



चला, शिकूया.

- बहुपदीची ओळख
- बहुपदींवरील क्रिया
- बहुपदीची कोटी
- संश्लेषक भागाकार
- बहुपदीची किंमत
- शेषसिद्धांत



चला, चर्चा करूया.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$; 6 या सर्व बैजिक राशी आहेत.

शिक्षक : विद्यार्थी मित्रांनो, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$, 6 या प्रत्येक राशीतील एकेक पद घ्या. त्या पदातील चलांचे घातांक सांगा.

माधुरी : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 3, 2, 1 आहेत.

विवेक : सर, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}m^5$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 2, 3, 5 आहेत.

रोहित : सर, 6 या राशीमध्ये चल नाही. येथे $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ असे लिहिता येते, म्हणून 6 या राशीतील चलाचा घातांक 0 आहे.

शिक्षक : म्हणजे वरील सर्व राशींमध्ये चलांचे घातांक धनपूर्णांक किंवा शून्य, म्हणजेच पूर्ण संख्या आहेत. ज्या बैजिक राशीमध्ये चलांचे घातांक पूर्ण संख्या असतात, त्या राशीला **बहुपदी** (polynomial) असे म्हणतात. 6 ही सुद्धा बहुपदी आहे. 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ इत्यादी स्थिर संख्यांना स्थिर बहुपदी (Constant polynomial) म्हणतात.

$\sqrt{y} + 5$ व $\frac{1}{y} - 3$ या बहुपदी आहेत काय ?

सारा : सर, $\sqrt{y} + 5$ ही बहुपदी नाही. कारण $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, यामध्ये y चा घातांक $\frac{1}{2}$ असून ती पूर्ण संख्या नाही.

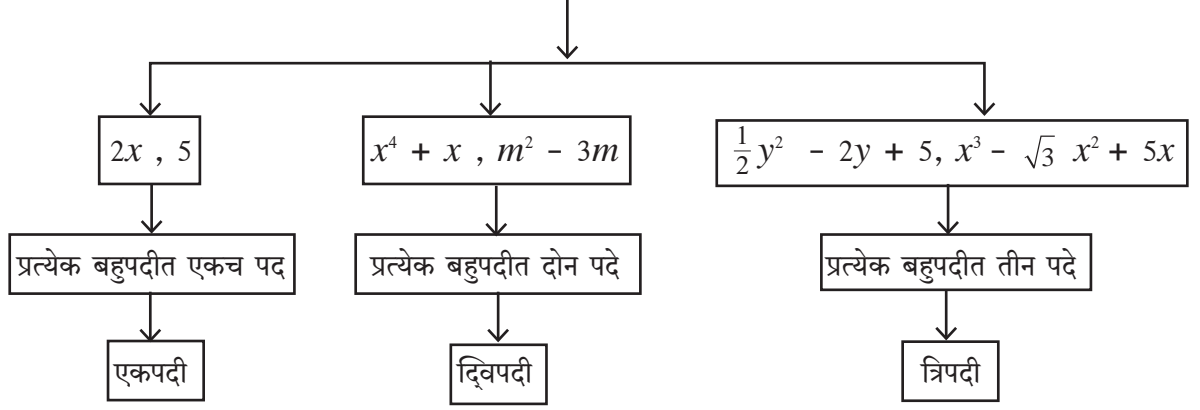
जॉन : सर, $\frac{1}{y} - 3$ ही सुद्धा बहुपदी नाही. कारण $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, येथे y चा घातांक -1 असून ती पूर्ण संख्या नाही.

शिक्षक : बहुपदी नसलेल्या कोणत्याही पाच बैजिक राशी लिहून त्या बहुपदी का नाहीत याचे स्पष्टीकरण द्या.

खालील प्रश्नांची उत्तरे वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन व त्यांवर चर्चा करून शोधा.

- प्रत्येक बैजिक राशी ही बहुपदी असते काय ?
- प्रत्येक बहुपदी ही बैजिक राशी असते काय ?

बहुपदीचे प्रकार (पदांच्या संख्येवरून)



एका चलातील बहुपदी तिच्यातील चलानुसार $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ अशा प्रकारे दर्शवतात.

उदाहरणार्थ $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ $r(y) = y^2 + 5$



जाणून घेऊया.

एका चलातील बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial in one variable)

शिक्षक : $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक कोणता आहे ?

जिजा : सर, सर्वात मोठा घातांक 7 आहे.

शिक्षक : एका चलातील बहुपदीमध्ये, चलाच्या सर्वात मोठ्या घातांकास त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.
मग सांगा बरं, वरील बहुपदीची कोटी किती ?

अशोक : सर, $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीची कोटी 7 आहे.

शिक्षक : 10 या बहुपदीची कोटी किती ?

राधा : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ म्हणून 10 या बहुपदीची कोटी 0 आहे.

शिक्षक : 10 प्रमाणेच कोणत्याही शून्येतर स्थिर बहुपदीची कोटी 0 असते.

शून्य बहुपदीची कोटी निश्चित करता येत नाही.

एकापेक्षा अधिक चलांतील बहुपदीची कोटी

बहुपदीमधील प्रत्येक पदामध्ये असलेल्या चलांच्या घातांकांची जी बेरीज सर्वाधिक असते, त्या बेरजेस त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.

