VJEROJATNOST I STATISTIKA - Dekanski ispitni rok
13.9.2022.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

---

1. (10 bodova) Istovremeno bacamo 3 kocke. Označimo događaje:

A="pojavila se barem jedna jedinica",

B="pojavila se točno jedna šestica",

C="pojavila su se tri različita broja".

Izračunajte vjerojatnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ i $P(A \mid C)$. Obrazložite jesu li događaji B i C nezavisni.

2. (10 bodova) Iz kutije u kojoj se nalaze 4 crvene, 3 bijele i 2 plave kuglice izvačimo na sreću 3 kuglice. Neka je X broj izvučenih crvenih, a Y broj izvučenih plavih kuglica.

a) Odredite zakon razdiobe slučajnog vektora (X, Y).

b) Izračunajte vjerojatnost $P(Y = 1 \mid X = 1)$.

3. (10 bodova) Dužina $\overline{AD}$ podijeljena je točkama B i C na tri dijela tako da je $|AB| = |BC| = |CD| = 1$. Točku X_1 biramo na sreću na dužini $\overline{AC}$, a točku X_2 na sreću na dužini $\overline{BD}$. Slučajnu varijablu Z definiramo kao duljinu dužine $\overline{X_1X_2}$. Odredite funkciju razdiobe F_Z slučajne varijable Z i izračunajte očekivanje $E(Z)$.

4. (10 bodova)

a) Izvedite karakterističnu funkciju Poissonove razdiobe.

b) Dokažite da je zbroj dvije nezavisne slučajne varijable koje imaju Poissonove razdiobe opet slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu.

c) Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable koje imaju Poissonove razdiobe te neka je $X = X_1 + X_2$. Izračunajte $P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n)$ za $k = 0, 1, \ldots, n$ te pokažite da je uvjetna distribucija slučajne varijable $X_1 \mid X_1 + X_2 = n$ binomna distribucija.

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Duljine stranica pravokutnika su nezavisne slučajne varijable s funkcijama gustoće

$$f_X(x) = \frac{A}{x^2},\ x \in [1,4], \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}y + B,\ y \in [2,3].$$

a) Odredite konstante A i B.

b) Izračunajte vjerojatnost da je površina pravokutnika s duljinama stranica X i Y manja od 6.

c) Izračunajte vjerojatnost da se duljine stranica ovog pravokutnika razlikuju za manje od 1.

6. (10 bodova) Iz intervala $[0,c]$, gdje je $c > 0$ nepoznat, odabrano je na sreću n brojeva: x_1, x_2,..,x_n (Realizacije nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$). Dokažite da je

$$Y = \frac{n+1}{n} \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

nepristrani procjenitelj za c.

Normalna razdioba, funkcija $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0080	0.0160	0.0240	0.0320	0.0398	0.0478	0.0558	0.0638	0.0718
0.1	0.0796	0.0876	0.0956	0.1034	0.1114	0.1192	0.1272	0.1350	0.1428	0.1506
0.2	0.1586	0.1664	0.1742	0.1820	0.1896	0.1974	0.2052	0.2128	0.2206	0.2282
0.3	0.2358	0.2434	0.2510	0.2586	0.2662	0.2736	0.2812	0.2886	0.2960	0.3034
0.4	0.3108	0.3182	0.3256	0.3328	0.3400	0.3472	0.3544	0.3616	0.3688	0.3758
0.5	0.3830	0.3900	0.3970	0.4038	0.4108	0.4176	0.4246	0.4314	0.4380	0.4448
0.6	0.4514	0.4582	0.4648	0.4714	0.4778	0.4844	0.4908	0.4972	0.5034	0.5098
0.7	0.5160	0.5222	0.5284	0.5346	0.5406	0.5468	0.5528	0.5588	0.5646	0.5704
0.8	0.5762	0.5820	0.5878	0.5934	0.5990	0.6046	0.6102	0.6156	0.6212	0.6266
0.9	0.6318	0.6372	0.6424	0.6476	0.6528	0.6578	0.6630	0.6680	0.6730	0.6778
1.0	0.6826	0.6876	0.6922	0.6970	0.7016	0.7062	0.7108	0.7154	0.7198	0.7242
1.1	0.7286	0.7330	0.7372	0.7416	0.7458	0.7498	0.7540	0.7580	0.7620	0.7660
1.2	0.7698	0.7738	0.7776	0.7814	0.7850	0.7888	0.7924	0.7960	0.7994	0.8030
1.3	0.8064	0.8098	0.8132	0.8164	0.8198	0.8230	0.8262	0.8294	0.8324	0.8354
1.4	0.8384	0.8414	0.8444	0.8472	0.8502	0.8530	0.8558	0.8584	0.8612	0.8638
1.5	0.8664	0.8690	0.8714	0.8740	0.8764	0.8788	0.8812	0.8836	0.8858	0.8882
1.6	0.8904	0.8926	0.8948	0.8968	0.8990	0.9010	0.9030	0.9050	0.9070	0.9090
1.7	0.9108	0.9128	0.9146	0.9164	0.9182	0.9198	0.9216	0.9232	0.9250	0.9266
1.8	0.9282	0.9298	0.9312	0.9328	0.9342	0.9356	0.9372	0.9386	0.9398	0.9412
1.9	0.9426	0.9438	0.9452	0.9464	0.9476	0.9488	0.9500	0.9512	0.9522	0.9534
2.0	0.9544	0.9556	0.9566	0.9576	0.9586	0.9596	0.9606	0.9616	0.9624	0.9634
2.1	0.9642	0.9652	0.9660	0.9668	0.9676	0.9684	0.9692	0.9700	0.9708	0.9714
2.2	0.9722	0.9728	0.9736	0.9742	0.9750	0.9756	0.9762	0.9768	0.9774	0.9780
2.3	0.9786	0.9792	0.9796	0.9802	0.9808	0.9812	0.9818	0.9822	0.9826	0.9832
2.4	0.9836	0.9840	0.9844	0.9850	0.9854	0.9858	0.9862	0.9864	0.9868	0.9872
2.5	0.9876	0.9880	0.9882	0.9886	0.9890	0.9892	0.9896	0.9898	0.9902	0.9904
2.6	0.9906	0.9910	0.9912	0.9914	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928
2.7	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9944	0.9946	0.9948
2.8	0.9948	0.9950	0.9952	0.9954	0.9954	0.9956	0.9958	0.9958	0.9960	0.9962
2.9	0.9962	0.9964	0.9964	0.9966	0.9968	0.9968	0.9970	0.9970	0.9972	0.9972
3.0	0.9974	0.9974	0.9974	0.9976	0.9976	0.9978	0.9978	0.9978	0.9980	0.9980
3.1	0.9980	0.9982	0.9982	0.9982	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9986	0.9986
3.2	0.9986	0.9986	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9990	0.9990	0.9990
3.3	0.9990	0.9990	0.9990	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9994
3.4	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9996
3.5	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996
3.6	0.9996	0.9996	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.7	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.8	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora. Sretno!