VJEROJATNOST I STATISTIKA, FER
dodatni zadaci, 6. i 7. tjedan (12. i 13. predavanje)
Neprekinute slučajne varijable

Zadatak 1.

Odredite vrijednosti realnih parametara a i b takve da funkcija F dana s

$$F(x) = a + b \cdot arctgx, \ \ x \in \mathbf{R},$$

bude funkcija razdiobe neke slučajne varijable.

Za takve parametre a i b izračunajte $P(-1 \leq X \leq 1)$ i $P(X \geq 1)$ i odredite funkciju gustoće f slučajne varijable X.

Rješenje.

Za $b < 0$ funkcija F je padajuća te ne može biti funkcija razdiobe neke slučajne varijable kao ni za $b = 0$, jer bi tada bila konstanta.

Za $b > 0$ je funkcija F je rastuća i neprekinuta pa parametre a i b treba odrediti iz uvjeta $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Imamo $\lim_{x \to -\infty} a + b \cdot arctgx = a - b \cdot \frac{\pi}{2} = 0$
i
$\lim_{x \to +\infty} a + b \cdot arctgx = a + b \cdot \frac{\pi}{2} = 1$.

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{1}{\pi}$.

Dakle, funkcija razdiobe F je dana s

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arctgx, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Sada lagano dobivamo

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

i

$$P(X \geq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Deriviranjem funkcije raziobe dobivamo funkciju gustoće f; tj. $f = F'$ pa imamo

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Zadatak 2.

Odredite vrijednost realnog parametara C takvog da funkcija F dana s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Cx^2, & x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ D, & x \geq 2, \end{cases}$$

bude funkcija razdiobe neke neprekinute slučajne varijable.

Za takve parametre C i D izračunajte $E(X)$.

Rješenje.

Da bi F bila funkcija razdiobe neke slučajne varijable mora biti $D = 1$.

Da bi F bila funkcija razdiobe neprekinute slučajne varijable F mora biti neprekinuta te zato mora biti ¸$\lim_{x \to 2-} F(x) = 1$ odakle slijedi $C = \frac{1}{4}$.

Dakle, funkcija razdiobe F je dana s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 1, & x \in x \geq 2 \end{cases}$$

Deriviranjem dobivamo funkciju gustoće f:

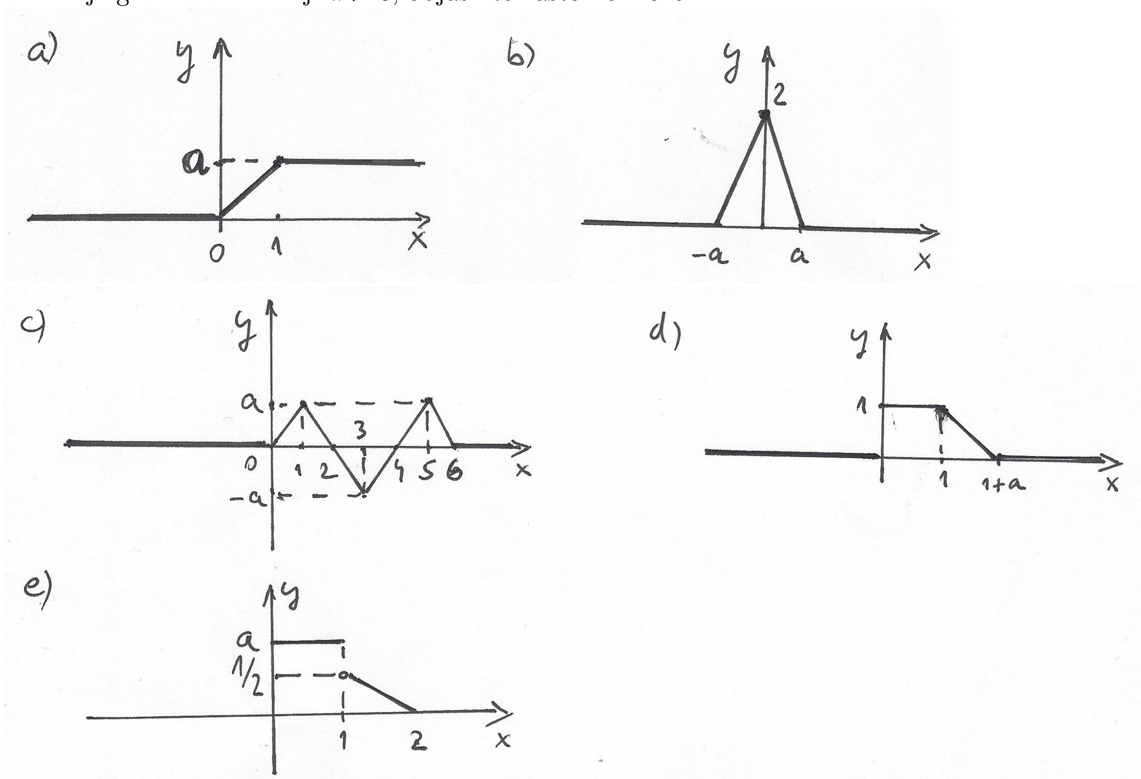
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0, & inace \end{cases}$$