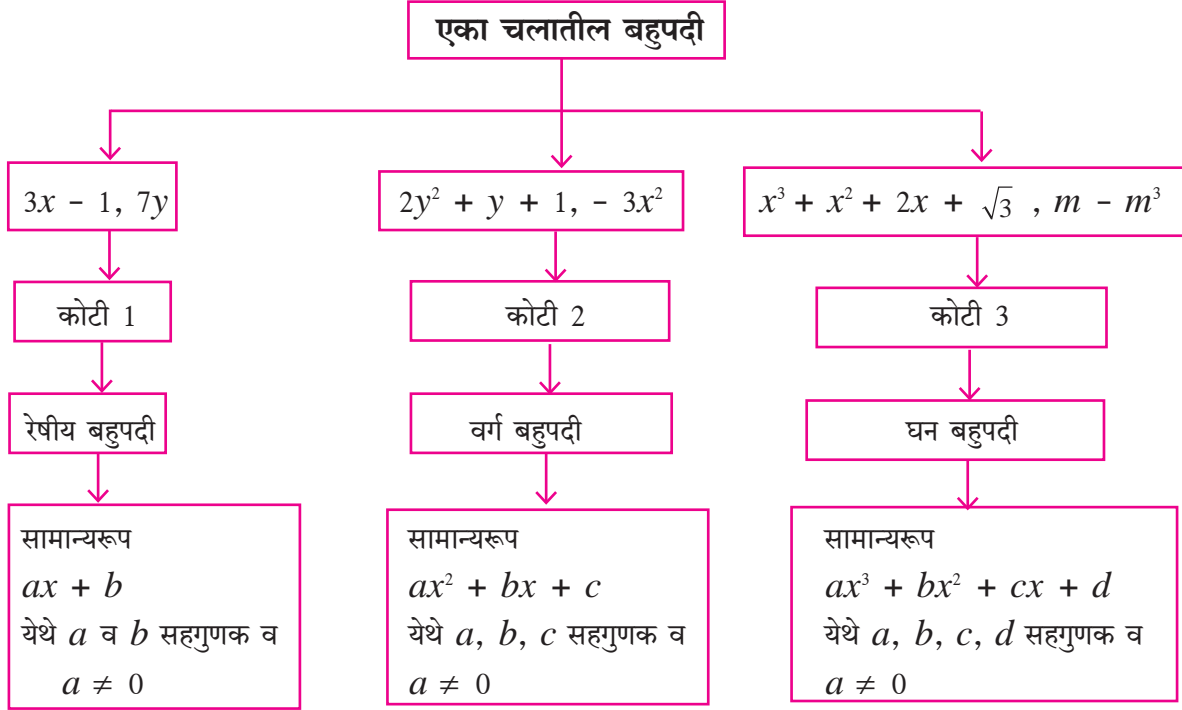
उदा. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ही दोन चलांतील बहुपदी आहे. या बहुपदीची कोटी 9 आहे.
(येथे घातांकांच्या बेरजा $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

कृती I : चल x व कोटी 5 असलेल्या एकपदी, द्विपदी व त्रिपदीचे प्रत्येकी एक उदाहरण लिहा.

एकपदी द्विपदी त्रिपदी

कृती II : 5 कोटी असलेल्या दोन चलांतील एका द्विपदीचे उदाहरण तयार करा.

बहुपदीचे प्रकार (कोटीवरून)



बहुपदी : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ही x या चलातील कोटी n असलेली बहुपदी

आहे. येथे $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ हे सहगुणक असून $a_n \neq 0$

बहुपदीचे प्रमाणरूप, सहगुणक रूप व घातांक रूप

(Standard form, coefficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ ही बहुपदी x च्या घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने $x^4 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. हे प्रमाणरूप आहे. या बहुपदीत x च्या तिसऱ्या घाताचे पद नाही. म्हणजेच ते $0x^3$ आहे असे मानता येते. हे पद घेऊन $p(x)$ ही बहुपदी $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. अशा प्रकारे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहिलेल्या व घातांकांची सर्व पदे उल्लेखलेल्या बहुपदीला घातांकरूप म्हणतात.

काही वेळा घातांकरूपातील बहुपदी मधले चल अध्याहत मानून तिचे फक्त सहगुणक क्रमाने लिहितात, उदाहरणार्थ $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ ही बहुपदी $(1, -3, 0, -8)$ अशी लिहितात. याला बहुपदीचे सहगुणक रूप असे म्हणतात.

$(4, 0, -5, 0, 1)$ ही बहुपदी y हे चल वापरून घातांकरूपात $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ म्हणजेच $4y^4 - 5y^2 + 1$ अशी लिहिता येईल.

उदा. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहा.	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
बहुपदीत नसलेली पदे शून्य सहगुणक घेऊन समाविष्ट करा आणि ती घातांकरूपात लिहा.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहा.	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
बहुपदीची कोटी लिहा.	5

उदा (1) $x^3 + 3x - 5$ ही बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

उकल : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

\therefore दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप $(1, 0, 3, -5)$

उदा (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ ही सहगुणक रूपातील बहुपदी घातांकरूपात लिहा.

उकल : बहुपदीचे सहगुणक रूप $(2, -1, 0, 5, 6)$

\therefore घातांकरूपातील बहुपदी $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

म्हणजेच $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

सरावसंच 3.1

1. खालील राशी बहुपदी आहेत का ते लिहा. स्पष्टीकरण द्या.

- (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$
 (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. खालील प्रत्येक बहुपदीतील m^3 चा सहगुणक लिहा.

- (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. खालील माहितीवरून x हे चल वापरून प्रत्येकी एक बहुपदी लिहा.

- (i) कोटी 7 असलेली एकपदी (ii) कोटी 35 असलेली द्विपदी (iii) कोटी 8 असलेली त्रिपदी

4. खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

- (i) $\sqrt{5}$ (ii) x^0 (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$
 (vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग व घन बहुपदी याप्रकारे वर्गीकरण करा.

