

**VJEROJATNOST I STATISTIKA - Dekanski rok**  
**15.9.2020.**

---

**Ime i prezime:** \_\_\_\_\_

**JMBAG:** \_\_\_\_\_

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

**Vlastoručni potpis studenta:** \_\_\_\_\_

---

1. **(10 bodova)** Imamo 10 crvenih i 10 plavih karata (karte iste boje međusobno ne razlikujemo). Prvo promiješamo karte i nakon toga na svaku napišemo njen redni broj u špilju: na prvu kartu broj 1, na drugu broj 2 itd. Izračunajte vjerojatnost da:
  - (a) sve crvene karte imaju na sebi napisane brojeve manje od 15,
  - (b) točno 8 crvenih karata ima na sebi napisane brojeve manje od 15,
  - (c) najviše 8 crvenih karata ima na sebi napisane brojeve manje od 15.
2. **(10 bodova)** Neka je  $\Omega \neq \emptyset$  skup,  $\mathcal{F}$  algebra podskupova od  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}$  vjerojatnost na  $\mathcal{F}$  i  $B \in \mathcal{F}$  događaj takav da  $\mathbb{P}(B) > 0$ .
  - (a) Definirajte uvjetnu vjerojatnost  $\mathbb{P}_B$  uz uvjet  $B$ .
  - (b) Dokažite da je tako definirana funkcija  $\mathbb{P}_B$  vjerojatnost na  $\mathcal{F}$  (provjerite normiranost, monotonost i aditivnost).
3. **(10 bodova)**
  - (a) Neka je  $X$  diskretna slučajna varijabla. Definirajte  $\mathbb{E}(X)$ .
  - (b) Neka je  $X$  diskretna slučajna varijabla i  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dokažite da je  $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X)$ .
  - (c) U bubnju se nalazi 8 kuglica od kojih je svaka označena jednim brojem od 1 do 8 (svaka je kuglica označena različitim brojem). Na sreću izvlačimo dvije kuglice. Neka je  $X$  veći izvučeni broj. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable  $X$  i izračunajte  $\mathbb{E}(X)$ .

**OKRENITE STRANICU!**

**4. (10 bodova)**

- (a) Definirajte funkciju razdiobe slučajne varijable  $X$ .
- (b) Neka je  $F$  funkcija razdiobe slučajne varijable  $X$ . Postoje li  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ? Ako da, izračunajte ih.
- (c) Odredite vrijednost realnih parametara  $C, D$  takvih da funkcija  $F$  dana s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Cx^2, & x \in \langle 0, 2 \rangle, \\ D, & x \geq 2, \end{cases}$$

bude funkcija razdiobe neke neprekinute slučajne varijable  $X$ . Za te parametre  $C, D$  izračunajte  $\mathbb{E}(X)$ .

- 5. (10 bodova)** Neka su  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s disperzijom 100 i neka je

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odredite najmanji  $n \in \mathbb{N}$  za koji vrijedi

$$\mathbb{P}(9 \leq \overline{X}_n \leq 11) \geq 0.95.$$

- 6. (10 bodova)** Slučajna varijabla  $X$  ima normalnu razdiobu s očekivanjem  $\mu$  i disperzijom  $\sigma^2$ . Mjerenja te slučajne varijable su zabilježena u donjoj tablici. Za dani uzorak odredite procjenu parametara  $\mu$  i  $\sigma^2$  koristeći kriterij najveće izglednosti.

$i$	$x_i$
1	5.1
2	3.3
3	5.9
4	2.7
5	3.9