VJEROJATNOST I STATISTIKA, FER

dodatni zadaci, 3.tjedan

Uvjetna vjerojatnost

Zadatak 1.

U kutiji se nalazi 6 bijelih i 4 crne kuglice.Kolika je vjerojatnost da će tri na sreću odabrane kuglice iz kutije biti bijele?

Rješenje:

Označimo s A traženi događaj i događaje $A_i = \{i\text{-ta kuglica je bijele boje}\}$, $i = 1, 2, 3$. Tada je $A = A_1 A_2 A_3$ i

$$P(A) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 A_2)$$

$$P(A_1) = \frac{6}{10}, \quad P(A_2 \mid A_1) = \frac{5}{9}, \quad P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{4}{8}$$

pa je

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 0.167.$$

Primjetite da je vjerojatnost jednaka ako sve tri kuglice odabiremo odjednom

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}}{\frac{10\cdot9\cdot8}{3!}} = 0.167.$$

Nezavisnost događaja

Zadatak 2.

Za događaje A i B je poznato $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$. Odredite $P(B)$

a) ako realizacija događaja A povlači realizaciju događaja B.
b) ako su događaji A i B disjunktni.
c) ako su događaji A i B nezavisni.

Rješenje:

a) Ako je $A \subset B$ onda je $P(B) = P(A \cup B) = \frac{1}{3}$.

b) Ako je $AB = \emptyset$, a onda i $P(AB) = 0$ imamo $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{12}$.

c) Imamo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$ pa je odavde

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1}{9}.$$

Zadatak 3.

Dokažite: ako su događaji A i B s pozitivnom vjerojatnošću disjunktni onda ne mogu biti nezavisni.

Rješenje:

Vrijedi $AB = \emptyset$ pa je $P(AB) = 0$. Kako je $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$ onda mora biti $P(A)P(B) > 0$ pa je nemoguće da vrijedi $P(AB) = P(A)P(B)$.

Zadatak 4.

Ako je $P(A \mid B) = P(A)$, dokažite da je onda i $P(B \mid A) = P(B)$.

Rješenje:

Ako je $P(A \mid B) = P(A)$ onda je

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

odnosno

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Zbog toga je

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Zadatak 5.

Ako je $P(B) \in \langle 0, 1\rangle$ i $P(A \mid B) = P\left(A \mid \overline{B}\right)$, dokažite da su A i B nezavisni događaji.

Rješenje:

Zbog $P(A \mid B) = P\left(A \mid \overline{B}\right)$ vrijedi

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P\left(A\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}.$$

Zato je

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

odnosno

$$P(AB)(1 - P(B)) = P(B)(P(A) - P(AB))$$

pa nakon množenja i skraćivanja dobijemo

$$P(AB) = P(A)\,P(B)\,.$$

Zadatak 6.
Bačene su dvije kocke. Označimo događaje:
$A = \{\text{pojavila se barem jedna jedinica}\}$,
$B = \{\text{pojavila su se dva različita broja}\}$.
Izračunajte $P(A)\,, P(B)\,, P(A \mid B)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

Rješenje:
Vjerojatnost da se pojavi točno jedna jedinica ili točno dvije jednaka je $P(A) = \frac{10+1}{36} = \frac{11}{36}$, a vjerojatnost za dva različita broja je $P(B) = \frac{36-6}{36} = \frac{5}{6}$. Nadalje

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}.$$

Događaji A i B nisu nezavisni jer je $P(A \mid B) \neq P(A)$.

Zadatak 7.
Bačene su tri kocke. Označimo događaje:
$A = \{\text{pojavila se barem jedna jedinica}\}$,
$B = \{\text{pojavila točno jedna jedinica}\}$,
$C = \{\text{pojavila su se tri različita broja}\}$.
Izračunajte $P(A)\,, P(B)\,, P(C)\,, P(A \mid C)$. Jesu li događaji B i C nezavisni?

Rješenje: Pomoću suprotne vjerojatnosti je

$$P(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}.$$

Šetica se može pojaviti na prvoj, drugoj ili trećoj kockici, a na preostale dvije je $1, 2, 3, 4$ ili 5. zato je

$$P(B) = \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} = \frac{25}{108}.$$

Vjerojatnost tri različita broja je

$$P(C) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

a vjerojatnost za barem jednu šesticu ako su pali različiti brojevi

$$P(A \mid C) = P(B \mid C) = \frac{\binom{5}{2}3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

pa B i C nisu nezavisni, jer je $P(B \mid C) \neq P(B)$.

Zadatak 8.

Ako su $A, B,$ i C nezavisni događaji onda je $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. Vrijedi li obrat?

Rješenje: Ne vrijedi, jer ne mora vrijediti i $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$ i $P(AC) = P(A)P(C)$.

Primjer za to: bacamo dvije kocke i neka su događaji

$A = \{\text{na prvoj kocki pala je } 1, 2, 3\}$,

$B = \{\text{na prvoj kocki pala je } 3, 4, 5\}$,

$C = \{\text{zbroj brojeva na obe kocke je } 9\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(C) &= \frac{4}{36} \\
P(ABC) &= \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C) \\
P(AB) &= \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B) \\
P(BC) &= \frac{3}{36} \neq \frac{2}{36} = P(B)P(C) \\
P(AC) &= \frac{1}{36} \neq \frac{2}{36} = P(A)P(C).
\end{aligned}$$

Formula potpune vjerojatnosti

Uvodni primjer

Radno vrijeme neke trgovine je od ponedjeljka do petka 8-16 i subotom 8-14. Kolika je vjerojatnost da će u na sreću odabranom trenutku trgovina raditi?

Rješenje:

Neka je $A = \{\text{trgovina radi}\}$. Koristeći geometrijsku vjerojatnost

$$P(A) = \frac{5 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{7 \cdot 24} = \frac{23}{84}.$$

Zapišimo ovu vjerojatnost u drugom obliku

$$P(A) = \frac{5 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{7 \cdot 24} = \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{24} + \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{24} + \frac{1}{7} \cdot \frac{0}{24}.$$

Interpretirajmo vjerojatnosti $\frac{5}{7}, \frac{8}{24}, \frac{1}{7}, \frac{6}{24}, \frac{1}{7}, \frac{0}{24}$: vjerojatnost radnog dana je $\frac{5}{7}$, a subote ili nedjelje je $\frac{1}{7}$. Vjerojatnost da će u na sreću odabranom trenutku trgovina raditi radnim danom jednaka je $\frac{8}{24}$, za subotu je ta vjerojatnost jednaka $\frac{6}{24}$, a za nedjelju 0.

Zadatak 9

Kocka se na sreću baca jednom, a zatim još onoliko puta koliko je pokazalo prvo bacanje. Kolika je vjerojatnost da se u oba bacanja zajedno pojavi točno jedna petica?

Rješenje: Neka su
$A = \{$u oba bacanja zajedno pojavila se jedna petica$\}$
$H_i = \{$u prvom bacanju pao je broj $i\}$, $i = 1, \ldots, 6$.
Očito je $P(H_i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \ldots, 6$.

Imamo redom za uvjetne vjerojatnosti: vjerojatnost za peticu ako bacamo jednu kocku je

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{6},$$

vjerojatnost za jednu peticu ako dvaput bacamo jednu kocku odnosno kao da bacamo dvije kocke je

$$P(A \mid H_2) = \frac{2 \cdot 5}{6^2},$$

jer imamo dvije mogućnosti za peticu na prvoj ili drugoj kocki, a na preostaloj smije biti $1, 2, 3, 4, 6$. Vjerojatnost za jednu peticu ako bacamo tri kocke je

$$P(A \mid H_3) = \frac{3 \cdot 5^2}{6^3},$$

jer su tri mogućnosti za peticu na prvoj, drugoj ili trećoj kocki, a na preostale dvije smije biti $1, 2, 3, 4, 6$. Vjerojatnost za jednu peticu ako bacamo četri kocke je

