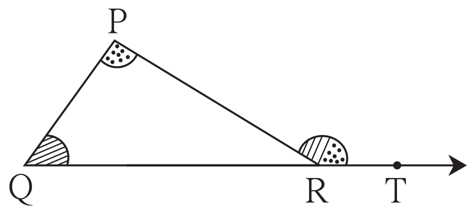
3 त्रिकोण

चला, शिकूया.

- त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय
- त्रिकोणांची एकरूपता
- समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापाच्या त्रिकोणाचा गुणधर्म
- त्रिकोणाची मध्यगा
- काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील मध्यगेचा गुणधर्म
- लंबदुभाजकाचे प्रमेय
- कोनदुभाजकाचे प्रमेय
- समरूप त्रिकोण

कृती

एका जाड कागदावर कोणत्याही मापाचा Δ PQR काढा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे किरण QR वर T हा बिंदू घ्या. रंगीत जाड कागदाचे $\angle P$ व $\angle Q$ च्या मापाचे तुकडे कापा. ते तुकडे ठेवून $\angle PRT$ भरून जातो हे अनुभवा.



आकृती 3.1

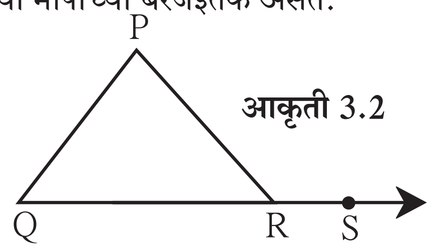
जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या दूरस्थ आंतरकोनांचे प्रमेय (Theorem of remote interior angles of a triangle)

प्रमेय : त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेइतके असते.

पक्ष : Δ PQR या त्रिकोणाचा $\angle PRS$ हा बाह्यकोन आहे.

साध्य : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$



आकृती 3.2

सिद्धता : त्रिकोणाच्या तिन्ही आंतरकोनांची बेरीज 180° असते.

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (रेषीय जोडीतील कोन)

$\therefore$ विधान I व II वरून

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ---------($\angle PRQ$ चा लोप करून)

$\therefore$ त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्याच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

विचार करूया.

आकृती 3.3 मध्ये बिंदू R मधून रेख PQ ला समांतर रेषा काढून याच प्रमेयाची वेगळी सिद्धता देता येईल का?

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय (Property of an exterior angle of triangle)

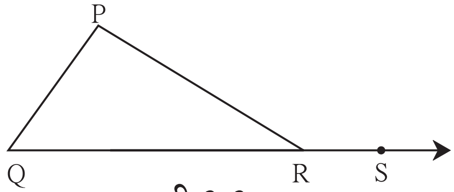
a आणि b या दोन संख्यांची बेरीज $(a + b)$ ही a पेक्षा मोठी असते व b पेक्षाही मोठी असते.

म्हणजेच $a + b > a, a + b > b$

याचा उपयोग करून त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचा खालील गुणधर्म मिळतो.

Δ PQR मध्ये $\angle PRS$ हा बाह्यकोन असेल तर

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



आकृती 3.3

$\therefore$ त्रिकोणाचा बाह्यकोन हा त्याच्या प्रत्येक दूरस्थ आंतरकोनापेक्षा मोठा असतो.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका त्रिकोणाच्या कोनांच्या मापांचे गुणोत्तर 5 : 6 : 7 आहे, तर त्याच्या सर्व कोनांची मापे काढा.

उकल : त्या कोनांची मापे $5x, 6x, 7x$ मानू.

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

$5x = 5 \times 10 = 50^\circ$, $6x = 6 \times 10 = 60^\circ$, $7x = 7 \times 10 = 70^\circ$

त्रिकोणाच्या कोनांची मापे $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ आहेत.

उदा (2) शेजारील आकृती 3.4 चे निरीक्षण करून $\angle PRS$ व $\angle RTS$ यांची मापे काढा.

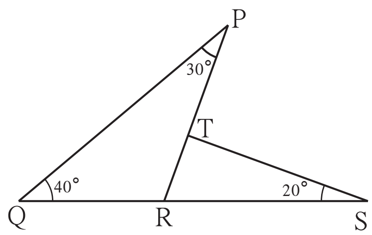
उकल : Δ PQR चा $\angle PRS$ हा बाह्यकोन आहे.

दूरस्थ आंतरकोनाच्या प्रमेयावरून,

$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

$= 40^\circ + 30^\circ$

$\angle PRS = 70^\circ$



आकृती 3.4

Δ RTS मध्ये

$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \boxed{\quad}$ .... त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांच्या मापांची बेरीज

$\therefore \boxed{\quad} + \angle RTS + \boxed{\quad} = 180^\circ$

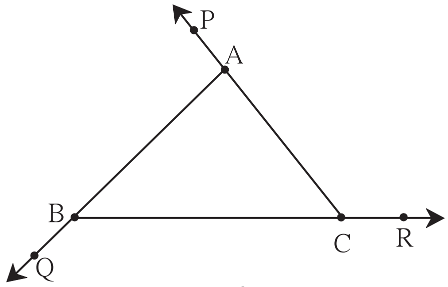
$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \boxed{\quad}$

उदा (3) सिद्‌ध करा, की त्रिकोणाच्या बाजू एकाच दिशेने वाढवल्यास होणाऱ्या बाह्यकोनांची बेरीज 360° असते.

पक्ष : $\angle PAB$, $\angle QBC$ आणि $\angle ACR$ हे Δ ABC चे बाह्यकोन आहेत.

साध्य : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.



आकृती 3.5

सिद्‌धता : या उदाहरणाची सिद्‌धता दोन रीतीने देता येते.

रीत I

Δ ABC मध्ये जर $\angle PAB$ हा बाह्यकोन विचारात घेतला तर $\angle ABC$ व $\angle ACB$ हे त्याचे दूरस्थ आंतरकोन आहेत, म्हणून

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

तसेच $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II) . . . . दूरस्थ आंतरकोनाच्या प्रमेयानुसार

आणि $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

विधान (I), (II), (III) यांच्या दोन्ही बाजूंची बेरीज करू.

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

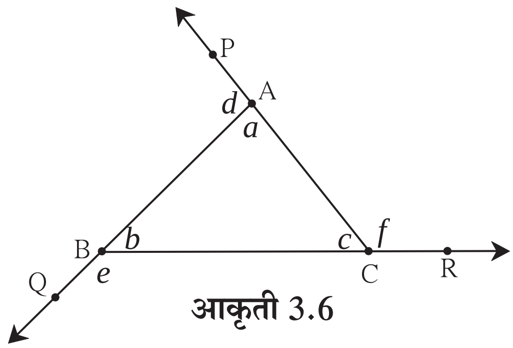
$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (त्रिकोणांच्या आंतरकोनांची बेरीज)

$= 360^\circ$.



आकृती 3.6

रीत II

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . रेषीय जोडीतील कोन

तसेच $\angle a + \angle d = 180^\circ$

व $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore \quad \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

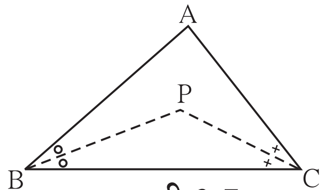
$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

उदा (4) आकृती 3.7 मध्ये Δ ABC च्या $\angle B$ व $\angle C$ चे दुभाजक जर बिंदू P मध्ये छेदत असतील तर सिद्ध करा की,

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2} \angle BAC$

रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आकृती 3.7

सिद्धता : Δ ABC मध्ये,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \boxed{}$ ...... (त्रिकोणांच्या कोनांच्या मापांची बेरीज)

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times \boxed{}$ ..... (प्रत्येक पदाला $\frac{1}{2}$ ने गुणून.)

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$ ......(I)

Δ BPC मध्ये

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (त्रिकोणांच्या आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज)

$\therefore \angle BPC + \boxed{} = 180^\circ$ ...... (विधान I वरून)

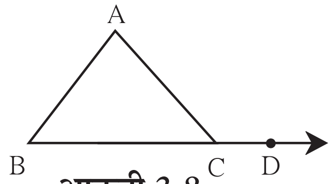
$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC)$

$\therefore \quad = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$

सरावसंच 3.1

1. आकृती 3.8 मध्ये Δ ABC चा $\angle ACD$ हा बाह्यकोन आहे. $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$ तर m $\angle ACD$ काढा.



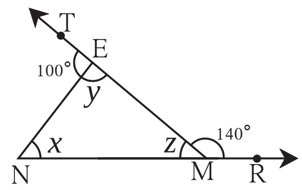
आकृती 3.8

2. Δ PQR मध्ये $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ तर $\angle R$ चे माप काढा.

3. त्रिकोणाच्या कोनांची मापे x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ असतील तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

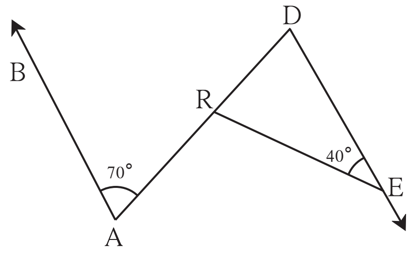
4. त्रिकोणाच्या तीन कोनांपैकी एक कोन सर्वांत लहान कोनाच्या दुप्पट व दुसरा कोन सर्वांत लहान कोनाच्या तिप्पट आहे तर त्या तिन्ही कोनांची मापे काढा.

5. आकृती 3.9 मध्ये दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून x, y, z च्या किमती काढा.



आकृती 3.9

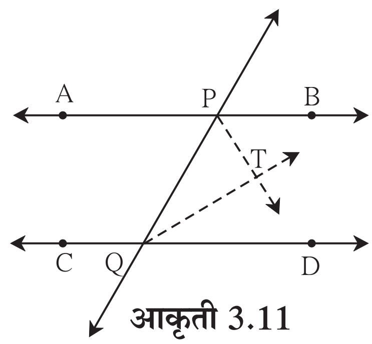
6. आकृती 3.10 मध्ये रेषा AB || रेषा DE आहे. दिलेल्या मापांवरून $\angle$DRE व $\angle$ARE ची मापे काढा.



