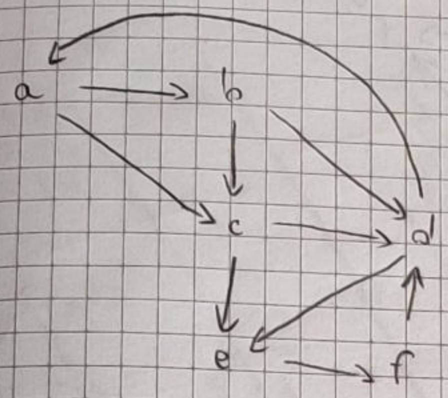
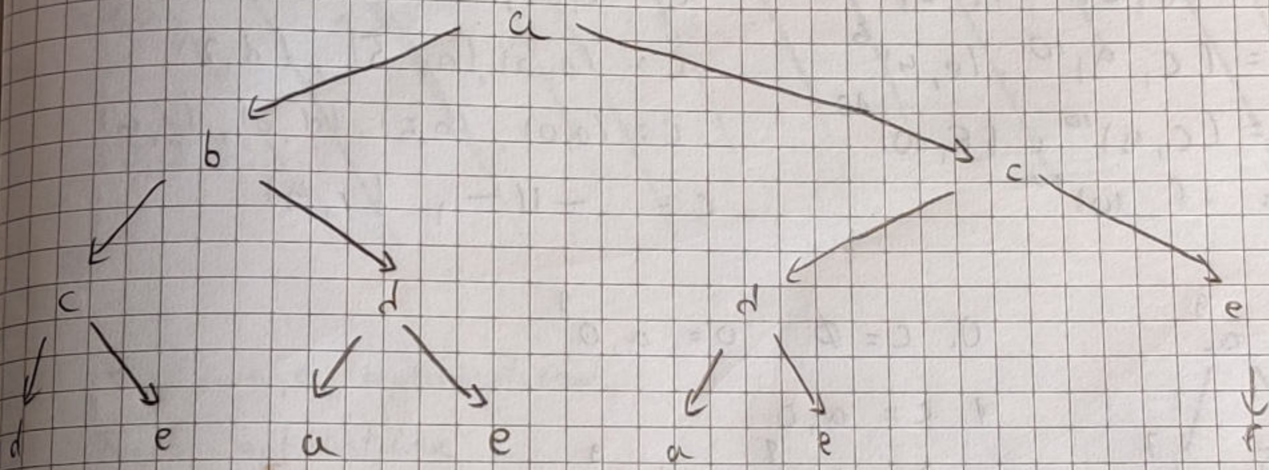
1. VJEŽBE

1. C

2.





BFS: a b c c d d e d e a e a e f

DFS: a b c d a b c d...

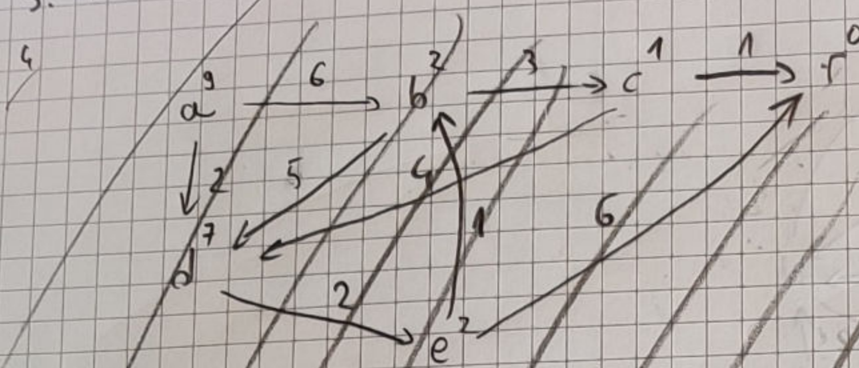
IT. U D.: a a b c a b c d c d e a b c d e d a e c d a e e f

OG. U D. k=3: a b c d e d a e c d a e e f

C

3. B

4



0. $O = (a, 0)$ $\quad C = \emptyset$

1. $O = (b, 6)^{8}, (d, 2)^{9}$ $\quad C = (a, 0)$

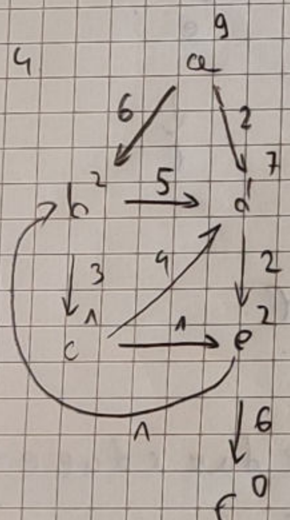
2. $O = (d, 2)^{9}, (c, 9)^{10}$ $\quad C = (a, 0), (b, 6)$

3. $O = (c, 9)^{10}, (e, 4)^{6}$ $\quad C = (a, 0), (b, 5), (d, 2)$

4. $O = (c, 9)^{10}, (f, 10)^{10}$ $\quad C = (a, 0), (b, 5), (d, 2), (e, 4)$

5. $O = (f, 10)^{10}$ $\quad C = -\|-, (c, 9)$

4



0. $C = \emptyset \quad O = a, 0^{9}$

1. $C = a, 0$

$O = b, 6^{8} \; ; \; d, 2^{9}$

2. $C = a, 0 \; ; \; b, 6$

$O = d, 2^{9} \; ; \; c, 9^{10}$

3. $C = a, 0 \; ; \; b, 6 \; ; \; d, 2$

$O = c, 9^{10} \; ; \; e, 4^{6}$

4. $C = a, 0 \; ; \; \cancel{b, 6} \; ; \; d, 2 \; ; \; e, 4$

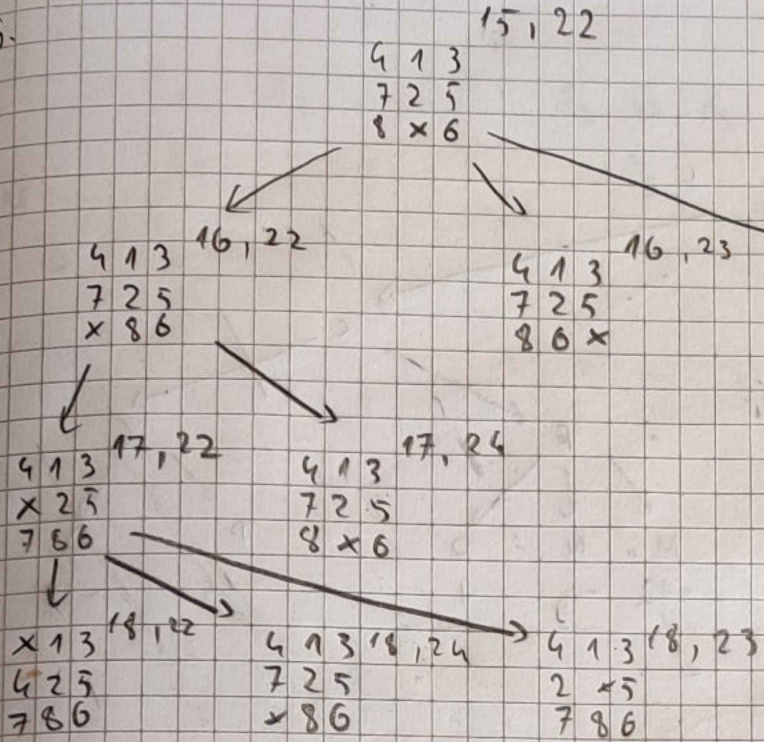
$O = c, 9^{10} \; ; \; b, 5^{7} \; , \; f, 10^{10}$

5. $C = a, 0 \; ; \; b, 5 \; ; \; d, 2 \; ; \; e, 4$

$O = c, 8^{9} \; ; \; f, 10^{10}$

A

5.



22, 22, 22

A

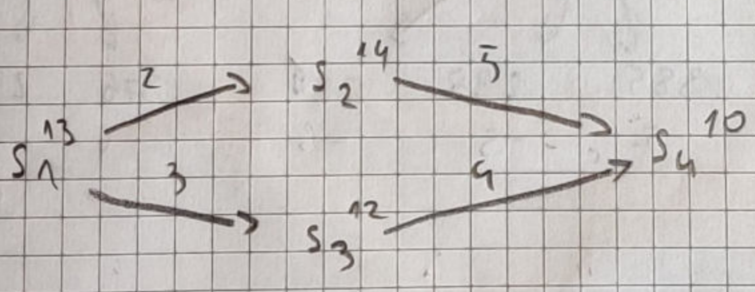
6. h_1 nije optimistična

h_2 optimistična

h_3 nije optimistična

A

7.



~~$h(s_1) = 15$~~

~~$h(s_1) = 14$~~

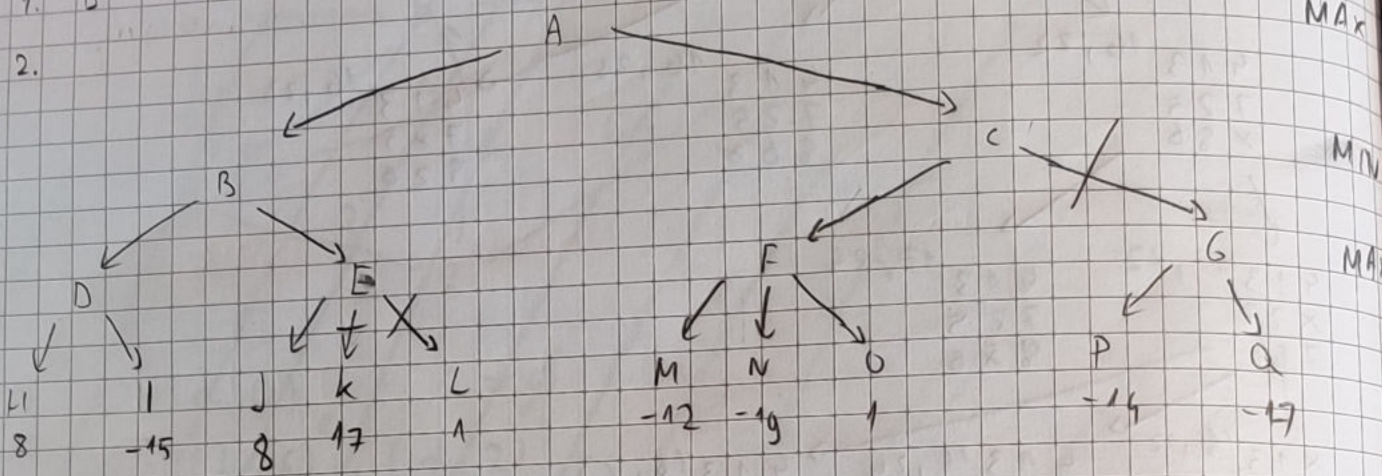
$h(s_1) = 15$

D

2. VJEŽBE

1. B

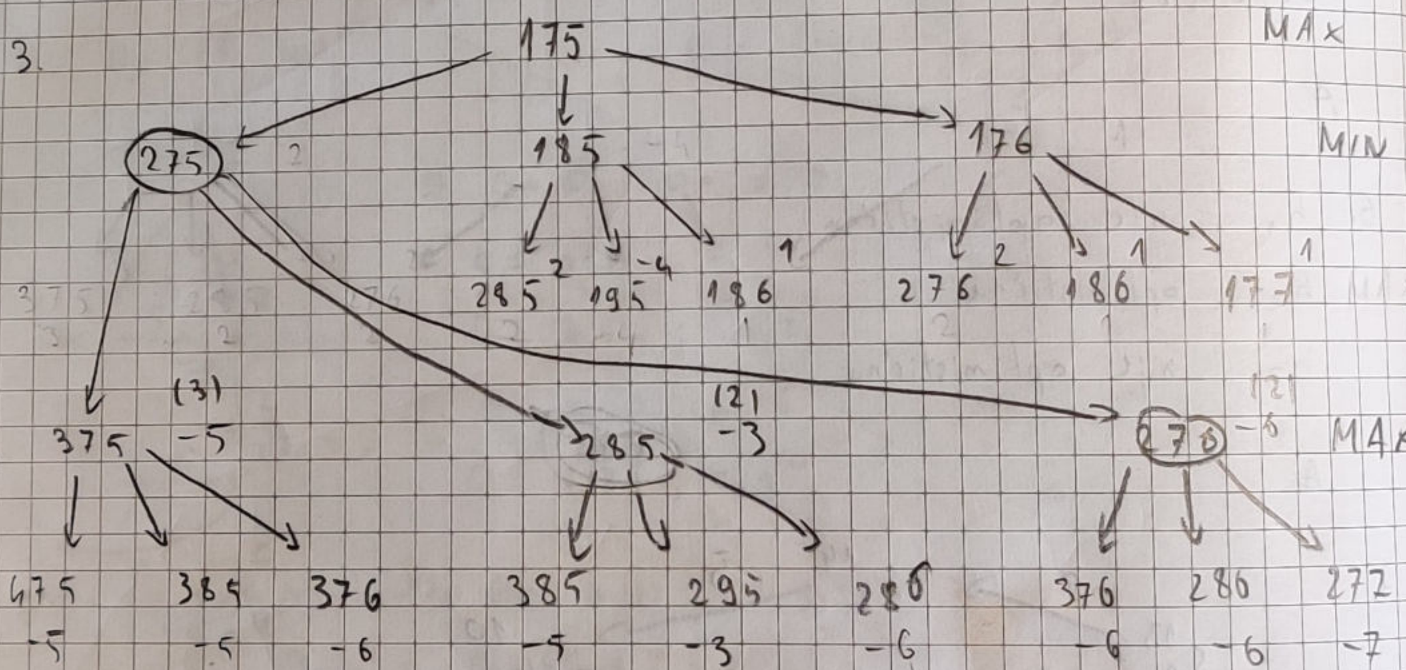
2.



K, L, O, P, Q

D

3.