Konačno računamo očekivanje:

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Zadatak 3.

Ako, za neki $a > 0$, graf na slici može biti graf funkcije gustoće f neke slučajne varijable, odredite vrijednost takvog parametra a, a ako ne može biti graf funkcije gustoće ni za koji $a > 0$, objasnite zašto ne može.



Rješenje.

a) Ne može biti funkcija gustoće jer je površina ispod grafa funkcije na slici i iznad osi x beskonačna.

b) Funkcija je nenegativna te može biti funkcija gustoće ako je površina ispod grafa funkcije na slici i iznad osi x jednaka 1. Kako je ta površina jednaka $\frac{2a \cdot 2}{2} = \frac{a}{2}$, mora biti $a = \frac{1}{2}$.

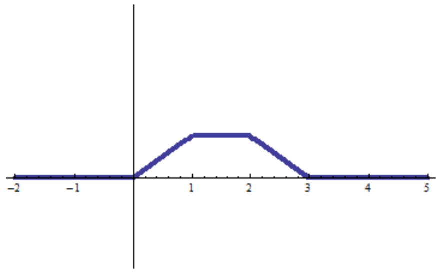
c) Ne može biti funkcija gustoće, jer nije nenegativna.

d) Ne može biti funkcija gustoće, jer je površina ispod grafa funkcije gustoće (i iznad osi x) veća od 1 za svaki $a > 0$.

e) Funkcija je nenegativna te može biti funkcija gustoće ako je površina ispod grafa funkcije na slici i iznad osi x jednaka 1. Kako je ta površina jednaka $a + \frac{1}{4}$, mora biti $a = \frac{3}{4}$.

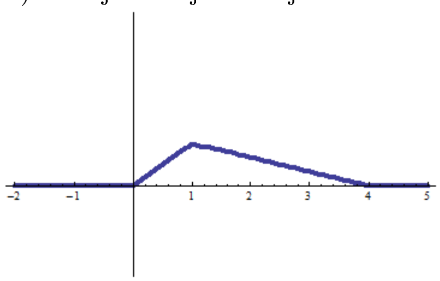
Zadatak 4.

a) Slučajna varijabla X je zadana funkcijom gustoće čiji je graf dan slikom:



Izračunajte $P(1 < X < 2)$ i $E(X)$.

b) Slučajna varijabla X je zadana funkcijom gustoće čiji je graf dan slikom:

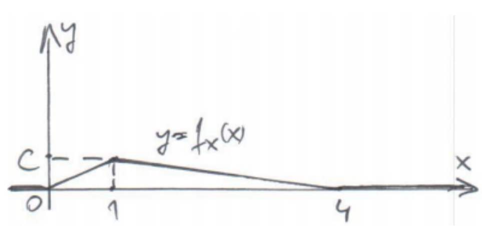


Izračunajte $P(1 < X < 2)$ i $E(X)$.

Rješenje.

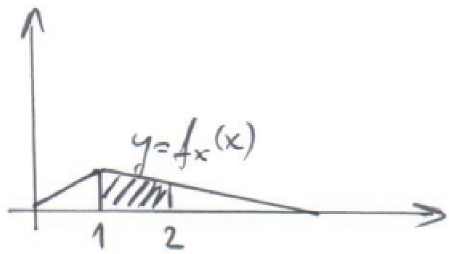
a) U ovom zadatku možemo na pitanja odgovoriti bez računanja. Naime, vidimo da je iznos površine koja odgovara vjerojatnosti $P(1 < X < 2)$ predstavlja točno polovinu površine lika ispod grafa funkcije gustoće i iznad osi x slijedi da je $P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$, a s obzirom da je funkcija gustoće simetrična s obzirom na pravac $x = \frac{3}{2}$, slijedi da je $E(X) = \frac{3}{2}$.

b)



Označimo $C = f(1)$ kako je nacrtano i na slici. S obzirom da površinu ispod grafa funkcije gustoće i iznad osi x lagano računamo prema formuli za površinu trokuta, dobivamo $\frac{4 \cdot C}{2} = 1$; dakle, mora biti $C = \frac{1}{2}$.

