VJEROJATNOST I STATISTIKA, FER

dodatni zadaci, 4. i 5. tjedan (7., 8. i 9. predavanje)

Diskretne slučajne varijable i vektori

Zadatak 1.

Iz kutije u kojoj se nalaze 3 bijele i 4 crvene kuglice izvlačimo 3 kuglice. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj izvučenih bijelih kuglica. Izračunajte zakon razdiobe za X , očekivanje $E(X)$ i disperziju $D(X)$.

Rješenje:

Slučajna varijabla X može poprimiti vrijednosti $0, 1, 2, 3$. Računamo redom vjerojatnosti

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}, \\
P(X=1) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}, \\
P(X=2) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}, \\
P(X=3) &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35},
\end{aligned}
$$

pa je razdioba i očekivanje

$$
X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{35} & \frac{18}{35} & \frac{12}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix}, \; E(X) = \sum_{i=0}^{3} i p_i = \frac{9}{7},
$$

$$
D(X) = \sum_{i=0}^{3} i^2 p_i - (E(X))^2 = \frac{24}{49}.
$$

Zadatak 2.

U kutiji je deset kuglica na kojima su napisani brojevi od 1 do n. Na sreću izvlačimo 3 kuglice (odjednom, bez vraćanja). Slučajnu varijablu X definiramo kao najveći izvučeni broj, a slučajnu varijablu Y kao najmanji izvučeni broj. Izračunajte razdiobe slučajnih varijabli X i Y.

Rješenje:

Slučajna varijabla X može poprimiti vrijednosti $3, 4, 5, \ldots, n$. Vjerojatnost da je najveći izvučeni broj jednak k (pa preostala dva izvučena broja moraju biti $< k$) jednaka je

$$P(X=k)=\frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}},\;\; k=3,4,5\ldots,n.$$

Slučajna varijabla Y može poprimiti vrijednosti $1,2,3,\ldots,n-2$. Vjerojatnost da je najmanji izvučeni broj jednak k (pa preostala izvučena broja dva moraju biti $> k$) jednaka je

$$P(X=k)=\frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{3}},\;\; k=1,2,3,\ldots,n-2.$$

Zadatak 3.

Neka je X maksimalna vrijednost od dva na sreću odabrana broja iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, pri čemu isti broj može biti izabran dva puta. Izračunajte očekivanje slučajne varijable X.

Rješenje:

Za razliku od prethodnog zadatka sada imamo model izvlačenja broja s vraćanjem u skup nakon izvlačenja. Neka je X_1 prvi odabrani broj, a X_2 drugi odabrani broj i $X=\max\{X_1,X_2\}$. Slučajna varijabla X može poprimiti vrijednosti $1,2,3,4,5,6,7$, a vjerojatnosti su

$$P(X=1)=P(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{49},$$

$$P(X=2)=P(X_1=1,X_2=2)+P(X_1=2,X_2=1)+P(X_1=2,X_2=2)$$
$$=\frac{3}{49}$$
$$P(X=3)=P(X_1=1,X_2=3)+P(X_1=2,X_2=3)+P(X_1=3,X_2=3)$$
$$+P(X_1=3,X_2=2)+P(X_1=3,X_2=1)=\frac{5}{49}$$

i slično $P(X=4)=\frac{7}{49}$, $P(X=5)=\frac{9}{49}$, $P(X=6)=\frac{11}{49}$, $P(X=7)=\frac{13}{49}$ pa je

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ \frac{1}{49} & \frac{3}{49} & \frac{5}{49} & \frac{7}{49} & \frac{9}{49} & \frac{11}{49} & \frac{13}{49}\end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijable X je $E(X)=\frac{252}{49}$.

Zadatak 4.

Iz kutije u kojoj se nalaze 1 bijela i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za X i očekivanje $E(X)$ u svakom od sljedeća dva načina izvlačenja:

a) nakon izvlačenja kuglica se ne vraća u bubanj,

b) nakon izvlačenja kuglica se vraća u bubanj.

Rješenje:

a) Slučajna varijabla X može poprimiti vrijednosti $1, 2, 3, 4, 5$. Računamo redom vjerojatnosti

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{1}{5}, \\
P(X=2) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}, \\
P(X=3) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}, \\
P(X=4) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}, \\
P(X=5) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

pa je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \; E(X) = 3.$$

b) Slučajna varijabla X može poprimiti sve vrijednosti iz $\mathbb{N}$. Računamo vjerojatnosti

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{1}{5}, \\
P(X=2) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}, \\
P(X=3) &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}, \\
P(X=4) &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5}, \\
&\cdots \\
P(X=n) &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Za očekivanje nam treba derivacija geometrijskog reda (za x za koji red konvergira tj. $|x| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2.$$

koju koristimo za $x = 4/5$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}}\right)^2 = 5.$$

Zadatak 5.

Bacamo novčić sve dok dvaput zaredom ne padne isti ishod. Izračunajte očekivani broj bacanja.

Rješenje:

Slučajnu varijablu X definiramo kao broj bacanja. X može poprimiti vrijednosti $2, 3, 4, 5, \ldots$ Za $X = 2$ imamo dvije mogućnosti PP ili GG pa je $P(X = 2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, za $X = 3$ imamo opet dvije mogućnosti PGG ili GPP i $P(X = 3) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$, i za $X = 4$ imamo dvije mogućnosti PGPP ili GPGG i $P(X = 4) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$, za $X = 5$ imamo PGPGG ili GPGPP i $P(X = 5) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$, itd. Općenito je $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Za očekivanje koristimo derivaciju geometrijskog reda kao u prethodnom zadatku

$$E(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 - 1 = 3.$$

Očekivani broj bacanja je 3.

Zadatak 6.

Slučajna varijablu X ima razdiobu zadanu s

$$P\left(X = 2^k\right) = 6c^{-k}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Odredite konstantu C, očekivanje $E(X)$ kao i vjerojatnost $P(X \geq 5)$. Izračunaj očekivanje slučajne varijable $1/X$. Postoji li očekivanje slučajne varijable X^2?

Rješenje: Slučajna varijabla X poprima vrijednosti $4, 8, 16, 32, \ldots$ Zbroj svih vjerojatnosti je 1

$$\sum_{k=2}^{\infty} 6c^{-k} = 6\frac{c^{-2}}{1-c^{-1}} = \frac{6}{c(c-1)} = 1,$$

dakle mora vrijediti $c^2 - c - 6 = 0$ odnosno $c = 3$. Drugo rješenje kvadratne jednadžbe $c_2 = -2$ smo odbacili jer vjerojatnost ne može biti negativna. Sada je

$$E(X) = \sum_{k=2}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k 6c^{-k} = 6\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 6\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = 8.$$

Vjerojatnost računamo pomoću vjerojatnosti komplementa

$$P\left(X \geq 5\right) = 1 - P\left(X = 4\right) = 1 - 6 \cdot 3^{-2} = \frac{1}{3}.$$

Očekivanje slučajne varijable $1/X$ je

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x_k} p_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} 6c^{-k} = 6 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = 6 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{1 - \frac{5}{6}} = 1.$$

Očekivanje slučajne varijable X^2 ne postoji jer dobijemo geometrijski red s kvocijentom većim od 1

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=2}^{\infty} x_k^2 p_k = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{2k} 6c^{-k} = 6 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty.$$

Zadatak 7.
Dokažite da za disperziju zbroja slučajnih varijabli X i Y vrijedi

$$D\left(X + Y\right) = D\left(X\right) + D\left(Y\right) + 2cov\left(X, Y\right).$$

Rješenje:
Disperzija je definirana s

$$D\left(X\right) = E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right)$$

pa vrijedi

$$D\left(X\right) = E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right) = E\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot E\left(X\right) + E\left(X\right)^2\right),$$

a zbog linearnosti očekivanja imamo

$$D\left(X\right) = E\left(X^2\right) - 2 \cdot E\left(X\right) \cdot E\left(X\right) + E\left(X\right)^2 = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
D\left(X + Y\right) &= E\left(\left(X + Y\right)^2\right) - E\left(X + Y\right)^2 \\
&= E\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - \left(E\left(X\right) + E\left(Y\right)\right)^2 \\
&= \left[\underline{E\left(X^2\right)} + \underbrace{2E\left(XY\right)} + \underleftrightarrow{E\left(Y\right)^2}\right] - \left[\underline{E\left(X\right)^2} + \underbrace{2E\left(X\right)E\left(Y\right)} + \underleftrightarrow{E\left(Y\right)^2}\right] \\
&= \underline{D\left(X\right)} + \underleftrightarrow{D\left(Y\right)} + \underbrace{2\left(E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right)\right)} \\
&= D\left(X + Y\right) = D\left(X\right) + D\left(Y\right) + 2cov\left(X, Y\right).
\end{aligned}$$

Primjetite da za nezavisne slučajne varijable vrijedi $cov\,(X,Y) = E\,(XY) - E\,(X)\,E\,(Y) = 0$ pa je tada $D\,(X+Y) = D\,(X) + D\,(Y)$.

Zadatak 8.

Izračunajte $E\,(X+Y)$ i $D\,(X+Y)$ ako je zakon razdiobe slučajnog vektora (X,Y) dan tablicom

$X \diagdown Y$	0	1
0	1/4	5/12
1	5/24	1/8

Rješenje:

Zbroj slučajnih varijabli $X+Y$ može poprimiti vrijednosti $0,1,2$. Računamo redom vjerojatnosti $P\,(X+Y=0) = 1/4$, $P\,(X+Y=1) = 5/12 + 5/24 = 5/8$ i $P\,(X+Y=2) = 1/8$. Zato je

$$X+Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} E\,(X+Y) &= 1\cdot\frac{5}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \\ D\,(X+Y) &= 1^2\cdot\frac{5}{8} + 2^2\cdot\frac{1}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{23}{64}. \end{aligned}$$

Ili na drugi način. Marginalne razdiobe su

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{11}{24} & \frac{13}{24} \end{pmatrix},$$

pa je $E\,(X) = 1/4$ i $E\,(Y) = 13/24$ i $E\,(X+Y) = E\,(X) + E\,(Y) = \frac{7}{8}$. Za disperziju vrijedi

$$\begin{aligned} D\,(X+Y) &= D\,(X) + D\,(Y) + 2cov\,(X,Y) \\ &= D\,(X) + D\,(Y) + 2\,(E\,(XY) - E\,(X)\,E\,(Y)) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{13}{24} - \left(\frac{13}{24}\right)^2\right) + 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{13}{24}\right) = \frac{23}{64}. \end{aligned}$$

Zadatak 9.

Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprimi vrijednost 1 ako je okrenuti broj paran, a vrijednost -1 ako je okrenuti broj neparan, dok slučajna varijabla Y poprimi vrijednost 1 ako je okrenuti broj manji od 4, a vrijednost -1

ako je okrenuti broj veći od 3. Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y). Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable i zašto? Izračunajte razdiobu i disperziju $D(Z)$ slučajne varijable $Z = X - Y$.

Rješenje:

Ako padne jedinica ili trojka imamo $X = -1$, $Y = 1$, ako padne dvojka imamo $X = 1$, $Y = 1$, ako padne četvorka ili šestica imamo $X = 1$, $Y = -1$ i ako padne petica $X = -1$, $Y = -1$. Zato je zakon razdiobe slučajnog vektora (X, Y)

$X \diagdown Y$	1	-1
1	$1/6$	$2/6$
-1	$2/6$	$1/6$

i marginalne razdiobe su

$$X, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Kako je $P(X = 1, Y = 1) = 1/6 \neq 1/4 = P(X = 1) P(Y = 1)$ X i Y nisu nezavisne slučajne varijable. Nadalje za $Z = X - Y$ je

$$\begin{aligned} P(Z = -2) &= P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{3}, \\ P(Z = 0) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \\ P(Z = 2) &= P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

i

$$Z \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ i } E(Z) = \frac{8}{3}.$$

Zadatak 10.

