

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Nedjeljko Perić
Jadranko Matuško

UPRAVLJANJE ELEKTROMOTORNIM POGONIMA

PREDAVANJA



Zagreb, 2014.

ZAHVALA

Autori bi htjeli izraziti posebnu zahvalnost studentu Karlu Skokni na ukazanim pogreškama u prethodnoj verziji teksta kao i na sugestijama za njegovo poboljšanje.

SADRŽAJ

1	Uvod	1
2	Kaskadno upravljanje	3
2.1	Nedostaci jednopetljastih struktura upravljanja	3
2.2	Višepetljaste strukture upravljanja	7
2.2.1	Projektiranje kaskadnog sustava upravljanja	8
2.3	Dodatne prednosti korištenja kaskadnog upravljanja	23
2.3.1	Robusnost na parametarske neodređenosti modela procesa	23
2.3.2	Smanjenje utjecaja nelinearnosti	25
2.4	Sažetak poglavlja	25
3	Diskretni simetrični optimum	27
3.1	Digitalno upravljanje elektromotornim pogonom	27
3.2	Emulacija analognog PI regulatora	28
3.2.1	Diskretizacija PI regulatora primjenom pravokutne integracije	28
3.2.2	Diskretizacija PI regulatora primjenom trapezne integracije	30
3.3	Projektiranje digitalnog PI regulatora u kvazifrekveničkom području	30
3.3.1	Transformacija sustava iz diskretne u kvazikontinuiranu domenu	31
3.3.2	Diskretizacija modela procesa i transformacija u kvazikontinuirano po- dručje	33
3.3.3	Diskretni PI regulator u kvazikontinuiranom području	35
3.3.4	Projektiranje diskretnog PI regulatora u kvazikontinuiranom području prema simetričnom optimumu	36
3.4	Sažetak poglavlja	37

4 Sinteza slijednih sustava primjenom praktičnih optimuma	39
4.1 Modulni optimum	39
4.1.1 Izvod modulnog optimuma za opći slučaj	41
4.1.2 Tehnički optimum kao specijalni slučaj modulnog optimuma	44
4.1.3 Projektiranje modulnog optimuma u frekvencijskom području	45
4.2 Optimum dvostrukog odnosa	45
4.2.1 Odabir karakterističnih odnosa i nadomjesne vremenske konstante	49
4.2.2 Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa	52
4.3 Sažetak poglavlja	54
5 Elektromotorni pogoni s izraženom elastičnošću	55
5.1 Dvomaseni elektromehanički sustav	55
5.2 Dvomaseni elektromehanički sustav s elastičnom spregom	57
5.3 Strukture upravljanja brzinom tereta elektromehaničkog sustava s izraženom elastičnošću	59
5.3.1 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom PI regulatora	61
5.3.2 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom PI_m regulatora	65
5.3.3 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom PI$\Delta\omega$ regulatora	68
5.3.4 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom regulatora punog reda	70
6 Polinomski regulator (RST regulator)	73
6.1 Uvjeti izvedivosti regulatora	75
6.2 Rješavanje Diophantske jednadžbe	77
6.3 Dodavanje integralnog djelovanja	78
6.3.1 Virtuelno proširenje procesa	78
6.3.2 Proširenje postojećeg polinomskog regulatora	78
6.4 Kraćenje polova i nula	80
6.5 Odabir observerskog polinoma	81
6.6 Upravljanje brzinom vrtnje tereta uz izraženu elastičnost prijenosa	82
6.6.1 Karakteristični polinom modelske prijenosne funkcije	84
6.6.2 Rezultati simulacija	84
7 Trenje u elektromotornim pogonima	88
7.1 Definicija i vrste trenje	88
7.2 Priroda nastanka trenja	89
7.3 Statičko trenje i prijelomna sila	91
7.4 Modeli trenja	92
7.4.1 Statički modeli trenja	92
7.4.2 Dinamički modeli trenja	95

7.5	Negativne posljedice efekta trenja	99
7.5.1	"Stick-Slip" efekt	99
7.5.2	"Hunting" efeket	101
7.6	Kompenzacija utjecaja trenja u slijednim sustavima	102
7.6.1	Kompenzacija utjecaja trenja pomoću <i>dither</i> signala	103
7.6.2	Nemodelski postupci komenzacije trenja	105
7.6.3	Kompenzacija utjecaja trenja zasnovana na modelu trenja	107

POGLAVLJE 1

Uvod

Kod upravljanje elektromotornim pogonima ugrubo se mogu izdvojiti dva problema koji sustav upravljanja trena rješiti. Prvi je problem vezan uz složenost elektromehaničkih pojava unutar samog motora, dok je drugi problem vezan uz složenost radnog mehanizma.

U novije vrijeme izmjenični strojeve zauzimaju sve značajnije mjesto unutar reguliranih elektromotornih pogona ponajprije zbog relativno jednostavne izvedbe i visoke pouzdanosti. Međutim upravljanje izmjeničnim strojevima, u usporedbi s istosmjernim strojem, zahtjeva značajno složeniji upravljački sustav koji obuhvaća provođenje određenih nelinearnih transformacija (Parkove i Clarkove transformacije) kako bi se projektirao odgovarajući regulator. Upravljačka struktura koja se uobičajeno koristi kod takvih pogona je dvopetljasta, pri čemu za unutarnja petlja zadužena za upravljanje električnim dijelom sustava, dok je vanjska petlja zadužena za upravljanje mehaničkim dijelom sustava.

Prilikom projektiranja vanjske petlje često se prepostavlja najjednostavnija struktura radnog mehanizma, tj. da se on dade opisati samo s pripadnim momentom tromosti. Međutim, u praksi je radni mehanizam značajno složenije strukture te gore navedena prepostavka više ne vrijedi. Tipičan primjer takvog radnog mehanizma jest prijenos pogonskog momenta preko relativno dugačkog vratila pri čemu se elastičnost vratila ne može zanemariti. U tom slučaju umjesto jednog spremnika energije imamo tri: zamašnu masu na pogonskoj strani, zamašnu masu na strani tereta i elastično vratilo kao spremište potencijalne energije. Sama ta činjenica ukazuje na to da će za upravljanje takvim sustavom biti potrebno koristiti naprednije upravljačke strukture.

Drugi problem vezan uz mehanički dio elektromotornog pogona koji značajno može ograničiti performanse sustava upravljanja jest efekt trenja. Osim činjenica da se uslijed djelovanja dio energije nepovratno gubi i pretvara u toplinu, sa stajališta upravljanja još značajniji problem je vezan uz nelinearnost njegove karakteristike i s time povezane probleme.

U ovom dijelu predavanja obradit će se problematika upravljanja elektromotornim pogonima sa složenim radnim mehanizmima, uz izražene efekte elastičnosti, trenja i zračnosti.

U drugom poglavlju obrađuje se koncept kaskadnog upravljanja, široko rasprostranjenog kod upravljanja elektromotornim pogonima. Također se obrađuju dva najčešće korištena postupka parametriranja regulatora kod kaskadnog upravljanja elektromotornim pogonima: tehnički optimum i simetrični optimum. Nadalje se u trećem poglavlju se analizira primjena diskretnog PI regulatora za upravljanje brzinom elektromotornog pogona.

U četvrtom poglavlju se obrađuju postupci definiranja željenog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga koji se primjenjuju kod projektiranja sustava upravljanja u elektromotornim pogonima i to: modulni optimum i optimum dvostrukog odnosa.

Na temelju definiranog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga projektira se regulator reduciranog reda, što se obrađuje u poglavlju 5, odnosno regulator punog reda (npr. polinomski regulator), što se obrađuje u poglavlju 6.

Konačno u poglavlju 7 analizira se utjecaj efekta trenja na vladanje sustava upravljanja elektromotornim pogonom. Obrađuju se statički i dinamički modeli trenja koje se koriste prilikom sinteze sustava upravljanja, te se također opisuju najčešći pristupi kompenzaciji utjecaja trenja u elektromotornim pogonima.

Kaskadno upravljanje

U ovom se poglavlju razmatra korištenje složenijih višepetljastih struktura upravljanja s ciljem postizanja veće kvalitete upravljanja.

2.1 Nedostaci jednopetljastih struktura upravljanja

Visoke performanse upravljanja složenim sustavima često nije moguće postići korištenjem klasičnih jednopetljastih struktura upravljanja (SISO sustavi, jedan ulaz-jedan izlaz). Razlog tome ponajprije leži u činjenici da se složenim sustavom (sustavom s većim brojem spremnika energije) nastoji upravljati na temelju samo jedne informacije o sustavu tj. samo na temelju njegove izlazne veličine. Iz toga proizlazi da regulator reagira na promjene koje se dogode unutar sustava tek nakon što se njihov efekt registrira na iznosu izlazne veličine. Ovaj nedostatak posebno je značajan sa stanovišta kompenzacije djelovanja poremećajnih veličina na sustav. Ako bi se kojim slučajem koristila informacija o stanju dijela sustava na koji peremećajna veličina najprije počne djelovati tada se može očekivati značajno bolje vladanje sustava.

Sljedećim će se primjerom ilustrirati određena ograničenja jednopetljastih struktura upravljanja.

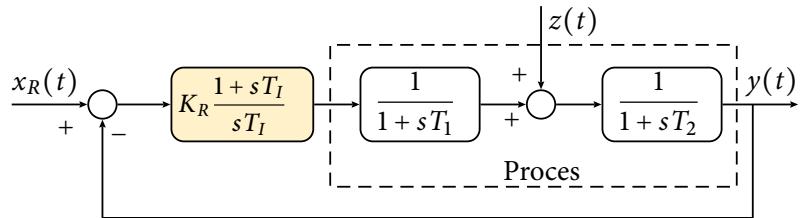


PRIMJER 2.1 Jednopetljasta struktura upravljanja

Razmotrimo jednostavan jednopetljasti sustav upravljanja prikazan na slici 2.1 pri čemu se pretpostavlja da se proces može na zadovoljavajući način opisati sustavom drugog reda uz jednu dominantnu vremensku konstantu tj. $T_1 \gg T_2$.

Projektirati PI regulator na način da se integralnom vremenskom konstantom kompenzira dominantna vremenska konstanta, a pojačanje odrediti da se postigne željeni koeficijent prigušenja ζ .

RJEŠENJE:



Slika 2.1. Strukturalna shema jednostavnog jednopoetljastog sustava upravljanja s PI regulatorom.

Vremenska konstanta PI regulatora određena je postupkom kompenzacije dominantne vremenske konstante integralnom konstantom regulatora ($T_I = T_1$), dok je pojačanje regulatora odabранo kako bi se osigurao željeni koeficijent prigušenja zatvorenog regulacijskog kruga ζ . Slika 2.2 prikazuje odziv sustava na skokovitu promjenu referentne veličine $x_R(t) = S(t)$ i poremećajne veličine $z(t) = S(t)$, uz odnos vremenskih konstanti procesa $T_1 = 10T_2$. Pritom su parametri regulatora određeni na način da se postigne koeficijent prigušenja zatvorenog regulacijskog kruga $\zeta = \sqrt{2}/2$.

Razvidno je da je kraćenje dominantne vremenske konstante sustava rezultiralo značajnim ubrzanjem odziva sustava prema referentnoj veličini i pritom je taj dio odziva u potpunosti određen iznosom nedominantne vremenske konstante T_2 i relativnog koeficijenta prigušenja ζ , kako je to opisano sljedećom prijenosnom funkcijom:

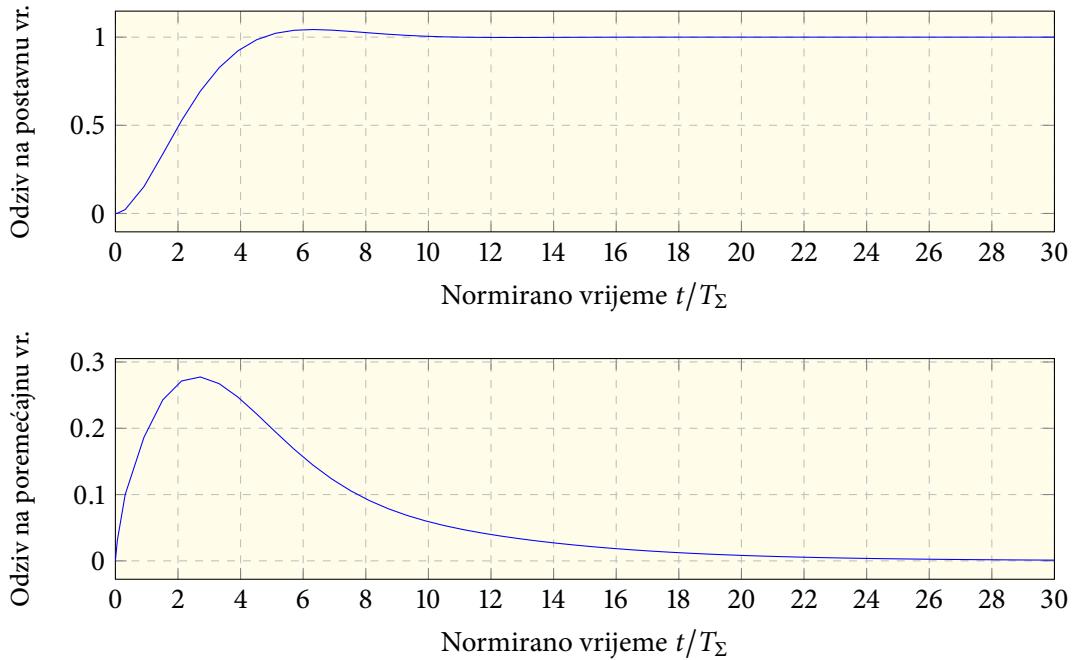
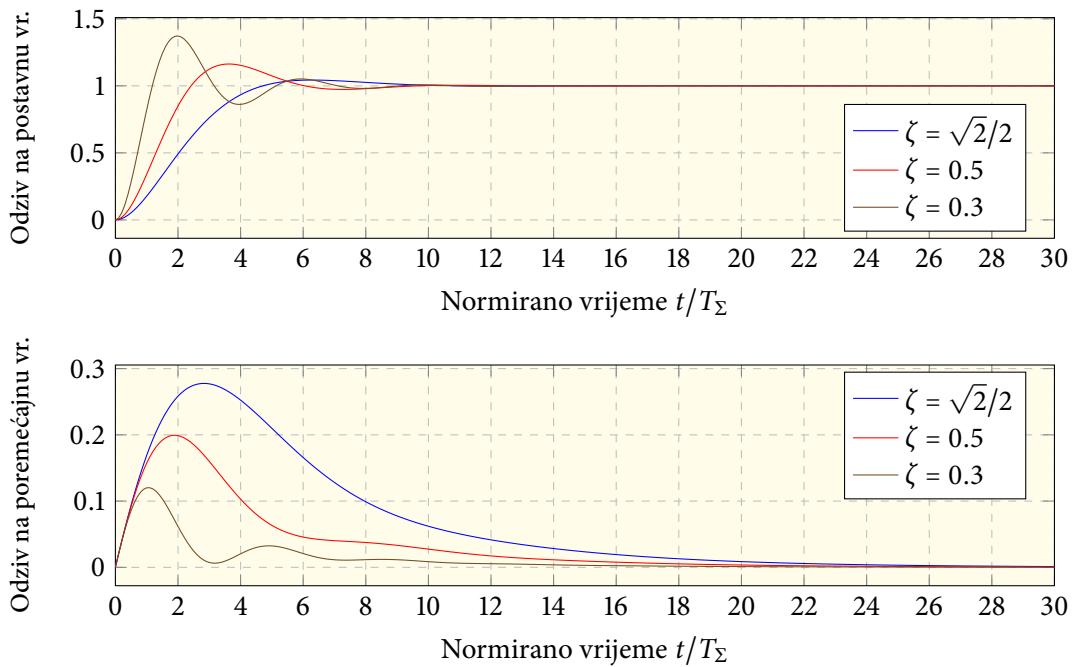
$$G_x(s) = \frac{1}{1 + 2T_2s + 2T_2^2s^2} \quad (2-1)$$

Nasuprot tome, vladanje sustava prema poremećajnoj veličini (slika 2.2, b)) određeno je iznosom dominantne vremenske konstante, što je razvidno iz prijenosne funkcije sustava prema poremećajnoj veličini:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = -\frac{2K_1T_2s(1 + T_2s)}{(1 + T_1s)(1 + 2T_2s + 2T_2^2s^2)} \quad (2-2)$$

Očito je da prijenosna funkcija po poremećaju $z(t)$ ima i dodatni pol $s_1 = -1/T_1$, tj. pol koji se u prijenosnoj funkciji po referentnoj veličini $x_R(t)$ pokratio s integralnom vremenskom konstantom PI regulatora. Budući da T_1 predstavlja dominantnu vremensku konstantu sustava prijelazna pojava uslijed djelovanja poremećaja je dugotrajna.

Vladanje sustava prema poremećajnoj veličini moguće je u određenoj mjeri poboljšati odabirom većih iznosa pojačanja regulatora K_R smanjujući time iznos relativnog koeficijenta prigušenja ζ , što je ilustrirano na slici 2.3. Međutim, time se značajno narušava vladanje sustava prema

Slika 2.2. Odziv sustava na skokovite promjene referentne i poremećajne veličine, uz $\zeta = \sqrt{2}/2$ Slika 2.3. Odziv sustava na skokovitu promjenu poremećajne veličine, uz različite iznose parametra ζ

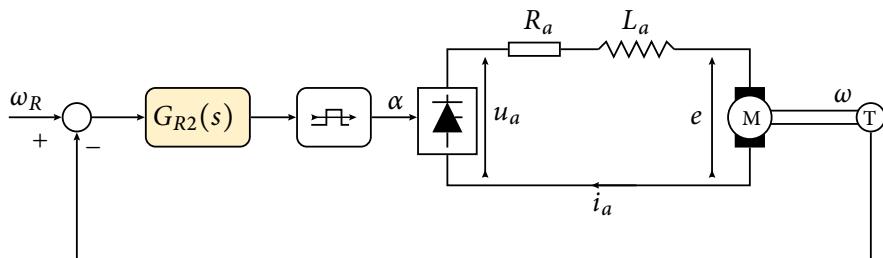
referentnoj veličini¹ kao i sama njegova stabilnost².

Intuitivno, uzrok takvog lošeg ponašanja s obzirom na poremećajnu veličinu, iz primjera 2.1, leži u činjenici da se kod jednopetljastih struktura upravljanja djelovanje poremećaja mora najprije registrirati na reguliranoj odnosno izlaznoj veličini $y(t)$ kako bi regulator mogao djelovati. Nažalost, to je često prekasno da bi se postigla njegova zadovoljavajuća kvalitata kompenzacije. Sličan efekt djelovanja poremećaja na kvalitetu upravljanja ilustrirat će se i sljedećim primjerom.

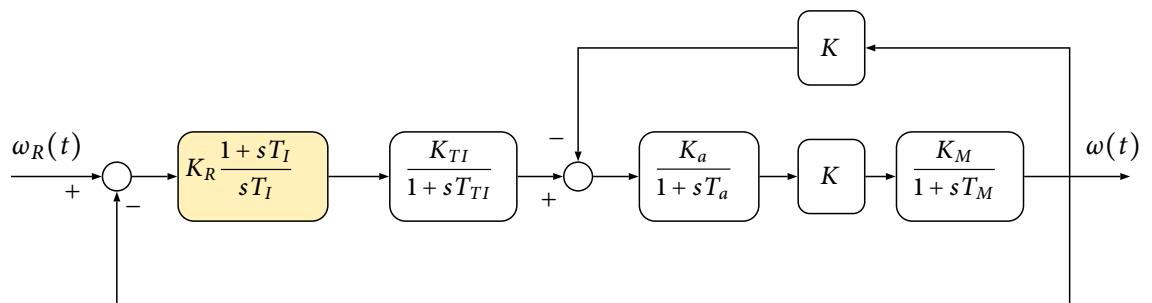
PRIMJER 2.2

Jednopetljasto upravljanje istosmjernim motorom

Na slikama 2.4 i 2.5 prikazane su načelna te blokovska shema sustava upravljanja brzinom istosmjernog motora s konstantnom uzbudom. Pritom su parametri istosmjernog motora sljedeći: $K_M = 51.0986$, $T_M = 0.8022[s]$, $K_{TI} = 45$, $T_{TI} = 0.005[s]$, $K_a = 0.0612$, $T_a = 0.0184[s]$ i $K = 1.211$. Za razliku od slučaja iz primjera 2.1 poremećajna veličina $z(t)$ u ovom je slučaju posljedica djelovanja protuelektrnomotorne sile EMF i izravno je ovisna o brzini rotora motora ω .



Slika 2.4. Sustav upravljanja brzinom istosmjernog motora, bez unutarnje povratne veze po struji.



Slika 2.5. Sustav upravljanja brzinom istosmjernog motora.

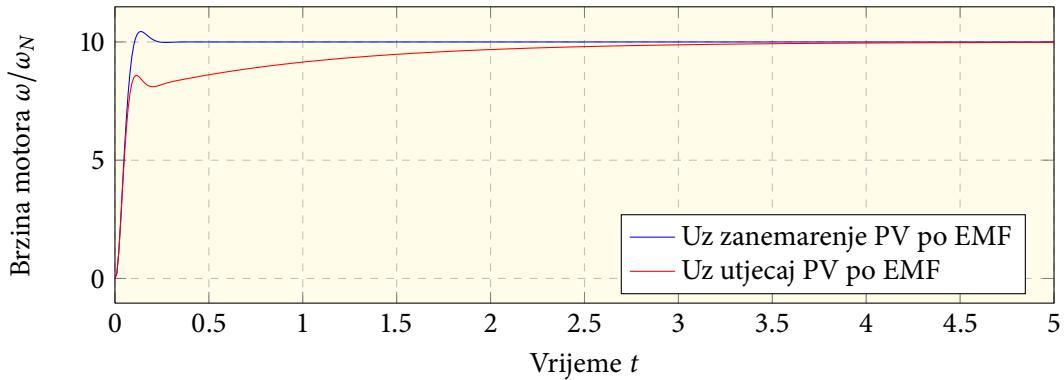
RJEŠENJE:

S ciljem dobivanja što bržeg odziva parametri PI regulatora određeni su postupkom kompenzacije dominantne vremenske konstante, uz željeni iznos relativnog koeficijenta prigušenja $\zeta =$

¹Nadvišenje u odzivu izravno ovisi o iznosu relativnog koeficijenta prigušenja ζ .

²Povećanje iznosa pojačanja otvorenog regulacijskog kruga smanjuje iznos amplitudnog osiguranja sustava AO.

$\sqrt{2}/2$. Na taj se način postiže maksimalno široko područje propuštanja u frekvencijskoj karakteristici zatvorenog regulacijskog kruga. Prema tome integralna konstanta PI regulatora iznosi $T_I = 0.8022$, dok se pojačanje regulatora proračunava na način da relativni koeficijent prigušenja zatvorenog regulacijskog kruga iznosi $\zeta = \sqrt{2}/2$, što u ovom slučaju iznosi $K_R = 0.1$.



Slika 2.6. Odzivi sustava sa i bez djelovanja povratne veze po elektromotornoj sili.

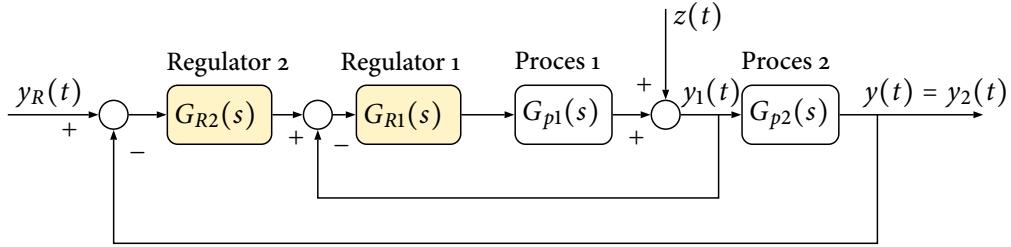
Iz odziva brzine vrtnje na skokovitu referentnu veličinu prikazanog na slici 2.6 razvidno je da je zbog djelovanja poremećajne veličine u obliku elektromotorne sile odziv brzine znatno sporiji od očekivanoga (prikazanog crtkano na istoj slici). Promjenom parametra regulatora utjecaj ovog poremećaja se može donekle ublažiti žrtvujući pritom kvalitetu vladanja sustava prema referentnoj veličini (npr. veće pojačanje regulatora K_R , odnosno manjom integralnom konstantom T_I).

2.2 Višepetljaste strukture upravljanja

Visoke performanse sustava automatskog upravljanja često nije moguće postići korištenjem klasičnih jednopetljastih struktura (jedna povratna veza). Iz tog razloga značajnu primjenu imaju višepetljaste strukture upravljanja odnosno strukture kaskadnog upravljanja (engl. *multiloop control, cascade control*). Osnovna se ideja kaskadnog upravljanja sastoji u tome da se uz primarnu reguliranu veličinu $y(t)$ koriste dodatne pomoćne izlazne veličine čime bi se omogućila reakcija sustava upravljanja na djelovanje poremećajne veličine prije nego što ona počne djelovati na primarnu reguliranu veličinu. Preduvjet za uspješnu kompenzaciju poremećaja jest da on djeluje unutar pomoćne tj. unutarnje petlje.

Načelna shema takvog sustava upravljanja uz korištenje dvije upravljačke petlje prikazana je na slici 2.7.

Budući da je prvenstveni cilj uvođenja pomoćnih upravljačkih petlji brza kompenzacija poremećaja parametri se odgovarajućeg regulatora unutarnje petlje obično određuju na način da

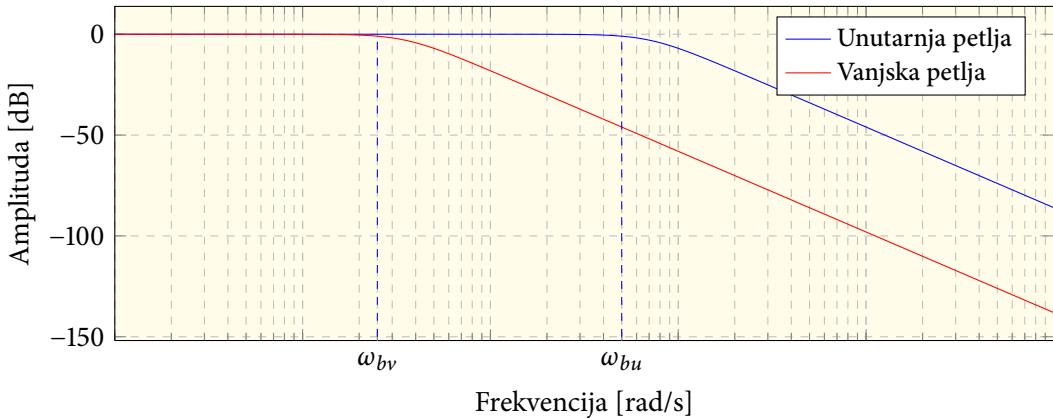


Slika 2.7. Tipična dvopetljasta kaskadna struktura upravljanja.

zatvoreni unutarnji regulacijski krug:

$$G_{z1}(s) = \frac{G_{R1}(s)G_{P1}(s)}{1 + G_{R1}(s)G_{P1}(s)} \quad (2-3)$$

ima relativni koeficijent prigušenja $\zeta \leq \sqrt{2}/2$. U slučaju da je tako projektirani unutarnji krug znatno brži od primarnog odnosno vanjskog kruga (slika 2.8) moguće je zatvoreni unutarnji regulacijski krug strukturno pojednostaviti i nadomjestiti ga prijenosnom funkcijom prvog reda ili čak proporcionalnim članom. Time se značajno pojednostavljuje postupak projektiranja regulatora primarne petlje.



Slika 2.8. Tipične amplitudno frekvencijske karakteristike unutarnjeg i vanjskog zatvorenog regulacijskog kruga.

2.2.1 Projektiranje kaskadnog sustava upravljanja

Tehnički optimum

Tehnički optimum predstavlja praktičan i jednostavan postupak projektiranja regulatora koji ima za cilj postizanje sljedećeg:

- maksimalno ravne amplitudno frekvencijske karakteristike $|G_x(j\omega)|$ zatvorenog regulacijskog kruga u što širem frekvencijskom području;
- amplitudno frekvencijske karakteristike $|G_x(j\omega)|$ bez amplitudnog izdizanja.

Sam je postupak namijenjen za procese drugog, odnosno trećeg reda s realnim polovima bez astatizma³. Pritom se dodatno prepostavlja da je jedna vremenska konstanta procesa dominantna u slučaju procesa drugog reda, odnosno dvije u slučaju procesa trećeg reda. Postupak je također moguće primijeniti i na procese višeg reda ako su iznosi nedominantnih vremenskih konstanti mali u odnosu na dominantne vremenske konstante procesa te se one daju nadomjestiti jednom vremenskom konstantom $T_\Sigma = T_{nd1} + T_{nd2} + \dots$. Prema tome, procesi na koje je primjenjiv tehnički optimum daju se opisati jednom od sljedećih dviju prijenosnih funkcija:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1+T_1s)(1+T_\Sigma s)}, \quad (2-4)$$

ili

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_\Sigma s)}, \quad (2-5)$$

Uz prepostavku da je proces dan izrazom (2-4), a pripadni je regulator s proporcionalnim i integralnim djelovanjem (PI regulator), prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga glasi:

$$G_o(s) = G_R(s)G_p(s) = K_R \frac{1+sT_I}{sT_I} \cdot \frac{K_p}{(1+T_1s)(1+T_2s)}. \quad (2-6)$$

Integralna vremenska konstanta regulatora T_I odabire se na način da se kompenzira utjecaj dominantne (najsporije) vremenske konstante procesa:

$$T_I = T_1. \quad (2-7)$$

U tom slučaju prijenosna funkcija otvorenog kruga glasi:

$$G_o(s) = \frac{K_o}{sT_I(1+T_\Sigma s)}, \quad K_o = K_R K_p \quad (2-8)$$

dok odgovarajuća prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga prema referentnoj veličini glasi:

$$G_x(s) = \frac{1}{1+s\frac{T_I}{K_o} + s^2\frac{T_IT_\Sigma}{K_o}}. \quad (2-9)$$

³Procesi bez astatizma su oni procesi koji nemaju polove u ishodištu kompleksne ravnine

Za prijenosnu funkciju drugog reda u općem obliku:

$$G_x(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_0}s + s^2\frac{1}{\omega_0^2}}, \quad (2-10)$$

maksimalno se ravna amplitudno-frekvencijska karakteristika bez rezonantnog izdizanja postiže uz $\zeta = \sqrt{2}/2$. U tom je smislu tehnički optimum samo specijalan slučaj tzv. modulnog optimuma (engl. Magnitude Optimum, MO), koji će u narednim poglavljima biti opširnije opisan. Osim toga relativnog prigušenja $\zeta = \sqrt{2}/2$ u praksi je često korišten budući da osigurava i dobro prigušen odziv.

Izjednačavanjem koeficijenata u prijenosnim funkcijama (2-9) i (2-10) slijedi:

$$2\frac{\zeta}{\omega_0} = \frac{T_I}{K_o}, \quad (2-11)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{T_I T_\Sigma}{K_o}, \quad (2-12)$$

odakle se lako proračunaju izrazi za prirodnu frekvenciju neprigušenih oscilacija ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_o}{T_I T_\Sigma}}, \quad (2-13)$$

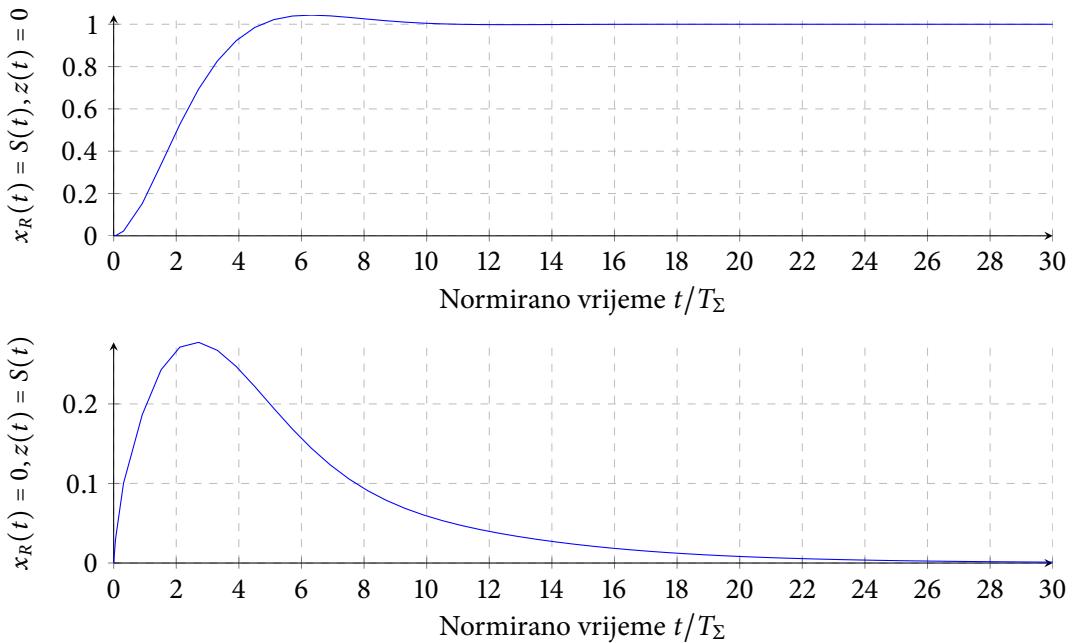
i relativni koeficijent prigušenja ζ :

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{K_o} \frac{T_I}{T_\Sigma}}. \quad (2-14)$$

Postavljanjem koeficijenta relativnog prigušenja na njegov optimalni iznos $\sqrt{2}/2$ slijedi pojačanje PI regulatora:

$$K_R = \frac{1}{2K_p} \frac{T_I}{T_\Sigma} = \frac{1}{2K_p} \frac{T_I}{T_\Sigma}. \quad (2-15)$$

Osnovni nedostatak sustava upravljanja podešenog prema tehničkom optimumu proizlazi iz činjenice da se visoke performanse vladanja prema referentnoj veličini postižu kraćenjem dominantnih polova procesa, a ne njihovim premještanjem na odgovarajuće lokacije. Na taj način ovi polovi procesa ostaju prisutni u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga prema poremećajnoj veličini što obično rezultira njihovom lošom kompenzacijom (slika 2.9). Iz tog se razloga tehnički optimum obično primjenjuje kada je odnos dominantne vremenske konstante T_I i zbroja nedominantnih vremenskih konstanti T_Σ u rasponu $T_I/T_\Sigma \in (1, 4)$. Za



Slika 2.9. Odzivi sustava podešenog prema tehničkom optimumu na skokovitu promjenu postavne i poremećajne veličine.

veće vrijednosti ovog odnosa bolje se vladanje postiže korištenjem tzv. simetričnog optimuma.

PRIMJER 2.3

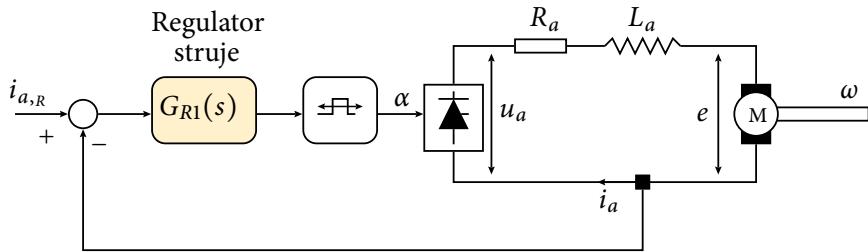
Sustav regulacije struje istosmjernog elektromotornog pogona

Na slici 2.11 prikazana je zatvoreni regulacijski krug upravljanja strujom istosmjernog elektromotornog pogona. Pritom se prilikom projektiranja sustava upravljanja utjecaj protuelektromotorne sile smatra nepoznatim i konstantnim poremećajem $z(t)$. Uz pretpostavku parametara istosmjernog elektromotornog pogona jednakih onima iz primjera 2.2 projektirati PI regulator struje prema tehničkom optimumu.

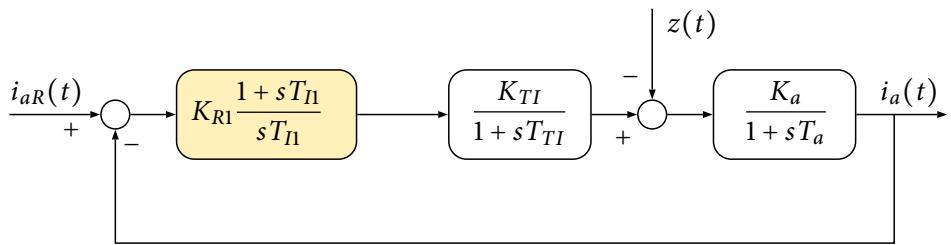
RJEŠENJE:

Prepostavku o protuelektromotornoj sili kao konstantnom poremećaju moguće je napraviti s obzirom na činjenicu da je krug upravljanja strujom armature znatno brži od kruga upravljanja brzinom elektromotornog pogona. Iz iznosa parametara elektromotornog pogona razvidno je da je armaturna vremenska konstanta T_a dominantna u ovom slučaju i pritom je odnos $T_a/T_{TI} = 0.0184/0.005 = 3.68$. Prema tome, proces je prikladan za projektiranje sustava upravljanja prema tehničkom optimumu.

