

VJEROJATNOST I STATISTIKA - Jesenski ispitni rok
2.9.2022.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. (10 bodova)

(a) Dokažite da za događaje A i B vrijedi formula:

$$\mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

(b) Standardni kartaški špil sastoji se od 52 karte, od kojih 13 ima znak ♣, 13 znak ♦ i isto za ♠ i ♥. Pritom su znakovi ♣ i ♠ crni, a ♥ i ♦ crveni. Iz špila odabiremo 4 karte. Izračunajte vjerojatnost da je pritom izvučena bar jedna karta sa znakom ♥ i barem jedna karta s crnim znakom.

2. (10 bodova) U grupi od 10 studenata koji su došli na usmeni ispit, 3 studenta su pripremili ispit odlično, 4 dobro, 2 dovoljno i 1 loše. Na ispitu student dobiva 3 pitanja od mogućih 20. Odlično pripremljen student zna odgovor na svih 20 pitanja, dobro pripremljen na 16, dovoljno pripremljen na 10 i loše pripremljen na 5. Slučajno odabrani student je odgovorio točno na sva tri postavljena pitanja. Izračunajte vjerojatnost da je to bio student koji se loše pripremio za ispit.

3. (10 bodova) Biramo dvije točke na sreću na dužini \overline{OA} , pri čemu su te točke redom dane s $O(0,0)$ i $A(1,0)$. Neka je T točka s većom apscisom od te dvije. Neka je $\varphi = \angle TBO$, gdje je $B(0,1)$.

(a) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable X , pri čemu je X vrijednost apscise točke T .

(b) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable Θ , pri čemu je Θ vrijednost kuta $\varphi = \angle TBO$ i izračunajte $\mathbb{P}(\Theta > \frac{\pi}{6})$.

4. (10 bodova) Neka su X_1, \dots, X_n nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ i disperzijom σ^2 .

(a) Dokažite da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$\mathbb{E}(X_i \cdot \overline{X}) = \mathbb{E}(\overline{X}^2),$$

pri čemu je $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$.

(b) Neka su X_1, X_2, X_3 nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable s gustoćom

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \sin(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Odredite očekivanje

$$\mathbb{E}(X_2 \cdot \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}).$$

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Masa jabuke je slučajna varijable s očekivanjem 170 grama te standardnom devijacijom od 15 grama.
- (a) Kolika je vjerojatnost da 117 nasumično odabranih jabuka ima preko 20 kilograma?
 - (b) Koliko bismo jabuka trebali ubrati da bismo bili 99% sigurni da će njihova ukupna masa biti preko 20 kilograma.
 - (c) Ako je vjerojatnost da je u jabuci crv jednaka 10%, koliko jabuka moramo ubrati da bismo bili barem 95% sigurni da ćemo imati 100 jabuka bez crva?
6. (10 bodova) Neka je X_1, \dots, X_n uzorak iz populacije s normalnom razdiobom s poznatom disperzijom σ^2 i napoznatim očekivanjem a .
- (a) Izvedite formulu za dvostrani interval pouzdanosti reda p za očekivanje a .
 - (b) Koliko velik uzorak iz normalne populacije s disperzijom $\sigma^2 = 0.0025$ treba uzeti da duljina intervala pouzdanosti reda 0.95 ne bude veća od 0.02?
 - (c) Ukoliko u b) dijelu zadatka iz podataka izračunamo $\bar{x} = 0.5$, možemo li na razini značajnosti $\alpha = 0.05$ odbaciti hipotezu $H_0 : a = 0.55$ u korist $H_1 : a \neq 0.55$. Zašto?