आकृती 3.10

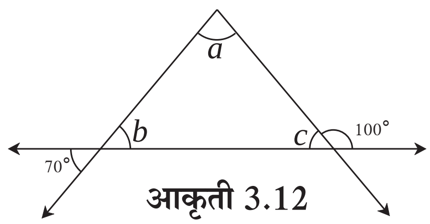
7. Δ ABC मध्ये $\angle$A व $\angle$B चे दुभाजक बिंदू O मध्ये छेदतात. जर $\angle C = 70^\circ$ तर $\angle$AOB चे माप काढा.

8. आकृती 3.11 मध्ये रेषा AB || रेषा CD आणि रेषा PQ ही त्यांची छेदिका आहे. किरण PT आणि किरण QT हे अनुक्रमे $\angle$BPQ व $\angle$PQD चे दुभाजक आहेत, तर सिद्ध करा की $\angle PTQ = 90^\circ$



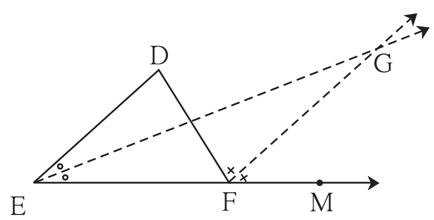
आकृती 3.11

9. आकृती 3.12 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून $\angle a, \angle b$ व $\angle c$ यांची मापे काढा.



आकृती 3.12

10*. आकृती 3.13 मध्ये रेख DE || रेख GF आहे. किरण EG व किरण FG हे अनुक्रमे $\angle$DEF व $\angle$DFM या कोनांचे दुभाजक आहेत. तर सिद्ध करा की,
(i) $\angle DEF = \angle EDF$ (ii) EF = FG

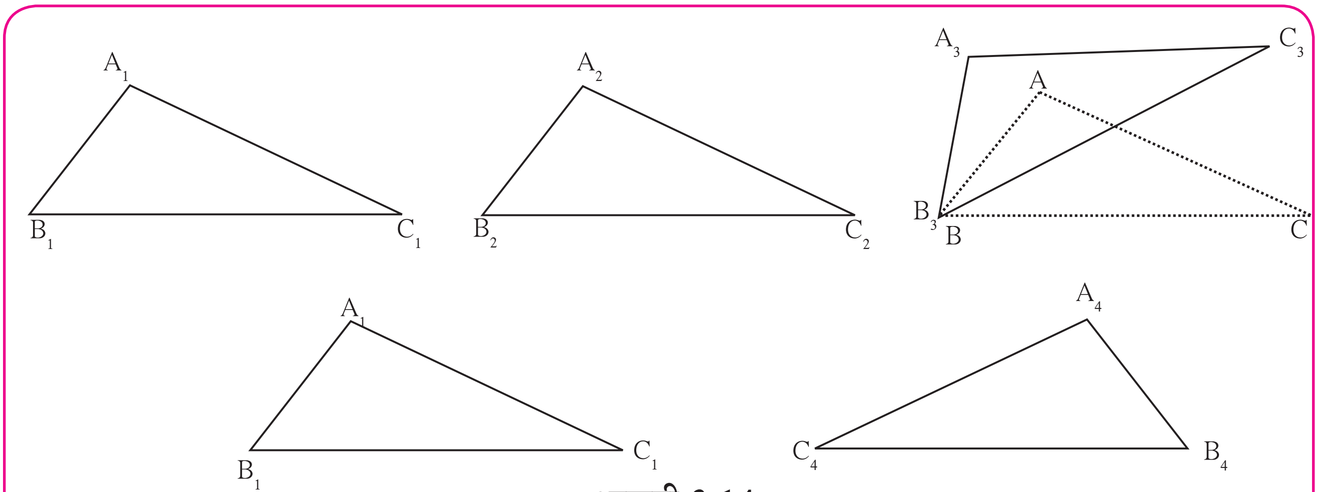


आकृती 3.13

जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची एकरूपता (Congruence of triangles)

एक रेषाखंड दुसऱ्यावर ठेवल्यास तंतोतंत जुळला तर ते दोन रेषाखंड एकरूप असतात. तसेच एक कोन उचलून दुसऱ्या कोनावर ठेवल्यावर तंतोतंत जुळतो तेव्हा ते दोन कोन एकरूप असतात हे आपण जाणतो. त्याचप्रमाणे एक त्रिकोण उचलून दुसऱ्या त्रिकोणावर ठेवल्यावर तंतोतंत जुळला तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणतात. जर Δ ABC आणि Δ PQR हे एकरूप असतील तर ते $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ असे दाखवतात.



आकृती 3.14

कृती : कोणत्याही मापाचा एक त्रिकोण Δ ABC पुठ्ठ्यावर कापून घ्या.

तो जाड कागदावर एका जागी ठेवून भोवती पेन्सिल गिरवून त्याची प्रत काढा. या त्रिकोणाला $\Delta A_1B_1C_1$ नाव द्या.

आता तो पुठ्ठ्याचा त्रिकोण बाजूला सरकवून तेथे याची दुसरी प्रत काढा.

तिला $\Delta A_2B_2C_2$ नाव द्या. मग आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे तो त्रिकोण थोडा फिरवून आणखी एक प्रत काढा. त्या प्रतीला $\Delta A_3B_3C_3$ नाव द्या. नंतर पुठ्ठ्याचा त्रिकोण उचलून दुसऱ्या जागी पालथा ठेवा व त्याची प्रत तयार करा. नव्या त्रिकोणाला $\Delta A_4B_4C_4$ हे नाव द्या.

आता $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ आणि $\Delta A_4B_4C_4$ हे सर्व Δ ABC शी एकरूप आहेत हे ध्यानात आले का ? कारण Δ ABC यांपैकी प्रत्येकाशी तंतोतंत जुळतो. $\Delta A_3B_3C_3$ साठी पडताळू. मात्र तो तसा जुळवताना $\angle A$ हा $\angle A_3$ वर, $\angle B$ हा $\angle B_3$ वर आणि $\angle C$ हा $\angle C_3$ वर ठेवला तरच $\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ असे म्हणता येते.

मग $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ हे देखील मिळते.

यावरून दोन त्रिकोणांची एकरूपता तपासताना त्यांचे कोन आणि भुजा विशिष्ट क्रमाने म्हणजे एकास एक संगतीने लिहाव्या लागतात. हे ध्यानात घ्या.

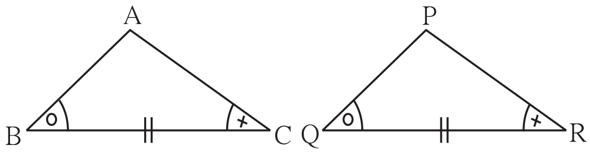
जर $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, तर $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

आणि $AB = PQ$, $BC = QR$, $CA = RP$ . . . . . . (II) अशी सहा समीकरणे मिळतात.

म्हणजे या दोन त्रिकोणांतील, कोनांच्या आणि बाजूंच्या एकास एक संगतीने, तीन कोन समान आणि तीन बाजू समान आहेत असा अर्थ आहे.

वरील सहाही समीकरणे एकरूप त्रिकोणांसाठी सत्य असतात. त्यासाठी तीन विशिष्ट समीकरणे समान आहेत असे समजले तर सहाही समीकरणे सत्य होऊन ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात. कसे ते पाहू.

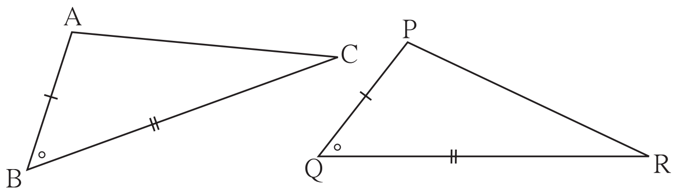
(1) जर एकास एक संगतीने ΔABC चे दोन कोन ΔPQR च्या दोन कोनांबरोबर असतील आणि त्या कोनांमधील समाविष्ट बाजू समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.



आकृती 3.15

या गुणधर्माला कोन-बाजू-कोन कसोटी असे म्हणतात. हे थोडक्यात **कोबाको कसोटी** असे लिहितात.

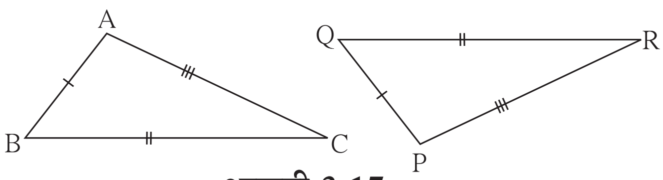
(2) जर एकास एक संगतीने Δ ABC मधील दोन बाजू व Δ PQR मधील दोन बाजू बरोबर असतील आणि Δ ABC च्या त्या दोन बाजूंमधला कोन हा Δ PQR च्या संगत बाजूंमधल्या कोनाएवढा असेल तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात.



आकृती 3.16

या गुणधर्माला बाजू-कोन-बाजू कसोटी म्हणतात आणि हे थोडक्यात **बाकोबा कसोटी** असे लिहितात.

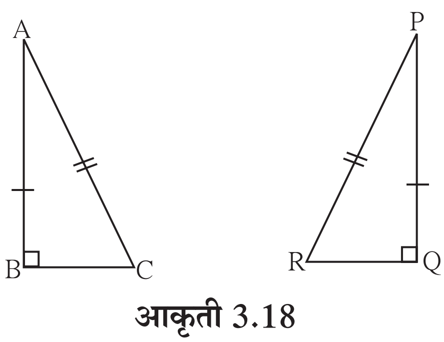
(3) जर Δ ABC च्या तीन बाजू एकास एक संगतीने Δ PQR च्या बाजूंएवढ्या असतील, तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.



आकृती 3.17

या गुणधर्माला बाजू-बाजू-बाजू कसोटी म्हणतात आणि हे थोडक्यात **बाबाबा कसोटी** असे लिहितात.