- (i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}y - \frac{1}{2}$
 (iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

- (i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

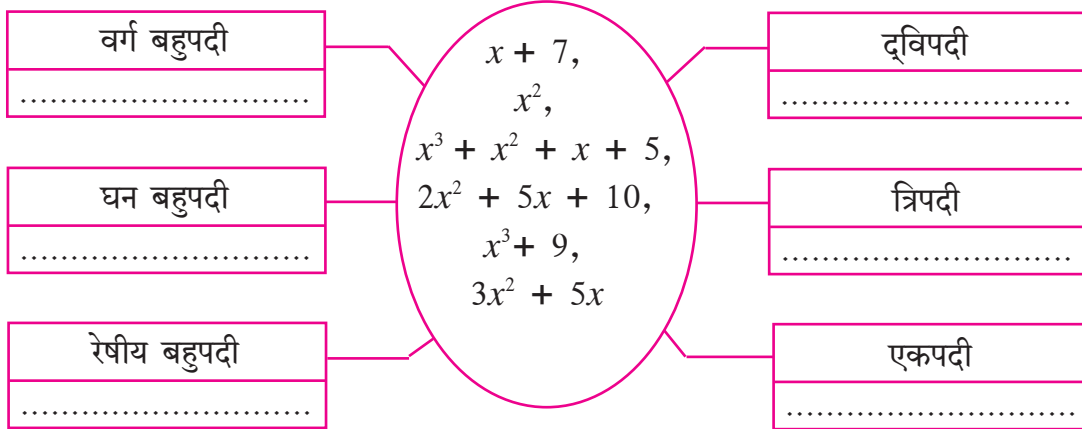
7. खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

- (i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x चल वापरून प्रमाणरूपात लिहा.

- (i) $(1, 2, 3)$ (ii) $(5, 0, 0, 0, -1)$ (iii) $(-2, 2, -2, 2)$

9. खाली काही बहुपदी दिल्या आहेत. त्या बहुपदी दिलेल्या चौकटीत योग्य ठिकाणी लिहा.



जरा आठवूया.

(1) दोन सरूप बैजिक पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना त्यांच्या सहगुणकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करतात. जसे, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) दोन बैजिक पदांचा गुणाकार किंवा भागाकार करताना त्यांच्या सहगुणकांचा गुणाकार किंवा भागाकार होतो. तसेच घातांकांच्या नियमांचाही उपयोग होतो.

जसे, $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$



जाणून घेऊया.

बहुपदींवरील क्रिया

बहुपदींची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया बैजिक राशींवरील क्रियांप्रमाणेच करतात.

उदा (1) $7a^2 + 5a + 6$ मधून $5a^2 - 2a$ वजा करा.

$$\begin{aligned}\text{उकल : } (7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a) \\ &= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a \\ &= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6 \\ &= 2a^2 + 7a + 6\end{aligned}$$

उदा (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

उदा (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

$$\begin{aligned}\text{उकल : } (m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) \\ &= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2) \\ &= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10 \\ &= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10 \\ &= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{(पहिल्या बहुपदीतील प्रत्येक पदाने} \\ \text{दुसऱ्या बहुपदीस गुणले.)} \end{array} \\ &= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10 \quad \text{(सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)} \\ &= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10\end{aligned}$$

गुणाकाराची कोटी 5 आहे हे लक्षात ठेवूया.

उदा (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ आणि $2m^2n - mn^2 + mn$ यांची बेरीज करा.

$$\begin{aligned}\text{उकल : } (3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn) \\ &= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn \\ &= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn} \quad \text{(सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)} \\ &= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn \quad \text{(सरूप पदांची बेरीज केली.)}\end{aligned}$$



विचार करूया.

एका बहुपदीची कोटी 3 व दुसऱ्या बहुपदीची कोटी 5 असेल तर बहुपदींच्या गुणाकाराची कोटी किती असेल ?

गुण्य व गुणक बहुपदींच्या कोटी आणि त्यांच्या गुणाकाराची कोटी यांच्यामध्ये कोणता संबंध असतो ?

उदा (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा आणि भाज्य = भाजक \times भागाकार + बाकी या स्वरूपात उत्तर लिहा.

उकल : प्रथम $p(x) = 2 + 2x^2$ ही भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहू

$$\begin{array}{r} \therefore 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2 \\ \text{रीत I : } \begin{array}{r} x + 2 \overline{) 2x^2 + 0x + 2} \\ \underline{- 2x^2 + 4x} \\ - 4x + 2 \\ \underline{- - 4x - 8} \\ + \\ 10 \end{array} \end{array}$$

भाज्य = भाजक \times भागाकार + बाकी
 $2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$
 $q(x)$, भाजक = $(x + 2)$
 $s(x)$, भागाकार = $2x - 4$ व $r(x)$, बाकी = 10
 $\therefore p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$.

रीत II : भागाकाराची रेषीय पद्धती

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा.

$2x^2$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x + 2)$ ला $2x$ ने गुणून $4x$ वजा करू.

$$2x(x+2) - 4x = 2x^2$$

$$\therefore \text{ भाज्य } = 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad \dots(I)$$

आता $-4x$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x+2)$ ला -4 ने गुणू व 8 मिळवू.

$$-4(x+2) + 8 = -4x$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2 \quad \dots(I) \text{ वरून}$$

$$\therefore (2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$$

भाज्य = भाजक \times भागाकार + बाकी.



हे लक्षात ठेवूया.

युक्लिडचा भागाकार सिद्धांत

जर $s(x)$ आणि $p(x)$ या दोन बहुपदी असतील आणि $s(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त असेल, आणि $s(x)$ ला $p(x)$ ने भागून येणारा भागाकार $q(x)$ असेल, तर $s(x) = p(x) q(x) + r(x)$. येथे $r(x) = 0$ किंवा $r(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीपेक्षा कमी असते.

