

VJEROJATNOST I STATISTIKA - Zimski ispitni rok
7.2.2022.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. (10 bodova) Slučajna varijabla X dana je funkcijom gustoće $f_X(x) = \begin{cases} Cx, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$
- (a) Odredite $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})$.
- (b) Odredite očekivanje i varijancu varijable X .
- (c) Neka su X_1, X_2 nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom gustoće f_X . Izračunajte $\mathbb{P}(\frac{X_1+X_2}{2} \leq \frac{1}{2})$.
- (d) Neka su X_1, X_2, \dots, X_{100} nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom gustoće f_X . Izračunajte $\mathbb{P}(\frac{X_1+X_2+\dots+X_{100}}{100} \leq \frac{1}{2})$.
2. (10 bodova) Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} Cx^\theta, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad \text{pri čemu je } \theta > -1.$$

- (a) Odredite konstantu C (u ovisnosti o parametru θ).
- (b) Kriterijem najveće izglednosti procijenite parametar θ .
- (c) Definirajmo $\lambda := \frac{1}{\theta}$. Je li statistika $\hat{\lambda} := -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ nepristrani procjenitelj za parametar λ ?
3. (10 bodova)
- (a) Definirajte binomnu razdiobu slučajne varijable X .
- (b) Neka slučajna varijabla ima binomnu razdiobu s očekivanjem $E(X) = 80$ i varijancom $\text{Var}(X) = 16$. Odredite parametre slučajne varijable X .
- (c) Odredite $\mathbb{P}(X > 82)$, za varijablu X iz b) dijela zadatka.
- (d) Neka su X_1, \dots, X_{100} nezavisne, jednako distribuirane kao i X iz b) dijela zadatka. Odredite $\mathbb{P}\left(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i > 82\right)$.
4. (10 bodova) Slučajna varijabla X ima eskponencijalnu razdiobu, a slučajna varijabla Y normalnu razdiobu s pripadnim gustoćama

$$f_X(x) = 3e^{-3x}, \quad x > 0,$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+4)^2}{8}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ako su X i Y međusobno korelirane slučajne varijable s koeficijentom korelacije $r(X, Y) = -0.5$, izračunajte očekivanje slučajne varijable $Z = X^2 - 3XY + 2Y^2$.

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Iz intervala $[a, b]$, pri čemu je lijevi rub a poznat, a desni rub b nepoznat, odabrano je na sreću n brojeva x_1, x_2, \dots, x_n . Kako bismo procijenili desni rub intervala, odabiremo statistiku

$$Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- (a) Dokažite da Z nije nepristran procjenitelj za desni rub intervala.
 (b) Dokažite da je Z procjenitelj maksimalne izglednosti za desni rub intervala.
6. (10 bodova) Neka su A i B proizvoljni događaji.
- (a) Neka je $\mathbb{P}(A) = 1$. Dokažite da tada vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.
 (b) Neka je $\mathbb{P}(A \mid B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid C)$. Dokažite da tada vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$.
 (c) Dokažite da vrijedi $\mathbb{P}(A \cup B) \cdot \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Normalna razdioba, funkcija $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0080	0.0160	0.0240	0.0320	0.0398	0.0478	0.0558	0.0638	0.0718
0.1	0.0796	0.0876	0.0956	0.1034	0.1114	0.1192	0.1272	0.1350	0.1428	0.1506
0.2	0.1586	0.1664	0.1742	0.1820	0.1896	0.1974	0.2052	0.2128	0.2206	0.2282
0.3	0.2358	0.2434	0.2510	0.2586	0.2662	0.2736	0.2812	0.2886	0.2960	0.3034
0.4	0.3108	0.3182	0.3256	0.3328	0.3400	0.3472	0.3544	0.3616	0.3688	0.3758
0.5	0.3830	0.3900	0.3970	0.4038	0.4108	0.4176	0.4246	0.4314	0.4380	0.4448
0.6	0.4514	0.4582	0.4648	0.4714	0.4778	0.4844	0.4908	0.4972	0.5034	0.5098
0.7	0.5160	0.5222	0.5284	0.5346	0.5406	0.5468	0.5528	0.5588	0.5646	0.5704
0.8	0.5762	0.5820	0.5878	0.5934	0.5990	0.6046	0.6102	0.6156	0.6212	0.6266
0.9	0.6318	0.6372	0.6424	0.6476	0.6528	0.6578	0.6630	0.6680	0.6730	0.6778
1.0	0.6826	0.6876	0.6922	0.6970	0.7016	0.7062	0.7108	0.7154	0.7198	0.7242
1.1	0.7286	0.7330	0.7372	0.7416	0.7458	0.7498	0.7540	0.7580	0.7620	0.7660
1.2	0.7698	0.7738	0.7776	0.7814	0.7850	0.7888	0.7924	0.7960	0.7994	0.8030
1.3	0.8064	0.8098	0.8132	0.8164	0.8198	0.8230	0.8262	0.8294	0.8324	0.8354
1.4	0.8384	0.8414	0.8444	0.8472	0.8502	0.8530	0.8558	0.8584	0.8612	0.8638
1.5	0.8664	0.8690	0.8714	0.8740	0.8764	0.8788	0.8812	0.8836	0.8858	0.8882
1.6	0.8904	0.8926	0.8948	0.8968	0.8990	0.9010	0.9030	0.9050	0.9070	0.9090
1.7	0.9108	0.9128	0.9146	0.9164	0.9182	0.9198	0.9216	0.9232	0.9250	0.9266
1.8	0.9282	0.9298	0.9312	0.9328	0.9342	0.9356	0.9372	0.9386	0.9398	0.9412
1.9	0.9426	0.9438	0.9452	0.9464	0.9476	0.9488	0.9500	0.9512	0.9522	0.9534
2.0	0.9544	0.9556	0.9566	0.9576	0.9586	0.9596	0.9606	0.9616	0.9624	0.9634
2.1	0.9642	0.9652	0.9660	0.9668	0.9676	0.9684	0.9692	0.9700	0.9708	0.9714
2.2	0.9722	0.9728	0.9736	0.9742	0.9750	0.9756	0.9762	0.9768	0.9774	0.9780
2.3	0.9786	0.9792	0.9796	0.9802	0.9808	0.9812	0.9818	0.9822	0.9826	0.9832
2.4	0.9836	0.9840	0.9844	0.9850	0.9854	0.9858	0.9862	0.9864	0.9868	0.9872
2.5	0.9876	0.9880	0.9882	0.9886	0.9890	0.9892	0.9896	0.9898	0.9902	0.9904
2.6	0.9906	0.9910	0.9912	0.9914	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928
2.7	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9944	0.9946	0.9948
2.8	0.9948	0.9950	0.9952	0.9954	0.9954	0.9956	0.9958	0.9958	0.9960	0.9962
2.9	0.9962	0.9964	0.9964	0.9966	0.9968	0.9968	0.9970	0.9970	0.9972	0.9972
3.0	0.9974	0.9974	0.9974	0.9976	0.9976	0.9978	0.9978	0.9978	0.9980	0.9980
3.1	0.9980	0.9982	0.9982	0.9982	0.9984	0.9984	0.9984	0.9984	0.9986	0.9986
3.2	0.9986	0.9986	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9988	0.9990	0.9990	0.9990
3.3	0.9990	0.9990	0.9990	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9994
3.4	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9996
3.5	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996
3.6	0.9996	0.9996	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.7	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.8	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000