

VJEROJATNOST I STATISTIKA - Drugi jesenski ispitni rok
9.9.2020.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. (10 bodova) Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup i \mathcal{F} algebra podskupova od Ω .

(a) Definirajte vjerojatnost \mathbb{P} na \mathcal{F} .

(b) Neka je \mathbb{P} vjerojatnost na \mathcal{F} . Dokažite da za sve $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(c) Iz špila od 52 karte izvlačimo 5 karata. Kolika je vjerojatnost da se među izvučenim kartama nalazi barem jedna karta pik i barem jedan as?

2. (10 bodova) Uređaj emitira znakove 0 i 1. Vjerojatnost emitiranja znaka 0 je 0.6, a vjerojatnost emitiranja znaka 1 je 0.4. Svaki se znak emitira neovisno o prethodnima, a na izlazu iz kanala se 1% znakova pogrešno interpretira.

Ako je na izlazu iz kanala primljena poruka 1111, kolika je vjerojatnost da je ta ista poruka i poslana?

3. (10 bodova)

(a) Definirajte Poissonovu razdiobu i odredite karakterističnu funkciju te razdiobe.

(b) Neka slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s parametrom λ . Odredite $\mathbb{E}(X)$.

(c) Pretpostavimo da se broj primljenih e-mailova u jednom danu ravna po Poissonovoj razdiobi. Ako je tijekom prethodnih 30 dana primljeno 110 e-mailova, kolika je vjerojatnost da će idući dan:

(i) broj primljenih e-mailova biti manji od očekivanog broja,

(ii) biti primljeno nula e-mailova?

4. (10 bodova) Josip i Renato imaju dogovoren sastanak, ali će svaki od njih, neovisno o drugome, zakasniti određeno vrijeme koje se ravna po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ . Neka je slučajna varijabla Z jednaka razlici vremena između njihovih dolazaka. Odredite funkciju gustoće od Z . Kolika je vjerojatnost da će Josip doći prije Renata?

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova)

- (a) Iskažite centralni granični teorem.
(b) Nezavisne slučajne varijable X_1, X_2, \dots, X_{100} zadane su funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Neka je $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$. Aproksimativno, koristeći centralni granični teorem, odredite a tako da vrijedi

$$\mathbb{P}(1 - a < \bar{X} < 1 + a) = 0.99.$$

6. (10 bodova)

- (a) Neka je x_1, x_2, \dots, x_n realizacija uzorka iz razdiobe s funkcijom gustoće $f(\theta, x)$, pri čemu je θ nepoznati parametar. Definirajte funkciju izglednosti $L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$.
(b) Uzorak x_1, \dots, x_n je izvučen iz populacije koja ima gustoću

$$f(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Pomoću kriterija najveće izglednosti odredite procjenu za parametar λ .