VJEROJATNOST I STATISTIKA

Dodatni zadaci za 9. tjedan (17. i 18. predavanje)

07 Slučajni vektori

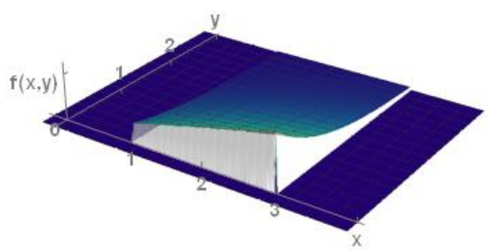
1. Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće:

$$f(x, y) = axe^{-y}, \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y \geq 0.$$

Odredite konstantu a, ispitajte nezavisnost komponenti X i Y te izračunajte vjerojatnost $P(X \leq 2 \mid Y \leq 2)$.

Rješenje. Konstantu a računamo iz uvjeta da je integral funkcije gustoće jednak 1.

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(\int_0^\infty axe^{-y} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow a \int_1^3 x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$



Sada trebamo ispitati nezavisnot komponenti X i Y. Slučajne varijable X i Y su nezavisne ako i samo ako vrijedi

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Zato računamo marginalne gustoće

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{4} xe^{-y} \, \mathrm{d}y, & x \in [1, 3] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \implies f_X(x) = \frac{1}{4}x, \quad x \in [1, 3]$$

i

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \int_1^3 \frac{1}{4} xe^{-y} \, \mathrm{d}x, & y \in [0, \infty\rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \implies f_Y(y) = e^{-y}, \quad y \in [0, \infty\rangle.$$

Vidimo da zaista vrijedi $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ i zaključujemo da su slučajne varijable X i Y nezavisne.

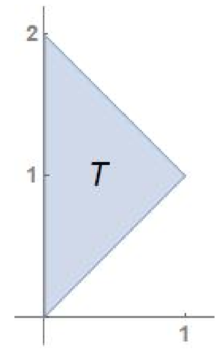
Računamo vjerojatnost

$$P(X \leq 2 \mid Y \leq 2) = P(X \leq 2) = \int_1^2 f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{4} x \, \mathrm{d}x = \frac{3}{8},$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili gore dokazanu nezavisnost.

2. Slučajni vektor (X,Y) ima jednoliku razdiobu na $\triangle OAB$ s vrhovima $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,2)$. Izračunajte marginalne funkcije gustoća slučajnih varijabli X i Y kao i vjerojatnost $P\left(X \le \frac{1}{2} \mid Y < 1\right)$. Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable?

Rješenje.

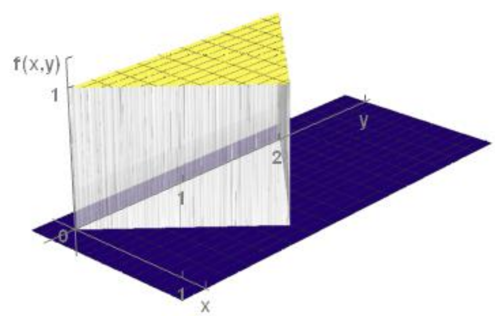


Budući da slučajni vektor (X,Y) ima jednoliku razdiobu, njegova funkcija gustoće je konstantna:

$$f(x,y) = C, \quad (x,y) \in T,$$

gdje nepoznatu konstantu C određujemo na sljedeći način

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \Leftrightarrow \iint_T C\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \Leftrightarrow C \cdot m(T) = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

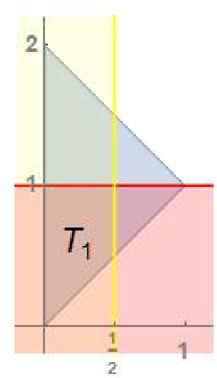


Sada računamo marginalne funkcije gustoća $f_X(x)$ i $f_Y(y)$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{2-x} 1 \cdot \mathrm{d}y = 2 - 2x,\ x \in [0,1],$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^y \mathrm{d}x, & y \in [0,1] \\ \int_0^{2-y} \mathrm{d}x, & y \in \langle 1,2] \end{cases} = \begin{cases} y, & y \in [0,1] \\ 2-y, & y \in \langle 1,2] \end{cases}$$

Budući da je $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ zaključujemo da su slučajne varijable X i Y zavisne.



Računamo vjerojatnost

$$P\left(X < \tfrac{1}{2} \mid Y < 1\right) = \frac{P\left(X < \frac{1}{2}, Y < 1\right)}{P(Y<1)} = \frac{P((X,Y) \in T_1)}{\int_0^1 f_Y(y)\,\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^1 \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x}{\int_0^1 y\,\mathrm{d}y} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

3. Biramo na sreću broj X iz intervala $[0,2]$ te potom broj Y iz intervala $[X, 4-X]$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable Y i njeno očekivanje.