सरावसंच 3.2

- (1) दिलेली अक्षरे वापरून उत्तरे लिहा.
 - (i) लाट गावात a झाडे आहेत. झाडांची संख्या दरवर्षी b ने वाढते, तर x वर्षांनंतर त्या गावात किती झाडे असतील?
 - (ii) कवायतीसाठी एका रांगेत y मुले अशा x रांगा केल्या. तर कवायतीसाठी एकूण किती मुले हजर होती?
 - (iii) एका दोन अंकी संख्येच्या एकक व दशक स्थानाचा अंक अनुक्रमे m व n आहे, तर ती दोन अंकी संख्या दर्शवणारी बहुपदी कोणती?
- (2) खालील बहुपदींची बेरीज करा.
 - (i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$
 - (ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$
 - (iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$
- (3) पहिल्या बहुपदीतून दुसरी बहुपदी वजा करा.
 - (i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$
 - (ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$
- (4) खालील बहुपदींचा गुणाकार करा.
 - (i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$
 - (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$
 - (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$
- (5) पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागा व उत्तर 'भाज्य = भाजक \times भागाकार + बाकी' या रूपात लिहा.
 - (i) $x^3 - 64$; $x - 4$
 - (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$
- (6*) खालील माहिती पदावलीच्या रूपात लिहा. पदावलीला सोपे रूप द्या.

एका आयताकृती शेताची लांबी $(2a^2 + 3b^2)$ मीटर आणि रुंदी $(a^2 + b^2)$ मीटर आहे. शेतकऱ्याने शेतामध्ये $(a^2 - b^2)$ मीटर बाजू असलेल्या चौरसाकृती जागेवर घर बांधले, तर उरलेल्या शेताचे क्षेत्रफळ किती?

कृती : खालील उतारा वाचा व चौकटीत योग्य राशी लिहा व चर्चा करा.

शिरळस गावी कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदचे 5 एकर शेत आहे. त्याच्या घरी पत्नी, 2 मुले व त्याची वृद्ध आई आहे. त्याने शेतीसाठी बँकेचे सव्वा लाख रुपये कर्ज, द.सा.द.शे. 10 या दराने घेतले. त्याने शेतातील x एकर जमिनीत सोयाबीन आणि y एकर जमिनीत कापूस व तूर यांचे पीक घेतले. शेतीसाठी आलेला खर्च पुढीलप्रमाणे आहे.

बियाणांसाठी त्याने एकूण रु.10,000 दिले. सोयाबीन पिकासाठी खते व कीटकनाशके यांसाठी $2000x$ रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी $4000x^2$ रुपये खर्च झाला. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते व कीटकनाशके यांचा खर्च $8000y$ रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी $9000y^2$ रुपये खर्च झाला.

शेतीसाठी एकूण खर्च किती आला ते x आणि y वापरून लिहू.

$$\boxed{} + \boxed{2000x} + \boxed{4000x^2} + \boxed{8000y} + \boxed{} \text{ रुपये}$$

त्याच्या शेतात सोयाबीनचे उत्पन्न $5x^2$ क्विंटल निघाले. ते 2800 रु. प्रतिक्विंटल प्रमाणे विकले गेले. कापसाचे उत्पन्न $\frac{5}{3}y^2$ क्विंटल निघाले व ते 5000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले गेले.

तुरीचे उत्पन्न $4y$ क्विंटल निघाले व ते 4000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले.

सर्व शेतमालाची विक्री झाल्यावर त्यातून किती रुपये एकूण उत्पन्न आले.

ते x आणि y च्या पदावली रूपात लिहू.

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} \text{ रुपये}$$



जाणून घेऊया.

संश्लेषक भागाकार पद्धती (Synthetic Division)

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने कसे भागायचे हे आपल्याला माहीत आहे. आता आपण भाजक $x + a$ किंवा $x - a$ बहुपदी असेल तर भागाकाराची सोपी पद्धत समजून घेऊ.

उदा (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ या बहुपदीला $(x + 2)$ ने भागा.

उकल : प्रथम भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहून नंतर ती सहगुणक रूपात लिहू.

$$\text{भाज्याचे प्रमाणरूप : } 3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$$

$$\therefore \text{भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप} = (3, 2, 0, -1)$$

$$\text{भाजक बहुपदी} = x + 2$$

खालील पायऱ्यांनी संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करू.

- (1) बाजूला दाखवल्याप्रमाणे एक उभी व एक आडवी अशा दोन रेषा काढू.

.....	पहिली ओळ
.....	दुसरी ओळ
.....	तिसरी ओळ

- (2) भाजक $x + 2$ असून 2 ची विरुद्ध संख्या -2 आहे. \therefore पहिल्या ओळीत उभ्या रेषेच्या डावीकडे -2 लिहू. आडव्या रेषेच्या वर पहिल्या ओळीत भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहू.

- 2	3	2	0	- 1	पहिली ओळ
	3				तिसरी ओळ

- (3) आडव्या रेषेच्या खाली म्हणजे तिसऱ्या ओळीत भाज्यातील पहिला सहगुणक तसाच लिहू.

- (4) तिसऱ्या ओळीतील 3 व भाजकातील -2 यांचा गुणाकार -6 . हा दुसऱ्या ओळीतील 2 या सहगुणकाखाली लिहू. नंतर 2 आणि -6 यांची बेरीज -4 ही तिसऱ्या ओळीत खाली लिहू.

- 2	3	2	0	- 1	
	3	-6	8	-16	
	3	- 4	8	- 17	बाकी

याप्रमाणे गुणाकार व बेरजा करून; शेवटची बेरीज करून आलेली संख्या ही भागाकारातील बाकी असते. येथे बाकी $- 17$ आहे.

