

VJEROJATNOST I STATISTIKA - jesenski ispitni rok

30.8.2021.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. (10 bodova)

- (a) Uz koje uvjete neka familija podskupova od Ω definira algebru događaja?
- (b) Pokus se sastoji od bacanja jedne kocke. Neka je

$$A = \{\text{Pojavio se paran broj}\},$$

$$B = \{\text{Pojavio se broj veći od 3}\}.$$

Opišite najmanju algebru događaja koja sadrži A i B . Koliko ona ima elemenata?

- (c) Izvodi se pokus u kojem se baca kocka dok se ne pojavi broj 1. Opišite vjerojatnosni prostor. Izračunajte vjerojatnost događaja
 - (c₁) $C_1 = \{\text{U pokusu se pojavio paran broj}\},$
 - (c₂) $C_2 = \{\text{U pokusu se pojavio neparan broj}\},$
 - (c₃) $C_3 = \{\text{U pokusu se pojavio broj 3}\}.$

2. (10 bodova) Četiri strijelca gađaju istu metu (svaki točno jednom). Vjerojatnosti njihovih pogodaka su redom 0.4, 0.6, 0.7, 0.8.

- (a) Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena?
- (b) Ako je meta pogođena s točno 3 metka, kolika je vjerojatnost da je promašio četvrti strijelac?

3. (10 bodova)

- (a) Dokažite: ako je $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, onda je $\frac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- (b) Neka je $X \sim \mathcal{N}(3, \sigma^2)$ i $P(-3 < X < 9) = 0.9973$. Izračunajte $P(X > 0)$.
- (c) Neka je $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dokažite: za svaki pozitivan realan broj $a > 0$ vrijedi $P(|X| < a) < a$.

OKRENITE STRANICU!

4. (10 bodova)

- (a) Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Dokažite da tada slučajna varijabla $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ također ima eksponencijalnu razdiobu. Koliko je $E(Y)$?
- (b) Neka su X_1 i X_2 nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima λ_1 i λ_2 . Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Z = X_1 + X_2$.

5. (10 bodova) Na jesenski ispitni rok iz VIS-a izašlo je 40 studenata. Na temelju godina iskustva, ispravljač zna da je vrijeme koje mu je potrebno za ispravljanje jednog ispita slučajna varijabla s očekivanjem od 6 minuta te standardnom devijacijom od 6 minuta.

- (a) Ako su vremena ispravljanja pojedinih ispita nezavisne slučajne varijable i ispravljač počne s ispravljanjem u 18:50 i ispravlja ispite bez pauze, kolika je vjerojatnost da je gotov s ispravljanjem prije nego počnu vijesti na HRT-u u 23:00?
- (b) Ako sportske vijesti počinju u 23:10, koja je vjerojatnost da će propustiti dio sportskih vijesti (pod pretpostavkom da ne upali TV prije nego što završi s ispravljanjem ispita)?

6. (10 bodova)

- (a) Neka je $\hat{\Theta}_1$ nepristrani procjenitelj za parametar θ te neka je W slučajna varijabla s očekivanjem nula. Dokažite da je tada

$$\hat{\Theta}_2 = \hat{\Theta}_1 + W$$

također nepristrani procjenitelj za parametar θ .

- (b) Neka je $\hat{\Theta}_1$ procjenitelj za parametar θ takav da vrijedi $E[\hat{\Theta}_1] = a\theta + b$, pri čemu je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. Dokažite da je tada

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{\hat{\Theta}_1 - b}{a}$$

nepristrani procjenitelj za parametar θ .