Rješenje.

Biranje broja na sreću iz intervala $[a,b]$ opisano je slučajnom varijablom s jednolikom razdiobom na intervalu $[a,b]$. Općenito, funkcija gustoće takve slučajne varijable je

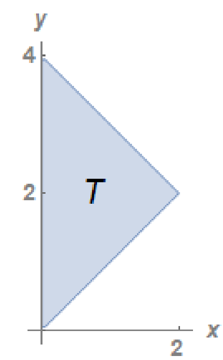
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b].$$

Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,2]$ te je njena funkcija gustoće jednaka

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [0,2].$$

Zamislimo sada da smo fiksirali vrijednost slučajne varijable X a zatim promotrimo uvjetnu gustoću slučajne varijable Y uz uvjet $X = x$. Ovdje se ponovo radi o uniformnoj razdiobi i to na intervalu $[x, 4-x]$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{4-2x}, \quad y \in [x, 4-x].$$

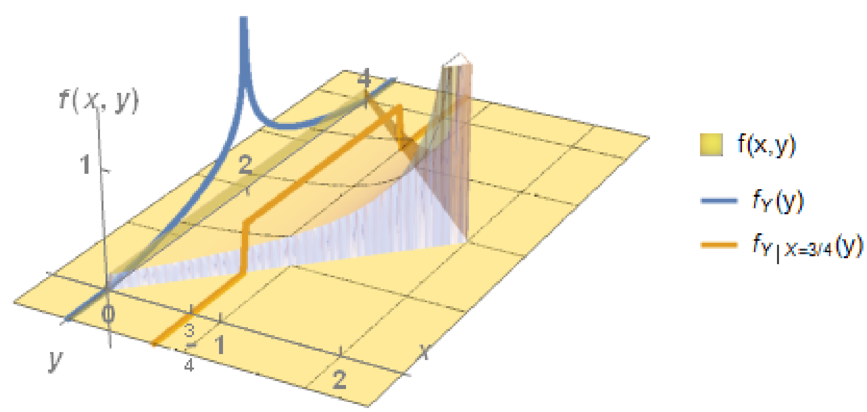


Nakon toga lagano računamo funkciju gustoće slučajnog vektora (X,Y):

$$f(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2-x}, \quad (x,y) \in T.$$

Kako bismo izračunali očekivanje $E(Y)$ trebamo odrediti marginalnu funkciju gustoće slučajne varijable Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{4}\int_0^y \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x, & y \in \langle 0,2\rangle \\ \frac{1}{4}\int_0^{4-y} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x, & y \in \langle 2,4\rangle \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{2}{2-y}, & y \in \langle 0,2\rangle \\ \frac{1}{4}\ln\frac{2}{y-2}, & y \in \langle 2,4\rangle \end{cases}$$



Računamo očekivanje slučajne varijable Y:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{4}\ln\frac{2}{2-y}\, y\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \frac{1}{4}\ln\frac{2}{y-2}\, y\,\mathrm{d}y = 2.$$

4. Iz intervala $[0,2]$ odabrano je na sreću n brojeva. Neka je X najveći među njima. Zatim biramo na sreću broj Y iz intervala $[X,2]$. Odredite očekivanje slučajne varijable Y.

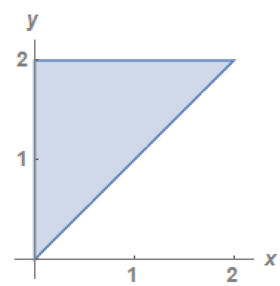
Rješenje.

Budući da smo na sreću birali brojeve riječ je o jednolikoj razdiobi. Neka je

$$X_i = \text{i–ti broj}, \quad i = 1, \ldots, n$$
$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{2},\ x \in [0,2], \quad F_{X_i}(x) = \frac{x}{2},\ x \in [0,2],$$
$$X = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Prvo ćemo pronaći funkciju razdiobe slučajne varijable X:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X < x) = P\left(\max(X_1, \ldots, X_n) < x\right) = P(X_1 < x, X_2 < x, \ldots, X_n < x) \\ &= (\text{nezavisnost}) = P(X_1 < x) \cdots P(X_n < x) = F_{X_1}(x) \cdots F_{X_n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \in [0,2]. \end{aligned}$$



Odavde računamo funkciju gustoće slučajne varijable X:

