Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Dekanski rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 14. rujna 2021.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Promatrajte izvor na čijem se izlazu pojavljuju dva simbola, i to: točka (•) i crtica (–). Trajanje točke iznosi 0,2 s, trajanje crtice je tri puta dulje, a trajanje stanke između simbola iznosi 0,2 s. Vjerojatnost pojavljivanja točke je dva puta veća od vjerojatnosti pojavljivanja crtice. Izračunajte prosječnu brzinu generiranja informacije izvora u jedinici bit/s.

a) 0.4897 bit/s;

b) 2,7552 bit/s;

c) 0,9183 bit/s;

d) 1,7219 bit/s;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Dakle, trajanje simbola točka $t_1 = t(\bullet) = 0{,}2$ s, trajanje simbola crtica $t_2 = t(–) = 0{,}6$ s, a trajanje stanke $t_s = 0{,}2$ s. Neka je vjerojatnost pojavljivanja točke $P(\bullet) = p_1$, a vjerojatnost pojavljivanja crtice $P(–) = p_2$. S obzirom da je zadano $p_1 = 2p_2$, a mora vrijediti i jednakost $p_1 + p_2 = 1$, slijedi da je $p_2 = 1/3$, a $p_1 = 2/3$. Prosječna količina informacije po svakom simbolu određuje se proračunom entropije zadanog izvora:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log_2 p_i = 0{,}9183 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}.$$

S obzirom da se iza svakog simbola generira i stanka, za prosječno trajanje generiranog simbola vrijedi:

$$T = p_1(t_1 + t_s) + p_2(t_2 + t_s) = p_1 t_1 + p_2 t_2 + t_s = 0{,}5333 \frac{\text{s}}{\text{simbol}}.$$

Konačno, prosječna brzina generiranja informacije u jedinici vremena iznosi:

$$R = \frac{H(X)}{T} = \frac{0.9183}{0{,}5333} = 1{,}7219 \frac{\text{bit}}{\text{s}}.$$

Zadatak 2. Temeljem polaznog rječnika $D[0] = a$ i $D[1] = b$ dekodirajte primljenu poruku 0 1 0 4 5 koristeći algoritam LZW.

a) *abaaaaa* (7 znakova);

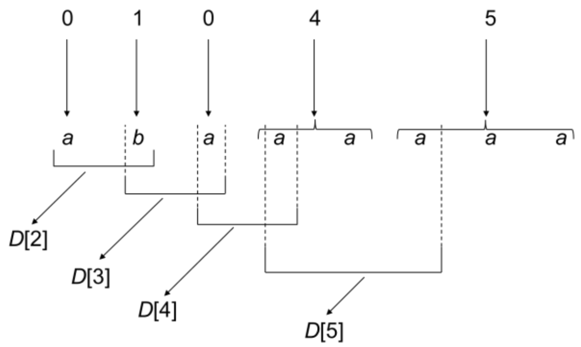
b) *abaaaaaaa* (9 znakova);

c) *abaaaaaa* (8 znakova);

d) *abaaaa* (6 znakova);

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:



Prošireni rječnik: $D[2] = ab$, $D[3] = ba$, $D[4] = aa$, $D[5] = aaa$. Dekodirana poruka: *abaaaaaa*.

Zadatak 3. Prilikom slanja binarnih simbola nekim binarnim simetričnim kanalom simbol 0 se prenosi kao trobitna kombinacija 000, a binarni simbol 1 kao 111. Time se postiže zaštita informacije u prijenosu kanalom. Vjerojatnost pogrešnog prijenosa u kanalu iznosi $p_g = 0{,}25$. U prijemniku se prilikom dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti, tj. najbližeg susjeda. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja.

a) 0,015625;

b) 0,578125;

c) 0,104;

d) 0,15625;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Svaka trobitna riječ će biti pogrešno dekodirana, a samim time i simbol kojeg prenosi, ako na njoj nastupi dvostruka ili trostruka pogreška. Sukladno tome vrijedi:

$$P_{\mathrm{pd}} = \binom{3}{2} p_{\mathrm{g}}^2 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right) + \binom{3}{3} p_{\mathrm{g}}^3 = 3 p_{\mathrm{g}}^2 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right) + p_{\mathrm{g}}^3 = 0{,}15625$$

Zadatak 4. Na ulaz kanala s aditivnim šumom u kontinuiranom vremenu dovodimo slučajni signal sastavljen od familije slučajnih varijabli koje sve imaju identičnu Gaussovu razdiobu sa srednjom vrijednošću nula i standardnom devijacijom 10^{-3} V. Gaussov aditivni šum ima 10 puta manju standardnu devijaciju od ulaznog signala, a srednja mu je vrijednost također nula. Odredite kapacitet na izlazu aditivnog kanala u jedinici nat/simbol.

a) 4,6151 nat/simbol;

b) 2,3076 nat/simbol;

c) 6,6582 nat/simbol;

d) 1,1989 nat/simbol;

e) Ništa od navedenog.