(3, $- 4$, 8) हे भागाकाराचे सहगुणक रूप होय.

$$\therefore \text{भागाकार} = 3x^2 - 4x + 8 \text{ व बाकी} = - 17$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

या पद्धतीला **भागाकाराची संश्लेषक पद्धत** म्हणतात.

हा भागाकार रेषीय पद्धतीने पुढीलप्रमाणे करता येईल.

$$\begin{aligned}
 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\
 &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 1 \\
 &= 3x^2(x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\
 &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x - 1 \\
 &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\
 &= 3x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 8(x + 2) - 17
 \end{aligned}$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

उदा (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ हा भागाकार करा.

उकल : संश्लेषक पद्धत : भाज्य = $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

भाजक = $y - 1$ -1 ची विरुद्ध संख्या 1 आहे.

1	2	- 3	0	5	- 4	
		2	- 1	- 1	4	
	2	- 1	- 1	4	0	बाकी

भागाकाराचे सहगुणक रूप $(2, -1, -1, 4)$ आहे.

\therefore भागाकार = $2y^3 - y^2 - y + 4$ व बाकी = 0

रेखीय पद्धत : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$$

$$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$$



हे लक्षात ठेवूया.

संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करताना फक्त $x + a$ किंवा $x - a$ या रूपातील ज्या बहुपदीची कोटी 1 आहे असेच भाजक घेतले आहेत.

सरावसंच 3.3

1. खालील भागाकार संश्लेषक पद्धतीने आणि रेखीय पद्धतीने करा. भागाकार आणि बाकी लिहा.

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$



जाणून घेऊया.

बहुपदीची किंमत (Value of polynomial)

बहुपदीतील चलाला एखादी किंमत दिली की त्या बहुपदीचीही एक किंमत मिळते. उदाहरणार्थ, $x + 7$ या बहुपदीत x ला 2 ही किंमत दिली, तर त्या बहुपदीची 9 ही किंमत मिळते.

$p(x)$ या बहुपदीत x ला a ही किंमत देऊन येणारी बहुपदीची किंमत $p(a)$ ने दर्शवतात.

उदा (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ या बहुपदीची किंमत $x = 2$ असताना काढा.

$$\text{बहुपदी } p(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

या बहुपदीमध्ये $x = 2$ ठेवून,

$$\begin{aligned}\therefore p(2) &= 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5 \\ &= 2 \times 4 - 6 + 5 \\ &= 8 - 6 + 5 \\ \therefore p(2) &= 7\end{aligned}$$

उदा (2) $y = -2$ असताना बहुपदी $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ ची किंमत काढा.

$$\text{उकल : } p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}\therefore p(-2) &= 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7} \\ &= -16 + 4 + \sqrt{7} \\ &= -12 + \sqrt{7}\end{aligned}$$

$\therefore y = -2$ असताना बहुपदीची किंमत $-12 + \sqrt{7}$ आहे.

उदा (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ या बहुपदीकरिता $p(0)$ काढा.

$$\text{उकल : } p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore p(0) &= 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2 \\ &= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

उदा (4) जर $m^2 - am + 7$ या बहुपदीची किंमत $m = -1$ असताना 10 असेल, तर a ची किंमत काढा.

$$\text{उकल : } p(m) = m^2 - am + 7$$

$$\begin{aligned}\therefore p(-1) &= (-1)^2 - a \times (-1) + 7 \\ &= 1 + a + 7 \\ &= 8 + a\end{aligned}$$

परंतु $p(-1) = 10$ (दिलेले आहे.)

$$\therefore 8 + a = 10$$

$$\therefore a = 10 - 8$$

$$\therefore a = 2$$

सरावसंच 3.4

- (1) $x = 0$ असताना $x^2 - 5x + 5$ या बहुपदीची किंमत काढा.
- (2) जर $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ तर $p(3\sqrt{2})$ काढा.
- (3) जर $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ तर $p(a) + p(-a) = ?$
- (4) जर $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ तर $p(2)$ काढा.



हे लक्षात ठेवूया.

चलाच्या एखाद्या किमतीसाठी बहुपदीची किंमत काढताना प्रत्येक पदात x च्या जागी दिलेली किंमत भरून त्या राशीची किंमत काढायची असते.



जाणून घेऊया.

शेष सिद्धांत (Remainder Theorem)

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी बाकी आणि या बहुपदीत x ला $-a$ ही किंमत देऊन येणारी त्या बहुपदीची किंमत यांचा परस्पर संबंध असतो. हा संबंध जाणण्यासाठी खालील उदाहरण अभ्यासा.

उदा. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ ला $(x + 1)$ ने भागा.

[येथे $(x + a)$ म्हणजे $(x + 1)$ आहे हे लक्षात ठेवूया.]

उकल : भाज्य बहुपदी = $4x^2 - x + 2$

भाजक बहुपदी = $x + 1$

$$\begin{array}{r}
 \text{भागाकार } 4x - 5 \\
 \text{भाजक } x + 1 \overline{) 4x^2 - x + 2} \quad \text{भाज्य} \\
 \underline{- 4x^2 + 4x} \\
 - 5x + 2 \\
 \underline{- -5x - 5} \\
 + 7 \text{ बाकी}
 \end{array}$$

भागाकार = $4x - 5$ व बाकी = $7 \dots (I)$

हेच उदाहरण संश्लेषक भागाकार पद्धतीने करू.

$p(x)$ चे सहगुणक रूप = $(4, -1, 2)$

भाजक बहुपदी = $x + 1$

1 ची विरुद्ध संख्या -1

$$\begin{array}{r|rrr}
 -1 & 4 & -1 & 2 \\
 & & -4 & 5 \\
 \hline
 & 4 & -5 & 7 \text{ बाकी}
 \end{array}$$

भागाकार = $4x - 5$ बाकी = 7

आता आपण बाकी आणि भाज्य बहुपदीची किंमत यांमधील संबंध बघू.

