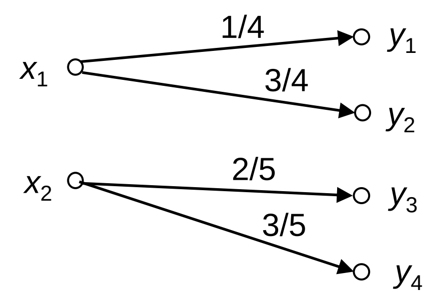
Teorija informacije

Osnovni pojmovi teorije informacije – primjeri informacijskih kanala

Kanal bez gubitka informacije

- kanal bez gubitaka: kad primimo neki simbol y_j, j = 1, ..., m, na izlazu kanala točno znamo koji je simbol x_i, i = 1, ..., n, $n \leq m$, poslan kanalom
- na razini matrice kanala, u svakom stupcu postoji samo jedan element različit od nule
  - primjer: $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2$
  - $p_1 + p_2 = 1$

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$



- nadalje vrijedi:
  - $P(x_i|y_j) = \mathrm{P}(x_i,y_j)/P(y_j) = P(y_j|x_i)\cdot P(x_i)/P(y_j)$ i $P\left(y_j\right)=\sum_{i=1}^{n} P\left(x_i, y_j\right)$
    - s obzirom da je u svakom stupcu samo jedan element različit on nule, vrijedi: $P(x_i|y_j) \in \{0, 1\}$

Kapacitet kanala bez gubitka informacije

- dakle, [*P*(*X*|*Y*)] sadrži samo nule i jedinice
- vezano uz gornji primjer

$$\left[P\left(X|Y\right)\right]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

- kapacitet kanala bez gubitaka u općenitom slučaju s *n* ulaznih simbola x_i, $i = 1, ..., n$, moguće je izračunati sljedećim izrazom

$$I\left(X;Y\right)=H\left(X\right)-H\left(X|Y\right)=H\left(X\right)$$

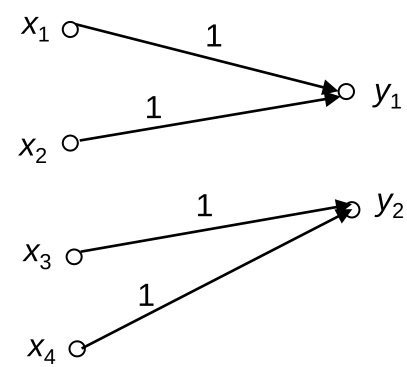
$$C=\max_{\{P(x_i)\}} H\left(X\right)=\log_2 n\left[\text{bit/simbol}\right]$$

- u primjeru s prethodnog slajda vrijedilo bi:
  - $n = 2$ simbola $\Rightarrow C = 1$ bit/simbol

Deterministički kanal

- kad šaljemo neki ulazni simbol x_i, $i = 1, ..., n$, točno znamo koji ćemo simbol y_j, $j = 1, ..., m$, $m \leq n$, dobiti na izlazu kanala
- na razini matrice kanala, u svakom retku postoji samo jedan element različit od nule, tj. jednak jedinici
- primjer:
  - $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2$
  - $P(x_3) = p_3$, $P(x_4) = p_4$
  - $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

$$\left[P\left(Y|X\right)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kapacitet determinističkog kanala

- transinformaciju u determinističkom kanalu možemo izračunati prema izrazu

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(Y)$$

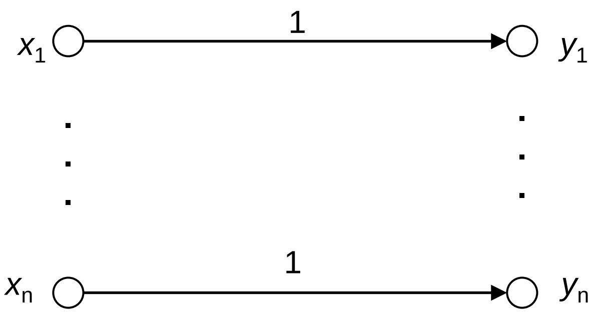
  - $H(Y|X) = 0$ jer su svi elementi matrice $[P(Y|X)]$ jednaki 0 ili 1
- ako je razdioba izlaznih simbola dana kao $Q(y_j)$, $j = 1, \ldots, m$, tada je kapacitet takvog kanala moguće izračunati kao

$$C=\max_{\{Q(y_j)\}} H(Y)=\log_2 m \; [\text{bit/simbol}]$$

- da bi to vrijedilo nužan je uvjet da je uz neku razdiobu ulaznih simbola, $P(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, moguće postići da je $Q(y_j) = 1/m$ $\forall j = 1, \ldots, m$

