ω - elementarni događaj

Ω - skup svih elementarnih događaja

- Algebra događaja $F \subset P(\Omega)$ se zove bilo koji podskup od $P(\Omega)$ koji zadovoljava svojstva

$P(\Omega)$ - skup svih podskupova od Ω

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
3. $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$

- Vjerojatnost je preslikavanje (funkcija) koja svakom događaju iz algebre $P: F \to [0,1]$ koji zadovoljava

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ukoliko $A \cap B = \emptyset$

- Svojstva vjerojatnosti

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$ $\left[\begin{array}{l} \Omega \cup \emptyset = \Omega \; / P \\ P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega) \\ 1 + P(\emptyset) = \cancel{1} \Rightarrow P(\emptyset) = 0 \end{array} \right]$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Laplaceov model

$$P(A) = \frac{kA}{k\Omega} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}$$

- Bernoulijeva shema $P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

k - broj povoljnih ishoda ; n - broj ukupnih ishoda

- Beskonačni vjerojatnosni prostor

Ako Ω bezkonačan skup, tad se zahtjeva da algebra događaja F bude σ-algebra sa svojstvima

1. $\Omega \in F$
2. $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
3. $\forall n \in N$ $A_n \in F \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$

I vjerojatnosna funkc. P mora zadovoljavati

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ ako $A_n \cap A_m = \emptyset$, za $\forall n \neq m$

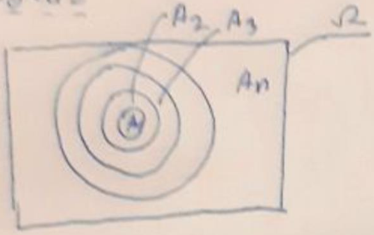
Svaka σ-aditivna f-ja je i konačno aditivna

Tm. 1.4 Neka je $(A_n)_{n\in N}$ rastući niz događaja.

Tada

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \cdots \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dokaz



Neka je (A_n) rastući niz događaja

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$

$B_3 = A_3 \setminus A_2$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

$B_1, \dots B_n$ disjunktni $\forall n$

$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$

$\Downarrow$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Ako je P σ-aditivna $\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} P(B_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + \cdots + P(A_n) - P(A_{n-1})\right)$$

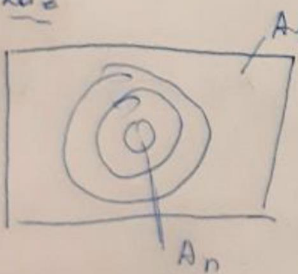
$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Obrat vrijedi.

Korolar. 1.5 (A_n) niz padajućih događaja i $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ onda vrijedi

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dokaz



$$B_i = A_i^c \Rightarrow \bigcap_{n\in N} A_n = \left(\bigcup_{n\in N} A_n^c\right)^c$$

$$P\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right) = P\left(\left(\bigcup_{n\in N} A_n^c\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n\in N} A_n^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1 - \left(1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Tm. 2.2 Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki $A \subseteq \Omega$ vrijedi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$

Dokaz

$$P(A) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

__Def__ Slučajne varijable $X, Y : \Omega \to S$ su nezavisne ako za $x_k, y_j \in S$ vrijedi $P(X = x_k, Y = y_j) = P(X = x_k) \cdot P(Y = y_j)$ tada za $\forall A, B \subseteq S$ vrijedi $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

__Dokaz__

$A = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$B = \{y_1, \ldots, y_n\}$

$$P(X \in A, Y \in B) = \sum_{k,j} P(X = x_k, Y = y_j)$$
$$= \sum_{k,j} P(X = x_k) P(Y = y_j) = \sum_k P(X = x_k) \sum_j P(Y = y_j)$$
$$= P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

__Tm. 3.1__

Neka su X i Y slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru

Očekivanje ima svojstvo linearnosti, za $\forall s, t \in R$ vrijedi

$E(sX + tY) = sE(X) + tE(Y)$ Ako su X i Y nezavisne

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

__Dokaz__

$$E(sX) = \sum (s \cdot x_k) p_k = s \sum x_k p_k = s E(X)$$

$$E(X+Y) = \sum_{j,k} (x_j + y_k) p_{jk} = \sum_{j,k} x_j p_{jk} + \sum_{k,j} y_k p_{jk}$$
$$= \sum_j x_j \cdot \sum_k p_{jk} + \sum_k y_k \cdot \sum_j p_{jk} = \sum_j x_j p_j + \sum_k y_k p_k = E(X) + E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{j,k} x_j y_k p_{jk} = \sum_{j,k} x_j y_k p_j q_k = \left(\sum_j x_j p_j\right)\left(\sum_k y_k q_k\right) = E(X) \cdot E(Y)$$

$p_{jk} = p_j \cdot q_k$

__Tm. 3.2.__ Svojstva disperzije / varijance

Za slučajnu var X i realan br s vrijedi $D(sX) = s^2 D(X)$

Ako su X i Y nezavisne sluč var $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

__Dokaz__ $D(sX) = E[(sX)^2] - [E(sX)]^2 = E(s^2 X^2) - [sE(X)]^2$
$$= s^2 E(X^2) - s^2 [E(X)]^2 = s^2 D(X)$$

Ako su X i Y nezavisne

$$D(X+Y) = E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2 = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X^2) - 2E(X)E(Y) - E(Y^2)$$
$$= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 = D(X) + D(Y)$$

Tm. 3.3 Disperzija zbroja slučajnih var

Disperzija zbroja $S = X_1 + \dots + X_n$ sluč. var računa se

$$D(S) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

Dokaz Vrijedi $m_S = m_{X_1} + \dots + m_{X_n}$

$$D(S) = E[(S-m_S)^2] = E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_{X_i})\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} E(X_i - m_{X_i})^2 + \sum_{i\neq j} E[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

Tm. 3.4 Za koef korelacije je uvijek ispunjeno $|r(X,Y)| \le 1$

Jednakost $r(X,Y) = \pm 1$ vrijedi onda i samo onda $Y = aX + b$ za $a, b \in \mathbb{R}$

Dokaz

Neka su X^*, Y^* normirane i centrirane slučajne varijable pridružene X, Y

$$D(X^* \pm Y^*) = D(X^*) + D(Y^*) \pm 2\,cov(X^*, Y^*) = 2[1 \pm r(X,Y)]$$

Lijeva strana je uvijek pozitivna, pa je uvijek i desna $\Rightarrow |r(X,Y)| \le 1$

$r(X,Y) = 1$ vrijedi onda i samo onda $D(X^* - Y^*) = 0$. To je moguće samo kad je $X^* - Y^* = const$, tada mora b.b. $\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} - \frac{X - m_X}{\sigma_X} = const$,

odnosno $Y = aX + b$ $\left(a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X},\ b \in \mathbb{R}\right)$

Slično za $r(X,Y) = -1$

Tm. 4.1 Odsustvo pamćenja geometrijske razdiobe

Sluč var X koja poprima vrijednosti u skupu $\{1, 2, 3, \dots\}$ ima geometrijsku razdiobu onda i samo onda ako vrijedi $\forall\, k, m \ge 1$

$$P(X = k+m \mid X > k) = P(X = m)$$

Dokaz

$\boxed{\Rightarrow}$ Ako X ima geomet. razdiobu

$$P(X = k+m \mid X > k) = \frac{P(X = k+m, X > k)}{P(X > k)} = \frac{P(X = k+m)}{P(X > k)} = \frac{p(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{m-1}$$

$$= P(X = m)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ jako težak

Tm. 4.2 Aproksimacija binomne rozdiobe

Neka je n velik, p malen. Označi $\lambda = np$. tad vrijedi

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Dokaz $m = \frac{1}{p}$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

$\lambda = np = \frac{n}{m}$. Pustimo da n neograničeno raste

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Tm. 5.1 Temeljno svojstvo f-je razdiobe

Za $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ vrijedi $P(\{a \leq X < b\}) = F(b) - F(a)$

Dokaz $F(b) = P(\{X < b\}) = P(\{X < a\} \cup \{a \leq X < b\})$

$$= P(\{X < a\}) + P(\{a \leq X < b\}) = F(a) + P(\{a \leq X < b\})$$

Tm 5.2 Granične vrijednosti f-je rozdiobe

Neka je F funkcija rozdiobe sluč var X. Ona posjeduje svojstva

1. F je neopadajuća $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. F je neprekinuta slijeva $F(x-0) := \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F(x - \varepsilon) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4* $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Dokaz

1. $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X < x_1\} \subseteq \{X < x_2\}$

$$\Rightarrow P(X < x_1) \leq P(X < x_2) \Leftrightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$$

2.° (x_n) proizvoljan padajući niz realnih br, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$

Označim $A_n = \{X < x_n\}$. Onda su A_n padajući skupovi $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$

i vrijedi $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Prema svojstvu neprekinutosti vrijedi

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

Za drugi način dosta je pokazati $x \uparrow +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} F_X(x_n) = 1$

$\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{X < x_n\} = \Omega \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P(X < x_n) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} F_X(x_n) = 1$

5 Za neprekinutost s lijeva dosta je pokazati

$$x_n \uparrow x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$$

Ali opet na isti način uzmemo $x_n \uparrow x$ i zaključujemo

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X < x_n\} = \{X < x\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X < x_n) = P(X < x)$$

neprekinutost vjerojatnosti

tj. $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$