175 → 275 → 276

D

4. C

5. A_1 vs A_2 A_3 vs A_4

A_1 A_3

A

h_3 najbolja

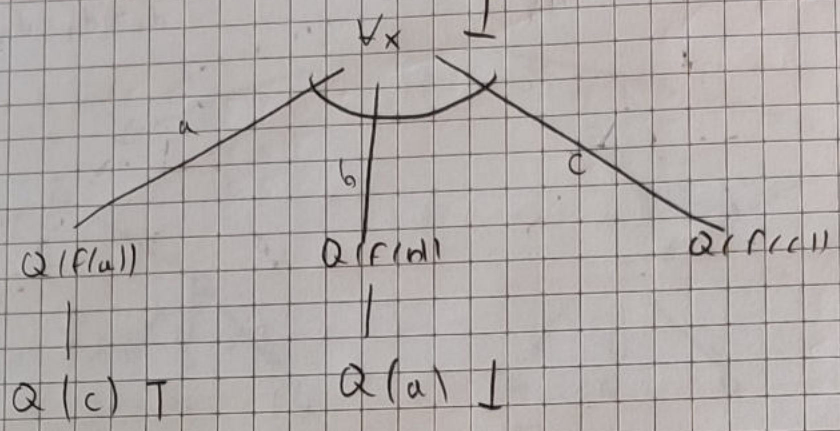
$h_2 = h_4$

$d_1 > d_2 = d_3 > d_4$

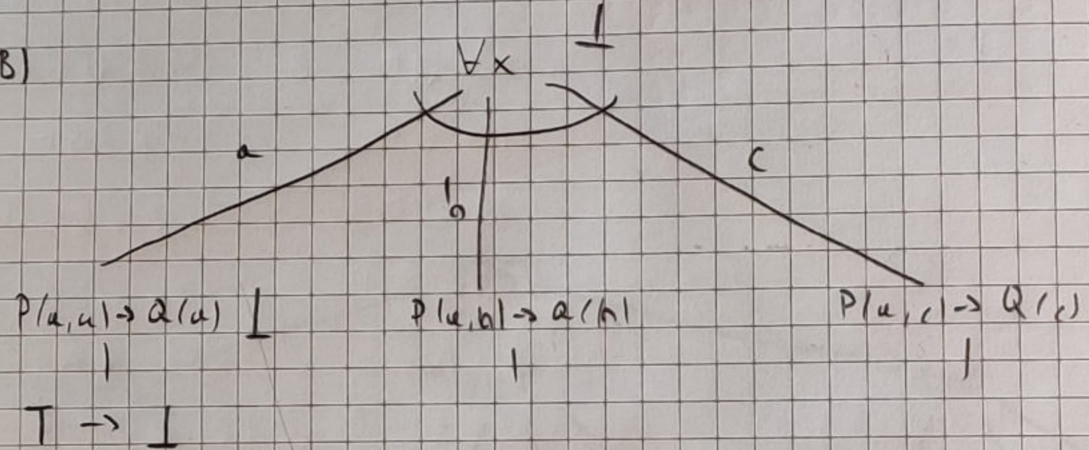
3. VJEŽBE

1. C

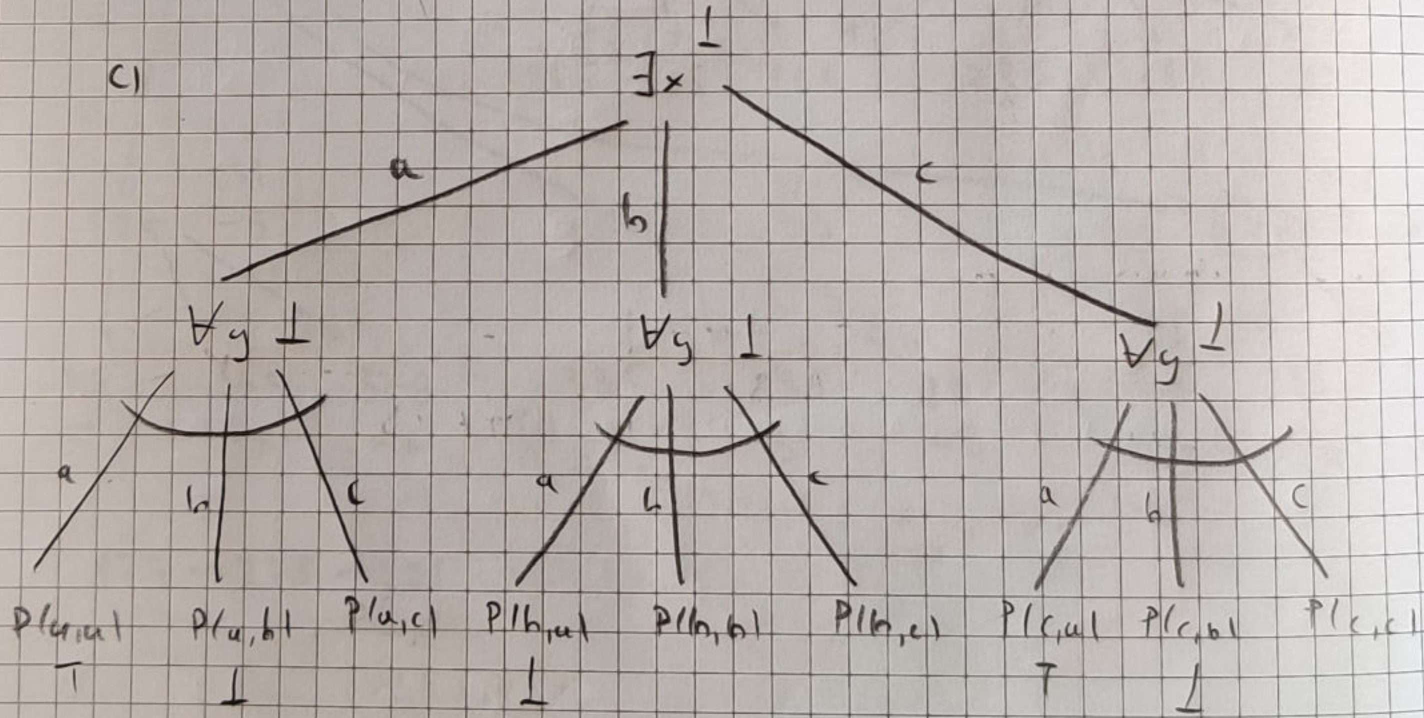
2. A)



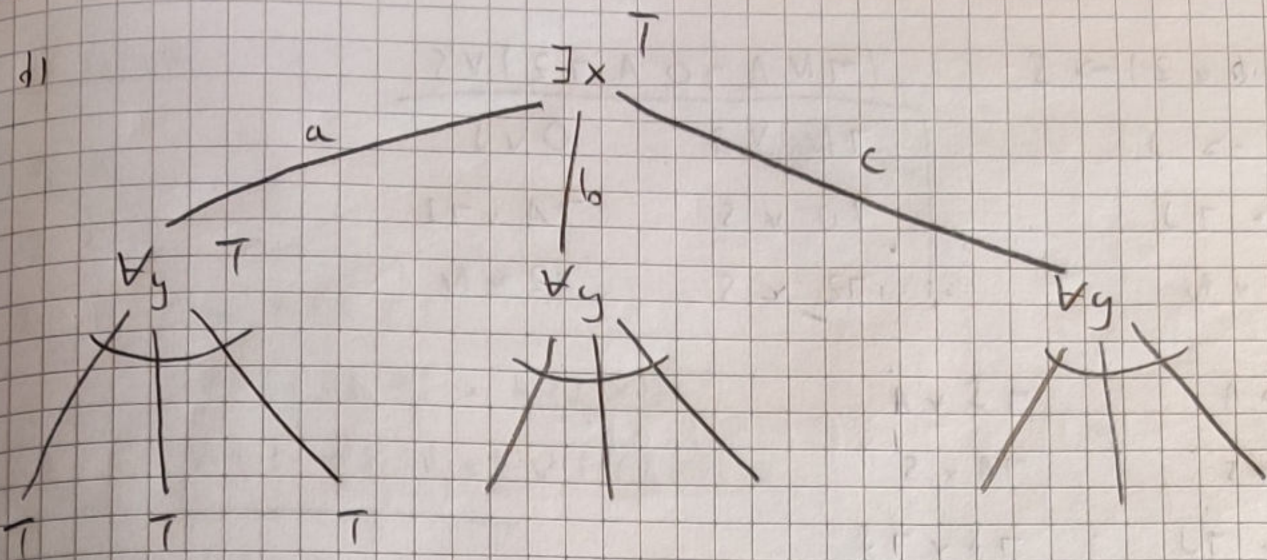
B)



C)



d)



D

3. $\forall x \forall y ((F(x) \land S(y) \to V(x,y))$

$\neg F(x) \lor \neg (S y) \lor V(x,y)$

$\neg F(x) \lor (S(y) \to V(x,y))$

$F(x) \to (S(y) \to V(x,y))$

D

4. B

5. B

6. D

7. $\cancel{D}$ | $\cancel{C}$ $\dfrac{\neg A \lor B \quad \neg B \lor C}{\neg c \lor A}$ | $\cancel{A}$ $\dfrac{\neg A \lor \neg B \lor C}{(\neg A \land \neg B) \lor C}$ | B $\dfrac{\neg A \lor B \lor C \quad \neg C}{\neg A \lor B}$ w

B

8. $(N \lor O \lor Z) \to S$ $\quad$ $\underline{(\neg N \land \neg O \land \neg Z) \lor S}$

$\neg O \to J$

$A \to \neg J$

$\neg Z \lor N$

$\neg N \lor S$	$O \lor J$
$\neg O \lor S$	$\neg A \lor \neg J$
$\neg Z \lor S$	$\neg Z \lor N$

A: $S \to A$ $\quad$ $\neg S \lor A$

B: $A \to S$ $\quad$ $\neg A \lor S$

C: $S \to \neg J$ $\quad$ $\neg S \lor \neg J$

D: $\neg J$ $\quad$ $\neg J$

A: $\neg N \lor S$

$\neg O \lor S$

$\neg Z \lor S$

$O \lor J$

$\neg A \lor \neg J$

$\underline{\neg Z \lor N}$

$\neg S \lor A$

$\neg S \lor \neg J$

$\neg N \lor \neg J$

$\neg Z \lor \neg J$

B: $\neg N \lor S$

$\neg O \lor S$

$\neg Z \lor S$

$O \lor J$

$\neg A \lor \neg J$

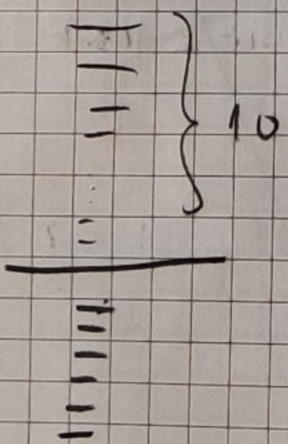
$\underline{\neg Z \lor N}$

A $\quad$ $\neg J$ $\quad$ O $\quad$ S $\quad$ NIL

$\neg S$

B

9.



$14 + 13 + 12 + 11 + 10 = 60 \Rightarrow$ 1. kruk

$15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 = 75$

$75 - 1 = 74$

B

4. VJEŽBE

1. B

2. C

3.
$$\forall x\ K(x, E)$$
$$\forall x\,(K(J, x) \to H(J, x))$$
$$\forall x\,(\neg K(J, x) \vee H(J, x))$$

$$K(x, E)$$
$$\neg K(J, x) \vee H(J, x)$$

$$K(J, E)$$
$$\neg K(J, J) \vee H(J, J)$$

X

$$K(x, E)$$
$$\neg K(J, y) \vee H(J, y)$$

$$K(J, E)$$
$$\neg K(J, E) \vee H(J, E)$$

$$H(J, E)$$ ✓

A

4.
$$P(f(a, x),\ x,\ g(y),\ f(z, u))$$
$$P(y,\ g(z),\ w,\ f(b, a))$$

$f(a, x)/y$

$$P(f(a, x),\ x,\ g(f(a, x)),\ f(z, u))$$
$$P(f(a, x),\ g(z),\ w,\ f(b, u))$$

$g(z)/x$

$$P(f(a, g(z)),\ g(z),\ g(f(a, g(z))),\ f(z, u))$$
$$P(f(a, g(z)),\ g(z),\ w,\ f(b, u))$$

$g(f(a, g(z)))/w$

$$P(f(a, g(z)),\ g(z),\ g(f(a, g(z))),\ f(z, a))$$
$$P(f(a, g(z)),\ g(z),\ g(f(a, g(z))),\ f(b, a))$$

b/z

$$P(f(a, g(b)),\ g(b),\ g(f(a, g(b))),\ f(b, u))$$

$b/z \quad g(b)/x \quad f(a, g(b))/y \quad g(f(a, g(b)))/w$

C

5. $P(g(y), x) \vee \neg Q(x, b)$

$Q(f(x), y)$

$P(g(y), x) \vee \neg Q(x, b)$ $\qquad\qquad f(x') / x$

$Q(f(x'), y')$

$P(g(y), f(x')) \vee \neg Q(f(x'), b)$ $\qquad\qquad b / y'$

$Q(f(x'), y')$

$P(g(y), f(x')) \vee \neg Q(f(x'), b)$

$Q(f(x'), b)$

$P(g(y), f(x'))$

D

6. $\forall x (G(x) \to \exists y (P(y) \wedge U(y, x)))$

$\forall x (\neg G(x) \vee \exists y (P(y) \wedge U(y, x)))$

$\forall x (\neg G(x) \vee (P(f(x)) \wedge U(f(x), x)))$

$\neg G(x) \vee P(f(x))$

$\neg G(x') \vee U(f(x'), x')$

D

7. $\cancel{\exists x (\exists y R(y) \vee \forall z \neg Q(x, z)) \to P(a)}$

$\cancel{\neg (\exists x (\exists y R(y) \vee \forall z \neg Q(x, z))) \vee P(a)}$

7. $\exists x(\exists y R(y) \vee \forall z \neg Q(x,z)) \rightarrow P(a)$

$\neg \exists x(\exists y R(y) \vee \forall z \neg Q(x,z)) \vee P(a)$

$\forall x \neg(\exists y R(y) \vee \forall z \neg Q(x,z)) \vee P(a)$

$\forall x(\neg \exists y R(y) \wedge \neg \forall z \neg Q(x,z)) \vee P(a)$

$\forall x(\forall y \neg R(y) \wedge \exists z \neg\neg Q(x,z)) \vee P(a)$

$\forall x(\forall y \neg R(y) \wedge \exists z\ Q(x,z)) \vee P(a)$

$\forall x(\forall y \neg R(y) \wedge Q(x, f(x))) \vee P(a)$

$\forall x \forall y((\neg R(y) \wedge Q(x, f(x))) \vee P(a))$

$(\neg R(y) \vee P(a)) \wedge (Q(x, f(x)) \vee P(a))$

1) $\neg R(y) \vee P(a)$

2) $Q(x, f(x)) \vee P(a)$

B) $\neg \exists x P(x)$

$\forall x \neg P(x)$

4) $\neg P(x')$

$\exists x \forall y (Q(x,y) \rightarrow R(y))$

$\exists x \forall y (\neg Q(x,y) \vee R(y))$

3) $\neg Q(c, y') \vee R(y')$

---

1) $\neg R(y) \vee P(a)$

2) $Q(x, f(x)) \vee P(a)$

3) $\neg Q(c, y') \vee R(y')$

4) $\neg P(x')$

1+4: 5) $\neg R(y'')$

3+5: 6) $\neg Q(c, y''')$

2+6: 7) $P(a)$

4+7: 8) NIL

2+6 : c/x

$Q(c, f(c)) \vee P(a)$

$\neg Q(c, y''')$

B

8. I. $\forall x (L(x) \leftrightarrow \exists y\, V(x,y))$

II. $\forall x (L(x) \to \forall y\, V(y,x))$

III. $V(Ana, Ivan)$

I. $\forall x (L(x) \to \exists y\, V(x,y))$

$\forall x (\neg L(x) \lor \exists y\, V(x,y))$

$\forall x (\neg L(x) \lor V(x, f(x)))$

1) $\neg L(x) \lor V(x, f(x))$

$\forall x (\exists y\, V(x,y) \to L(x))$

$\forall x (\neg \exists y\, V(x,y) \lor L(x))$

$\forall x (\forall y\, \neg V(x,y) \lor L(x))$

2) $\neg V(x', y) \lor L(x')$

II. $\forall x (L(x) \to \forall y\, V(y,x))$

$\forall x (\neg L(x) \lor \forall y\, V(y,x))$

3) $\neg L(x'') \lor V(y', x'')$

4) $V(Ana, Ivan)$

IV. $\neg \forall x \forall y\, V(x,y)$

$\exists x\, \neg \forall y\, V(x,y)$

$\exists x \exists y\, \neg V(x,y)$

5) $\neg V(Jasna, Pero)$

1) $\neg L(x) \lor V(x, f(x))$

2) $\neg V(x', y) \lor L(x')$

3) $\neg L(x'') \lor V(y', x'')$

4) $V(Ana, Ivan)$

5) $\neg V(Jasna, Pero)$

3+5: 6) $\neg L(Pero)$

2+6: 7) $\neg V(Pero, y'')$

3+7: 8) $\neg L(x''')$

2+8: 9) $\neg V(x'''', y''')$

4+9: 10) NIL

B

5. VJEŽBE

1. A

2. A

3. A: $\neg(P_1 \land P_2) \to Q$

$\neg\neg(P_1 \land P_2) \lor Q$

$(P_1 \land P_2) \lor Q$

$(P_1 \land Q) \lor (P_2 \land Q)$ NE 2 pozitivna

B: $\neg P \to Q$

$\neg\neg P \lor Q$

$P \lor Q$ NE 2 pozitivna

C: $P \to (Q_1 \lor Q_2)$

$\neg P \lor Q_1 \lor Q_2$ NE 2 pozitivna

D: $(P_1 \lor P_2) \to Q$

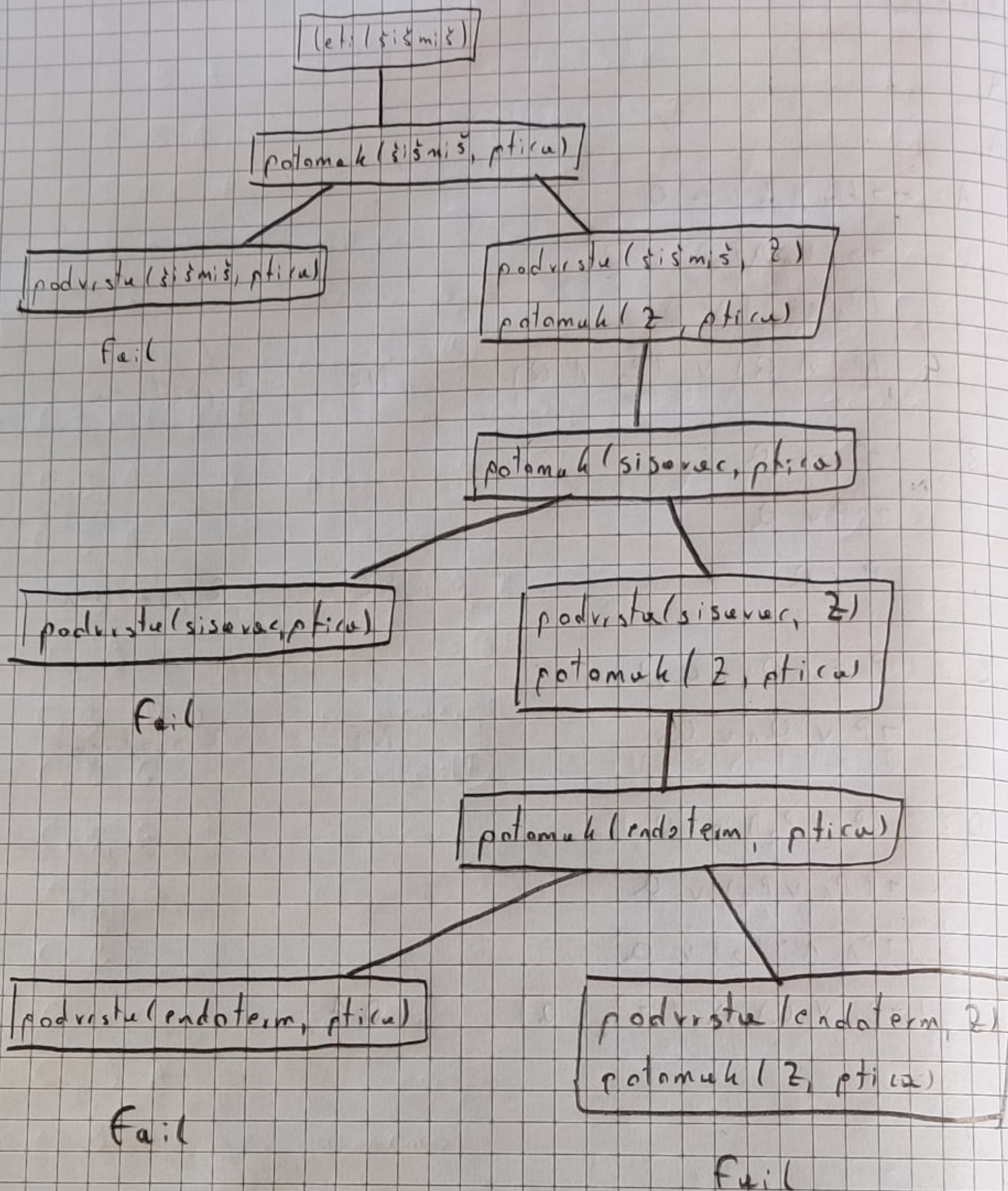
$\neg(P_1 \lor P_2) \lor Q$

$(\neg P_1 \land \neg P_2) \lor Q$

$(\neg P_1 \lor Q) \land (\neg P_2 \lor Q)$ DA

D

4.



10 čvorova

D

5. A

6. Fibonaccijev niz

a	b
2	2
2	4
4	6
6	10
10	16
16	26
26	42
42	68
68	110
110	178
178	288
$\boxed{288}$	466

288

B

7. stog: C primjenjiva pravila: 1, 2

stog: C, B, A primjenjiva pravila: 3, 6

stog: C, B, A, E primjenjiva pravila: 5, 7

S: C, B, A, E, F korisnički input: $F = f_3$

S: C, B, A, E pravila: 5, 7

S: C, B, A pravila: 3, 6

S: C, B, A, E, D pravila: 4

S: C, B, A, E, D, F imam u memoriji

S: C, B, A, E, D pravila: 4

S: C, B, A, E u memoriji

S: C, B, A pravila: 3, 6

S: C, B pravila: 6

S: C, B, D u memoriji

S: C, B, G pravila: 7

S: C, B, G, F u memoriji

S: C, B, G pravila: 7

S: C, B pravila: 6

S: C pravila: 1, 2

S: C, B, A u memoriji

S: C, B u memoriji

S: C pravila: ~~1~~ 2

S: C, B, F u memoriji

S: C, B u memoriji

S: C pravila: 2

S: –

D

memorija:

$A = \cancel{a_1}\ a_2$

$B = b_2$

$C = c_1$

$D = d_1$

$E = \cancel{e_2}\ e_1$

$F = f_3$

$G = g_1$

pravila:

~~1~~ 2 3 4

5 6 7

6. VJEŽBE

1. C

2. $P(S)=0.2 \quad P(U)=0.7 \quad P(E)=0.1$ $\quad$ S, U, E čine particiju

$P(Z|S)=1 \quad P(Z|U)=0.3 \quad P(Z|E)=0.2$

$P(C|S)=0.1 \quad P(C|U)=0.4 \quad P(C|E)=0.8$

$$P(U|C)=\frac{P(C|U)\,P(U)}{P(C)}=\frac{P(C|U)\,P(U)}{P(C|S)P(S)+P(C|U)P(U)+P(C|E)P(E)}=0.737$$

$$P(E|C,Z)=\frac{P(C,Z|E)\,P(E)}{P(C,Z)}=\frac{P(C|E)\,P(Z|E)\,P(E)}{P(C,Z,S)+P(C,Z,U)+P(C,Z,E)}=$$

$$=\frac{P(C|E)\,P(Z|E)\,P(E)}{P(C,Z|S)P(S)+P(C,Z|U)P(U)+P(C,Z|E)P(E)}=$$

$$=\frac{P(C|E)\,P(Z|E)\,P(E)}{P(C|S)P(Z|S)P(S)+P(C|U)P(Z|U)P(U)+P(C|E)P(Z|E)P(E)}=$$

$= 0.133$ $\quad$ D

3. $P(O|Š)=10\,P(O|\neg Š)$

$P(Š|O)\geq 2\,P(Š)$

$P(Š)\leq \frac{1}{2}\,P(Š|O)$

$$P(Š|O)=\frac{P(O|Š)\,P(Š)}{P(O)}$$

$$P(O)=P(O,Š)+P(O,\neg Š)=P(O|Š)P(Š)+P(O|\neg Š)P(\neg Š)$$

$$=P(O|Š)P(Š)+\frac{1}{10}P(O|Š)(1-P(Š))=P(O|Š)\left(\frac{9}{10}P(Š)+\frac{1}{10}\right)$$

$$\cancel{P(Š)}\leq\frac{1}{2}P(Š|O)=\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{P(O|Š)}\,\cancel{P(Š)}}{\cancel{P(O|Š)}\left(\frac{9}{10}P(Š)+\frac{1}{10}\right)}$$

$\frac{9}{10}P(Š)+\frac{1}{10}\leq\frac{1}{2}$ $\qquad P(Š)\leq\frac{4}{9}$ $\quad$ B

4. B

5. A

6.

$$X = \left\{ \frac{0.1}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0.3}{c} + \frac{1}{d} \right\}$$

$$Y = \left\{ \frac{0.5}{a} + \frac{0.4}{b} + \frac{0}{c} + \frac{0.2}{d} \right\}$$

$$Z = \left\{ \frac{1}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} + \frac{0.5}{d} \right\}$$

$$Ne\ X = \left\{ \frac{0.9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{0.7}{c} + \frac{0}{d} \right\}$$

$$Y\ i\ Z = \left\{ \frac{0.5}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} + \frac{0.2}{d} \right\}$$

$$Ne\ X\ ili\ (Y\ i\ Z) = \left\{ \frac{0.9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{0.7}{c} + \frac{0.2}{d} \right\}$$

C

7.

$$P_v = \left\{ \frac{0}{100} + \frac{0.1}{200} + \frac{0.3}{300} + \frac{0.6}{400} + \frac{1}{500} \right\}$$

$$T_v = \left\{ \frac{0}{-100} + \frac{0}{-50} + \frac{0.2}{0} + \frac{0.5}{50} + \frac{0.8}{100} \right\}$$

$$V_m = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{1}{5} + \frac{0.5}{10} + \frac{0.1}{15} + \frac{0}{20} + \frac{0}{25} \right\}$$

$P_v \to V_m$ $\quad$ $T_v \to P_v$

$$T_v' = [0 \quad 0 \quad 0.04 \quad 0.25 \quad 0.64]$$

$T_v \to P_v$

$$[0 \quad 0 \quad 0.04 \quad 0.25 \quad 0.64] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} = [0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 0.64]$$

$P_v \to V_m$

$$[0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 0.64] \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = [0 \quad 0.64 \quad 0.5 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0]$$

B

7. VJEŽBE

1. B

2. C

3. $P(y=1 \mid str, int_p, hib, din) = \dfrac{P(str, int_p, hib, din \mid y=1)\, P(y=1)}{P(str, int_p, hib, din)} =$

$= \dfrac{P(str \mid y=1)\, P(int_p \mid y=1)\, P(hib \mid y=1)\, P(din \mid y=1)\, P(y=1)}{P(str, int_p, hib, din, y=0) + P(str, int_p, hib, din, y=1)} =$

$= \dfrac{P(str \mid y=1)\, P(int_p \mid y=1) \cdot P(hib \mid y=1)\, P(din \mid y=1)\, P(y=1)}{P(str \mid y=0)\, P(int_p \mid y=0)\, P(hib \mid y=0)\, P(din \mid y=0)\, P(y=0) + P(str \mid y=1)\, P(int_p \mid y=1)\, P(hib \mid y=1)\, P(din \mid y=1)\, P(y=1)}$

$= 0.694$

D

4. $P(poz)$ $P(neut)$ $P(neg)$ $\Rightarrow$ 3 vjerojatnosti

$P(poz \mid E) = \dfrac{\prod_{i=1}^{5000} P(E_i \mid poz)\, P(poz)}{P(i)}$

$P(poz) \rightarrow P(a) \rightarrow$ 3 mogućnosti

$P(i) \rightarrow$ ne računamo

$P(E_i \mid poz) \rightarrow P(b \mid c)$

$b \rightarrow$ 2 mogućnosti

$c \rightarrow$ 3 mogućnosti

$|S| = 5000 \cdot 2 \cdot 3 + 3 = 30003$

B

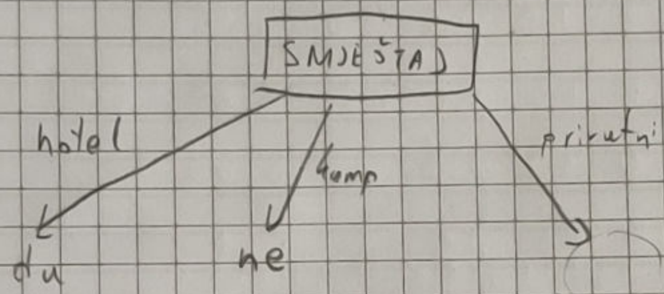
5. A

6.

$$E = -\frac{4}{7}\log\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\log\frac{3}{7} = 0.985$$

→ cilj minimizirati

podjela	entropija	
mjesto	0.787	
otok	0.964	
smještaj	0.394	→ smještaj
prijevoz	0.964	



$E = 0.918$

podjela	entropija
mjesto	0
otok	0
prijevoz	0.667

$\Rightarrow$ biramo mjesto

$IG = E - 0 = E = 0.918$

B

7. B

8. VJEŽBE

1. B

2. D

3. $\underbrace{3 \times 20}_{60+20} \times \underbrace{10 \times 5}_{50+5}$ ...

$3 \times 20 \times 10 \times 5 \times 2$

$60+20 \quad 200+10 \quad 50+5 \quad 10+2$

$80 + 210 + 55 + 12 = 357$

$357 \cdot 8 = 2856$

A

4. $\vec{w} = (1.3, 1.2, -3.2)$

$\to (1,1,1) \to -1$	net $= -0.7$	$o = -1$	$t = -1$	$f = 0$	NE
$\to (2,4,1) \to 1$	net $= 4.2$	$o = 1$	$t = 1$	$f = 0$	NE
$\to (1,2,1) \to -1$	net $= 0.5$	$o = 1$	$t = -1$	$f = -2$	DA

$\vec{w} = (-0.7, -2.8, -5.2)$

$\to (3,3,1) \to 1$	net $= -13.7$	$o = -1$	$t = 1$	$f = 2$	DA

$\vec{w} = (5.3, 3.2, -3.2)$

$\to (2,1,1) \to -1$	net $= 10.6$	$o = 1$	$t = -1$	$f = -2$	DA

$\vec{w} = (1.3, 1.2, -5.2)$

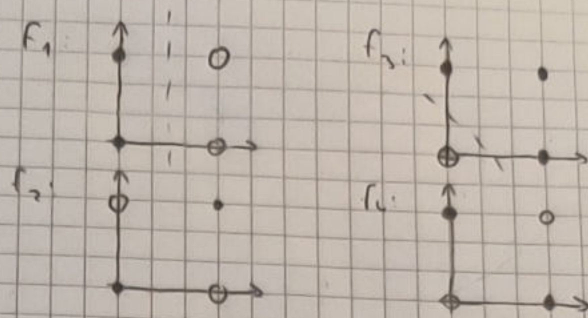
$\to (4,2,1) \to 1$	net $= 2.4$	$o = 1$	$t = 1$	$f = 0$	NE
$\to (1,1,1) \to -1$	net $= -2.7$	$o = -1$	$t = -1$	$f = 0$	NE
$\to (2,4,1) \to 1$	net $= 2.2$	$o = 1$	$t = 1$	$f = 0$	NE
$\to (1,2,1) \to -1$	net $= -1.5$	$o = -1$	$t = -1$	$f = 0$	NE
$\to (3,3,1) \to 1$	net $= 2.3$	$o = 1$	$t = 1$	$f = 0$	NE
$\to (2,1,1) \to -1$	net $= -1.4$	$o = -1$	$t = -1$	$f = 0$	NE

B

5. A

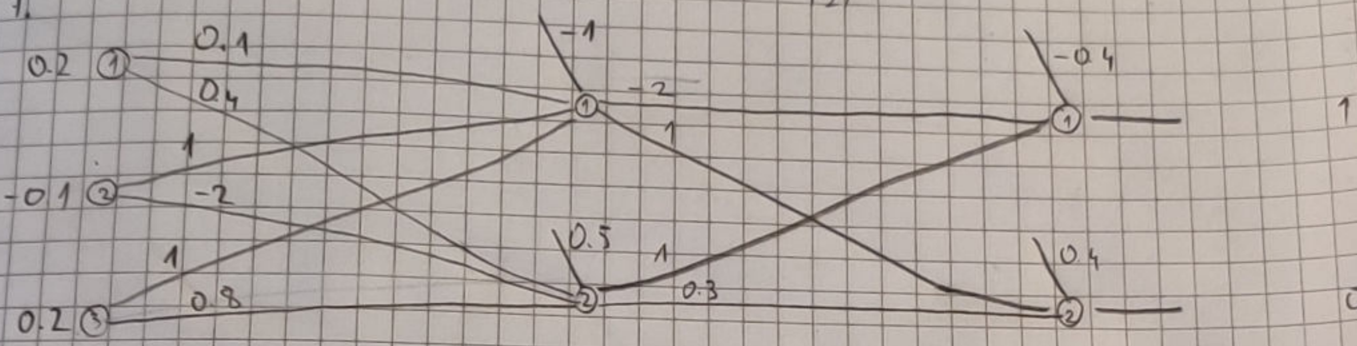
6.

A	B	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0



B

7.



$net_1^{(1)} = -0.88$, $o_1^{(1)} = \frac{1}{1+e^{-(-0.88)}} = 0.293178$, $net_2^{(1)} = 0.94$, $o_2^{(1)} = \frac{1}{1+e^{-0.94}} = 0.719100$

$net_1^{(2)} = -0.267256$, $o_1^{(2)} = 0.433581$, $net_2^{(2)} = 0.908908$, $o_2^{(2)} = 0.712777$

$\delta_1^{(2)} = o_1^{(2)}(1-o_1^{(2)}) \cdot (t_1 - o_1^{(2)}) = 0.139106$

$\delta_2^{(2)} = o_2^{(2)}(1-o_2^{(2)}) \cdot (t_2 - o_2^{(2)}) = -0.145924$

$\delta_1^{(1)} = o_1^{(1)}(1-o_1^{(1)}) \cdot (w_{1,1}^{(2)} \cdot \delta_1^{(2)} + w_{1,2}^{(2)} \cdot \delta_2^{(2)}) = -0.087891$

$\delta_2^{(1)} = o_2^{(1)}(1-o_2^{(1)}) \cdot (w_{2,1}^{(2)} \delta_1^{(2)} + w_{2,2}^{(2)} \delta_2^{(2)}) = 0.019256$

$$\left.\begin{array}{lll} w_{1,2}^{(1)} \mathrel{+}= \eta x_1 \delta_2^{(1)} & \rightarrow & w_{1,2}^{(1)} = 0.438512 \\ w_{3,1}^{(1)} \mathrel{+}= \eta x_3 \delta_1^{(1)} & \rightarrow & w_{3,1}^{(1)} = 0.824218 \end{array}\right\} + \rightarrow 1.2627$$

B

9. VJEŽBE

1. D

2. B

3.

$$0.01 \geq \frac{1}{2^k - 1} (15 - (-10))$$

$$0.01 \geq \frac{25}{2^k - 1}$$

$$2^k - 1 \geq 2500$$

$$2^k \geq 2501 \quad / \log_2$$

$$k \geq 11.29 \Rightarrow k = 12$$

3 varijable $\Rightarrow$ $12 \cdot 3 = 36$ bita

B

4. $b_1 b_2$ $b_3 b_4$ $b_5 b_6$
x y z

x	y	z
$0 \to 0$	$0 \to -1$	$0 \to -1$
$1 \to 1$	$1 \to 0$	$1 \to 0$
$2 \to 2$	$2 \to 1$	$2 \to 1$
$3 \to 3$	$3 \to 2$	$3 \to 2$

K_1: 000101 $\to (0,0,0)$ $f(0,0,0) = 38 \to fit = -38$

K_2: 001011 $\to (0,1,2)$ $f(0,1,2) = 59 \to fit = -59$

K_3: 100001 $\to (2,-1,0)$ $f(2,-1,0) = 17 \to fit = -17$

roditelji : K_1 i K_3

000|101 $\xrightarrow{\text{KRIŽANJE}}$ 000001 $\xrightarrow{\text{MUTIRANJE}}$ 000000

100|001 $\quad\quad$ 100101 $\quad\quad$ 100100

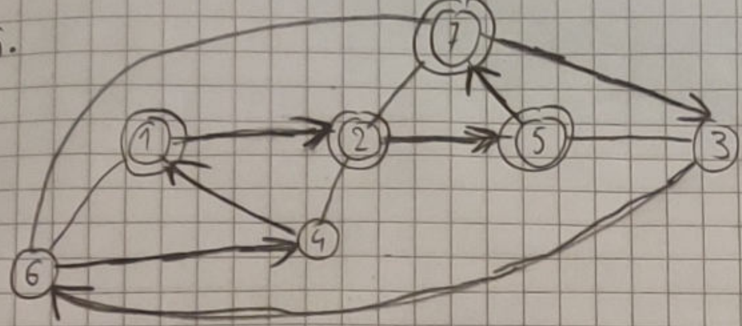
D_1: 000000 $\to (0,-1,-1)$ $f(0,-1,-1) = 30$ $\to$ $fit = -30$

D_2: 100100 $\to (2,0,-1)$ $f(2,0,-1) = 17$ $\to$ $fit = -17$

biramo D_2

B

5.



I. KORAK: 2

$P_{12} \sim \tau_{12}^2 \eta_{12}^2 = 3$

$P_{14} \sim \tau_{14}^2 \eta_{14}^2 = 2$

$P_{16} \sim \tau_{16}^2 \eta_{16}^2 = 1$

II. KORAK: 5

$P_{24} \sim \tau_{24}^2 \eta_{24}^2 = 2$

$P_{25} \sim \tau_{25}^2 \eta_{25}^2 = 3$

$P_{27} \sim \tau_{27}^2 \eta_{27}^2 = 1$

III. KORAK: 7

$P_{53} \sim \tau_{53}^2 \eta_{53}^2 = 2$

$P_{57} \sim \tau_{57}^2 \eta_{57}^2 = 3$

IV. KORAK: 3

$P_{73} \sim \tau_{73}^2 \eta_{73}^2 = 5$

$P_{76} \sim \tau_{76}^2 \eta_{76}^2 = 2$

V. KORAK: 6

VI. KORAK: 4

VII. KORAK: 1

ciklus: 1 2 5 7 3 6 4 1

B

6. C

7. $\tau^{(0)} = \tau_0$

$\tau^{(1)} = \tau_0(1-\rho)$

$\tau^{(2)} = \tau^{(1)}(1-\rho) = \tau_0(1-\rho)^2$

$\vdots$

$\tau^{(k)} = \tau_0(1-\rho)^k$

$\tau_0(1-\rho)^n < 1$

$(1-\rho)^n < \frac{1}{\tau_0} \quad / \log_{(1-\rho)}$

$n < \log_{(1-\rho)}\left(\frac{1}{\tau_0}\right)$

$n < 43.71 \quad : \quad 100 \cdot 0.9^{43} = 1.078, \quad 100 \cdot 0.9^{44} = 0.970$

$n = 44$

C

12. Prirodom inspirirani optimizacijski algoritmi: rješenja zadataka

Zadatak 1.

Točan odgovor je opcija (d). Da bismo razumjeli ponuđene odgovore i zašto jesu/nisu točni, razmišljat ćemo o nekom konkretnom primjeru CSP-a poput problema izrade semestralnog rasporeda predavanja i laboratorijskih vježbi za sve studente FER-a. Kod tog problema zadaća je napraviti raspored u kojem niti jedan student nije raspoređen na dvije ili više aktivnosti istovremeno (drugim riječima, nema konflikata), i dodijeljeni su mu termini za sve što je upisao. Prethodna ograničenja pripadaju u tzv. čvrsta ograničenja (engl. *hard constraints*), koja, ako su prekršena, čitav raspored čine neprihvatljivim i neobjavljivim kao konačno rješenje problema. S druge strane, osim što želimo da studenti nemaju konflikata, isto tako želimo da imaju minimalnu količinu „rupa” kroz dan, pa tako suma trajanja „rupa” kroz sve dane za sve studente (ili neka transformacija koja ovisi o njima) je vrijednost koju želimo minimizirati – ovakva ograničenja zovemo mekim ograničenjima (engl. *soft constraints*) čija kršenja želimo minimizirati, ali općenito, neovisno o njihovom iznosu, dobiveni raspored jest valjano rješenje. Naravno, od svih valjanih rješenja odabrat ćemo ono koje ima minimalnu količinu kršenja mekih ograničenja. Uzevši ovo u obzir, tipična karakteristika CSP-a je da unaprijed ne znamo kako izgleda ciljno rješenje: često ne znamo je li uopće moguće dobiti valjano rješenje (rješenje koje ne krši čvrsta ograničenja), i ako jest, koliko takvo rješenje može minimalno kršiti meka ograničenja.

(a) Mogli bismo zadatak formulirati tako da krećemo od nasumično stvorenog rasporeda uz funkciju sljedbenika koja na neki način modificira trenutno rješenje; međutim, osnovni problem je da ne znamo napisati ispitni predikat, pa svojstva heuristika nisu presudna.

(b) Općenito uopće ne znamo postoji li valjano rješenje.

(c) Kada bismo znali kako izgleda konačno rješenje (da rješenja koja predlaže algoritam možemo uspoređivati s njime), onda bi nam čitava pretraga u startu već bila nepotrebna – jer znamo kako izgleda konačno rješenje. U stvarnosti, ono što imamo su neke mjere kojima mjerimo karakteristike rješenja, i želimo da one koje spadaju u čvrsta ograničenja padnu na nulu, a ostale na što je moguće manji broj – no ništa od toga ne znamo.

(d) Način na koji smo od početnog slučajno generiranog rješenja izmjenu po izmjenu došli do konačnog rješenja nam uopće nije bitan. Jedino što nas zanima jest ciljno rješenje (primjerice: gotov raspored) koji je valjan i što je moguće bolji prema mekim ograničenjima. Ovo je jedini točan odgovor.

Zadatak 2.

Selekcija proporcionalna dobroti rješenja (engl. roulette wheel selection) je selekcija kod koje je vjerojatnost odabira jedinke proporcionalna njezinoj dobroti, odnosno:

$$prob_i = k \cdot fit_i$$

gdje je koeficijent proporcionalnosti *k* jednak:

$$k = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} fit_j}$$

što daje konačni izraz:

$$prob_i = \frac{fit_i}{\sum_{j=1}^{N} fit_j}$$

Kako bismo osigurali da korištena formula ne daje negativne vjerojatnosti (što je besmisleno), da se ne pojavljuje djeljenje s nulom (što bi bilo moguće ako bi neke dobrote bile pozitivne, a neke negativne), te da je vjerojatnost odabira jedinke to veća što je dobrota jedinke veća, nužno je osigurati da su sve dobrote nenegativni brojevi, i barem jedna veća od nule.

Stoga je točna opcija (b). Ako nam se prilikom računanja dobrote javljaju negativni brojevi, tada je potrebno pronaći najmanji od njih (najnegativniji), i sve dobrote za potrebe selekcije translatirati za taj iznos prema nuli što se može postići tako da se proporcionalna selekcija provede nad dobrotama:

$$fit_i' = fit_i - \min_{j \in N} fit_j$$

(a) Iznosi funkcije dobrote moraju biti nenegativni i barem jedna veća od nule.

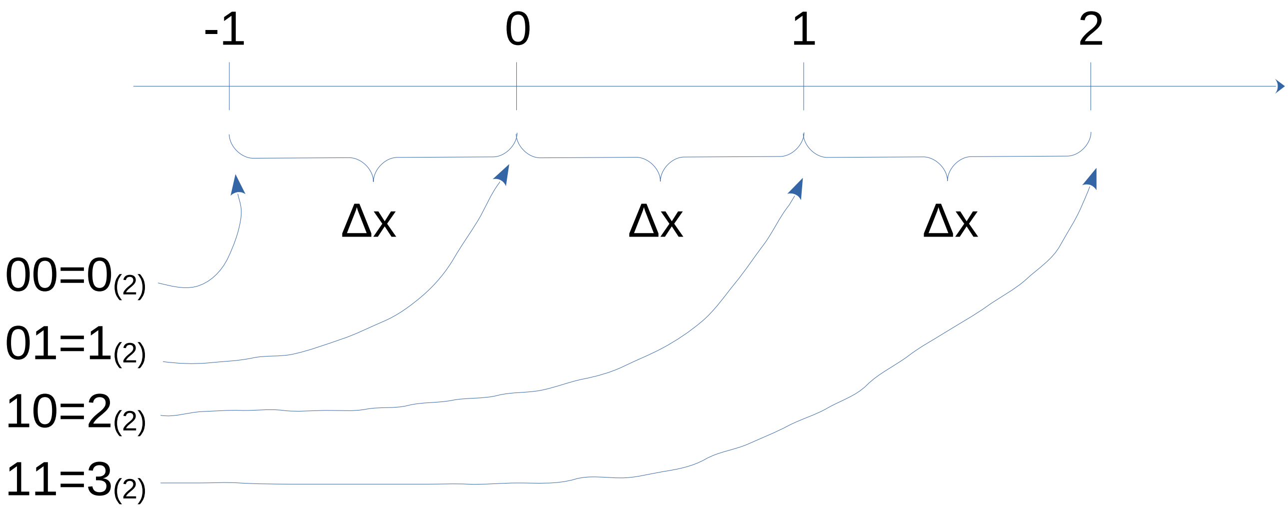
(b) Točno – ne smije biti jedinki s negativnim dobrotama.

(c) Ne postoji ograničenje na sumu dobrota svih jedinki.

(d) Reprezentacija rješenje određuje način na koji se rješenje problema čuva u memoriji (kao niz bitova, kao polje decimalnih brojeva, kao matrica, kao graf, kao ...) i nema veze s načinom na koji se provodi selekcija.

Zadatak 3.

Pretpostavimo da tražimo minimum funkcije *f(x)* gdje *x* može biti broj iz intervala -1 do +2, a kao reprezentaciju rješenja koristimo dvobitovni kromosom. Postoje četiri moguća različita kromosoma: 00, 01, 10 i 11. Svaki od njih reprezentirat će neku od vrijednosti iz intervala od -1 do +2. Uobičajeno je pri tome da „najmanji" kromosom (00) reprezentira početak intervala (-1), „najveći" od njih (11) reprezentira kraj intervala (+2), a preostali redom (01, 10) vrijednosti koje uniformno dijele sam interval. Primijetite: s dva bita možemo napisati četiri kombinacije; prva reprezentira početak prostora pretraživanja, a preostale tri definiraju tri jednako široka intervala – što pokazuje slika u nastavku. Širinu jednog intervala (Δx) nazivamo preciznošću pretraživanja. Preciznost je to veća što je širina intervala manja.



Na prethodnoj slici uz svaku je kombinaciju bitova prikazana i interpretacija prirodnim binarnim kodom, pa tako 00 odgovara broju 0, ..., a 11 odgovara broju 3.

Općenito, ako imamo n-bitovni kromosom, moći ćemo zapisati 2^n različitih kombinacija, čime prva (sve nule) predstavlja donju granicu pretraživanja (x_{min}), a preostalih 2^n-1 kombinacija uniformno razapinje svaki od intervala prostora pretraživanja čija je širina x_{max}-x_{min}. Time je preciznost određena kao:

$$\Delta x = \frac{1}{2^n - 1} \cdot (x_{max} - x_{min})$$

Ako označimo s *k* interpretaciju niza bitova prirodnim binarnim kodom, tada taj kromosom u prostoru pretraživanja određuje decimalni broj:

$$x = k \cdot \Delta x = \frac{k}{2^n - 1} \cdot (x_{max} - x_{min})$$

U zadatku imamo f(x,y,z), što znači da najprije trebamo odrediti broj bitova koji nam treba za jednu varijablu da bi se ta varijabla pretraživala zadanom preciznošću. Kromosom tada treba imati tri puta toliko bitova, kako bi svaku od tri varijable mogao pretraživati zadanom preciznošću jer ćemo kromosom izgraditi tako da najprije zapišemo bitove koji kodiraju varijablu *x*, potom bitove koji kodiraju varijablu *y*, i konačno bitove koji kodiraju varijablu *z*.

Slijedi:

$$\Delta x = \frac{1}{2^n - 1} \cdot (x_{max} - x_{min}) \leqslant \Delta x_{zadano}$$

$$\Delta x_{zadano} \cdot (2^n - 1) \geq (x_{max} - x_{min})$$

$$\Delta x_{zadano} \cdot 2^n - (\Delta x) \geq (x_{max} - x_{min})$$

$$\Delta x_{zadano} \cdot 2^n \geq (x_{max} - x_{min}) + \Delta x_{zadano}$$

$$2^n \geq \frac{(x_{max} - x_{min}) + \Delta x_{zadano}}{\Delta x_{zadano}}$$

$$\log(2^n) \geq \log\left(\frac{(x_{max} - x_{min}) + \Delta x_{zadano}}{\Delta x_{zadano}}\right)$$

$$n \cdot \log(2) \geq \log\left(\frac{(x_{max} - x_{min}) + \Delta x_{zadano}}{\Delta x_{zadano}}\right)$$

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{(x_{max} - x_{min}) + \Delta x_{zadano}}{\Delta x_{zadano}}\right)}{\log(2)}$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{(15 - (-10)) + 0.01}{0.01}\right)}{\log(2)} \approx 11.29$$

Kako je broj bitova cijeli broj, moramo uzeti prvi *n* uz koji će širina intervala biti manja ili jednaka zadanoj preciznosti. Kako nam za točno širinu od 0.01 treba 11.29 bitova, uz manje bitova (zaokružimo li 11.29 na 11) širina intervala bi bila veća od zadane. Stoga moramo uzeti 12 bitova za svaku od varijabli.

Kako imamo 3 varijable, kromosom će ukupno imati 12x3 = 26 bitova.

Time je točna opcija (b).

Zadatak 4.

Ako ste preskočili zadatak 3, vratite se na taj zadatak i proučite ga.

Tražimo minimum funkcije

$$f(x,y,z)=(x-5)^2+(y+2)^2+(z+3)^2+xy$$

gdje se svaka varijabla kodira uporabom 2 bita. Kako *x* pretražuje prostor [0,3], a *y* i *z* pretražuju prostor [-1,2], slijedi da se kombinacije 00, 01, 10 i 11 za *x*, *y* i *z* redom preslikavaju u vrijednosti:

x:	*y*:	*z*:
00 $\rightarrow$ 0	00 $\rightarrow$ -1	00 $\rightarrow$ -1
01 $\rightarrow$ +1	01 $\rightarrow$ 0	01 $\rightarrow$ 0
10 $\rightarrow$ +2	10 $\rightarrow$ +1	10 $\rightarrow$ +1
11 $\rightarrow$ +3	11 $\rightarrow$ +2	11 $\rightarrow$ +2

Zadatak navodi da se koristi jednostavna troturnirska selekcija – selekcija u kojoj se nasumično iz populacije odaberu tri jedinke; dvije bolje postaju roditelji koji produciraju djecu, te najbolje od djece u populaciji zamjenjuje treću odabranu (ona koja je između tri bila najlošija) jedinku.

Stoga, da bismo nastavili, moramo odrediti kolika je dobrota svake od odabranih jedinki. Prema tekstu zadatka, dobrota jedinke jednaka je negativnom iznosu vrijednosti funkcije u promatranom rješenju. Idemo odrediti te vrijednosti.

K1: 000101 = 00 01 01 $\rightarrow$ 00 kodira x, pa je x=0, 01 kodira y pa je y=0, 01 kodira z pa je z=0

$$f(0,0,0)=(0-5)^2+(0+2)^2+(0+3)^2+0\cdot 0=5^2+2^2+3^2+0=25+4+9+0=38$$

Dobrota ove jedinke stoga je fit_1 = -38

K2: 001011 = 00 10 11 $\rightarrow$ 00 kodira x, pa je x=0, 01 kodira y pa je y=1, 11 kodira z pa je z=2

$$f(0,1,2)=(0-5)^2+(1+2)^2+(2+3)^2+0\cdot 1=5^2+3^2+5^2+0=25+9+25+0=59$$

Dobrota ove jedinke stoga je fit_2 = -59

K3: 100001 = 10 00 01 $\rightarrow$ 10 kodira x, pa je x=2, 00 kodira y pa je y=-1, 01 kodira z pa je z=0

$$f(2,-1,0)=(2-5)^2+(-1+2)^2+(0+3)^2+2\cdot(-1)=3^2+1^2+3^2+(-2)=9+1+9-2=17$$

Dobrota ove jedinke stoga je fit_2 = -17

Kako su dobrote jedinki redom -38, -59, -17, najlošija je -59 odnosno jedinka K2; stoga će roditelji biti jedinke K1 i K3. Provodimo njihovo križanje operatorom križanja s jednom točkom prijeloma točno na pola kromosoma, i dobivamo dva djeteta:

Točka prijeloma

K1: 000101 = 000 | 101

K3: 100001 = 100 | 001

Križanjem stoga nastaju dva djeteta:

D1: 000001

D2: 100101

Nakon križanja, još je potrebno provesti mutaciju kako bismo dobili konačni bitovni zapis djece. U zadatku je specificirano da će mutacija u ovom konkretnom primjeru okrenuti posljednji bit u kromosomu, čime dobivamo djecu:

D1: 000000

D2: 100100

Sada moramo provesti vrednovanje djece. Da vidimo koje će od njih ući u populaciju i zamijeniti roditelja K2.

D1: 000000 = 00 00 00 → 00 kodira x, pa je x=0, 00 kodira y pa je y=-1, 00 kodira z pa je z=-1

$$f(0,-1,-1)=(0-5)^2+(-1+2)^2+(-1+3)^2+0\cdot(-1)=5^2+1^2+2^2+0=25+1+4+0=30$$

Dobrota ovog djeteta stoga je fit_1 = -30

D2: 100100 = 10 01 00 → 10 kodira x, pa je x=2, 01 kodira y pa je y=0, 00 kodira z pa je z=-1

$$f(2,0,-1)=(2-5)^2+(0+2)^2+(-1+3)^2+2\cdot 0=3^2+2^2+2^2+0=9+4+4+0=17$$

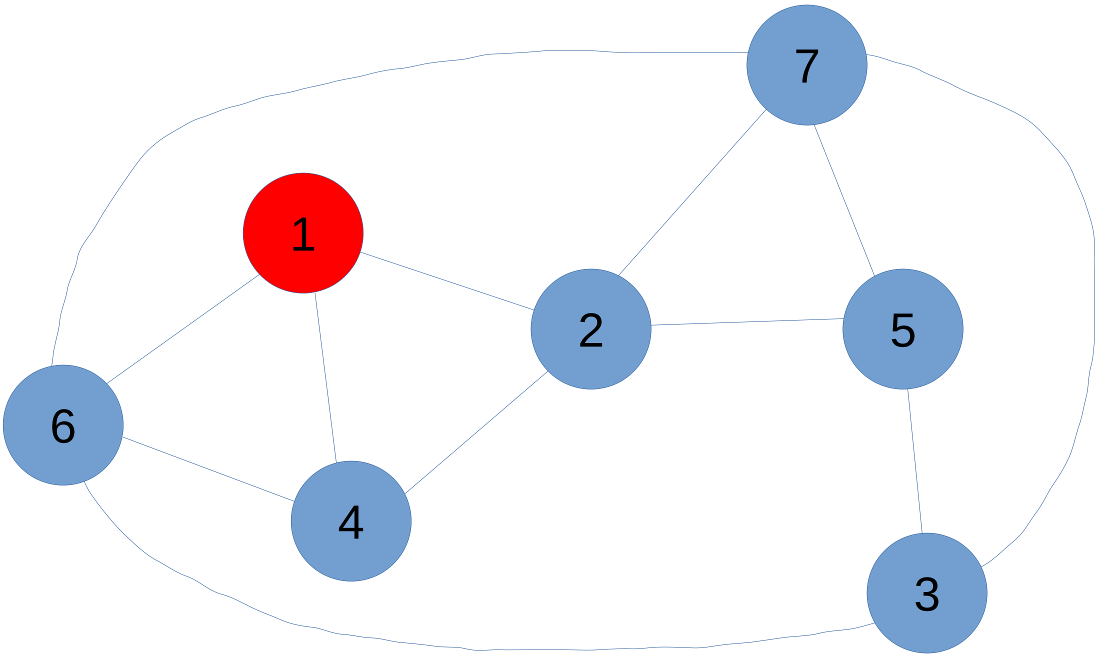
Dobrota ovog djeteta stoga je fit_2 = -17

U populaciju će ući bolje od dvoje dobivene djece – drugo dijete čija je dobrota -17.

Točna opcija je (b).

Zadatak 5.

U ovom zadatku mravljim algoritmom tražimo ciklus kroz zadani graf, pri čemu krećemo iz jednog čvora i zatim redom moramo posjetiti sve preostale čvorove, svaki točno jednom i potom se iz posljednjeg vratiti u početni. Ako to nije moguće, postupak konstrukcije završava neuspjehom. Na temelju danih vrijednosti feromonskih tragova (τ_{ij}) i heurističke informacije (η_{ij}) možemo rekonstruirati kako izgleda graf nad kojim konstruiramo rješenje. Bridovi postoje između čvorova *i* i *j*, odnosno radimo nad sljedećim grafom:



Prema tekstu zadatka, mrav konstrukciju rješenja započinje u čvoru 1. Iz čvora 1 može ići u čvor 2, 4 ili 6; vjerojatnost da će otići iz čvora i u čvor j općenito je proporcionalna umnošku feromonskog traga na alfa i heurističke informacije na beta, pri čemu su u ovom zadatku alfa i beta jednaki 2. Stoga vrijedi:

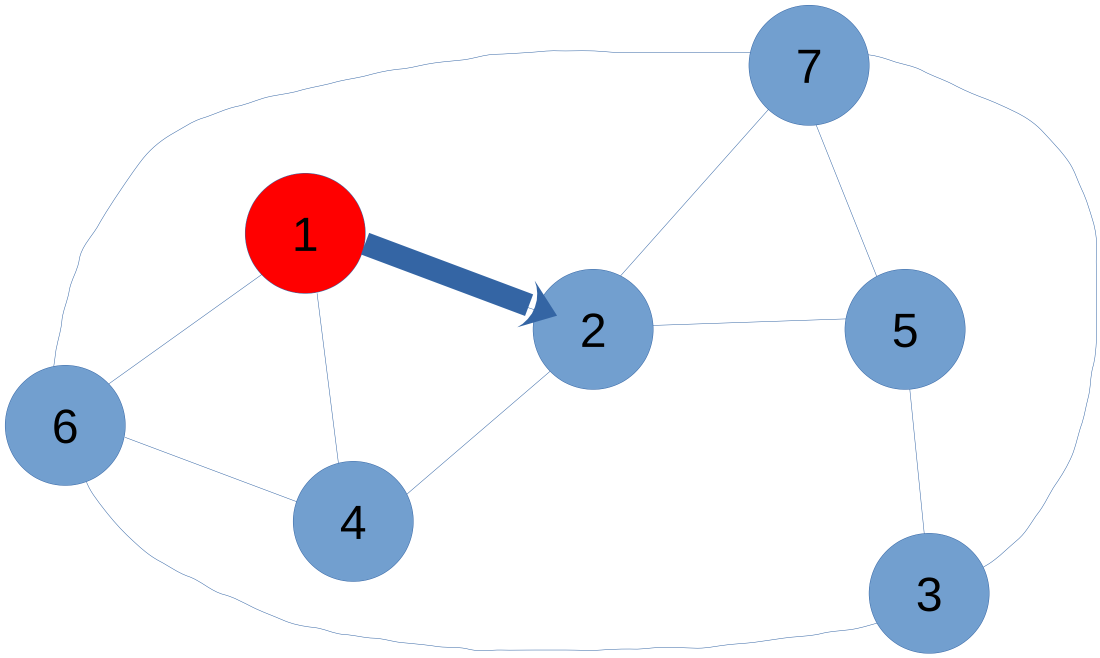
$$p_{1,2}=\frac{\tau_{1,2}^2\,\eta_{1,2}^2}{\tau_{1,2}^2\,\eta_{1,2}^2+\tau_{1,4}^2\,\eta_{1,4}^2+\tau_{1,6}^2\,\eta_{1,6}^2}=\frac{(1/\sqrt{(3)})^2\,3^2}{(1/\sqrt{(3)})^2\,3^2+2^2(1/\sqrt{(2)})^2+(1/2)^2(2)^2}=\frac{3}{3+2+1}=\frac{1}{2}$$

$$p_{1,4}=\frac{\tau_{1,4}^2\,\eta_{1,4}^2}{\tau_{1,2}^2\,\eta_{1,2}^2+\tau_{1,4}^2\,\eta_{1,4}^2+\tau_{1,6}^2\,\eta_{1,6}^2}=\frac{2^2(1/\sqrt{(2)})^2}{(1/\sqrt{(3)})^2\,3^2+2^2(1/\sqrt{(2)})^2+(1/2)^2(2)^2}=\frac{2}{3+2+1}=\frac{1}{3}$$

$$p_{1,6}=\frac{\tau_{1,6}^2\,\eta_{1,6}^2}{\tau_{1,2}^2\,\eta_{1,2}^2+\tau_{1,4}^2\,\eta_{1,4}^2+\tau_{1,6}^2\,\eta_{1,6}^2}=\frac{(1/2)^2(2)^2}{(1/\sqrt{(3)})^2\,3^2+2^2(1/\sqrt{(2)})^2+(1/2)^2(2)^2}=\frac{1}{3+2+1}=\frac{1}{6}$$

U stvarnoj implementaciji algoritma, mrav bi sada slučajno odabrao u koji sljedeći čvor odlazi uvažavajući ove vjerojatnosti, tj. kada bi puno puta bio u ovoj situaciji, najčešće bi odlazio u čvor 2, rjeđe u čvor 4, a najrjeđe u čvor 6. U zadatku naputak nam kaže da pretpostavimo da ishod slučajnog odabira odgovara onom koji je najvjerojatniji; stoga mrav odabire kao sljedeći čvor čvor 2.

Novo stanje prikazano je na grafu u nastavku.



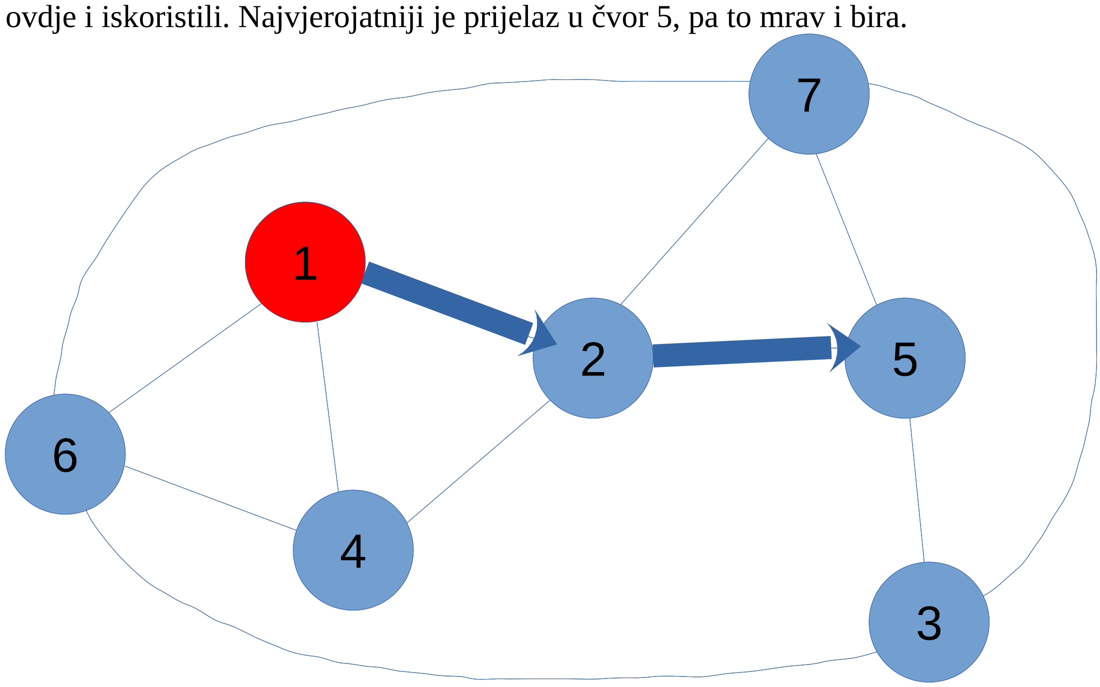
Sada ponavljamo postupak: mrav se nalazi u čvoru 2, i vjerojatnosno mora odabrati u koji će sljedeći čvor krenuti. Kao mogući čvorovi na raspolaganju su samo čvorovi 4, 5 i 7 (čvor 1 ispada jer je mrav u njemu već bio). Stoga računamo:

$$p_{2,4}=\frac{\tau_{2,4}^2\,\eta_{2,4}^2}{\tau_{2,4}^2\,\eta_{2,4}^2+\tau_{2,5}^2\,\eta_{2,5}^2+\tau_{2,7}^2\,\eta_{2,7}^2}=\frac{(1/2)^2(2\sqrt{(2)})^2}{(1/2)^2(2\sqrt{(2)})^2+(1/3)^2(3\sqrt{(3)})^2+(2)^2(1/2)^2}=\frac{2}{2+3+1}=\frac{1}{3}$$

$$p_{2,5}=\frac{3}{2+3+1}=\frac{1}{2}$$

$$p_{2,7}=\frac{1}{2+3+1}=\frac{1}{6}$$

Primijetite da su brojnici svih vjerojatnosti redom pribrojnici koji se javljaju u nazivniku, pa smo to ovdje i iskoristili. Najvjerojatniji je prijelaz u čvor 5, pa to mrav i bira.

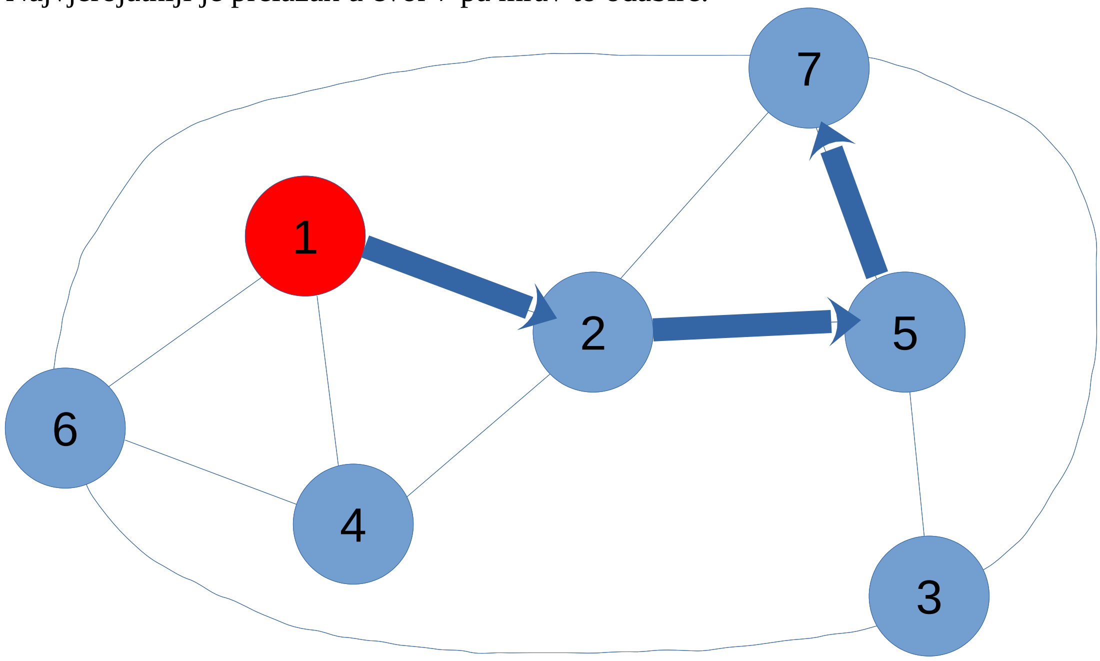


U čvoru 5 ponavljamo odabir, pri čemu su kandidati čvorovi 3 i 7.

$$p_{5,3}=\frac{\tau_{5,3}^2\,\eta_{5,3}^2}{\tau_{5,3}^2\,\eta_{5,3}^2+\tau_{5,7}^2\,\eta_{5,7}^2}=\frac{(1)^2(\sqrt{(2)})^2}{(1)^2(\sqrt{(2)})^2+(\sqrt{(3)})^2(1)^2}=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$$

$$p_{5,7}=\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5}$$

Najvjerojatniji je prelazak u čvor 7 pa mrav to odabire.

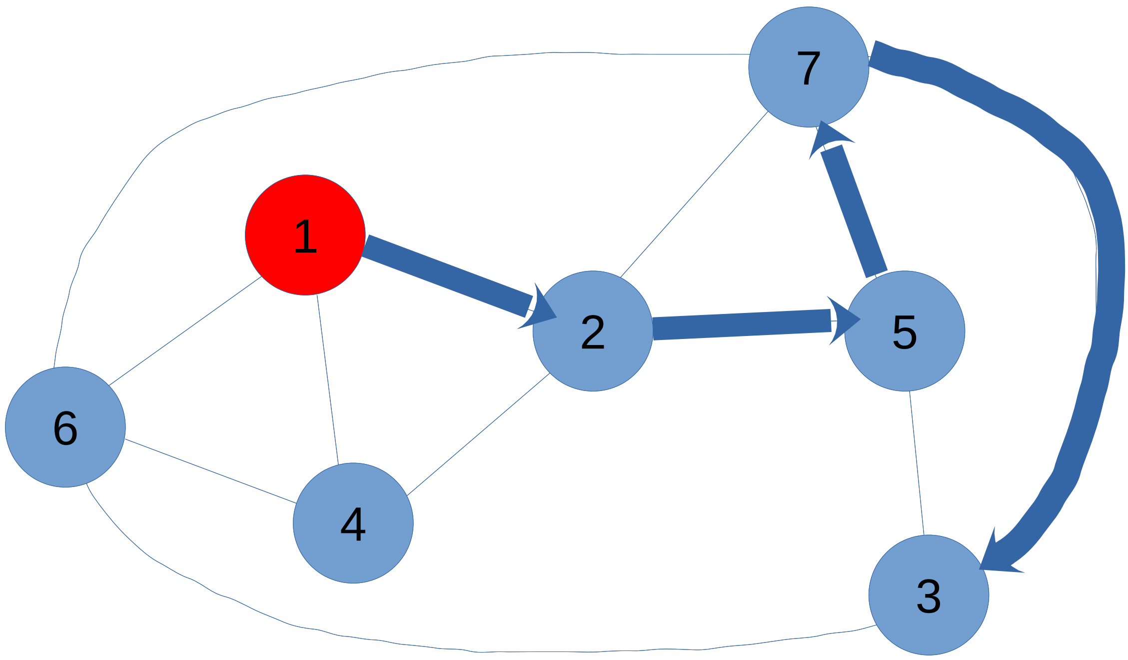


Ponavljamo odabir za čvor 7; mogući kandidati su čvorovi 3 i 6 (u 2 i 5 ne može jer je u njima već bio).