Vrijednost $P(1 < X < 2)$ je jednaka površini trapeza označenog na slici:



Korištenjem formulu za površinu trapeza dobivamo

$$P(1 < X < 2) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} \cdot 1 = \frac{5}{12}.$$

Inače je funkcija gustoće f_X slučajne varijable X dana s

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0, 1\rangle, \\ \frac{2}{3} - \frac{x}{6}, & x \in [1, 4]. \end{cases}$$

Potom računamo očekivanje:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_1^4 x \cdot (\frac{2}{3} - \frac{x}{6}) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_1^4 (\frac{2x}{3} - \frac{x^2}{6}) dx \\ &= \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{3}\Big|_1^4 - \frac{x^3}{18}\Big|_1^4 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Primjedba. $P(1 < X < 2)$ smo mogli izračunati i integriranjem, tj.

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 (\frac{2}{3} - \frac{x}{6}) dx = \frac{5}{12}.$$

Zadatak 5.

Na sreću odabiremo točku unutar pravokutnika čije stranice imaju duljine 3 i 4. Neka je vrijednost slučajne varijable X udaljenost te točke do najbliže stranice pravokutnika.

Izračunajte $E(X)$.

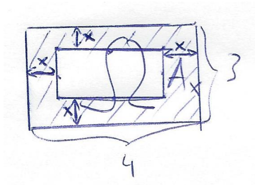
Rješenje.

Skup svih elementarnih događaja Ω je pravokutnik sa stranicama duljina 3 i 4.

Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X.

Ako je $x \leq 0$, očito je $F(x) = P(X < x) = 0$, a ako je $x \geq 1$, očito je $F(x) = P(X < x) = 1$.

Neka je sada $x \in \langle 0, \frac{3}{2} \rangle$.



Tada je

$$F(x) = P(X < x) = \frac{m(A_x)}{m(\Omega)} = \frac{12 - (4-2x)(3-2x)}{12} = \frac{7}{6}x - \frac{1}{3}x^2.$$

Da bismo izračunali $E(X)$, najprije moramo odrediti funkciju gustoće f.
Imamo

$$f(x) = F'(x) = \frac{7}{6} - \frac{2}{3}x, \ x \in \langle 0, \frac{3}{2} \rangle.$$

Sada je

$$E(X) = \int_0^{\frac{3}{2}} x\left(\frac{7}{6} - \frac{2}{3}x\right) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{7}{6}x - \frac{2}{3}x^2\right) dx = \frac{9}{16}.$$

Zadatak 6.

Slučajna varijabla X je zadana funkcijom gustoće $f(x) = Cx^2$, $x \in [0, 4]$. Odredite vrijednost konstante C te izračunajte $E(X)$ i $E(\lfloor X \rfloor)$.

Rješenje.

Najprije odredimo konstantu C. Imamo

$$\int_0^4 Cx^2\, dx = C\frac{x^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{64}{3}C = 1,$$

odakle slijedi $C = \frac{3}{64}$.

Dakle, funkcija gustoće je dana s $f(x) = \frac{3x^2}{64}$, $x \in [0, 4]$.

Sada računamo očekivanje slučajne varijable X.

$$E(X) = \int_0^4 \frac{3x^3}{64}\, dx = \frac{3}{64} \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^4 = 3.$$

$\lfloor X \rfloor$ je diskretna slučajna varijabla koja može poprimiti vrijednosti 0, 1, 2 i 3. Da bismo izračunali $E(\lfloor X \rfloor)$, izračunajmo najprije vjerojatnosti da $\lfloor X \rfloor$ poprimi vrijednosti 1, 2 i 3:

$$P(\lfloor X \rfloor = 1) = \int_1^2 \frac{3x^2}{64} = \frac{x^3}{64}\bigg|_1^2 = \frac{7}{64},$$

$$P(\lfloor X \rfloor = 2) = \int_2^3 \frac{3x^2}{64} = \frac{x^3}{64}\bigg|_2^3 = \frac{19}{64},$$