(4) Δ ABC, Δ PQR या दोन काटकोन त्रिकोणांत $\angle B$, $\angle Q$ हे काटकोन असून दोन्ही त्रिकोणांचे कर्ण समान आणि AB = PQ असेल तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.



आकृती 3.18

या गुणधर्माला **कर्णभुजा कसोटी** म्हणतात.

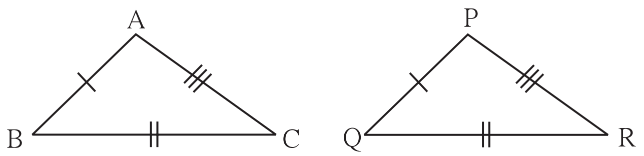
हे लक्षात ठेवूया.

आपण काही बाबी दिल्या असता त्रिकोण रचना केल्या आहेत. (उदा.दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू, तीन बाजू, दोन बाजू व समाविष्ट कोन) यांपैकी कोणतीही माहिती दिली असेल तर एकमेव त्रिकोण काढता येतो, हे आपण अनुभवले आहे. म्हणून दोन त्रिकोणांमधील एकास एक संगतीने या तीन बाबी समान झाल्या तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असतात. मग एकास एक संगतीने त्यांचे तीनही कोन समान आणि तीनही बाजू समान आहेत हे समजते. दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर एकास एक संगतीने त्यांचे कोन समान असतात आणि तीन बाजू समान असतात. याचा उपयोग भूमितीतील अनेक उदाहरणांत होतो.

सरावसंच 3.2

1. पुढीलपैकी प्रत्येक उदाहरणातील त्रिकोणांच्या जोडीचे सारख्या खुणांनी दाखवलेले भाग एकरूप आहेत. त्यावरून प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण ज्या कसोटीने एकरूप होतात ती कसोटी आकृतीखालील रिकाम्या जागेत लिहा.

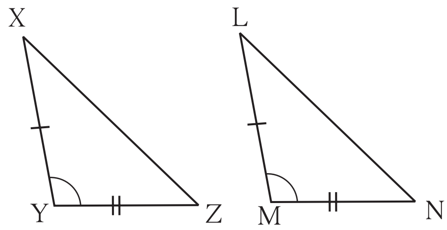
(i)



. . . . कसोटीने

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

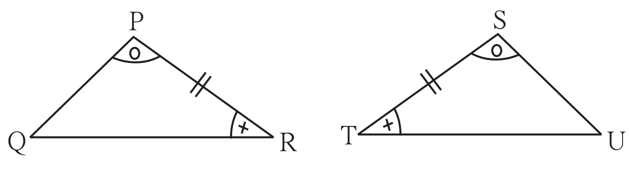
(ii)



. . . . कसोटीने

$\Delta XYZ \cong \Delta LMN$

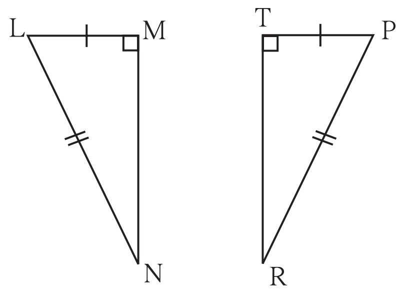
(iii)



. . . . कसोटीने

$\Delta PRQ \cong \Delta STU$

(iv)



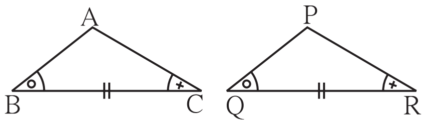
. . . . कसोटीने

$\Delta LMN \cong \Delta PTR$

आकृती 3.19

2. खालील त्रिकोणांच्या जोड्यांमध्ये दर्शवलेल्या माहितीचे निरीक्षण करा. ते त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार एकरूप आहेत ते लिहा व त्यांचे उरलेले एकरूप घटक लिहा.

(i)



आकृती 3.20

आकृतीत दर्शवलेल्या माहितीवरून,

Δ ABC व Δ PQR मध्ये

$\angle ABC \cong \angle PQR$

रेख BC $\cong$ रेख QR

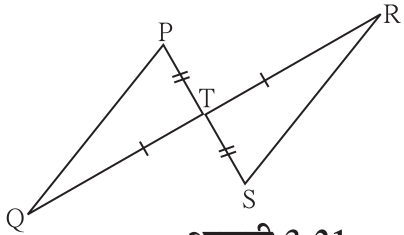
$\angle ACB \cong \angle PRQ$

$\therefore$ Δ ABC $\cong$ Δ PQR .... $\boxed{\quad\quad}$ कसोटी

$\therefore \angle BAC \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ ....एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

रेखAB $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ आणि $\boxed{\quad\quad}$ $\cong$ रेख PR .....एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू

(ii)



आकृती 3.21

आकृतीत दर्शवलेल्या माहितीवरून,

Δ PTQ व Δ STR मध्ये

रेख PT $\cong$ रेख ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... परस्पर विरुद्ध कोन

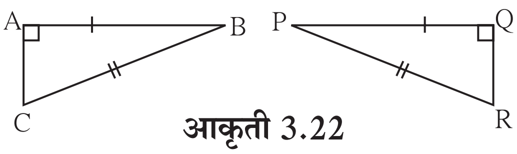
रेख TQ $\cong$ रेख TR

$\therefore$ Δ PTQ $\cong$ Δ STR .... $\boxed{\quad\quad}$ कसोटी

$\therefore \angle TPQ \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ व $\boxed{\quad\quad}$ $\cong \angle TRS$ $\}$..... एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन.

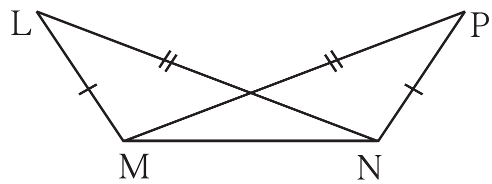
रेख PQ $\cong$ $\boxed{\quad\quad}$ एकरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू.

3. खालील आकृतीतील माहितीवरून Δ ABC व Δ PQR या त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कसोटी लिहून उरलेले एकरूप घटक लिहा.



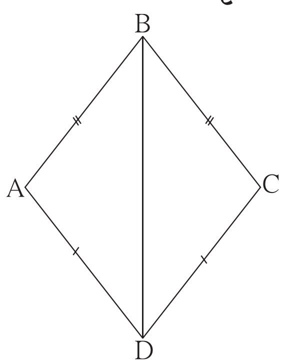
आकृती 3.22

4. खालील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे Δ LMN व Δ PNM या त्रिकोणांमध्ये LM = PN, LN = PM आहे तर या त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कसोटी लिहा व उरलेले एकरूप घटक लिहा.



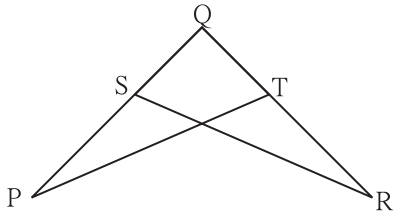
आकृती 3.23

5. आकृती 3.24 मध्ये रेख AB $\cong$ रेख BC आणि रेख AD $\cong$ रेख CD. तर सिद्ध करा की, Δ ABD $\cong$ Δ CBD



आकृती 3.24

6. आकृती 3.25 मध्ये $\angle P \cong \angle R$
रेख $PQ \cong$ रेख QR
तर सिद्ध करा की,
$\Delta PQT \cong \Delta RQS$



आकृती 3.25

जाणून घेऊया.

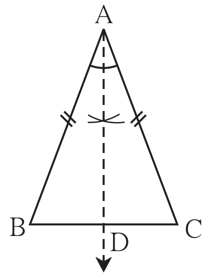
समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय (Isosceles triangle theorem)

प्रमेय : जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू एकरूप असतील तर त्या बाजूंसमोरील कोन एकरूप असतात.

पक्ष : ΔABC मध्ये बाजू $AB \cong$ बाजू AC

साध्य : $\angle ABC \cong \angle ACB$

रचना : ΔABC मध्ये $\angle BAC$ चा दुभाजक काढा,
तो बाजू BC ला जेथे छेदतो. त्या बिंदूला D नाव द्या.



आकृती 3.26

सिद्धता : ΔABD व ΔACD मध्ये
रेख $AB \cong$ रेख AC .... पक्ष
$\angle BAD \cong \angle CAD$........रचना
रेख $AD \cong$ रेख AD .... सामाईक बाजू
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ ...... $\boxed{\quad\quad\quad}$
$\therefore \angle ABD \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ ....एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन
$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because$ B - D - C

उपप्रमेय : त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू एकरूप असतील, तर त्याचे तिन्ही कोन एकरूप असतात आणि प्रत्येक कोनाचे माप 60° असते. (या उपप्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.)

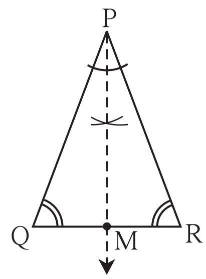
समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of an isosceles triangle theorem)

प्रमेय : जर त्रिकोणाचे दोन कोन एकरूप असतील तर त्या कोनांसमोरील बाजू एकरूप असतात.

पक्ष : ΔPQR मध्ये $\angle PQR \cong \angle PRQ$

साध्य : बाजू $PQ \cong$ बाजू PR

रचना : $\angle P$ चा दुभाजक काढा. तो बाजू QR
ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला M नाव द्या.



आकृती 3.27

सिद्धता : ΔPQM व ΔPRM मध्ये
$\angle PQM \cong$ $\boxed{\quad\quad}$........ पक्ष
$\angle QPM \cong \angle RPM$........$\boxed{\quad\quad}$
रेख $PM \cong$ $\boxed{\quad\quad}$ .... सामाईक बाजू
$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PRM$ ...... $\boxed{\quad\quad}$ कसोटी
$\therefore$ रेख $PQ \cong$ रेख PR.......एकरूप त्रिकोणाच्या संगत बाजू

उपप्रमेय : त्रिकोणाचे तीनही कोन एकरूप असतील तर त्याच्या तीनही बाजू एकरूप असतात.
(या उपप्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.)
वरील दोन्ही प्रमेयांची विधाने परस्परांचे व्यत्यास आहेत.
वरील दोन्ही उपप्रमेयांची विधाने परस्परांचे व्यत्यास आहेत.