भाज्य बहुपदीची म्हणजे $4x^2 - x + 2$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत काढू.

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\begin{aligned}\therefore p(-1) &= 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2 \\ &= 4 \times 1 + 1 + 2 \\ &= 4 + 1 + 2 \\ &= 7\end{aligned}$$

$\therefore x = -1$ असताना बहुपदी $p(x)$ ची किंमत 7 आहे. (II)

म्हणून विधान (I) व (II) वरून, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने म्हणजेच येथे $x + 1$ ने भागून मिळणारी बाकी आणि $x = -1$ असताना $p(x)$ या बहुपदीची किंमत म्हणजेच $p(-1)$ समान आहेत.

यावरून पुढील गुणधर्म लक्षात येतो.

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी बाकी ही $p(-a)$ एवढी, म्हणजेच $p(x)$ मध्ये $x = -a$ मांडून येणाऱ्या बहुपदीच्या किमतीएवढी असते.

(‘शेष’ या शब्दाचा अर्थ ‘बाकी’ असा आहे.)

या गुणधर्माला शेष सिद्धांत म्हणतात.

युक्लिडचा भागाकाराचा नियम वापरून हा गुणधर्म सिद्ध करू.

$p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागल्यास

$$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x) \quad [q(x) = \text{भागकार}, r(x) = \text{बाकी}]$$

जर, $r(x) \neq 0$, तर नियमाप्रमाणे $r(x)$ ची कोटी 1 पेक्षा कमी म्हणजे 0 आहे. म्हणून $r(x)$ ही वास्तव संख्या आहे.

$\therefore r(-a)$ ही सुद्धा वास्तव संख्या आहे.

$$\text{आता, } p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x) \dots\dots\dots(1)$$

यामध्ये $x = -a$ किंमत घेऊन

$$\begin{aligned}p(-a) &= q(-a) \times (a - a) + r(-a) \\ &= q(-a) \times 0 + r(-a) \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

$$\therefore p(-a) = r(-a) \dots\dots\dots(1) \text{ आणि } (2) \text{ वरून}$$

कृती : खालील उदाहरणांचा पडताळा घ्या.

- (1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीस $x + 2$ या बहुपदीने भागा आणि बाकी काढा.
- (2) $x = -2$ असताना $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.
- (3) आता भागाकारात मिळालेली बाकी ही $p(-2)$ ची किंमत आहे का ?
आणखी एक उदाहरण घेऊन वरीलप्रमाणे पडताळा घ्या.

उदा (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ या बहुपदीस $x + 3$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : शेष सिद्धांताने

भाज्य बहुपदी $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

भाजक $= x + 3$

$\therefore x = -3$ घेऊ.

$\therefore p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने

प्रमाण रूप $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

सहगुणक रूप $= (1, 0, -5, -4, 0)$

- 3		1	0	-5	-4	0
			-3	9	-12	48
		1	-3	4	-16	48

बाकी

बाकी $= 48$

उदा (2) शेष सिद्धांताचा उपयोग करून $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ या बहुपदीस $x - 1$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

भाजक $= x - 1 \therefore x = 1$ घेऊ.

\therefore शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

\therefore शेषसिद्धांतानुसार बाकी $= -6$

उदा (3) जर $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ या बहुपदीस $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरत असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीला $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरते हे दिले आहे. म्हणून दिलेल्या भाज्य बहुपदीची किंमत $t = 3$ असताना काढू.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ शेष सिद्धांतानुसार

$$\begin{aligned}
 \text{बाकी} &= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50 & \therefore 3k + 50 &= 62 \\
 &= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50 & \therefore 3k &= 62 - 50 \\
 &= 27 - 27 + 3k + 50 & \therefore 3k &= 12 \\
 &= 3k + 50 & \therefore k &= \frac{12}{3} \\
 & & \therefore k &= 4
 \end{aligned}$$

परंतु बाकी 62 दिली आहे.



हे लक्षात ठेवूया.

शेष सिद्धांत : $p(x)$ ही कोणतीही बहुपदी असून 'a' ही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागले तर येणारी बाकी ही $p(-a)$ एवढी असते.

$$\begin{aligned}
 p(x) &= s(x)(x - a) + r(x) & r(x) \text{ ची कोटी} &< 1 \text{ किंवा } r(x) = 0 \\
 \text{या समीकरणात } x &= a \text{ घालून } p(a) &= 0 + r(a) &= r(a) \text{ मिळते.}
 \end{aligned}$$

∴ $r(a)$ ची कोटी = 0 किंवा $r(a) = 0$ म्हणजेच $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे असे लक्षात येते.



जाणून घेऊया.

अवयव सिद्धांत (Factor Theorem)

जर 21 ला 7 ने भागले तर बाकी 0 येते. म्हणून आपण 7 हा 21 चा अवयव आहे असे म्हणतो.

त्याचप्रमाणे दिलेल्या बहुपदीला भाजक बहुपदीने भागल्यास बाकी 0 आली तर ती बहुपदी दिलेल्या बहुपदीचा अवयव आहे असे म्हणतात.

उदा (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ या बहुपदीस $(x - 1)$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

$(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे का हे ठरवा.

$$\begin{aligned}
 \text{उकल : } p(x) &= x^3 + 4x - 5 \\
 p(1) &= (1)^3 + 4(1) - 5 \\
 &= 1 + 4 - 5 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

येथे, शेष सिद्धांतानुसार बाकी = 0

∴ $(x - 1)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) $p(x) = x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीला $x + 2$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

$(x + 2)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे का हे ठरवा.

$$\begin{aligned}
 \text{उकल : } p(x) &= x^3 + 4x - 5 \\
 p(-2) &= (-2)^3 + 4(-2) - 5 \\
 p(-2) &= -8 - 8 - 5 \\
 &= -21
 \end{aligned}$$

शेष सिद्धांतानुसार बाकी -21 आली.