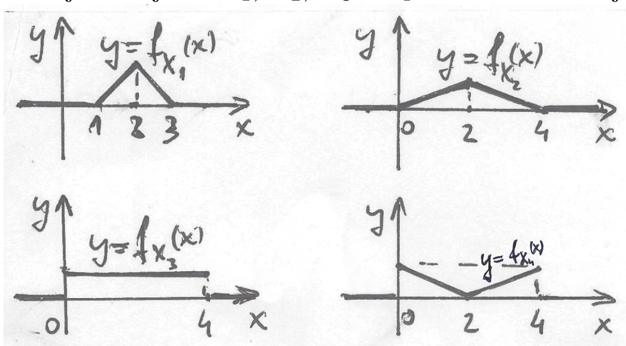
$$P(\lfloor X \rfloor = 1) = \int_3^4 \frac{3x^2}{64} = \frac{x^3}{64}\bigg|_3^4 = \frac{37}{64}.$$

Sada imamo:

$$E(\lfloor X \rfloor) = 1 \cdot \frac{7}{64} + 2 \cdot \frac{19}{64} + 3 \cdot \frac{37}{64} = \frac{156}{64} = \frac{39}{16} = 2.4375.$$

Zadatak 7.

Slučajne varijable X_1, X_2, X_3 i X_4 zadane su funkcijom gustoće na slici:



Koliko iznose očekivanja tih slučajnih varijabli?
Odredite disperzije tih slučajnih varijabli!

Rješenje.

Zbog simetrije s obzirom na pravac $x = 2$, očito je $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = 2$.

Koristeći činjenicu da se radi o funkcijama gustoće (površina ispod grafa funkcije gustoće i iznad osi x je jednaka 1), možemo odrediti jednadžbe funkcija gustoće svake slučajne varijable. Tako imamo:

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2\rangle, \\ 3-x, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0,2\rangle, \\ 1-\frac{x}{4}, & x \in [2,4]. \end{cases}$$

$$f_{X_3}(x) = \frac{1}{4}, x \in [0,4].$$

$$f_{X_4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{x}{4}, & x \in [0,2\rangle, \\ \frac{x}{4}-\frac{1}{2}, & x \in [2,4]. \end{cases}$$

$D(X_1)$ možemo izračunati, prema formuli $D(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2$,

$$\begin{aligned} D(X_1) &= \int_1^3 x^2 f_{X_1}(x) - (E(X_1))^2 \\ &= \int_1^2 x^2 \cdot (x-1)\,dx + \int_2^3 x^2 \cdot (3-x)\,dx - 4 = ... = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

ili, prema definicijskoj formuli $D(X_1) = E((X_1 - E(X_1))^2) = E(X_1 - 2)^2$,

$$D(X_1) = E((X_1 - E(X_1))^2) = E(X_1 - 2)^2 = \int_1^3 (x-2)^2 f_{X_1}(x)\,dx$$
$$= 2 \cdot \int_2^3 (x-2)^2 \cdot (3-x)\,dx = ... = \frac{1}{6}.$$

No zapravo je najjednostavnije uvesti slučajnu varijablu $X_1' = X_1 - 2$ znajući da je$D(X_1 - 2) = D(X_1)$ (horizontalni pomak grafa funkcije gustoće ne utječe na disperziju). Slučajna varijabla X_1' ima funkciju gustoće

$$f_{X_1'}(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0\rangle, \\ 1-x, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

i njen graf je simetričan u odnosu na os y (funkcija je parna); tj. očekivanje te slučajne varijable je 0 (što olakšava izračun) pa imamo,

$$D(X_1) = D(X_1') = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

Čitatelju prepuštamo da sam provjeri da je $D(X_2) = \frac{2}{3}$, $D(X_3) = \frac{4}{3}$ i $D(X_4) = 4$. (za izračun $D(X_3)$ možemo i koristiti formulu za disperziju jednolike slučajne varijable na intervalu $[a, b]$ koja iznosi $\frac{(b-a)^2}{12}$.)

Primjedba. Konačno primijetimo da je $D(X_4) > D(X_3) > D(X_2) > D(X_1)$ što je odmah bilo očito da mora vrijediti jer vidimo da je rasap oko očekivane vrijednosti najveći za slučajnu varijablu X_4, potom za X_3 pa X_2 i X_1.

Zadatak 8.

