VJEROJATNOST I STATISTIKA, FER

dodatni zadaci, 5. i 6. tjedan (10. i 11. predavanje)

Geometrijska razdioba

Zadatak 1.
a) Izvedite očekivanje $E(X)$ geometrijske razdiobe $X \sim \mathcal{G}(p)$.

b) Dokažite da geometrijska razdioba nema pamćenja, tj. da vrijedi

$$P(X \leq k+m \mid X > k) = P(X \leq m) \quad \text{za sve } k, m \in \mathbb{N}.$$

c) Ako je prolaznost na vozačkom ispitu 40% , a X broj izlazaka kandidata na ispit, izračunajte vjerojatnost da će kandidat imati veći broj izlazaka na vozački ispit od očekivanog, odnosno $P(X > E(X))$.

Rješenje:
a) Neka je $q = 1-p$, računamo očekivanje koristeći već dokazani identitet za x takav da je $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \leq k+m \mid X > k) &= 1 - P(X > k+m \mid X > k) \\ & 1 - \frac{P(X > k+m, X > k)}{P(X > k)} \\ &= 1 - \frac{P(X > k+m)}{P(X > k)} \\ &= 1 - \frac{q^{k+m}}{q^k} = 1 - q^m \\ &= 1 - P(X > m) \\ &= P(X \leq m). \end{aligned}$$

c) Kandidat izlazi na ispit dok ga ne položi pa X ima geometrijsku razdiobu $X \sim \mathcal{G}(0.4)$. Zato je $E(X) = \frac{1}{0.4} = 2.5$ i

$$P(X > E(X)) = P(X > 2.5) = P(X > 2) = 0.6^2 = 0.36.$$

Zadatak 2.

Matko pogađa koš u slobodnom bacanju s vjerojatnosti p.

a) Odredite p ako je vjerojatnost da u tri pokušaja nije pogodio koš jednaka 0.064.

b) Kolika je vjerojatnost da će pogoditi koš iz 4. pokušaja ako je poznato da u prva tri pokušaja nije ostvario pogodak?

c) Matko izvodi slobodna bacanja sve dok drugi put ne pogodi koš. Neka je slučajna varijabla Y broj bacanja. Odredite zakon razdiobe i očekivanje od Y.

Rješenje:

a) Vjerojatnost da Matko u tri pokušaja nije pogodio koš jednaka je $(1-p)^3$ pa iz $(1-p)^3 = 0.064$ slijedi $p = 0.6$.

b) Neka je slučajna varijabla X pokušaj u kojem je ostvaren prvi pogodak. $X \sim \mathcal{G}(0.6)$ i X nema pamćenja pa je

$$P(X = 4 \mid X > 3) = P(X = 1) = 0.6.$$

c) Slučajna varijabla Y može poprimiti vrijednosti $2, 3, 4, 5, \ldots$

Neka je $p = 0.6$. Vjerojatnost da iz drugog pokušaja Matko postigne drugi pogodak jednaka je p^2. Vjerojatnost da iz trećeg pokušaja Matko postigne drugi pogodak jednaka je $2(1-p)p^2$ jer je prvi pogodak mogao ostvariti u prvom ili drugom bacanju. Vjerojatnost da iz četvrtog pokušaja Matko postigne drugi pogodak jednaka je $3(1-p)^2 p^2$ jer je prvi pogodak mogao ostvariti u prvom, drugom ili trećem bacanju. Općenito, vjerojatnost da iz n-tog pokušaja Matko postigne drugi pogodak jednaka je $(n-1)(1-p)^{n-2} p^2$ jer je prvi pogodak mogao ostvariti u prvom, drugom, trećem,...ili n-1. bacanju. Razdioba za Y je

$$Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & 5 & \cdots \\ p^2 & 2(1-p)p^2 & 3(1-p)^2 p^2 & \cdots & (n-1)(1-p)^{n-2} p^2 & \cdots \end{pmatrix}$$

a za očekivanje koristimo identitet koji dobijemo dvostrukim deriviranjem geometrijskog reda (za x za koji red konvergira tj. $|x| < 1$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)''$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Očekivanje je