Integralna vremenska konstanta PI regulatora unutarnje petlje odabire se na način da se kompenzira utjecaj armaturne vremenske konstante T_a , tj. $T_{II} = T_a$. U tom je slučaju prijenosna



Slika 2.10. Blokovska shema regulacije struje istosmjernog elektromotornog pogona



Slika 2.11. Blokovska shema sustava upravljanja strujom istosmjernog elektromotornog pogona.

funkcija otvorenog regulacijskog kruga po struji armature jednaka:

$$G_{o1}(s) = \frac{K_{R1}K_{TI}K_a}{sT_a(1+sT_{TI})}. \quad (2-16)$$

Odabirom pojačanja regulatora K_{R1} :

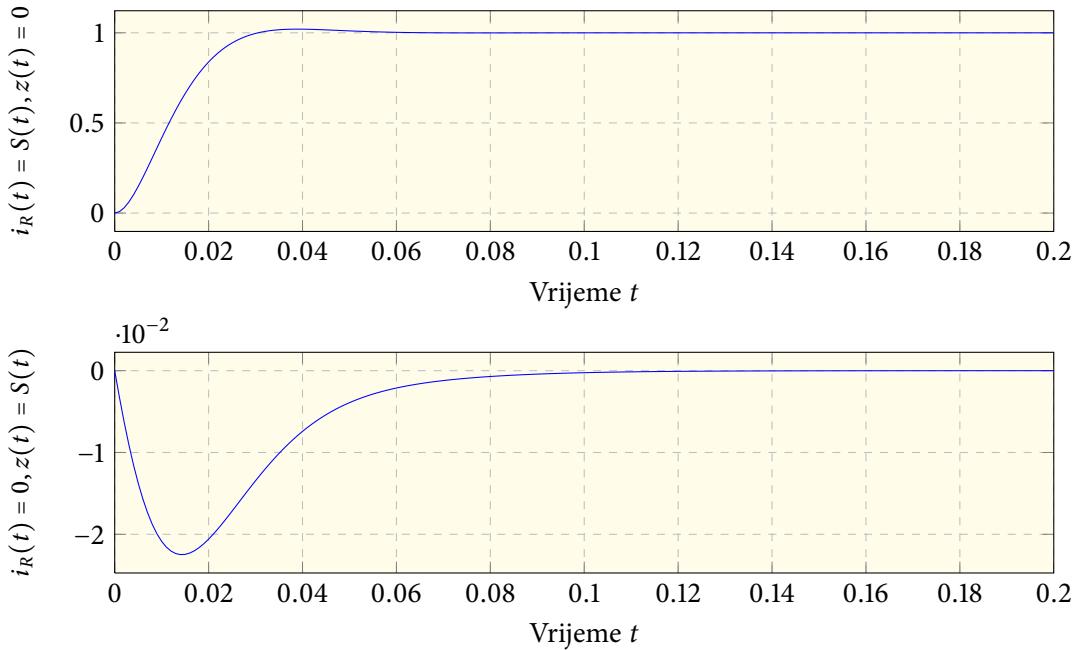
$$K_{R1} = \frac{1}{2K_{TI}K_a} \cdot \frac{T_a}{T_{TI}} \quad (2-17)$$

dobije se relativni koeficijent prigušenja unutarnjeg zatvorenog regulacijskog $\zeta_1 = \sqrt{2}/2$. Uz tako odabранe parametre PI regulatora armaturne struje prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga glasi:

$$G_{x1}(s) = \frac{1}{1 + 2T_{TI}s + 2T_{TI}^2s^2} \quad (2-18)$$

Odzivi armaturne struje na skokovite promjene referentne veličine i_{aR} i poremećajne veličine $z(t)$ prikazane su na slici 2.12.

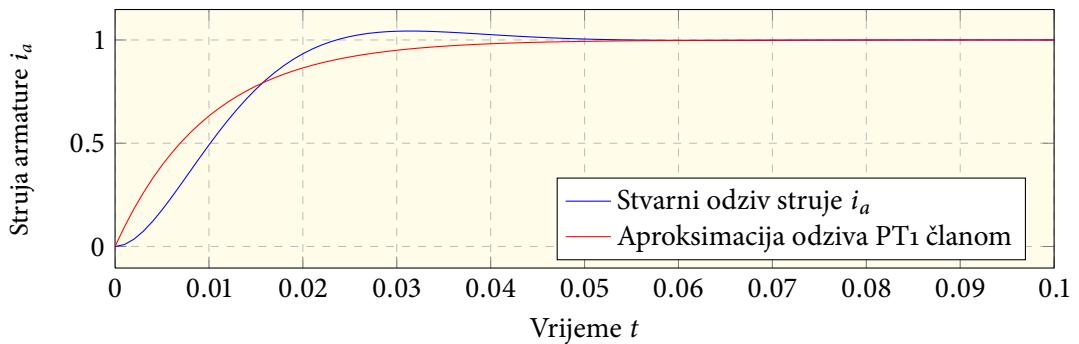
Budući da je upravljačka petlja po struci armature podređena u kaskadnoj strukturi upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona njena je brzina (širina propusnog pojasa frekvencijske karakteristike) znatno veća od brzine nadredene tj. primarne petlje. Iz tog se razloga prijenosna funkcija zatvorenog kruga armaturne struje može aproksimirati odgova-

Slika 2.12. Odzivi armaturne struje i_a na skokovite promjene a) postavne i b) poremećajne veličine.

rajućim PT1 članom kako je to dano sljedećim izrazom:

$$K_{x1} = \frac{1}{1 + 2T_{TI}s + 2T_{TI}^2s^2} \approx \frac{1}{1 + 2T_{TI}s}. \quad (2-19)$$

Usporedni prikaz odziva skokovitu promjenu ulazne veličine za zatvoren krug armaturne struje te za njegovu aproksimaciju PT1 članom dan je na slici 2.13.



Slika 2.13. Aproksimacija zatvorenog regulacijskog kruga armaturne struje s PT1 članom

Simetrični optimum

U prethodnom je odvojku pokazano da sustav upravljanja podešen prema tehničkom optimumu ima vrlo loše vladanje prema poremećajnoj veličini u slučajevima kada je odnos dominantne i zbroja nedominantnih vremenskih konstanti znatnijeg iznosa ($T_1/T_\Sigma > 4$). Jedan od postupaka projektiranja regulatora kojim se osigurava bolje vladanje sustava upravljanja s obzirom na poremećajnu veličinu jest i postupak projektiranja prema tzv. **simetričnom optimumu**. Simetrični je optimum općenito primjenjiv na procese s astatizmom prvog reda koji se daju opisati sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{T_1 s (1 + T_\Sigma s)}. \quad (2-20)$$

Pritom je bitno naglasiti da je postupak uvjetno primjenjiv i na sustave bez astatizma prvog reda, ako je dominantna vremenska konstanta mnogo veća od zbroja nedominantnih $T_1 \gg T_\Sigma$, tj. u slučajevima za kakve sustav projektiran prema tehničkom optimumu ne osigurava zadovoljavajuće ponašanje s obzirom na poremećajnu veličinu. Naime, u tom se slučaju može koristiti sljedeća aproksimacija:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1 + T_1 s)(1 + T_\Sigma s)} \approx \frac{K_p}{T_1 s (1 + T_\Sigma s)}, \quad (2-21)$$

kao posljedica činjenice da vrijedi $T_1 \gg T_\Sigma$.

Ideja je postupka da se postigne što brži odziv uz istovremeno osiguravanje dobrog vladanja sustava s obzirom na poremećajno djelovanje. Sa stanovišta kompenzacije utjecaja poremećaja od ključne je važnosti funkcija osjetljivosti⁴ sustava dana izrazom:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_R(s)}, \quad (2-22)$$

odnosno maksimalni iznos njene absolutne vrijednosti $M_s = \max_\omega |S(j\omega)|$. Pokazuje se da se zadovoljavajuće ponašanje sustava upravljanja prema poremećajnoj veličini postiže za $M_s < 2(6\text{db})$. Pritom je maksimalni iznos funkcije osjetljivosti u uskoj vezi s iznosima amplitudnog i faznog osiguranja (A.O. i γ):

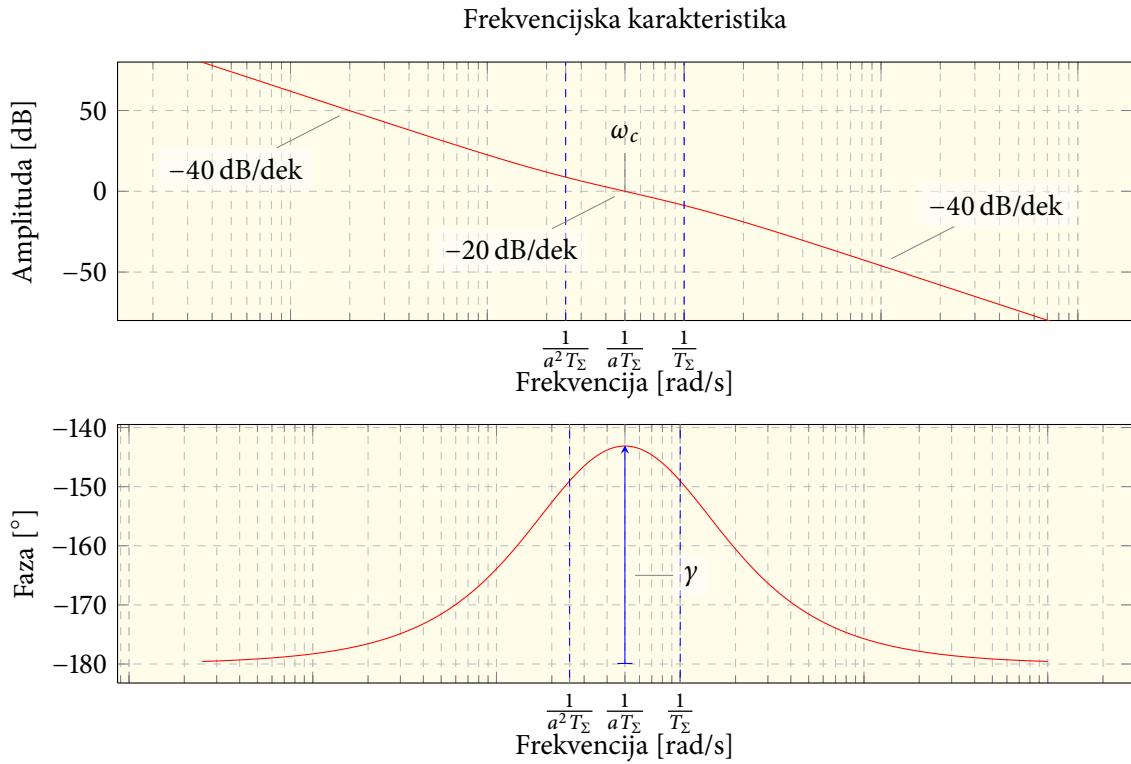
$$\text{A.O.} > \frac{M_s}{1 - M_s}, \quad (2-23)$$

$$\gamma > 2 \arcsin \frac{1}{2M_s} \quad (2-24)$$

Za iznos maksimuma funkcije osjetljivosti $M_s = 2$ slijedi da amplitudno osiguranje treba biti A.O. > 2 , odnosno fazno osiguranje $\gamma > 30^\circ$. Obično se smatra da se zadovoljavajuće vladanje s obzirom na poremećajnu i referentnu veličinu postiže za iznose $\gamma \in (30^\circ, 60^\circ)$. Za iznose faznog

⁴Naziv "funkcija osjetljivosti" posljedica je činjenice da se $S(s)$ može interpretirati kao osjetljivost prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga na modelske neodređenosti tj. $\frac{\Delta G_x(s)}{G_x(s)} = S(s) \frac{\Delta G_p(s)}{G_p(s)}$.

osiguranja manje od 30° kompenzacija poremećaja je prespora, dok je za iznose veće 60° odziv prema referentnoj vrijednosti isuviše prigušen. Uz pretpostavku procesa s astatizmom prvog



Slika 2.14. Frekvencijske karakteristike sustava podešenog prema simetričnom optimumu

reda i uz korištenje PI regulatora prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga glasi:

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + sT_I}{sT_I} \cdot \frac{K_s}{sT_s(1 + sT_\Sigma)}. \quad (2-25)$$

Razvidno je da, zbog postojanja dva integralna djelovanja, fazna karakteristika otvorenog regulacijskog kruga na niskim frekvencijama ima vrijednost -180° . Također se može zaključiti da je nužan uvjet za stabilnost zatvorenog regulacijskog kruga $T_I > T_\Sigma$. Stoga se za iznos integralne vremenske konstante odabire:

$$T_I = a^2 T_\Sigma \quad (2-26)$$

pri čemu je $a > 1$. U tom slučaju fazna karakteristika otvorenog kruga ima oblik dan slikom 2.14, a iznos faznog osiguranja sustava može poprimiti iznos iz intervala $[0, \gamma_{\max}(a)]$ ovisno o iznosu pojačanja regulatora K_R . Odabirom većih iznosa parametra a povećava se također iznos maksimalnog faznog osiguranja koje se može postići, ali se time usporava sustav upravljanja.

Očito je, dakle, da odabir parametara a i K_R predstavlja kompromis između zahtjeva za što bržim odzivom, s jedne strane, i određenom razinom robusnosti na djelovanje poremećajnih veličina, s druge strane. Kako je već ranije spomenuto, sa stanovišta kvalitete kompenzacije poremećaja odgovarajući se iznos faznog osiguranja odabire u rasponu $30^\circ - 45^\circ$. Originalno je simetrični optimum izведен uz iznos parametra $a = 2$ čime se postiže maksimalni iznos faznog osiguranja $\gamma_{\max} = 37^\circ$. Pojačanje PI regulatora prema simetričnom optimumu određuje se na način da se za određeni iznos parametra a maksimizira fazno osiguranje, tj. $\gamma = \gamma_{\max}$. Budući da je fazno osiguranje definirano kao $\gamma = 180 + \phi(\omega_c)$ slijedi da je u ovom slučaju ono dan izrazom:

$$\gamma = \arctan(a^2 T_\Sigma \omega_c) - \arctan(T_\Sigma \omega_c). \quad (2-27)$$

Kako bi se odredio iznos presječne frekvencije ω_c pri kojoj se postiže maksimum faznog osiguranja potrebno je izraz (2-27) derivirati po frekvenciji ω_c te rezultat izjednačiti s nulom:

$$\frac{d\gamma(\omega)}{d\omega} = \frac{T_I}{1 + (\omega T_I)^2} - \frac{T_\Sigma}{1 + (\omega T_\Sigma)^2} = 0, \quad (2-28)$$

odakle slijedi:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_I T_\Sigma}}. \quad (2-29)$$

Dobiveni je rezultat logičan ako se uzme u obzir logaritamsko mjerilo u kojem se predstavlja frekvencijska karakteristika sustava. Uvrštenjem izraza za ω_c u (2-27) izraz za fazno osiguranje postaje funkcija parametra a :

$$\gamma = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right). \quad (2-30)$$

Iz (2-30) dobije se:

$$a = \operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma}. \quad (2-31)$$

Na temelju željene vrijednosti presječne frekvencije određuje se iz amplitudno-frekvencijske karakteristike potrebna vrijednost pojačanja PI regulatora tako da vrijedi:

$$|G_o(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{K_R K_s}{\omega_c^2 a^2 T_s T_\Sigma} \frac{\sqrt{1 + a^4 T_\Sigma^2 \omega_c^2}}{\sqrt{1 + T_\Sigma^2 \omega_c^2}} = 1 \quad (2-32)$$

Uvezši u obzir da je $\omega_c = \frac{1}{a T_\Sigma}$ prethodni se izraz može zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{K_R K_s a T_\Sigma}{T_s} = 1, \quad (2-33)$$

odakle slijedi izraz za pojačanje PI regulatora prema simetričnom optimumu:

$$K_R = \frac{1}{aK_s} \frac{T_s}{T_\Sigma}. \quad (2-34)$$

Uz parametre PI regulatora određene izrazima (2-26) i (2-34) slijedi prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga:

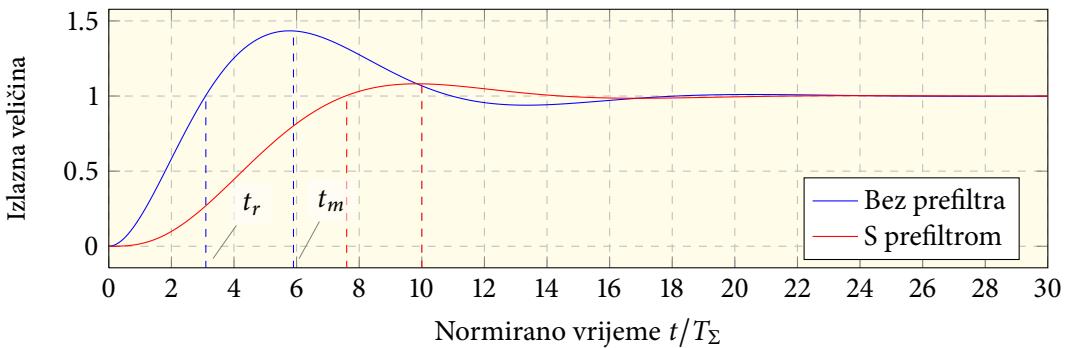
$$G_r(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{1 + a^2 T_\Sigma s}{1 + a^2 T_\Sigma s + a^3 T_\Sigma^2 s^2 + a^3 T_\Sigma^3 s^3}. \quad (2-35)$$

Postojanje nule $s = -1/(a^2 T_\Sigma)$ u prijenosnoj funkciji (2-35) rezultira značajnim nadvišenjem u odzivu na skokovitu promjenu referentne veličine, $\sigma_m = 43.4\%$ (slika 2.15). Iz tog se razloga u referentnu granu uvodi prefiltar:

$$G_{pf} = \frac{1}{1 + a^2 T_\Sigma}, \quad (2-36)$$

kojim se krati navedena nula u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga. Ovime se nadvišenje u odzivu na referentnu veličinu značajno smanjuje ($\sigma_m = 8.1\%$, slika 2.15). Zbog činjenice da je kraćenje nule izvedeno korištenjem prefiltara u referentnoj grani vladanje sustava upravljanja prema poremećajnoj veličini ostaje nepromjenjeno i određeno je prijenosnom funkcijom zatvorenog kruga prema poremećajnog veličini:

$$G_{zz}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{a T_\Sigma}{T_s} \frac{a^2 T_\Sigma s (1 + T_\Sigma s)}{1 + a^2 T_\Sigma s + a^3 T_\Sigma^2 s^2 + a^3 T_\Sigma^3 s^3}. \quad (2-37)$$



Slika 2.15. Odzivi sustava podešenog prema simetričnom odzivu bez/s prefiltrom u referentnoj grani

PRIMJER 2.4

Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona

U primjeru 2.3 projektiran je regulator armaturne struje prema tehničkom optimumu i pokazano je da se zatvoreni regulacijski krug struje može na zadovoljavajući način aproksimirati PT1 članom.

Potrebno je projektirati PI regulator brzine vrtnje primjenom simetričnog optimuma (slika 2.16).

RJEŠENJE:

Budući da je osnovna prepostavka za kaskadno upravljanje da je unutarnja petlja znatno brža od vanjske (primarne) tada je korištenje PT1 aproksimacije regulacijskog kruga struje opravdano. Time se značajno pojednostavljuje postupak projektiranja regulatora brzine vrtnje. Uvezši u obzir tu aproksimaciju otvoreni regulacijski krug brzine vrtnje dan je sljedećim izrazom:

$$G_{o2}(s) = K_{R2} \frac{1 + sT_{I2}}{sT_{I2}} \cdot \frac{K}{1 + 2T_\Sigma s} \cdot \frac{K_M}{1 + sT_M} \quad (2-38)$$

Zbroj nedominantnih vremenskih konstanti u ovom je slučaju jednak $T_\Sigma^* = 2T_{TI} = 0.01\text{s}$. Odnos dominantne vremenske konstante T_M i zbroja nedominantnih jednak je $T_M/T_\Sigma^* \approx 80$ te se u tom slučaju ne preporuča korištenje tehničkog optimuma zbog lošeg vladanja prema poremećajnoj veličini (vidi prethodni primjer). Iz tog se razloga parametri PI regulatora brzine vrtnje određuju prema simetričnom optimumu.

Kako bi se primijenio simetrični optimum dominantna vremenska konstanta nadomješta se integralnim djelovanjem, kako slijedi:

$$\frac{K_M}{1 + sT_M} \approx \frac{K_M}{sT_M}. \quad (2-39)$$

Uz takvu aproksimaciju PT1 člana s integralnim djelovanjem prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga s PI regulatorom glasi:

$$G_{o2}(s) = K_{R2} \frac{1 + sT_{I2}}{sT_{I2}} \cdot \frac{K}{1 + 2T_\Sigma s} \cdot \frac{K_M}{sT_M}, \quad (2-40)$$

što predstavlja standardni oblik prikladan za primjenu simetričnog optimuma. Parametri PI regulatora regulatora prema izrazima (2-26) i (2-34) iznose, uz $a = 2$:

$$T_{I2} = a^2 T_\Sigma^* = 0.04[\text{s}], \quad (2-41)$$

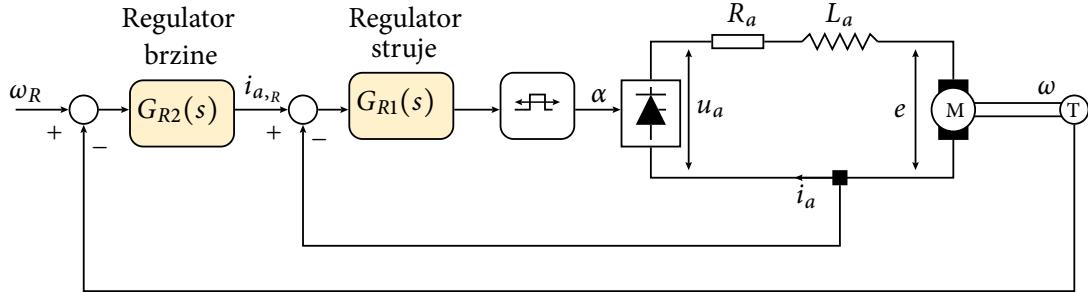
$$K_{R2} = \frac{1}{aKK_M} \frac{T_M}{T_\Sigma^*} = 0.6464. \quad (2-42)$$

Kako bi se smanjilo nadvišenje u odzivu na referentnu veličinu dodan je prefiltar u referentnu granu:

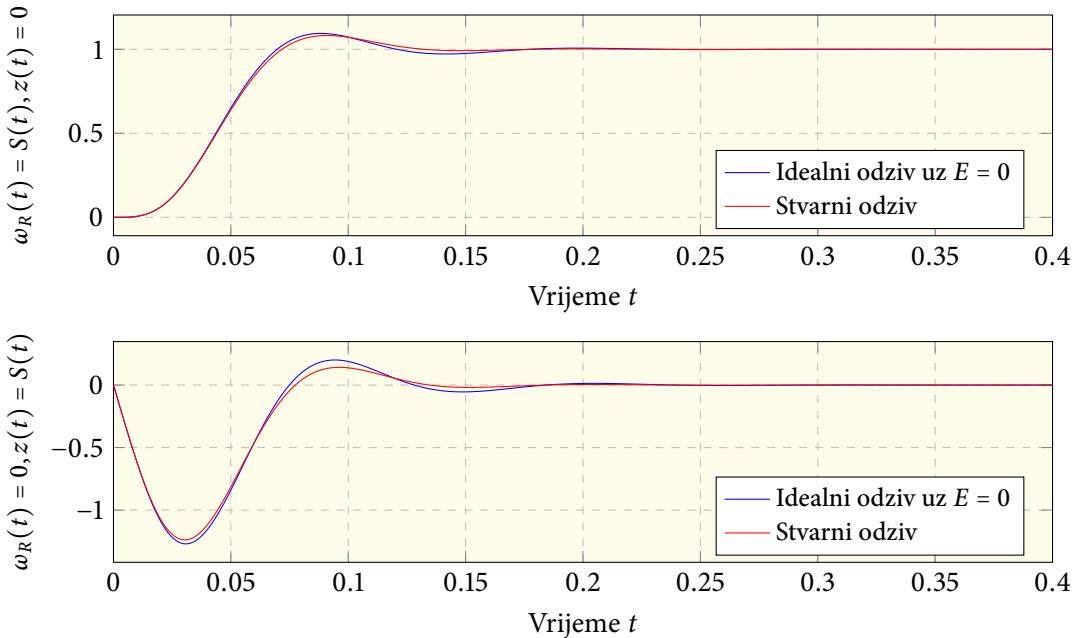
$$G_{pf} = \frac{1}{1 + a^2 T_\Sigma^*}. \quad (2-43)$$

Simulacijom sustava upavljanja brzinom vrtnje podešenog prema simetričnom optimumu dobiveni su odzivi prikazani na slici 2.17. Na slici su usporedno prikazani odzivi *idealnog* elektromotornog pogona kod kojeg ne bi postojao poremećaj u vidu protuelektromotorne sile. Prikazani odzivi ukazuju na vrlo dobru kompenzaciju poremećaja u slučaju korištenja kaskadnih struk-

tura upravljanja (usporediti s rezultatima u slučaju korištenja jednopetljaste strukture upravljanja prikazanim na slici 2.6).



Slika 2.16. Načelna shema upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog EMP-a



Slika 2.17. Odzivi brzine vrtnje istosmjernog EMP-a na skokovitu promjenu postavne veličine odnosno poremećajne veličine

Modifikacija simetričnog optimuma

U prethodnom je primjeru pokazano da se simetrični optimum može uspješno primijeniti i na procese bez astatizma ukoliko je dominantna vremenska konstanta mnogostruko veća od zbroja nedominantnih (u primjeru je taj odnos iznosio oko 80). Pritom pogreška amplitudne i fazne

karakteristike na presječnoj frekvenciji koja je time napravljena iznose:

$$\delta_A = \frac{1}{\omega_c T_s} - \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 T_s^2}} = \frac{1}{40} - \frac{1}{\sqrt{1 + 40^2}} = 7.8 \cdot 10^{-6}, \quad (2-44)$$

$$\delta_\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan(T_s \omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(40) = 0.025 (\approx 1.4^\circ), \quad (2-45)$$

odakle se da zaključiti da je opravdano primijeniti izvorni simetrični optimum u ovom slučaju. Međutim, simetrični je optimum moguće primijeniti i u slučajevima kada je odnos dominantne i zbroja nedominantnih vremenskih konstanti znatno manjeg iznosa (npr. 10 ili 20), ukoliko je vladanje sustava prema poremećajnoj veličini od primarne važnosti. U tom je slučaju potrebno modificirati osnovnu verziju simetričnog optimuma kako bi se kompenzirao utjecaj dominantnog PT1 člana na faznu i amplitudnu karakteristiku na presječnoj frekvenciji i time iznos faznog osiguranja ostao jednak kao u slučaju procesa s astatizmom prvog reda.

U tom smislu razmotrimo sada slučaj procesa bez astatizma oblika:

$$G_p(s) = \frac{K_s}{(1 + sT_s)(1 + sT_\Sigma)}, \quad (2-46)$$

pri čemu je T_s dominantna vremenska konstanta uz $T_s/T_\Sigma = n$, $n > 1$. Fazno osiguranje kod izvorne verzije simetričnog optimuma dano je izrazom:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{a^2 - 1}{2a}\right), \quad (2-47)$$

dok je u slučaju procesa bez astatizma fazno osiguranje jednako:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{a_m^2 - 1}{2a_m}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{a_m}\right), \quad (2-48)$$

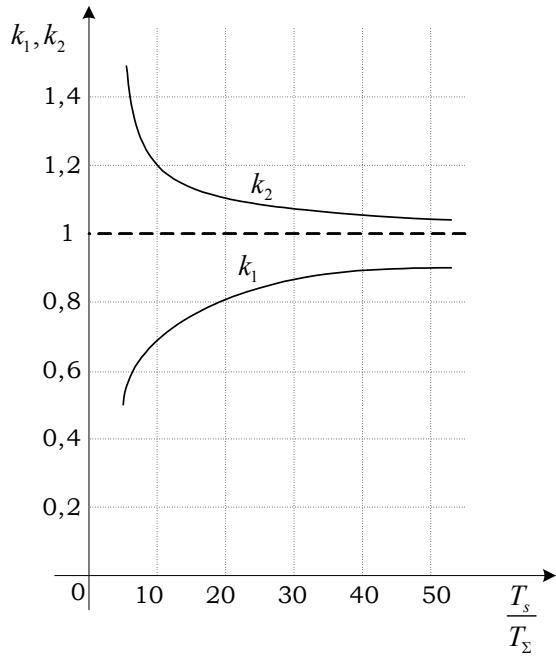
pri čemu je a_m modificirana vrijednost koeficijenta a . Izjednačavanjem izraza (2-46) i (2-47) dobije se algebarska jednadžba čijim se numeričkim rješavanjem uz $a = 2$ dobiju krivulje prikazane na slici 2.18. Pritom $k_1 = a_m^2/a^2$ i $k_2 = 1/\sqrt{k_1}$ predstavljaju korekcijske faktore originalnih parametara PI regulatora:

$$\begin{aligned} T_I &= k_1 \cdot 4T_\Sigma \\ K_R &= k_2 \cdot \frac{1}{2K_s} \frac{T_s}{T_\Sigma} \end{aligned} \quad (2-49)$$

PRIMJER 2.5

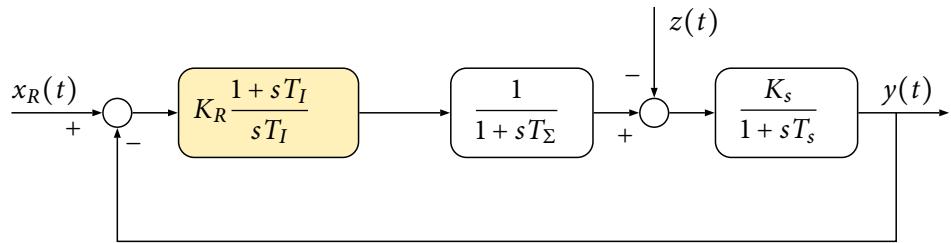
Usporedba tehničkog i simetričnog optimuma

Sustav upravljanja procesom drugog reda bez astatizma prikazan je na slici 2.19. Pritom je pretpostavka da je T_s dominantna vremenska konstanta uz $T_s = 20T_\Sigma$. Parametri PI regulatora odredeni su korištenjem tehničkog odnosno simetričnog optimuma (uz $a = 2$) kako bi se usporedilo vladanje



Slika 2.18. Ovisnost iznosa korekcijskih faktora simetričnog optimuma o omjeru dominantne i zbroja ne-dominantnih vremenskih konstanti.

tako podešenih sustava upravljanja s obzirom na referentnu odnosno poremećajnu veličinu.



Slika 2.19. Sustav upravljanja procesom drugog reda bez astatizma.

RJEŠENJE:

Prilikom određivanja parametara PI regulatora prema tehničkom optimumu kompenzirana je dominantna vremenska konstanta procesa integralnom vremenskom konstantom procesa, dok je pojačanje regulatora K_R određeno tako da se postigne relativni koeficijent prigušenja zatvorenog regulacijskog kruga $\zeta = \sqrt{2}/2$, tj.:

$$\begin{aligned} T_I &= T_s, \\ K_R &= \frac{1}{2K_s} \cdot \frac{T_s}{T_\Sigma}. \end{aligned} \tag{2-50}$$

Uz tako određene parametre regulatora, prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga

prema referentnoj i prema poremećajnoj veličini iznose:

$$G_x(s) = \frac{1}{1 + 2T_\Sigma s + 2T_\Sigma^2 s^2} \quad (2-51)$$

$$G_z(s) = \frac{2T_\Sigma s(1 + T_\Sigma s)}{(1 + T_s s)(1 + 2T_\Sigma s + 2T_\Sigma^2 s^2)} \quad (2-52)$$

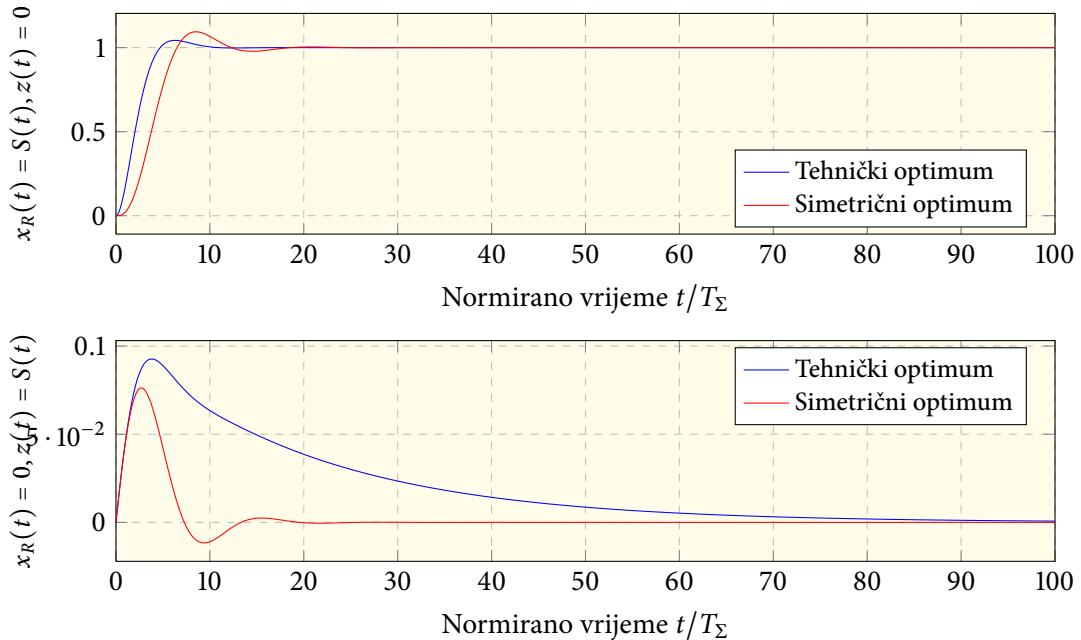
Parametri PI regulatora prema simetričnom optimumu, uz koeficijent $a = 2$ iznose:

$$\begin{aligned} T_I &= k_1 \cdot a^2 T_s, \\ K_R &= k_2 \cdot \frac{1}{a K_s} \cdot \frac{T_s}{T_\Sigma}, \end{aligned} \quad (2-53)$$

pri čemu su korekcijski faktori k_1 i k_2 određeni na temelju slike 2.18 i iznose $k_1 \approx 0.8$ i $k_2 \approx 1.1$. Dodatno je u granu referentne vrijednosti dodan prefiltar:

$$G_{pf}(s) = \frac{1}{1 + k_1 \cdot a^2 T_\Sigma s}, \quad (2-54)$$

kojim se kompenzirao utjecaj konačne nule u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga.



Slika 2.20. Usporedni odzivi sustava podešenih prema tehničkom odnosno simetričnom optimumu na skokovitu promjenu a) referentne vrijednosti i b) poremećajne vrijednosti.

Odzivi prikazani na slici 2.20 pokazuju da u slučajevima kada je odnos dominantne i zbroja

nedominantnih vremenskih konstanti većeg iznosa sustav podešen prema simetričnom optimumu ima znatno bolje vladanje prema poremećajnoj veličini. Naravno, cijena je pritom plaćena nešto sporijim odzivom prema referentnoj vrijednosti (približno 2 puta sporiji odziv).

2.3 Dodatne prednosti korištenja kaskadnog upravljanja

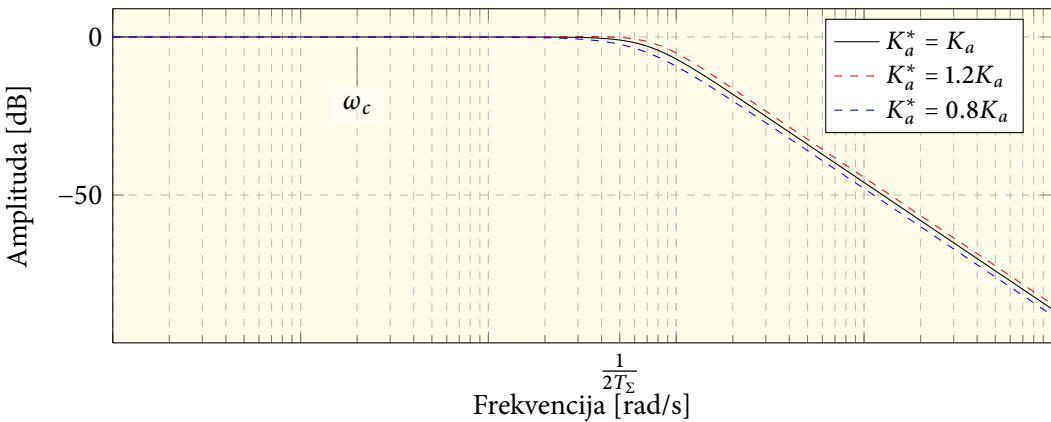
Osim poboljšanja vladanja s obzirom na poremećajnu veličinu, korištenje kaskadnog upravljanja ima i niz drugih prednosti u odnosu na klasične jednopetljaste strukture upravljanja. U nastavku ovog potpoglavlja ukratko se opisuju neke od dodatnih prednosti kaskadnog upravljanja.