विचार करूया

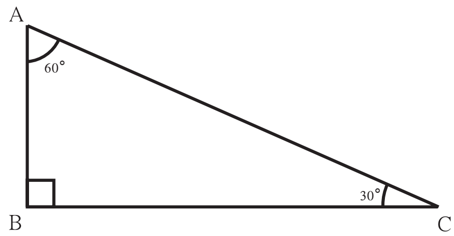
(1) समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाची सिद्धता वेगळी रचना करून देता येईल का ?
(2) समद्विभुज त्रिकोणाच्या प्रमेयाची सिद्धता कोणतीही रचना न करता देता येईल का ?

जाणून घेऊया.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ मापाच्या त्रिकोणाचा गुणधर्म (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

कृती I

गटातील प्रत्येकाने, एका कोनाचे माप 30° आहे असा काटकोन त्रिकोण काढावा. प्रत्येकाने 30° मापाच्या कोनासमोरील बाजूची आणि कर्णाची लांबी मोजावी. गटातील एका विद्यार्थ्याने सर्वांनी काढलेल्या त्रिकोणांसाठी पुढील सारणी पूर्ण करावी.



आकृती 3.28

त्रिकोण क्रमांक	1	2	3	4
30° कोनासमोरील बाजूंची लांबी				
कर्णाची लांबी				

वरील सारणीवरून कोनांची मापे 30°, 60° आणि 90° असणाऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूंचा काही गुणधर्म मिळतो का ?

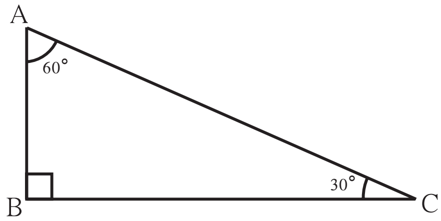
कृती II

कंपासपेटीतील एका गुण्याचे कोन 30°,60° आणि 90° असतात. त्यांच्या बाजूंच्या संदर्भात हा गुणधर्म मिळतो का याचा पडताळा घ्या.

या कृतींवरून आपल्याला मिळालेला एक महत्वाचा गुणधर्म आता सिद्ध करू.

प्रमेय : जर काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 30° व 60° असतील तर 30° च्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते.

(खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा.)



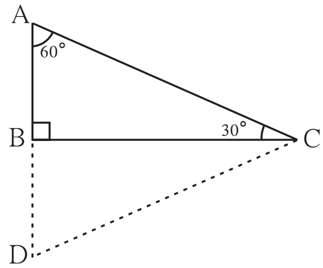
आकृती 3.29

पक्ष : काटकोन Δ ABC मध्ये

$\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$

साध्य : $AB = \frac{1}{2} AC$

रचना : AB रेषाखंड वाढवून त्यावर D बिंदू असा घ्या की AB = BD, नंतर DC रेषाखंड काढा.



आकृती 3.30

सिद्धता : Δ ABC व Δ DBC मध्ये

रेख AB $\cong$ रेख DB .... $\boxed{\quad\quad}$

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... $\boxed{\quad\quad}$

रेख BC $\cong$ रेख BC .... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... $\boxed{\quad\quad}$

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन

Δ ABC मध्ये $\angle BAC = 60^\circ \therefore \angle BDC = 60^\circ$

आता Δ ADC मध्ये,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180°)

$\therefore \Delta$ ADC हा समभुज त्रिकोण होईल.

$\therefore AC = AD = DC$ .... समद्विभुज त्रिकोणाच्या व्यत्यासाचे उपप्रमेय

परंतु $AB = \frac{1}{2} AD$........ रचना $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... ($\because AD = AC$)

कृती

वरील आकृती 3.29 च्या आधारे रिकाम्या चौकटी भरून खालील प्रमेयाची सिद्धता पूर्ण करा.

काटकोन त्रिकोणात इतर कोन 30°, 60° असतील तर 60° कोनासमोरील बाजू ही $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ कर्ण असते.

वरील प्रमेयात $AB = \frac{1}{2} AC$ हे आपण पाहिले.

$AB^2 + BC^2 = \boxed{\quad\quad}$ . . . . . पायथागोरसचा सिद्धांत वापरून

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 = \boxed{\quad\quad}$

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

कृती

काटकोन त्रिकोणाचे कोन जर 45°, 45°, 90° असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू ही $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ कर्ण असते.

Δ ABC मध्ये, $\angle B = 90^\circ$ आणि $\angle A = \angle C = 45^\circ$

$\therefore$ BC = AB

पायथागोरसच्या सिद्धांतानुसार,

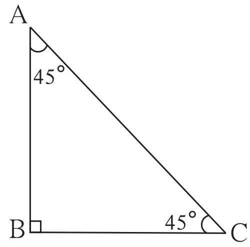
$AB^2 + BC^2 = \boxed{\quad}$

$AB^2 + \boxed{\quad} = AC^2 \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore\ 2AB^2 = \boxed{\quad}$

$\therefore\ AB^2 = \boxed{\quad}$

$\therefore\ AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\ AC$



आकृती 3.31

या गुणधर्माला $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ च्या त्रिकोणाचे प्रमेय म्हणतात.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) त्रिकोणाचे कोन 30°, 60° व 90° असतील तर 30° च्या कोनासमोरील बाजू $\frac{\text{कर्ण}}{2}$ असते आणि 60° च्या कोनासमोरील बाजू $\frac{\sqrt{3}}{2}$ कर्ण असते.
या प्रमेयाला $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ चे प्रमेय म्हणतात.

(2) त्रिकोणाचे कोन 45°, 45° व 90° असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$ असते.
या प्रमेयाला $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ प्रमेय म्हणतात.

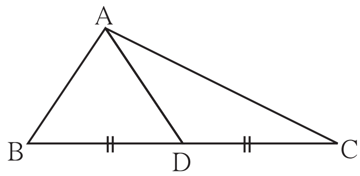
जरा आठवूया.

त्रिकोणाची मध्यगा

त्रिकोणाचा शिरोबिंदू व त्याच्या समोरील बाजूचा मध्यबिंदू यांना जोडणारा रेषाखंड म्हणजे त्या त्रिकोणाची मध्यगा होय.

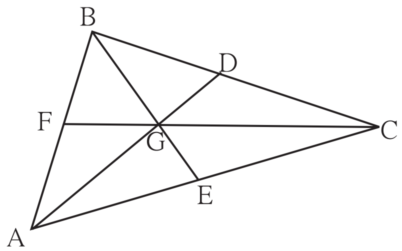
आकृतीत D हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

$\therefore$ रेख AD ही Δ ABC ची एक मध्यगा आहे.



आकृती 3.32

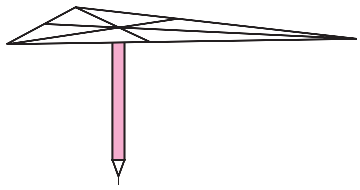
कृती I : कोणताही एक त्रिकोण ABC काढा. या त्रिकोणाच्या AD, BE, व CF या मध्यगा काढा. त्यांच्या संपात बिंदूला G नाव द्या. AG व GD यांच्या लांबीची तुलना कर्कटकाच्या साहाय्याने करा. AG ची लांबी GD च्या दुप्पट आहे. याचा पडताळा घ्या. त्याचप्रमाणे BG ची लांबी GE च्या दुप्पट आणि CG ची लांबी GF च्या लांबीच्या दुप्पट आहे का याचाही पडताळा घ्या.



आकृती 3.33

यावरून मध्यगा संपात बिंदू प्रत्येक मध्यगेचे 2:1 या प्रमाणात विभाजन करतो हा गुणधर्म लक्षात घ्या.

कृती II: Δ ABC हा एक त्रिकोण पुठ्ठ्यावर काढा व कापा. त्याच्या तिन्ही मध्यगा काढा. त्यांच्या संपातबिंदूला G नाव द्या. तळाचा पृष्ठभाग सपाट असणारी पेन्सिल घ्या व सपाट भाग वर करून ती उभी धरा. पेन्सिलवर बिंदू G ठेवून त्रिकोण तोलून धरता येतो हे पडताळा. यावरून G बिंदूचा, म्हणजे मध्यगा संपात बिंदूचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म लक्षात येतो.



आकृती 3.34

जाणून घेऊया.

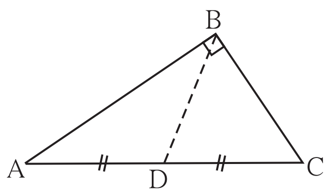
काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णाच्या मध्यगेचा गुणधर्म

कृती : समजा आकृती 3.35 मध्ये Δ ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे. रेख BD ही मध्यगा आहे. खालील रेषाखंडाची लांबी मोजा.

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

यावरून (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) हा गुणधर्म मिळतो याचा पडताळा घ्या.

हा गुणधर्म सिद्ध करु.



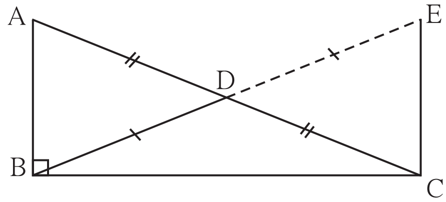
आकृती 3.35

प्रमेय : काटकोन त्रिकोणात कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या निम्मी असते.

पक्ष : काटकोन Δ ABC मध्ये रेख BD ही मध्यगा आहे.

साध्य : $BD = \frac{1}{2} AC$

रचना : किरण BD वर E बिंदू असा घ्या की B – D – E आणि $l(BD) = l(DE)$. रेख EC काढा.



