

**VJEROJATNOST I STATISTIKA – jesenski ispitni rok**  
**29. 08. 2020.**

---

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

JMBAG: \_\_\_\_\_

Grupa: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: \_\_\_\_\_

---

**Zadatak 1.(10)** Zadana je dužina  $\overline{AB}$  duljine 5 cm i točka  $C$  na toj dužini takva da je  $|AC| : |CB| = 2 : 3$ . Na sreću biramo točku  $X$  na dužini  $\overline{AC}$  i točku  $Y$  na dužini  $\overline{CB}$ . Kolika je vjerojatnost da je duljina dužine  $\overline{XY}$  veća od 2 cm i manja od 4 cm?

**Zadatak 2.(10)** (a) Iskažite i dokažite formulu potpune vjerojatnosti i Bayesovu formulu.  
(b) Jedan način dizajniranja filtra SPAM mailova je promatranje učestalosti nekih riječi u mailovima. Pretpostavimo da imamo sljedeće informacije:

- \* 50% svih mailova su SPAM mailovi.
- \* 1% SPAM mailova sadrži riječ "nagrada".
- \* 0.001% mailova koji nisu SPAM sadrže riječ "nagrada."

Pretpostavimo da smo pregledali jedan mail i uočili riječ "nagrada". Kolika je vjerojatnost da se radi o SPAM mailu?

**Zadatak 3.(10)** Zadan je slučajni vektor  $(X, Y)$  svojom razdiobom

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.05	0.05
3	0.05	0.2	0.05
5	0.1	0.2	0.2

- (a) Odredite marginalne razdiobe slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ .
- (b) Odredite uvjetnu razdiobu varijable  $(Y|X = 3)$ .
- (c) Obrazložite jesu li  $X$  i  $Y$  nezavisne varijable?
- (d) Izračunajte vjerojatnosti događaja  $\{X \geq 3\}$  i  $\{X \geq 3|Y \leq 2\}$ .

**Zadatak 4.(10)** (a) Iskažite i dokažite svojstvo odsutstva pamćenja eksponencijalne slučajne varijable.  
(b) Neka slučajna varijabla  $X$  ima eksponencijalnu razdiobu s očekivanjem 2. Izračunajte  $P(|X - 2| > 1)$ .

**OKRENITE STRANICU!**

- Zadatak 5.(10)** (a) Neka su  $X_1$  i  $X_2$  normalne slučajne varijable s očekivanjima  $a_1$  i  $a_2$  te disperzijama  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$ . Dokažite da je tada  $s_1X_1 + s_2X_2$ ,  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ , također normalna slučajna varijabla. Odredite njeno očekivanje i disperziju. Napomena: karakteristična funkcija normalne razdiobe  $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$  je  $\theta_X(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ .
- (b) Neka slučajna varijabla  $X$  ima normalnu razdiobu s očekivanjem  $a_X = 25$  i standardnom devijacijom  $\sigma_X = 4$ , a slučajna varijabla  $Y$  normalnu razdiobu s očekivanjem  $a_Y = 25$  i standardnom devijacijom  $\sigma_Y = 3$  te neka su  $X$  i  $Y$  nezavisne.
- Odredite realni broj  $c \in \mathbb{R}$  tako da je  $P(-c < X - Y < c) = 0.9$ .

- Zadatak 6.(10)** Iz intervala  $[\alpha, 1]$ , gdje je  $\alpha < 1$  nepoznat, odabrano je na sreću  $n$  brojeva:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Kako bismo procijenili  $\alpha$  odabiremo statistiku

$$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - \frac{1}{n+1}.$$

- (a) Dokažite da statistika  $Y$  nije nepristran procjenitelj za parametar  $\alpha$ .
- (b) S kojim faktorom treba pomnožiti  $Y$  kako bismo dobili nepristranu procjenitelj za parametar  $\alpha$ ?