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(1-p)^{n-2}p^2=p^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(1-p)^{n-2}$$
$$=p^2\frac{2}{(1-(1-p))^3}=\frac{2}{p}=\frac{10}{3}.$$

Samo očekivanje se moglo izračunati i jednostavnije koristeći $Y=X+X$ (primjetite da je $Y\neq 2X$) i linearnost očekivanja

$$E(Y)=E(X+X)=2E(X)=2\frac{1}{p}=\frac{10}{3}.$$

Zadatak 3.

a) Iz kutije u kojoj se nalaze 1 bijela i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem nakon svakog izvlačenja, sve dok ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za X i vjerojatnost $P(X\leq 15\mid X>10)$.

b) Iz iste kutije s 1 bijelom i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem nakon svakog izvlačenja, sve dok drugi put ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu Y definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za Y i očekivanje $E(Y)$.

Rješenje:

a) Očito je $X\sim\mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$ pa zbog odsutnosti pamćenja geometrijske razdiobe

$$\begin{aligned}P(X\leq 15\mid X>10)&=P(X\leq 5)\\&=1-P(X>5)\\&=1-\left(\frac{4}{5}\right)^5\approx 0.6723.\end{aligned}$$

b) Razmatranjem kao u prethodnom zadatku dobije se

$$P(Y=n)=(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\quad\text{za}\quad n=2,3,4,5,\ldots$$

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{5}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{2}{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=10.$$

Zadatak 4.

Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable, koje imaju geometrijsku razdiobu s parametrima p_1 odnosno p_2. Dokažite da slučajna varijabla

$$Y = \min\{X_1, X_2\}$$

ima geometrijsku razdiobu. Koji je parametar te razdiobe?.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
P(Y = n) &= P(Y > n-1) - P(Y > n) \\
&= P(X_1 > n-1, X_2 > n-1) - P(X_1 > n, X_2 > n) \\
&= P(X_1 > n-1) P(X_2 > n-1) - P(X_1 > n) P(X_2 > n) \\
&= (1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1} - (1-p_1)^n (1-p_2)^n \\
&[(1-p_1)(1-p_2)]^{n-1}[1-(1-p_1)(1-p_2)]
\end{aligned}$$

pa slijedi $Y \sim \mathcal{G}(1-(1-p_1)(1-p_2))$ tj. $Y \sim \mathcal{G}(p_1+p_2-p_1p_2)$.

Binomna razdioba

Zadatak 5.

Chevalier de Méré je smatrao da je vjerojatnost da se kod četiri bacanja kocke pojavi barem jedna jedinica jednaka $\frac{4}{6}$. Također je smatrao da kod 24 bacanja dvije kocke vjerojatnost da se pojavi suma 2 (dvije jedinice) je jednaka $\frac{24}{36}$. Kolike su stvarne vjerojatnosti ovih događaja?

Rješenje:

Neka je X broj jedinica kod četiri bacanja kocke, X ima binomnu razdiobu $X \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{6}\right)$ pa je

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518.$$

Neka je Y broj dvostrukih jedinica kod 24 bacanja dvije kocke kocke (suma je 2), $Y \sim \mathcal{B}\left(24, \frac{1}{36}\right)$ i

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.492.$$

Zadatak 6.

U bubnju se nalazi 6 bijelih i 4 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da izvučemo barem 5 bijelih kuglica ako

a) iz bubnja odjednom izvučemo na sreću 7 kuglica?

b) iz bubnja kuglicu izvlačimo na sreću 7 puta, s vraćanjem kuglice u bubanj nakon svakog izvlačenja.

Rješenje:

a) Barem 5 bijelih kuglica u ovom slučaju znači točno 5 bijelih ili točno 6 pa je

$$P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) = \frac{\binom{6}{5}\binom{4}{2}}{\binom{10}{7}} + \frac{\binom{6}{6}\binom{4}{1}}{\binom{10}{7}} = \frac{1}{30}.$$

b) Ako vraćamo kuglice u bubanj nakon svakog izvlačenja, broj X izvučenih bijelih kuglica ima binomnu razdiobu $X \sim \mathcal{B}\left(7, \frac{6}{10}\right)$ i

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) \\ &= \binom{7}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5 + \binom{7}{6}\left(\frac{3}{5}\right)^6\frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^7 = 0.42. \end{aligned}$$

Poissonova razdioba

Zadatak 7.

a) Izvedite očekivanje $E(X)$ Poissonove razdiobe $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

b) Na neki server tijekom jednog sata stiže u prosjeku 180 e-poruka. Odredite vjerojatnost da tijekom jedne minute stignu barem 3 e-poruke.