Normalna razdioba, funkcija $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0080	0.0160	0.0240	0.0320	0.0398	0.0478	0.0558	0.0638	0.0718
0.1	0.0796	0.0876	0.0956	0.1034	0.1114	0.1192	0.1272	0.1350	0.1428	0.1506
0.2	0.1586	0.1664	0.1742	0.1820	0.1896	0.1974	0.2052	0.2128	0.2206	0.2282
0.3	0.2358	0.2434	0.2510	0.2586	0.2662	0.2736	0.2812	0.2886	0.2960	0.3034
0.4	0.3108	0.3182	0.3256	0.3328	0.3400	0.3472	0.3544	0.3616	0.3688	0.3758
0.5	0.3830	0.3900	0.3970	0.4038	0.4108	0.4176	0.4246	0.4314	0.4380	0.4448
0.6	0.4514	0.4582	0.4648	0.4714	0.4778	0.4844	0.4908	0.4972	0.5034	0.5098
0.7	0.5160	0.5222	0.5284	0.5346	0.5406	0.5468	0.5528	0.5588	0.5646	0.5704
0.8	0.5762	0.5820	0.5878	0.5934	0.5990	0.6046	0.6102	0.6156	0.6212	0.6266
0.9	0.6318	0.6372	0.6424	0.6476	0.6528	0.6578	0.6630	0.6680	0.6730	0.6778
1.0	0.6826	0.6876	0.6922	0.6970	0.7016	0.7062	0.7108	0.7154	0.7198	0.7242
1.1	0.7286	0.7330	0.7372	0.7416	0.7458	0.7498	0.7540	0.7580	0.7620	0.7660
1.2	0.7698	0.7738	0.7776	0.7814	0.7850	0.7888	0.7924	0.7960	0.7994	0.8030
1.3	0.8064	0.8098	0.8132	0.8164	0.8198	0.8230	0.8262	0.8294	0.8324	0.8354
1.4	0.8384	0.8414	0.8444	0.8472	0.8502	0.8530	0.8558	0.8584	0.8612	0.8638
1.5	0.8664	0.8690	0.8714	0.8740	0.8764	0.8788	0.8812	0.8836	0.8858	0.8882
1.6	0.8904	0.8926	0.8948	0.8968	0.8990	0.9010	0.9030	0.9050	0.9070	0.9090
1.7	0.9108	0.9128	0.9146	0.9164	0.9182	0.9198	0.9216	0.9232	0.9250	0.9266
1.8	0.9282	0.9298	0.9312	0.9328	0.9342	0.9356	0.9372	0.9386	0.9398	0.9412
1.9	0.9426	0.9438	0.9452	0.9464	0.9476	0.9488	0.9500	0.9512	0.9522	0.9534
2.0	0.9544	0.9556	0.9566	0.9576	0.9586	0.9596	0.9606	0.9616	0.9624	0.9634
2.1	0.9642	0.9652	0.9660	0.9668	0.9676	0.9684	0.9692	0.9700	0.9708	0.9714
2.2	0.9722	0.9728	0.9736	0.9742	0.9750	0.9756	0.9762	0.9768	0.9774	0.9780
2.3	0.9786	0.9792	0.9796	0.9802	0.9808	0.9812	0.9818	0.9822	0.9826	0.9832
2.4	0.9836	0.9840	0.9844	0.9850	0.9854	0.9858	0.9862	0.9864	0.9868	0.9872
2.5	0.9876	0.9880	0.9882	0.9886	0.9890	0.9892	0.9896	0.9898	0.9902	0.9904
2.6	0.9906	0.9910	0.9912	0.9914	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928
2.7	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9944	0.9946	0.9948
2.8	0.9948	0.9950	0.9952	0.9954	0.9954	0.9956	0.9958	0.9958	0.9960	0.9962
2.9	0.9962	0.9964	0.9964	0.9966	0.9968	0.9968	0.9970	0.9970	0.9972	0.9972
3.0	0.9974	0.9974	0.9974	0.9976	0.9976	0.9978	0.9978	0.9978	0.9980	0.9980
3.1	0.9980	0.9982	0.9982	0.9982	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9986	0.9986
3.2	0.9986	0.9986	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9990	0.9990
3.3	0.9990	0.9990	0.9990	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9994
3.4	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9996
3.5	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996
3.6	0.9996	0.9996	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.7	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.8	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