$$P(A \mid H_4) = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4},$$

jer imamo četri mogućnosti za peticu, a na preostale tri smije biti $1, 2, 3, 4, 6$. Vjerojatnost za nijednu peticu ako bacamo pet kocki je

$$P(A \mid H_5) = \frac{5^5}{6^5},$$

jer na svim kockama smije biti samo $1, 2, 3, 4, 6$. Vjerojatnost za jednu peticu ako bacamo šest kocki je

$$P(A \mid H_6) = \frac{6 \cdot 5^5}{6^6},$$

jer je šest mogućnosti za peticu, a na preostalih pet smije biti $1, 2, 3, 4, 6$. Formulom potpune vjerojatnosti dobijemo

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i) P(A \mid H_i) = 0.3302.$$

Bayesova formula

Zadatak 10.

Student odgovara na pitanje na koje su ponuđena 4 odgovora (tri netočna i jedan točan). Vjerojatnost da student zna odgovor na pitanje je 0.8, a vjerojatnost da ne zna, odnosno da pogađa odgovor na sreću je 0.2. Kolika je vjerojatnost da student odgovori točno na dano pitanje? Ako je student odgovorio točno na dano pitanje, kolika je vjerojatnost da odgovor nije pogodio na sreću?

Rješenje:

Hipoteze i njihove vjerojatnosti su
$H_1 = \{\text{student zna odgovor na pitanje}\}$, $P(H_1) = 0.8$,
$H_2 = \{\text{student ne zna odgovor i pogađa ga}\}$, $P(H_2) = 0.2$.
Za $A = \{\text{student je odgovorio točno}\}$ odredimo uvjetne vjerojatnosti.

Ako student zna odgovor na pitanje sigurno će odgovoriti točno $P(A \mid H_1) = 1$. Ako student ne zna odgovor na pitanje, točan odgovor će pogoditi s vjerojatnošću 0.25 pa je $P(A \mid H_2) = 0.25$.

Zato je

$$P(A) = P(H_1) P(A \mid H_1) + P(H_2) P(A \mid H_2) = 0.85.$$

Ako je student odgovorio točno na dano pitanje, vjerojatnost da odgovor nije pogodio na sreću je

$$P\left(\overline{H_2} \mid A\right) = P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0.8}{0.85} = 0.941.$$

Zadatak 11.

Kod testiranja na određenu bolest u nekoj populaciji ako ispitanik ima bolest test će biti pozitivan u 90% slučajeva. Ako ispitanik nema bolest test će neispravno biti pozitivan u 5% slučajeva. U prosjeku 2% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabranoj osobi iz populacije test biti pozitivan? Ako je test bio pozitivan kolika je vjerojatnost da ta osoba ima bolest?

Rješenje:
Hipoteze i njihove vjerojatnosti su
$H_1 = \{\text{osoba ima bolest}\}$, $P(H_1) = 0.02$,
$H_2 = \{\text{osoba nema bolest}\}$, $P(H_2) = 0.98$.
Za $A = \{\text{test na bolest je pozitivan}\}$ odredimo uvjetne vjerojatnosti.

Ako ispitanik ima bolest test će biti pozitivan u 90% slučajeva pa je $P(A \mid H_1) = 0.9$. Ako ispitanik nema bolest test će neispravno biti pozitivan u 5% slučajeva pa je $P(A \mid H_2) = 0.05$.

Zato je

$$P(A) = P(H_1) P(A \mid H_1) + P(H_2) P(A \mid H_2) = 0.067.$$

Ako je test bio pozitivan vjerojatnost da ta osoba ima bolest je

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.067} = 0.269.$$

Zadatak 12.
Utvrđeno je da:
34% ljudi ima krvnu grupu 0,
37% ljudi krvnu grupu A,
21% ljudi krvnu grupu B
i 8% krvnu grupu AB.

Kod transfuzije, osim svoje krvne grupe, osoba krvne grupe AB može primiti bilo koju grupu, osoba krvne grupe A ili B može primiti svoju krvnu grupu i krvnu grupu 0, a osoba krvne grupe 0 ne može ništa primiti osim svoje krvne grupe 0. Jedino u ovim slučajevima je transfuzija uspješna.

a) Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana osoba uspješno primi krv od slučajno odabrane osobe.

b) Ukoliko je osoba uspješno primila krv, kolika je vjerojatnost da ona ima krvnu grupu AB?