येथे बाकी $\neq 0$

∴ $(x + 2)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव नाही.

कृती : $(x - 1)$ हा $x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीचा अवयव आहे का हे पडताळा.



हे लक्षात ठेवूया.

$p(x)$ ही बहुपदी असून a ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(a) = 0$ असेल तर $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो.

याउलट $(x - a)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर $p(a) = 0$ असते.

उदा (1) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x - 2$ हा $x^3 - x^2 - 4$ या बहुपदीचा अवयव आहे का ते ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ भाजक $= x - 2$

$$\therefore p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

\therefore अवयव सिद्धांतानुसार, $(x - 2)$ हा $(x^3 - x^2 - 4)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) जर $(x - 1)$ हा $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ चा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

उकल : $(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे. $\therefore p(1) = 0$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$$

$$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$$

$$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0 \quad \therefore m - 5 = 0 \quad \therefore m = 5$$

कृती : आपण कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदच्या शेतीच्या संदर्भात बहुपदींच्या रूपात शेतीचा खर्च व उत्पन्न या बाबी पाहिल्या होत्या. त्याने बँकेचे कर्ज सव्वा लाख रुपये घेतले व ते 10% व्याजदराने परत केले होते. बियाणांसाठी खर्च 10,000 रुपये, सोयाबीनच्या पिकासाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $2000x$ रुपये व त्याच्या मशागतीसाठी $4000x^2$ रुपये खर्च आला होता. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $8000y$ रुपये व मशागतीसाठी $9000y^2$ रुपये एवढा खर्च केला होता.

एकूण उत्पन्न $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ एवढे झाले.

$x = 2, y = 3$ या किमती घेऊन गोविंदच्या शेतीचा जमाखर्च लिहून काढा.

उकल : जमा

खर्च

1,25,000 रुपये बँकेचे कर्ज

1,37,000 रुपये बँकेची व्याजासह परतफेड.

₹ सोयाबीनचे उत्पन्न

₹ बियाणांसाठी

₹ कापसाचे उत्पन्न

₹ सोयाबीन:खते व कीटकनाशके

₹ तुरीचे उत्पन्न

₹ सोयाबीन: मजुरी व मशागत

₹ एकूण जमा

₹ कापूस व तूर : खते व कीटकनाशके

₹ कापूस व तूर : मजुरी व मशागत

₹ एकूण खर्च

सरावसंच 3.5

- (1) x ची दिलेली किंमत घेऊन $2x - 2x^3 + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.
 (i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$
- (2) खालील प्रत्येक बहुपदीकरिता $p(1)$, $p(0)$ आणि $p(-2)$ काढा.
 (i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$
- (3) जर $m^3 + 2m + a$ या बहुपदीची किंमत $m = 2$ असताना 12 आहे, तर a ची किंमत काढा.
- (4) जर $mx^2 - 2x + 3$ या बहुपदीकरिता $p(-1) = 7$ असेल तर m ची किंमत काढा.
- (5) खालीलपैकी पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागल्यास, येणारी बाकी शेष सिद्धांताचा उपयोग करून काढा.
 (i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$
 (ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$
 (iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$
- (6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ या बहुपदीस $y + 2$ ने भागल्यास बाकी 50 उरते, तर m ची किंमत काढा.
- (7) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x + 3$ हा $x^2 + 2x - 3$ चा अवयव आहे का ते ठरवा.
- (8) जर $x - 2$ हा $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.
- (9) खालील उदाहरणात $q(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे किंवा नाही हे अवयव सिद्धांताने ठरवा.
 (i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$
 (ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$
- (10) $(x + 1)$ ने $(x^{31} + 31)$ ला भागल्यास येणारी बाकी काढा.
- (11) $m - 1$ हा $m^{21} - 1$ व $m^{22} - 1$ या बहुपदींचा अवयव आहे हे दाखवा.
- (12*) जर $x - 2$ आणि $x - \frac{1}{2}$ हे दोन्ही $nx^2 - 5x + m$ या बहुपदीचे अवयव असतील तर दाखवा की $m = n = 2$
- (13) (i) जर $p(x) = 2 + 5x$ तर $p(2) + p(-2) - p(1)$ काढा.
 (ii) जर $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ तर $p(5\sqrt{3})$ काढा.



जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण बहुपदींचे अवयव कसे काढावे याचा अभ्यास केला आहे. काही उदाहरणे पाहू. अवयव काढा.

$$\begin{aligned} \text{उदा (1)} \quad 4x^2 - 25 &= (2x)^2 - (5)^2 \\ &= (2x + 5)(2x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उदा (2)} \quad 3x^2 + 7x + 2 &= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2} \\ &= 3x(x + 2) + 1(x + 2) \\ &= (x + 2)(3x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{उदा (3)} \quad & 63x^2 + 5x - 2 \\
& = 63x^2 + 14x - 9x - 2 \\
& = 7x(9x + 2) - 1(9x + 2) \\
& = (9x + 2)(7x - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{उदा (4)} \quad & 6x^2 - 5x - 6 \\
& = 6x^2 - 9x + 4x - 6 \\
& = 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) \\
& = (2x - 3)(3x + 2)
\end{aligned}$$



जाणून घेऊया.

बहुपदींचे अवयव (Factors of polynomials)

काही वेळा दिलेल्या बहुपदीचे रूपांतर $ax^2 + bx + c$ असे करता येते. त्यामुळे तिचे अवयव शोधणे सोपे जाते.