2.3.1 Robusnost na parametarske neodređenosti modela procesa

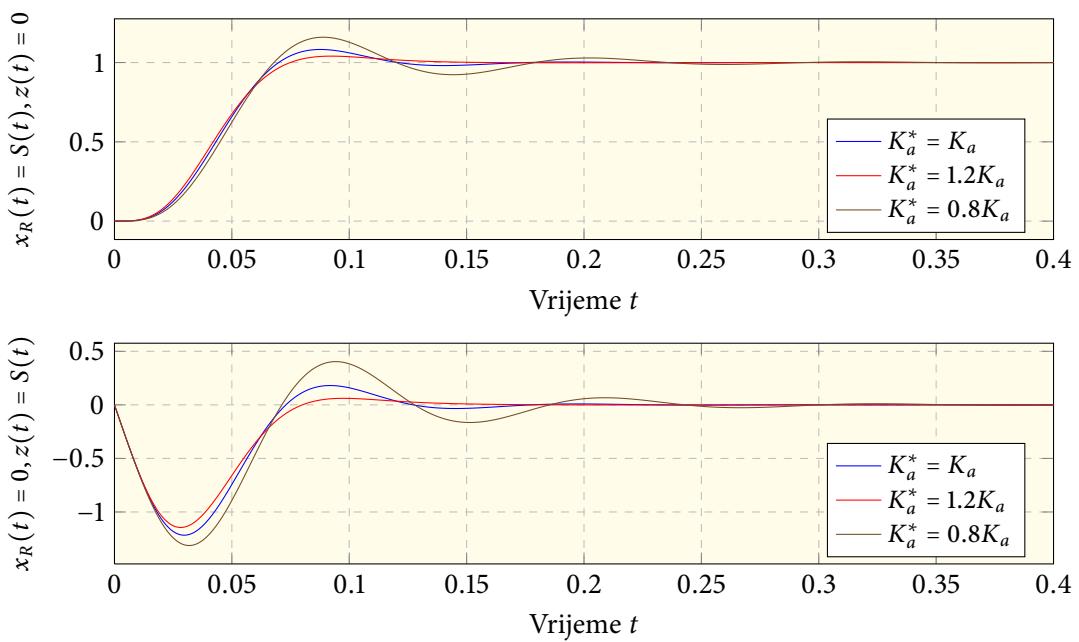
Postojanje parametarskih neodređenosti u praksi je gotovo neizbjegna pojava koja često rezultira značajnim narušavanjem kvalitete upravljanja. Takve su neodređenosti prije svega posljedica nedovoljnog poznavanja samog procesa što za sobom povlači i nemogućnost točnog određivanja parametara njegovog odgovarajućeg matematičkog modela. Jedan od načina smanjenja utjecaja parametarskih neodređenosti na kvalitetu upravljanja je i korištenje kaskadnih struktura upravljanja. Naime, ako postoji parametarske neodređenosti u dijelu procesa obuhvaćenim unutarnjom (pomoćnom) upravljačkom petljom tada je njihov efekt na reguliranu veličinu tj. na vanjsku petlju značajno smanjen ukoliko je pritom zadovoljen uvjet da je unutarnja petlja bitno brža od vanjske. Kako bi se to ilustriralo pretpostavimo da u primjeru 2.4 postoji neodređenost iznosa pojačanja K_a , odnosno da je njegova stvarna vrijednost $K_a(1 + \Delta)$. Prijenosna funkcija unutarnjeg zatvorenog regulacijskog kruga, uz parametre regulatora određene pretpostavljajući njegovu nominalnu vrijednost K_a , glasi:

$$G_{z1}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2T_{TI}}{1 + \Delta}s + \frac{2T_{TI}^2}{1 + \Delta}s^2}. \quad (2-55)$$

Na slici 2.21 prikazane su amplitudno frekvencijske karakteristike unutarnjeg zatvorenog regulacijskog kruga danog izrazom (2-55), uz različite iznose neodređenosti parametra K_a . Pritom je na slici dodatno naznačena presječna frekvencija vanjskog regulacijskog kruga ω_c za slučaj da se on projektira prema simetričnom optimumu, uz $a = 2$. Bitno je primijetiti da se dio frekvencijske karakteristike unutarnjeg zatvorenog regulacijskog kruga koji je bitan sa stajališta vladanja vanjskog regulacijskog kruga (okolina presječne frekvencije ω_c) samo neznatno mijenja pri promjenama pojačanja unutarnjeg otvorenog regulacijskog kruga za $\pm 20\%$, tj. uz $\Delta = \pm 0.2$. Upravo zbog te činjenice utjecaj parametarskih neodređenosti unutarnjeg regulacijskog kruga u vrlo maloj mjeri utječe na vladanje vanjskog regulacijskog kruga, što je razvidno na temelju prikazanih odziva brzine vrtnje na slici 2.22.



Slika 2.21. Usporedba amplitudno frekvencijskih karakteristika zatvorenog regulacijskog kruga armature struje uz različite iznose parametra K_a



Slika 2.22. Usporedba odziva brzine vrtnje uz različite iznose neodređenosti parametra K_a

2.3.2 Smanjenje utjecaja nelinearnosti

Fizički elementi (aktuatori, senzori i sl.) koji čine sustav upravljanja rijetko imaju u potpunosti linearnu karakteristiku nego se one najčešće daju nadomjestiti odgovarajućom linearnom karakteristikom u uskom radnom području. Tipičan je takav primjer karakteristika ventila. Postojanje takvih nelinearnosti može rezultirati narušenom kvalitetom upravljanja. Jedan od načina kompenzacije utjecaja nelinearnih elemenata je i korištenje kaskadnog upravljanja. Pritom, slično kao i za poremećaj, nelinearnost mora biti obuhvaćena unutarnjom upravljačkom petljom. Da bi se objasnio efekt linearizacije dovoljno je promotriti prijenosnu funkciju podređenog zatvorenog regulacijskog kruga:

$$G_{z1}(s) = \frac{G_{R1}(s)G_{p1}(s)}{1 + G_{R1}(s)G_{p1}(s)}. \quad (2-56)$$

Ako je pritom zadovoljen uvjet $|G_{R1}(s)G_{p1}(s)| >> 1$ tada očito vrijedi $G_{z1}(s) \approx 1$, tj. sa stajališta nadređenog kruga i upravljanja primarnom reguliranom veličinom, karakteristika podređenog kruga je približno linearna, unatoč postojanju nelinearnih efekata u podređenom krugu.

2.4 Sažetak poglavlja

- U ovom je poglavlju predstavljen koncept kaskadnog upravljanja, s ciljem poboljšanja vladanja primarne regulirane veličine.
- Osnovne prednosti kaskadnog upravljanja se sastoje u poboljšanom dinamičkom vladanju sustava, smanjenoj osjetljivosti na modelske neodređenosti te smanjenju utjecaja nelinearnosti.
- Glavni je nedostatak kaskadnog upravljanja potreba za dodatnim senzorom/senzorima dodatnih mjernih veličina.
- Tehnički optimum se u kontekstu upravljanja elektromotornih pogona koristi za upravljanje podređenom petljom po struji armature.
- Primjenjiv je na statičke procese s jednom odnosno dvije vremenske konstante i postiže se primjenom PI odnosno PID regulatora.
- U slučaju jedne dominantne vremenske konstante ona se kompenzira s integralnom vremenskom konstantom PI regulatora, dok se pojačanje podešava na način da se postigne relativni koeficijent prigušenja od $\zeta = \sqrt{2}/2$.
- Ukoliko se radi o procesu s dvije vremenske konstante tada se one kompenziraju integralnom i derivacijskom vremenskom konstantom PID regulatora, dok se pojačanje podešava na način da se postigne relativni koeficijent prigušenja od $\zeta = \sqrt{2}/2$.

- Simetrični optimum se u kontekstu upravljanja elektromotornim pogonima koristi za upravljanje vanjskom, nadređenom petljom po brzini vrtnje.
- Postupak je primjenjiv na procese koji se daju aproksimirati IT1 članom (PT1 član + integrator).
- Parametri PI regultora prema simetričnom optimumu se podešavaju na način da se postigne maksimalno fazno osiguranje.
- Sustav podešen prema simetričnom optimumu osigurava dobro ponašanje prema poremećajnoj veličini, dok prema referentnoj veličini odziv karakteristično ima izraženo oscilatorno ponašanje, koje se rješava dodavanjem prefiltira u referentnu granu.

Diskretni simetrični optimum

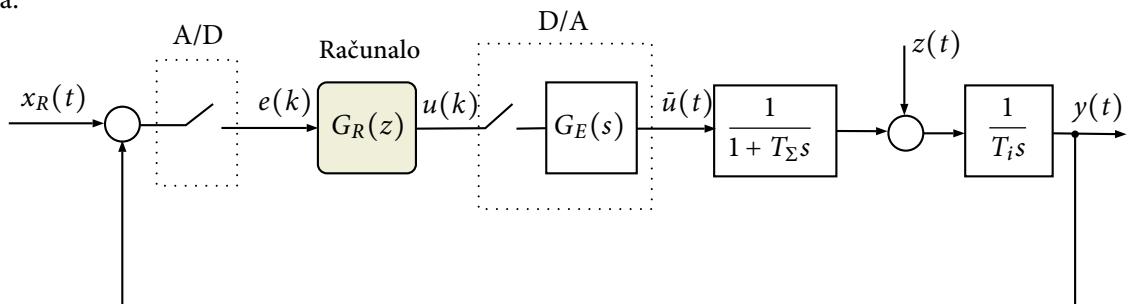
U ovom se poglavlju obrađuje diskretna izvedba PI regulatora brzine vrtnje elektromotornog pona. Pritom se prepostavljanja analogna izvedba unutarnje petlje po struji armature. Ovakva prepostavka je razumljiva budući da se dugo vremena unutarnja petlja izvodila gotovo isključivo u analognoj tehnici primjenom tiristorskih usmjerivača.

3.1 Digitalno upravljanje elektromotornim pogonom

Načelna shema diskretnog upravljanja brzinom vrtnje elektromotornog pogona prikazana je na slici 3.1. Pritom prijenosna funkcija:

$$G_{zi_a} = \frac{K_s}{1 + T_\Sigma s} \quad (3-1)$$

predstavlja zatvorenu podredenu petlju po struji aramture, nadomještenu s dinamikom prvog reda.



Slika 3.1. Sustav upravljanja prikidan za primjenu simetričnog optimuma

Između različitih mogućih pristupa projektiranju digitalnog sustava upravljanja u ovom će se poglavlju obraditi dva pristupa i to:

Emulacija analognog PI regulatora. Kod ovog pristupa postupak projektiranja regulatora je jednak kao u slučaju analognog regulatora uz dodatnu diskretizaciju tako dobivenog regulatora, primjenom nekog od standardnih postupaka.

Projektiranje u pseudofrekvencijskoj domeni. Za razliku od prethodnog ovaj postupak uzima u obzir utjecaj vremena uzorkovanja na sustav način, a da se pritom projektiranje digitalnog regulatora obavlja na jednak način kao u slučaju analognog regulatora.

3.2 Emulacija analognog PI regulatora

Postupak projektiranja digitalnog PI regulatora emulacijom odgovarajućeg analognog PI regulatora predstavlja jednostavan i često korišten postupak u praksi. Osnovni je preduvjet za provođenje ovakvog postupka sinteze da je vrijeme diskretizacije regulatora T značajno manje od najmanje relevantne vremenske konstante procesa, tj. $T \ll T_\Sigma$.

Sam se postupak projektiranja digitalnog regulatora provodi u dva koraka:

1. projektiranje analognog PI regulatora, kako je to opisano u poglavlju 1.
2. diskretizacija analognog PI regulatora.

Diskretizacija PI regulatora obično se obavlja primjenom nekog od klasičnih postupaka diskretizacije, između kojih su u praksi najčešće korišteni:

- Postupak pravokutne integracije,
- Postupak trapezne integracije.

3.2.1 Diskretizacija PI regulatora primjenom pravokutne integracije

Prijenosna funkcija PI regulatora u s – području:

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right). \quad (3-2)$$

transformira se, uz pretpostavku dovoljno malog vremena diskretizacije T , primjenom pravokutne integracije, u odgovarajući diskretni oblik uvođenjem sljedeće smjene varijabli¹:

$$\frac{1}{s} = \frac{Tz}{z - 1}. \quad (3-3)$$

Uvrštavanjem prehodnog izraza u prijenosnu funkciju kontinuiranog PI regulatora dobije se:

$$G_R(z) = K_R \left(1 + \frac{T}{T_I}\right) \frac{z - \frac{T_I}{T_I+T}}{z - 1}. \quad (3-4)$$

Dobiveni se izraz može skraćeno zapisati u sljedećem obliku:

$$G_R(z) = \frac{K_R}{a^*} \frac{z - a^*}{z - 1}, \quad (3-5)$$

pri čemu je:

$$a^* = \frac{T_I}{T_I + T}. \quad (3-6)$$

Dobiveni PI regulator implementira se u obliku sljedeće rekurzivne jednadžbe:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{a^*} e(k) + K_R e(k-1), \quad (3-7)$$

pri čemu je $e(k)$ pogreška slijedenja referetne brzine vrtnje $e(k) = \omega_R(k) - \omega(k)$.

¹Operacija integracije u kontinuiranoj domeni može se uz pretpostavku dovoljno malog vremena uzorkovanja aproksimirati odgovarajućom jednadžbom diferencija kako slijedi:

$$u(t = kT) = \int_0^{kT} e(t) dt = \int_0^{(k-1)T} e(t) dt + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt \approx u((k-1)T) + Te(kT)$$

Primjenom \mathcal{Z} -transformacije na prethodni izraz dobiva se sljedeća diskretna prijenosna funkcija pravokutne integracije:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz}{z - 1}.$$

3.2.2 Diskretizacija PI regulatora primjenom trapezne integracije

Izraz za trapeznu integraciju (Tustinova relacija, bilinearna transformacija) glasi²:

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (3-8)$$

Primjenom Tustinove relacije na izraz za analogni PI regulator (3-2) dobije se sljedeća prijenosna funkcija diskretnog PI regulatora:

$$G_R(z) = K_R \left(1 + \frac{T}{2T_I} \right) \frac{z - \frac{2T_I - T}{2T_I + T}}{z - 1}. \quad (3-9)$$

Dobiveni se izraz može skraćeno zapisati u sljedećem obliku:

$$G_R(z) = \frac{K_R}{b^*} \frac{z - a^*}{z - 1}, \quad (3-10)$$

pri čemu su:

$$a^* = \frac{2T_I - T}{2T_I + T}. \quad (3-11)$$

$$b^* = \frac{2T_I}{2T_I + T}. \quad (3-12)$$

Dobiveni PI regulator implementira se u obliku sljedeće rekurzivne jednadžbe:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{b^*} e(k) + K_R \frac{a^*}{b^*} e(k-1), \quad (3-13)$$

pri čemu je $e(k)$ pogreška slijedenja referetne brzine vrtnje $e(k) = \omega_R(k) - \omega(k)$.

3.3 Projektiranje digitalnog PI regulatora u kvazifrekvencijskom području

U slučaju da vrijeme uzorkovanja T nije zanemarivo u odnosu na relevantne vremenske konstante procesa (T_Σ u našem slučaju) tada ga je nužno uzeti u obzir prilikom projektiranja sustava

²Izraz za trapeznu integraciju dobije se sljedećom aproksimacijom operacije integracije u kontinuiranoj domeni:

$$u(t = kT) = \int_0^{kT} e(t) dt = \int_0^{(k-1)T} e(t) dt + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt \approx u((k-1)T) + T \frac{e(kT) + e((k-1)T)}{2}.$$

Primjenom \mathcal{Z} -transformacije na prethodni izraz slijedi:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1},$$

što predstavlja izraz za trapeznu integraciju.

upravljanja. S druge strane, korištenje postupaka projektiranja PI regulatora u kontinuiranoj domeni popularno je u praksi zbog činjenice da su takve metode dobro razvijene i etabrirane u području upravljanja elektromotornim pogonima. Projektiranje regulatora u kvazifrekvenčijskoj domeni upravo omogućuje da se na sustavan način uzme u obzir utjecaj vremena diskretizacije prilikom projektiranja sustava upravljanja, a da se sam postupak pritom obavlja praktički na jednak način kao u slučaju analognog PI regulatora. Osnovna je ideja postupka da se primjenom nekog od aproksimativnih postupaka diskretni sustav (diskretni regulator i diskretizirani proces) transformira u odgovarajuću kontinuiranu formu. Budući da se pritom ne koristi inverzna \mathcal{Z} -transformacija domena u kojoj se takav sustav prikazuje najčešće se naziva **kvazikontinuiranom** domenom.

Osnovni koraci u sklopu ovog postupka projektiranja regulatora su sljedeći:

1. Transformacija procesa i regulatora u kvazikontinuiranu domenu;
2. Projektiranje regulatora primjenom nekog od postupaka sinteze za kontinuirane sustave upravljanja;
3. Transformacija regulatora iz kvazikontinuirane u diskretnu domenu.

Na slici 3.2 prikazana je blokovska shema koja prikazuje osnovne korake prilikom projektiranja regulatora u kvazikontinuiranom području. Pritom Θ predstavlja skup parametara regulatora koji se trebaju odrediti u postupku projektiranja regulatora, npr. K_R i T_I kod PI regulatora, dok Θ^* predstavlja skup u postupku projektiranja dobivenih parametara regulatora.

3.3.1 Transformacija sustava iz diskretnе u kvazikontinuiranu domenu

Transformacija sustava u kvazi-kontinuiranu domenu uobičajeno se obavlja primjenom bilinearne transformacije (ili preciznije rečeno inverzne bilinearne transformacije). Relacija za bilinearnu transformaciju glasi:

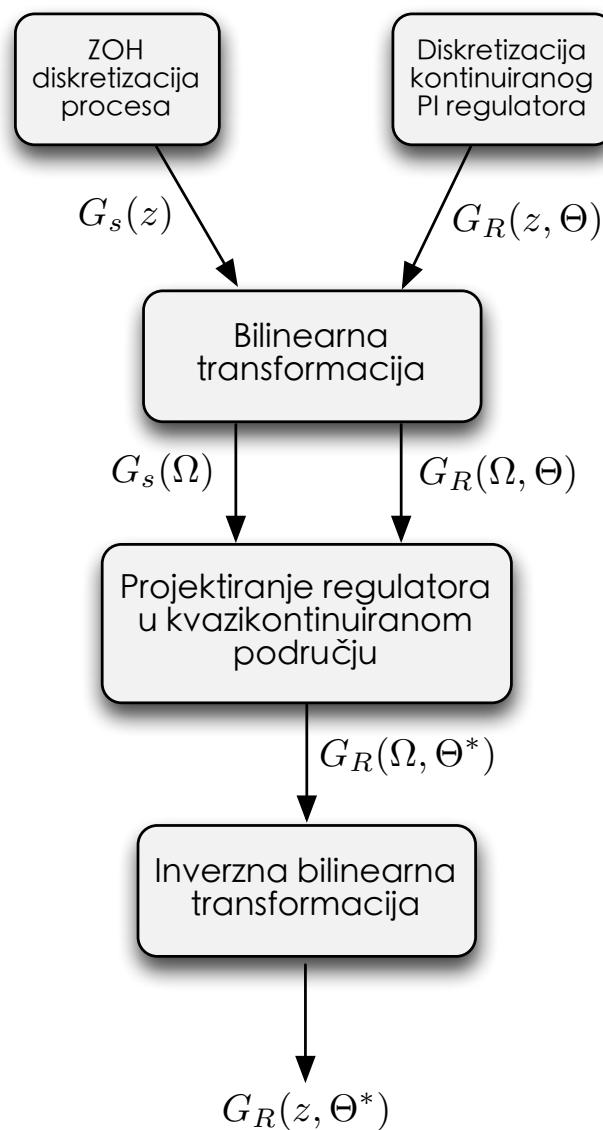
$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (3-14)$$

odakle slijedi inverzna bilinearna transformacija:

$$z = \frac{1 + \Omega T/2}{1 - \Omega T/2}. \quad (3-15)$$

Budući da je diskretna kompleksna varijabla z definirana kao $z = e^{j\omega T}$, tada vrijedi:

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\omega^* \quad (3-16)$$



Slika 3.2. Postupak projektiranja diskretnog regulatora u kvazikontinuiranom području

Pritom ω^* predstavlja tzv. pseudofrekvenciju, za koju vrijedi:

$$\omega^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}, \quad (3-17)$$

odakle slijedi:

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \frac{\omega^* T}{2}. \quad (3-18)$$

TEOREM 3.1. Za transformaciju definiranu izrazom (3-17) vrijedi:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Omega = s, \quad (3-19)$$

Dokaz.

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \rightarrow \frac{e^{sT}-1}{e^{sT}+1}. \quad (3-20)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Omega = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2}{T} \frac{Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \dots}{2 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \dots} = s \quad (3-21)$$

□

3.3.2 Diskretizacija modela procesa i transformacija u kvazikontinuirano područje

Ekvivalentna diskretna prijenosna funkcija procesa dobiva se iz kontinuiranog procesa uz primjenu ekstrapolatora nultog reda (ZOH):

$$G_s(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{K_s}{1 + T_\Sigma s} \frac{1}{T_i s} \right\}. \quad (3-22)$$

Odavde slijedi prijenosna funkcija procesa u z-području:

$$G_s(z) = K_s \frac{T_\Sigma}{T_i} \left(\frac{T_\Sigma}{T_i} + e^{-T/T_\Sigma} - 1 \right) \frac{z - \frac{1-T/T_\Sigma e^{-T/T_\Sigma} - e^{-T/T_\Sigma}}{1-T/T_\Sigma - e^{-T/T_\Sigma}}}{(z-1)(z - e^{-T/T_\Sigma})}. \quad (3-23)$$

Izraz (3-23) može se zapisati u sažetom obliku kao:

$$G_s(z) = \frac{K_z}{T_i} \frac{z - z_0}{T_i(z-1)(z - p_0)}, \quad (3-24)$$

uz:

$$K_z = K_s \left[T + T_\Sigma (e^{-T/T_\Sigma} - 1) \right], \quad (3-25)$$

$$z_0 = \frac{1 - T/T_\Sigma e^{-T/T_\Sigma} - e^{-T/T_\Sigma}}{1 - T/T_\Sigma - e^{-T/T_\Sigma}}, \quad (3-26)$$

$$p_0 = e^{-T/T_\Sigma}. \quad (3-27)$$

Primjenom bilinearne transformacije na izraz (3-24) za prijenosnu funkciju procesa u z - području slijedi:

$$G_s(\Omega) = \frac{K_z}{T_i} \frac{\frac{1 + \frac{T\Omega}{2}}{1 - \frac{T\Omega}{2}} - z_0}{\left(\frac{1 + \frac{T\Omega}{2}}{1 - \frac{T\Omega}{2}} - 1 \right) \left(\frac{1 + \frac{T\Omega}{2}}{1 - \frac{T\Omega}{2}} - p_0 \right)} \quad (3-28)$$

Nakon sređivanja, konačni izraz za prijenosnu funkciju u kvazikontinuiranom području glasi:

$$G_s(\Omega) = \frac{K_{z\Omega}}{T_i} \frac{\left(1 + b \frac{T\Omega}{2}\right) \left(1 - \frac{T\Omega}{2}\right)}{\left(1 + c \frac{T\Omega}{2}\right) T\Omega}, \quad (3-29)$$

gdje je:

$$K_{z\Omega} = K_z \frac{1 - z_0}{1 - p_0} = K_s T, \quad (3-30)$$

$$b = \frac{1 + z_0}{1 - z_0} = \frac{1 + e^{-T/T_\Sigma}}{1 - e^{-T/T_\Sigma}} - \frac{2T_\Sigma}{T}, \quad (3-31)$$

$$c = \frac{1 + p_0}{1 - p_0} = \frac{1 + e^{-T/T_\Sigma}}{1 - e^{-T/T_\Sigma}} = b + \frac{2T_\Sigma}{T}. \quad (3-32)$$

Izraz (3-29) za prijenosnu funkciju procesa može se prikazati i u obliku:

$$G_s(\Omega) = \underbrace{\frac{K_{z\Omega}}{\left(1 + c \frac{T\Omega}{2}\right) T_i \Omega}}_{\begin{array}{l} \text{Analogija s } G_s(s) \\ (\text{bez ZOH}) \end{array}} \underbrace{\frac{1}{T} \left(1 + b \frac{T\Omega}{2}\right) \left(1 - \frac{T\Omega}{2}\right)}_{\text{Doprinos ZOH}} \quad (3-33)$$

Uz dovoljno malo vrijeme uzorkovanja, prijenosna funkcija procesa (3-33) u Ω - području može se zapisati kao:

$$G_s(\Omega) = \frac{K_{z\Omega}}{T_i \Omega} \frac{1}{1 + T_\Sigma^* \Omega}, \quad (3-34)$$

gdje je:

$$T_\Sigma^* = (c - b) \frac{T}{2} + \frac{T}{2}. \quad (3-35)$$

Kako je prema (3-32):

$$c - b = \frac{2T_\Sigma}{T}, \quad (3-36)$$

slijedi:

$$T_{\Sigma}^* = T_{\Sigma} + \frac{T}{2}. \quad (3-37)$$

Prethodni izraz pokazuje da se doprinos ekstrapolatora nultog reda (ZOH) očituje u povećanju izvorne nedominantne vremenske konstante T_{Σ} (odnosno sume nedominantnih vremenskih konstanti) za $\frac{T}{2}$.

3.3.3 Diskretni PI regulator u kvazikontinuiranom području

Primjenom pravokutne integracije na prijenosnu funkciju PI regulatora u s -području dobiva se odgovarajuća diskretna verzija PI regulatora (izraz (3-5)):

$$G_R(z) = \frac{K_R}{a^*} \frac{z - a^*}{z - 1}, \quad (3-38)$$

gdje je:

$$a^* = \frac{T_I}{T_I + T}. \quad (3-39)$$

Primjenom bilinearne transformacije na izraz (3-38) za diskretni PI regulator slijedi:

$$G_R(\Omega) = \frac{K_R}{a^*} \frac{\frac{1 + \frac{T\Omega}{2}}{\frac{T\Omega}{2}} - a^*}{\frac{1 + \frac{T\Omega}{2}}{\frac{T\Omega}{2}} - 1} = \frac{K_R}{a^*} \frac{1 - a^* + \frac{T\Omega}{2}(1 + a^*)}{\frac{T\Omega}{2}}. \quad (3-40)$$

Nakon sređivanja dobije se:

$$G_R(\Omega) = \frac{K_R(1 + a^*)}{2a^*} \frac{1 + \frac{T\Omega}{2} \frac{1 + a^*}{1 - a^*}}{\frac{T\Omega}{2} \frac{1 + a^*}{1 - a^*}}. \quad (3-41)$$

Izraz (3-41) za PI regulator u kvazikontinuiranom području može se također prikazati i kao:

$$G_R(\Omega) = K'_R \frac{1 + T'_I \Omega}{T'_I \Omega}, \quad (3-42)$$

gdje je:

$$K'_R = \frac{K_R(1 + a^*)}{2a^*}, \quad (3-43)$$

$$T'_I = \frac{1 + a^*}{1 - a^*} \frac{T}{2}. \quad (3-44)$$

Razvidno je da je izraz (3-42) za PI regulator u kvazikontinuiranom području analogan izazu za prijenosnu funkciju PI regulatora u s - području.

U slučaju PI regulatora diskretiziranog primjenom izraza za trapeznu integraciju (3-10) njegova reprezentacija u kavizikontinuiranom području identična je onoj iz kontinuiranog područja, tj.:

$$G_R(\Omega) = K'_R \frac{1 + T'_I \Omega}{T'_I \Omega}, \quad (3-45)$$

uz $K'_R = K_R$ i $T'_I = T_I$. Razlog tome je očit uzevši u obzir da je diskretizacija primjenom trapezne formula inverzna postupku trasformacije diskretnog sustava u kvazikontinuirano područje (bilinearna transformacija i njen inverz).

3.3.4 Projektiranje diskretnog PI regulatora u kvazikontinuiranom području prema simetričnom optimumu

Prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga u Ω - području prema (3-42) i (3-34) glasi:

$$G_o(\Omega) = K'_R K_{z\Omega} \frac{1}{T'_I T_i \Omega^2} \frac{1 + T'_I \Omega}{1 + T_\Sigma^* \Omega}, \quad (3-46)$$

gdje je:

$$T_\Sigma^* = T_\Sigma + \frac{T}{2}. \quad (3-47)$$

Izraz je analogan izazu $G_o(s)$ koji može poprimiti simetrične frekvencijske karakteristike otvorenog sustava.

Uz sljedeći izbor parametara regulatora:

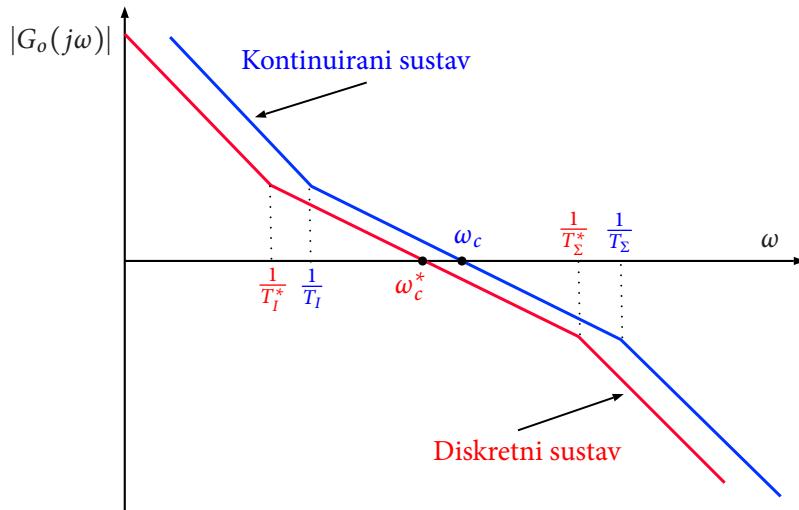
$$T'_I = a^2 T_\Sigma^*, \quad (3-48)$$

$$K'_R = \frac{1}{a} \frac{1}{K_{z\Omega}} \frac{T_i}{T_\Sigma^*}, \quad (3-49)$$

osigurane su simetrične kvazifrekvenčne karakteristike otvorenog sustava (slika 3.3). Pritom je:

$$\omega_c^* = \frac{1}{\sqrt{T'_I T_\Sigma^*}} = \frac{1}{a T_\Sigma^*} \text{ i } \omega_c^* < \omega_c, \quad (3-50)$$

pri čemu je ω_c presječna frekvencija kontinuiranog sustava podešenog prema simetričnom optimumu. Vidljivo je da je zbog utjecaja vremena uzorkovanja T diskretni sustav upravljanja nešto sporiji od odgovarajućeg kontinuiranog sustava upravljanja.



Slika 3.3. Simetrične amplitudno-frekvencijske karakteristike otvorenog sustava

3.4 Sažetak poglavlja

- U ovom poglavlju obrađeni su postupci projektiranja diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu.
- Obradena su dva načina projektiranja diskretnog PI regulatora: a) diskretizacijom kontinuiranog PI regulatora i b) projektiranje u kvazifrekvencijskom području.
- Postupak zasnovan na diskretizaciji kontinuiranog PI regulatora sastoji se od dva koraka: 1) projektiranje kontinuiranog PI regulatora prema simetričnom optimumu i 2) diskretizacija dobivenog PI regulatora bilo pravokutnim bilo trapeznim postupkom diskretizacije. Postupak je primjenjiv u slučaju kad je vrijeme diskretizacije zanemarivo u odnosu na relevantne dinamike procesa.
- Postupkom projektiranja regulatora u kvazifrekvencijskom području uzima se na sustavan način u obzir utjecaj (nezanemarivog) vremena uzorkovanja na vladanje sustava.
- Polazište za projektiranje regulatora ovim postupkom su diskretni model procesa (dobiven ZOH diskretizacijom kontinuiranog procesa) i diskretni PI regulator (dobiven iz kontinuiranog primjenom pravokutne ili trapezne diskretizacije). Diskretni se proces i regulator transformiraju u kvazikontinuirano područje primjenom bilinearne transformacije, čime se dobiju prijenosne funkcije procesa $G_s(\Omega)$ i regulatora $G_R(\Omega)$.
- U sljedećem koraku se određuju parametri PI regulatora u kvazikontinuiranom području primjenom nekog od postupaka projektiranja regulatora u kontinuiranoj domeni.

- Kao završni korak dobiveni PI regulator se iz kvazikontinuiranog područja transformira u diskretno područje.

Sinteza slijednih sustava primjenom praktičnih optimuma

Mnogi postupci sinteze sustava upravljanja temelje se na definiranju (ostvarivog) željenog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga. Najčešće je to vladanje definirano u specifikacijama u vremenskoj domeni te se stoga one trebaju transformirati u odgovarajuće zahtjeve na oblik frekvencijske karakteristike otvorenog ili zatvorenog kruga, položaj polova zatvorenog kruga, odgovarajućeg koeficijenta prigušenja i frekvencije vlastitih oscilacija i sl. Na temelju takvih transformiranih specifikacija definira se ostvariva željena prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga, koja se često u literaturi naziva i modelskom funkcijom.

U ovom se poglavlju razrađuju dva postupka definiranja željenog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga koja su se afirmirala u kontekstu upravljanja elektromotornim pogonima i to: modulni optimum i optimum dvostrukog odnosa. Na temelju tako definiranog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga određuje se struktura i parametri regulatora i pretkompenzatora (engl. feedforward controller) kojima se ostvaruje željeno vladanje sustava.

4.1 Modulni optimum

Jedna od najbitnijih zadaća sustava automatskog upravljanja jest osiguravanje da regulirana veličina što bolje slijedi referentnu vrijednost. Drugim riječima, idealna prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga prema referentnoj veličini trebala bi imati apsolutni iznos jednak jedinici i fazni pomak jednak nuli na svim frekvencijama:

$$G_z(s) = 1 \rightarrow |G_z(j\omega)| = 1, \arg(G_z(j\omega)) = 0 \quad (4-1)$$

Kako je taj zahtjev u praksi neostvariv često se kao cilj postavlja nešto "blaži" zahtjev, a to je da **amplitudno-frekvencijska karakteristika zatvorenog regulacijskog kruga bude što bliža**

jedinici u što širem frekvencijskom opsegu, za zadani proces i strukturu regulatora. Time se u slučaju minimalno-faznih sustava osigurava da praktički nema faznog pomaka u razmatranom frekvencijskom pojasu. Tako projektirani sustav upravljanja odlikuje se brzim odzivom bez oscilacija.

Polazeći od zahtjeva da amplitudno-frekvencijska karakteristika linearног sustava proizvoljnog reda ima što širi propusni opseg bez rezonantnog izdizanja, cilj je da se dobije analitička veza koeficijenata prijenosne funkcije sustava, poznata pod nazivom modulni optimum (njem. *Betrags optimum*, engl. *Magnitude Optimum*). Modulni optimum poznat je još iz 1946. godine, a šire značenje dobiva u radu Kesslera iz 1955. godine. Spomenuti zahtjev za što širim propusnim opsegom bez rezonantnog izdizanja može se matematički izraziti na sljedeći način. Prijenosna je funkcija optimalna prema modulnom optimumu ako zadovoljava sljedeće uvjete:

$$1. \quad G(0) = 1$$

$$2. \quad \left. \frac{d^r |G(j\omega)|}{d\omega^r} \right|_{\omega=0} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, r_{max}.$$

Za ispunjenje prvog zahtjeva tj. točnosti u stacionarnom stanju dovoljno je osigurati da prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga sadrži integralno djelovanje, odnosno da ima pol u ishodištu. Određivanje parametara za ispunjavanje drugog uvjeta znatno je složeniji problem i ovisan je o strukturi kako procesa tako i samog regulatora. Općenito vrijedi da ako je prijenosna funkcija regulatora reda l tada je maksimalni broj derivacija amplitudno-frekvencijske karakteristike koji se trebaju izjednačiti s nulom $r_{max} = l + 1$. Postupak određivanja koeficijenta prijenosne funkcije na ovaj način bit će ilustriran na sljedećem primjeru.

PRIMJER 4.1 Modulni optimum za sustav II reda

Razmotrimo prijenosnu funkciju drugog reda danu sljedećim izrazom:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (4-2)$$

Potrebno je odrediti optimalni iznos relativnog koeficijenta prigušenja ζ prema modulnom optimumu.