Rješenje:
a) Hipoteze i njihove vjerojatnosti su
$H_1 = \{\text{primatelj ima krvnu grupu 0}\}$, $P(H_1) = 0.34$,
$H_2 = \{\text{primatelj ima krvnu grupu A}\}$, $P(H_2) = 0.37$,
$H_3 = \{\text{primatelj ima krvnu grupu B}\}$, $P(H_3) = 0.21$,
$H_4 = \{\text{primatelj ima krvnu grupu AB}\}$, $P(H_4) = 0.08$.
Za $A = \{\text{transfuzija je uspješna}\}$ odredimo i uvjetne vjerojatnosti.

Ako primatelj ima krvnu grupu 0 on može primiti krv samo krvne grupe 0 pa je $P(A \mid H_1) = 0.34$.

Ako primatelj ima krvnu grupu A on može primiti krv samo krvnih grupa A ili 0 pa je $P(A \mid H_2) = 0.34 + 0.37 = 0.71$.

Ako primatelj ima krvnu grupu B on može primiti krv samo krvnih grupa B ili 0 pa je $P(A \mid H_3) = 0.34 + 0.21 = 0.55$.

Ako primatelj ima krvnu grupu AB on može primiti bilo koju grupu $P(A \mid H_4) = 1$.

Zato je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)\, P(A \mid H_i) = 0.5738$$

b) Ukoliko je osoba uspješno primila krv, vjerojatnost da ona ima krvnu grupu AB je

$$P(H_4 \mid A) = \frac{P(H_4)\, P(A \mid H_4)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i)\, P(A \mid H_i)} = \frac{0.08}{0.5738} = 0.1394.$$

Zadatak 13.

U grupi od 10 studenata koji su došli na usmeni ispit 3 studenata su pripremila ispit odlično, 4 dobro, 2 dovoljno i 1 loše. Na ispitu student dobiva 3 pitanja od mogućih 20. Odlično pripremljen student zna odgovor na svih 20 pitanja, dobro pripremljen na 16, dovoljno pripremljen na 10 i loše pripremljen na 5. Slučajno odabrani student je točno odgovorio na sva tri postavljena pitanja. Izračunajte vjerojatnost da je to bio student koji se loše pripremio za ispit.

Rješenje:

Hipoteze i njihove vjerojatnosti su

$H_1 = \{\text{student u grupi je naučio odlično}\}$, $P(H_1) = 0.3$,

$H_2 = \{\text{student u grupi je naučio dobro}\}$, $P(H_2) = 0.4$,

$H_3 = \{\text{student u grupi je naučio dovoljno}\}$, $P(H_3) = 0.2$,

$H_4 = \{\text{student u grupi je naučio loše}\}$, $P(H_4) = 0.1$.

Za $A = \{\text{student je točno odgovorio na sva tri pitanja}\}$ odredimo i uvjetne vjerojatnosti.

Odlično pripremljen student zna odgovor na svih 20 pitanja i $P(A \mid H_1) = 1$.

Dobro pripremljen student zna odgovor na 16 pitanja pa je

$$P(A \mid H_2) = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.491.$$

Dvoljno pripremljen student zna odgovor na 10 pitanja pa je

$$P(A \mid H_3) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.105.$$

Loše pripremljen student zna odgovor na 5 pitanja

$$P(A \mid H_4) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.009.$$

Vjerojatnost da je slučajno odabrani student točno odgovorio na sva tri postavljena pitanja je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i) P(A \mid H_i) = 0.5183$$

a ako je slučajno odabrani student točno odgovorio na sva tri postavljena pitanja, vjerojatnost da je to bio student koji se loše pripremio za ispit je

$$P(H_4 \mid A) = \frac{P(H_4) P(A \mid H_4)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i) P(A \mid H_i)} = 0.00169.$$