Neka je slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Izračunajte $P(|X-2| > 1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} P(|X-2| > 1) &= P(X-2 < -1) + P(X-2 > 1) = P(X < 1) + P(X > 3) \\ &= \int_0^1 e^{-x}\,dx + \int_3^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1} + e^{-3} \approx 0.682 \end{aligned}$$

Primjedba. Zadatak se može riješiti i tako da se najprije odredi funkcija gustoće ili funkcija razdiobe slučajne varijable $|X-2|$, ali to zahtijeva puno više posla.

Zadatak 9.

Neka je slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbf{R}.$$

Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^2$.

Primjedba. Slučajna varijabla X se naziva jedinična normalna razdioba.

Rješenje.

Neka je g funkcija gustoće slučajne varijable Y.

Funkcija ψ, $\psi(x) = x^2$, je injektivna na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$. Označimo sa ψ_1 restrikciju funkcije ψ na interval $\langle -\infty, 0\rangle$, a sa ψ_2 restrikciju funkcije ψ na interval $\langle 0, +\infty\rangle$. Tada je $\psi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ i $\psi_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Sada imamo

$$x < 0:\ g_1(y) = f(\psi_1^{-1}(y)) \left| \frac{d(\psi_1^{-1}(y))}{dy} \right| = f(-\sqrt{y}) \left| \frac{d(-\sqrt{y})}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},\ y > 0$$

$$x > 0:\ g_1(y) = f(\psi_2^{-1}(y)) \left| \frac{d(\psi_2^{-1}(y))}{dy} \right| = f(\sqrt{y}) \left| \frac{d(\sqrt{y})}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},\ y > 0$$

Funkcija g, je zbroj funkcija g_1 i g_2:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}},\ \ y > 0.$$

Zadatak 10.

Neka je slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = (X-1)^2$.

Rješenje.

Neka je g funkcija gustoće slučajne varijable Y.

Funkcija ψ, $\psi(x) = (x-1)^2$, je injektivna na intervalima $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$. Označimo sa ψ_1 restrikciju funkcije ψ na interval $\langle -\infty, 1\rangle$, a sa ψ_2 restrikciju funkcije ψ na interval $\langle 1, +\infty\rangle$.

Rastavljamo područje na kojem je funkcija gustoće slučajne varijable X strogo pozitivna na dva dijela:

$$x \in [0,1]: \; g_1(y) = f(\psi_1^{-1}(y)) \left| \frac{d(\psi_1^{-1}(y))}{dy} \right| = f(1-\sqrt{y}) \left| \frac{d(1-\sqrt{y})}{dy} \right| = e^{\sqrt{y}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},\; y \in [0,1]$$

$$x \in \langle 1, +\infty\rangle: \; g_1(y) = f(\psi_2^{-1}(y)) \left| \frac{d(\psi_2^{-1}(y))}{dy} \right| = f(1+\sqrt{y}) \left| \frac{d(1+\sqrt{y})}{dy} \right| = e^{-\sqrt{y}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},\; y > 0$$

Funkcija g je, kao i u Zadatku 9., zbroj funkcija g_1 i g_2, ali moramo pripaziti na intervale na kojima su g_1 i g_2 različiti od nule (oni nisu isti, kao što je to bio slučaj u Zadatku 9.). Tako dobivamo:

$$g(y) = \begin{cases} \left(e^{\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{1}{2e\sqrt{y}}, & y \in [0,1], \\ e^{-\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2e\sqrt{y}}, & y \in \langle 1, +\infty\rangle. \end{cases}$$

Zadatak 11.

Dane su točke $O(0,0)$, $A(1,0)$ i $B(0,1)$. Biramo na sreću točku T na dužini $\overline{OB}$. Slučajnu varijablu Φ definiramo kao mjeru kuta $\angle OBT$. Izračunaj $E(\Phi)$.

Rješenje.

Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost apscisa točke T. Ona je jednolika slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$.
Vrijedi $\Phi = arctgX$. Prema formuli $E(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\, dx$, dobivamo

$$E(\Phi) = \int_0^1 arctgx\, dx = ... = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0.439.$$

Primjedba 1. Zadatak smo mogli riješiti i tako da najprije odredimo funkciju gustoće slučajne varijable Φ, $g(\phi) = \frac{1}{\cos^2\phi}$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$, i potom računamo $E(\Phi) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\phi}{\cos^2\phi}\, d\phi = ... = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0.439$.

Primjedba 2. Za računanje integrala u oba načina integriranja koristimo metodu parcijalne integracije. Postupak integriranja ostavljamo čitatelju za samostalni rad.