VJEROJATNOST I STATISTIKA - međuispit (19.4.2021.)
Rješenja

---

1. (10 bodova) U bubnju se nalazi c crvenih i b bijelih kuglica. Iz bubnja na sreću izvlačimo n puta po jednu kuglicu ($n \leq c$, $n \leq b$).

(a) Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući k crvenih kuglica ($k \leq n$), ako izvučene kuglice ne vraćamo u bubanj?

(b) Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući k crvenih kuglica ($k \leq n$), ako izvučene kuglice vraćamo u bubanj?

Rješenje:

(a) Tražena vjerojatnost je

$$p_1 = \frac{\binom{c}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{c+b}{n}}.$$

(b) Tražena vjerojatnost je

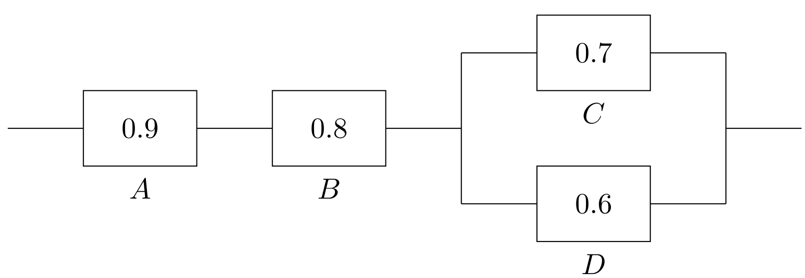
$$p_2 = \binom{n}{k}\left(\frac{c}{c+b}\right)^k \left(\frac{b}{c+b}\right)^{n-k}.$$

2. (10 bodova)

(a) Dokažite: ako su događaji A i B nezavisni, onda su i njihovi komplementi $\overline{A}$ i $\overline{B}$ nezavisni događaji.

(b) Dokažite: ako su događaji A i B nezavisni, onda je $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$.

(c) Na slici su dane vjerojatnosti ispravnog rada dijelova uređaja koji rade nezavisno. Cijeli uređaj radi ispravno ako radi dio A i dio B te barem jedan od dijelova C i D. Izračunajte vjerojatnost da cijeli uređaj radi ispravno. Ako je poznato da cijeli uređaj radi ispravno, izračunajte vjerojatnost da dio C ne radi.



Rješenje:

(a) Želimo pokazati da vrijedi $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$.

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}), \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti u drugom retku iskoristili pretpostavku da su događaji A i B nezavisni, tj. da vrijedi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

(b)

$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right).$$

(c)

$$\begin{aligned} P(\text{“radi”}) &= P\big(A \cap B \cap (C \cup D)\big) = P(A)\,P(B)\,P(C \cup D) \\ &= P(A)\,P(B)\left(1 - P\left(\overline{C}\right)P\left(\overline{D}\right)\right) \\ &= 0.9 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.3 \cdot 0.4) \\ &= 0.6336. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{C} \mid \text{“radi”}\right) &= \frac{P\left(A \cap B \cap \overline{C} \cap D\right)}{P(\text{“radi”})} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6}{0.6336} \\ &= 0.205. \end{aligned}$$

3. (10 bodova)

(a) Bacamo kocku sve dok ne padne šestica. Neka je slučajna varijabla X redni broj bacanja u kojem je prvi put pala šestica. Izračunajte očekivani broj bacanja $E(X)$ kao i vjerojatnost da je broj bacanja manji od očekivanog broja tj. $P\big(X < E(X)\big)$.

(b) Neka je slučajna varijabla Y redni broj bacanja u kojem je drugi put pala šestica. Izračunajte razdiobu od Y kao i očekivanje $E(Y)$.

Rješenje:

a) Očito je $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ pa imamo

$$P(X = n) = q^{n-1}p \quad \text{za} \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

za $p = 1/6$ i $q = 1 - p = 5/6$. Računamo očekivanje koristeći identitet za x (takav da je $|x| < 1$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Zato je $E(X) = 6$ i $P\big(X < E(X)\big) = P(X < 6) = 1 - P(X > 5) = 1 - q^5 = 0.598$

b) Slučajna varijabla Y može poprimiti vrijednosti $2, 3, 4, 5, \ldots$

Neka je $p = 1/6$. Vjerojatnost da u drugom bacanju padne druga šestica jednaka je p^2. Vjerojatnost da u trećem bacanju padne druga šestica jednaka je $2(1-p)\,p^2$ jer je prva mogla pasti u prvom ili drugom bacanju. Vjerojatnost da u četvrtom bacanju padne druga šestica jednaka je $3(1-p)^2\,p^2$ jer je prva mogla pasti u prvom, drugom ili trećem bacanju. Općenito, vjerojatnost da u n-tom bacanju padne druga šestica jednaka je $(n-1)(1-p)^{n-2}p^2$ jer je prva šestica mogla pasti u bilo kojem od prvih $n-1$ bacanja. Razdioba je

$$Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ p^2 & 2(1-p)p^2 & 3(1-p)^2p^2 & \cdots & (n-1)(1-p)^{n-2}p^2 & \cdots \end{pmatrix}$$

a njeno očekivanje je

$$E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}p^2 = p^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p^2 \frac{2}{\left(1-(1-p)\right)^3} = \frac{2}{p} = 12.$$

Pri tome smo koristili drugu derivaciju geometrijskog reda (za x za koji red konvergira, tj. $|x| < 1$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Samo očekivanje se moglo izračunati jednostavnije koristeći $Y = X + X$ (ali $Y \neq 2X$) i linearnost očekivanja $E(Y) = E(X+X) = 2E(X) = 2\frac{1}{p} = 12$. Preciznije, $Y = X + X'$ gdje je X' nezavisna kopija od X jednako distribirana kao sami X.

4. (10 bodova) U košari se nalaze 3 naranče, 2 jabuke i 3 banane. Na sreću izvlačimo iz košare 4 voćke. Neka je slučajna varijabla X broj izvučenih naranči, a Y broj izvučenih jabuka. Izračunaj razdiobu slučajnog vektora (X, Y), vjerojatnost $P(X + Y \leq 2)$ i koeficijent korelacije $r(X, Y)$.

Rješenje:

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	0	$\frac{2}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	$\frac{3}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{30}{70}$
2	$\frac{9}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{3}{70}$	$\frac{2}{70}$	0	$\frac{5}{70}$
	$\frac{15}{70}$	$\frac{40}{70}$	$\frac{15}{70}$	

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 2) &= P(X=0,Y=0) + P(X=0,Y=1) + P(X=0,Y=2) \\ &\quad + P(X=1,Y=0) + P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=0) \\ &= 0 + \frac{2}{70} + \frac{3}{70} + \frac{3}{70} + \frac{18}{70} + \frac{9}{70} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$r(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}\sqrt{E[Y^2] - (E[Y])^2}}.$$

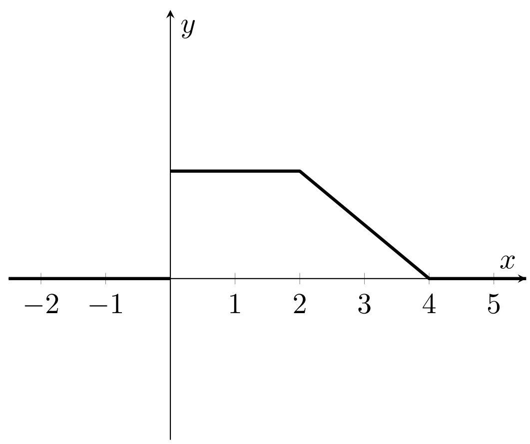
$$E[X] = 1.5, \qquad E[X^2] = \frac{39}{14},$$
$$E[Y] = 1, \qquad E[Y^2] = \frac{10}{7}.$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{20}{70} & \frac{18}{70} & \frac{27}{70} & \frac{2}{70} & \frac{3}{70} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E[XY] = \frac{9}{7}.$$

$$r(X, Y) = -0.447.$$

Uočite da smo svakako očekivali negativan koeficijent korelacije jer što je više naranči u uzorku, manje je jabuka.

5. **(10 bodova)** Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće vjerojatnosti čiji je graf dan slikom:



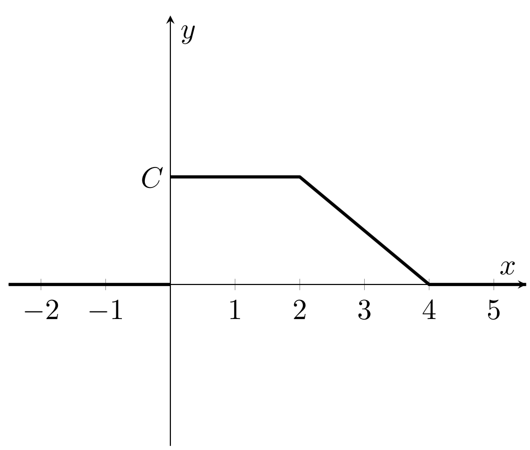
(a) Izračunajte $P(1 < X < 2)$.

(b) Izračunajte $E(X)$.

(c) Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $Y = (X-2)^2$.

Rješenje:

(a)



C određujemo iz uvjeta da je površina ispod gustoće jednaka 1. Dobivamo da je $2C+C=1$, tj. $C=\frac{1}{3}$.

Tada zaključujemo da je

$$P(1<X<2)=\frac{1}{3}.$$

Sa slike zaključujemo da je gustoća slučajne varijable X dana s

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,2\rangle,\\ \frac{2}{3}-\frac{x}{6}, & x\in[2,4].\end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^2\frac{x}{3}dx+\int_2^4 x\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{6}\right)dx\\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{18}\right)\Big|_2^4\\ &=\frac{2}{3}+\frac{16}{9}-\frac{8}{9}=\frac{14}{9}.\end{aligned}$$

(c) Funkcija ϕ dana s $\phi(x)=(x-2)^2$ nije injekcija; podijelimo je na intervale injektivnosti.

Tako su $\phi_1(x)=(x-2)^2,\quad x\in[0,2]$ i $\phi_2(x)=(x-2)^2,\quad x\in[2,4]$.

Inverzi su $\phi_1^{-1}(y)=2-\sqrt{y}\;\;y\in[0,4]$ i $\phi_2^{-1}(y)=2+\sqrt{y}\;\;y\in[0,4]$.

Neka je g funkcija gustoće slučajne varijable Y. Sada imamo

$$g(y)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\left(\frac{2}{3}-\frac{2+\sqrt{y}}{6}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{3\sqrt{y}}-\frac{1}{12},\; y\in[0,4].$$