Rješenje:

a) Računamo očekivanje koristeći Taylorov razvoj oko nule za eksponencijalnu funkciju $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

b) Neka je $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ broj pristiglih poruka tijekom jedne minute. Ako tijekom jednog sata stiže u prosjeku 180 e-poruka, onda je prosjek po minuti 3 poruke, tj. $\lambda = 3$ i

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - e^{-3} - \frac{3^1}{1!}e^{-3} - \frac{3^2}{2!}e^{-3} = 1 - \frac{17}{2}e^{-3} \approx 0.577. \end{aligned}$$

Zadatak 8.

Poslužitelju informacijskog sustava pristižu zahtjevi za obradu kroz dva reda čekanja nezavisno jedan od drugoga. U prvi red pristiže u prosjeku 120 zahtjeva po minuti, a u drugi 90 zahtjeva po minuti. Ako su poslužitelju potrebne dvije sekunde za obradu jednog zahtjeva, izračunajte vjerojatnost da će ukupno barem dva zahtjeva čekati na obradu.

Rješenje:

Neka su $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ i $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ broj pristiglih zahtjeva u prvom odnosno drugom redu tijekom 2 sekunde. Kod računanja inteziteta za vremensku jedinicu imamo 2 sekunde pa je $\lambda_1 = 4$ (120 po minuti=4 po 2 seknde) i $\lambda_1 = 3$ (90 po minuti=3 po 2 seknde). Kako su X_1 i X_2 nezavisne Poissonove slučajne varijable onda je ukupan broj pristiglih zahtjeva i $X = X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2) = \mathcal{P}(3+4) = \mathcal{P}(7)$. Ako barem dva zahtjeva čekaju na obradu, jedan se obrađuje, znači da tada u intervalu od 2 sekunde pristigne barem 3 zahtjeva. Vjerojatnost za to je

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - e^{-7} - 7e^{-7} - \frac{49}{2}e^{-7} \approx 0.97 \end{aligned}$$

Zadatak 9.

Na neku benzinsku postaju stiže u prosjeku 40 automobila na sat. Ako ta postaja ima samo jednu pumpu i automobil treba 1 minutu za punjenje goriva, kolika je vjerojatnost da će se pojaviti red pred pumpom? (U ovom slučaju red se pojavi ako u tijeku bilo koje minute na postaju pristignu barem 2 automobila). Kolika je vjerojatnost da će se pojaviti red ako bi ta postaja imala dvije pumpe?

Rješenje:

Neka je X broj pristiglih automobila tijekom jedne (bilo koje) minute. Vrijedi.$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ i $\lambda = 40/60$, tj. $X \sim \mathcal{P}\left(\frac{2}{3}\right)$. Red se pojavi ako u tijeku bilo koje minute na postaju pristignu barem 2 automobila, vjerojatnost za to je

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.144.$$

Ako bi ta postaja imala dvije pumpe, red bi se pojavio ako u tijeku bilo koje minute na postaju pristignu barem 3 automobila, vjerojatnost za to je

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - e^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}e^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{17}{9}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.0302 \end{aligned}$$

Zadatak 10.

Odredite vjerojatnost da među 200 ljudi budu barem 3 ljevaka, ako ljevaka ima prosječno 1%.

Rješenje:

Neka je X broj ljevaka među 200 ljudi, $X \sim \mathcal{B}(200, 0.01)$. Kako je n relativno velik, a p malen ovu binomnu razdiobu možemo aproksimirati Poissonovom $\mathcal{P}(np)$, $X \sim \mathcal{P}(2)$. Zato je

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - 5e^{-2} \approx 0.323 \end{aligned}$$