VJEROJATNOST I STATISTIKA - međuispit (14.6.2021.)
Rješenja

---

1. (10 bodova)

(a) Definirajte (pomoću funkcije gustoće ili funkcije razdiobe) kada slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$.

(b) Dokažite: ako je $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, onda vrijedi svojstvo odsustva pamćenja:

$$P\big(X < b \mid X > a\big) = P(X < b - a), \quad 0 \le a < b.$$

(c) Vrijeme do prvog ulova ribe ima eksponencijalnu razdiobu s očekivanjem 1 sat. Ako ulova nije bilo prvih 40 minuta, izračunajte vjerojatnost da ga neće biti ni u narednih 20 minuta.

Rješenje:

(a) Slučajna varijabla ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako je njena gustoća vjerojatnosti zadana s

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

odnosno funkcija razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

(b) Eksponencijalna razdioba nema pamćenja tj.

$$P\big(X < b \mid X > a\big) = P(X < b - a), \quad 0 \le a < b.$$

$$\begin{aligned}
P\big(X < b \mid X > a\big) &= \frac{P(X < b, X > a)}{P(X > a)} \\
&= \frac{P(a < X < b)}{P(X > a)} \\
&= \frac{F(b) - F(a)}{1 - F(a)} \\
&= \frac{\left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right)} \\
&= \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} \\
&= 1 - e^{-\lambda(b-a)} \\
&= P(X < b - a).
\end{aligned}$$

(c) Neka je slučajna varijabla X vrijeme do prvog ulova ribe u minutama, $E(X) = 1/\lambda = 60$ pa je $\lambda = 1/60$. Koristeći odsustvo pamćenja računamo vjerojatnost

$$P\big(X > 60 \mid X > 40\big) = P(X > 20) = 1 - F(20) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{20}{60}}\right) = e^{-\frac{1}{3}} = 0.71653.$$

2. (10 bodova) Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = x + y, \qquad \text{za } \ 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1.$$

Izračunajte vjerojatnosti događaja:

(a) $P\left(X^2 + Y^2 > 1\right)$,

(b) $P\left(X > \frac{1}{2} \,\middle|\, Y < \frac{1}{2}\right)$.

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
P(X^2 + Y^2 > 1) &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x+y)dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 & 0 \mapsto 1 \\ dt = -2x dx & 1 \mapsto 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P\left(X > \frac{1}{2} \,\middle|\, Y < \frac{1}{2}\right) &= \frac{P\left(X > \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (x+y) dy dx}{\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (x+y) dy dx} \\
&= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right) dx} \\
&= \frac{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1}{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8}\right)\Big|_0^1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. (10 bodova) Broj bodova X na ispitu je slučajna varijabla s očekivanjem $E(X) = 55$ i disperzijom $D(X) = 81$.

(a) Pokažite da vjerojatnost događaja $P(45 < X < 65)$ nije manja od 0.19.

(b) Koliko studenata mora pristupiti ispitu da bi vjerojatnost da je njihov prosječan broj bodova između 50 i 60 bila najmanje 0.99?

Rješenje:

(a) Koristeći nejednakost Čebiševa je

$$P\left(45 < X < 65\right) = P\left(|X - 55| < 10\right) = 1 - P\left(|X - 55| \geq 10\right) \geq 1 - \frac{81}{100} = 0.19$$

(b) Po centralnom graničnom teoremu je

$$\frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - 55}{\frac{9}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

odnosno

$$P\left(50 < \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} < 60\right) = P\left(-\frac{5}{9}\sqrt{n} < \frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - 55}{\frac{9}{\sqrt{n}}} < \frac{5}{9}\sqrt{n}\right)$$

$$= \Phi^*\left(\frac{5}{9}\sqrt{n}\right) \geq 0.99$$

Kako je $\Phi^*\left(2.58\right) = 0.99$ mora vrijediti $\frac{5}{9}\sqrt{n} \geq 2.58$, odnosno $n \geq 21.57$ pa studenata mora biti najmanje 22.

4. (10 bodova) Pretpostavimo da su očekivanje a i disprezija σ^2 populacije X nepoznati i $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uzorak za X te

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

(a) Dokažite da je sljedeća statistika za procjenu disperzije σ^2 nepristrana:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right).$$

(b) Dokažite da je statistika S^2 za procjenu disperzije σ^2 valjana.

Rješenje:

(a)

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \overline{X})^2].$$

Uočite da je

$$E[X_i - \overline{X}] = E[X_i] - E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = a - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j] = a - \frac{1}{n}\cdot na = a - a = 0.$$

Dakle, $D(X_i - \overline{X}) = E[(X_i - \overline{X})^2]$. Sada imamo

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} D(X_i - \overline{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{j\neq i} X_j\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D(X_i) + \frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i} D(X_j)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\cdot n\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sigma^2 + \frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2\right] \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 + \frac{1}{n}\cdot\sigma^2 = \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, statistika S^2 je nepristrani procjenitelj za disperziju σ^2.

(b) Predavanja - Poglavlje 10.