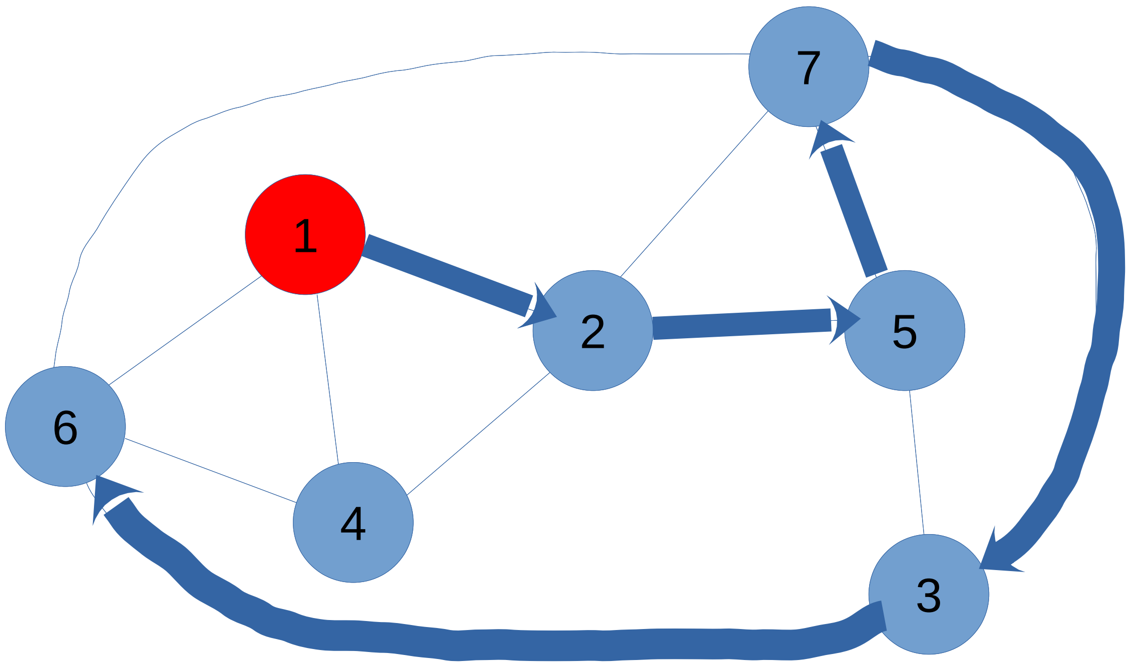
$$p_{7,3}=\frac{\tau_{7,3}^2\,\eta_{7,3}^2}{\tau_{7,3}^2\,\eta_{7,3}^2+\tau_{7,6}^2\,\eta_{7,6}^2}=\frac{(10)^2(1/(2\sqrt{(5)}))^2}{(10)^2(1/(2\sqrt{(5)}))^2+(10\sqrt{(2)})^2(1/10)^2}=\frac{5}{5+2}=\frac{5}{7}$$

$$p_{7,6}=\frac{2}{5+2}=\frac{2}{7}$$

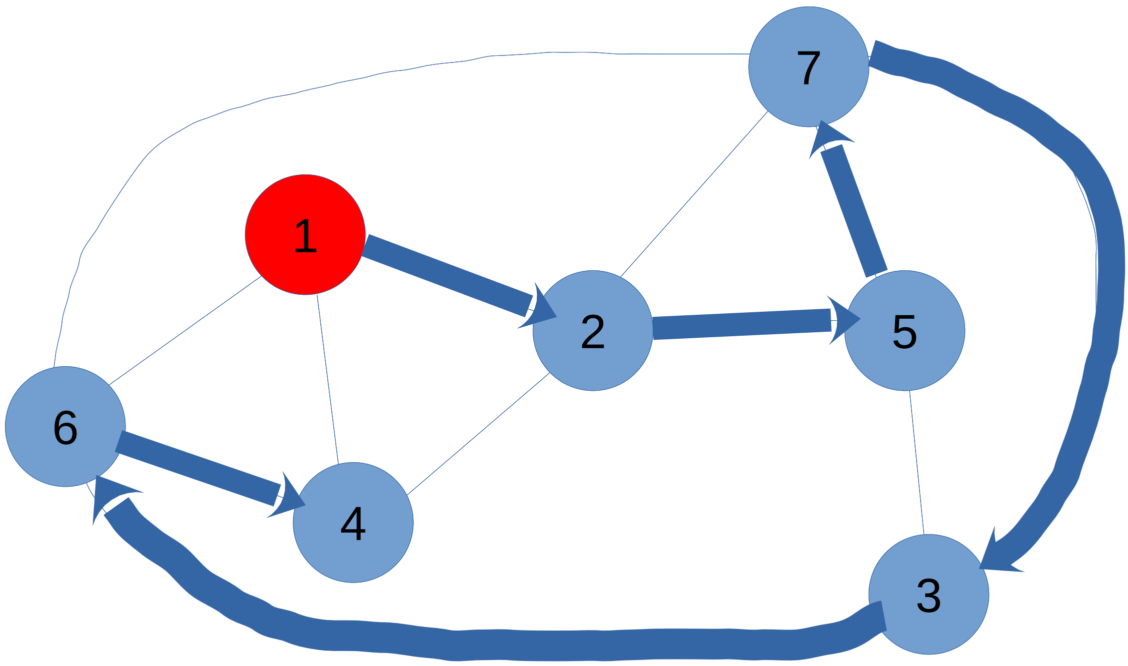
Najvjerojatniji je prelazak u čvor 3 pa mrav to odabire.



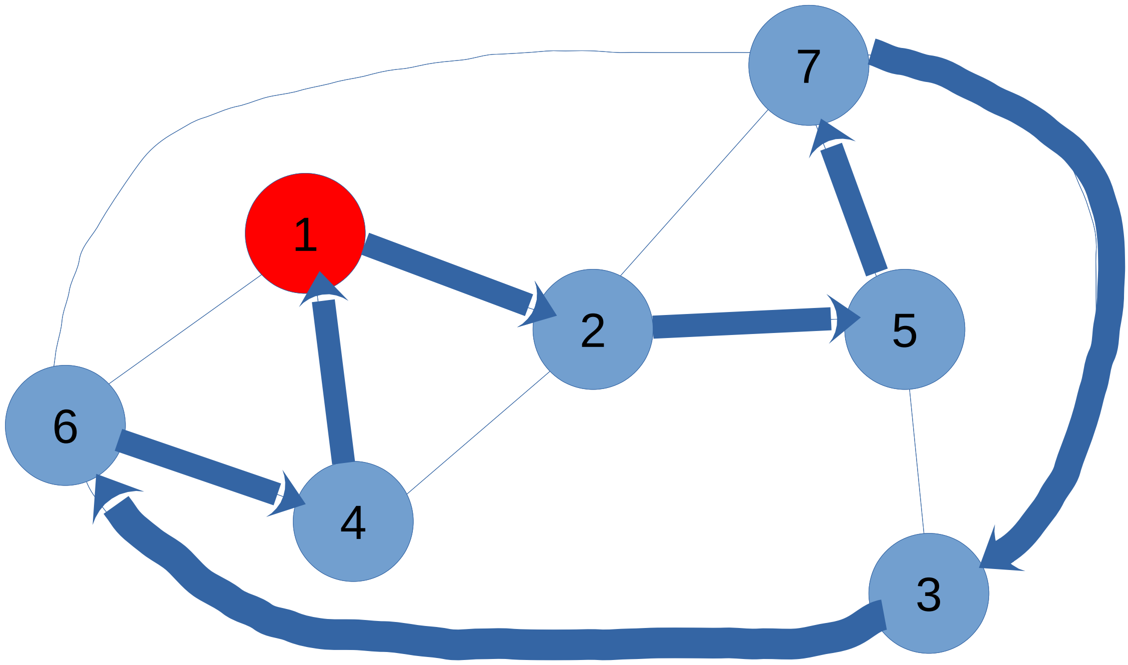
Iz čvora 3 mrav nema izbora – mora u čvor 6 jer je to jedini prema kojem postoji brid, a da u njemu već nije bio, pa je to sljedeći čvor:



U čvoru 6, slična je situacija; mrav mora u čvor 4 jer je u svim ostalima prema kojima postoji brid već bio (čvorovi 1 i 7), pa to bira:



Konačno, iz čvora 4, mrav jedino može odabrati čvor 1 jer više ne postoje neposjećeni čvorovi, i ovime mrav završava konstrukciju ciklusa:



Time mrav konstruira ciklus 1,2,5,7,3,6,4, pa je (b) točan odgovor – mrav u ciklusu slijedno prolazi kroz čvorove 6,4,1.

Zadatak 6.

Vidjeli smo u prethodnom zadatku kako mrav odabire sljedeći čvor – vjerojatnosno, pri čemu je vjerojatnost proporcionalna umnošku potencija feromonskih tragova i heurističke informacije. Ako već prvim ažuriranjem feromonskih tragova mrav deponira novu količinu feromonskih tragova koja je bitno veća od postojeće, ti će bridovi automatski postati vrlo vrlo vjerojatni izbor u sljedećoj epohi, i postupak će već u startu zaglaviti u tom jednom (očekivano vrlo lošem) ciklusu. Stoga je točan odgovor onaj pod (c).

Zadatak 7.

Ako neki brid niti u jednoj epohi nije uključen u pronađeno rješenje, onda će se feromonski tragovi na tom bridu konstantno isparavati, i nikada se neće nadopunjavati. Stoga će nakon prve iteracije na tom bridu količina feromonskih tragova biti:

$$\tau_1 \leftarrow \tau_0 \cdot (1-\rho)$$

nakon druge epohe:

$$\tau_2 \leftarrow \tau_1 \cdot (1-\rho) = \tau_0 \cdot (1-\rho) \cdot (1-\rho) = \tau_0 \cdot (1-\rho)^2$$

odnosno općenito nakon k-te epohe:

$$\tau_k \leftarrow \tau_0 \cdot (1-\rho)^k$$

Tražimo za koji će se *k* ovaj iznos srušiti na zadanu vrijednost 1:

$$\tau_0 \cdot (1-\rho)^k = 1$$

$$(1-\rho)^k = \frac{1}{\tau_0}$$

$$\log((1-\rho)^k) = \log(\frac{1}{\tau_0})$$

$$k \cdot \log(1-\rho) = \log(\frac{1}{\tau_0})$$

$$k = \frac{\log(\frac{1}{\tau_0})}{\log(1-\rho)}$$

$$k = \frac{\log(\frac{1}{100})}{\log(1-0.1)} \approx 43.7$$

Stoga je točan odgovor (c) 44.

Riješeni primjeri zadataka uz predavanje: Podržano učenje

Zadatak 1.

Razmatramo rešetkasti svijet 1 iz predavanja (prezentacija, slide 9). Agent u tom svijetu može poduzeti jednu od četiri akcije: pomak lijevo, pomak desno, pomak gore, pomak dolje. Neka je politika koju koristi agent stohastička: "slučajno s jednolikom razdiobom odaberi smjer pomaka". Odstupit ćemo od predavanja pa će sada i svijet biti nedeterministički: u 80% slučajeva izvest će traženu akciju, a u preostalih 20% slučajeva izvest će suprotnu akciju. Pri tome će pomak biti izveden samo ako je to moguće (agent ne može proći kroz zid); ako nije, agent ostaje na ćeliji na kojoj se nalazi. Ako agent prijeđe u ćeliju 0 ili ćeliju 15, dobit će nagradu od +1; za sve ostale prijelaze dobit će nagradu življenja od -0.1. Parametar $\gamma=1$.

Postupkom vrednovanja politike želimo odrediti iznose funkcije vrijednosti stanja. Pretpostavite da je u iteraciji *j* trenutna aproksimacija funkcije vrijednosti takva da ćeliji *k* dodjeljuje iznos funkcije vrijednosti stanja od upravo *k*, gdje *k* ide od 0 do 15, uz iznimku da je izlaznim ćelijama (0 i 15) fiksno pridijeljen iznos 0. Odredite koji će biti iznos funkcije vrijednosti u iteraciji *j*+1 za ćeliju 1.

<u>Rješenje</u>

U iteraciji *j*, aproksimacija funkcije stanja je:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	0

Zanima nas koje će vrijednosti biti zapisane u aproksimaciji funkcije vrijednosti stanja u iteraciji j+1, i to konkretno za ćeliju 1:

0			
			0

Nove vrijednosti aproksimacije računamo prema izrazu (4) sa slidea 12. Označimo s v(s) odnosno s v'(s) iznose funkcije vrijednosti stanja u aproksimacijama *j* i *j*+1, pri čemu stanje odgovara ćeliji u kojoj se agent nalazi.

U svakom stanju agent može poduzeti jednu od četiri akcije i to prema uniformnoj distribuciji. Stoga vrijedi:

v'(s1) = π(←|s1)*q(s1,←) + π(→|s1)*q(s1,→) + π(↑|s1)*q(s1,↑) + π(↓|s1)*q(s1,↓).

Iz teksta zadatka čitamo da vrijedi: $\pi(\leftarrow|s1) = \pi(\rightarrow|s1) = \pi(\uparrow|s1) = \pi(\downarrow|s1) = ¼$, pa trebamo odrediti još samo četiri q-vrijednosti.

Iz stanja s1, pod akcijom ← u 80% ćemo završiti u stanju s0 i dobiti nagradu +1; u preostalih 20% slučajeva otići ćemo u stanje s2 i dobiti nagradu življenja od -0.1. Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} q(s1,\leftarrow) &= p(s0|s1,\leftarrow)*(r(s1,\leftarrow,s0) + \gamma*v(s0)) + p(s2|s1,\leftarrow)*(r(s1,\leftarrow,s2) + \gamma*v(s2)) \\ &= 0,8*(1+1*0) + 0,2*(-0,1+1*2) \\ &= 1,18 \end{aligned}$$

Primijetite da potrebne iznose funkcije stanja koji su nam potrebni na desnoj strani prethodnog izraza uzimamo iz prethodne aproksimacije.