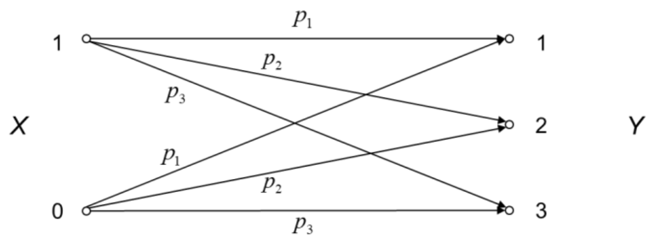
Postupak rješavanja:

Kapacitet kanala s aditivnim šumom u kontinuiranom vremenu određujemo izrazom:

$$C = \max I(X;Y) = \max\left[H(Y) - \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma_z^2\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2}\right)\left[\text{nat/simbol}\right]$$

Zadano je da je $\sigma_x = 10^{-3}$ V, te s obzirom da je σ_z 10 puta manji, vrijedi $\sigma_z = 10^{-4}$ V. Sukladno tome, C = 2,3076 nat/simbol.

Zadatak 5. Odredite kapacitet diskretnog bezmemorijskog kanala sa slike. Pri tome vrijedi: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_i \neq 0$, za svaki i = 1, 2, 3.



a) 1,585 bit/simbol;

b) 1 bit/simbol;

c) 0 bit/simbol;

d) 0,585 bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Sukladno slikovnoj definiciji kanala vrijedi:

$$P(y_1|x_1) = p_1,\ P(y_2|x_1) = p_2,\ P(y_3|x_1) = p_3,\ P(y_1|x_2) = p_1,\ P(y_2|x_2) = p_2,\ P(y_3|x_2) = p_3,$$

pri čemu je $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

Matrica kanala je:

$$\left[P\left(y_j|x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix},$$

što nam jasno govori da kanal nije simetričan niti slabo simetričan (WSC). Kapacitet kanala određujemo sukladno izrazu:

$$C = \max_{\{P(xi)\}} I\left(X;Y\right) = \max_{\{P(xi)\}}\left[H\left(Y\right) - H\left(Y|X\right)\right]$$

S obzirom da za svaki i, i = 1, 2, 3, vrijedi: $P(y_i|x_1) = P(y_i|x_2) = p_i$, slijedi:

$$\begin{aligned} P\left(y_i\right) &= P\left(y_i, x_1\right) + P\left(y_i, x_2\right) = P\left(y_i|x_1\right)\cdot P\left(x_1\right) + P\left(y_i|x_2\right)\cdot P\left(x_2\right) = \\ &= p_i\cdot P\left(x_1\right) + p_i\cdot P\left(x_2\right) = p_i\cdot\left[P\left(x_1\right) + P\left(x_2\right)\right] = p_i \end{aligned}$$

Nadalje:

$$H(Y|X) = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} P(x_j, y_i)\log_2 P(y_i|x_j) = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} P(y_i|x_j)P(x_j)\log_2 P(y_i|x_j) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{2} P(x_j)\sum_{i=1}^{3} P(y_i|x_j)\log_2 P(y_i|x_j) = -\sum_{j=1}^{2} P(x_j)\sum_{i=1}^{3} P(y_i)\log_2 P(y_i) = \sum_{j=1}^{2} P(x_j)H(Y) = H(Y)$$

Dakle, u konačnici vrijedi:

$$C = \max_{\{P(xi)\}}\left[H(Y) - H(Y|X)\right] = \max_{\{P(xi)\}}\left[H(Y) - H(Y)\right] = 0\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 6. Na izvoru se pojavljuju četiri simbola iz skupa {1, 2, 3, 4}. Omjer vjerojatnosti pojavljivanja simbola je $p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = 1 : 2 : 3 : 4$, a njihov je zbroj jednak jedan. Slijed od 5 simbola kodiran je aritmetičkim kodom i dobivena je kodirana poruka (birarni zapis): $(0{,}101010)_2$. Odredite prva četiri simbola iz kodiranog slijeda. Napomena: kumulativni podintervali za simbole su sljedeći: za simbol 1 [0, 0,1), za simbol 2 [0,1, 0,3), za simbol 3 [0,3, 0,6) i za simbol 4 [0,6, 1).

a) 4223;

b) 4123;

c) 4213;

d) 4224;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Prvo je potrebno kodiranu poruku prebaciti iz binarnog u dekadski zapis.

$$(0{,}101010)_2 = \left(1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-5}\right)_{10} = (0{,}65625)_{10}$$

Iz zadanog uvjeta o međusobnim omjerima vjerojatnosti simbola, te uz činjenicu da je zbroj sve četiri vjerojatnosti jednak 1, slijedi da je $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}3$ i $p_4 = 0{,}4$.