आकृती 3.36

सिद्धता : (सिद्धतेतील मुख्य पायऱ्या दाखवल्या आहेत. मधल्या पायऱ्या विधाने व कारणे या रूपात लिहा व सिद्धता पूर्ण करा.)

$\Delta ADB \cong \Delta CDE$ ...... बाकोबा कसोटी

रेषा AB || रेषा EC ....व्युत्क्रम कोन कसोटी.

$\Delta ABC \cong \Delta ECB$ ...... बाकोबा कसोटी

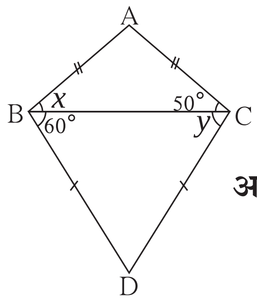
$BD = \frac{1}{2}(AC)$

हे लक्षात ठेवूया.

कोणत्याही काटकोन त्रिकोणात कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या निम्मी असते.

सरावसंच 3.3

1. आकृती 3.37 मध्ये दाखवलेली माहिती पाहा. x आणि y च्या किंमती काढा. तसेच $\angle ABD$ व $\angle ACD$ ची मापे काढा.

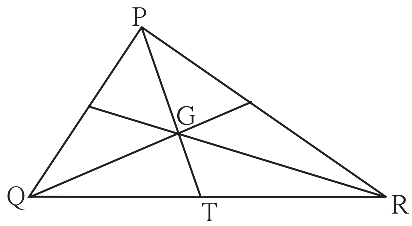


आकृती 3.37

2. काटकोन त्रिकोणात कर्णाची लांबी 15 असेल तर त्यावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी काढा.

3. Δ PQR मध्ये $\angle Q = 90°$, PQ = 12, QR = 5 आणि QS ही PR ची मध्यगा असेल तर QS काढा.

4. आकृती 3.38 मध्ये Δ PQR चा G हा मध्यगा संपात बिंदू आहे. जर GT = 2.5 सेमी, तर PG आणि PT यांची लांबी काढा.



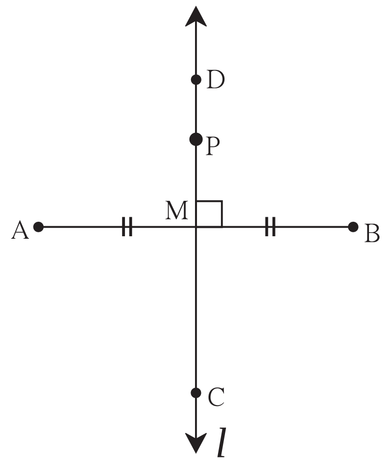
आकृती 3.38

जरा आठवूया.

कृती : सोईस्कर लांबीचा रेख AB काढा. त्याच्या मध्यबिंदूला M हे नाव द्या. बिंदू M मधून जाणारी आणि रेख AB ला लंब असणारी रेषा l काढा. रेषा l ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे, हे लक्षात आले का ?

रेषा l वर **कोठेही** P हा बिंदू घ्या. PA आणि PB या अंतरांची तुलना कर्कटकाने करा. काय आढळले ? PA = PB असे आढळले ना ? यावरून लक्षात येते की, रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असतो.

आता कंपासच्या साहाय्याने बिंदू A आणि B यांच्यापासून समदूर असणारे, C आणि D यांसारखे काही बिंदू घ्या. सर्व बिंदू रेषा l वरच आले ना ? यावरून काय लक्षात आले ? रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा प्रत्येक बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो. हे दोन गुणधर्म लंबदुभाजकाच्या प्रमेयाचे दोन भाग आहेत. ते आता आपण सिद्ध करू.



आकृती 3.39

जाणून घेऊया.

लंबदुभाजकाचे प्रमेय (Perpendicular bisector theorem)

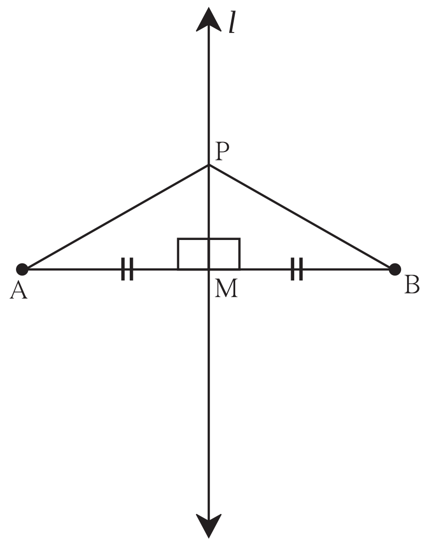
भाग I : रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या रेषाखंडाच्या अंत्यबिंदूंपासून समान अंतरावर असतो.

पक्ष : रेषा l ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा,
रेख AB ला M मध्ये छेदते.
बिंदू P हा रेषा l वरील कोणताही बिंदू आहे.

साध्य : l (PA) = l (PB)

रचना : रेख AP व रेख BP काढा.

सिद्धता : Δ PMA व Δ PMB मध्ये
रेख PM $\cong$ रेख PM .... सामाईक बाजू
$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB ....प्रत्येकी काटकोन
रेख AM $\cong$ रेख BM .... M हा मध्यबिंदू



आकृती 3.40

$\therefore \Delta$ PMA $\cong \Delta$ PMB ...... बाकोबा कसोटी

$\therefore$ रेख PA $\cong$ रेख PB.......एकरूप त्रिकोणाच्या संगत भुजा

$\therefore l(PA) = l(PB)$

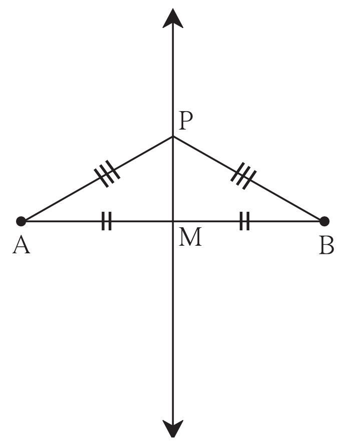
यावरून रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्याच्या अंत्यबिंदूंपासून समदूर असतो.

भाग II : रेषाखंडाच्या टोकांपासून समदूर असणारा कोणताही बिंदू त्या रेषाखंडाच्या लंबदुभाजकावर असतो.

पक्ष : बिंदू P हा रेषाखंड AB च्या टोकांपासून समदूर असलेला कोणताही बिंदू आहे. म्हणजेच PA = PB.

साध्य : P हा रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.

रचना : रेख AB चा M हा मध्यबिंदू घेतला. रेषा PM काढली.



आकृती 3.41

सिद्‌धता : Δ PAM व Δ PBM मध्ये

रेख PA $\cong$ रेख PB .... $\boxed{}$

रेख AM $\cong$ रेख BM .... $\boxed{}$

रेख PM $\cong$ $\boxed{}$ .... सामाईक बाजू

$\therefore \Delta$ PAM $\cong \Delta$ PBM ...... $\boxed{}$ कसोटी.

$\therefore \angle PMA \cong \angle PMB$.......एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन

परंतु $\angle PMA + \boxed{} = 180^\circ$

$\angle PMA + \angle PMA = 180^\circ$ .... ($\because \angle PMB = \angle PMA$)

$2\angle PMA = \boxed{}$

$\therefore \angle PMA = 90^\circ$

$\therefore$ रेख PM $\perp$ रेख AB ......(1)

तसेच, रेख AB चा M हा मध्यबिंदू आहे. ......(2) (रचना)

$\therefore$ रेषा PM ही रेख AB ची लंबदुभाजक रेषा आहे म्हणजेच P हा रेख AB च्या लंबदुभाजकावर आहे.

कोनदुभाजकाचे प्रमेय (Angle bisector theorem)

भाग I : कोनदुभाजकावरील प्रत्येक बिंदू हा त्या कोनाच्या भुजांपासून समदूर असतो.

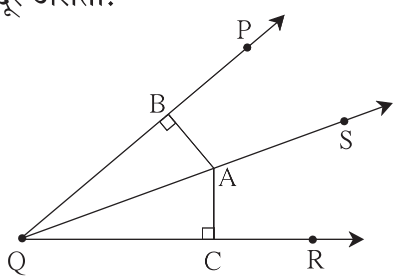
पक्ष : किरण QS हा $\angle PQR$ चा दुभाजक आहे.

A हा कोनदुभाजकावरील कोणताही एक बिंदू आहे.

रेख AB $\perp$ किरण QP   रेख AC $\perp$ किरणQR

साध्य : रेख AB $\cong$ रेख AC

सिद्‌धता : त्रिकोणांच्या एकरूपतेची योग्य कसोटी वापरून सिद्‌धता लिहा.



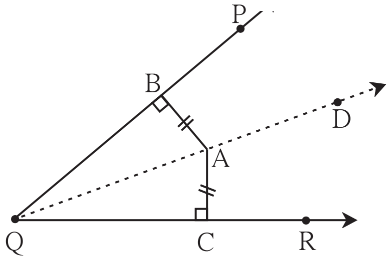
आकृती 3.42

भाग II : कोनाच्या भुजांपासून समान अंतरावर असणारा कोणताही बिंदू त्या कोनाच्या दुभाजकावर असतो.

पक्ष : $\angle PQR$ च्या अंतर्भागात A हा एक बिंदू असा आहे की,
रेख AC $\perp$ रेख QR
रेख AB $\perp$ किरण QP
AB = AC

साध्य : किरण QA हा $\angle PQR$ चा दुभाजक आहे.
म्हणजेच $\angle BQA = \angle CQA$

सिद्‌धता : त्रिकोणाच्या एकरूपतेची योग्य कसोटी वापरून सिद्‌धता लिहा.