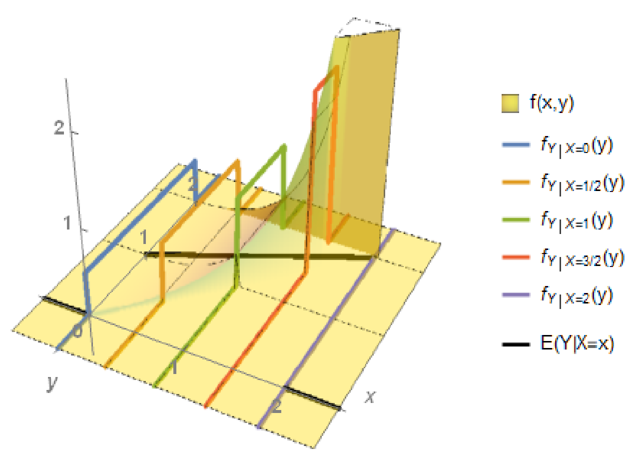
$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{nx^{n-1}}{2^n},\ x \in \langle 0,2 \rangle.$$

Uvjetna gustoća slučajne varijable Y uz uvjet $X = x$ je

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{2-x},\ y \in [x,2],$$

te je uvjetno očekivanje slučajne varijable Y uz uvjet $X = x$ jednako

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X=x}(y)\,\mathrm{d}y = \int_x^2 y \cdot \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \in \langle 0,2 \rangle, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



Naposlijetku računamo očekivanje slučajne varijable Y

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y \mid X = x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x+2}{2} \cdot \frac{nx^{n-1}}{2^n}\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{n+1}.$$

5. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

$$f_X(x) = 2x, \quad x \in [0,1].$$

Broj Y potom se bira na sreću iz intervala $[X,1]$. Odredite:

(a) funkciju gustoće slučajnog vektora (X,Y),

(b) marginalnu gustoću slučajne varijable Y.

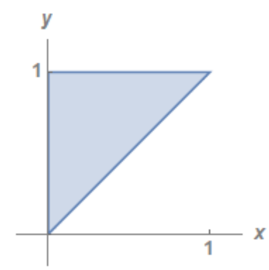
Rješenje.

(a) Funkcija gustoće $f(x,y)$ slučajnog vektora (X,Y) računa se kao umnožak funkcije gustoće $f_X(x)$ slučajne varijable X te uvjetne gustoće $f_{Y|X=x}(y)$ slučajne varijable Y uz uvjet $X = x$.
Budući da je za $x \in [0,1]$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{1-x}, \quad y \in [x,1]\,,$$

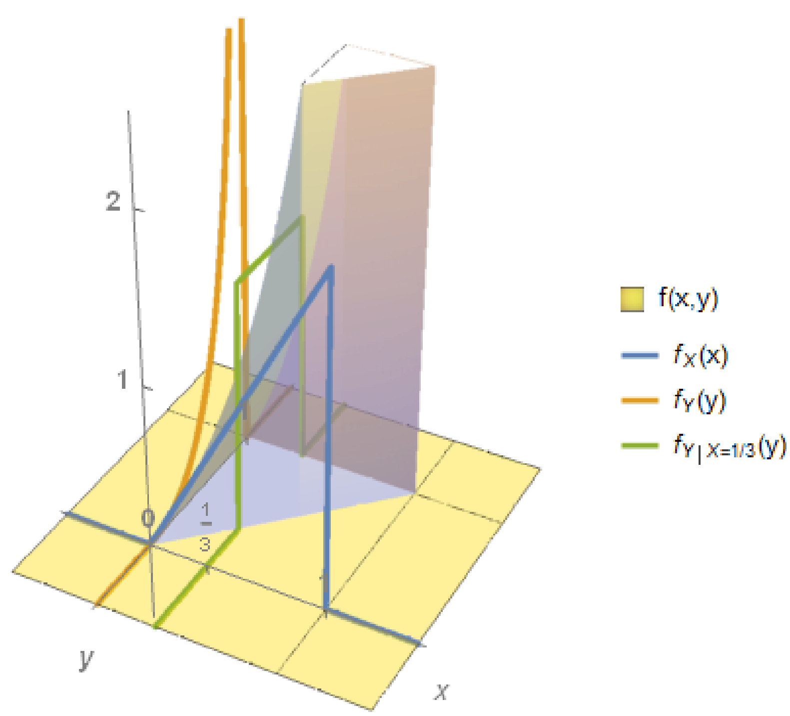
funkcija gustoće slučajnog vektora (X,Y) je

$$f(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) = \frac{2x}{1-x}, \quad 0 \le x \le y \le 1.$$



(b) Integriranjem funkcije gustoće slučajnog vektora (X,Y) dobivamo marginalnu gustoću slučajne varijable Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^y \frac{2x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^y \left(-2 + \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x\right) = -2(y+\ln(1-y)), \quad y \in [0,1].$$



6. Dana je gustoća slučajnog vektora (X, Y)

$$f(x,y) = Cy, \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,2].$$

(a) Odredite konstantu C.