Sada je potrebno odrediti način na koji aritmetički koder kodira poruku, a isto načelo koristi i dekoder. U prvom koraku vrijedi $D = 0$ i $G = 1$ (oznake su usklađene sa zbirkom zadataka, stranice 61 i 62).

Simbol	*D'*	*G'*
1	0	0,1
2	0,1	0,3
3	0,3	0,6
4	0,6	1

Kodirana poruka očito pripada podintervalu [0,6, 1). U drugom koraku $D = 0{,}6$, $G = 1$.

Simbol	*D'*	*G'*
1	0,60	0,64
2	0,64	0,72

Kodirana poruka očito pripada podintervalu [0,64, 0,72). U trećem koraku $D = 0{,}64$, $G = 0{,}72$.

Simbol	D'	G'
1	0,640	0,648
2	0,648	0,664

Kodirana poruka očito pripada podintervalu [0,648, 0,664). U četvrtom koraku D = 0,648, G = 0,664.

Simbol	D'	G'
1	0,6480	0,6496
2	0,6496	0,6528
3	0,6528	0,6576

Kodirana poruka očito pripada podintervalu [0,6528, 0,6576). Dakle, prva četiri simbola poruke su 4223.

Zadatak 7. Slijed bitova $\mathbf{x}$ = [1010101…] ulazi u Hammingov koder [n, k] = [7, 4] i nakon toga se prenosi binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,004. Odredite za koliko se smanji vjerojatnost ispravnog dekodiranja slijeda $\mathbf{x}$ ako se umjesto Hammingova kodera kao zaštita uporabi parni paritet. Napomena: konačni rezultat zaokružite na 5 decimalnih znamenaka.

a) 0,02733;

b) 0,01951;

c) 0,01935;

d) 0,01915;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Zadatkom zadani Hammingov koder na svaku poruku duljine 4 bita dodaje 3 zaštitna bita i tvori kodnu riječ duljine 7 bita. Prilikom uporabe Hammingovog kodera dekoder će ispravno dekodirati primljenu kodnu riječ ako je broj pogrešaka na njoj manji ili jednak 1. Uz p_g = 0,004 vrijedi:

$$P_\mathrm{H} = \binom{7}{0}\left(1-p_g\right)^7 + \binom{7}{1}\left(1-p_g\right)^6 p_g = 0{,}9996684532\,.$$

Paritetni kod na poruku duljine 4 bita dodaje samo jedan paritetni bit te tvori kodnu riječ duljine 5 bita. Prilikom uporabe parnog pariteta dekoder može ispravno dekodirati poruku samo ako nije bilo pogrešaka, što znači da je

$$P_\mathrm{P} = \binom{5}{0}\left(1-p_g\right)^5 = 0{,}9801593613\,.$$

Dakle, razlika u vjerojatnosti ispravnog dekodiranja iznosi $P_\mathrm{H} - P_\mathrm{P}$ = 0,01951.

Zadatak 8. Na ulazu niskopropusnog komunikacijskog kanala (širina prijenosnog pojasa B [Hz]), konstantnog amplitudnog odziva koji iznosi 0,8 unutar pojasa propuštanja, dovodi se signal $s(t)$ koji ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa i čija je spektralna gustoća snage [W/Hz]):

$$S_s(f) = \begin{cases} a \cdot \dfrac{|f|}{B}, & |f| \le B \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad a = \text{konst.}, a \in \mathbf{R}^+.$$

U kanalu djeluje aditivni bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $N_0/2 = a \cdot 10^{-10}$ W/Hz. Odredite kapacitet zadanog komunikacijskog kanala u jedinici bit/s, uz uvjet da je faktor slabljenja omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma (engl. SNR-gap) $\Gamma = 0$ dB te za $B = 1$ MHz.

a) 31,375 Mbit/s;

b) 62,75 Mbit/s;

c) 32,575 Mbit/s;

d) 65,15 Mbit/s;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Spektralna gustoća snage bijelog šuma dana je izrazom:

$$N = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = 2aB10^{-10}\left[\text{W}\right].$$