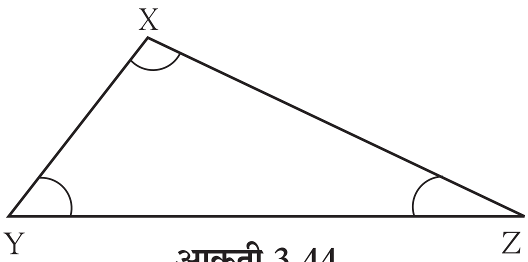


आकृती 3.43

जरा आठवूया.

कृती

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बाजू XZ > बाजू XY असा Δ XYZ काढा.
$\angle Z$ व $\angle Y$ मोजा. कोणता कोन मोठा आहे ?



आकृती 3.44

जाणून घेऊया.

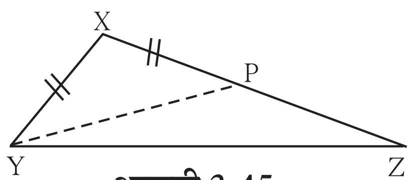
त्रिकोणातील बाजू व कोन यांच्या असमानतेचे गुणधर्म

प्रमेय : जर त्रिकोणाच्या दोन बाजूंपैकी एक बाजू दुसरीपेक्षा मोठी असेल तर मोठ्या बाजूसमोरील कोन लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा मोठा असतो.

पक्ष : Δ XYZ मध्ये बाजू XZ > बाजू XY

साध्य : $\angle XYZ > \angle XZY$

रचना : बाजू XZ वर P बिंदू असा घ्या की
l (XY) = l (XP), रेख YP काढा.



आकृती 3.45

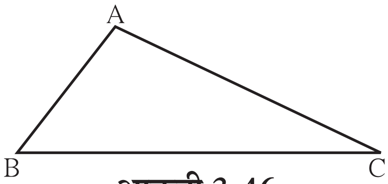
सिद्‌धता : Δ XYP मध्ये
XY = XP ....रचना
$\therefore$ $\angle XYP = \angle XPY$.....समान भुजांसमोरील कोनांची मापे समान .....(I)
$\angle XPY$ हा Δ YPZ चा बाह्यकोन
$\therefore$ $\angle XPY > \angle PZY$ ....बाह्यकोनाचे प्रमेय
$\angle XYP > \angle PZY$ ....विधान (I) वरून
$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (जर a > b आणि c > 0 तर a + c > b)
$\angle XYZ > \angle PZY$ म्हणजेच $\angle XYZ > \angle XZY$

प्रमेय : त्रिकोणाचे दोन कोन असमान मापांचे असतील तर मोठ्या कोनासमोरील बाजू ही लहान कोनासमोरील बाजूपेक्षा मोठी असते.

या प्रमेयाची सिद्धता अप्रत्यक्ष पद्धतीने देता येते. खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

पक्ष : ΔABC मध्ये $\angle B > \angle C$

साध्य : $AC > AB$



आकृती 3.46

सिद्धता : Δ ABC च्या बाजू AB आणि बाजू AC च्या लांबींमध्ये खालीलपैकी एक आणि एकच शक्यता असते.

(i) $AC < AB$ (ii) $\boxed{\quad\quad}$ (iii) $\boxed{\quad\quad}$

(i) $AC < AB$ हे गृहीत धरू.

त्रिकोणाच्या असमान बाजूंपैकी मोठ्या बाजूसमोरील कोन लहान बाजूसमोरील कोनापेक्षा $\boxed{\quad\quad}$ असतो.

$\therefore \angle C > \boxed{\quad\quad}$

परंतु $\angle C < \angle B$ .... पक्ष.

म्हणजे विसंगती निर्माण होते.

$\therefore \boxed{\quad\quad} < \boxed{\quad\quad}$ हे चूक आहे.

(ii) जर $AC = AB$

तर $\angle B = \angle C$

परंतु $\boxed{\quad\quad} > \boxed{\quad\quad}$ ...... पक्ष.

म्हणजे पुन्हा विसंगती निर्माण होते.

$\therefore \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad}$ हे चूक आहे.

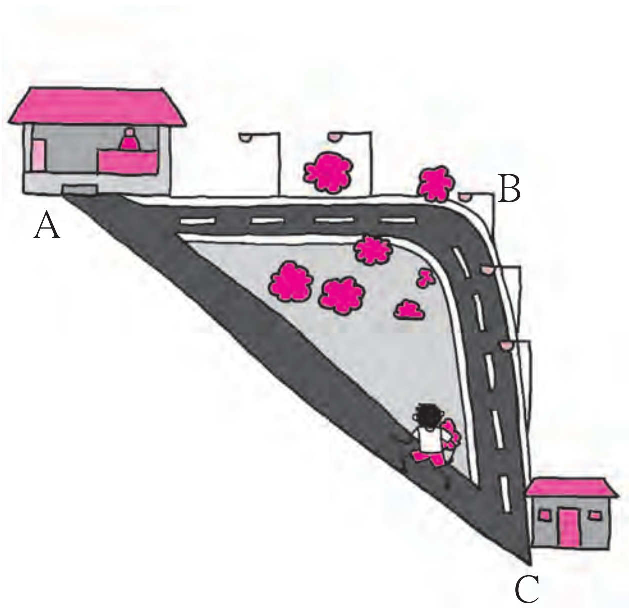
$\therefore AC > AB$ ही एकच शक्यता उरते.

$\therefore AC > AB$

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण एक कृती केली होती. त्यावरून त्रिकोणाचा एक गुणधर्म पाहिला होता. तो आठवूया.

शेजारील चित्रात दाखवल्याप्रमाणे A या ठिकाणी दुकान आहे. समीर C या ठिकाणी उभा होता. दुकानात पोहोचण्यासाठी त्याने $C \rightarrow B \rightarrow A$ या डांबरी मार्गाऐवजी $C \rightarrow A$ हा मार्ग घेतला. कारण त्याच्या लक्षात आले की हा मार्ग कमी लांबीचा आहे. म्हणजे त्रिकोणाचा कोणता गुणधर्म त्याच्या लक्षात आला होता? त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा मोठी असते, हा गुणधर्म आता सिद्ध करू.



प्रमेय : त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज ही तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा जास्त असते.

पक्ष : Δ ABC हा कोणताही त्रिकोण आहे.

साध्य : AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB

रचना : किरण BA वर D बिंदू असा घ्या की AD = AC

सिद्धता : Δ ACD मध्ये, AC = AD ..... रचना

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ...... (एकरूप बाजूंसमोरील कोन)

$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

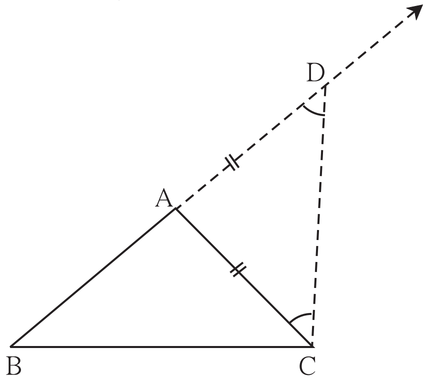
$\therefore$ बाजू BD > बाजू BC ....(त्रिकोणात मोठ्या कोनासमोरील बाजू मोठी)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

तसेच AB + BC > AC

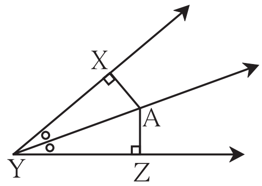
आणि BC + AC > AB हे सिद्ध करता येईल.



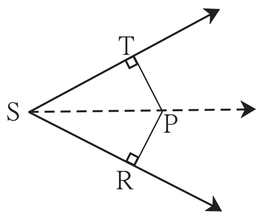
आकृती 3.47

सरावसंच 3.4

1. आकृती 3.48 मध्ये, बिंदू A हा $\angle XYZ$ च्या दुभाजकावर आहे.
जर AX = 2 सेमी तर AZ काढा.



आकृती 3.48

2. 

आकृती 3.49

आकृती 3.49 मध्ये $\angle RST = 56°$, रेख PT $\perp$ किरण ST, रेख PR $\perp$ किरण SR आणि रेख PR $\cong$ रेख PT असेल तर $\angle RSP$ काढा. कारण लिहा.

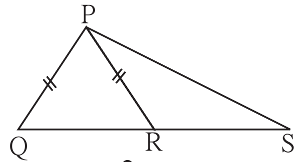
3. Δ PQR मध्ये PQ = 10 सेमी, QR = 12 सेमी, PR = 8 सेमी तर या त्रिकोणाचा सर्वांत मोठा व सर्वांत लहान कोन ओळखा.

4. Δ FAN मध्ये $\angle F = 80°$, $\angle A = 40°$ तर त्रिकोणाच्या सर्वात मोठ्या व सर्वांत लहान बाजूंची नावे सकारण लिहा.

5. सिद्ध करा की समभुज त्रिकोण समकोन त्रिकोण असतो.

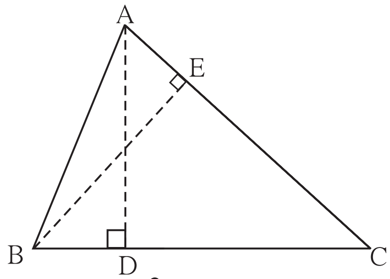
6. Δ ABC मध्ये $\angle$BAC चा दुभाजक बाजू BC वर लंब असेल तर सिद्ध करा की Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.

7. आकृती 3.50 मध्ये जर रेख PR $\cong$ रेख PQ तर दाखवा की रेख PS > रेख PQ



आकृती 3.50

8. आकृती 3.51 मध्ये Δ ABC चे रेख AD आणि रेख BE हे शिरोलंब आहेत आणि AE = BD आहे, तर सिद्ध करा की रेख AD $\cong$ रेख BE

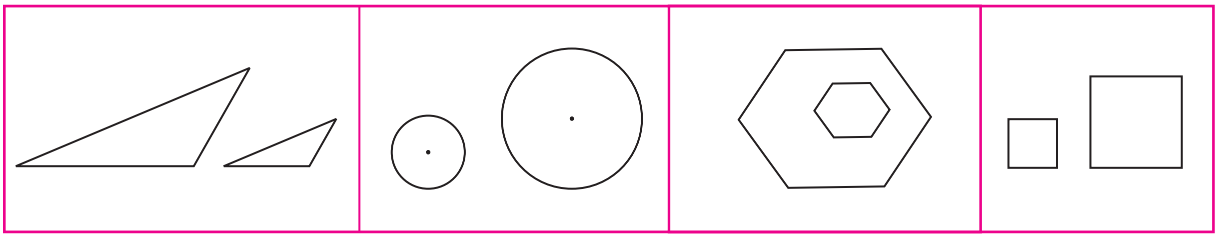


आकृती 3.51

जाणून घेऊया.

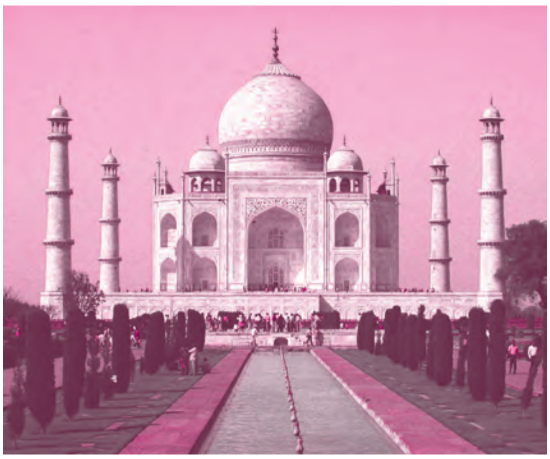
समरूप त्रिकोण (Similar triangles)

पुढील आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



प्रत्येक भागात दाखवलेल्या दोन-दोन आकृत्यांचा आकार (Shape) सारखा आहे. परंतु त्या आकृत्या लहान-मोठ्या आहेत, म्हणजे त्या एकरूप नाहीत.

अशा सारख्या दिसणाऱ्या आकृत्यांना म्हणजेच समान रूप असलेल्या आकृत्यांना **समरूप** आकृत्या असे म्हणतात.



एखादा फोटो, त्या फोटोवरून काढलेला मोठा फोटो यांत समरूपता आढळते. तसेच रस्ते आणि रस्त्यांचा नकाशा यांत समरूपता आढळते.

दोन आकृत्यांमधील बाजूंची प्रमाणबद्धता हा समरूप आकृत्यांचा महत्त्वाचा गुणधर्म आहे. समरूप आकृत्यांमध्ये जर कोन असतील तर ते मात्र एकरूप, त्याच मापाचे असावे लागतील. दोन रस्त्यांमध्ये जो कोन आहे तोच कोन त्यांच्या नकाशात नसेल तर तो नकाशा दिशाभूल करणारा ठरेल.

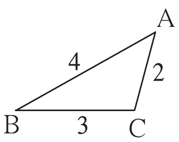
ICT Tools or Links

मोबाइलवर किंवा संगणकावर एखादा फोटो काढा. तो लहान किंवा मोठा करताना तुम्ही काय करता ते आठवा. तसेच एखाद्या फोटोतील एखादा भाग पाहण्यासाठी तुम्ही कोणती कृती करता ते आठवा.

आता आपण समरूप त्रिकोणांचे गुणधर्म एका कृतीतून समजून घेऊ.

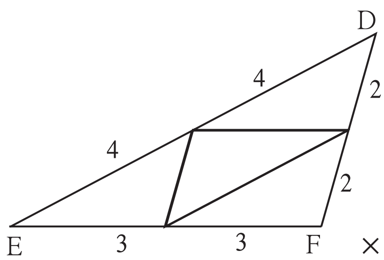
कृती : 4 सेमी, 3 सेमी व 2 सेमी बाजू असलेला एक त्रिकोण कागदावर काढा. हा त्रिकोण एका जाड कागदावर ठेवा. त्याभोवती पेन्सिल फिरवून तसे 14 त्रिकोण कापून तयार करा.

कागदाचे हे त्रिकोणाकृती तुकडे एकरूप आहेत हे लक्षात घ्या. ते खाली दाखवल्याप्रमाणे रचून तीन त्रिकोण तयार करा.



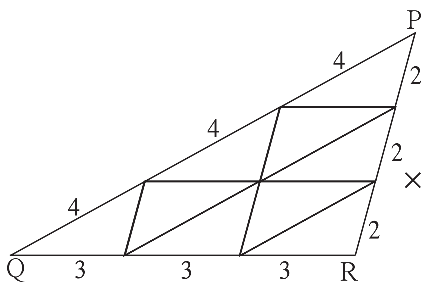
आकृती 3.52

त्रिकोणांची संख्या 1



आकृती 3.53

त्रिकोणांची संख्या 4



आकृती 3.54

त्रिकोणांची संख्या : 9

Δ ABC व Δ DEF हे ABC $\leftrightarrow$ DEF या संगतीत समरूप आहेत.

$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$

आणि $\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, म्हणजेच संगत बाजू प्रमाणात आहेत.

त्याचप्रमाणे Δ DEF आणि Δ PQR यांचा विचार करा. DEF $\leftrightarrow$ PQR या संगतीत त्यांचे कोन एकरूप आणि बाजू प्रमाणात आहेत का?

जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची समरूपता

Δ ABC आणि Δ PQR मध्ये जर (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ आणि

(ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; तर Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत असे म्हणतात.

'Δ ABC आणि Δ PQR समरूप आहेत' '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' असे लिहितात.

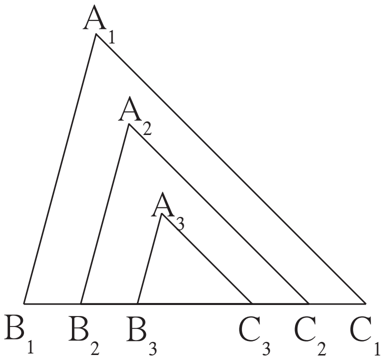
समरूप त्रिकोणांचे संगत कोन आणि संगत बाजू यांचा परस्पर संबंध खालील कृतीतून समजून घेऊ.

कृती : $\Delta A_1B_1C_1$ हा कोणताही त्रिकोण जाड कागदावर काढा आणि कापून घ्या. $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ मोजा. तसेच जाड कागदावर $\Delta A_2B_2C_2$ व $\Delta A_3B_3C_3$ हे आणखी दोन त्रिकोण असे काढा की

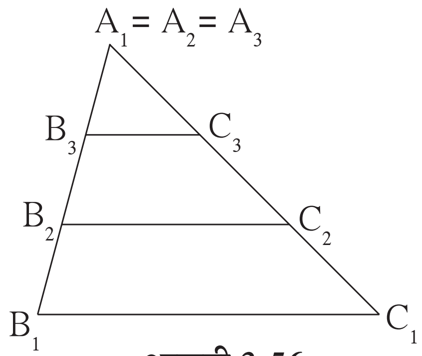
$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$

आणि $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ आता ते दोन त्रिकोण कापा व बाजूला ठेवा.

तीनही त्रिकोणांच्या भुजांची लांबी मोजा. या त्रिकोणांची रचना खालीलप्रमाणे दोन्ही प्रकारे करा.



आकृती 3.55



आकृती 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ ही गुणोत्तरे तपासा . ती समान आहेत हे पडताळा .

त्याचप्रमाणे $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ ही गुणोत्तरे देखील समान आहेत का ते पाहा.

या कृतीवरून लक्षात घ्या, की ज्या त्रिकोणांचे संगत कोन समान मापांचे असतात, त्यांच्या संगत बाजूंची गुणोत्तरेही समान असतात. म्हणजेच त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात.

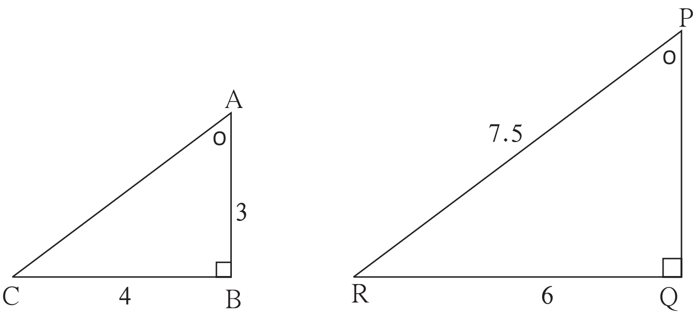
आपण पाहिले, की Δ ABC आणि Δ PQR मध्ये जर (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, तर (ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ म्हणजे जर संगत कोन समान असतील तर संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात.

हा नियम थोडे श्रम घेऊन सिद्ध करता येतो. आपण तो अनेक उदाहरणांत वापरणार आहोत.

हे लक्षात ठेवूया.

- दोन त्रिकोणांचे संगत कोन समान असतात तेव्हा ते त्रिकोण समरूप असतात.
- दोन त्रिकोण समरूप असतात तेव्हा त्यांच्या संगत बाजू प्रमाणात असतात व संगतकोन एकरूप असतात.

उदा. आकृती 3.57 मध्ये Δ ABC आणि Δ PQR दाखविले आहेत. त्या त्रिकोणात दाखवलेल्या माहितीचे निरीक्षण करा. त्यावरून ज्यांची लांबी दिलेली नाही, त्या बाजूंची लांबी काढा.



आकृती 3.57

उकल : प्रत्येक त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज 180° असते.

दिलेल्या माहितीनुसार

$\angle A = \angle P$ आणि $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC आणि Δ PQR हे समकोन त्रिकोण आहेत.

$\therefore$ त्यांच्या बाजू एका प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

तसेच $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

सरावसंच 3.5

1. जर Δ XYZ ~ Δ LMN तर त्यांचे एकरूप असणारे संगत कोन लिहा आणि संगत बाजूंची गुणोत्तरे लिहा.
2. Δ XYZ मध्ये XY = 4 सेमी, YZ = 6 सेमी, XZ = 5 सेमी, जर Δ XYZ ~ Δ PQR आणि PQ = 8 सेमी असेल तर Δ PQR च्या उरलेल्या बाजू काढा.
3. समरूप त्रिकोणांच्या जोडीची कच्ची आकृती काढा. त्रिकोणांना नावे द्या. त्यांचे संगत कोन सारख्या खुणांनी दाखवा. त्रिकोणांच्या संगत बाजूंच्या लांबी प्रमाणात असलेल्या संख्यांनी दाखवा.

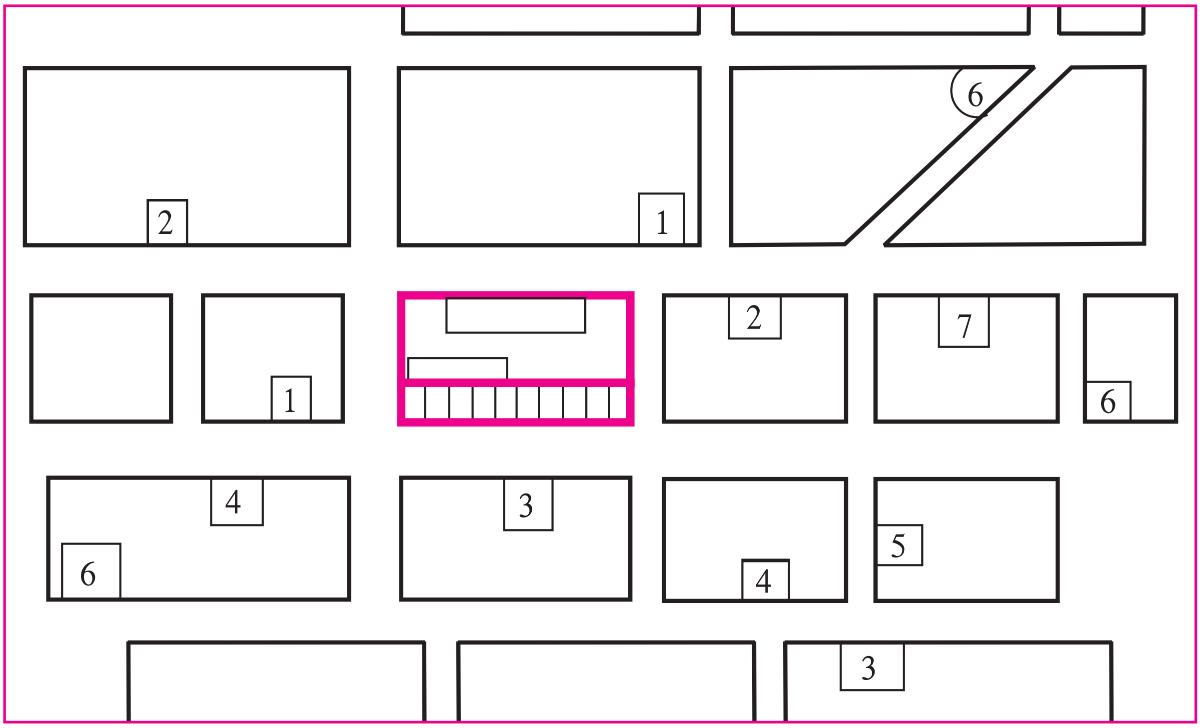
जरा आठवूया.

तुम्ही नकाशा तयार करताना रस्त्यावरील अंतरे योग्य प्रमाणात दाखवायची आहेत. जसे 1 सेमी = 100 मी किंवा 1 सेमी = 50 मी त्रिकोणांच्या गुणधर्मांचा विचार केला का ? त्रिकोणात मोठ्या कोनासमोरील बाजू मोठी असते, हे आठवा.

उपक्रम :

तुमच्या शाळेच्या किंवा घराच्या भोवतालच्या 500 मीटर परिसरातील रस्त्याचा नकाशा तयार करा.

रस्त्यांवरील दोन ठिकाणांमधील अंतर कसे मोजाल ? साधारण 2 मीटर अंतरामध्ये तुमची किती पावले (Steps) चालून होतात ते पाहा. दोन मीटर अंतरामध्ये तीन पावले चालून झाली तर त्या प्रमाणात 90 पावले म्हणजे 60 मीटर असे मानून अंतरे ठरवा. थोडक्यात, परिसरातील सर्व रस्त्यांवर चालून तुम्हांला वेगवेगळी अंतरे ठरवावी लागतील. नंतर रस्ते जिथे एकमेकांना छेदतात तेथे जो कोन होतो त्याच्या मापाचा अंदाज घ्या. रस्त्यांच्या मोजलेल्या लांबींसाठी योग्य प्रमाण घेऊन नकाशा तयार करा. परिसरातील दुकाने, टपऱ्या, इमारती, बसस्टॉप, रिक्षास्टँड इत्यादी दाखवण्याचा प्रयत्न करा. खाली नकाशाचा एक नमुना सूचीसह दिला आहे.



सूची : 1. पुस्तकांचे दुकान 2. बस थांबा 3. स्टेशनरीचे दुकान 4. बँक
5. औषधांचे दुकान 6. उपाहार गृह 7. सायकलचे दुकान

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

   (i) एका त्रिकोणाच्या दोन भुजा 5 सेमी व 1.5 सेमी असतील तर त्रिकोणाच्या तिसऱ्या भुजेची लांबी . . . . नसेल.

   (A) 3.7 सेमी (B) 4.1 सेमी (C) 3.8 सेमी (D) 3.4 सेमी

   (ii) Δ PQR मध्ये जर $\angle R > \angle Q$ तर . . . . असेल.

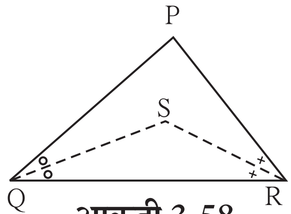
   (A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR

   (iii) Δ TPQ मध्ये $\angle T = 65°$, $\angle P = 95°$ तर खालील विधानांपैकी सत्य विधान कोणते ?

   (A) PQ < TP (B) PQ < TQ (C) TQ < TP < PQ (D) PQ < TP < TQ

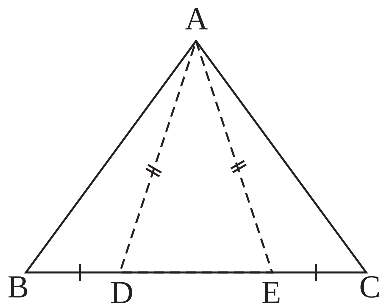
2. Δ ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. ज्यात AB = AC आहे आणि BD व CE या दोन मध्यगा आहेत, तर BD = CE दाखवा.

3. Δ PQR मध्ये जर PQ > PR आणि $\angle Q$ व $\angle R$ चे दुभाजक S मध्ये छेदतात तर दाखवा की, SQ > SR.



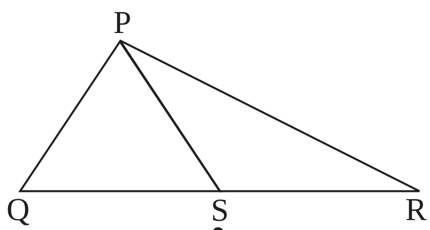
आकृती 3.58

4. आकृती 3.59 मध्ये Δ ABC च्या BC बाजू वर D आणि E बिंदू असे आहेत की BD = CE तसेच AD = AE तर दाखवा की, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.



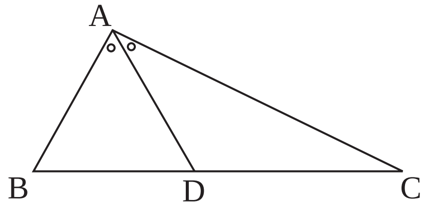
आकृती 3.59

5. आकृती 3.60 मध्ये Δ PQR च्या बाजू QR वर S हा कोणताही एक बिंदू आहे तर सिद्ध करा की, PQ + QR + RP > 2PS



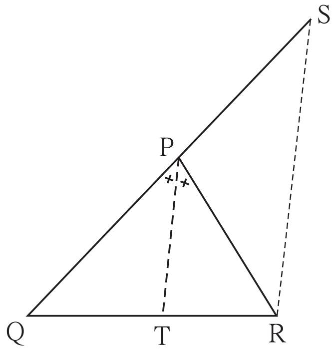
आकृती 3.60

6. आकृती 3.61 मध्ये Δ ABC च्या $\angle$BAC चा दुभाजक BC ला D बिंदूत छेदतो, तर सिद्ध करा की AB > BD



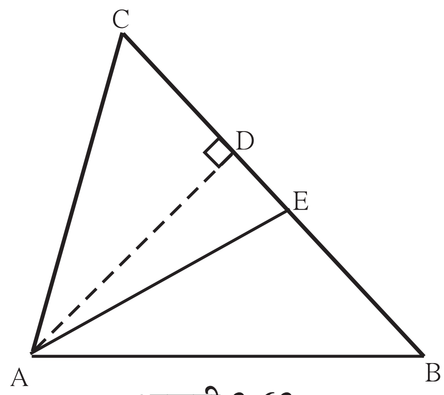
आकृती 3.61

7. आकृती 3.62 मध्ये रेख PT हा $\angle$QPR चा दुभाजक आहे. बिंदू R मधून काढलेली रेख PT ला समांतर असणारी रेषा, किरण QP ला S बिंदूत छेदते, तर सिद्ध करा, PS = PR



आकृती 3.62

8. आकृती 3.63 मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC.
रेख AE हा $\angle$CAB चा दुभाजक असून E-D-C.
तर दाखवा, की
$m\angle DAE = \frac{1}{2}(m\angle C - m\angle B)$



आकृती 3.63

विचार करूया

आपण शिकलो, की दोन त्रिकोण समकोन असतील, तर त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात.
दोन चौकोन समकोन असतील, तर त्यांच्या संगत बाजू एकाच प्रमाणात असतात का ? विविध आकृत्या काढून पडताळा.
हाच गुणधर्म इतर बहुभुजाकृतींच्या बाबतीत तपासून पाहा.

❑❑❑