RJEŠENJE:

Budući da su slobodni članovi u brojniku i nazivniku jednaki ω_0^2 slijedi da je sustav opisan pretvodnom prijenosnom funkcijom stacionarno točan, tj. $G(0) = 1$. Kako bi se dobila što ravnija amplitudno frekvencijska karakteristika potrebno je osigurati da što više njenih derivacija ima vrijednost nula za $\omega = 0$. Proračunom apsolutne vrijednosti odgovarajuće frekvencijske karakteristike dobiva se:

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}. \quad (4-3)$$

Prva derivacija kvadrata apsolutne vrijednosti po ω^2 iznosi:

$$\frac{|G(j\omega)|^2}{d(\omega^2)} = \frac{[2(\omega_0^2 - \omega^2) - 4\zeta^2\omega_0^2]\omega_0^4}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2]^2}. \quad (4-4)$$

Proračunom granične vrijednosti prethodnog izraza kada $\omega^2 \rightarrow 0$, te njenim izjednačavanjem s nulom slijedi:

$$\lim_{\omega^2 \rightarrow 0} \frac{|G(j\omega)|^2}{d(\omega^2)} = 2\omega_0^2(1 - 2\zeta^2) = 0, \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4-5)$$

Dobiveni rezultat još jednom potvrđuje da odabir koeficijenta relativnog prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ osigurava maksimalno širok propusni pojas sustava bez rezonantnog izdizanja, te se stoga taj odabir smatra optimalnim prema modulnom optimumu. Prema tome optimalna prijenosna funkcija II reda glasi:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (4-6)$$

4.1.1 Izvod modulnog optimuma za opći slučaj

Kao polazište za izvod modulnog optimuma poslužit će prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga $G_z(s)$ koja je s odgovarajućom prijenosnom funkcijom otvorenog kruga $G_o(s)$ povezana sljedećim izrazom (uz pretpostavku jedinične povratne veze):

$$G_z(s) = \frac{B_z(s)}{A_z(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{B_o(s)}{A_o(s) + B_o(s)}, \quad (4-7)$$

$$G_z(s) = \frac{B_z(s)}{A_z(s)} = \frac{B_z(s)}{A_z(s) - B_z(s) + B_z(s)} = \frac{1}{1 + \frac{A_z(s) - B_z(s)}{B_z(s)}}, \quad (4-8)$$

Kvadrat apsolutne vrijednosti frekvencijske karakteristike dobivene iz prijenosne funkcije (4-8) dan je sljedećim izrazom:

$$|G_z(j\omega)|^2 = G_z(j\omega) \cdot \overline{G_z(j\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{A_z(j\omega) - B_z(j\omega)}{B_z(j\omega)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\overline{A_z(j\omega) - B_z(j\omega)}}{\overline{B_z(j\omega)}}}, \quad (4-9)$$

Prethodni se izraz može zapisati u sljedećem obliku:

$$|G_z(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{A_z(j\omega) - B_z(j\omega)}{B_z(j\omega)} + \frac{\overline{A_z(j\omega) - B_z(j\omega)}}{B_z(j\omega)} + \frac{(A_z(j\omega) - B_z(j\omega))(\overline{A_z(j\omega) - B_z(j\omega)})}{B_z(j\omega)B_z(j\omega)}} \quad (4-10)$$

Kako bi se zadovoljilo zahtjevu da amplitudno-frekvencijska karakteristika ima vrijednost 1 u što širem frekvencijskom pojasu potrebno je osigurati da vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{A_z(j\omega) - B_z(j\omega)}{B_z(j\omega)} + \frac{\overline{A_z(j\omega)} - \overline{B_z(j\omega)}}{\overline{B_z(j\omega)}} + \frac{(A_z(j\omega) - B_z(j\omega))(\overline{A_z(j\omega)} - \overline{B_z(j\omega)})}{B_z(j\omega)\overline{B_z(j\omega)}} = 0, \quad (4-11)$$

odnosno nakon sređivanja izraza:

$$A_z(j\omega)\overline{A_z(j\omega)} - \overline{B_z(j\omega)}B_z(j\omega) = 0 \quad (4-12)$$

Kako su polinomi $A_z(j\omega)$ i $B_z(j\omega)$ s realnim koeficijentima tada vrijedi $\overline{A_z(j\omega)} = A_z(-j\omega)$ odnosno $\overline{B_z(j\omega)} = B_z(-j\omega)$, te se prethodni uvjet može napisati kao:

$$A_z(j\omega)A_z(-j\omega) - B_z(-j\omega)B_z(j\omega) = 0 \quad (4-13)$$

Uz polinome $A_z(s)$ i $B_z(s)$ definirane kao:

$$\begin{aligned} A_z(s) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n, \\ B_z(s) &= b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m. \end{aligned} \quad (4-14)$$

iz izraza (4-13) slijedi:

$$A_0^2 + A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots + A_{2n}\omega^{2n} = B_0^2 + B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots + B_{2m}\omega^{2m} \quad (4-15)$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0^2 & B_0 &= b_0^2 \\ A_2 &= a_1^2 - 2a_0a_2 & B_2 &= b_1^2 - 2b_0b_2 \\ A_4 &= a_2^2 - a_1a_3 + a_0a_4 & B_4 &= b_2^2 - b_1b_3 + b_0b_4 \\ A_{2n} &= a_n^2 & B_{2m} &= b_m^2 \end{aligned} \quad (4-16)$$

Izjednačavanjem koeficijenta uz pojedine potencije slijede uvjeti za modulni optimum:

$$\begin{aligned} a_0^2 &= b_0^2, \\ a_1^2 - 2a_0a_2 &= b_1^2 - 2b_0b_2, \\ a_2^2 - a_1a_3 + a_0a_4 &= b_2^2 - b_1b_3 + b_0b_4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-17)$$

Neka je proces opisan prijenosnom funkcijom II reda bez astatizma:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{(1+sT_1)(1+sT_2)}, \quad (4-18)$$

Potrebno je odrediti parametre PI regulatora prema modulnom optimumu. Pritom pretpostaviti prijenosnu funkciju PI regulatora u obliku:

$$G_R(s) = K_R \frac{1+sT_I}{sT_I}. \quad (4-19)$$

RJEŠENJE:

Prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga uz PI regulator glasi:

$$G_z(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}, \quad (4-20)$$

pri čemu su:

$$\begin{aligned} a_0 &= K_R K_s & b_0 &= K_R K_s \\ a_1 &= K_R K_s + T_I & b_1 &= K_R K_s T_I \\ a_2 &= T_I(T_1 + T_2) & b_2 &= 0 \\ a_3 &= T_I T_1 T_2 & b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Za ispunjenje modulnog optimuma potrebno je zadovoljiti sljedeće uvjete (4-17):

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1^2 - 2a_0 a_2 &= b_1^2 \\ a_2^2 - 2a_1 a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4-21)$$

Rješavanjem prethodnih jednadžbi po varijablama K_R i T_I dobiva se:

$$K_R = \frac{1}{2K_s} \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (4-22)$$

$$T_I = T_1 \frac{\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1}\right)}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1}\right)} \quad (4-23)$$

4.1.2 Tehnički optimum kao specijalni slučaj modulnog optimuma

Uz pretpostavku statičkog procesa s realnim polovima njegova se prijenosna funkcija može zapisati u obliku:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{1+sT_2} \frac{1}{1+sT_3} \cdots = \frac{K_s}{1+sT_1} \cdot \prod_{i=2}^n \frac{1}{1+sT_i} \quad (4-24)$$

U slučaju da je jedna od vremenskih konstanti procesa dominantna (prepostavimo da je to T_1) tj. da vrijedi:

$$T_i \ll T_1, \quad (4-25)$$

prijenosna se funkcija procesa može zapisati u sljedećem pojednostavljenom obliku:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{1+sT_\sigma}, \quad (4-26)$$

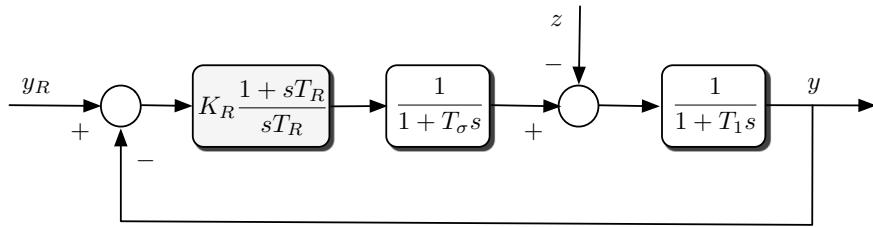
pri čemu T_σ predstavlja nadomjesnu vremensku konstantu koje je jednaka zbroju nedominantnih vremenskih konstanti procesa:

$$T_\sigma = \sum_{i=2}^n T_i. \quad (4-27)$$

Uz ovako uvedene pretpostavke te uz pretpostavku da je regulator PI strukture odgovarajuća regulacijska petlja prikazana je na slici 4.1, a prijenosna je funkcija otvorenog kruga dana izrazom:

$$G_o(s) = K_R K_s \frac{1+sT_R}{sT_R(1+sT_1)(1+sT_\sigma)}. \quad (4-28)$$

Koristeći rezultate dobivene u prethodnom primjeru parametri regulatora podešeni prema mo-



Slika 4.1. Pojednostavljena shema sustava upravljanja prikladna za projektiranje regulatora prema modulnom optimumu

dulnom optimumu glase:

$$K_R = \frac{1}{2K_s} \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (4-29)$$

$$T_R = T_1 \frac{\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1}\right)}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1}\right)} \quad (4-30)$$

Budući da je po pretpostavci T_1 dominantna vremenska konstanta sustava tj. vrijedi $T_1 \gg T_\sigma$ prethodni se izrazi mogu aproksimirati:

$$K_R = \frac{1}{2K_s} \frac{T_1}{T_\sigma}, \quad (4-31)$$

$$T_R = T_1, \quad (4-32)$$

što su zapravo izrazi za tehnički optimum. Prema tome može se zaključiti da tehnički optimum predstavlja tek specijalni slučaj modulnog optimuma u slučaju procesa II reda s realnim korijenima i regulatora PI strukture.

U slučaju da je osim vladanja sustava upravljanja prema referentnoj veličini bitna i kvaliteta kompenzacije poremećaja dominantna vremenska konstanta T_1 ne bi smjela biti veća od četverostrukog nadomjesne vremenske konstante T_σ :

$$T_\sigma < T_1 < 4T\sigma. \quad (4-33)$$

Ako pak vrijedi $T_1 > 4T_\sigma$ preporuča se primjena simetričnog optimuma u takvim slučajevima. Kada se razmatra modulni optimum u sustavima upravljanja elektromotornim pogonima tada je njegovo uobičajeno područje primjene upravljanje strujom motora.

4.1.3 Projektiranje modulnog optimuma u frekvencijskom području

Osim analitički polazeći od poznate prijenosne funkcije procesa modulni se optimum može projektirati također i u frekvencijskom području pomoću Bodeovih dijagrama. Cilj je projektiranja opet postići što širi propusni opseg bez rezonantnog izdizanja frekvencijske karakteristike zatvorenog regulacijskog kruga koristeći se pritom frekvencijskom karakteristikom otvorenog kruga. Ideja se postupka sastoji u tome da se kompenzira dominantna vremenska konstanta i podesi iznos faze na presječnoj frekvenciji približno na $\phi_o(\omega_c) \approx 114.5^\circ - 116.5^\circ$ čime se osigurava fazno osiguranje $\gamma = 63.5^\circ - 65.5^\circ$.

4.2 Optimum dvostrukog odnosa

Vladanje sustava automatskog upravljanja ponajprije je određeno njegovim karakterističnim polinomom (nazivnik prijenosne funkcije) te je njen odabir bitan korak mnogih postupaka projektiranja sustava upravljanja (postupci postavljanja polova, engl. *pole placement methods*). U praksi postoji više načina odabira karakterističnog polinoma kojim se osigurava željeno vladanje sustava.

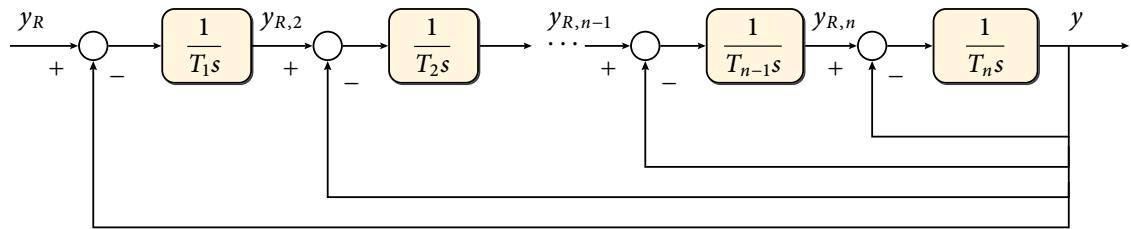
Izravna poveznica između položaja polova i pokazatelja vladanja sustava u vremenskom području (npr. nadvišenje u odzivu na skokovitu pobudu, vrijeme porasta i sl.) postoji u slučaju

sustava drugog reda. Pritom se tu uvode dva pokazatelja vremenskog vladanja sustava: koeficijent relativnog prigušenja ζ i frekvencija neprigušenih oscilacija ω_0 koji izravno određuju iznos nadvišenja $\sigma\%$ i trajanje prijelazne pojave (vrijeme porasta t_r , vrijeme prvog maksimuma t_m). Međutim, postavlja se pitanje može li se to napraviti i u slučajevima kad je red prijenosne funkcije veći od 2?

Ideja postupka optumuma dvostrukog odnosa (engl. *double ratio optimum, damping optimum*, njem. *dämpfungsoptimum, doppelverhältnisse*) jest u tome da se povežu koeficijenti karakterističnog polinoma $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ i pokazatelji kakvoće prijelazne pojave sustava. Ne gubeci na općenitosti polazište za objašnjenje optimuma dvostrukog odnosa poslužit će prijenosna funkcija sustava bez astatizma i bez konačnih nula:

$$G(s) = \frac{y(s)}{y_R(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (4-34)$$

Prijenosna funkcija (4-34) može se prikazati odgovarajućom nadomjesnom višepetljastom strukturu, prema slici 4.2.



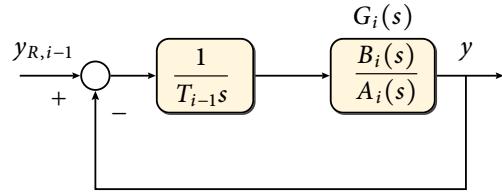
Slika 4.2. Prikaz linearog sustava bez konačnih nula kao vešepetljaste strukture

Da bi se uspostavila veza između skupa parametara $\{a_i\}$ prijenosne funkcije (4-34) i vremenskih konstanti T_i u nadomjesnoj shemi (slika 4.2) potrebno je odrediti odgovarajuću prijenosnu funkciju višepetljaste strukture krenuvši pritom kod proračuna od najpodređenije petlje.

$$G_n(s) = \frac{Y(s)}{Y_{Rn}(s)} = \frac{\frac{1}{T_n s}}{1 + \frac{1}{T_n s}} = \frac{1}{1 + T_n s} \quad (4-35)$$

$$G_{n-1}(s) = \frac{Y(s)}{Y_{R(n-1)}(s)} = \frac{\frac{1}{T_{n-1}s(1+T_ns)}}{1 + \frac{1}{T_{n-1}s(1+T_ns)}} = \frac{1}{1 + T_{n-1}s + T_{n-1}T_ns^2} \quad (4-36)$$

$$G_{i-1}(s) = \frac{\frac{1}{sT_{i-1}} \frac{B_i(s)}{A_i(s)}}{1 + \frac{1}{sT_{i-1}} \frac{B_i(s)}{A_i(s)}} = \frac{B_i(s)}{B_i(s) + sT_{i-1}A_i(s)} = \frac{B_{i-1}(s)}{A_{i-1}(s)} \quad (4-37)$$



Slika 4.3. Prikaz i-te petlje u nadomjesnoj kaskadnoj strukturi

Na temelju prethodnog izraza očito je da vrijede sljedeće rekurzivne relacije:

$$\begin{aligned} B_{i-1}(s) &= B_i(s) \\ A_{i-1}(s) &= B_i(s) + sT_{i-1}A_i(s) \end{aligned} \quad (4-38)$$

Najpodređenija petlja u nadomjesnoj kaskadnoj strukturi ima prijenosnu funkciju:

$$G_n(s) = \frac{B_n(s)}{A_n(s)} = \frac{\frac{1}{sT_n}}{1 + \frac{1}{sT_n}} = \frac{1}{1 + sT_n}. \quad (4-39)$$

Korištenjem rekurzivnih relacija (4-38) proračunavaju se prijenosne funkcije nadređenih petlji:

$$G_{n-1}(s) = \frac{B_n(s)}{B_n(s) + sT_{n-1}A_n(s)} = \frac{1}{1 + sT_{n-1} + s^2T_{n-1}T_n} \quad (4-40)$$

$$G_{n-2}(s) = \frac{B_{n-1}(s)}{B_{n-1}(s) + sT_{n-2}A_{n-1}(s)} = \frac{1}{1 + sT_{n-2} + s^2T_{n-2}T_{n-1} + s^3T_{n-2}T_{n-1}T_n} \quad (4-41)$$

Konačno, prijenosna funkcija nadomjesne kaskadne strukture dana je izrazom:

$$G(s) = G_1(s) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i T_j s^i} \quad (4-42)$$

Razvidno je da su koeficijenti prijenosnih funkcija (4-34) i (4-42) povezani sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} a_n &= T_n T_{n-1} \cdots T_1 \\ a_{n-1} &= T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1 \\ &\vdots \\ a_1 &= T_1 \\ a_0 &= 1 \end{aligned} \quad (4-43)$$

odnosno:

$$T_i = \frac{a_i}{a_{i-1}}. \quad (4-44)$$

Razmotrimo sada podređeni krug prikazan na slici 4.4 čija je prijenosna funkcija $G_{n-1}(s)$:

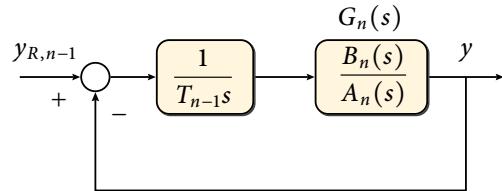
$$G_{n-1}(s) = \frac{1}{1 + \underbrace{T_{n-1} s}_{\frac{2\zeta}{\omega_n}} + \underbrace{T_{n-1} T_n s^2}_{\frac{1}{\omega_n^2}}} \quad (4-45)$$

Iz izraza (4-45) može se odrediti veza između koeficijenta relativnog prigušenja ζ regulacijskog kruga i vremenskih konstanti T_n i T_{n-1} :

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{1}{4\zeta^2} \quad (4-46)$$

Iz prethodnog je izraza vidljivo da omjer vremenskih konstanti T_n i T_{n-1} određuje iznos prigušenja ζ i taj se omjer obično naziva karakterističnim omjerom:

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = D_n \quad (4-47)$$



Slika 4.4. Podređeni regulacijski krug u nadomjesnoj kaskadnoj strukturi

Iznos koeficijenta prigušenja $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u praksi se smatra optimalnim izborom budući da osigurava brz odziv sustava, uz vrlo malo nadvišenje $\sigma_m = 4.3\%$. Također gledano u frekvencijskoj domeni takav izbor koeficijenta prigušenja osigurava maksimalnu širinu pojasa propuštanja bez rezonantnog izdizanja, pa je prema tome takav odabir prigušenja optimalan i prema modulnom optimumu. Taj se iznos prigušenja dobiva ako odnos vremenskih konstanti iznosi

$$D_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{1}{4\zeta^2} = 0.5. \quad (4-48)$$

Budući da vremenski odziv tako podešenog regulacijskog kruga ima vrlo malo nadvišenje (oko 4.3 %) on se na zadovoljavajući način može aproksimirati PT1 članom:

$$G_{n-1}(s) = \frac{1}{1 + T_{n-1}s + T_{n-1}T_n s^2} \approx \frac{1}{1 + T_{n-1}s} \quad (4-49)$$

Jednaka procedura može se primijeniti i na sljedeću petlju u kaskadnoj nadomjesnoj strukturi, odnosno na prijenosnu funkciju $G_{n-2}(s)$, te se za taj regulacijski krug dobije karakteristični

omjer:

$$D_{n-1} = \frac{T_{n-1}}{T_{n-2}} = 0.5 \quad (4-50)$$

Prema tome, karakteristični polinom $A(s)$ je na ovaj način umjesto n parametara (a_0, \dots, a_n) opisan sa samo dva parametra: karakterističnim omjerom $D = D_i$ koji određuje iznos nadvišenja u prijelaznoj funkciji sustava i nadomjesnom vremenskom konstantom T_e koja određuje brzinu prijelazne pojave. Ako su svi karakteristični omjeri karakteristične jednadžbe sustava postavljeni na iznos $D_i = 0.5$ tada se obično govori o **optimumu dvostrukog odnosa**. U tom je slučaju svaka od petlji u kaskadnoj nadomjesnoj shemi na slici 4.2 ima relativni koeficijent prigušenja $\zeta_i = \sqrt{2}/2$. Također je bitno primjetiti da je ovakva interpretacija karakterističnih omjera valjana samo uz dovoljno velike iznose relativnih koeficijenata prigušenja ζ_i . Uz njihove manje iznose prijenosne funkcije pojedinih unutarnjih petlji ne mogu se aproksimirati prijenosnom funkcijom prvog reda (PT1 članom).

Naravno, u praksi je moguć i odabir međusobno različitih iznosa koeficijenta D_i ali i u tom slučaju je oblik prijelazne pojave u potpunosti određen njihovim iznosima.

4.2.1 Odabir karakterističnih odnosa i nadomjesne vremenske konstante

Kao što je to već ranije napomenuto skup karakterističnih odnosa $\{D_2, \dots, D_n\}$ u potpunosti određuje oblik prijelazne funkcije. S druge strane, brzina odziva određena je iznosom nadomjesne vremenske konstante T_e .

Pritom je promjena brzine odziva relativno jednostavna budući da je potrebno promijeniti samo iznos nadomjesne vremenske konstante, uz nepromijenjene iznose karakterističnih odnosa, što je ilustrirano sljedećim primjerom.

PRIMJER 4.3 Ilustracija značenja karakterističnih polinoma

Neka je dana prijenosna funkcija sustava:

$$G(s) = \frac{1}{0.0045s^4 + 0.075s^3 + 0.5s^2 + s + 1}. \quad (4-51)$$

Odrediti prijenosnu funkciju sustava koja rezultira jednakim oblikom ali dvostruko bržom prijelaznom pojavom.

RJEŠENJE:

Budući da je oblik prijelazne pojave određen karakterističnim omjerima D_2, D_3, D_4 oni moraju ostati nepromijenjeni. S druge strane nadomjesnu vremensku konstantu T_e potrebno je odabrati dvostruko manjom. nadomjesna vremenska konstanta određena je omjerom:

$$T_e = T_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad (4-52)$$

dok su pojedini karakteristični omjeri dani kao:

$$D_i = \frac{a_i}{a_{i-1}a_{i+1}}, \quad i = 2, 3, 4. \quad (4-53)$$

Za prijenosnu funkciju (4-51) dobiju se sljedeći iznosi nadomjesne vremenske konstante i karakterističnih omjera:

$$T_e = 1 \text{ s}, \quad (4-54)$$

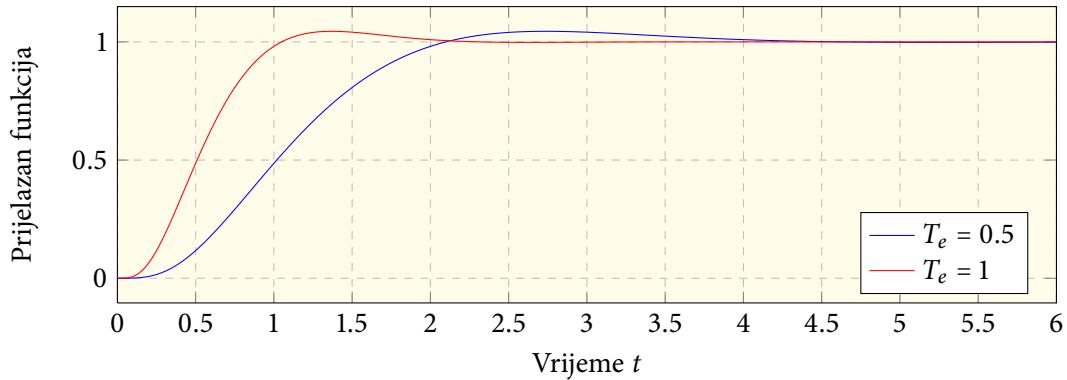
$$\{D_2, D_3, D_4\} = \{0.5, 0.3, 0.4\}. \quad (4-55)$$

Prema tome, ukoliko želimo ubrzati prijenosnu pojavu dva puta potrebno je odabratи $T_e = 0.5 \text{ s}$, uz nepromijenjene vrijednosti karakterističnih omjera. U tom se slučaju dobija sljedeća prijenosna funkcija sustava:

$$G_2(s) = \frac{1}{D_4 D_3^2 D_2^3 T_e^4 s^4 + D_3 D_2^2 T_e^3 s^3 + D_2 T_e^2 s^2 + s T_e + 1} \quad (4-56)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{0.00028125 s^4 + 0.009375 s^3 + 0.125 s^2 + 0.5 s + 1} \quad (4-57)$$

Na slici 4.5 prikazane su usporedno prijelazne funkcije sustava uz iznose sistemskе vremenske konstante $T_e = 1 \text{ s}$ i $T_e = 0.5 \text{ s}$, odakle je očito da se oblik prijelazne funkcije nije promijenio već samo brzina odziva.



Slika 4.5. Prijelazne funkcije uz dva različita iznosa nadomjesnih vremenskih konstanti

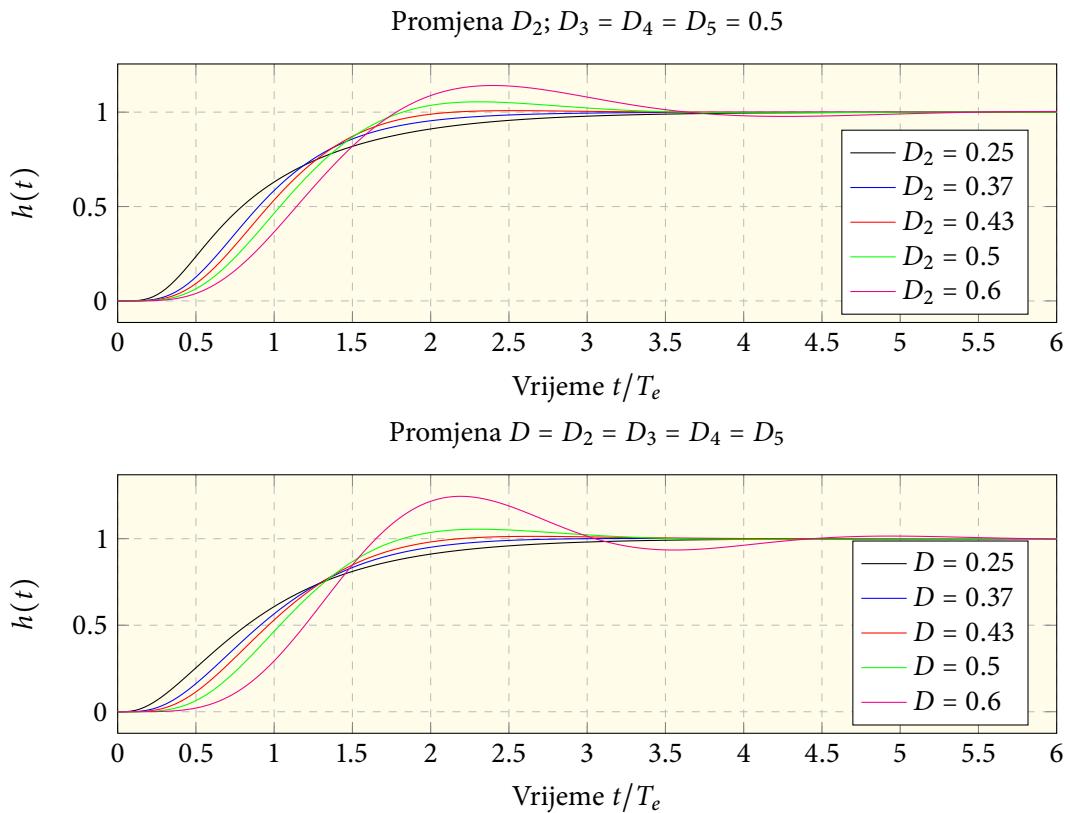
Optimalni odabir karakterističnih omjera prema modulnom optimumu $D_i = 0.5$ u većini slučajeva daje zadovoljavajuće rezultate. Ipak, u određenim je situacijama potrebno odstupiti od njihovih optimalnih iznosa. Tako npr. u određenim situacijama nije dozvoljeno postojanje nadvišenja u prijelaznoj pojavi. S druge strane, ako je potrebno postići bolju (bržu) kompenzaciju

poremećaja tada je nužno koristi manje iznose relativnog koeficijenta prigušenja kao što je to slučaj kod simetričnog optimuma.

Promjena oblika prijelazne pojave, a samim time i nadvišenja, obavlja se primjenom karakterističnih omjera $\{D_2, \dots, D_n\}$. U tom je slučaju moguće mijenjati jedan ili više karakterističnih omjera. Najčešće se koristi jedan od dvaju sljedećih pristupa:

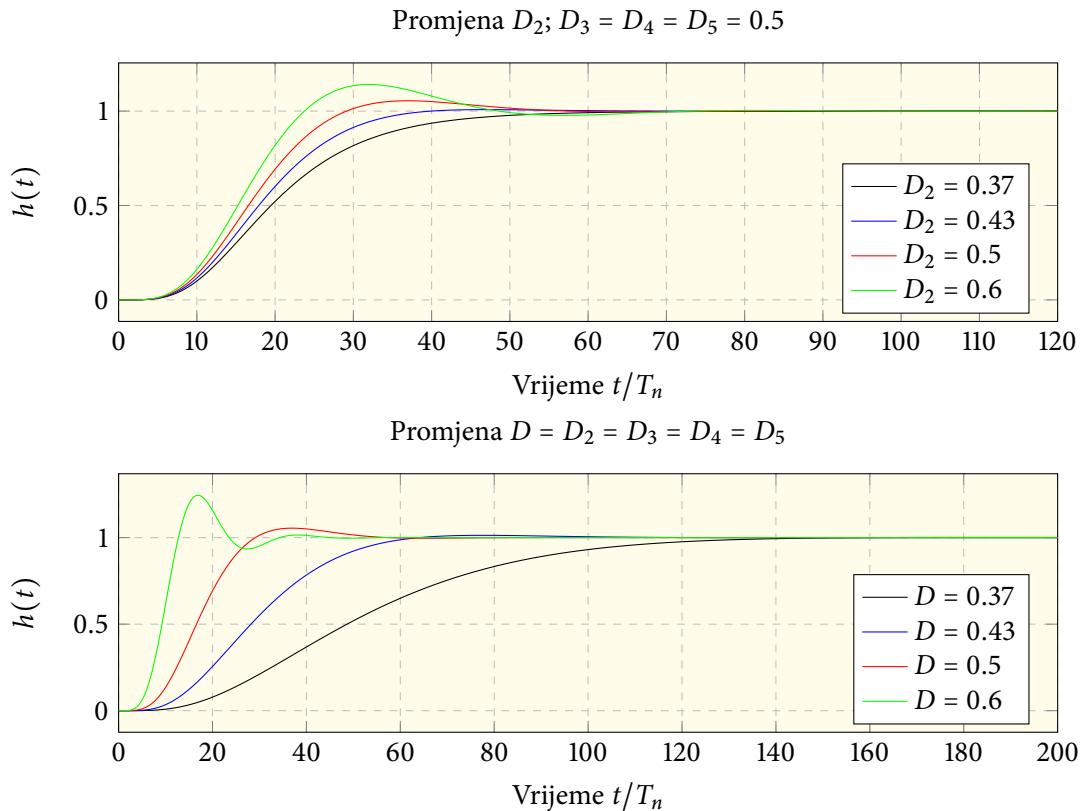
1. **promjena dominantnog karakterističnog omjera D_2 , uz nepromijenjen iznos ostalih omjera,**
2. **promjena svih karakterističnih omjera.**

Na slikama 4.6 i 4.7 prikazane su prijelazne pojave uz razlike iznose dominantnog karakterističnog odnosa D_2 , odnosno svih karakterističnih odnosa, skalirani na nadomjesnu vremensku konstantu T_e odnosno sistemsku vremensku konstatnu T_n .



Slika 4.6. Efekt promjena karakterističnih omjera na prijelaznu funkciju skalirano na nadomjesnu vremensku konstantu T_e

Sve prijelazne funkcije na slici 4.6, bez obzira na red sustava, imaju sličan kvazioperiodski oblik. Takav oblik predstavlja rezultat optimalnog (kompromisnog) izbora između veće brzine



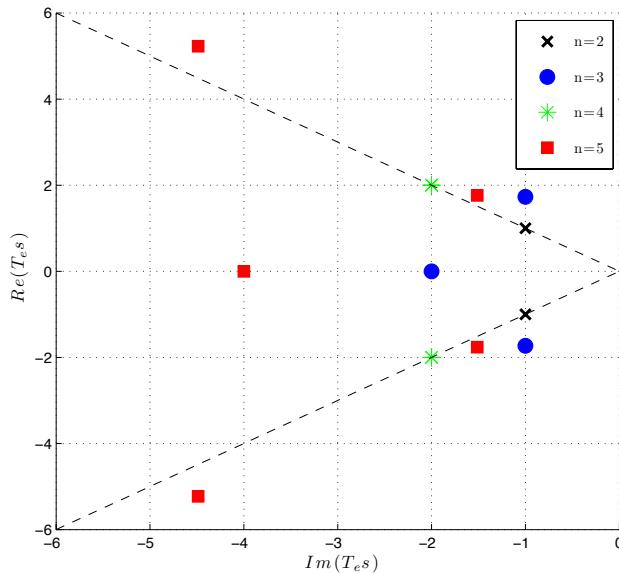
Slika 4.7. Efekt promjena karakterističnih omjera na prijelaznu funkciju skalirano na sistemsku vremensku konstantu T_n

odziva i manje osculatornosti, odnosno nadvišenja. Regulacijsko nadvišenje σ_m i svim je slučajevima manje od 8%, a vrijeme prvog dostizanja stacionarne vrijednosti t_1 manje od $2,4T_e$. Bitno je spomenuti da uz $n \geq 5$ sve prijelazne funkcije postaju praktički jednake, uz $\sigma_m = 6\%$ i $t_1 = 1.8T_e$.

Prijelazne funkcije u vremenu normiranom na sistemsku vremensku konstantu T_n (slika 4.7) ukazuju na sporiji odziv sustava višeg reda. Svako povećanje reda sustava za 1 (npr. pri ugradnji integralnog člana u regulator), uz jednaku sistemsku vremensku konstantu T_n , udvostručuje vrijeme odziva. Dobro prigušenje optimiranog sustava očituje se i kroz raspored polova prikazanih u normiranoj Laplaceovoj $T_e s$ ravnini na slici 4.8. Neovisno o redu sustava n polovi se razmještaju na samim pravcima optimalnog prigušenja $\zeta = \sqrt{2}/2$, ili u njihovoј blizini.

4.2.2 Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

U praksi je česta situacija da je struktura regulatora unaprijed zadana (npr. PI regulator) i kao takva ona može biti nedostatna za neovisno postavljanje svih polova zatvorenog regulacijskog

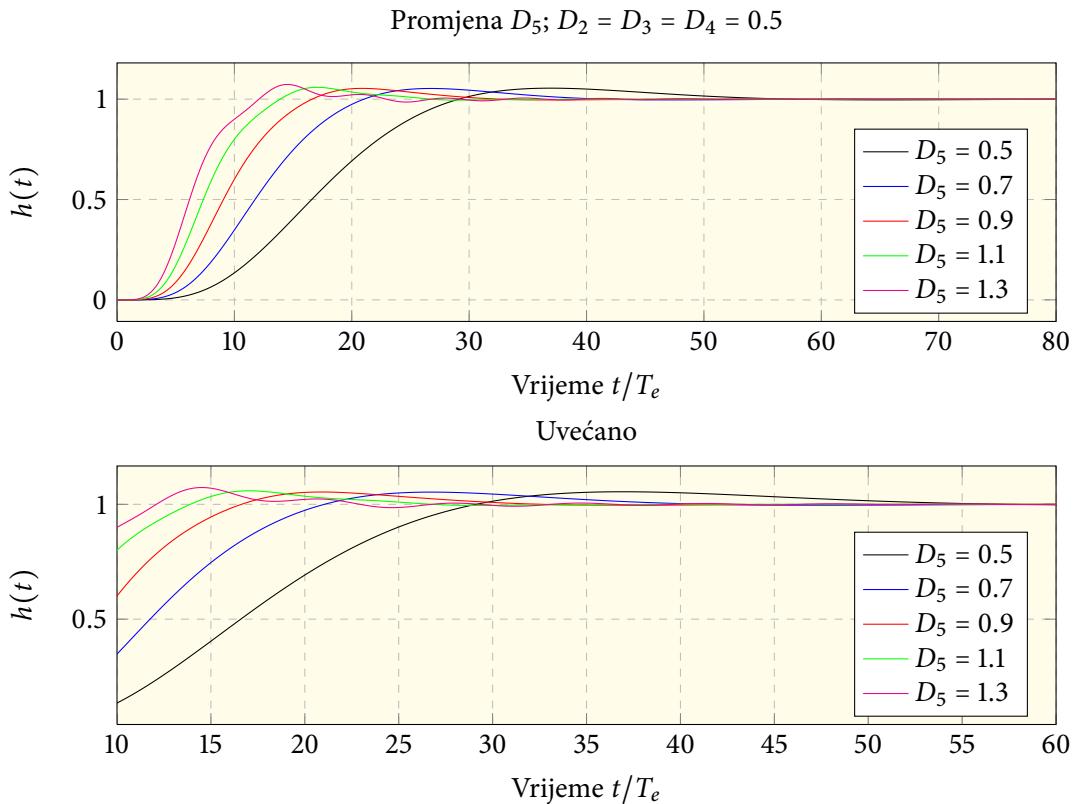
Slika 4.8. Položaj polova optimiranog sustava u normiranoj $T_e s$ ravnini

kruga na željene lokacije. U tom slučaju se govori o regulatoru reduciranih reda. U kontekstu modelske funkcije opisane sa skupom karakterističnih odnosa, kako je to opisano u ovom poglavlju, regulatorom se može postaviti samo dio karakterističnih odnosa dok će ostali karakteristični odnosi poprimiti vrijednosti određene strukturu procesa i regulatora.

U tom je slučaju sa stajališta upravljanja i osiguravanja dobro prigušenog odziva primarne regulirane veličine najpovoljnije parametrima regulatora postaviti na željene iznose karakteristične odnose vanjskih petlji u nadomjesnoj kaskadnoj strukturi, tj. D_2, D_3, \dots, D_{l+1} , pri čemu je l broj stupnjeva slobode regulatora.

Kako bi se ilustrirao utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa na prijelaznu pojavu razmotrit će slučaj kada su karakteristični odnosi D_2, D_3 i D_4 postavljeni na optimalni iznos 0.5 dok će se varirati iznos nedominantnog odnosa D_5 u rasponu od 0.5 do 1.3. Odgovarajuće prijelazne pojave za različite iznose D_5 prikazane su na slici 4.9. Tek za značajnije iznose karakterističnog odnosa D_5 (1.1 i 1.3) vidljiv je utjecaj slabo prigušenih oscilacija iz podređene petlje na prijelaznu funkciju u vidu valovitosti u odzivu.

Pritom treba imati na umu da cilj ovih simulacija nije bio da se dođe do odgovarajućih iznosa nedominantnih karakterističnih odnosa za koje se njihov utjecaj na primarnu reguliranu veličinu može zanemariti, već samo da se ukaže na činjenicu da svaka nadređena petlja, budući da je dvostruko sporija (uz $D_i = 0.5$) od prethodne filtrira oscilacije iz podređenih petlji. Iz toga se može zaključiti da je smisleno prilikom projektiranja regulatora reduciranih reda postaviti dominantne karakteristične odnose na željene iznose a da pritom utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa neće biti pretjerano izražen u odzivu primarne regulirane veličine.