Zadana je razdioba diskretnog slučajnog vektora (X, Y)

$X \diagdown Y$	-1	1
-1	$1/4$	$1/6$
0	$1/6$	$1/8$
1	$1/8$	$1/6$

Izračunajte $P(Y = 1 \mid X \geq 0)$. Odredite razdiobu slučajnog vektora (Z, W), ako je $Z = |X - Y|$, $W = X/Y$. Jesu li Z i W nezavisne slučajne varijable i zašto?

Rješenje:

Marginalne razdiobe su

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} \text{ i } Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{13}{24} & \frac{11}{24} \end{pmatrix}$$

pa je uvjetna vjerojatnost

$$\begin{aligned} P(Y=1 \mid X \geq 0) &= \frac{P(Y=1, X \geq 0)}{P(X \geq 0)} \\ &= \frac{P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)}{1 - P(X=-1)} \\ &= \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{7}{24}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vjerojatnosti smo čitali iz razdiobe za (X, Y), ne smijemo ih čitati iz marginalnih razdiobi jer X i Y nisu nezavisne.

Za razdiobu slučajnog vektora (Z, W) najjednostavnije je proći kroz razdiobu (X, Y) i za dane vrijednosti X i Y izračunati vrijednosti za Z i W te odgovarajuću vjerojatnost iz razdiobe (X, Y) dodati na odgovarajuće mjesto u razdiobi (Z, W):

$Z \diagdown W$	-1	0	1
0	0	0	$1/4 + 1/6$
1	0	$1/6 + 1/8$	0
2	$1/6 + 1/8$	0	0

tj.

$Z \diagdown W$	-1	0	1
0	0	0	$5/12$
1	0	$7/24$	0
2	$7/24$	0	0

Z i W očito nisu nezavisne slučajne varijable jer u prethodnoj tablici postoji nula (npr. $P(Z=1, W=1) = 0 \neq 7/24 \cdot 5/12 = P(Z=1)\,P(W=1)$).

Zadatak 11.

Razdioba slučajnog vektora (X, Y) dana je tablicom:

$X \diagdown Y$	0	1
-1	p_1	0.13
0	0.21	p_2
1	0.15	0.28

a) Odredite p_1 i p_2 ako je $cov\,(X,Y) = 0.0828$.

b) Odredite razdiobu slučajnog vektora (U,V), gdje je $U = X+Y$, $V = X^2 + Y^2$.

Rješenje:

a) Zbog $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ je $p_1 + p_2 + 0.77 = 1$ i $p_1 + p_2 = 0.23$. Nadalje je

$$\begin{aligned} E\,(X) &= 0.3 - p_1, \\ E\,(Y) &= 0.41 + p_2, \\ E\,(XY) &= 0.15. \end{aligned}$$

Zbog

$$cov\,(X,Y) = 0.15 - (0.3 - p_1)\,(0.41 + p_2) = 0.082$$

koristeći $p_2 = 0.23 - p_1$ dobijemomo

$$p_1^2 - 0.94p_1 + 0.1248 = 0$$

i

$$p_1 = 0.16, \;\; p_2 = 0.07.$$

Drugo rješenje $p_1 = 0.78$ otpada zbog $p_2 = -0.55$.

b) Prolazimo kroz sve vrijednosti (X,Y) i računamo vrijednosti za (U,V), gdje je $U = X+Y$, $V = X^2 + Y^2$

$$\begin{gathered} X=-1, Y=0 \longrightarrow U=-1, V=1, P\,(X=-1, Y=0) = 0.16, \\ X=-1, Y=1 \longrightarrow U=0, V=2, P\,(X=-1, Y=1) = 0.13, \\ X=0, Y=0 \longrightarrow U=0, V=0, P\,(X=0, Y=0) = 0.21, \\ \left.\begin{array}{l} X=0, Y=1 \longrightarrow U=1, V=1, P\,(X=0, Y=1) = 0.07, \\ X=1, Y=0 \longrightarrow U=1, V=1, P\,(X=1, Y=0) = 0.15, \end{array}\right\} 0.22, \\ X=1, Y=1 \longrightarrow U=2, V=2, P\,(X=1, Y=1) = 0.28. \end{gathered}$$

Konačno je

$U \diagdown V$	0	1	2
-1	0	0.16	0
0	0.21	0	0.13
1	0	0.22	0
2	0	0	0.28

.