Spektralna gustoća snage signala na izlazu kanala određena je izrazom:

$$S_i(f) = |H(f)|^2 S_s(f).$$

Sukladno tome, srednja snaga signala na izlazu određena je izrazom:

$$S = \int_{-B}^{B} S_\text{i}(f)\,df = \int_{-B}^{B} a\frac{|f|}{B} 0{,}8^2\,df = 0{,}8^2 \cdot 2\int_{0}^{B} a\frac{f}{B}\,df = 0{,}8^2 \cdot \frac{af^2}{B}\Bigg|_0^B = 0{,}8^2 \cdot \frac{aB^2}{B} = 0{,}64aB\left[\text{W}\right]$$

Konačno, kapacitet kanala moguće je odrediti temeljem izraza:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = B\log_2\left(1+\frac{0{,}64aB}{2aB10^{-10}}\right) = B \cdot 31{,}575 = 31{,}575\frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

Zadatak 9. Promatrajte kanal kojeg karakterizira svojstvo da su mu reci matrice kanala, $[P(Y|X)]$, permutacije jedan drugog, a zbroj članova matrice po svakom stupcu međusobno je jednak. Pri tome X predstavlja skup simbola na ulazu, a Y skup simbola na izlazu kanala. Matrica kanala zadana je sljedećim izrazom:

$$\left[P(Y|X)\right] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & a \\ b & c & d & e \end{bmatrix}, 0 < a,b,c,d,e < 1$$

Odredite kapacitet kanala. Napomena: Permutacija brojeva q_1, q_2, q_3, q_4 (brojevi q_i predstavljaju prvi redak matrice kanala) je svaka uređena četvorka oblika (r_1, r_2, r_3, r_4) u kojoj se svaki od brojeva q_1, q_2, q_3, q_4 javlja točno jedanput. Brojevi r_i predstavljaju drugi redak matrice kanala.

a) 2 bit/simbol;

b) 1,918 bit/simbol;

c) 1,585 bit/simbol;

d) 0,082 bit/simbol;

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

S obzirom da zbroj elemenata po retku matrice kanala mora iznositi 1, slijedi da je a = 1/6. Pod uvjetom da je drugi redak permutacija prvog retka (dakle, sadrži dvije vjerojatnosti 1/3 i dvije vjerojatnosti 1/6) te uz zadani uvjet da je zbroj elemenata matrice kanala po svakom stupcu međusobno jednak, postoji samo jedno moguće rješenje, a to je:

$$P(Y|X)=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Očito se radi o djelomično simetričnom kanalu (engl. *weakly symmetric channel*) čiji se kapacitet računa prema izrazu:

$$C=\log\left[\mathrm{card}(Y)\right]-H(Y|x)$$

pri čemu je

$$H(Y|x)=\sum_{j=1}^{4}P(y_j|x_i)\log\left(\frac{1}{P(y_j|x_i)}\right), i\in\{1,2\}$$

Dakle, za proračun kapaciteta kanala dovoljno je izračunati entropiju $H(Y|x)$ za jedan redak matrice kanala. S obzirom da skup Y ima 4 člana, vrijedi log[card (Y)] = 2 te:

$$H(Y|x)=-2\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}-2\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 6=\frac{1}{3}+\log_2 3$$

pa je kapacitet kanala jednak C = 2 – 1/3 – $\log_2(3)$ = 5/3 – $\log_2(3)$ = 0,082 bit/simbol.

Zadatak 10. Razmatrajte linearni binarni blok kôd K s oznakom [n, k, 3] koji je ujedno i perfektan. Odredite koliko iznosi duljina kodne riječi koda K, ako vrijedi $\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, pri čemu je **G** generirajuća matrica koda K, a nul-matrica **0** ima 4 stupca.

a) 15 bita;

b) 11 bita;

c) 7 bita;

d) 3 bita;

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako je kôd [n, k, 3] perfektan, to znači da se sve kodne riječi iz $V(n)$ nalaze unutar kugli u čijim se središtima nalaze kodne riječi koda K. Tada vrijedi:

$$2^k=\frac{2^n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}}.$$

Dakle, vrijedi da je $2^{n-k} = 1 + n$. Nadalje, s obzirom da matrica **G** ima dimenzije $k \times n$, a matrica $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ dimenzije $n \times n - k$, tada njihov produkt, tj. matrica **0**, ima dimenzije $k \times n - k$. Ako je zadano da matrica **0** ima četiri stupca, to znači da je $n - k = 4$. Uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo da je $1 + n = 16$, tj. $n = 15$.