(b) Izračunajte marginalne gustoće slučajnih varijabli X i Y.

(c) Jesu li komponente X i Y nezavisne? Obrazložite.

(d) Izračunajte $P(X < Y)$.

(e) Izračunajte $P(Y < 1 \mid X > 0.5)$.

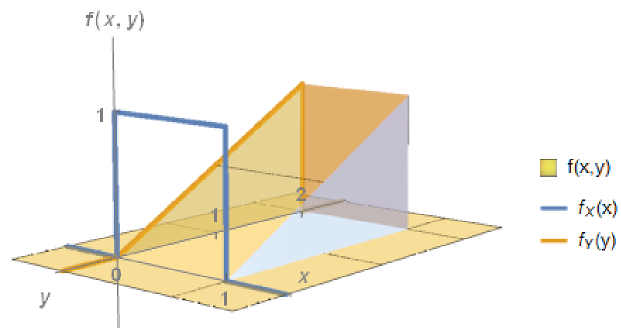
Rješenje.

(a)

$$1 = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 Cy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

(b)

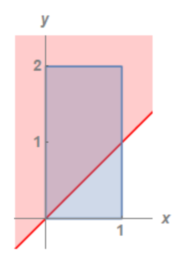
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}x = 1, \quad x \in [0,1],$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}, \quad y \in [0,2].$$



(c) Slučajne varijable X i Y su nezavisne jer vrijedi $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

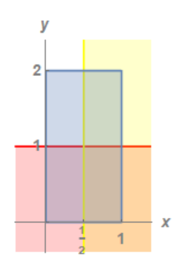
(d)

$$P(X < Y) = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^x y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{11}{12}.$$

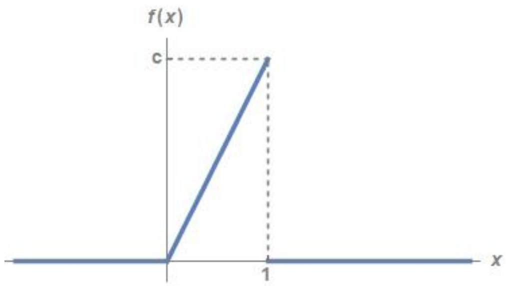


(e)

$$P(Y < 1 \mid X > 0.5) = \frac{P(Y < 1, X > 0.5)}{P(X > 0.5)}$$
$$= \frac{\int_0^1 \int_{0.5}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{0.5}^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}.$$



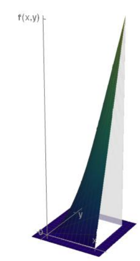
7. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable čiji je graf funkcije gustoće dan na sljedećoj slici:



(a) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (X, Y).
(b) Izračunajte $P(X^2 + Y^2 > 1)$.
(c) Izračunajte $P(X^2 + Y^2 > 1 \mid X > \frac{1}{2})$.

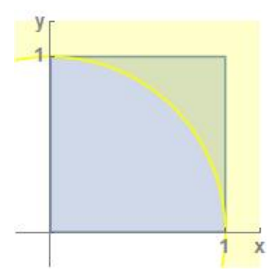
Rješenje.

(a)



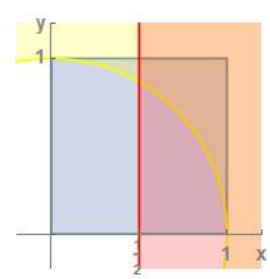
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x = c \cdot \frac{1}{2} \implies c = 2$$
$$f(x) = 2x, \quad x \in [0,1]$$
$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = f(x)f(y) = 4xy, \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

(b)



$$\begin{aligned} P(X^2 + Y^2 > 1) &= \iint_{\{x^2+y^2>1\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 4\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x \cdot \tfrac{1}{2}(1-(1-x^2))\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c)



$$\begin{aligned} P(\{X^2 + Y^2 > 1\} \cap \{X > \tfrac{1}{2}\}) &= 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{15}{32} \\ P(X > \frac{1}{2}) &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$P(X^2 + Y^2 > 1 \mid X > \tfrac{1}{2}) = \frac{P(\{X^2 + Y^2 > 1\} \cap \{X > \frac{1}{2}\})}{P(X > \frac{1}{2})} = \frac{5}{8}$$