उदा (1) $(y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50$ चे अवयव काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीत $(y^2 - 3y) = x$ मानू.

$$\begin{aligned}
\therefore (y^2 - 3y)^2 - 5(y^2 - 3y) - 50 & = x^2 - 5x - 50 \\
& = x^2 - 10x + 5x - 50 \\
& = x(x - 10) + 5(x - 10) \\
& = (x - 10)(x + 5) \\
& = (y^2 - 3y - 10)(y^2 - 3y + 5) \\
& = [y^2 - 5y + 2y - 10](y^2 - 3y + 5) \\
& = [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2 - 3y + 5) \\
& = (y - 5)(y + 2)(y^2 - 3y + 5)
\end{aligned}$$

उदा (2) अवयव पाडा.

$$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$$

$$\begin{aligned}
\text{उकल : } & (x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64 \\
& = (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64 \\
& = (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64 \\
& = (m - 14)(m + 6) + 64 \dots \dots \dots (x^2 - 5x \text{ साठी } m \text{ मानून.}) \\
& = m^2 - 14m + 6m - 84 + 64 \\
& = m^2 - 8m - 20 \\
& = (m - 10)(m + 2) \\
& = (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2) \dots \dots m \text{ च्या जागी } x^2 - 5x \text{ लिहून}
\end{aligned}$$

सरावसंच 3.6

(1) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

- | | | |
|----------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| (i) $2x^2 + x - 1$ | (ii) $2m^2 + 5m - 3$ | (iii) $12x^2 + 61x + 77$ |
| (iv) $3y^2 - 2y - 1$ | (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ | (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ |

(2) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$

(ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$

(iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी बहुपदी कोणती ?

(A) $\frac{x}{y}$

(B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$

(C) $x^{-2} + 7$

(D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 5

(C) 2

(D) 0

(iii) 0 बहुपदीची कोटी किती असते ?

(A) 0

(B) 1

(C) निश्चित करता येत नाही

(D) कोणतीही वास्तव संख्या

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 3

(B) 2

(C) 5

(D) 7

(v) $x^3 - 1$ या बहुपदीचे सहगुणक रूप कोणते ?

(A) (1, -1) (B) (3, -1) (C) (1, 0, 0, -1)

(D) (1, 3, -1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ तर $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3

(B) $7\sqrt{7}$

(C) $42\sqrt{7} + 3$

(D) $49\sqrt{7}$

(vii) $2x^3 + 2x$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत किती ?

(A) 4

(B) 2

(C) -2

(D) -4

(viii) $3x^2 + mx$ या बहुपदीचा $x = -1$ हा अवयव असेल तर m ची किंमत किती ?

(A) 2

(B) -2

(C) -3

(D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ हा गुणाकार करून मिळणाऱ्या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 5

(B) 3

(C) 2

(D) 0

(x) खालीलपैकी रेषीय बहुपदी कोणती ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ { a, b या स्थिर संख्या आहेत.}

(3) खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $4x^2 + 7x^4 - x^3 - x + 9$ (ii) $p + 2p^3 + 10p^2 + 5p^4 - 8$

(4) खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) $x^4 + 16$ (ii) $m^5 + 2m^2 + 3m + 15$

(5) खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x हे चल वापरून घातांक रूपात लिहा.

(i) $(3, -2, 0, 7, 18)$ (ii) $(6, 1, 0, 7)$ (iii) $(4, 5, -3, 0)$

(6) बेरीज करा.

(i) $7x^4 - 2x^3 + x + 10$; $3x^4 + 15x^3 + 9x^2 - 8x + 2$ (ii) $3p^3q + 2p^2q + 7$; $2p^2q + 4pq - 2p^3q$

(7) वजाबाकी करा.

(i) $5x^2 - 2y + 9$; $3x^2 + 5y - 7$ (ii) $2x^2 + 3x + 5$; $x^2 - 2x + 3$

(8) खालील गुणाकार करा.

(i) $(m^3 - 2m + 3)(m^4 - 2m^2 + 3m + 2)$ (ii) $(5m^3 - 2)(m^2 - m + 3)$

(9) $3x^3 - 8x^2 + x + 7$ या बहुपदीला $x - 3$ या बहुपदीने संश्लेषक पद्धतीने भागा व बाकी काढा.

(10) m च्या कोणत्या किमतीकरिता $x + 3$ हा $x^3 - 2mx + 21$ या बहुपदीचा अवयव असेल ?

(11) 2016 वर्षाच्या शेवटी कोवाड, वरूड व चिखली गावांची लोकसंख्या अनुक्रमे $5x^2 - 3y^2$, $7y^2 + 2xy$ आणि $9x^2 + 4xy$ होती. 2017 वर्षाच्या सुरुवातीला तीनही गावांतून शिक्षण व रोजगाराकरिता अनुक्रमे $x^2 + xy - y^2$, $5xy$ व $3x^2 + xy$ माणसे दुसऱ्या गावी गेली. तर 2017 च्या सुरुवातीला त्या गावांची एकूण लोकसंख्या किती होती ?

(12) $bx^2 + x + 5$ व $bx^3 - 2x + 5$ या बहुपदींना $x - 3$ ने भागल्यास येणारी बाकी अनुक्रमे m व n असेल आणि जर $m - n = 0$ असेल तर b ची किंमत काढा.

(13) सरळरूप द्या. $(8m^2 + 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ मधून कोणती बहुपदी वजा करावी म्हणजे $3x^2 + 5x - 4$ ही बहुपदी मिळेल ?

(15) $4m + 2n + 3$ या राशीत कोणती राशी मिळवावी म्हणजे $6m + 3n + 10$ ही बहुपदी मिळेल ?

