

VJEROJATNOST I STATISTIKA – završni ispit

26. 06. 2020.

Zadatak 1.(10) Prilikom testiranja na bolest X u nekoj populaciji imamo sljedeću situaciju: Ako ispitanik ima bolest X , test će biti pozitivan u 99% slučajeva. Ako ispitanik nema bolest, X test će biti neispravno pozitivan u 5% slučajeva. U prosjeku 2% populacije ima tu bolest.

- (a) Ako je test proveden na slučajno odabranoj osobi bio pozitivan, kolika je vjerojatnost da ta osoba ima bolest X ?
- (b) Ako je test proveden na slučajno odabranoj osobi bio negativan, kolika je vjerojatnost da ta osoba nema bolest X ?

Zadatak 2.(10) U bubnju se nalazi 12 kuglica, od toga ih je pet označeno brojem 1, četiri označeno brojem 2 i tri označene brojem 3.

Na sreću iz bubnja izvlačimo dvije različite kuglice. Slučajnu varijablu X definiramo kao zbroj brojeva na izvučenim kuglicama.

Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X i izračunajte $E(X)$ i $D(X)$.

Zadatak 3.(10) Na sreću odabiremo točku unutar pravokutnika čije stranice imaju duljine 3 i 4. Neka je vrijednost slučajne varijable X udaljenost te točke do najbliže stranice pravokutnika.

Izračunajte $E(X)$.

Zadatak 4.(10) (a) Za slučajni vektor (X, Y) , s vjerojatnosnom gustoćom $f_{X,Y}(x, y)$, definirajte uvjetnu gustoću $f(y|x)$ i marginalnu gustoću $f_Y(y)$.

Slučajna varijabla X zadana je razdiobom $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Nakon realizacije te varijable, slučajna varijabla Y je na sreću odabrani broj u intervalu $[0, X]$.

- (b) Odredite uvjetnu gustoću $f(y|x)$.
- (c) Odredite gustoću slučajnog vektora (X, Y) .
- (d) Odredite marginalnu gustoću varijable Y .
- (e) Izračunajte vjerojatnost događaja $\{X < 2Y\}$.

Zadatak 5.(10) (a) Neka je F_X funkcija razdiobe neprekinute slučajne varijable X . Nađite funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Ako je Φ funkcija razdiobe jedinične normalne razdiobe, te

$$\Phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau,$$

izvedite vezu između funkcija Φ i Φ^* .

- (c) U zabavnom parku jedna od atrakcija je vlakić za djecu. On je ograničen maksimalnom težinom koju može prevoziti i ona iznosi 2500kg. U redu za vlakić stoji 60 djece slične dobi čija je očekivana težina 40kg, uz standardnu devijaciju 5kg. Kolika je vjerojatnost da će sva djeca koja stoje u redu moći ući na sljedeću vožnju vlakićem?

Zadatak 6.(10) Neka je X_1, \dots, X_n uzorak iz eksponencijalne razdiobe s nepoznatim parametrom $\lambda > 0$. Označimo s μ očekivanje slučajnih varijabli X_i te

$$M_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

- (a) Odredite konstantu C tako da $T := CM_n$ bude nepristrani procjenitelj za μ .
- (b) Koristeći kriterij najveće izglednosti odredite procjenu za μ .

Dopuštena je uporaba kalkulatora i službenog podsjetnika.

Bodovi sa završnog ispita skalirat će se sa faktorom 1.5.