

VJEROJATNOST I STATISTIKA - završni ispit
14.6.2021.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. (10 bodova)

- (a) Definirajte (pomoću funkcije gustoće ili funkcije razdiobe) kada slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$.
- (b) Dokažite: ako je $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, onda vrijedi svojstvo odsustva pamćenja:

$$P(X < b \mid X > a) = P(X < b - a), \quad 0 \leq a < b.$$

- (c) Vrijeme do prvog ulova ribe ima eksponencijalnu razdiobu s očekivanjem 1 sat. Ako ulova nije bilo prvih 40 minuta, izračunajte vjerojatnost da ga neće biti ni u narednih 20 minuta.

2. (10 bodova) Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = x + y, \quad \text{za } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Izračunajte vjerojatnosti događaja:

- (a) $P(X^2 + Y^2 > 1)$,
- (b) $P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y < \frac{1}{2}\right)$.

OKRENITE STRANICU!

3. (10 bodova) Broj bodova X na ispitu je slučajna varijabla s očekivanjem $E(X) = 55$ i disperzijom $D(X) = 81$.

- (a) Pokažite da vjerojatnost događaja $P(45 < X < 65)$ nije manja od 0.19.
- (b) Koliko studenata mora pristupiti ispitu da bi vjerojatnost da je njihov prosječan broj bodova između 50 i 60 bila najmanje 0.99?

4. (10 bodova) Pretpostavimo da su očekivanje a i disperzija σ^2 populacije X nepoznati i (X_1, X_2, \dots, X_n) uzorak za X te

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

- (a) Dokažite da je sljedeća statistika za procjenu disperzije σ^2 nepristrana:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right).$$

- (b) Dokažite da je statistika S^2 za procjenu disperzije σ^2 valjana.