Diskretan bešumni kanal

- kanal je bešumni ako je istovremeno kanal bez gubitaka i deterministički kanal



$$\left[P(Y|X)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

- za proračun kapaciteta kanala možemo iskoristiti matricu parova vjerojatnosti

$$P(x_i,y_j)=P(y_j|x_i)P(x_i)=\begin{cases}P(x_i) & \text{za } i=j\\ 0 & \text{za } i\neq j\end{cases}$$

$$P(x_i,y_j)=P(x_i|y_j)P(y_j)=\begin{cases}P(y_j) & \text{za } i=j\\ 0 & \text{za } i\neq j\end{cases}$$

$$P(x_i)=P(y_j)\,\text{za } i=j$$

$$\left[P(X,Y)\right]=\begin{bmatrix}P(x_1,y_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & P(x_2,y_2) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & P(x_n,y_n)\end{bmatrix}$$

Entropije u diskretnom bešumnom kanalu

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(x_i, y_j)\log P(x_i, y_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\log P(x_i, y_i) =$$

$$= H(X) = H(Y)$$

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 0$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 0$$

- dakle u bešumnom kanalu i ekvivokacija je jednaka nuli

Transinformacija i kapacitet bešumnog kanala

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X)$$

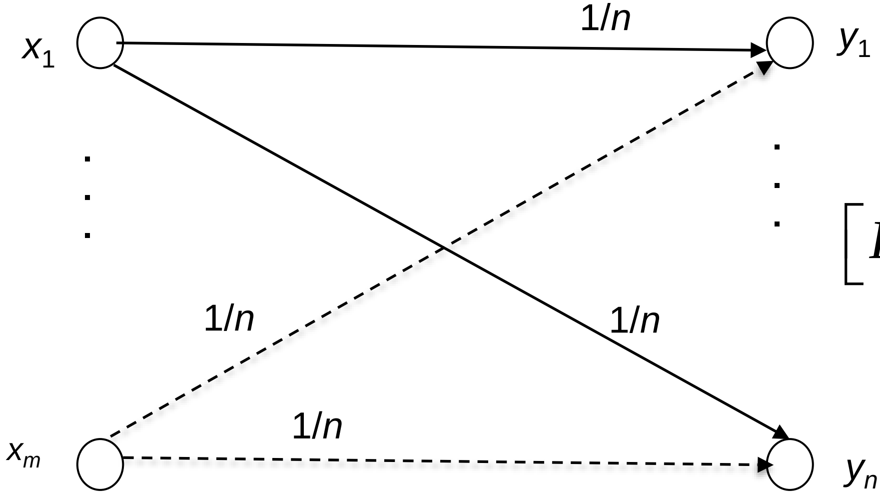
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y)$$

$$C = \max_{\{P(x_i)\}}\left[I(X;Y)\right] = \max_{\{P(x_i)\}}\left[H(X)\right] = \log(n)\,[\text{bit/simbol}]$$

- kapacitet bešumnog kanala jednak je entropiji izvora za slučaj kad su svi simboli izvora međusobno jednako vjerojatni
  - sva se informacija prenese od izvora do odredišta
  - nema gubitaka, šum i ekvivokacija jednaki su nuli

Diskretni kanal s međusobno neovisnim ulazom i izlazom

- nema korelacije između ulaznih i izlaznih simbola
- za svaki simbol na ulazu kanala, x_i, vrijedi da na izlazu kanala može biti primljen kao bilo koji od simbola y_j, pri čemu su svi prijelazi nekog simbola x_i u simbole y_j međusobno jednako vjerojatni



$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P\left(y_j|x_i\right)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

Diskretni kanal s međusobno neovisnim ulazom i izlazom (2)

- matrica združenih vjerojatnosti prelaza

$$\left[P(X,Y)\right]=\left[P(X)\right]\cdot\left[P(Y|X)\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} P(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(x_m) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{n}P(x_1) & \frac{1}{n}P(x_1) & \cdots & \frac{1}{n}P(x_1) \\ \frac{1}{n}P(x_2) & \frac{1}{n}P(x_2) & \cdots & \frac{1}{n}P(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}P(x_n) & \frac{1}{n}P(x_n) & \cdots & \frac{1}{n}P(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m}P(x_i,y_j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}P(x_i)=\frac{1}{n}=P(y_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n}P(x_i,y_j)=n\frac{1}{n}P(x_i)=P(x_i)$$

$$P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j)=\frac{1}{n}P(x_i)$$

Kapacitet kanala s međusobno neovisnim ulazom i izlazom

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{m} P(x_i)\log P(x_i)$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} P(y_j)\log P(y_j) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = n\frac{1}{n}\log n = \log n$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P(x_i, y_j)\log P(y_j|x_i) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}P(x_i)\log\frac{1}{n} =$$

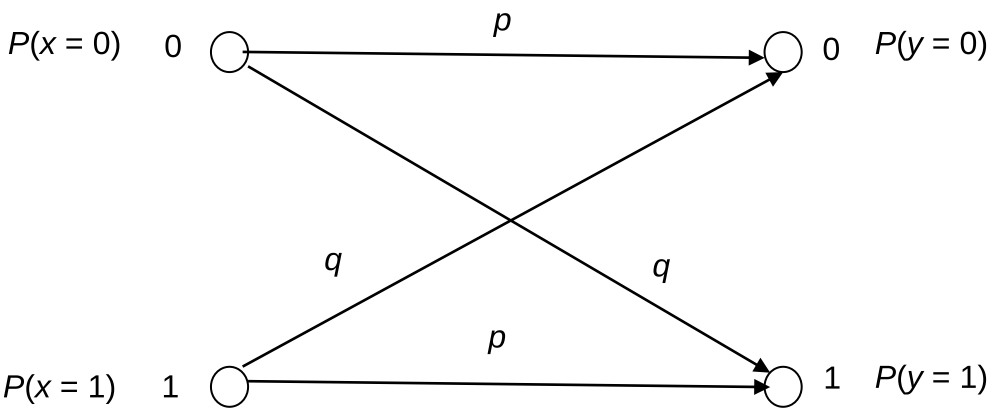
$$= -\sum_{i=1}^{m} n\frac{1}{n}P(x_i)\log\frac{1}{n} = \log n$$

- transinformacija i kapacitet
  - s izvora do odredišta se ne prenosi informacija

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0$$

$$C = 0 \text{ bit/simbol}$$

Binarni simetrični kanal (BSC)



$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

- $P(x = 0) = \alpha \qquad P(x = 1) = 1 - \alpha$
- $P(x = 0) + P(x = 1) = 1$
- $P(y = 0|x = 0) = P(y = 1|x = 1) = p$
- $P(y = 0|x = 1) = P(y = 1|x = 0) = q$
- $p + q = 1$

Entropija šuma u BSC-u

$$H(X) = -\alpha \log(\alpha) - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j)\log\left(P(y_j|x_i)\right)$$

$$\left[P(X,Y)\right] = \left[P(X)\right]\cdot\left[P(Y|X)\right] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

$$\left[P(X,Y)\right] = \left[P(y_j|x_i)\cdot P(x_i)\right] = \begin{bmatrix} p\alpha & q\alpha \\ q(1-\alpha) & p(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

- zbroj po stupcu daje vjerojatnosti $P(y_j)$

$$P(y=0) = p\alpha + q(1-\alpha)$$

$$P(y=1) = q\alpha + p(1-\alpha)$$

- ako je α = 1 – α = 1/2, tada vrijedi $P(y=0) = P(y=1) = \frac{1}{2}$

Entropija šuma i transinformacija u BSC-u

- entropija šuma u BSC-u

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j)\log\left(P(y_j|x_i)\right) =$$
$$= -p\alpha\log(p) - q\alpha\log(q) -$$
$$-q(1-\alpha)\log(q) - p(1-\alpha)\log(p) =$$
$$-\log(p)(p\alpha + p - p\alpha) - \log(q)(q\alpha + q - q\alpha) =$$
$$= -\left[p\log(p) + q\log(q)\right]$$

- transinformacija u BSC-u

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) =$$
$$= H(Y) + p\log(p) + q\log(q)$$

Kapacitet BSC-a

- kapacitet je jednak maksimalnom iznosu transinformacije

$$C = \max_{\{P(x_i)\}} \left[I(X;Y) \right] = \max_{\{P(x_i)\}} \left[H(Y) - H(Y|X) \right] =$$

$$= \max_{\{P(x_i)\}} \left[H(Y) + p\log(p) + q\log(q) \right] =$$

$$= \max_{\{P(x_i)\}} \left[H(Y) \right] + p\log(p) + q\log(q) = 1 + p\log(p) + q\log(q)$$

- za $\alpha = 1 - \alpha = 1/2$ vrijedi $P(y = 0) = P(y = 1) = 1/2$ i, sukladno tome, $H(Y) = 1$ bit/simbol
- kapacitet BSC-a ovisi samo o p i q, a ne ovisi o vjerojatnostima $P(x_i)$

Slabo simetričan kanal (WSC)

- u općenitom slučaju proračun kapaciteta kanala je problem optimizacije nelinearne funkcije
  - moguće rješenje: Lagrangeovi multiplikatori
- samo u slučaju **simetričnih** i **slabo simetričnih** kanala kapacitet je moguće odrediti eksplicitno
- definicije:
  - kanal je **simetričan** ako su reci i stupci matrice kanala, *P*[*Y*|*X*], permutacije jedni drugih
  - kanal je **slabo simetričan** ako su reci matrice kanala permutacije jedni drugih i zbroj vjerojatnosti po stupcu je jednak po svim stupcima $s_j = \sum_{x \in X} P\left(y_j \middle| x_i\right), s_j = s_k \; \forall j,k \in \{1,\dots,m\}$

Weakly Symmetric Channel – WSC

- X – skup ulaznih simbola, $\{x_1, \ldots, x_n\}$
- Y – skup izlaznih simbola, $\{y_1, \ldots, y_m\}$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_{x \in X} P(x_i) \sum_{y \in Y} P(y|x_i) \log \frac{1}{P(y|x_i)} \leq$$

$$\leq \log\left[\mathrm{card}(Y)\right] - \sum_{x \in X} P(x_i) \underbrace{H(Y|x_i)}_{\text{po } i\text{-tom retku}}$$

- s obzirom da su svi reci permutacije npr. prvog retka, vrijedi:

$$H(Y|x_1) = H(Y|x_2) = \ldots = H(Y|x_n) \equiv H(Y|x), n = \mathrm{card}(X)$$

$$\sum_{x \in X} P(x_i) H(Y|x_i) = \sum_{x \in X} P(x_i) H(Y|x) = H(Y|x)$$

$$I(X;Y) \leq \log\left[\mathrm{card}(Y)\right] - H(Y|x)$$

Kapacitet WSC-a

- gornja granica od $I(X;Y)$ je kapacitet WSC-a ako ju je moguće postići odgovarajućom razdiobom ulaznih simbola
  - kapacitet ne ovisi o $H(Y|x)$ – isti za svaki redak
- neka je $P(x_i) = 1/n$, tada vrijedi

$$P(y_j) = \sum_{x \in X} P(y_j|x_i) P(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{x \in X} P(y_j|x_i) = \frac{s_j}{n}$$

- s obzirom da je kanal slabo simetričan, zbroj elemenata $P(y_j|x_i)$ po svakom stupcu matrice $[P(Y|X)]$ je jednak i vrijedi $\forall j \in \{1, \ldots, m\}\ s_j \equiv s$

$$P(y_j) = \frac{s}{n}$$

Teorem o kapacitetu WSC-a

- dakle, u slučaju kad je $P(x_i) = 1/n\ \forall i$ vrijedi da je $H(Y) = \log[\mathrm{card}(Y)]$
  - sukladno tome, $I(X;Y) = C$
- Teorem: za kapacitet simetričnog ili slabo simetričnog kanala vrijedi sljedeća relacija

$$C = \log\left[\mathrm{card}\left(Y\right)\right] - H\left(Y \middle| x\right)$$

  - pri čemu je izraz

$$H\left(Y \middle| x\right) = \sum_{y \in Y} P\left(y \middle| x_i\right) \log\left(\frac{1}{P\left(y \middle| x_i\right)}\right)$$

  - moguće izračunati za bilo koji redak i
- kapacitet kanala postiže se kad su ulazni simboli jednoliko raspodijeljeni, tj. $P(x_i) = 1/\mathrm{card}(X)$

Primjer SC-a

- matrica binarnog simetričnog kanala (BSC-a)

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

- temeljem teorema vrijedi

$$\log\left[\operatorname{card}\left(Y\right)\right]=\log 2=1$$

$$H\left(Y|x\right)=-p\log\left(p\right)-q\log\left(q\right)$$

$$C=1+p\log\left(p\right)+q\log\left(q\right)$$

uz $P(x_i) = 1/2$

Primjer WSC-a

- razmatrajmo kanal čija je matrica zadana na sljedeći način:

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- kanal je WSC jer su reci permutacija jedan drugog i zbroj vjerojatnosti po svim stupcima je jednak i iznosi 1/2
- kapacitet kanala jednak je

$$C=\log\left(4\right)-H\left(Y|x\right)=2-1,9591=0,0409\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Primjer kanala koji nije SC niti WSC

- razmotrimo kanal čija je matrica zadana izrazom

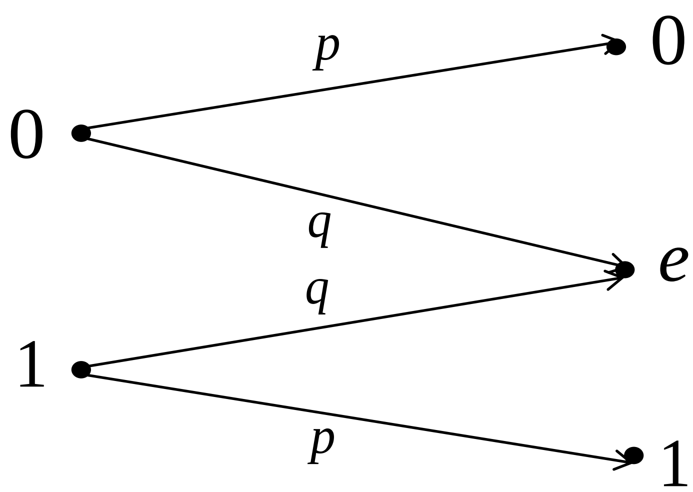
$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

- donji je redak permutacija prvog retka
- ali zbroj vjerojatnosti po stupcima nije jednak
  - u prvom stupcu 5/6
  - u drugom stupcu 2/6, tj. 1/3
  - u trećem stupcu 5/6
- dakle, kanal nije SC niti WSC

Binarni kanal s brisanjem simbola (BEC)

- engl. *Binary Erasure Channel*
  - brisanje simbola (*e*) može nastupiti kod gubitka signala (npr. u bežičnim komunikacijama)

$P(x_i), i=1,2$ $\qquad$ $P(y_j), j=1,2,3$



$$\left[P(Y|X)\right]=\begin{bmatrix} p & q & 0 \\ 0 & q & p \end{bmatrix}$$

$$P(x_i=0)=\alpha,\ P(x_i=1)=1-\alpha$$

$$P(y_j=0|x_i=0)=P(y_j=1|x_i=1)=p$$

$$P(y_j=e|x_i=0)=P(y_j=e|x_i=1)=q$$

$$P(y_j=1|x_i=0)=P(y_j=0|x_i=1)=0$$

$$p+q=1$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$$

Proračun kapaciteta BEC-a (1)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} P(x_i)\log_2 P(x_i) = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$$

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} P(x_i, y_j)\log\left[P(x_i|y_j)\right]$$

$$P(x_i, y_j) = P(y_j|x_i)\cdot P(x_i)$$

$$P(x_i = 0, y_j = 0) = P(y_j = 0|x_i = 0)\cdot P(x_i = 0) = p\alpha$$

$$P(x_i = 1, y_j = 0) = P(y_j = 0|x_i = 1)\cdot P(x_i = 1) = 0$$

$$P(x_i = 0, y_j = e) = P(y_j = e|x_i = 0)\cdot P(x_i = 0) = q\alpha$$

$$P(x_i = 1, y_j = e) = P(y_j = e|x_i = 1)\cdot P(x_i = 1) = q(1-\alpha)$$

$$P(x_i = 0, y_j = 1) = P(y_j = 1|x_i = 0)\cdot P(x_i = 0) = 0$$

$$P(x_i = 1, y_j = 1) = P(y_j = 1|x_i = 1)\cdot P(x_i = 1) = p(1-\alpha)$$

Proračun ekvivokacije (2)

$$P(y_j)=\sum_{i=1}^{2}P(x_i,y_j)$$

$$P(y_j=0)=P(x_i=0,y_j=0)+P(x_i=1,y_j=0)=p\alpha$$

$$P(y_j=e)=P(x_i=0,y_j=e)+P(x_i=1,y_j=e)=q\alpha+q(1-\alpha)=q$$

$$P(y_j=1)=P(x_i=0,y_j=1)+P(x_i=1,y_j=1)=p(1-\alpha)$$

$$P(x_i|y_j)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(y_j)}$$

$$P(x_i=1|y_j=e)=\frac{P(x_i=1,y_j=e)}{P(y_j=e)}=\frac{q(1-\alpha)}{q}=(1-\alpha)$$

$$P(x_i=0|y_j=e)=\frac{P(x_i=0,y_j=e)}{P(y_j=e)}=\frac{q\alpha}{q}=\alpha$$

$$P(x_i=0|y_j=0)=P(x_i=1|y_j=1)=1$$

$$P(x_i=0|y_j=1)=P(x_i=1|y_j=0)=0$$

Proračun ekvivokacije i kapaciteta kanala

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} P(x_i, y_j)\log P(x_i|y_j) =$$

$$= P(x_i = 0, y_j = e)\log\left[P(x_i = 0|y_j = e)\right] + P(x_i = 1, y_j = e)\log\left[P(x_i = 1|y_j = e)\right] =$$

$$= q\alpha\log\alpha + q\log(1-\alpha) = qH(X) = (1-p)H(X)$$

- transinformacija u BEC-u jednaka je

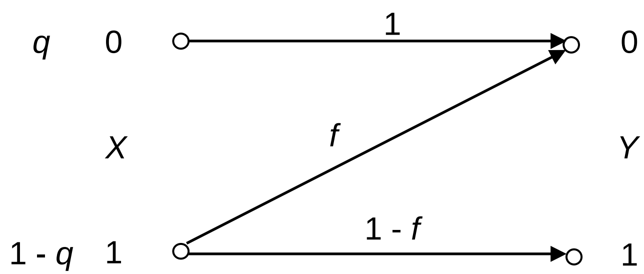
$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - (1-p)H(X) = pH(X)$$

- kapacitet BEC-a jednak je

$$C = \max_{\{P(x_i)\}} I(X;Y) = p\max_{\{P(x_i)\}} H(X) = p\,[\text{bit/simbol}]$$

Z-kanal

- simbol nula prenosi bez pogreške
- simbol jedan prenosi pogrešno s vjerojatnošću *f*



$$\left[P(Y|X)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ f & 1-f\end{bmatrix}$$

- na temelju zadanih vjerojatnosti vrijedi:

$$\left[P(X,Y)\right]=\begin{bmatrix}q & 0\\ f(1-q) & (1-f)(1-q)\end{bmatrix}\Rightarrow\left[P(Y)\right]=\left[q+f(1-q) \quad (1-f)(1-q)\right]$$

$$\left[P(X|Y)\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{q}{q+(1-q)f} & 0\\ \dfrac{(1-q)f}{q+(1-q)f} & 1\end{bmatrix}$$

Transinformacija u Z-kanalu

- $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$$H(Y) = -\left[q + (1-q)f\right]\log_2\left[q + (1-q)f\right] - (1-q)(1-f)\log_2(1-q)(1-f)$$

$$H(Y|X) = -q\log_2 1 - 0\log_2 0 - (1-q)f\log_2 f - (1-q)(1-f)\log_2(1-f) =$$

$$= -(1-q)f\log_2 f - (1-q)(1-f)\log_2(1-f) = (1-q)\left[-f\log_2 f - (1-f)\log_2(1-f)\right]$$

- ako uvedemo Bernoulijevu slučajnu varijablu X čija je razdioba zadana kao

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

- entropiju takve slučajne varijable moguće je zapisati kao $H(q)$:

$$H(q) = -q\log_2 q - (1-q)\log_2(1-q)$$

Kapacitet Z-kanala (2)

- s obzirom da vrijedi: $(1 - q)(1 - f) = 1 - [q + (1 - q)f]$
- dakle, izraz za transinformaciju Z-kanala možemo napisati kao

$$I(X;Y) = H\left[(1-f)(1-q)\right] - (1-q)H(f)$$

- kapacitet Z-kanala je

$$C = \max_{\{P(x_i)\}} I(X;Y) = \max_q I(X;Y) = \max_q \left\{H\left[(1-f)(1-q)\right] - (1-q)H(f)\right\}$$

- kapacitet kanala moguće je odrediti deriviranjem gornjeg izraza po q i izjednačavanjem tog izraza s nulom

$$\frac{dC(q)}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{dH\left[(1-f)(1-q)\right]}{dq} - \frac{d\left[(1-q)H(f)\right]}{dq} = 0$$

Određivanje kapaciteta Z-kanala

- $H(Y)$ je kompozicija dviju funkcija, g i h

$$H(Y) = H\left[(1-f)(1-q)\right] = (h \circ g)(q) = h\left[g(q)\right]$$

- funkcija $h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$
- ima derivaciju

$$\frac{dh(x)}{dx} = -1\cdot\log_2 x - x\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x} - (-1)\log_2(1-x) - (1-x)\frac{1}{\ln 2}\frac{-1}{(1-x)} = \log_2\frac{1-x}{x}$$

- funkcija $g(q) = (1-f)(1-q)$
  - njena derivacija jednaka je $\dfrac{dg(q)}{dq} = -1\cdot(1-f)$
- derivacija kompozicije funkcija dana je izrazom

$$\frac{d(h\circ g)(q)}{dq} = h'\left[g(q)\right]\cdot g'(q) = (-1)(1-f)\log_2\frac{1-g(q)}{g(q)} = (f-1)\log_2\frac{q+(1-q)f}{(1-q)(1-f)}$$

Određivanje kapaciteta Z-kanala (2)

- derivacija entropije šuma $H(Y|X)$

$$\frac{dH(Y|X)}{dq}=\frac{d\left[(1-q)H(f)\right]}{dq}=-H(f)$$

- dakle, za derivaciju kapaciteta kanala mora vrijediti

$$\frac{dC(q)}{dq}=(f-1)\log_2\frac{q+(1-q)f}{(1-q)(1-f)}+H(f)=0$$

$$\log_2\frac{q+(1-q)f}{(1-q)(1-f)}=\frac{H(f)}{1-f}=A\Rightarrow\frac{q+(1-q)f}{(1-q)(1-f)}=2^A=B$$

$$q+(1-q)f=B(1-q)(1-f)\Rightarrow q(1-f)(1-B)=B-f(1+B)\underbrace{+1-1}_{\text{nadodano}}$$

$$q(1-f)(1-B)=(1+B)(1-f)-1\Rightarrow q_0=q_0(f)=1-\frac{1}{(1-f)\left(1+2^{H(f)/(1-f)}\right)}$$

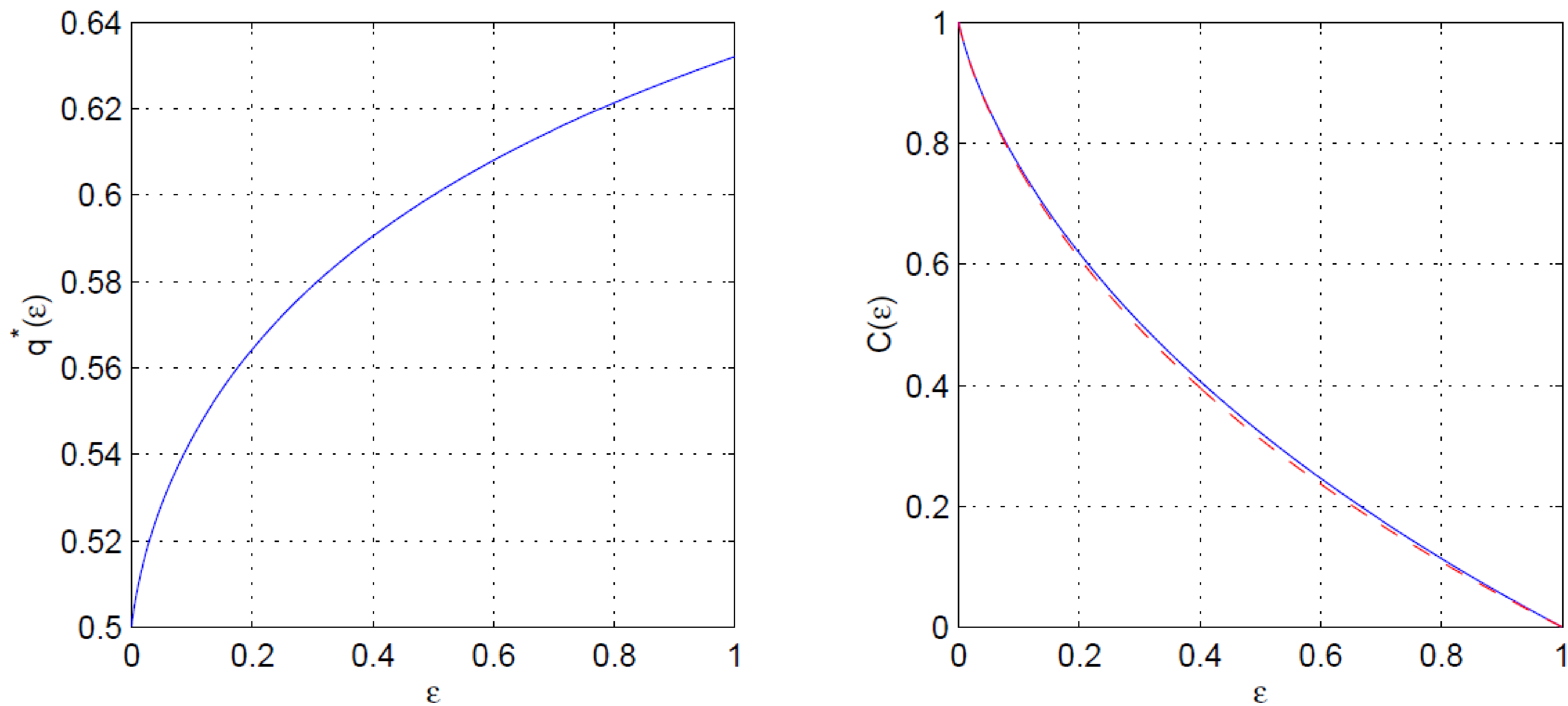
Kapacitet Z-kanala

- ako uvrstimo q_0 u izraz za transinformaciju, dobivamo

$$C = C(f) = H\left[(1-f)(1-q_0)\right] - (1-q_0)H(f) = H\left(\frac{1}{1+2^{H(f)/(1-f)}}\right) - \frac{H(f)/(1-f)}{1+2^{H(f)/(1-f)}}$$

- za $f = 0$, $q_0(0) = 1/2$ i $C(0) = 1$ bit/simbol
- za $f = 1$, $q_0(1) = 1 - 1/e$ i $C(1) = 0$ bit/simbol

Analiza kapaciteta Z-kanala



- na lijevoj slici q^* odgovara parametru q_0, a na obje slike ε parametru f
  - crtkana linija na lijevoj slici odgovara transinformaciji uz $q = 1/2$

Serijski slijed BSC-a

- neka je k BSC-a vezano u seriju, $k \in \mathbf{N}$
  - matrica serijskog slijeda BSC-a

$$\left[P\left(Y|X\right)\right]=\mathbf{A}=\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}^k=\mathbf{S}\mathbf{D}^k\mathbf{S}^{-1}$$

- **S** je matrica svojstvenih vektora
- **D** je dijagonalizirana matrica svojstvenih vrijednosti
- svojstvene vrijednosti dobivamo iz izraza

$$\left.\begin{array}{c} \det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)=0 \\ \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-p & -q \\ -q & \lambda-p \end{bmatrix} \end{array}\right\} \to \left(\lambda-p\right)^2-q^2=0 \to \lambda_1=p+q, \lambda_2=p-q$$

Serijski slijed BSC-a (2)

- svojstvene vektore dobivamo iz izraza

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (p+q) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (p-q) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow -x_1 = x_2 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- konačno

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{S}\mathbf{D}^k\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (p+q)^k & 0 \\ 0 & (p-q)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = |p+q=1|$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & (p-q)^k \\ 1 & -(p-q)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\left\{1+(p-q)^k\right\} & 1/2\left\{1-(p-q)^k\right\} \\ 1/2\left\{1-(p-q)^k\right\} & 1/2\left\{1+(p-q)^k\right\} \end{bmatrix}$$

vjerojatnost pogrešnog prijenosa je $1/2[1 - (1 - 2q)^k]$

Informacijska brzina izvora

- izvor opisan slučajnom varijablom *X*
- ako izvor šalje *r* simbola u sekundi
- tada je njegova informacijska brzina

$$R = rH(X) \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$