

VJEROJATNOST I STATISTIKA – ljetni ispitni rok

8. 7. 2022.

Ime i prezime: _____

JMBAG: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

Zadatak 1.(10) Neka su A i B događaji takvi da je $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$.

- (a) Definirajte nezavisnost dva događaja A i B .
- (b) Dokažite da su A i B nezavisni ako i samo ako je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- (c) Dokažite ako je $P(A | B) = P(A)$ onda je i $P(B | A) = P(B)$.
- (d) Dokažite ako je $P(A^C) > 0$ i $P(B | A) = P(B | A^C)$ onda su A i B nezavisni.

Zadatak 2.(10) Dva gusara dijele blago koje se sastoji od 120 zlatnika i 80 srebrnjaka. Budući da se nisu mogli nagoditi, odlučili su bacati novčić. Ako padne pismo prvi će gusar dobiti 10 zlatnika, a drugi 10 srebrnjaka, ako padne glava prvi će dobiti 10 srebrnjaka a drugi 10 zlatnika. Nakon što na ovaj način podijele sve srebrnjake, preostale će zlatnike podijeliti na dva jednaka dijela. Ako je novčić lažan, uz vjerojatnost da padne pismo jednaku $\frac{1}{3}$, izračunajte vjerojatnost da će:

- (a) drugi gusar dobiti sve zlatnike,
- (b) drugi gusar dobiti sve srebrnjake,
- (c) drugi gusar dobiti barem 60 srebrnjaka,
- (d) prvi gusar dobiti 30 ili 40 srebrnjaka.

Zadatak 3.(10) (a) Napišite zakon razdiobe geometrijske slučajne varijable X s parametrom $p \in [0, 1]$ te izvedite njezino očekivanje i varijancu.

- (b) Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable koje imaju geometrijsku razdiobu s istim parametrom p . Odredite zakon razdiobe slučajne varijable $Y = X_1 + X_2$ i objasnite u kojem koraku koristite nezavisnost slučajnih varijabli X_1 i X_2 .

OKRENITE STRANICU!

Zadatak 4.(10) Vrijeme, u satima, koje student provede pišući ispit je slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = ax^2 + bx, \quad x \in [0, 2].$$

Ispit traje maksimalno dva sata, a očekivano vrijeme pisanja je jedan sat i 25 minuta.

- (a) Odredite parametre a i b .
- (b) Izračunajte vjerojatnost da student piše ispit manje od jednog sata.
- (c) Ako student piše ispit već sat vremena, kolika je vjerojatnost da će završiti u idućih 15 minuta?

Zadatak 5.(10) Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f_{(X,Y)}(x, y) = Cx, \quad (x, y) \in \mathcal{D},$$

a slučajna varijabla Z dana je s $Z = X - Y$. Odredite konstantu C , očekivanje i varijancu varijable Z ako je

- (a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
- (b) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

Zadatak 6.(10) Uzorak X_1, \dots, X_n izvučen je iz populacije s Rayleighovom razdiobom s gustoćom

$$f(x) = 2\lambda^2 x e^{-\lambda^2 x^2}, \quad x > 0.$$

- (a) Pomoću kriterija najveće izglednosti odredite procjenu za parametar λ .
- (b) Je li statistika

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

nepistrani procjenitelj za $\frac{1}{\lambda^2}$?