Iz stanja s1, pod akcijom → u 80% ćemo završiti u stanju s2 i dobiti nagradu življenja -0.1; u preostalih 20% slučajeva otići ćemo u stanje s0 i dobiti nagradu +1. Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} q(s1,\rightarrow) &= p(s2|s1,\rightarrow)*(r(s1,\rightarrow,s2) + \gamma*v(s2)) + p(s0|s1,\rightarrow)*(r(s1,\leftarrow,s0) + \gamma*v(s0)) \\ &= 0,8*(-0,1+1*2) + 0,2*(1+1*0) \\ &= 1,72 \end{aligned}$$

Iz stanja s1, pod akcijom ↑ u 80% ćemo ostati u stanju s1 i dobiti nagradu življenja -0.1; u preostalih 20% slučajeva otići ćemo u stanje s5 i dobiti nagradu življenja -0.1. Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} q(s1,\uparrow) &= p(s1|s1,\uparrow)*(r(s1,\uparrow,s1) + \gamma*v(s1)) + p(s5|s1,\uparrow)*(r(s1,\uparrow,s5) + \gamma*v(s5)) \\ &= 0,8*(-0,1+1*1) + 0,2*(-0,1+1*5) \\ &= 1,7 \end{aligned}$$

Iz stanja s1, pod akcijom ↓ u 80% ćemo završiti u stanju s5 i dobiti nagradu življenja -0.1; u preostalih 20% slučajeva ćemo ostati u stanju s1 i dobiti nagradu življenja -0.1. Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} q(s1,\downarrow) &= p(s5|s1,\downarrow)*(r(s1,\downarrow,s5) + \gamma*v(s5)) + p(s1|s1,\downarrow)*(r(s1,\downarrow,s1) + \gamma*v(s1)) \\ &= 0,8*(-0,1+1*5) + 0,2*(-0,1+1*1) \\ &= 4,1 \end{aligned}$$

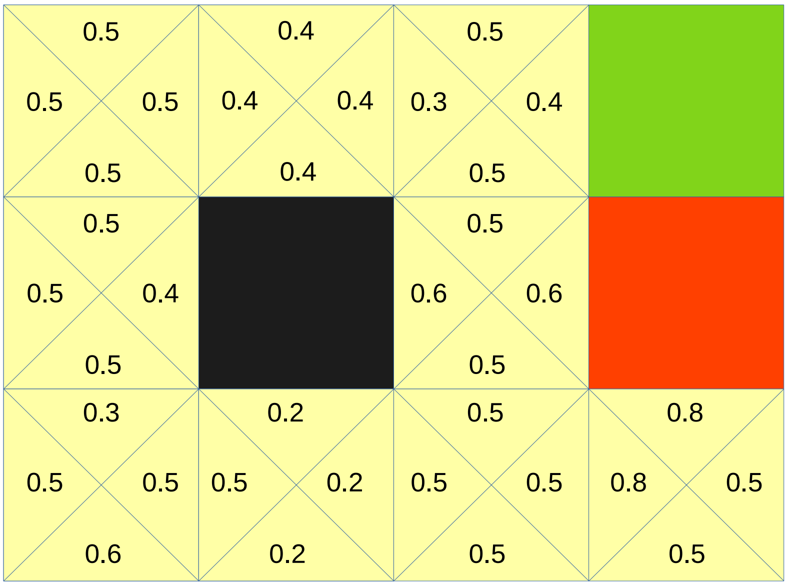
Time je nova aproksimacija za stanje s1 jednaka:

$$\begin{aligned} v'(s1) &= \pi(\leftarrow|s1)*q(s1,\leftarrow) + \pi(\rightarrow|s1)*q(s1,\rightarrow) + \pi(\uparrow|s1)*q(s1,\uparrow) + \pi(\downarrow|s1)*q(s1,\downarrow) \\ &= ¼ * 1,18 + ¼ * 1,72 + ¼ * 1,7 + ¼ * 4,1 \\ &= 2,175 \end{aligned}$$

Zadatak 2.

Razmatramo rešetkasti svijet 2 iz predavanja (slide 15). Postupkom q-učenja želimo naučiti optimalne iznose q-funkcije i na temelju toga optimalnu politiku agenta.

Neka je trenutna aproksimacija q-funkcije sljedeća:



Agent kreće iz donjeg desnog ugla, i redom poduzima akcije: ←, ↑, ↑, →. Okolina u kojoj agent djeluje je stohastička; pretpostavite stoga da se tijekom ove epohe učenja slučajno dogodilo da je okolina baš izvela akciju koju je agent zatražio. Ako je α=0.25, γ =1, a nagrada življenja -0.1, odredite kako će izgledati aproksimacija q-funkcije nakon izvedene epohe.

<u>Rješenje</u>

Agent se početno nalazi u ćeliji 11 (donja desna) i poduzima akciju ←. Sukladno tekstu zadatka, okolina će zbog toga agenta prebaciti u stanje 10 te mu dati nagradu življenja od -0.1. Na temelju ovih podataka agent računa kolika bi trebala biti q-vrijednost

$q(s11,\leftarrow) = r(s11,\leftarrow,s10) + \gamma * v(s10)$

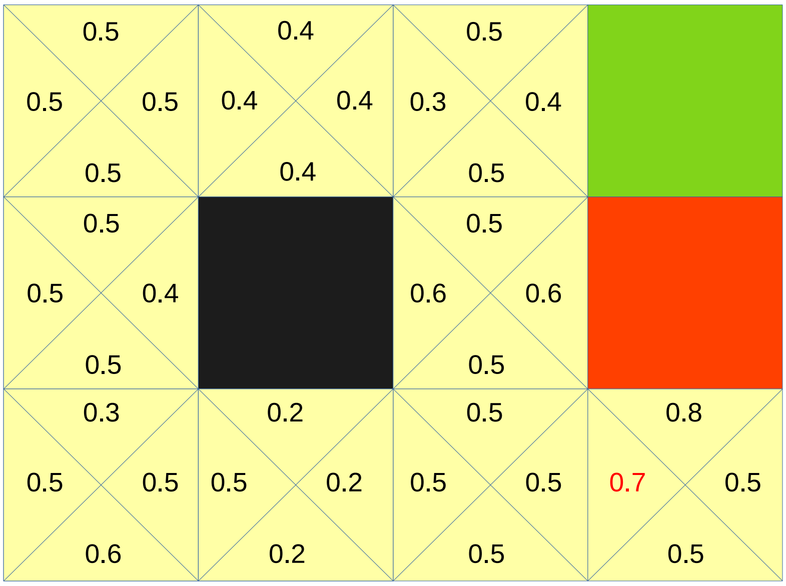
Kako je pretpostavka da učimo optimalnu politiku, tada je v(s10) maksimum q(s10,a) po svim akcijama, pa je:

$$\begin{aligned} q(s11,\leftarrow) &= r(s11,\leftarrow,s10) + \gamma * \max(q(s10,\leftarrow),q(s10,\rightarrow),q(s10,\uparrow),q(s10,\downarrow)) \\ &= -0{,}1 + 1 * \max(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) \\ &= -0{,}1 + 1 * 0{,}5 \\ &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Agent međutim u svojim podatcima ima zapisano da je $q(s11,\leftarrow)=0{,}8$. Stoga ažurira podatke u tablici tako da unutra upiše vrijednost koja je linearna interpolacija između trenutno zapisanih podataka pomnoženih s (1-α) i novoizračunate vrijednosti pomnožene s α:

$q(s11,\leftarrow) = (1-0{,}25)*0{,}8 + 0{,}25*0{,}4 = 0{,}7$

Nova aproksimacija prikazana je u nastavku.



Agent se sada nalazi u ćeliji 10 i poduzima akciju ↑. Sukladno tekstu zadatka, okolina će zbog toga agenta prebaciti u stanje 6 te mu dati nagradu življenja od -0.1. Na temelju ovih podataka agent računa kolika bi trebala biti q-vrijednost

$$
\begin{aligned}
q(s10,\uparrow) \quad &= r(s10,\uparrow,s6) + \gamma * v(s6) \\
&= r(s10,\uparrow,s6) + \gamma * \max(q(s6,\leftarrow),q(s6,\rightarrow),q(s6,\uparrow),q(s6,\downarrow)) \\
&= -0{,}1 + 1 * \max(0.6, 0.6, 0.5, 0.5) \\
&= -0{,}1 + 1 * 0{,}6 \\
&= 0{,}5
\end{aligned}
$$

Agent u svojim podatcima ima zapisano da je q(s10,↑)=0,5. Stoga ažurira podatke u tablici tako da unutra upiše vrijednost koja je linearna interpolacija između trenutno zapisanih podataka pomnoženih s (1-α) i novoizračunate vrijednosti pomnožene s α:

$$q(s10,\uparrow) = (1-0{,}25)*0{,}5 + 0{,}25*0{,}5 = 0{,}5$$

čime se zapravo ništa ne mijenja.

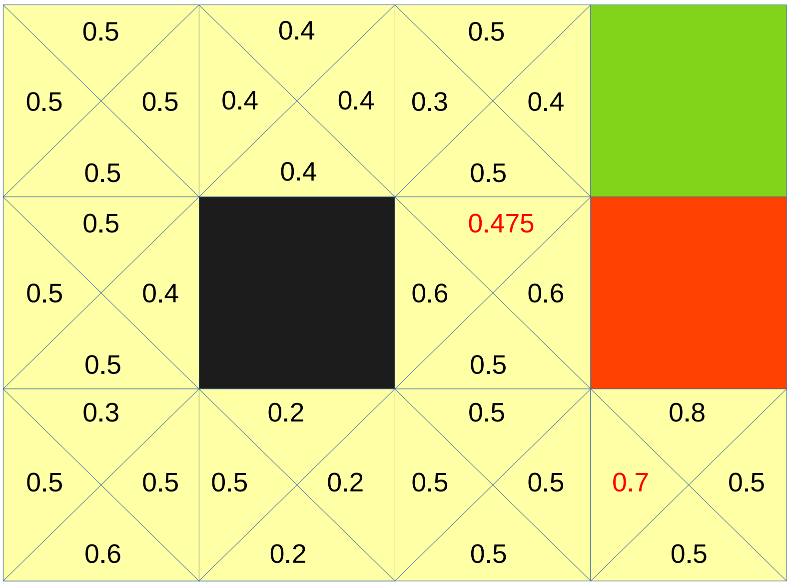
Agent se sada nalazi u ćeliji 6 i poduzima akciju ↑. Sukladno tekstu zadatka, okolina će zbog toga agenta prebaciti u stanje 2 te mu dati nagradu življenja od -0.1. Na temelju ovih podataka agent računa kolika bi trebala biti q-vrijednost

$$
\begin{aligned}
q(s6,\uparrow) \quad &= r(s6,\uparrow,s2) + \gamma * v(s2) \\
&= r(s6,\uparrow,s2) + \gamma * \max(q(s2,\leftarrow),q(s2,\rightarrow),q(s2,\uparrow),q(s2,\downarrow)) \\
&= -0{,}1 + 1 * \max(0.3, 0.4, 0.5, 0.5) \\
&= -0{,}1 + 1 * 0{,}5 \\
&= 0{,}4
\end{aligned}
$$

Agent u svojim podatcima ima zapisano da je q(s6,↑)=0,5. Stoga ažurira podatke u tablici tako da unutra upiše vrijednost koja je linearna interpolacija između trenutno zapisanih podataka pomnoženih s (1-α) i novoizračunate vrijednosti pomnožene s α:

$$q(s6,\uparrow) = (1-0{,}25)*0{,}5 + 0{,}25*0{,}4 = 0{,}475$$

Nova aproksimacija prikazana je u nastavku.



Agent se sada nalazi u ćeliji 2 i poduzima akciju →. Sukladno tekstu zadatka, okolina će zbog toga agenta prebaciti u stanje 3 te mu dati nagradu iznosa 1. Na temelju ovih podataka agent računa kolika bi trebala biti q-vrijednost

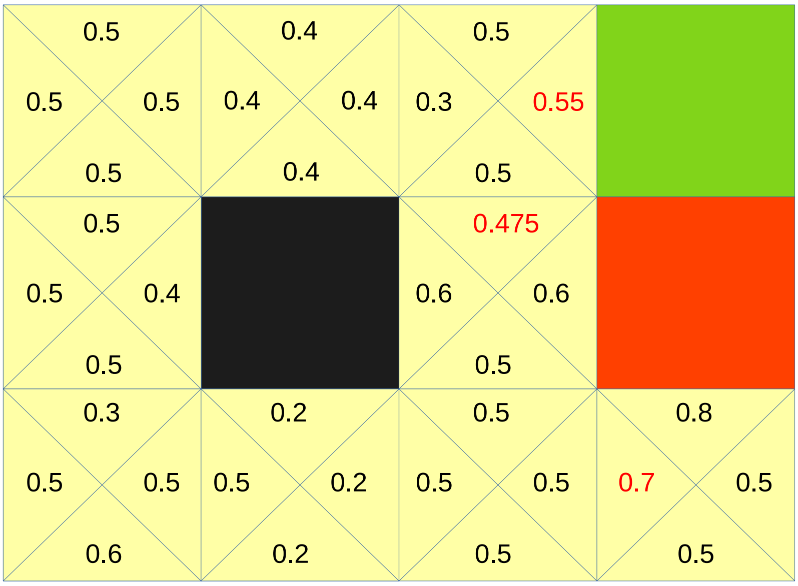
$$
\begin{aligned}
q(s2,\rightarrow) &= r(s2,\rightarrow,s3) + \gamma * v(s3) \\
&= r(s2,\rightarrow,s3) + \gamma * 0 \\
&= 1 + 1*0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Primijetite da je stanje 3 terminalno; vrijednost funkcije stanja za sva terminalna stanja je po definiciji jednaka 0.

Agent u svojim podatcima ima zapisano da je $q(s2,\rightarrow)=0,4$. Stoga ažurira podatke u tablici tako da unutra upiše vrijednost koja je linearna interpolacija između trenutno zapisanih podataka pomnoženih s $(1-\alpha)$ i novoizračunate vrijednosti pomnožene s α:

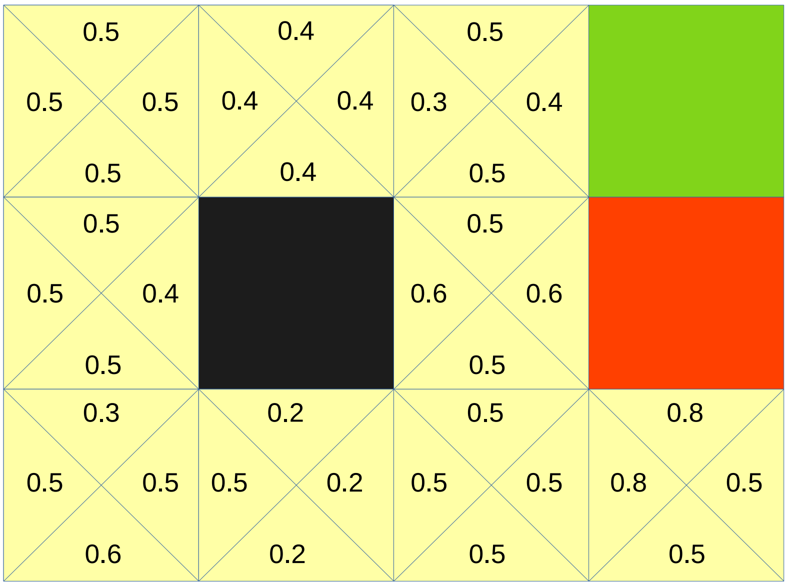
$$q(s2,\rightarrow) = (1-0,25)*0,4 + 0,25*1 = 0,55$$

Nova aproksimacija i konačno rješenje zadatka prikazano je u nastavku.



Zadatak 3.

Razmatramo rešetkasti svijet 2 iz predavanja (slide 15). Postupkom q-učenja naučili smo iznose q-funkcije pa na temelju njih želimo definirati politiku agenta. Neka je naučena aproksimacija q-funkcije sljedeća:



Kako izgleda pripadna politika po kojoj bi agent trebao igrati?

<u>Rješenje</u>

Algoritmom q-učenja uče se optimalne vrijednosti q-funkcije. Pod tom pretpostavkom, da bi igrao optimalno, agent treba vući one akcije koje u svakom stanju maksimiziraju q-vrijednosti. Stoga je pripadna politika sljedeća: