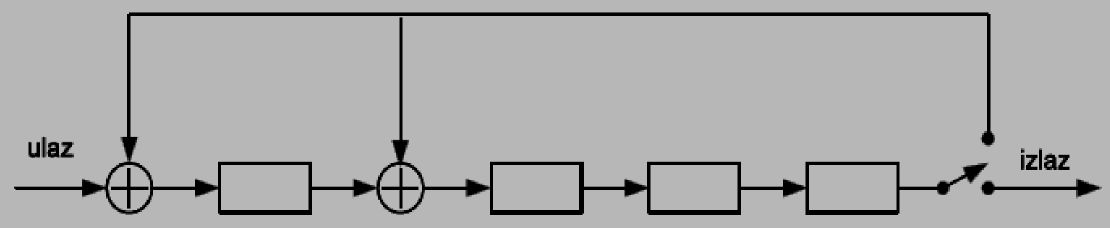
c) Ciklični koder za dani kôd izgleda ovako:



Zadatak-7: Na slici (Slika 4.1) dan je koder za ciklički kôd [15, k].

a) Odredi generirajući polinom $g(x)$.

b) Kodirajte slijed 10001001010.



Slika 4.1 Ciklički koder [15, *k*] u zadatku 7

Rješenje:

a) Iz slike kodera lako možemo očitati generirajući polinom $g(x)=x^4+x+1$ i isto tako (budući da je stupanj polinoma jednak četri) da se radi o cikličnom kodu [15,11].

b) Kôd je [15,11] dakle prvi kodirani slijed dobit će se iz prvih 11 bitova ulaznog slijeda, tj. iz "10001001010".

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti kao ostatak dijeljenja kodirane poruke (tj. informacijskih bitova) napisane u polinomnom obliku te pomnožene sa x^{n-k} (n - duljina kodirane poruke, k - broj informacijskih bitova) i genererirajućeg polinoma $g(x)$, tj.

$$r(x)=\mathrm{ost}\frac{x^{n-k}\cdot d(x)}{g(x)}$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n-k}\cdot \mathrm{d}(x)}{g(x)}=\frac{x^4\left(x^{10}+x^6+x^3+x\right)}{g(x)}=x^{10}+x^7+x^4+1 \text{ uz ostatak } x+1$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi $x+1$, odnosno [0011] iz čega slijedi da je tražena kodna riječ **c**=[10001001010<u>0011</u>].

Zadatak-8: Potrebno je generirati ciklični kôd $[n, k]=[6,2]$ koristeći jedan od niže navedenih generirajućih polinoma:

$$g(x)=x^3+x+1$$

$$g(x)=x^2+1$$

$$g(x)=x^4+x^2+1$$

a) Odredite generirajuću matricu $\mathbf{G}=[\mathbf{I}|\mathbf{A}]$.

b) Napišite sve kodne riječi za dani ciklični kôd.

c) Koliko pogrešaka može ispraviti dani kôd?

d) Nacrtajte ciklični koder [6,2] za odabrani polinom $g(x)$.

Rješenje:

a) Znamo da je ciklični kôd [6,2], tj. kodna riječ sadrži četiri zaštitna bita, iz čega zaključujemo da generirajući polinom mora biti četvrtog stupnja, te je

$$g(x)=x^4+x^2+1.$$

Sada lako možemo pomoću generirajućeg polinoma odrediti generirajuću matricu **G** koja je oblika:

$$\mathbf{G}=\left[\begin{array}{cc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

b) Ciklični kôd je [6,2], dakle kodirane poruke su dvobitne i mogu biti 00,01,10 i 11.

Uz pomoć generirajuće matrice **G** lako možemo iz kodiranih poruka dobiti sve četiri kodne riječi **c** danog cikličnog koda.

d	$c = d \cdot G$
00	000000
01	010101
10	101010
11	111111

c) Za svaki linearni blok kôd vrijedi:

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$$

gdje je ***n*** duljina kodne riječi, ***k*** broj informacijskih bitova u kodnoj riječi, a ***t*** broj pogrešaka koje kôd može ispraviti.

Primijenimo ovaj uvjet:

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$$

$$2^{7-4} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{7}{i}$$

$$8 \geq \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 1 + 7 = 8$$

Iz gornjeg proračuna možemo vidjeti da dani kôd može ispraviti najviše jednu pogrešku.

d) Ciklični koder danog koda izgleda ovako: