VJEROJATNOST I STATISTIKA - ljetni ispitni rok
5.7.2021.

Ime i prezime: ____________________________

JMBAG: __________________

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: __________________

---

1. **(10 bodova)** Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ prostor elementarnih događaja u pokusu bacanja simetrične igrače kocke. Označimo s $A, B \subseteq \Omega$ dva događaja. Pokažite konkretnim primjerima da može vrijediti

   (a) $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$.

   (b) $P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$.

   (c) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Što možemo reći o događajima A i B u ovom slučaju?

2. **(10 bodova)** U kutiji su 4 kocke, dvije ispravne i dvije lažne na kojima su svi brojevi šestice. Nasumično smo izvukli 2 kocke i bacili ih. Kolika je vjerojatnost da su pale dvije šestice? Ako su pale dvije šestice, kolika je vjerojatnost da smo izvukli iz kutije obje lažne kocke?

3. **(10 bodova)** Neka su X i Y slučajne varijable te neka je $r(X, Y)$ njihov koeficijent korelacije.

   (a) Navedite sve slučajeve za koje $r(X, Y)$ jednak -1.

   (b) Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, mora li vrijediti $r(X, Y) = 0$? Obrazložite odgovor.

   (c) Navedite primjer dvije slučajne varijable X i Y koje su nekorelirane, ali su zavisne.

   (d) Dokažite da za sve realne brojeve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pri čemu su $a > 0$ i $c > 0$, vrijedi $r(aX + b, cY + d) = r(X, Y)$.

OKRENITE STRANICU!

4. (10 bodova) U intervalu $[0,1]$ biramo na sreću dva broja. Neka je slučajna varijabla X maksimum od ta dva broja. Slučajna varijabla Y ima jednoliku razdiobu na $[0,x]$, pri čemu je x realizacija slučajne varijable X.

(a) Nađite funkciju gustoće slučajne varijable Y.

(b) Izračunajte $E(Y)$.

(c) Izračunajte $P(Y > E(Y))$.

5. (10 bodova) Neka su X i Y nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable koje prate normalnu razdiobu s parametrima 0 i σ^2, dakle $X, Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Dokažite da je zbroj kvadrata od X i Y eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{2\sigma^2}$, tj.

$$X^2 + Y^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right).$$

6. (10 bodova) Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s jedolikom razdiobom na intervalu $[-1,1]$. Neka je $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}$. Koristeći centralni granični teorem, odredite vrijednost c za koju je

$$P(-c < \overline{X} < c) = 0.99.$$

Objasnite u kojem ste koraku i na koji način koristili centralni granični teorem.

Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i službenog podsjetnika.
Sretno!