Slika 4.9. Efekt promjena nedominantih karakterističnih omjera na prijelaznu funkciju

4.3 Sažetak poglavlja

- U ovom su poglavlju predstavljena dva postupka definiranja željenog vladanja zatvorenog regulacijskog kruga: modulni optimum i optimum dvostrukog odnosa.
- Kod definiranja prijenosne funkcije prema modulnom optimumu polazi se od zahtjeva za čim širim propusnim pojasom, bez rezonantnog izdizanja u amplitudno-frekvencijskoj karakteristici zatvorenog kruga.
- Ideja postupka određivanja željenog vladanja prema optimumu dvostrukog odnosa sastoji se u poopćenju koncepta relativnog koeficijenta prigušenja na sustave reda višeg od dva. Prigušenje se, umjesto jednim parametrom, definira skupom karakterističnih omjera pojedinih petlji (izravno povezanih s prigušenjem pojedinih petlji) u višepetljstoj nadomjesnoj strukturi sustava.
- U slučaju projektiranja regulatora reduciranih reda, ne mogu se postaviti svi karakteristični odnosi na željene iznose te se u tom slučaju postavlja samo l dominantnih karakterističnih odnosa D_2, \dots, D_{l+1} , pri čemu je l broj slobodnih parametara regulatora.

Elektromotorni pogoni s izraženom elastičnošću

U velikom broju industrijskih primjena regulirani elektromotorni pogoni nisu izravno vezani na teret, nego se razvijeni moment, odnosno sila, prenosi korištenjem različitih prijenosnih elemenata. Pritom se tu ponajprije misli na korištenje različitih prijenosnika snage, vratila (osovina), remenica, traka i slično. Kod takvih je elemenata u pravilu u manjoj ili većoj mjeri izražen efekt elastičnosti. Dok je u određenim slučajevima elastičnost prijenosnih elemenata posljedica njihove nesavršenosti, u nekim je pak situacijama elastičnost prijenosa poželjna iz sigurnosnih razloga. Bez obzira na njen uzrok ova pojava može značajno utjecati na kvalitetu upravljanja elektromehaničkim sustavom uzrokujući neželjene vibracije u sustavu, smanjujući time vijek trajanja elemenata sustava. Složenost takvih sustava ogleda se i u povećanju reda sustava za dva uvođenjem jedne elastične sprege. Umjesto jednog spremišta kinetičke energije (ukupna zamašna masa) u slučaju postojanja elastične sprege pojavljuju se dva spremišta kinetičke energije (zamašne mase na pogonskoj i radnoj strani) i jedno spremište potencijalne energije (elastična opruga).

5.1 Dvomaseni elektromehanički sustav

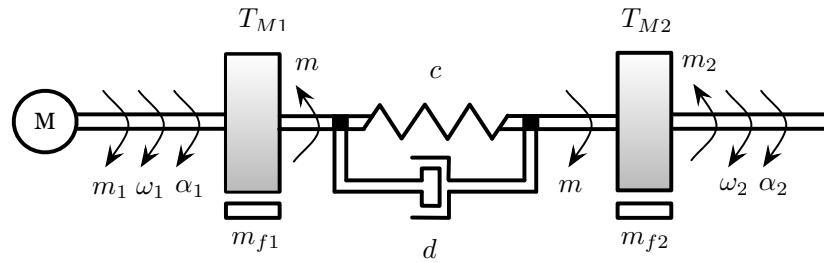
Utjecaj efekta elastičnosti na kvalitetu upravljanja elektromotornim pogonom analizirat će se na primjeru dvomasenog elektromehaničkog sustava, prikazanog na slici 5.1.

Dvomaseni elastični sustav čija je blokovska shema prikazana na slici 5.2 opisan je sljedećim skupom jednadžbi:

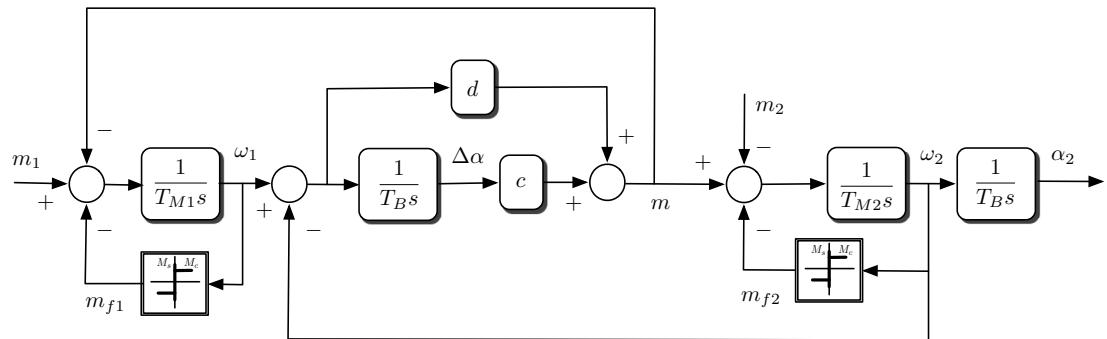
$$T_{M1} \frac{d\omega_1}{dt} = m_1 - m - m_{f1}, \quad (5-1)$$

$$T_B \frac{d\Delta\alpha}{dt} = \omega_1 - \omega_2, \quad (5-2)$$

$$m = c\Delta\alpha + d\Delta\omega, \quad (5-3)$$

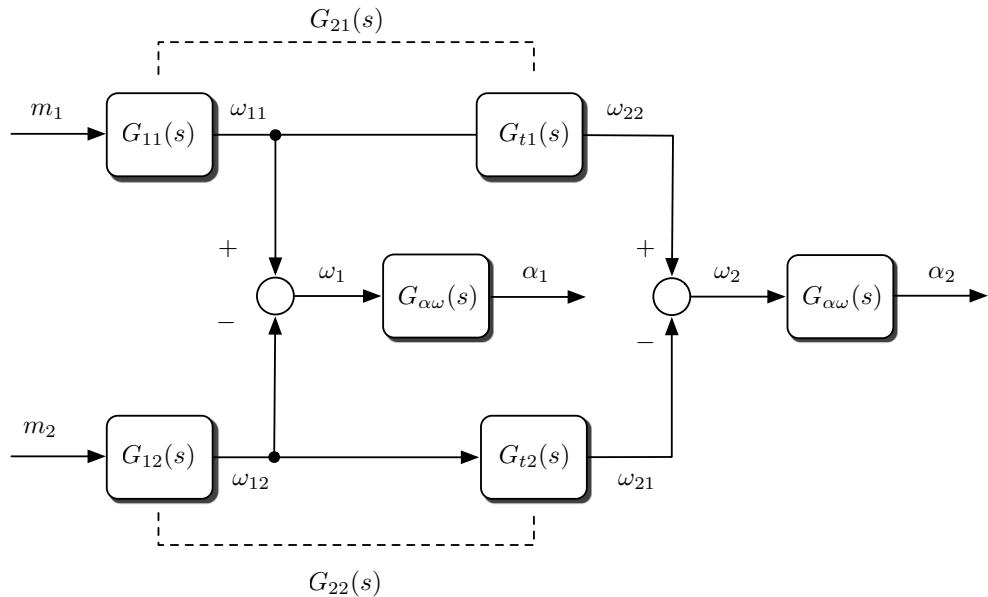


Slika 5.1. Načelna shema dvomasenog elektromehaničkog sloga



Slika 5.2. Blokovska shema dvomasenog elektromehaničkog sloga

$$T_{M2} \frac{d\omega_2}{dt} = m - m_2 - m_{f2}. \quad (5-4)$$



Slika 5.3. Nadomjesna blokovska shema dvomasenog elektromehaničkog sloga

Pritom T_{M1} i T_{M2} predstavljaju mehaničke vremenske konstante, T_B predstavlja konstantu

vremenskog skaliranja modela i može se prepostviti da je $T_B = 1$. Primjenom Laplaceove transformacije na prethodne izraze te sređivanjem dobivaju se prijenosne funkcije na nadomjesnoj blokovskoj shemi na slici 5.3 iznose:

$$G_{11}(s) = \frac{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s + \Omega_{02}^{-2}s^2}{T_\Sigma s(1 + 2\zeta\Omega_0^{-1}s + \Omega_0^{-2}s^2)} \quad (5-5)$$

$$G_{12}(s) = \frac{1 + 2\zeta_1\Omega_{01}^{-1}s}{T_\Sigma s(1 + 2\zeta\Omega_0^{-1}s + \Omega_0^{-2}s^2)} \quad (5-6)$$

$$G_{t1}(s) = \frac{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s}{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s + \Omega_{02}^{-2}s^2} \quad (5-7)$$

$$G_{t1}(s) = \frac{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s}{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s + \Omega_{02}^{-2}s^2} \quad (5-8)$$

$$G_{t2}(s) = \frac{1 + 2\zeta_1\Omega_{01}^{-1}s + \Omega_{01}^{-2}s^2}{1 + 2\zeta_1\Omega_{01}^{-1}s} \quad (5-9)$$

$$G_{21}(s) = \frac{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s}{T_\Sigma s(1 + 2\zeta\Omega_0^{-1}s + \Omega_0^{-2}s^2)} \quad (5-10)$$

$$G_{12}(s) = \frac{1 + 2\zeta_1\Omega_{01}^{-1}s + \Omega_{01}^{-2}s^2}{T_\Sigma s(1 + 2\zeta\Omega_0^{-1}s + \Omega_0^{-2}s^2)} \quad (5-11)$$

pri čemu su:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{T_B} \left(\frac{1}{T_{M1}} + \frac{1}{T_{M2}} \right)},$$

$$\Omega_{0i} = \sqrt{\frac{c}{T_B} \frac{1}{T_{Mi}}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\zeta = \frac{T_B d}{2c} \Omega_0,$$

$$\zeta_i = \frac{T_B d}{2c} \Omega_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

$$T_{M\Sigma} = T_{M1} + T_{M2}.$$

Kako bi se ilustrirala složenost upravljanja elektromehaničkim sustavom s izraženom elastičnošću u nastavku će biti analiziran slučaj uz korištenje PI regulatora brzine vrtnje projektiranog uz zanemarenje efekta elastičnosti sprega pogonskog i opteretnog dijela sustava.

5.2 Dvomaseni elektromehanički sustav s elastičnom spregom

Uz pretpostavku zanemarene elastičnosti sprega dvomaseni se sustav značajno pojednostavljuje te se red sustava smanjuje za dva. Umjesto dva spremišta kinetičke energije (dvije zamašne mase

J_1 i J_2) i jednog spremišta potencijalne energije (opruga s konstantom krutosti c) u ovom slučaju postoji samo jedno spremište kinetičke energije u zamašnoj masi $J_{uk} = J_1 + J_2$. Dinamičko vladanje sustava, uz prepostavku krute sprege opisano je diferencijalnom jednadžbom:

$$T_{M\Sigma} \frac{d\omega}{dt} = m_1 - m_2 - m_f, \quad (5-12)$$

pri čemu je $T_{M\Sigma} = T_{M1} + T_{M2}$ i $m_f = m_{f1} + m_{f2}$. Primjenom Laplaceove transformacije na izraz (5-12) slijedi:

$$\omega(s) = \frac{1}{T_{M\Sigma} s} m_1(s) - \frac{1}{T_{M\Sigma} s} m_2(s) - \frac{1}{T_{M\Sigma} s} m_f(s). \quad (5-13)$$

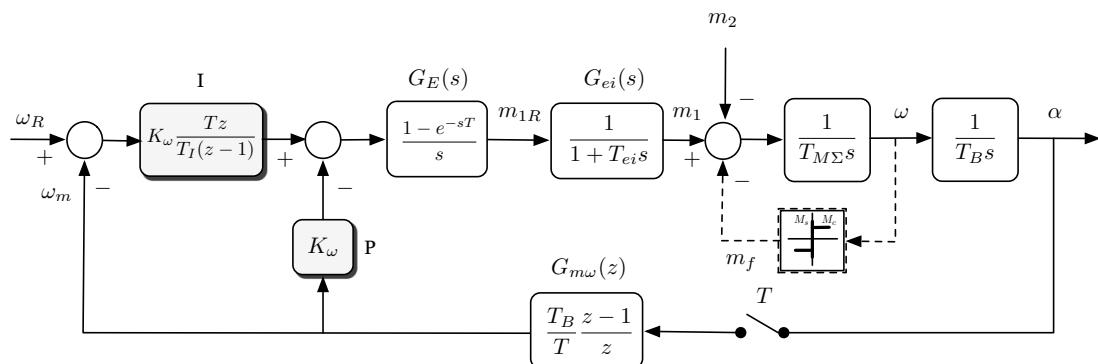
Uzveši u obzir dinamiku mjernog člana brzine vrtnje i ekstrapolatora nultog reda (ZOH) prijenosna funkcija otvorenog kruga glasi:

$$G_0(s) = \frac{1}{T_M \Sigma s (1 + T_\Sigma s)}, \quad (5-14)$$

gdje je $T_{\Sigma} = T_{ei} + T$. Za proces (5-14) anlogni PI regulator projektiran prema simetričnom optimumu ima sljedeće parametre:

$$T_R = a^2 T_\Sigma, \quad (5-15)$$

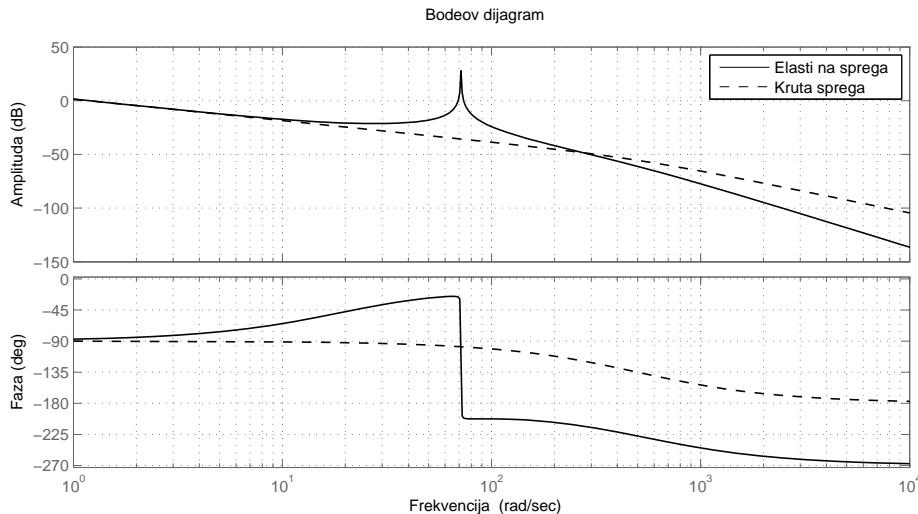
$$K_R = \frac{1}{a} \frac{T_{M\Sigma}}{T_\Sigma}. \quad (5-16)$$



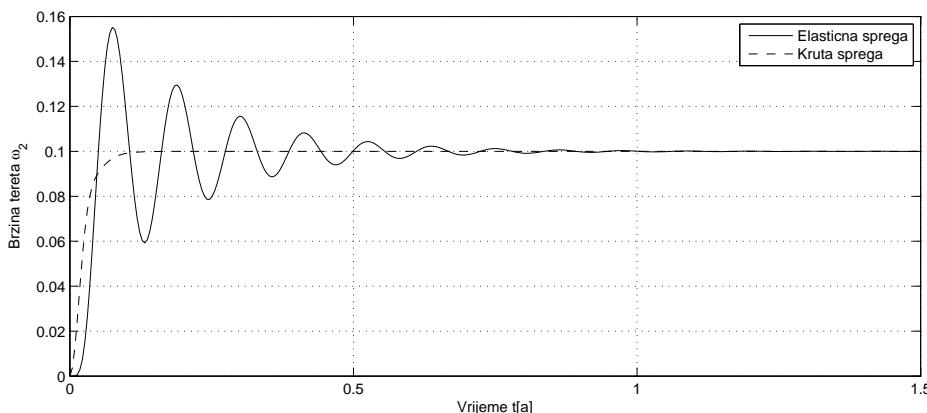
Slika 5.4. Načelna shema dvomasenog elektromehaničkog sloga

Na slici 5.6 prikazani su odzivi brzine vrtnje tereta dobiveni simulacijom dvomasenog elektromehaničkog sustava uz krutu odnosno uz elastičnu spregu. Pritom su parametri regulatora jednaki u oba slučaja, tj. proračunati uz zanemarenje efekta elastičnosti. Sa slike je razvidno da se u slučaju elastične spreve pojavljuju slabo prigušene oscilacije u odzivu brzine. Iznos i trajanje tih oscilacija određene su karakteristikama vratila (osovine) ali i omjerom momenata tromosti zamašnih masa na pogonskoj i opteretnoj strani. Uzrok ovakvog vladanja sustava može se objasniti i na temelju frekvencijskih karakteristika sustava prikazanih na slici 5.5. Vidljivo je

da u slučaju elastične spregе postoji rezonantno izdizanje u amplitudno frekvencijskoj karakteristici.



Slika 5.5. Bodeov dijagram dvomasenog elektromehaničkog sloga



Slika 5.6. Usporedni odzivi brzine vrtnje tereta ω_2 dvomasenog elektromehaničkog sustava s krutom i elastičnom spregom uz parametre PI regulatora podešene prema simetričnom optimumu za sustav s krutom spregom

5.3 Strukture upravljanja brzinom tereta elektromehaničkog sustava s izraženom elastičnošću

S ciljem poboljšanja vladanja sustava s izraženom elastičnošću uvode se različite nadogradnje standardnog PI regulatora. U nastavku su predstavljene četiri strukture upravljanja sustavima s elastičnošću i to:

1. PI regulator,
2. PI regulator uz dodatnu povratnu vezu po momentu na osovini,
3. PI regulator uz dodatnu povratnu vezu po razlici brzina motora i tereta,
4. Regulator punog reda¹.

Vladanje optimiranog regulacijskog kruga brzine vrtnje provjerena je simulacijom na računalu. Pritom su kao ispitni signali korišteni skokovita promjena referentne veličine ω_R i skokovita promjena poremećajne veličine - momenta tereta m_2 (udarno opterećenje). U simuacijama je korišteno vrijeme uzorkovanja $T = 1/(5\Omega_0) = 2 \text{ ms}$. Uz ovako odabranu vrijeme zanemarive su razlike u vladanju stvarnog diskretnog i optimiranog nadomjesnog kontinuiranog regulacijskog kruga. U sklopu simulacijskih provjera uspoređeni su odzivi za različite tipove regulatora za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M . Pritom r_{EM} predstavlja odnos vlastite frekvencije mehaničkog dijela sustava Ω_0 i granične frekvencije $1/T_\Sigma$ nadomjesnog člana $G_\Sigma(s)$ (kraće, **odnos frekvencija**), definiran kao:

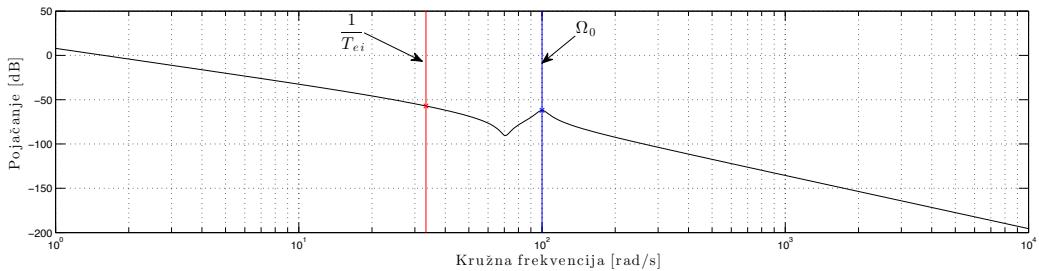
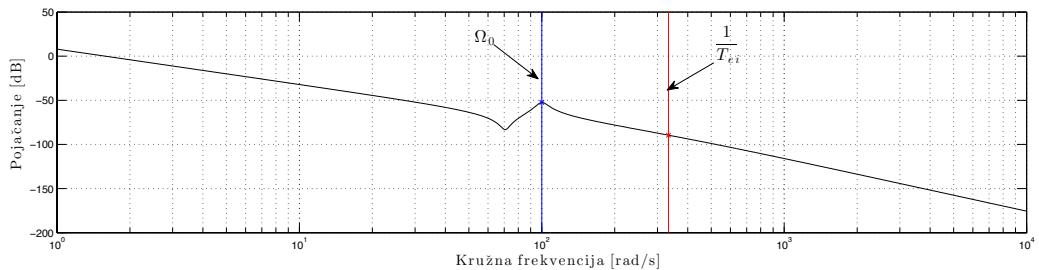
$$r_{EM} = \frac{\Omega_0}{1/T_\Sigma} = \Omega_0 T_\Sigma, \quad (5-17)$$

dok r_M predstavlja odnos momenata inercija tereta i motora (kraće, **odnos inercija**) i definiran je kao:

$$r_M = \frac{J_2}{J_1} = \frac{T_{M2}}{T_{M1}}. \quad (5-18)$$

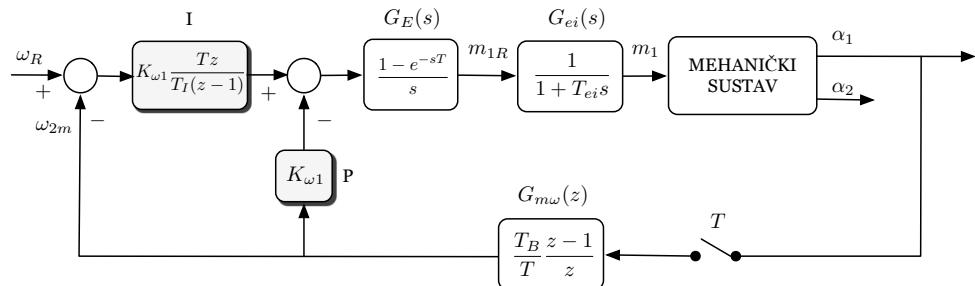
Ovisno o iznosu odnosa r_{EM} može se govoriti o **mekoj** vezi (za $r_{EM} \ll 1$), **srednje-krutoj** vezi (za $r_{EM} \approx 1$) i **krutoj** vezi (za $r_{EM} \gg 1$) pogona i tereta. Pojmovi kruta odnosno meka spregu definiraju se u odnosu na dinamiku podredene petlje po struji armature, budući da ona posredno definira dinamiku nadređenog kruga po brzini vrtnje, a samim time i utjecaj elastičnosti na vladanje nadređenog kruga. Kako bi se to objasnilo razmotrimo amplitudno frekvencijske karakteristike elastičnog elektromehaničkog sustava s podređenom petljom po struji armature uz $r_{EM} = 3$ (slika 5.7) i $r_{EM} = 0.3$ (slika 5.8). Kako bi se osiguralo dobro prigušeno vladanje nadređenog kruga po brzini vrtnje njegova nadomjesna vremenska konstanta višestruko je veća od nadomjesne vremenske konstante podređenog kruga po struji (npr. kod simetričnog optimuma taj je omjer 3.7). To za posljedicu ima da će tako parametrirani nadređeni krug prigušivati prirodne oscilacije mehaničkog sloga, ukoliko je $r_{EM} \gg 1$. S druge strane, u slučaju kada je $r_{EM} \ll 1$, tada se prirodna frekvencija oscilacija mehaničkog sloga Ω_0 nalazi unutar područja propuštanja nadređenog regulacijskog kruga po brzini vrtnje, te se iz tog razloga takav slučaj smatra mekom spregom.

¹Iako se ovaj regulator u literaturi naziva regulatorom punog reda on to striktno govoreći nije, budući da se njime mogu postaviti svi karakteristični odnosi ali ne i brzina odziva određena nadomjesnom vremenskom konstantom T_e

Slika 5.7. Amplitudno-frekvencijska karakteristika procesa uz krutu spregu $r_{EM} = 3$ Slika 5.8. Amplitudno-frekvencijska karakteristika procesa uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$

5.3.1 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom PI regulatora

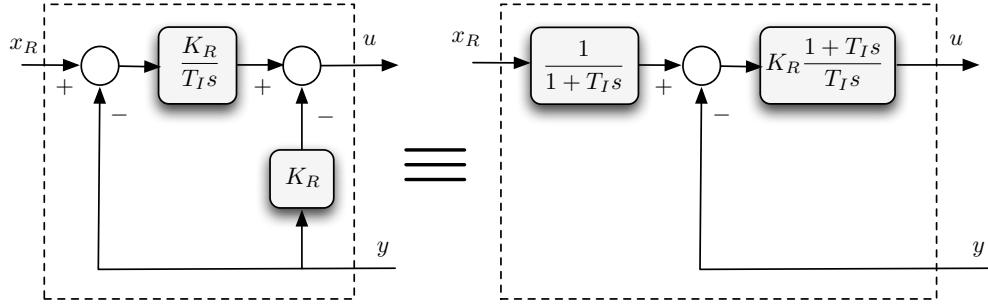
Kao prvi postupak obrađuje se upravljanje brzinom vrtnje tereta elastičnog elektromehaničkog sloga primjenom klasičnog PI regulatora, uz mjerjenje brzine na strani motora.



Slika 5.9. Načelna shema digitalnog upravljanja brzinom vrtnje tereta

Na slici 5.9 prikazana je načelna shema digitalnog upravljanja brzinom vrtnje elektromehaničkog sloga. Blok $G_{ei}(s)$ predstavlja prijenosnu funkciju podređene petlje upravljanja strujom motora, koja se zbog značajno brže dinamike u odnosu na dinamiku mehaničkog dijela sustava (velike zamašne mase) može aproksimirati PT1 članom. Brzina tereta ω_2 mjeri se posredno differenciranjem mjerенog signala kuta zakreta osovine motora α_1 , što je prikazano blokom G_{mw} . Zbog elastične veze između motora i tereta stvarna će se brzina tereta razlikovati od brzine motora.

PI regulator na slici 5.9 koristi se u modificiranoj izvedbi pri čemu je proporcionalno djelovanje izmješteno u povratnu granu čime se eliminiraju nagle skokovite promjene upravljačkoga signala. Takva realizacija PI regulatora ekvivalentna je klasičnoj relizaciji uz dodan prefiltar u referentnu granu, kako je to prikazano na slici 5.10.



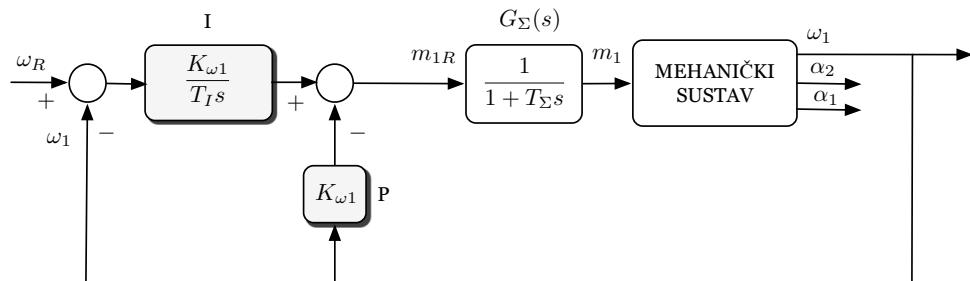
Slika 5.10. Ekvivalentne izvedbe PI regulatora

Digitalna struktura upravljanja brzinom vrtnje tereta prikazana na slici 5.9 može se nadomjestiti odgovarajućom kontinuiranom shemom upravljanja, kako je to prikazano na slici 5.11. Pritom su ekstrapolator nutog reda $G_E(s)$, podređeni krug upravljanja strujom $G_{ei}(s)$ te mjerni član digitalnog mjerjenja brzine nadomješteni PT1 članom:

$$G_\Sigma(s) = \frac{1}{1 + T_\Sigma s}, \quad (5-19)$$

pri čemu vremenska konstanta T_Σ iznosi:

$$T_\Sigma = \frac{T}{2} + T_{ei} + \frac{T}{2} = T_{ei} + T. \quad (5-20)$$



Slika 5.11. Nadomjesna kvazikontinuirana shema digitalnog upravljanja brzinom vrtnje tereta

Određivanje parametara PI regulatora prema optimumu dvostrukog odnosa

Parametri PI regulatora određuju se na način da prijenosna funkcija zatvorenog kruga upravljanja brzinom *čim više*² odgovara prototipnoj modelskoj funkciji prema optimumu dvostrukog odnosa. Stoga se najprije određuju prijenosne funkcije zatvorenog kruga, uz prepostavljenu strukturu PI regulatora, prema referentnoj odnosno prema poremećajnoj veličini. Nakon provedenog proračuna dobivaju se sljedeće prijenosne funkcije zatvorenog kruga upravljanja brzinom, prema referentnoj veličini:

$$G_{c\omega} = \frac{2\zeta_2\Omega_{02}^{-1} + 1}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5}, \quad (5-21)$$

odnosno prema poremećajnoj veličini:

$$G_{z\omega}(s) = \frac{\omega_2(s)}{\omega_R(s)} = \frac{1 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5}, \quad (5-22)$$

pri čemu su koeficijenti a_i , $i = 1, \dots, 5$ dani sljedećim izrazima:

$$a_1 = T_I + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1} \quad (5-23)$$

$$a_2 = K_{\omega l}^{-1}T_IT_{M\Sigma} + 2\zeta_2T_I\Omega_{02}^{-1} + \Omega_{02}^{-2} \quad (5-24)$$

$$a_3 = K_{\omega l}^{-1}T_IT_{M\Sigma}(T_\Sigma + 2\zeta\Omega_0^{-1}) + T_I\Omega_{02}^{-2} \quad (5-25)$$

$$a_4 = K_{\omega l}^{-1}T_IT_{M\Sigma}(2\zeta\Omega_0^{-1}T_\Sigma + \Omega_0^{-2}) \quad (5-26)$$

$$a_5 = K_{\omega l}^{-1}T_IT_{M\Sigma}T_\Sigma\Omega_0^{-2} \quad (5-27)$$

Karakteristični polinom u nazivniku prijenosnih funkcija zatvorenog regulacijskog kruga $A(s)$ reda je 5 i može se zapisati u obliku prikladnom za sintezu prema optimumu dvostrukog odnosa:

$$A(s) = D_5D_4^2D_3^3D_2^4T_e^5s^5 + D_4D_3^2D_2^3T_e^4s^4 + D_3D_2^2T_e^3s^3 + D_2T_e^2s^2 + T_e s + 1 \quad (5-28)$$

Pojedine strukture regulatora imaju različit broj parametara za podešavanje, a time i različit broj stupnjeva slobode. Da bi se regulatorom postavilo n polova na željene lokacije potrebno je da on ima n slobodnih parametara.³ U tom se slučaju govori o **regulatoru punog reda**. Ukoliko je broj parametara l manji od n radi se tada o **regulatoru reduciranoj red**. U tom slučaju se

²Budući da PI regulator ima dva slobodna parametra K_R i T_I tada se ne mogu postaviti svi karakteristični odnosi na željene iznose već se postavljaju samo dva dominantna odnosa D_2 i D_3 čime se postiže slaganje s modelskom funkcijom u nižem frekvencijskom području

³Bitno je primijetiti da se korištenjem integralnog djelovanja u sustav unosi dodatni pol povećavajući time red sustava za 1.

može nezavisno postaviti l polova na željene lokacije, dok se na položaje preostalih $n - l$ ne može utjecati. Stoga je u takvim slučajevima razumno parametrima regulatora postaviti l dominantnih polova, što, u kontekstu optimuma dvostrukog odnosa, odgovara nezavisnom postavljanju l prigušenja (D_2, \dots, D_{l+1}).

Kako u slučaju PI regulatora broj slobodnih parametara iznosi $l = 2$ dva dominanatna prigušenja D_2 i D_3 postavljaju se na optimalni iznos 0.5.

Izjednačavanjem koeficijenata uz s , s^2 i s^3 u izrazima (??) i (5-28) dobivaju se tri nelinearne jednadžbe s tri nepoznanice T_I , $K_{\omega 1}$ i T_e :

$$T_e = T_I + 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-2}, \quad (5-29)$$

$$D_2 T_e^2 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} + 2\zeta_2 T_I \Omega_{02}^{-1} + \Omega_{02}^{-2}, \quad (5-30)$$

$$D_3 D_2^2 T_e^3 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} (T_\Sigma + 2\zeta \Omega_0^{-1}) + T_I \Omega_{02}^{-2}. \quad (5-31)$$

Kombinacijom triju prethodnih jednadžbi slijedi kubna jednadžba po nadomjesnoj vremenskoj konstanti T_e :

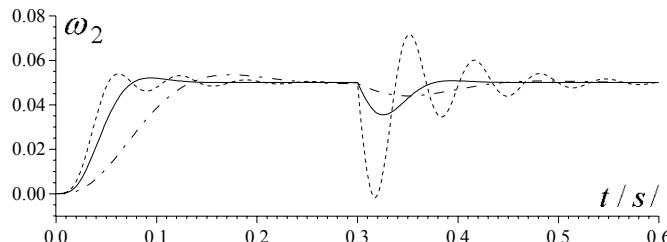
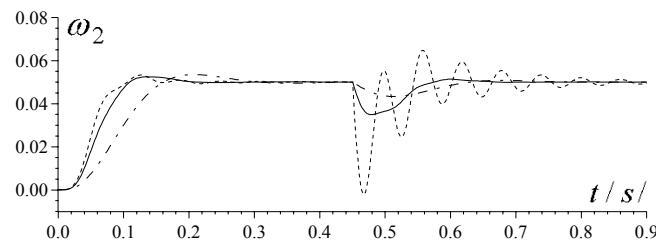
$$\begin{aligned} D_3 D_2^2 \Omega_0 \Omega_{02}^3 T_e^3 - D_2 (T_\Sigma \Omega_0 + 2\zeta) \Omega_{02}^3 T_e^2 - [\Omega_0 \Omega_{02} - 2\zeta_2 (2\zeta + T_\Sigma \Omega_0) \Omega_{02}^2] T_e - \\ - (4\zeta^2 - 1) (T_\Sigma \Omega_0 + 2\zeta) \Omega_{02} + 2\zeta_2 \Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (5-32)$$

Nakon što se odredi nadomjesna vremenska konstanta T_e parametri PI regulatora određeni su sljedećim izrazima:

$$T_I = T_e - 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-2} \quad (5-33)$$

$$K_{\omega} = \frac{T_I T_{M\Sigma} \Omega_{02}^2}{D_2 T_e^2 \Omega_{02}^2 - 2\zeta_2 T_I \Omega_{02} - 1}. \quad (5-34)$$

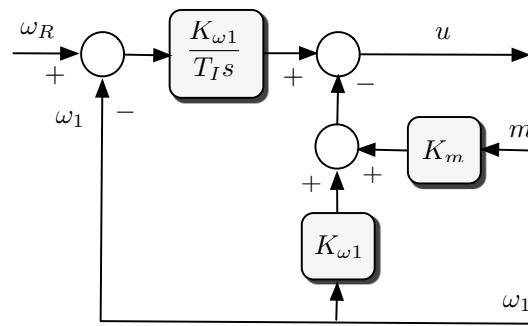
Rezultati simulacija uz ovako podešene parametre PI regulatora prikazani su na slici 5.12. U slučaju "meke veze", PI regulator osigurava povoljan, dobro prigušen odziv regulacijskog kruga samo za odnose inercija $r_M \geq 1$. Vrijeme odziva raste, a propad brzine vrtnje uslijed udarnog opterećenja pada s povećanjem odnosa inercija r_M . Kvalitativno slično vladanje regulacijskog kruga dobije se i za slučaj "srednje krute veze" - relativno male oscilacije odziva uočljive i uz odnos inercija $r_M = 1$. Oscilacije su izraženije u odzivu na udarno opterećenje što je posljedica derivacijskog djelovanja nula prijenosne funkcije s obzirom na moment tereta. Oscilacije odziva na udarno opterećenje pojavljuju se i kod pogona s "krutom vezom". Amplituda ovih oscilacija veća je i prigušenje slabije uz niže iznose relativnog koeficijenta prigušenja mehaničkog sustava ζ .

(a) Odziv brzine vrtnje tereta uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$ (b) Odziv brzine vrtnje tereta uz srednje krutu spregu $r_{EM} = 1$

Slika 5.12. Odzivi brzine vrtnje tereta ω_2 uz PI regulator za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M ($r_M = 0.2$ - crtkana linija, $r_M = 0.1$ - puna linija, $r_M = 5$ - točkasta linija)

5.3.2 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom PIm regulatora

Kod ove vrste upravljanja uz PI regulator dodatno je uvedena povratna veza po razvijenom momentu na osovini (slika 5.13). Informacija o razvijenom momentu dobiva se korištenjem tenzometarskih traka spojenih u Wheatstonov most.



Slika 5.13. Struktura upravljanja slijednim sustavom zasnovanom na PIm regulatoru

$$a_1 = T_I + 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} \quad (5-35)$$

$$a_2 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} + K_{\omega 1}^{-1} K_m T_I T_{M2} + 2\zeta_2 T_I \Omega_{02}^{-1} + \Omega_{02}^{-2} \quad (5-36)$$

$$a_3 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} (T_\Sigma + 2\zeta \Omega_0^{-1}) + K_{\omega 1}^{-1} K_m T_I T_{M2} 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} + T_I \Omega_{02}^{-2} \quad (5-37)$$

$$a_4 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} (2\zeta \Omega_0^{-1} T_\Sigma + \Omega_0^{-2}) \quad (5-38)$$

$$a_5 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} T_\Sigma \Omega_0^{-2} \quad (5-39)$$

$$\begin{aligned} D_4 D_3^2 D_2^3 \Omega_0 \Omega_{02}^2 (T_\Sigma \Omega_0 \Omega_{02} + 2\zeta \Omega_{02} - 2\zeta_2 \Omega_0) (1 + 2\zeta T_\Sigma \Omega_0)^{-1} T_e^4 - \\ D_3 D_2^2 \Omega_{02}^3 T_e^3 + 2D_2 \zeta_2 \Omega_{02}^2 T_e^2 + (1 - 4\zeta_2^2) \Omega_{02} T_e + 4\zeta_2 (2\zeta_2^2 - 1) = 0 \end{aligned} \quad (5-40)$$

Ako pretpostavimo da je sustav slabo prigušen, tj. $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$, te uvrštenjem iznosa dominantnih karakterističnih odnosa $D_2 = D_3 = 0.5$, prethodna jednadžba za računanje nadomjesne vremenske konstante T_e prelazi u:

$$\frac{1}{32} D_4 \Omega_0^2 \Omega_{02}^2 T_\Sigma T_e^3 - \frac{1}{8} \Omega_{02}^2 T_e^2 + 1 = 0 \quad (5-41)$$

Analiza kubne jednadžbe (5-41) pokazuje da je jedno od rješenja uvijek negativno, dok je među ostala dva rješenja fizikalno prihvatljivo ono nižeg iznosa:

$$T_e = 2\rho \cos\left(\frac{\phi + \pi}{3}\right) + \rho \quad (5-42)$$

gdje je:

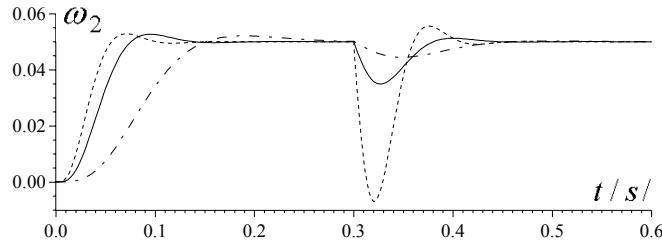
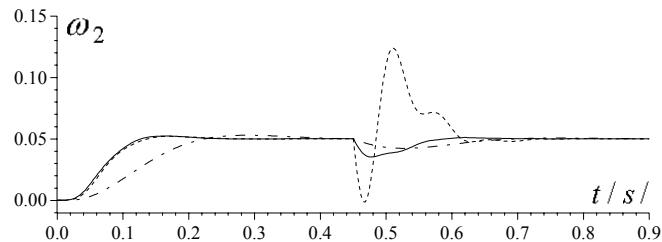
$$\phi = \arccos\left(\frac{27 D_4^2 T_\Sigma^2 \Omega_0^4}{4 \Omega_{02}^2} - 1\right) \quad (5-43)$$

$$\rho = \frac{4}{3 D_4 T_\Sigma \Omega_0^2} \quad (5-44)$$

Rješenje (5-42) je realno, ako je ispunjen uvjet:

$$D_4 \leq D_{4max} = \frac{2\sqrt{2} \Omega_{02}}{3\sqrt{3} T_\Sigma \Omega_0^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} r_{EM} \sqrt{1+r_M}} \quad (5-45)$$

Uz optimalan iznos 0.5 karakterističnog odnosa D_4 i relativno velike iznose odnosa r_M i r_{EM} dobila bi se kompleksna rješenja za nadomjesnu vremensku koeficijentnu T_e . Ovo se može izbjegći smanjenjem karakterističnog odnosa D_4 , i to upravo na granični iznos D_{4max} da bi se dobio najbrži odziv regulacijskog kruga, što rezultira najmanjim iznosom nadomjesne vremenske konstante.

(a) Odziv brzine vrtnje tereta uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$ (b) Odziv brzine vrtnje tereta uz srednje krutu spregu $r_{EM} = 1$ Slika 5.14. Odzivi brzine vrtnje tereta uz PI regulator za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M ($r_M = 0.2$ - crtkana linija, $r_M = 0.1$ - puna linija, $r_M = 5$ - crta-točka)

tante T_e . Prema tome, karakteristični odnos D_4 računa se prema:

$$D_4 = \min(0, 5; D_{4max}) \quad (5-46)$$

Uvezši to u obzir parametri PI regulatora brzine vrnje iznose:

$$K_{\omega 1} = \frac{T_I T_{M\Sigma} (1 + 2\zeta T_{\Sigma} \Omega_0)}{D_4 D_3^2 D_2^3 T_e^4 \Omega_0^2} \quad (5-47)$$

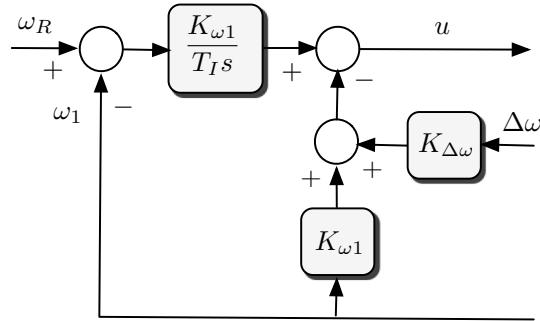
$$K_m = \frac{D_2 T_e^2 \Omega_{02}^2 - K_{\omega 1}^{-1} T_{M\Sigma} T_I \Omega_{02}^2 - 2\zeta_2 (T_e \Omega_{02} - 2\zeta_2) - 1}{K_{\omega 1}^{-1} T_{M2} T_I \Omega_{02}^2} \quad (5-48)$$

$$T_I = T_e - 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} \quad (5-49)$$

Prednost uvođenja dodatne povratne veze po prijenosnom momentu m dolazi do izražaja kod pogona s malim odnosom inercija $r_M < 1$. Tako se u slučaju "meke veze" potpuno prigušuju oscilacije odziva karakteristične za regulacijski krug s PI regulatorom. Kod "srednje-krute veze" dolazi do značajnog prigušenja oscilacija odziva u odnosu na sustav s PI regulatorom. No, pritom se javlja negativni učinak velikog prebačaja brzine vrtnje tereta ω_2 u odzivu na udarno opterećenje. Osim toga, PI regulator ima i bolje prigušenje visokofrekvencijskih oscilacija odziva na udarno opterećenje pogona s "krutom vezom".

5.3.3 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom $PI\Delta\omega$ regulatora

Regulator $PI\Delta\omega$ strukture koristi uz standardni PI regulator i dodatnu informaciju o razlici između brzina tereta i motora (slika 5.15), čime se dobiva dodatni stupanj slobode u odnosu na PI regulator. To omogućuje postavljanje prigušenja dodatne kaskade u nadomjesnoj shemi što u konačnici rezultira boljim prigušenjem oscilacija prouzročenim elastičnošću prijenosa.



Slika 5.15. Struktura upravljanja slijednim sustavom zasnovana na $PI\Delta\omega$ regulatoru

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga ima formu danu izrazom (??), s tim da su koeficijenti karakterističnog polinoma dani sljedećim relacijama:

$$a_1 = T_I + 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} \quad (5-50)$$

$$a_2 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} + 2\zeta_2 T_I \Omega_{02}^{-1} + \Omega_{02}^{-2} \quad (5-51)$$

$$a_3 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} (\Sigma + 2\zeta \Omega_0^{-1}) + K_{\omega 1}^{-1} K_{\Delta\omega} T_I \Omega_{02}^{-2} + T_I \Omega_{02}^{-2} \quad (5-52)$$

$$a_4 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} (2\zeta \Omega_0^{-1} T_\Sigma + \Omega_0^{-2}) \quad (5-53)$$

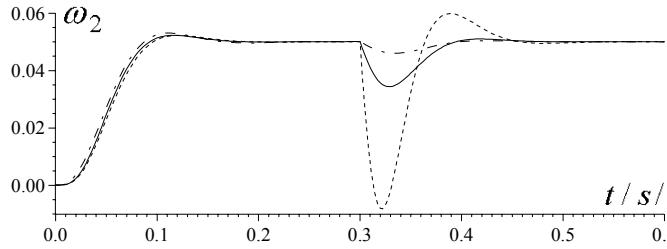
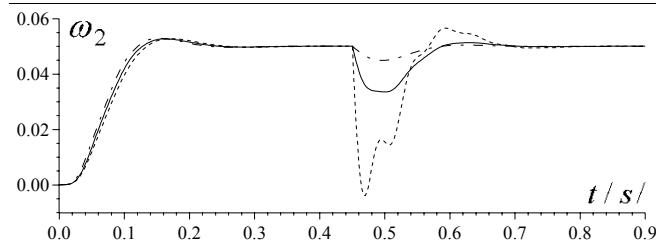
$$a_5 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} T_\Sigma \Omega_0^{-2} \quad (5-54)$$

Izjednačavanjem koeficijenata a_1-a_4 s odgovarajućim koeficijentima prijenosne funkcije postavljene prema optimumu dvostrukog odnosa (5-28) slijedi:

$$D_4 D_3^2 D_2^3 \Omega_0^2 \Omega_{02}^2 (1 + 2\zeta T_\Sigma \Omega_0)^{-1} T_e^4 - D_2 \Omega_{02}^2 T_e^2 + 2\zeta_2 \Omega_{02} T_e + 1 - 4\zeta_2^2 = 0 \quad (5-55)$$

Uz pretpostavku relativno malih iznosa prigušenja $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$ i uvrštenjem iznosa dominantnih karakterističnih odnosa $D_2 = D_3 = 0.5$, jednadžba za računanje nadomjesne vremenske konstante T_e , dana izrazom (5-55), prelazi u:

$$\frac{1}{32} D_4 \Omega_0^2 \Omega_{02}^2 T_e^4 - \frac{1}{2} \Omega_{02}^2 T_e^2 + 1 = 0 \quad (5-56)$$

(a) Odziv brzine vrtnje tereta uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$ (b) Odziv brzine vrtnje tereta uz srednje krutu spregu $r_{EM} = 1$

Slika 5.16. Odzivi brzine vrtnje tereta uz $\text{PI}\Delta\omega$ regulator za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M ($r_M = 0.2$ - crtačka linija, $r_M = 0.1$ - puna linija, $r_M = 5$ - crta-točka)

Fizikalno prihvatljivo, tj realno rješenje bikvadratne jednadžbe, glasi:

$$T_e = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 0,5D_4(1 + r_M)}}{1/8 \cdot D_4 \Omega_0^2}} \quad (5-57)$$

uz zadovoljen uvjet:

$$D_4 \leq D_{4max} = \frac{2}{1 + r_M} \quad (5-58)$$

Iz istog razloga kao i kod PI_M strukture regulatora brzine vrtnje, karakteristični odnos D_4 računa se prema:

$$D_4 = \min(0,5; D_{4max}). \quad (5-59)$$

Uvezši gore navedeno u obzir parametri $\text{PI}\Delta\omega$ strukture dani su sljedećim izrazima:

$$K_\omega = \frac{T_I T_{M\Sigma} \Omega_{02}^2}{D_2 T_e^2 \Omega_{02}^2 - 2\zeta_2(T_e \Omega_{02} - 2\zeta_2) - 1} \quad (5-60)$$

$$K_{\Delta\omega} = \frac{D_3 D_2^2 T_e^3 \Omega_0 \Omega_{02}^3 - K_{\omega 1}^{-1} T_{M\Sigma} T_I \Omega_{02}^3 (T_\Sigma \Omega_0 + 2\zeta) - \Omega_0 (T_e \Omega_{02} - 2\zeta_2)}{K_{\omega 1}^{-1} T_I \Omega_0 \Omega_{02}} \quad (5-61)$$

$$T_I = T_e - 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} \quad (5-62)$$

Regulator $\text{PI}\Delta\omega$ strukture ima nekoliko bitnih prednosti u odnosu na PI_M regulator, što se ogleda u sljedećem:

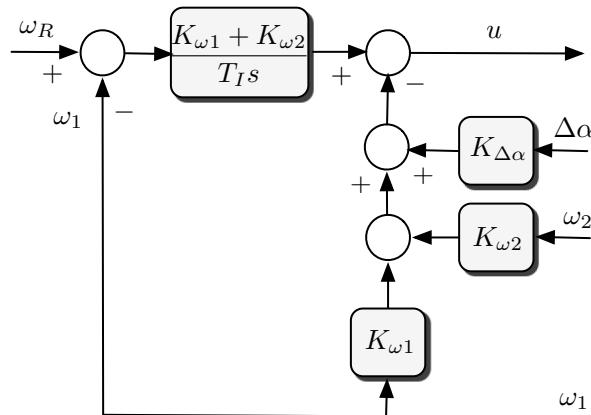
- odziv je dobro prigušen u cijeloj (r_M, r_{EM}) -ravnini,
- nema izraženog prebačaja brzine vrtnje u odzivu na udarno opterećenje pogona sa "srednjekrutom vezom",
- vrijeme odziva pogona s velikim odnosom inercija r_M je manje.

dok su nedostaci ovakve strukture upravljanja:

- veći propad brzine vrtnje tereta ω_2 u odzivu na udarno opterećenje pogona s "krutom vezom" i vrlo slabo prigušenim mehaničkim sustavom,
- sporiji odziv pogona s malim odnosom inercija.

5.3.4 Upravljanje brzinom vrtnje tereta primjenom regulatora punog reda

Regulator punog reda kao svoje ulaze koristi brzine ω_1, ω_2 i kut uvijanja osovine $\Delta\alpha$ (slika 5.17). Premda se naziva regulatorom punog reda on to strogo govoreći nije, budući da ima četiri slobodna parametra $l = 4$ dok je red polinoma $A(s)$ $n = 5$. Dakle da bi regulator bio punog reda bilo bi potrebno da postoji povratna veza po razvijenom momentu. Međutim uvezši u obzir značajno bržu dinamiku kruga po momentu u odnosu na ostale mjerne veličine kvaliteta vladanja praktički je jednaka bez obzira postoji li povratna veza po momentu.



Slika 5.17. Struktura upravljanja slijednim sustavom zasnovana na regulatoru stanja punog reda

$$a_1 = T_I + 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} \quad (5-63)$$

$$a_2 = (K_{\omega 1} + K_{\omega 2})^{-1} T_I T_{M\Sigma} + 2\zeta_2 T_I \Omega_{02}^{-1} + (K_{\omega 1} + K_{\omega 2})^{-1} K_{\Delta\alpha} T_I T_B^{-1} \Omega_{02}^{-2} \quad (5-64)$$

$$a_3 = (K_{\omega 1} + K_{\omega 2})^{-1} T_I T_{M\Sigma} (T_\Sigma + 2\zeta \Omega_0^{-1}) + (K_{\omega 1} + K_{\omega 2})^{-1} K_{\omega 1} T_I \Omega_{02}^{-2} \quad (5-65)$$

$$a_4 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} (2\zeta \Omega_0^{-1} T_\Sigma + \Omega_0^{-2}) \quad (5-66)$$

$$a_5 = K_{\omega 1}^{-1} T_I T_{M\Sigma} T_\Sigma \Omega_0^{-2} \quad (5-67)$$

$$T_e = \frac{T_\Sigma}{D_5 D_4 D_3 D_2 (1 + 2\zeta T_\Sigma \Omega_0)} \quad (5-68)$$

Postavljanjem pojedinih karakterističnih omjera D_i , $i = 2, \dots, 5$ na optimalni iznos 0.5 dobiva se nadomjesna vremenska konstanta:

$$T_e = 16 T_\Sigma. \quad (5-69)$$

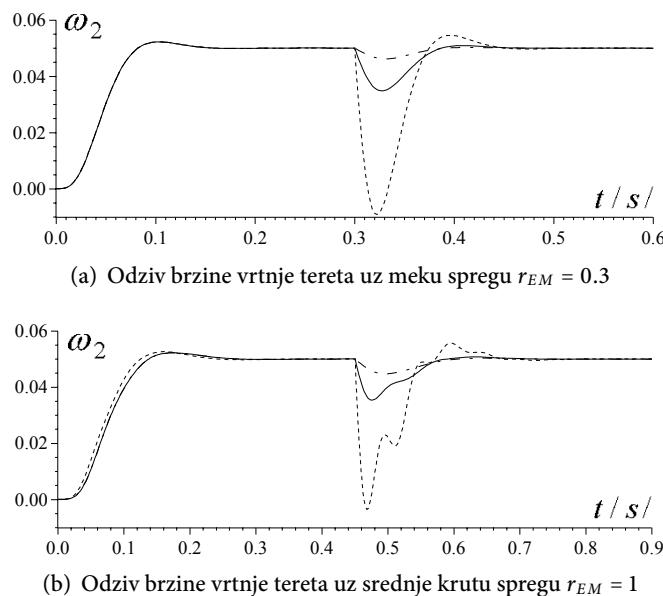
$$K_{\omega 1} = \frac{T_{M\Sigma} \Omega_{02}^2}{\Omega_0} \left(\frac{1 + 2\zeta T_\Sigma \Omega_0}{D_4 D_3 D_2 T_e \Omega_0} - T_\Sigma \Omega_0 - 2\zeta \right), \quad (5-70)$$

$$K_{\omega 2} = \frac{T_I T_{M\Sigma} (1 + 2\zeta T_\Sigma \Omega_0)}{D_4 D_3^2 D_2^3 T_e^4 \Omega_0^2} - K_{\omega 1} \quad (5-71)$$

$$K_{\Delta\alpha} = \frac{D_2 T_e^2 \Omega_{02}^2 - (K_{\omega 1} + K_{\omega 2})^{-1} T_{M\Sigma} T_I \Omega_{02}^2 - 2\zeta_2 (T_e \Omega_{02} - 2\zeta_2)}{(K_{\omega 1} + K_{\omega 2})^{-1} T_B^{-1} T_I} \quad (5-72)$$

$$T_I = T_e - 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} \quad (5-73)$$

Usporedni odzivi pokazuju da regulator stanja punog reda objedinjuje sva dobra svojstva regulatora nižeg reda. K tome, ovaj regulator postiže brže odzive i bolju kompenzaciju poremećaja za slučaj "izrazito meke veze" uz $D_5 = 0.5$. Posljedica je izraženo forsiranje referentne veličine momenta motora m_{1R} i povećanje vršne vrijednosti kuta uvijanja prijenosnog mehanizma $\Delta\alpha \approx m/c$. Proizvoljnim smanjenjem karakterističnog odnosa D_5 ispod optimalne vrijednosti 0.5 smanjuje se regulacijsko forsiranje pod cijenu usporenja odziva. Isto se tako u slučaju "meke veze" povećanjem odnosa D_5 iznad optimalne vrijednosti 0.5 može smanjiti vrijeme odziva uz popratno povećanje regulacijskog forsiranja.



Slika 5.18. Odzivi brzine vrtnje tereta uz regulator punog reda za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M ($r_M = 0.2$ - crtkana linija, $r_M = 0.1$ - puna linija, $r_M = 5$ - crta-točka)

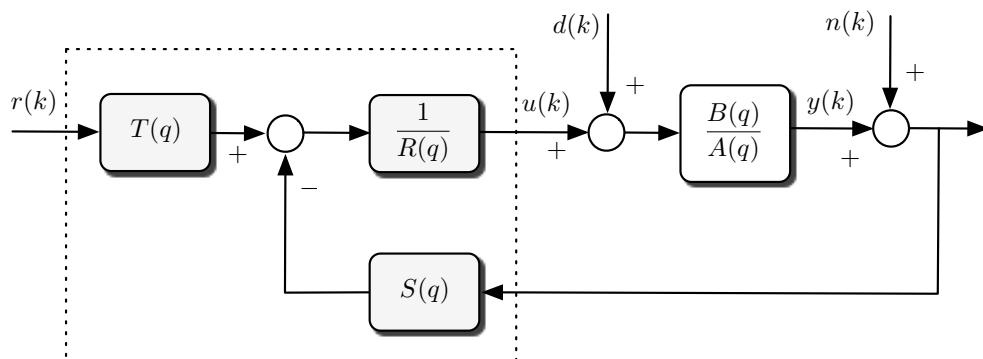
Polinomski regulator (RST regulator)

U ovom je poglavlju predstavljen analitički postupak sinteze regulatora kojim se omogućuje posebno definiranje vladanja prema referentnoj i prema poremećajnoj veličini. Iz tog se razloga takva upravljačka struktura naziva dvoparametarskom konfiguracijom. Budući da je vladanje sustava upravljanja prema referentnoj i prema poremećajnoj veličini definirano s tri polinoma $R(z)$, $S(z)$ i $T(z)$, često se ova struktura naziva i polinomskim regulatorom ili RST regulatorom, prema uobičajenim ozнакама за pojedine polinome

Djelovanje polinomskog regulatora opisano je sljedećim izrazom:

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} X_R(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z), \quad (6-1)$$

pri čemu su $X_R(z)$, $U(z)$ i $Y(z)$ Z-transformacije referentnog, upravljačkoga i izlaznog signala.



Slika 6.1. Blokovska shema upravljanja a RST regulatorom

Postupak sinteze sustava upravljanja sastoji se od određivanja polinoma $R(z)$, $S(z)$ i $T(z)$, kako bi se postiglo željeno vladanje zatvorenog kruga upravljanja.

Diskretna prijenosna funkcija prema referentnoj veličini iznosi:

$$G_{zr} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_z(z)}{A_z(z)} \quad (6-2)$$

Pritom $B_z(z)$ i $A_z(z)$ definiraju željeno vladanje sustava. Očito je da polinomi $R(z)$, $S(z)$ i $T(z)$ trebaju zadovoljiti sljedeće dvije relacije:

$$B(z)T(z) = B_z(z) \quad (6-3)$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_z(z) \quad (6-4)$$

Iraz (6-4) predstavlja tzv. **Diofantsku jednadžbu** i ona ima rješenje ako $A(z)$ i $B(z)$ nemaju zajedničkih faktora, tj. ako su koprime polinomi. U slučaju da postoji njihov zajednički faktor tada on mora biti sadržan i u polinomu $A_z(z)$, kako bi postojalo rješenje¹.

Da bi dobiveni regulator bio kauzalan (izvediv) potrebno je zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\deg A_z - \deg B_z \geq \deg A - \deg B \quad (6-5)$$

$$\deg A_z \geq 2 \deg A - 1. \quad (6-6)$$

Uvjet (6-6) povlači da željeni karakteristični polinom mora biti najmanje reda $2 \deg A - 1$. Da bi se to izbjeglo izraz (6-2) može se zapisati kao:

$$G_{zr} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)A_o(z)}{A_m(z)A_o(z)} \quad (6-7)$$

Polovi zatvorenog regulacijskog kruga određeni su sada karakterističnom jednadžbom:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_o(z) = A_z(z), \quad (6-8)$$

koja se može interpretirati kao produkt **regulatorskog** i **observerskog** polinoma, prema analogiji s upravljanjem po estimiranim varijablama stanja pri čemu je karakteristični polinom određen izrazom:

$$P(z) = \det(zI - \Phi + \Gamma K) \cdot \det(zI - \Phi + LC), \quad (6-9)$$

gdje je Φ matrica sustava, Γ upravljačka matrica sustava, C izlazna matrica sustava, K vektor pojačanja regulatora po varijablama stanja i L vektor pojačanja estimatora. Pritom se dinamika observera postavlja na način da bude dobro prigušena i nekoliko puta brža od dinamike upravljanja.

¹Pretpostavimo da polinomi $A(z)$ i $B(z)$ imaju zajednički faktor $z - \alpha$. U tom slučaju desna strana izraza (6-4) za $z = \alpha$ ima vrijednost nula te je očito da i desna stana izraza, tj. $A_z(z)$ mora sadržavati faktor $z - \alpha$ kako bi izraz bio zadovoljen

Gledajući čisto numerički observerski se polinom dodaje da bi se zadovoljio uvjet (6-6). Međutim, njegov izbor utječe i na vladanje sustava upravljanja.

Premda se dodavanjem observerskog polinoma prijenosna funkcija prema referentnoj veličini ne mijenja (budući da se pokrati), on ostaje prisutan u drugim prijenosnim funkcijama (npr. prema poremećaju i prema mjernom šumu). Tako prijenosna funkcija zatvorenoga kruga prema poremećaju koji djeluje na ulazu u proces glasi:

$$G_{zd} = \frac{B(z)A(z)R(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B(z)A(z)R(z)}{A_m(z)A_o(z)}, \quad (6-10)$$

dok prijenosna funkcija prema mjernom šumu n ima oblik:

$$G_{zd} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A_m(z)A_o(z)}. \quad (6-11)$$

Vidljivo je da prijenosne funkcije po poremećaju i po mjernom šumu sadržavaju observerski polinom $A_o(z)$ te će stoga njegov izbor značajno utjecati na kvalitetu vladanja sustava upravljanja prema ovim dvama ulazima. Bitno je naglasiti da su zahtjevi za što boljom kompenzacijom poremećaja i mjernog šuma međusobno oprečni budući da poremećaji obično djeluju u nisko-frekvencijskom području dok je mjerni šum tipično vrlo visoke frekvencije. Iz tog će razloga izbor observerskog polinoma biti kompromis između zahtjeva za čim manjim utjecajem poremećaja i mjernog šuma.

Kako bi se postiglo da prijenosna funkcija po referentnoj veličini ne ovisi o izboru observerskog polinoma $A_o(z)$ polinom $T(z)$ se obično odabire da sadrži u sebi observerski polinom:

$$T(z) = t_0 A_o(z). \quad (6-12)$$

U tom slučaju prijenosna funkcija po referentnom signalu glasi:

$$G_{zr} = t_0 \frac{B(z)}{A_m(z)}, \quad (6-13)$$

pri čemu t_0 određuje staticko pojačanje sustava te se u slučaju zahtjeva za stacionarnom točnošću odabire kao:

$$t_0 = \frac{A_m(1)}{B(1)}. \quad (6-14)$$

6.1 Uvjeti izvedivosti regulatora

Prilikom sinteze polinomskog regulatora od ključnog je značaja odabir reda pojedinih polinoma koji se određuju tim postupkom. Budući da se želi izbjegći kraćenje nula procesa koje su nestabilne ili slabo prigušene, potrebno je da željena modelska prijenosna funkcija zatvorenog regu-

lacijskog kruga sadržava slabo prigušene ili nestabilne nule procesa. U nastavku analize će se prepostaviti da se sve nule procesa trebaju zadržati te u tom slučaju slijedi:

$$B_m(z) = B(z)B'_m(z), \quad (6-15)$$

odakle zaključujemo da mora vrijediti:

$$\deg B_m \geq \deg B. \quad (6-16)$$

S druge strane, polni višak modelske funkcije mora biti veći ili jednak polnom višku procesa, te stoga vrijedi:

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B, \quad (6-17)$$

odakle, uvezši u obzir uvjet (6-16), slijedi

$$\deg A_m \geq \deg A. \quad (6-18)$$

Jedinstveno rješenje Diophantske jednadžbe postoji ako vrijedi:

$$\deg S \leq \deg A - 1. \quad (6-19)$$

S druge strane, iz Diophantnske jednadžbe slijedi:

$$\deg A + \deg R = \deg A_z, \quad (6-20)$$

odnosno:

$$\deg R = \deg A_z - \deg A. \quad (6-21)$$

Uvezši u obzir relacije (6-19) i (6-21), te da mora vrijediti $\deg S \leq \deg R$, slijedi:

$$\deg A_z = \deg A_m A_o \geq 2 \deg A - 1. \quad (6-22)$$

Polinomski regulator minimalnog reda dobiva se ako se u prethodnim uvjetima uzmu građični slučajevi, tj.:

$$\deg B_m = \deg B, \quad (6-23)$$

$$\deg A_m = \deg A = n, \quad (6-24)$$

$$\deg A_0 = \deg A - 1 = n - 1. \quad (6-25)$$

$$\deg R = \deg S = \deg T = \deg A_z - \deg A = n - 1. \quad (6-26)$$

Regulatorom minimalnog reda omogućuje se postavljanje svih polova sustava na željene lokacije, te u tom smislu polinomski regulator predstavlja regulator punog reda. Ako je red manji od minimalnog tada je dio polova neupravljiv, odnosno ne možemo ih postaviti na željene lokacije. Red polinoma A_m jednak je redu polinoma A što znači da se n polova otvorenog kruga premješta na n novih lokacija određenih polinomom A_m . Budući da je mjerljiva samo jedna varijabla stanja y tada je preostalih $n-1$ potrebno estimirati, te je stoga red observerskog polinoma $n-1$.

6.2 Rješavanje Diophantske jednadžbe

Opći oblik Diophantske jednadžbe glasi

$$AX + BY = C, \quad (6-27)$$

pri čemu su A, B, C poznati polinomi, dok je polinome X i Y potrebno odrediti. Ukoliko je Diophantska jednadžba minimalnog reda tada se ona može prikazati kao odgovarajući sustav linearnih jednadžbi po koeficijentima polinoma X i Y kako slijedi:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ddots & b_0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \ddots & b_1 \\ 0 & a_n & \dots & \vdots & 0 & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{2n-1} \end{array} \right] \quad (6-28)$$

Prethodni se izraz može skraćeno zapisati kao:

$$S_{AB}\bar{X} = \bar{C}, \quad (6-29)$$

pri čemu se matrica S_{AB} naziva Sylvesterovom matricom. Rješenje navedenog sustava jednadžbi dano je izrazom:

$$\bar{X} = S_{AB}^{-1}\bar{C}. \quad (6-30)$$

6.3 Dodavanje integralnog djelovanja

Kako bi se osigurala točnost u ustaljenom stanju integralno djelovanje mora postojati bilo kao dio procesa (ispred mjesta djelovanja poremećaja) bilo kao dio regulatora. Ukoliko ono ne postoji u samom procesu tada ga je potrebno dodati u regulator. Prilikom sinteze polinomskog regulatora integralno se djelovanje može dodati na dva načina:

- a) virtualnim proširenjem procesa s integralnim djelovanjem,
- b) proširenjem postojećeg polinomskog regulatora.

6.3.1 Virtulno proširenje procesa

Da bi polinomski regulator imao integralno djelovanje polinom $R(z)$ mora imati nultočku u $z = 1$, koji se u tom slučaju može zapisati kao:

$$R^*(z) = (z - 1)R(z). \quad (6-31)$$

Uvrštenjem u Diophantsku jednadžbu slijedi:

$$A(z)(z - 1)R(z) + B(z)S(z) = A^*(z)R(z) + B(z)S(z) = A_{cl}(z), \quad (6-32)$$

gdje je $A^*(z) = (z - 1)A(z)$. Regulator minimalnog reda koji zadovoljava Diophantsku jednadžbu u ovom slučaju treba zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\deg R = \deg S = \deg T = \deg A^* - 1 = \deg A + 1 - 1 = n, \quad (6-33)$$

$$\deg A_m = \det A^* = n + 1. \quad (6-34)$$

Daljnji je postupak identičan kao u slučaju kada nema integralnog djelovanja.

6.3.2 Proširenje postojećeg polinomskog regulatora

Rješenje Diophantske jednadžbe nije jedinstveno već postoji beskonačno rješenja koja zadovoljavaju jednadžbu. Ta se činjenica može iskoristiti za proširenje regulatora integralnim djelovanjem. Prepostavimo da je napravljena sinteza polinomskog regulatora bez integralnog djelovanja te da dobiveno rješenje zadovoljava jednadžbu:

$$A(z)R^0(z) + B(z)S^0(z) = A_m(z)A_o(z) \quad (6-35)$$

Neka su polinomi $U(z)$ i $V(z)$ takvi da zadovoljavaju jednadžbu:

$$A(z)U(z) + B(z)V(z) = 0. \quad (6-36)$$

U tom slučaju polinomi:

$$\forall X(z), Y(z) \quad R(z) = X(z)R^0(z) + Y(z)U(z), \quad (6-37)$$

$$\forall X(z), Y(z) \quad S(z) = X(z)S^0(z) + Y(z)V(z), \quad (6-38)$$

zadovoljavaju jednadžbu:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = X(z)(A(z)R^0(z) + B(z)S^0(z)) = X(z)A_c(z)A_o(z) \quad (6-39)$$

Jedno očito rješenje jednadžbe (6-36) je $U(z) = B(z)$ i $V(z) = A(z)$, pa su prema tome polinomi:

$$R(z) = X(z)R^0(z) + Y(z)B(z), \quad (6-40)$$

$$S(z) = X(z)S^0(z) + Y(z)A(z), \quad (6-41)$$

također rješenja Diophantnske jednadžbe. Budući da je cilj dodati integralno djelovanje u regulator tada mora vrijediti $R(z=1) = 0$, odnosno:

$$R(1) = X(1)R^0(1) + Y(1)B(1). \quad (6-42)$$

Iz prethodne jednadžbe slijedi da se za $Y(z)$ može odabratи:

$$Y(z) = Y(1) = \frac{X(1)R^0(1)}{B(1)}. \quad (6-43)$$

Prema tome, polinomski regulator uz dodatno integralno djelovanje ima sljedeći oblik:

$$R(z) = X(z)R^0(z) + \frac{X(1)R^0(1)}{B(1)}B(z), \quad (6-44)$$

$$S(z) = X(z)S^0(z) + \frac{X(1)R^0(1)}{B(1)}A(z), \quad (6-45)$$

Kako dodatni polovi u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga, definirani polinomom $X(z)$, ne bi utjecali na vladanje sustava prema referentnoj veličini može ih se smatrati dodatnim observerskim polovima te ih stoga dodati u polinom $T(z)$ kako bi se pokratili:

$$T(z) = T^0(z)X(z). \quad (6-46)$$

Ukoliko se dodaje samo jedno integralno djelovanje tada je dovoljno da polinom $X(z)$ bude prvo reda:

$$X(z) = z + x_1. \quad (6-47)$$

Na opisani način moguće je modificirati i ostale karakteristike regulatora (vladanje s obzirom na poremećaj, robusnost na modelske neodređenosti) a da se pritom vladanje s obzirom na vodeću veličinu ne mijenja.

6.4 Kraćenje polova i nula

Prikazani postupak sinteze prepostavlja da nema kraćenja polova i nula procesa s nulama i polovima regulatora. Međutim, ako proces sadrži stabilne i dobro prigušene polove i nule tada se one mogu pokratiti i time se postupak sinteze značajno pojednostavljuje, odnosno dobiva se Diophantska jednadžba nižeg reda.

Pretpostavimo da se polinomi $A(z)$ i $B(z)$ u prijenosnoj funkciji procesa mogu prikazati:

$$A(z) = A^+(z)A^-(z), \quad (6-48)$$

$$B(z) = B^+(z)B^-(z), \quad (6-49)$$

U tom slučaju polinomi regulatora također trebaju sadržavati sljedeće faktore:

$$R(z) = B^+(z)\bar{R}(z), \quad (6-50)$$

$$S(z) = A^+(z)\bar{S}(z), \quad (6-51)$$

$$T(z) = A^+(z)\bar{T}(z). \quad (6-52)$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A^+(z)A^-(z)B^+(z)\bar{R}(z) + B^+(z)B^-(z)A^+(z)\bar{S}(z) \quad (6-53)$$

Iz prethodnog izraz slijedi:

$$A^+(z)B^+(z)[A^-(z)\bar{R}(z) + B^-(z)\bar{S}(z)] = A^+(z)B^+(z)\bar{A}_m(z)\bar{A}_o(z) \quad (6-54)$$

S druge strane, za polinom u brojniku prijenosne funkcije zatvorenog kruga vrijedi:

$$B(z)T(z) = B^+(z)B^-(z)A^+(z)\bar{T}(z) = B_m(z)A_o(z) \quad (6-55)$$

odakle slijedi:

$$A^+(z)B^+(z)B^-(z)\bar{T}(z) = A^+(z)B^+(z)\bar{B}_m(z)\bar{A}_o(z) \quad (6-56)$$

Pritom su:

$$A_o(z) = A^+(z)\bar{A}_o(z)$$

$$A_m(z) = B^+(z)\bar{A}_m(z)$$

$$B_m(z) = B^+(z)\bar{B}_m(z)$$

Dakle, očito je da se sada dobiva Diofantova jednadžba niže reda:

$$A^-(z)\bar{R}(z) + B^-(z)\bar{S}(z) = \bar{A}_m(z)\bar{A}_o(z), \quad (6-57)$$

koja sadržava samo polove i nule procesa koji se ne smiju pokratiti.

6.5 Odabir observerskog polinoma

Prilikom izvoda polinomskog regulatora u ovom poglavlju observerski polinom je uveden kako bi se mogla zadovoljiti Diophantova jednadžba. Osim ovog čisto numeričkog obajšnjenja, postoji i druga interpretacija ovog polinoma. Naime, usporedbom s upravljanjem po varijablama stanja, gdje također postavljamo sve polove na željene lokacije, može se zaključiti da je observerski polinom uveden s ciljem implicitne estimacije nemjerljivih stanja sustava, kojih je upravo $n - 1$. Otuda dolazi i naziv observeski polinom.

Slično kao i kod klasičnih estimatora za linearne sustave (npr. Luenbergerov estimator) dinamika observerskog polinoma se postavlja višestruko bržom od željene dinamike zatvorenog kruga. Iz tog se razloga observeski polinom često odabire na način da su mu sve nultočke u ishodištu, u kom slučaju govorimo o tzv. dead-beat observeskom polinomu. Bitno je napomenuti da takav odabir observeskog polinoma često nije prikladan ukoliko je izraženo djelovanje mjernog šuma, odnosno ukoliko postoje modelske neodređenosti. U takvim je slučajevima potrebno odstupiti od standardnog odabira na način da se jedan ili više polova postavi izvan ishodišta kompleksne z -ravnine. U tom se slučaju postiže značajno robusnije vladanje s obzirom na mjerne šume odnosno modelske neodređenosti, uz istovremeno usporavanje kompenzacije poremećaja. Kod upravljanja elektromotornim pogonima čest odabir koji osigurava zadovoljavajuću razinu robusnosti sastoji se u tome da se jedan pol observeskog polinoma postavi izvan ishodišta, u intervalu $(0, 1/3 T_e)$, dok se ostali polovi zadrže u ishodištu. Ako prepostavimo red observeskog polinoma $\deg A_o = n - 1$, tada bi takav odabir glasio:

$$A_o(z) = z^{n-2} \left(z - e^{-\frac{T}{T_o}} \right), \quad (6-58)$$

pri čemu $T_o \in (0, T_e/3)$.



PRIMJER 6.1 Utjecaj odabira observeskog polinoma

Razmotrimo problem upravljanja dvomasenim elektromehaničkim sustavom uz izraženu elastičnost sprega pogona i tereta za slučaj postojanja modelskih neodređenosti. Prepostaviti ćemo da postoji neodređenost modela podređene upravljačke petlje po struji armature, tj. da je stvarna vri-

jednost vremenske konstante T_{ei} za 30% veća u odnosu na pretpostavljenu (nominalnu) vrijednost T_{ei0} .

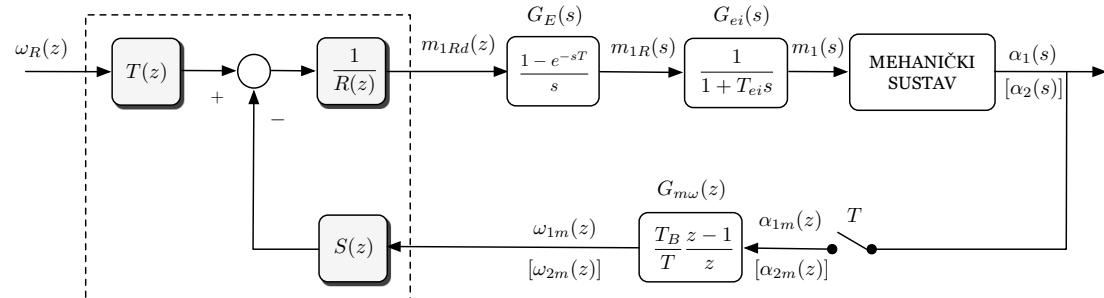
RJEŠENJE:

Polinomski regulator projektiramo uz pretpostavku nominalnog iznosa vremenske konstante podređenog kruga po struji armature $T_{ei} = T_{ei0}$. Pritom će se razmotriti vladanje sustava upravljanja uz dva različita izbora observerskog polinoma: (i) dead-beat observerski polinom i (ii) uz jedan pol observerskog polinoma izmješten iz ishodišta.

6.6 Upravljanje brzinom vrtnje tereta uz izraženu elastičnost prijenosa

Blokovaška shema upravljanja elastičnim elektromehaničkim sustavom prikazana je na slici 6.2. Pritom će se razmatrati dva slučaja i to:

- a) uz povratnu vezu po brzini tereta ω_2 ,
- b) uz povratnu vezu po brzini motora ω_1 .



Slika 6.2. Blokovaška shema upravljanja elastičnim elektromehaničkim sustavom s RST regulatorom

Povratna velačina po brzini tereta Polazište za sintezu regulatora prijenosna je funkcija brzine tereta po upravljačkoj veličini, tj. referenci momenta za podređenu upravljačku petlju. Pritom se do signala brzine (motora ili tereta) dolazi diferenciranjem signala pozicije motora ili tereta. Stoga se tražena prijenosna funkcija dobiva kao:

$$\frac{\omega_2(z)}{m_{1rd}(z)} = \frac{\alpha_2(z)}{m_{1rd}} \frac{\omega_2(z)}{\alpha_2(z)}. \quad (6-59)$$

$$\frac{\omega_2(z)}{m_{1rd}(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_{ei}(s) G_{21}(s) G_{\alpha\omega}(s)}{s} \right\} G_{m\omega}(z). \quad (6-60)$$

Navedena prijenosna funkcija petog je reda i ima oblik:

$$\frac{\omega_2(z)}{m_{1rd}(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4}{1 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + a_5z^5} \quad (6-61)$$

U postupku sinteze polinomskog regulatora cilj je odrediti polinome $R(z)$, $S(z)$ i $T(z)$ kako bi se zadovoljila sljedeća jednadžba:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_m(z)A_o(z) \quad (6-62)$$

Polinomski regulator minimalnog reda zadovoljava sljedeće uvjete:

$$\deg R = \deg S = \deg T = n - 1 = 4, \quad (6-63)$$

pri čemu je n red polinoma $A(z)$. Željeno vladanje zatvorenog regulacijskog kruga definira se pomoću regulatorskog $A_m(z)$ i observerskog $A_o(z)$ polinoma čiji su redovi:

$$\deg A_m = \deg A = n = 5, \quad \deg A_o = n - 1 = 4 \quad (6-64)$$

Ukoliko se regulatorom želi dodatno osigurati točnost u ustaljenom stanju uvođenjem integralnog djelovanja tada se red regulatora povećava za 1 te vrijedi:

$$\boxed{\deg R = \deg S = \deg T = \deg A_m = \deg A_o = 5, \quad (6-65)}$$

Povratna veza po brzini motora U slučaju da se koristi povratna veza po brzini motora prijenosna funkcija procesa ima oblik:

$$G_{p\omega}^*(z) = \frac{\omega_{1m}(z)}{m_{1Rd}(z)} = G_{m\omega}(z) \cdot G_E G_{ei} G_{ll} G_{\alpha\omega}(z) = \frac{B^*(z)}{A(z)}, \quad (6-66)$$

što povlači da je postupak sinteze jednak kao u slučaju povratne veze po brzine vrnje tereta, s tim da se $B(z)$, zamjeni s $B^*(z)$. Ako sada razmotrimo prijenosnu funkciju zatvorenog kruga preko brzine vrnje tereta ona se može zapisati kao:

$$G_{z\omega 2}^*(z) = \frac{\omega_{2m}(z)}{\omega_R(z)} = \frac{\omega_{2m}(z)}{m_{1R}(z)} \frac{m_{1R}(z)}{\omega_{1m}(z)} \frac{\omega_{1m}(z)}{\omega_R(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{A(z)}{B^*(z)} \frac{B_M^*(z)}{A_M^*(z)}. \quad (6-67)$$

Budući da polinom $B_m^*(z)$ odabiremo kao $B_m^*(z) = A_m^*(1)/B^*(1) \cdot B^*(z)$, uvrštavanjem u pretvodni izraz slijedi:

$$G_{z\omega 2}^*(z) = \frac{A_m^*(1)}{B^*(1)} \frac{B(z)}{A_m^*(z)}. \quad (6-68)$$

Uzevši u obzir da vrijedi $B^*(1) = B(1)$ (jednako statičko pojačanje procesa) te, ukoliko odabremo jednak željeni karakteristični polinom $A_m^*(z) = A_m(z)$ slijedi:

$$G_m^*(z) = \frac{\omega_1(z)}{\omega_R(z)} = G_m(z), \quad (6-69)$$

što nas dovodi do sljedećeg zaključka: **Odziv brzine vrtnje tereta ω_2 jednak je bez obzira da li se povratna veza izvodi po brzini vrtnje motora ili tereta, uz uvjet da se izaberu jednaki karakteristični polinomi modelske prijenosne funkcije: $A_m^*(z) = A_m(z)$.**

6.6.1 Karakteristični polinom modelske prijenosne funkcije

Karakteristični polinom $A_m(z)$ modelske prijenosne funkcije:

$$A_M(z) = \prod_{i=1}^5 (z - z_i) = (z - z_1) \cdots (z - z_5), \quad (6-70)$$

dobije se izravnim preslikavanjem polova karakterističnog polinoma za kontinuirani slučaj koji je određen s nadomjesnom vremenskom konstantom T_e i karakterističnim odnosima D_2, \dots, D_5 :

$$A_{Mc}(s) = D_5 D_4^2 D_3^3 D_2^4 T_e^5 s^5 + D_4 D_3^2 D_2^3 T_e^4 s^4 + D_3 D_2^2 T_e^3 s^3 + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1. \quad (6-71)$$

Pojedini z_i se dobiju korištenjem sljedeće relacije:

$$z_i = e^{s_i T}, \quad (6-72)$$

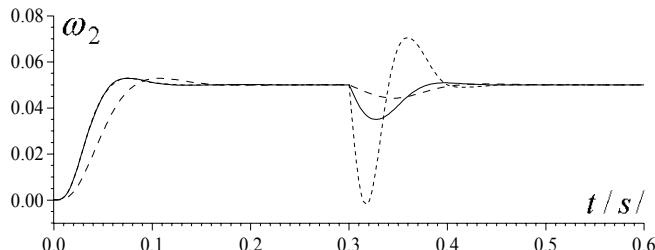
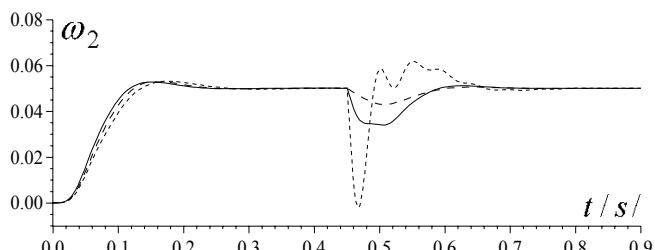
gdje je T vrijeme diskretizacije.

Nadomjesnu vremensku konstantu T_e treba postaviti na što niži iznos - što brži odziv regulacijskog kruga i što efikasnija kompenzacija utjecaja momenta tereta, uvažavajući pritom dodatno i zahtjeve za :

- umjerenim forsiranjem izvršne veličine,
- niskom osjetljivošću na mjerni šum,
- niskom osjetljivošću na pogreške modeliranja regulacijskog kruga struje.

6.6.2 Rezultati simulacija

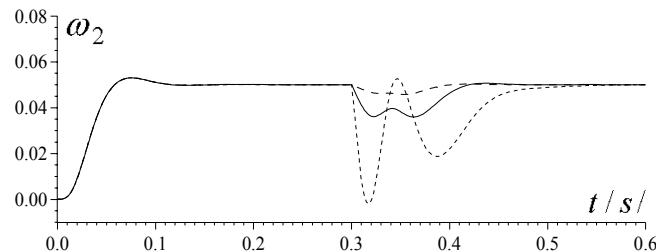
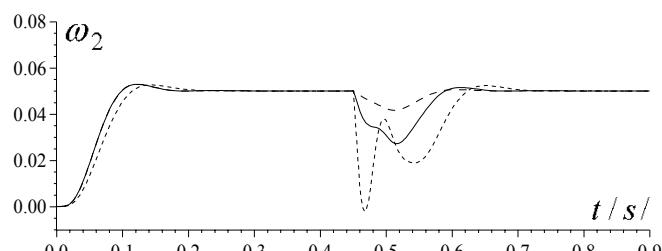
U ovom se odjeljku daju rezultati simulacijskih provjera algoritama upravljanja zasnovanih na polinomskom regulatoru. Pritom se uspoređuju rezultati upravljanja korištenjem povratne veze po brzini motora, odnosno brzini tereta. Za svaki od tih slučajeva obavljene su simulacije uz

(a) Odziv brzine vrtnje tereta uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$ (b) Odziv brzine vrtnje tereta uz srednje krutu spregu $r_{EM} = 1$

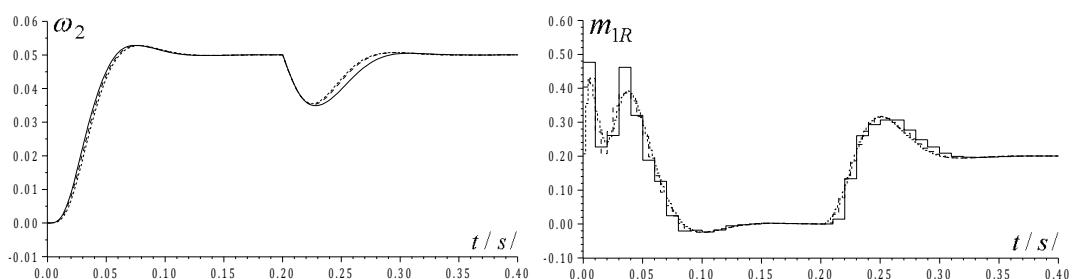
Slika 6.3. Odzivi brzine vrtnje tereta uz polinomski regulator po brzini motora ω_1 za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M ($r_M = 0.2$ - crtkana linija, $r_M = 0.1$ - puna linija, $r_M = 5$ - točkasta linija)

različite odnose frekvencija $r_{EM} = [0.3, 1]$ i odnose momenata tromosti na pogonskoj i opteretnoj strani $r_M = [0.2, 1, 5]$ (slike 6.3 i 6.4). Također su dodatno napravljene simulacije uz različita vremena uzorkovanja T (slike 6.5 i 6.6), kao i uz različite odabire observerskog polinoma $A_o(z)$ (slika 6.7)

Iz odziva je vidljivo da smanjenje vremena uzorkovanja praktički vrlo malo utječe na vladanje sustava upravljanja u slučaju povratne veze po brzini motora. S druge strane, u slučaju povratne veze po brzini tereta smanjenje vremena uzorkovanja ima za posljedicu bolju kompenzaciju poremećaja ali istovremeno uz značajno forsiranje sustava (upravljački signal na slici 6.6 b)), što rezultira brzom izgradnjom momenta motora m , smanjujući tako propad brzine vrtnje tereta uslijed udarnog opterećenja. Sa slike 6.7 razvidan je utjecaj izmještanja pola observerskog polinoma izvan ishodišta $z_i = e^{-T/T_o}$, što rezultira usporenjem kompenzacije djelovanja momenta tereta. S druge strane, odabir observerskog polinoma nema utjecaja na vladanje po vodećoj (referentnoj) veličini, budući da se ne pojavljuje u odgovarajućoj prijenosnoj funkciji brzine vrtnje tereta prema referentnoj veličini.

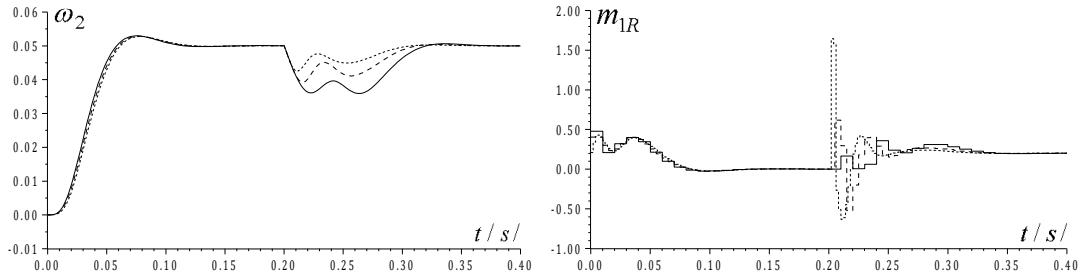
(a) Odziv brzine vrtnje tereta uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$ (b) Odziv brzine vrtnje tereta uz srednje krutu spregu $r_{EM} = 1$

Slika 6.4. Odzivi brzine vrtnje tereta uz polinomski regulator po brzini tereta ω_2 za različite iznose odnosa r_{EM} i r_M ($r_M = 0.2$ - crtkana linija, $r_M = 0.1$ - puna linija, $r_M = 5$ - točkasta linija)

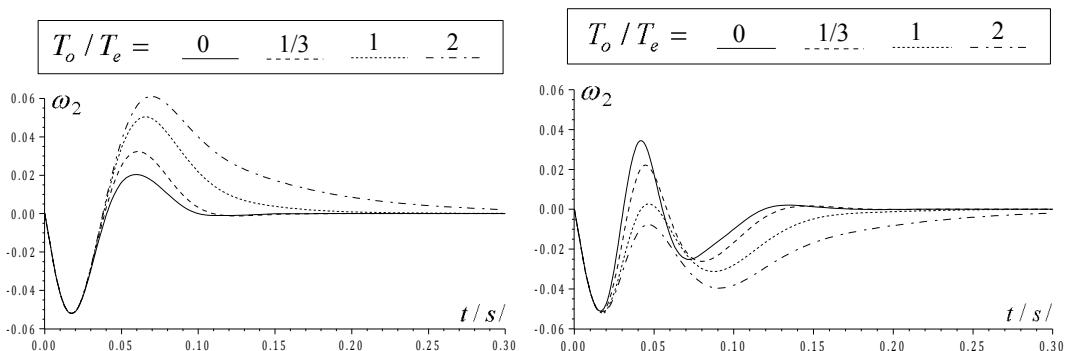


(a) Odziv brzine vrtnje tereta uz meku spregu $r_{EM} = 0.3$ (b) Odziv upravljačkog signala m_{1R} uz meku spregu i $r_M = 1$

Slika 6.5. Odzivi brzine vrtnje tereta i upravljačkog signala (referentnog momenta) uz polinomski regulator po brzini motora ω_1 za različite iznose vremena uzorkovanja T ($T = 1/\Omega_0$ - puna linija, $T = 1/(2\Omega_0)$ - crtkana linija, $T = 1/(5\Omega_0)$ - točkasta linija)



Slika 6.6. Odzivi brzine vrtnje tereta i upravljačkog signala (referentnog momenta) uz polinomski regulator po brzini tereta ω_2 za različite iznose vremena uzorkovanja T ($T = 1/\Omega_0$ - puna linija, $T = 1/(2\Omega_0)$ - crtkana linija, $T = 1/(5\Omega_0)$ - točkasta linija)



Slika 6.7. Odziv brzine vrtnje tereta uz različite iznose pola oberverskog polinoma izmještenog izvan ishodišta

Trenje u elektromotornim pogonima

7.1 Definicija i vrste trenje

Trenje predstavlja tangencijalnu reakcijsku silu koja se javlja između dva tijela koja su kontaktu. Prema standardu DIN 5281 ono se definira kao otpor koji se javlja između površina nalijeganja dvaju tijela i suprotstavlja se međusobnom gibanju bilo klizanjem, bilo kotrljanjem ili valjanjem (trenje gibanja - kinetičko trenje), ili onemogućuje gibanje (trenje mirovanja - statičko trenje). Općenito se razlikuju tri vrste trenje.

Trenje klizanja se javlja kada translacijske komponente brzina v_1 i v_2 za točke dvaju tijela (1 i 2) u kontaktu nisu jednake, odnosno postoji relativna brzina među njima.

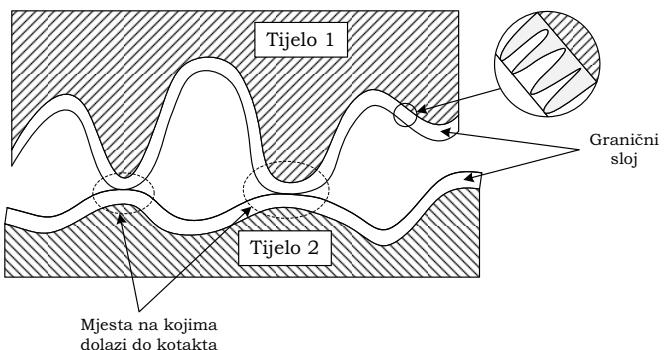
Trenje kotrljanja javlja se u slučajevima kada je kontakt ostvaren u jednoj točki odnosno liniji, a relativno gibanje sadrži rotacijsko gibanje s polom P u točki kontakta u kojoj leži pol rotacije. Pri tome su translacijske komponente brzine u točki dodira jednog i drugog tijela jednake. Kod kotrljanja, na mjestu dodira dvaju tijela teoretski nema relativnog gibanja. U realnom kontaktu, uslijed deformacije na mjestu dodira dolazi do relativnog gibanja pri ulasku u kontakt odnosno izlasku iz kontakta. Na mjestu ulaska u kontakt vlada tlačno naprezanje, dok na mjestu izlaska iz kontakta vlada vlačno naprezanje. Tlačno naprezanje potpomaže stvaranje kohezivnih veza koje se u području vlačnog naprezanja razbijaju. Silu trenja možemo promatrati kao posljedicu nesimetričnog deformiranja podloge uslijed stvaranja i razbijanja veza. Kod trenja kotrljanja nema izraženog statičkog trenja što se može objasniti polaganim ulaženjem i izlaženjem u i iz kontakta. Ovo je ujedno osnovna razlika između trenja klizanja i trenja kotrljanja sa stanovišta upravljanja slijednim sustavima.

Trenje valjanja je kombinacija trenja klizanja i kotrljanja. Udio kotrljanja i klizanja unaprijed je određen kinematikom gibanja dvaju tijela koja su u kontaktu. Ovakav oblik trenja javlja se u

valjnim ležajevima, među zubima zupčanika i sl.

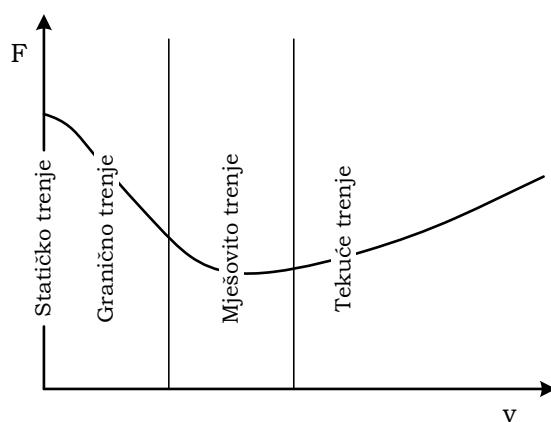
7.2 Priroda nastanka trenja

Kako bi se razumjeli mehanizma koji stoje iza tog fenomena potrebno je promatrati dodirnu površinu dvaju tijela na mikroskopskoj razini. Pojednostavljeni prikaz dodirne površine dvaju tijela prikazan je na slici 7.1. Površina tijela je obično hrapava i prekrivena graničnim slojem asperitnih vlakana. Stvarni se kontakt između tijela ostvaruje preko niza asperitnih veza, a ne cijelom (geometrijskom) dodirnom površinom. Pod djelovanjem tangencijalne sile dolazi do smicanja asperitnih veza što rezultira njihovim elastičnim i plastičnim deformacijama.



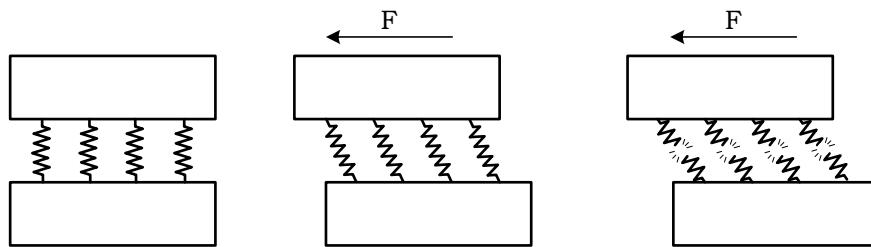
Slika 7.1. Mikroskopski pogled na dodirnu površinu dvaju tijela

Mehanizam stvaranja sile trenja tipično se može promatrati u četiri područja odnosno režima ovisno o iznosu relativne brzine: staticko trenje, granično trenje, mješovito trenje i tekuće trenje (slika 7.2).



Slika 7.2. Četiri tipična područja na karakteristici ovisnosti sile trenja o relativnoj brzini

Statičko trenje podrazumijeva da ne postoji relativno gibanje te stoga postoji izravan kontakt između dodirnih površina. Sa stanovišta upravljanja bitna karakteristika asperitnih veza je njihovo elastično savijanje. Ukoliko je narinuta sila manja od čvrstoće asperitnih veza, sustav se ponaša kao da je među dodirne površine umetnuto niz opruga velike krutosti (slika 7.3). Druga bitna karakteristika statičkog trenja je polagana plastična deformacija asperitnih vlakana. Kao posljedica polagane plastične deformacije kontaktna se površina među asperitima povećava, to povećanje je veće s povećanjem vremena provedenog u mirovanju. Povećanje površine asperitnih veza rezultira većom čvrstoćom samih veza. Slijedi da će sila potrebna za razaranje asperitnih veza, odnosno pokretanje, biti to veća što su dodirne površine više vremena provele u mirovanju.



Slika 7.3. Aproksimacija dodirne površine dvaju tijela pomoću niza opruga u režimu statičkog trenja

Granično trenje U ovom režimu dolazi do relativnog gibanja, ali je zbog male brzine izgled kontakta sličan kontaktu u mirovanju. Uloga maziva ne dolazi do izražaja, jer relativna brzina nije dovoljna da se izgradi potrebnii film maziva koji bi razdvojio površine u kontaktu. Zbog toga dolazi do direktnog dodira graničnih slojeva što u njima izaziva smično naprezanje. Smična čvrstoća graničnog sloja kao krute tvari je višestruko veća od one koja se javlja u mazivima kao fluidu, pa je i sila trenja koja se javlja u režimu graničnog trenja relativno velikog iznosa. Zbog izravnog kontakta, trošenje površina je intenzivno pa se vrijeme zadržavanja u ovom režimu nastoji svesti na najmanju moguću mjeru.

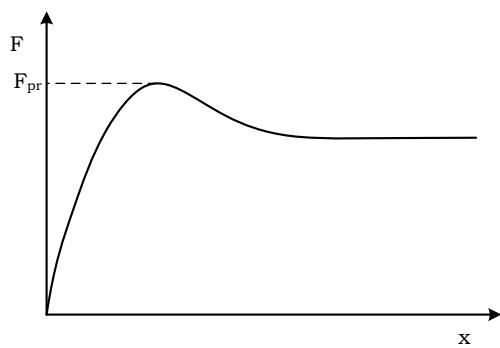
Mješovito trenje Porastom iznosa relativne brzine gibanja viskozna sila maziva je dovoljna da onemogući potpuno istiskivanje maziva iz područja kontakta. Povećanje količine maziva u području kontakta smanjuje površinu direktnog kontakta, a time i silu trenja. Količina maziva koja se nalazi u području kontakta ovisi o relativnoj brzini, viskoznosti maziva i geometrije kontaktnih površina. Debljina mazivog filma raste s porastom relativne brzine i viskoziteta maziva. Ovo područje traje sve do trenutka kada relativna brzina naraste do iznosa potrebnog za formiranje mazivog filma čija je debljina veća od visine asperita. U tom trenutku dolazi do potpunog razdvajanja kontaktnih površina, a time i četvrtog režima tekućeg podmazivanja.

Tekuće trenje Priroda tekućeg trenja ovisi o tome radi li se o konformnom kontaktu, gdje se javlja hidrodinamičko trenje, ili nekonformnom kontaktu s elastohidrodinamičkim trenjem. U konformnom kontaktu, a zbog relativne brzine, mazivo se utiskuje u prostor između dvaju tijela, stvarajući film maziva koji je deblji od visine asperita pa je isključen bilo kakav kontakt između tijela. Smicanje u mazivu je jedini izvor sile trenja. Kako su sile smicanja u mazivu višestruko manje od sila smicanja u graničnom sloju materijala, trenje u režimu tekućeg trenja je minimalno. Kako je bilo kakav kontakt među dodirnim površinama isključen trošenje je u ovom režimu zanemarivo.

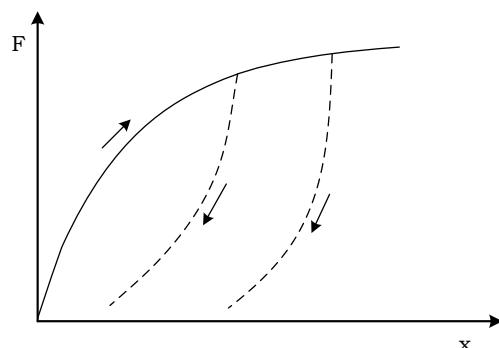
7.3 Statičko trenje i prijelomna sila

Trenje koje postoji kada se tijelo nalazi u stanju mirovanja predstavlja statičko trenje odnosno trenje mirovanja. Kako bi se tijelo pokrenulo potrebno je primijeniti odgovarajuću vanjsku силу koja će savladati statičko trenje i ta se sila najčešće naziva prekidnom silom (engl. break-away force). Problem statičkog trenja počeo se intenzivno istraživati polovicom prošlog stoljeća budući da se došlo do zaključka da se prijelaz tijela iz stanja mirovanja u stanje klizanja ne može na zadovoljavajući način opisati funkcijom relativne brzine v . Umjesto toga, za opis ponašanja sile trenja u stanju mirovanja koristi se funkcija pomaka x do koje se došlo eksperimentalnim putem i čiji je oblik prikazan na slici 7.4. Pritom prekidna sila F_{pr} predstavlja vršnu vrijednost na toj karakteristici.

Bitno je primijetiti da je ova ovisnost skoro linearna u početnom dijelu karakteristike te se stoga kontakt može aproksimirati nizom opruga kako je prikazano na slici 7.3. Prilikom djelovanja vanjske sile te se opruge elastično deformiraju. Međutim nakon određenog iznosa pomaka x dolazi do pojave plastične deformacije asperitnih vlakana te je u tom slučaju taj proces istezanja ireverzibilan, što je ilustrirano na slici 7.5. Pritom karakteristika prikazana na slici 7.5 predstavlja početni dio karakteristike 7.4.



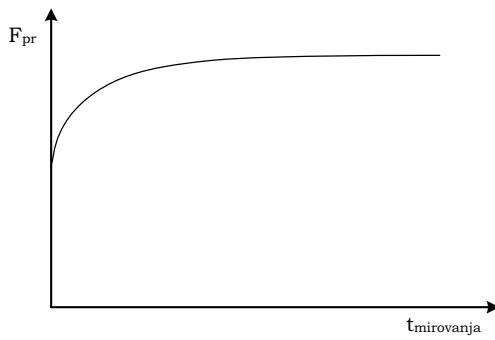
Slika 7.4. Ovisnost sile trenja o iznosu pomaka x



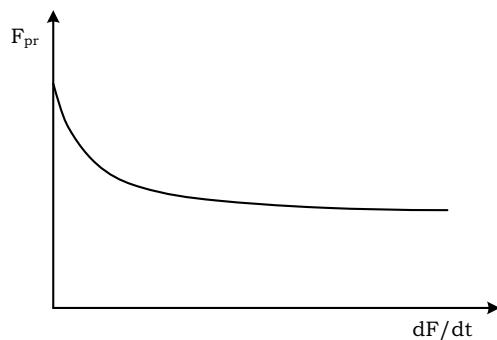
Slika 7.5. Ilustracija ireverzibilnosti procesa istezanja asperitnih vlakana

Dodatne spoznaje do kojih se došlo odnose se na ovisnost iznosa prekidne sile o vremenu

provedenom u mirovanju i pokazuje se da je prekidna sila to veća što je veće vrijeme koje je tijelo provelo u mirovanju. Također je uočeno da je iznos prekidne sile ovisan i o brzini primjene vanjske sile tj. o njenoj derivaciji (slika 7.7).



Slika 7.6. Ovisnost prekidne sile o vremenu provedenom u mirovanju



Slika 7.7. Ovisnost prekidne sile o vremenskoj derivaciji primijenjene sile

7.4 Modeli trenja

Začeci istraživanja fenomena trenja sežu u 15. stoljeće i radove Leonarda da Vinciјa koji je uveo dva osnovna zakona trenja. Prema prvom zakonu sila trenja proporcionalna je normalnoj sili kojom tijelo pritiše podlogu, dok prema drugom zakonu dodirna površina ne utječe na iznos sile trenja. Posebno značajan doprinos razumijevanju ovog fenomena dao je Charles Augustin Coulomb 1781. godine koji je primarni uzrok trenja pripisao hrapavosti površine tijela koja su u kontaktu. Potvrda ove teze o uzroku pojave sile trenja dana je 40-ih godina prošlog stoljeća kada je ustanovljeno da postoji značajna razlika između geometrijskog i stvarnog kontakta dvaju tijela što je izravno povezano sa stupnjem hrapavosti njihovih površina. Stvarni se kontakt ostvaruje preko velikog broja asperitnih elastičnih veza odnosno vlakana koja se formiraju u kontantnoj površini dvaju tijela. Upravo tangencijalna sila koja je potrebna za kidanje ovih asperitnih veza predstavlja silu trenja.

Statičko trenje ili trenje mirovanja (engl. static friction, stiction) predstavlja silu trenja kada je relativna brzina između dvaju tijela u kontaktu približno nula, tj. nema primjetnog pomaka između tijela. 1902. godine Stribeck je, umjesto diskontinuiranog prijelaza, uveo je kontinuirani prijelaz između statičkog i dinamičkog trenja. Ovaj se efekt obično u literaturi naziva Stribeckov efekt.

7.4.1 Statički modeli trenja

Pod statičkim modelima trenja obično se podrazumijevaju modeli koji daju funkciju ovisnost sile trenja o relativnoj brzini dvaju tijela koja su u kontaktu. Za razliku od dinamičkih modela

ovi modeli nemaju uključen nikakav oblik memorije.

Klasični modeli trenja

Klasični modeli trenja obično se sastoje od više različitih komponenti od kojih svaka uzima u obzir određeni aspekt sile trenja.

Coulombovo trenje predstavlja силу тренажа која се сумирају у релативном покрету двије тела која су у контакту. Извесна сила тренажа је пропорционална нормалној (окојитој) сили и не зависи од износу додирне површине, како је то описано следећим изразом:

$$F = F_C \operatorname{sgn}(\nu), \quad (7-1)$$

при чему је F_C сила тренажа пропорционална износу нормалне сile F_N , tj. $F_C = \mu F_N$. Очito је да је износ сile Coulombova тренажа не зависи од износу релативне брзине. Када се овим моделом дефинира износ сile тренажа за све релативне брзине осим за $\nu = 0$ често се ова врста тренажа назива и кинетичким тренажем. Извесна сила тренажа за $\nu = 0$ зависи од дефиниције функције предznaka $\operatorname{sgn}(\nu)$. Управо ова неодређеност износа сile тренажа при $\nu = 0$ представља његов највећи недостатак.

Viskozno trenje У 19. столjećу с развојем теорије хидродинамике дошло се до описа сile тренажа која се позиционише вискоznosću материјала. Ова компонента сile тренажа обично назива вискоznim тренажем и описана је следећим изразом:

$$F = F_v \nu, \quad (7-2)$$

Често се као модел тренажа користи комбинација Coulombovog и вискоznog тренажа чија је статичка карактеристика приказана на слици 7.8 b). С циљем да се ова комбинација користи у експериментима за опис вискоznog тренажа понекад се користи и следећа модификација модела вискоznog тренажа:

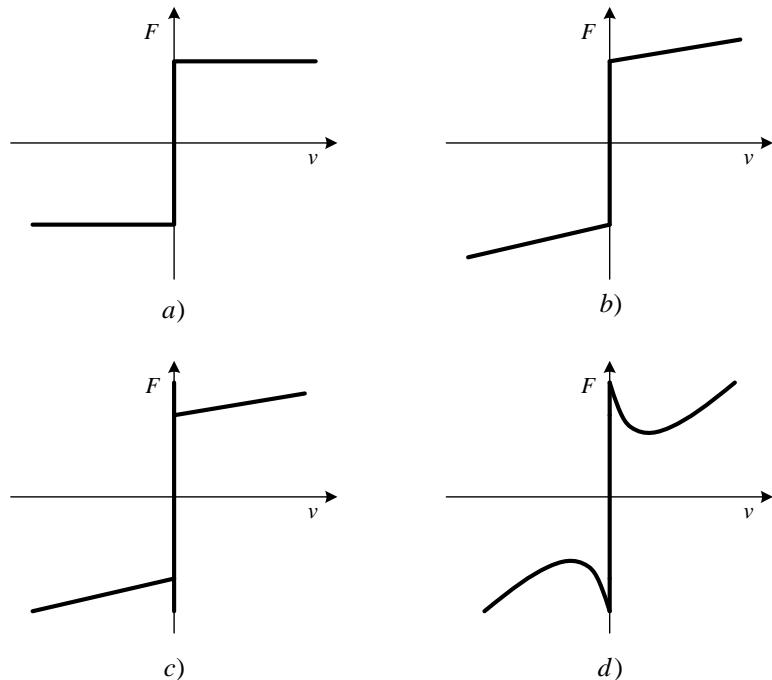
$$F = F_v |\nu|^{\delta_v} \operatorname{sgn}(\nu), \quad (7-3)$$

при чему је δ_v empirijski параметар чији износ зависи од подручја примјене самог модела.

Статичко тренаже Опис сile тренажа комбинацијом Coulombovog и вискоznog тренажа предпоставља да је апсолутни износ сile тренажа најмањи у мirovanju, tj. при $\nu = 0$. То је, међутим, у колизији с експерименталним подацима који указују да износ сile тренажа у мirovanju значајно премашује износ Coulombovog тренажа F_C . Овај је ефект први истраживао француски зnanstvenik A.C. Morin¹ у првој половини 19. столjeća да би посебно интензивно ефект статичког тренажа bio истражivan 50-ih

¹Arthur Jules Morin, 1795 - 1880, француски зnanstvenik i general francuske vojske. Ефект тренажа истраживао је у раздобљу од 1831 до 1835 под mentorstvom Jean Victor Ponceleta

godina prošlog stoljeća. Ako je tijelo u mirovanju potrebna je vanjska sila jednaka ili veća od sile statičkog trenja (trenja mirovanja) da bi se tijelo počelo gibati.



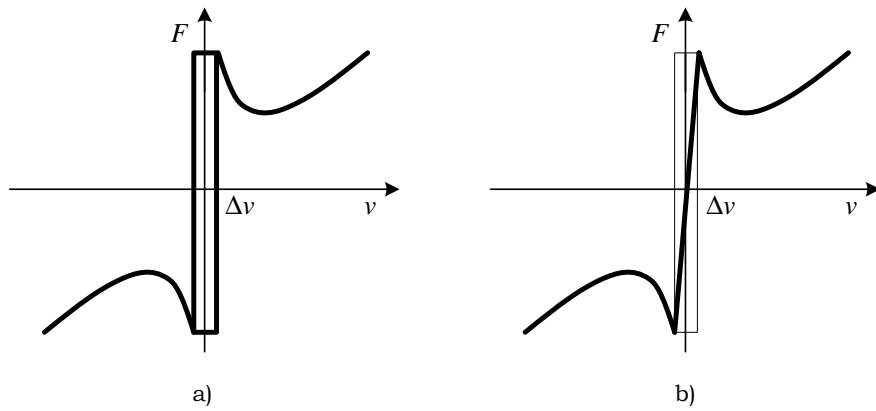
Slika 7.8. Različiti staticki modeli trenja

Stribeckovo trenje 1902. godine Stribeck je, umjesto diskontinuiranog prijelaza, uveo kontinuirani prijelaz između statičkog i dinamičkog trenja. Ovaj se efekt obično u literaturi naziva Stribeckov efekt.

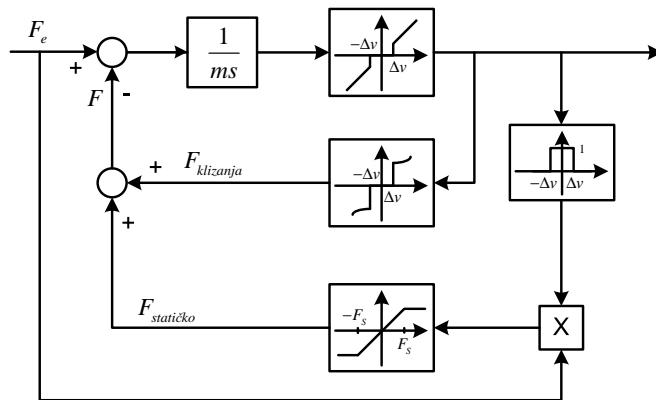
Karnoppov model

Osnovni je nedostatak prethodno opisanih modela trenja činjenica da je potrebno stalno detektirati slučajeve kada je relativna brzina jednaka nuli. Kako bi se izbjeglo često prekapčanje unutar spomenutog modela Karnopp je predložio korištenje zone neosjetljivosti, tj. intervala $|v| < \Delta v$ (slika 7.9 a)). Ako je relativna brzina gibanja unutar tog intervala smatra se da nema relativnog gibanja tijela u kontaktu.

Kako postojanje zone neosjetljivosti nije fizikalno često se koriste različite modifikacije ovog modela od kojih se najčešće koristi aproksimacija sile trenja vrlo strmim pravcem na intervalu $[-\Delta v, \Delta v]$ (slika 7.9 b)).



Slika 7.9. Karnoppov model trenja



Slika 7.10. Blokovska shema Karnoppovog modela trenja

7.4.2 Dinamički modeli trenja

U novije vrijeme sve veći značaj imaju dinamički modeli trenja prije svega zbog potrebe za što većom točnosti slijednih sustava, ali jednako tako i zbog bržeg razvoja sklopovlja koje omogućuje korištenje takvih složenijih modela.

Armstrongov model trenja

S ciljem da se uzmu u obzir i određena dinamička svojstva pojave trenja Armstrong je u svojem modelu uveo i vremensku ovisnost statičkog trenja i Stribeckovog efekta, ali pritom ne uzima u obzir pomake. Predloženi model trenja sastoji se od dva podmodela: jednog za opis statičkog trenja i drugog za opis kinetičkog trenja tj. trenja klizanja. U režimu statičkog trenja sila je trenja opisana izrazom:

$$F(x) = \sigma_0 x, \quad (7-4)$$

dok je u režimu kinetičkog trenja ona dana izrazom:

$$F(v, t) = \left(F_C + F_S(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + (\nu(t - \tau_l)/\nu_s)^2} \right) \operatorname{sgn}(\nu) + F_\nu \nu. \quad (7-5)$$

Pritom funkcija $F_S(\gamma, t_d)$ opisuje ovisnost iznosa statičke sile trenja o vremenu provedenom u stanju mirovanja (pogledati sliku 7.6) i dana je izrazom:

$$F_S(\gamma, t_d) = F_{S,a} + (F_{S,\infty} - F_{S,a}) \frac{t_d}{t_d + \gamma}. \quad (7-6)$$

Pritom t_d predstavlja vrijeme provedeno u stanju mirovanja, F_C Coulombovu silu trenja, F_S iznos statičke sile trenja.

Sam model ima sedam parametara koji se trebaju odrediti tijekom postupka identifikacije modela trenja, te se stoga ponekad u literaturi ovaj model nalazi i pod imenom "Model sa sedam parametara" (engl. Seven parameters model).

Dahlov model trenja

Dahlov model trenja razvijen je prije svega s ciljem primjene za analizu i sintezu sustava upravljanja. Model je inicijalno korišten za opis trenja u ležajevima. Model je obično dan u obliku diferencijalne jednadžbe koja opisuje položajnu ovisnost sile trenja:

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_C} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (7-7)$$

gdje je σ koeficijent čvrstoće, parametar α određuje oblik krivulje naprezanja, pri čemu je najčešći odabir za njegov iznos $\alpha = 1$. Vidljivo je da je iznos sile trenja ovisan isključivo o iznosu pomaka x i predznaku brzine v . Vremenska jednadžba koja opisuje vremensku ovisnost sile trenja na jednostavan se način dobije iz izraza (7-7):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_C} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha v, \quad (7-8)$$

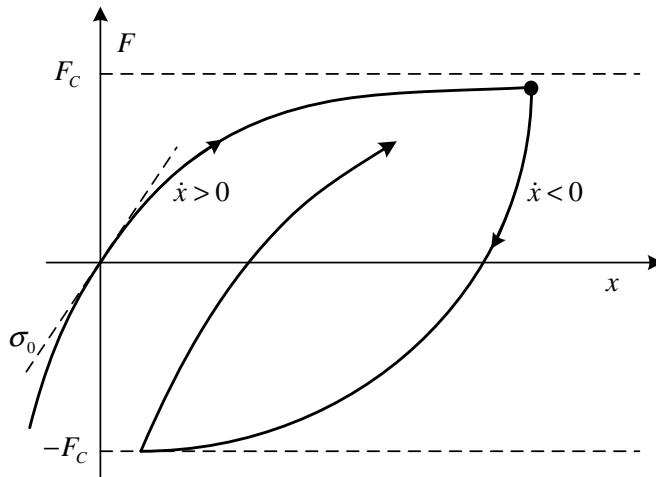
Za iznos koeficijenta $\alpha = 1$ Dahlov model poprima sljedeći oblik:

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_C} |v|, \quad (7-9)$$

odnosno nakon uvođenja sljedeće pokrate $F = \sigma z$.

$$\frac{z}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_C} z. \quad (7-10)$$

Osnovna je prednost Dahlovog modela mogućnost modeliranja mikropomaka u režimu prije



Slika 7.11. Ovisnost sile trenja o pomaku prema Dahlovom modelu

nego što nastupi klizanje (engl. presliding displacement). Iz oblika diferencijalne jednadžbe uočljivo je da model ne može modelirati čisto staticko trenje budući da je ono karakterizirano čistom elastičnom deformacijom asperitnih vlakana, te nakon prestanka djelovanja vanjske sile vlakna se vraćaju u prvobitni položaj.

Odgovarajuća staticka verzija Dahlovog modela dobije se izjednačavanjem vremenske $\frac{dz}{dt}$ s nulom:

$$\frac{dz}{dt} = \nu - \frac{\sigma|\nu|}{F_C}z = 0, \Rightarrow z = \frac{F_C\nu}{\sigma|\nu|}, \quad (7-11)$$

$$F = \sigma z = F_C \operatorname{sgn}(\nu). \quad (7-12)$$

Prema tome, u ustaljenom stanju Dahlov je model jednak Coulombovom modelu trenja.

Vlknasti model trenja

Vlknasti model trenja temelji se na razmatranju pojava u kontaktu dvaju tijela na mikroskopskoj razini. Usljed nepravilnosti dodirne površine dvaju tijela broj točaka u kojima se ostvaruje njihov kontakt kao i njihov raspored je slučajan. Pritom se pretpostavlja da se ovaj kontakt u svakoj od tih točaka ostvaruje preko niza elastičnih vlakana. Prilikom relativnog gibanja dvaju tijela koja su u kontaktu dolazi do istezanja ovih vlakana i pritom se generira sila čiji je iznos:

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0(x_i - b_i), \quad (7-13)$$

gdje je N broj vlakana, σ_0 koeficijent čvrstoće vlakana, x_i relativni položaj i -tog vlakna a b_i predstavlja lokaciju na kojoj je uspostavljen kontakt. Ukoliko je naprezanje manje od čvrstoće veze, dolazi samo do elastične deformacije vlakana. Kad iznos naprezanja pojedine veze prijeđe

njenu čvrstoću, dolazi do pucanja stare i uspostavljanja nove veze. Nova veza se javlja među vlknima smještenima na prvcima koji su otklonjeni od pravca gibanja te ne omogućuju čvrstoću prethodne veze. Broj veza ovisi o relativnoj brzini među kontaktnim površinama. Kako je sila trenja izravno ovisna o broju veza, njezin iznos je u funkciji relativne brzine. Simulacijama je utvrđeno da se zadovoljavajući rezultati dobivaju s relativno malim brojem veza (manje od 50). Ovaj model dobro opisuje slučajni karakter trenja, ali je neefikasan s obzirom na veliko vrijeme računanja.

Model trenja zasnovan na cikličkom integriranju

Kako bi se skratilo vrijeme računanja, a zadržala dobra svojstva u opisu fenomena trenja karakteristična za vlaknasti model, razvijen je model zasnovan na cikličkom integriranju (engl. *reset integrator model*). Istezanje vlakna opisano je sljedećom diferencijalnom jednadžbom prvog reda:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} v & |z| \leq z_m \\ 0 & |z| > z_m \end{cases}, \quad (7-14)$$

pri čemu je z_m granični iznos istezanja vlakna. Odgovarajuća sila trenja dana je izrazom:

$$F = (1 + a(v))\sigma_0(v)z + \sigma_1 \frac{dz}{dt}. \quad (7-15)$$

U prethodnom izrazu funkcija $a(v)$ određuje iznos sile trenja u području statickog trenja (trenja mirovanja) i dana je izrazom:

$$a(v) = \begin{cases} a & |z| \leq z_m \\ 0 & |z| > z_m \end{cases}. \quad (7-16)$$

LuGre model trenja

Polazište za LuGre model² trenja jest vlaknasti model trenja pri čemu se uvodi prosječno istezanje vlakna u kontaktu dvaju tijela. Umjesto razmatranja velikog broja vlakana preko kojih se ostvaruje kontakt, model pretpostavlja samo jedno vlakno. Pod djelovanjem tangencijalne sile vlakna će se istezati i na taj način generirati silu trenja. Kada istezanje dosegne granični iznos vlakna počinju klizati. LuGre model trenja dan je sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \frac{\sigma_0|v|}{g(v)}z, \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v, \end{aligned} \quad (7-17)$$

²Naziv LuGre modela trenja dolazi od početnih slova sveučilišta čiji su istraživači radili na njegovu razvoju - Lund i Grenoble.

pri čemu je z prosječno istezanje vlakana u kontaktu, σ_0 koeficijent čvrstoće vlakna, σ_1 koeficijent prigušenja vlakana, dok je $g(v)$ Stribeckova funkcija definirana kao:

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\sqrt{v/v_s}}, \quad (7-18)$$

gdje je F_s statička sila trenja, F_c dinamička sila trenja (Coulombova sila) a v_s Stribeckova brzina.

Osnovna je prednost LuGre modela njegova kompaktnost budući da je preko jedne (nelinearne) diferencijalne jednadžbe opisano vladanje vlakna u kontaktu dvaju tijela.

Vladanje Lugre modela u ustaljenom stanju dobije se uz pretpostavku $\frac{dz}{dt} = 0$:

$$\frac{dz}{dt} = 0, \Rightarrow z = \frac{g(v)}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(v), \quad (7-19)$$

$$F = g(v) \operatorname{sgn}(v) + \sigma_2 v. \quad (7-20)$$

7.5 Negativne posljedice efekta trenja

Ovisno o konkretnom problemu fenomen trenja može općenito biti koristan ili štetan. Tako se kod sustava upravljanja proklizavanjem kotača vozila (ABS) odnosno kod sustava upravljanja vučnom silom nastoji maksimizirati iznos sile trenja te je pojava trenja u ovom slučaju korisna. S druge strane, u velikom broju industrijskih primjena postojanje trenja je izuzetno štetno. Ponajprije zbog njegovog postojanja dio se energije nepovratno gubi odnosno pretvara u toplinsku energiju smanjujući često pritom vijek trajanja komponenata sustava. Osim toga sa stajališta kvalitete upravljanja sustavom posebno su bitna dva vrlo bliska efekta: "stick-slip" efekt i "hunting" efekt, koji će biti objašnjeni u nastavku.

7.5.1 "Stick-Slip" efekt

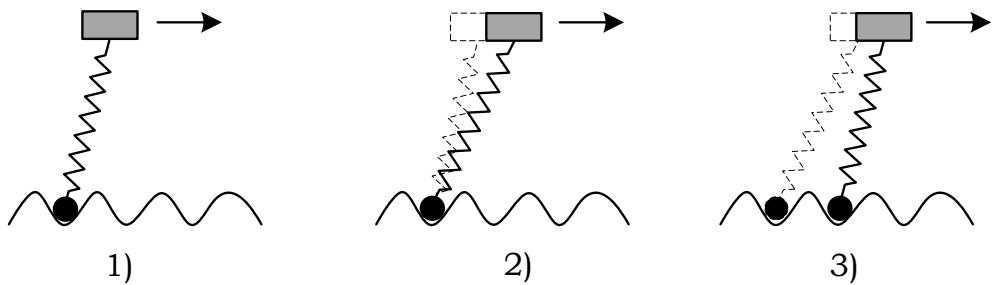
Pod pojmom "Stick-Slip" efekta obično se podrazumijeva oscilatorno gibanje tijela koje nastaje kao posljedica naglog prelaska iz područja statičkog trenja (trenja mirovanja) u područje kinetičkog trenja (trenje klizanja). Zbog činjenice da je iznos statičkog trenja najčešće značajno veći od iznosa trenja u režimu klizanja prilikom prelaska iz režima statičkog u režim kinetičkog trenja dolazi do naglog smanjenja sile trenja. Promatraljući ovu pojavu na mikrorazini može se zaključiti da je ovo smanjenje sile trenja posljedica kidanja asperitnih veza između dvaju tijela koja su u kontaktu što se događa nakon što vanjska sila premaši iznos prekidne sile F_{pr} . Ilustracija ovog efekta dana je slikom 7.12.



PRIMJER 7.1

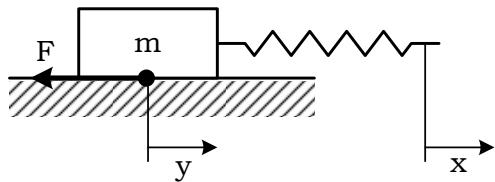
Simulacija "Stick-Slip" efekta

U svrhu ilustracije "stick-slip" efekta razmotrit će se jednostavan mehanički sustav koji se sastoji od tijela mase m koje se nalazi na podlozi i na njega vezane elastične opruge, kako je prikazano na slici



Slika 7.12. Ilustracija "stick-slip" efekta

7.13. Pritom pretpostavimo da se desni kraj opruge kreće brzinom v_0 . Na temelju II Newtonovog



Slika 7.13. Jednostavan mehanički sustav

zakona mogu se zapisati sljedeće jednadžbe gibanja sustava:

$$v_0 = \frac{dx}{dt}, \quad (7-21)$$

$$l = x - y, \quad (7-22)$$

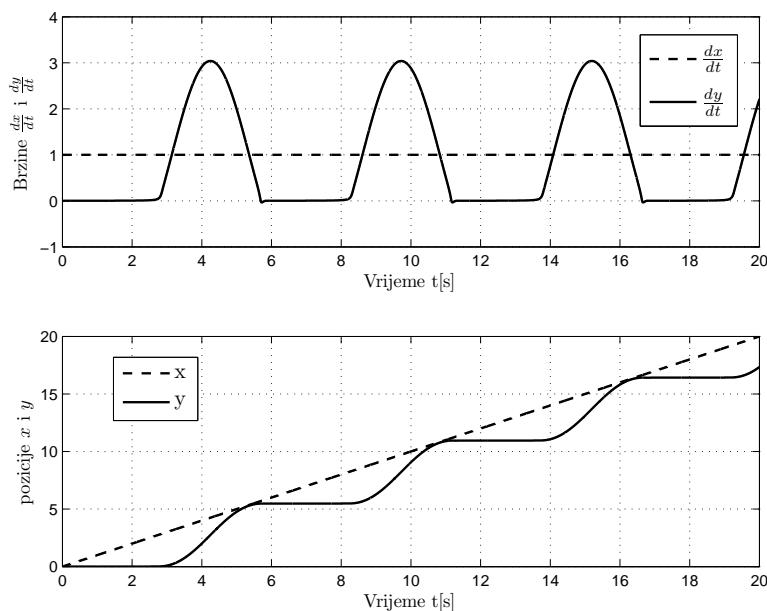
$$\frac{dl}{dt} = v_0 - \frac{dy}{dt} \quad (7-23)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = kl - F. \quad (7-24)$$

Pritom l predstavlja iznos istezanja opruge, k koeficijent čvrstoće opruge i F silu trenja između mase i podloge. Za opis sile trenja između tijela i podloge koristi se LuGreov model trenja, dan izrazima 7-17. Simulacija je provedena uz vrijednosti parametara modela dane tablicom 7.1. Odzivi brzine i pozicije mase m dobiveni simulacijom sustava prikazani su na slici 7.14. Bitno je primijetiti cikličko izmjenjivanje režima statičkog trenja i režima kinetičkog trenja. U režimu statičkog trenja brzina mase je vrlo mala te dolazi do elastičnog istezanja asperitnih vlakana, a sila trenja istovremeno raste. Kada sila opruge dosegne iznos prekidne sile dolazi do pucanja asperitnih veza što rezultira značajnim smanjenjem sile trenja (slike 7.15 i 7.16), te tijelo počinje naglo ubrzavati sve dok razlika između brzine v_0 i brzine mase v ne postane približno nula. U tom se trenutku tijelo zaustavlja i dolazi do ponovnog uspostavljanja asperitnih veza između tijela i podloge, čime se ponovno prelazi u režim statičkog trenja.

Tablica 7.1. Parametri simulacije iz primjera 7.1

Parametar	Vrijednost
m	1
k	2
v_0	1
v_s	0.1
μ_C	0.003
μ_S	0.006
σ_0	1000
σ_1	42.167



Slika 7.14. Brzine i pozicije mase i opruge

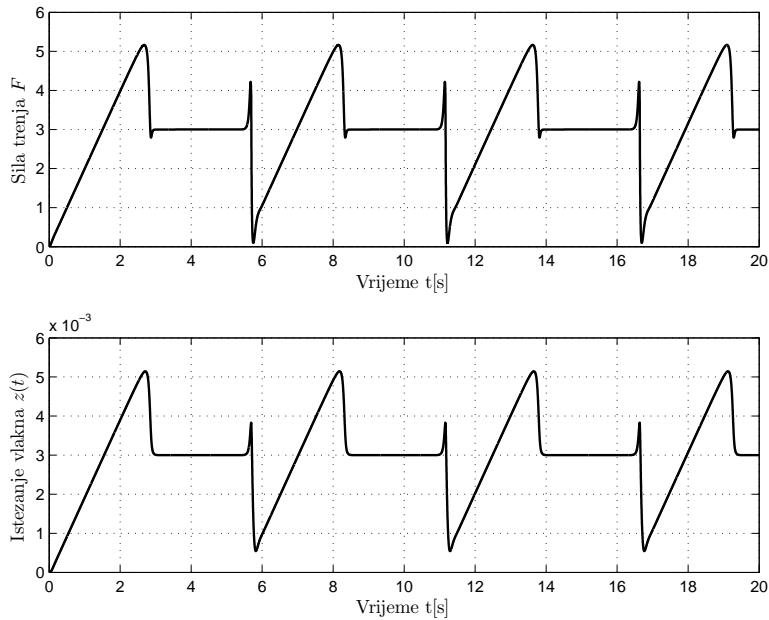
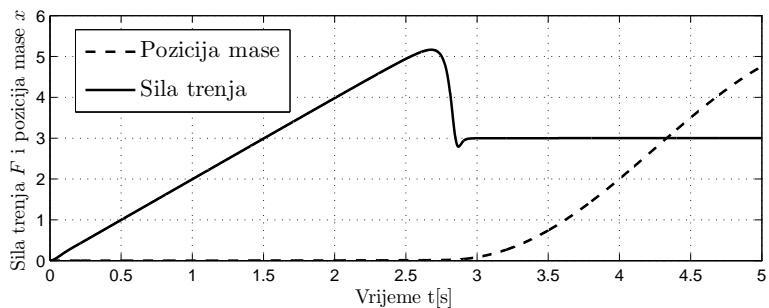
7.5.2 "Hunting" efekat

Prethodni je primjer ilustrirao efekt koji se javlja pri niskim relativnim brzinama kada se asperitne veze stignu nanovo uspostaviti što rezultira cikličnim izmjenjivanjem režima statičkog i kinetičkog trenja. Pritom je prelazak između pojedinih režima trenja ostvaren pomoću vanjske sile tj. sile opruge. U sustavima upravljanja elektromotornim pogonima umjesto opruge ta će promjena režima trenja biti prouzročena integralnim djelovanjem regulatora, ukoliko se radi o regulaciji pozicije. To će rezultirati nemogućnošću postizanja točnosti u ustaljenom stanju, što se obično naziva "hunting" efektom.

PRIMJER 7.2

Ilustracija "hunting" efekta

Sustav regulacije pozicije mase na podlozi uz korištenje PID regulatora prikazan je na slici 7.17.

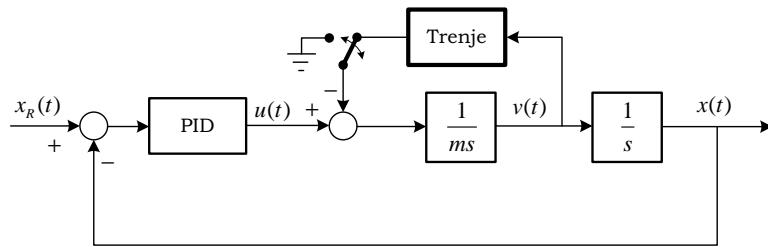
Slika 7.15. Sila trenja F i istezanje vlakna $z(t)$ Slika 7.16. Sila trenja F i pozicija mase $x(t)$ (detaljan prikaz)

Parametri PID regulatora određeni su na temelju nominalnog modela procesa koji ne uključuje trenje. U sklopu ovog primjera provedene su dvije skupine simulacija i to: (i) bez utjecaja sile trenja i (ii) uz utjecaj sile trenja. Odgovarajući odzivi položaja mase i upravljačke veličine za oba ova slučaja prikazani su na slikama 7.18 i 7.18.

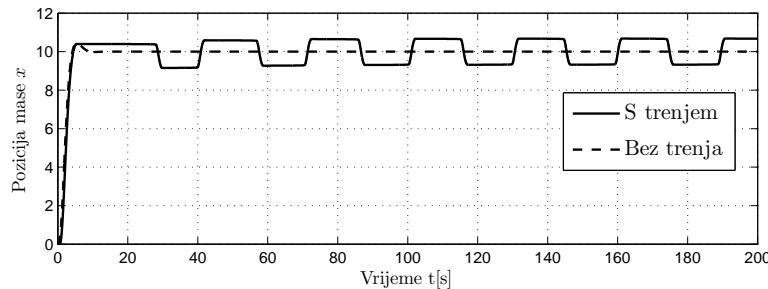
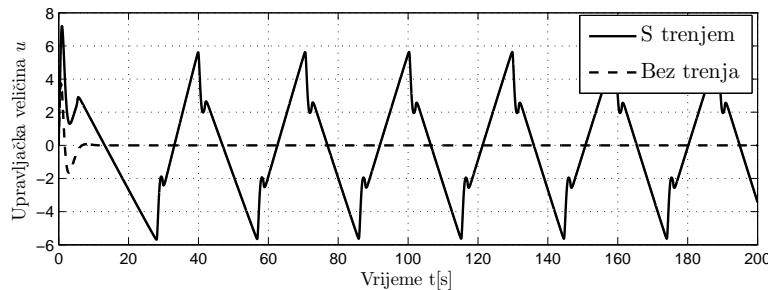
Iz prikazanih je odziva vidljivo da djelovanje sile trenja rezultira trajnim oscilacijama regulirane veličine (položaja mase) oko njene referentne vrijednosti.

7.6 Kompenzacija utjecaja trenja u slijednim sustavima

Zbog svoje izrazito nelinearne prirode trenje u značajnoj mjeri može narušiti kvalitetu sustava upravljanja. Prije svega trenje predstavlja disipativnu силу te se za njegovo savladavanje nepo-



Slika 7.17. Shema sustava upravljanja položajem mase

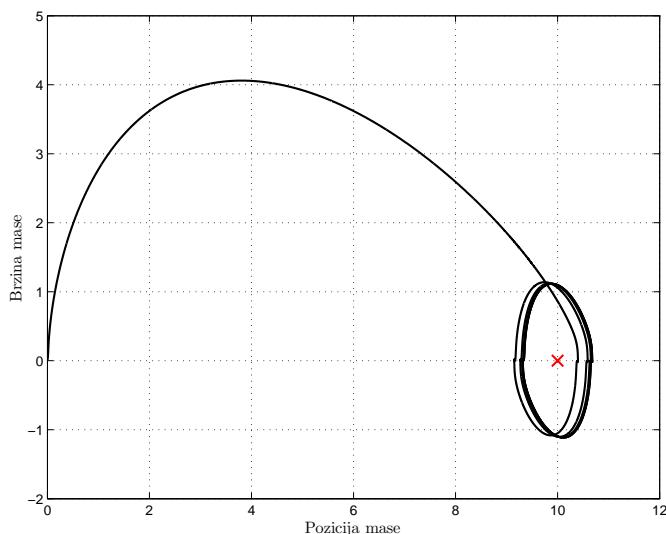
Slika 7.18. Odziv regulirane veličine (položaja mase m) za slučajeve sa i bez djelovanja sile trenjaSlika 7.19. Odziv upravljačke veličine $u(t)$ za slučajeve sa i bez djelovanja sile trenja

vratno troši energiju. Međutim, znatno veći problem koji je posljedica trenja je i nemogućnost postizanja visoke kvalitete upravljanja. Pregled specifičnih problema kod upravljanja povezanih s efektom trenja dan je u Tablici 7.2

Općenito postoji više različitih postupaka kompenzacije negativnih utjecaja trenja u sustavima automatskog upravljanja. U nastavku će biti spomenuta tri najznačajnija pristupa kompenzaciji utjecaja trenja.

7.6.1 Kompenzacija utjecaja trenja pomoću *dither* signala

Jedan od najstarijih i najjednostavnijih jest korištenje tzv. *dither* signala. To je visokofrekvencijski signal koji se obično dodaje upravljačkom signalu i što ima za posljedicu onemogućavanje zadržavanja sustava u području statičkog trenja. Pritom je ovdje bitno spomenuti da postoji zna-

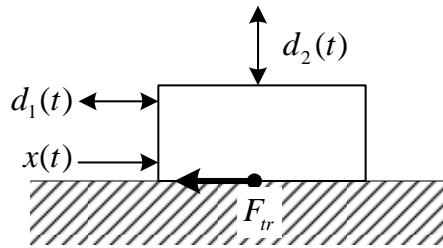


Slika 7.20. Fazna trajektorija sustava uz postojanje "hunting" efekta

Tablica 7.2. Efekt trenja i s tim povezani specifični problemi kod upravljanja

Specifični problem	Manifestacija problema	Vrsta trenja
Problem pozicioniranja	Pogreška u ustaljenom stanju, "hunting" efekt	statičko trenje
Praćenje reference s reverziranjem	Stand-still, Lost motion	statičko trenje
Praćenje na niskim brzinama	"stick-slip" gibanje	negativan nagib dijela krivulje trenja, statičko trenje
Praćenje na velikim brzinama	velika pogreška slijedjenja	viskozno trenje.

čajna razlika između djelovanja *dither* signala paralelno odnosno okomito na smjer sile trenja. Ako je djelovanje dither signala paralelno sili trenja tada je efekt njegovog uvođenja usrednjavanje nelinearne funkcije trenja. Ako je pritom frekvencija *dither* signala veća od odgovarajućih lomnih frekvencija dominantnih dinamika sustava tada se na izlaznom signalu neće vidjeti negativni efekti dodavanja ovog signala. S druge strane djelovanje *dither* signala okomito sili trenja ima za posljedicu smanjenje koeficijenta trenja.



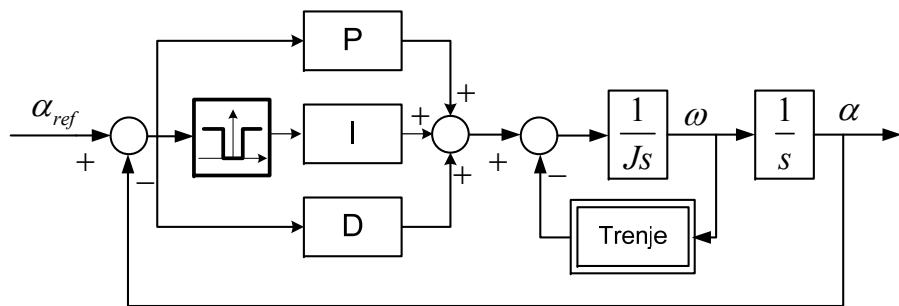
Slika 7.21. Primjer djelovanja dither signala

7.6.2 Nemodelski postupci komenzacije trenja

Modifikacija integralnog djelovanja

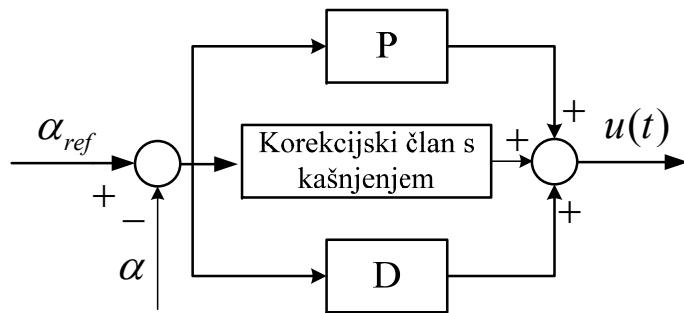
Integralno se djelovanje općenito uvodi s ciljem eliminacije pogreške u stacionarnom stanju, ali u sustavima s prisutnim trenjem može prouzročiti efekt „hunting-a“ i/ili rezultirati značajnim iznosima nadvišenja u prijelaznoj pojavi. Razlog tomu leži u obliku karakteristike trenja odnosno u značajnom smanjenju iznosa sile trenja pri prijelazu iz područja statičkog u područje kinetičkog trenja, tj. u lokalno negativnom nagibu karakteristike trenja. Ideja je ovih postupaka da se tijekom rada sustava (on-line) mijenja ponašanje integralnog člana regulatora. Postoji više različitih postupaka modifikacije integralnog djelovanja kojima se eliminira/reducira utjecaj trenja na kvalitetu upravljanja, koji se u nastavku navode.

Uvođenje zone neosjetljivosti Na ulazu u integralni član PID regulatora dodaje se nelinearni element zone neosjetljivosti čime se zaustavlja njegovo daljnje integriranje kada pogreška pozicioniranja padne na dovoljno mali iznos. Time se eliminira „hunting“ efekt uz istovremeno narušavanje točnosti sustava upravljanja u ustaljenom stanju. Načelna shema PID regulatora sa zonom neosjetljivosti prikazana je na slici 7.22.



Slika 7.22. Modifikacija integralnog djelovanja uvođenjem zone neosjetljivosti

Korekcijski član s faznim kašnjenjem Uvođenje korekcijskog člana s faznim kašnjenjem s velikim pojačanjem umjesto integralnog djelovanja rezultira sličnim efektom kao zona neosjetljivosti ali se pritom ne unose nelinearni efekti u sustav.



Slika 7.23. Modifikacija integralnog djelovanja uvođenjem korekcijskog člana s kašnjnjem

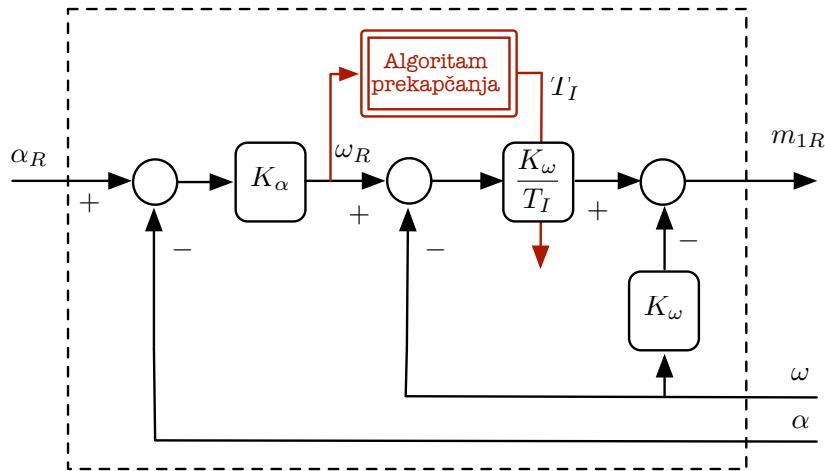
Resetiranje integratora Ovaj se postupak provodi u slučajevima kada je statičko trenje značajno većeg iznosa od kinetičkog te se kao posljedica integralnog djelovanja može pojaviti veliko nadvišenje u prijelaznoj pojavi. Kako bi se ono reduciralo ili eliminiralo (posebice tamo gdje ono nije dopušteno) može se koristi postupak resetiranja čime se izlaz iz integralnog člana isključuje kada se detektira izlazak iz područja statičkog trenja.

Integrator s prekapčanjem Ideja ovog postupka dolazi iz fizikalnog razmatranja djelovanja pojave trenja na sustav upravljanja pozicijom elektromotornog pogona. Naime, kada je pogon u području statičkog trenja tada je, da bi se sustav čim brže pokrenuo, potrebno smanjiti iznos integralne vremenske konstante na iznos T_{I0}/a , dok s druge strane dok je pogon u gibanju integralna vremenska konstanta iznosi T_{I0} . Prema tome, algoritam prekapčanja integralne vremenske konstante glasi:

$$T_I = \begin{cases} T_{I0} & \omega_R \geq \omega_{R,s}, \\ T_{I0}/a & \omega_R \leq \omega_{R,s}, \end{cases} \quad (7-25)$$

pri čemu $\omega_{R,s}$ predstavlja granicu između područja statičkog i dinamičkog trenja. Načelna shema opisane modifikacije regulatora prikazana je na slici 7.24.

Množenje izlaza iz integratora s predznakom brzine Koristi se za eliminaciju problema vezanih za promjenu smjera brzine kada sila trenja naglo mijenja predznak (sa iznosa F_C na $-F_C$ ili obrnuto).



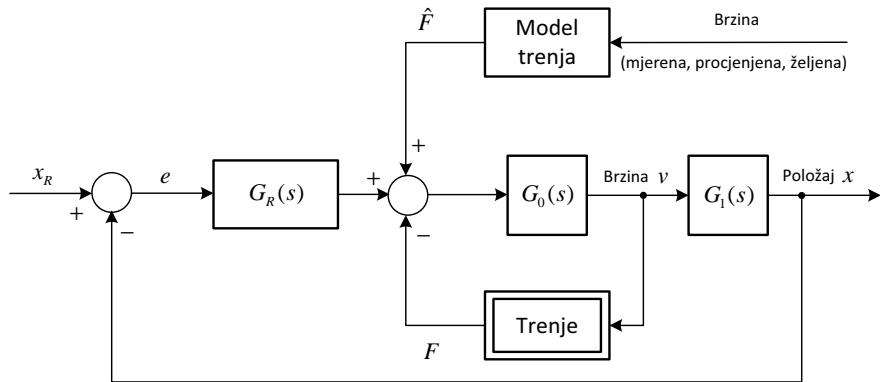
Slika 7.24. Načelna shema regulatora s prekapčanjem

Kompenzacija trenja korištenjem podređene povratne veze po momentu ubrzanja

Vrlo efikasan postupak kompenzacije utjecaja trenja jest korištenje povratne veze po momentu ubrzanja. Obično je ta upravljačka petlja podređena u kaskadnim sustavima upravljanja i znatno je brža od nadređenih petlji. Često se međutim umjesto izravnog mjerenja momenta ubrzanja koriste postupci njegove procjene na temelju dostupnih signala. Najjednostavniji način procjene momenta jest numerička derivacija signala brzine. Slijedni sustavi tipično koriste kaskadnu upravljačku strukturu u pojedine upravljačke petlje po struji, brzini i položaju. Budući da se trenje javlja u podređenoj upravljačkoj petlji poželjno je unutar te petlje raditi samu kompenzaciju. Klasično (analogno) rješenje za unutarnju petlju po struji predstavlja bitnu poteškoću za implementaciju bilo kakvog algoritma kompenzacije. S druge strane novija rješenja zasnovana na korištenju mikroračunala omogućuju njihovu jednostavnu implementaciju. Preduvjet za kvalitetnu kompenzaciju trenja jest i raspoloživost točne informacije o brzini, dobivene mjerjenjem ili procjenom (estimacijom).

7.6.3 Kompenzacija utjecaja trenja zasnovana na modelu trenja

U slučajevima kada je poznat model trenja moguće ga je iskoristiti kao temelj za postupak kompenzacije. Ideja je sljedeća - koristeći poznat model trenja procjenjuje se iznos sile trenja te se upravljačkom signalu dodaje iznos koji će tu silu poništiti, tj. kompenzirati. Opća blokovska shema kompenzacije trenja zasnovane na poznatom modelu trenja prikazana je na slici 7.25. Kvaliteta kompenzacije utjecaja trenja u prvom je redu ovisna o kvaliteti raspoloživog modela trenja, ali jednak tako i o dostupnosti signala na temelju kojih se procjenjuje sila trenja, što je najčešće signal brzine. Ako se kao ulazna veličina u model trenja koristi mjereni signal brzine tada najveći problem predstavlja prisustvo mjerne šuma kao dinamika mernog člana.



Slika 7.25. Načelna shema kompenzacije trenja zasnovane na modelu trenja

U određenim je situacijama kod slijednih sustava, kada je unaprijed poznat željeni profil brzine, moguće kompenzaciju raditi i unaprijedno (engl. *feedforward compensation*). Time se izbjegavaju problemi vezani uz postojanje kašnjenja odnosno šuma u mjernom sustavu. Također se u slučaju unaprijedne kompenzacije referentna pozicija $x_R(t)$ može iskoristiti kao ulaz u model trenja budući da je on unaprijed poznat te se njegova derivacija može proračunati bez numeričkih poteškoća.