



चला, शिकूया.

- गुणोत्तर
- समान गुणोत्तरांवरील क्रिया
- परंपरित प्रमाण
- गुणोत्तराचे गुणधर्म
- समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत
- गुणोत्तरातील k पद्धती



जरा आठवूया.

आपण मागील इयत्तांमध्ये गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. त्यावर आधारित उदाहरणेही आपण सोडवली आहेत.

उदा विमलने तयार केलेले रव्याचे लाडू रुचकर असतात. ती एक वाटी तूप, 3 वाट्या रवा आणि 2 वाट्या साखर घेऊन लाडू बनविते.

येथे रवा आणि साखर यांचे प्रमाण $3:2$ किंवा $\frac{3}{2}$ आहे.

जर लाडवांसाठी 12 वाट्या रवा घेतला तर किती साखर लागेल?

साखर x वाट्या लागेल असे मानू. यावरून $\frac{3}{2} = \frac{12}{x} \therefore 3x = 24 \therefore x = 8$

म्हणजे 12 वाट्या रवा घेऊन लाडू करण्यासाठी 8 वाट्या साखर लागेल.

हेच उदाहरण पुढीलप्रमाणेही करता येते.

रवा $3k$ वाट्या असेल तर साखर $2k$ वाट्या लागेल. कारण $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ असेल तर $k = 4 \therefore 2k = 8$ वाट्या साखर लागेल.



जाणून घेऊया.

गुणोत्तर व प्रमाण (Ratio and proportion)

दोन संख्यांच्या गुणोत्तराची संकल्पना तीन किंवा अधिक संख्यांसाठी विस्तारित करता येते. लाडवांचे उदाहरण पाहा. तूप, रवा आणि साखर यांचे प्रमाण $1 : 3 : 2$ आहे.

येथे तूप व रवा यांचे गुणोत्तर $1 : 3$ आणि रवा व साखर यांचे गुणोत्तर $3 : 2$ आहे. ही माहिती एकाच प्रमाणाने दिली आहे.

तूप $1k = k$ वाटी, रवा $3k$ वाट्या आणि साखर $2k$ वाट्या असे मानता येईल.

आता 12 वाट्या रवा असेल तर लाडवांसाठी किती वाट्या तूप व किती वाट्या साखर लागेल हे काढता येईल.

कारण $3k = 12 \therefore k = 4$ आणि $2k = 8$ म्हणजे 4 वाट्या तूप आणि 8 वाट्या साखर लागेल.

हीच कल्पना चार वा अधिक बाबींच्या प्रमाणासाठी देखील वापरता येते.

जर a, b, c, d या चार संख्यांचे प्रमाण $2 : 3 : 7 : 4$ असे असेल तर त्या संख्या $2m, 3m, 7m, 4m$ मानू. दिलेली माहिती वापरून m ची किंमत काढता येईल. उदाहरणार्थ, या चार संख्यांची बेरीज 48 असेल तर त्या चार संख्या काढू.

$$2m + 3m + 7m + 4m = 16m = 48$$

$$\therefore m = 3$$

$$\therefore 2m = 6, 3m = 9, 7m = 21, 4m = 12 \text{ अशा संख्या मिळाल्या.}$$

$$\therefore \text{इष्ट संख्या} = 6, 9, 21, 12$$

उदा (1) खताच्या $18 : 18 : 10$ या प्रकारामध्ये नायट्रोजनची संयुगे 18%, फॉस्फरसची संयुगे 18% आणि पोटॅशियमची संयुगे 10% असतात. उरलेला भाग इतर पदार्थांचा असतो. तर त्या प्रकारच्या 20 किलोग्रॅम खतामध्ये प्रत्येक प्रकारच्या संयुगाचे वस्तुमान किती असेल ?

उकल : 20 किग्रॅ खतातील नायट्रोजनच्या संयुगाचे वस्तुमान x किग्रॅ मानू.

$$\therefore \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \quad \therefore x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

\therefore नायट्रोजनचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

फॉस्फरसच्या संयुगाचे शतमान 18 हेच असते. \therefore फॉस्फरसचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

20 किग्रॅ खतातील पोटॅशियमच्या संयुगाचे वस्तुमान y किग्रॅ मानल्यास

$$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \quad \therefore y = 2 \quad \therefore \text{पोटॅशियमचे संयुग 2 किग्रॅ असेल.}$$

समप्रमाण

एक मोटरगाडी 1 लीटर पेट्रोलमध्ये 10 किमी अंतर जाते.

म्हणून 20 लीटर पेट्रोलमध्ये ती गाडी $20 \times 10 = 200$ किमी अंतर कापेल.

तर 40 लीटर पेट्रोलमध्ये तीच गाडी $40 \times 10 = 400$ किमी अंतर जाईल.

वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

पेट्रोल : x लीटर	1	20	40	
अंतर : y किमी	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

गाडीने वापरलेले पेट्रोल (लीटरमध्ये) आणि तेवढ्या पेट्रोलमध्ये कापलेले अंतर (किलोमीटरमध्ये) या राशींचे गुणोत्तर स्थिर आहे. अशा वेळी त्या दोन राशी समप्रमाणात आहेत, म्हणजेच या दोन राशी समचलनात बदलतात असे म्हणतात.

व्यस्तप्रमाण

एका मोटारीला ताशी 50 किमी वेगाने 100 किमी जाण्यास दोन तास लागतात. एका बैलगाडीचा वेग ताशी 5 किमी आहे, तर तेवढेच अंतर जाण्यास बैलगाडीला 20 तास लागतात.

∴ वेग × वेळ = अंतर हे लक्षात घेऊन वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

मोटर	वेग/ताशी x	वेळ y	$x \times y$	$x \times y = k$
	50	2	100	
बैलगाडी	5	20	100	

म्हणजे वाहनाचा वेग आणि प्रवासाला लागणारा वेळ यांचा गुणाकार स्थिर आलेला दिसतो. अशा वेळी त्या राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत, किंवा त्या राशी व्यस्त चलनात बदलतात असे म्हणतात.

वरील उदाहरणात, वाहनाचा वेग आणि ठरावीक अंतर जाण्यास लागणारा वेळ हे व्यस्त प्रमाणात आहेत.



जरा आठवूया.

गुणोत्तराचे गुणधर्म

- (1) a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $a : b$ किंवा $\frac{a}{b}$ अशा स्वरूपात लिहिता येते. येथे a ला पूर्वपद (पहिले पद) आणि b ला उत्तर पद (दुसरे पद) म्हणतात.
- (2) दोन संख्यांच्या गुणोत्तरात उत्तरपद 100 असते तेव्हा त्या गुणोत्तरास शतमान असे म्हणतात.
- (3) प्रमाणातील सर्व संख्यांना एकाच शून्येतर संख्येने गुणले किंवा भागले तर ते प्रमाण बदलत नाही.
उदा. $3:4 = 6:8 = 9:12$ तसेच $2:3:5 = 8:12:20$ किंवा k ही शून्येतर संख्या असेल, तर
 $a : b = ak : bk$ $a : b : c = ak : bk : ck$
- (4) ज्या संख्यांचे गुणोत्तर काढायचे आहे त्या एकाच प्रकारच्या मापनाच्या असल्या तर प्रत्येकीच्या मापनाचे एकक समान असले पाहिजे.
- (5) गुणोत्तराला एकक नसते.
जसे, 2 किलोग्रॅम व 300 ग्रॅम यांचे गुणोत्तर $2:300$ नसते परंतु 2 किलोग्रॅम = 2000 ग्रॅम म्हणून ते गुणोत्तर $2000 : 300$ म्हणजेच $20:3$ आहे.

उदा (1) सीमाच्या व राजश्रीच्या वयांचे गुणोत्तर $3 : 1$ आहे. राजश्रीच्या व अतुलच्या वयांचे गुणोत्तर $2 : 3$ आहे. तर सीमा, राजश्री आणि अतुल यांच्या वयांचे गुणोत्तर काढा.

उकल : सीमाचे वय : राजश्रीचे वय = $3 : 1$ राजश्रीचे वय : अतुलचे वय = $2 : 3$

पहिल्या गुणोत्तराचे उत्तरपद हे दुसऱ्या गुणोत्तरातील पूर्वपद असायला हवे.

यासाठी म्हणजे सलग गुणोत्तर मिळवण्यासाठी पहिल्या गुणोत्तरातील पदांना 2 ने गुणू म्हणजे $3:1 = 6:2$ मिळेल.

$$\frac{\text{सीमाचे वय}}{\text{राजश्रीचे वय}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{राजश्रीचे वय}}{\text{अतुलचे वय}} = \frac{2}{3}$$

∴ सीमाचे वय : राजश्रीचे वय : अतुलचे वय हे गुणोत्तर $6 : 2 : 3$ असे आहे.

उदा (2) एका आयताकृती शेताची लांबी 1.2 किमी असून त्याची रुंदी 400 मी आहे, तर लांबीचे रुंदीशी गुणोत्तर काढा.

उकल : येथे लांबी किलोमीटरमध्ये व रुंदी मीटरमध्ये आहे. गुणोत्तरासाठी दोन्ही एकेके समान हवीत म्हणून किलोमीटरचे मीटरमध्ये रूपांतर करू.

$$1.2 \text{ किमी} = 1.2 \times 1000 = 1200 \text{ मीटर} \quad \therefore 1200 \text{ मीटरचे } 400 \text{ मीटरशी गुणोत्तर घेऊ.}$$

$$\text{अपेक्षित गुणोत्तर} = \frac{1200}{400} = \frac{3}{1}, \text{ म्हणजेच } 3:1 \text{ आहे.}$$

उदा (3) महेश यांच्या दरमहा खर्चाचे त्यांच्या उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर $3:5$ आहे, तर त्यांचा खर्च त्यांच्या उत्पन्नाच्या शेकडा किती आहे ?

उकल : खर्चाचे उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर $3:5$ आहे. याचे शतमानात रूपांतर करायचे म्हणजे दुसरे पद 100 करायचे.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100} \quad \text{म्हणजे } \frac{\text{खर्च}}{\text{उत्पन्न}} = \frac{60}{100} = 60\% \quad \therefore \text{महेश यांचा खर्च उत्पन्नाच्या } 60\% \text{ आहे.}$$

उदा (4) एका बागेत आंबा व चिकूच्या झाडांच्या संख्यांचे गुणोत्तर $2:3$ आहे. जर त्या बागेत प्रत्येक प्रकारची 5 झाडे जास्त लावली असती तर त्यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर $5 : 7$ झाले असते. तर त्या बागेत आंब्याची व चिकूची झाडे किती आहेत ?

उकल : सुरुवातीचे गुणोत्तर $2 : 3$ आहे.

बागेतील आंब्याची झाडे $= 2x$ व चिकूची झाडे $= 3x$ मानू.

$$\text{दिलेल्या अटीनुसार, } \frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$$\therefore \text{बागेतील आंब्याची झाडे} = 2x = 2 \times 10 = 20$$

$$\therefore \text{बागेतील चिकूची झाडे} = 3x = 3 \times 10 = 30$$

उदा (5) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 आहे. जर प्रत्येक संख्येत 40 मिळवले तर येणाऱ्या बेरजांचे गुणोत्तर 25 : 31 होते. तर त्या संख्या काढा.

उकल : पहिली संख्या = $5x$ आणि दुसरी संख्या = $7x$ मानू.

दिलेल्या अटीवरून.

$$\frac{5x+40}{7x+40} = \frac{25}{31}$$

$$31(5x+40) = 25(7x+40)$$

$$155x+1240 = 175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240 = 20x$$

$$x = 12$$

$$\therefore \text{पहिली संख्या} = 5 \times 12 = 60$$

$$\text{दुसरी संख्या} = 7 \times 12 = 84$$

$$\therefore \text{दिलेल्या संख्या 60 व 84 आहेत.}$$

सरावसंच 4.1

- (1) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.
 - (i) 72, 60 (ii) 38, 57 (iii) 52, 78
- (2) पुढील राशींपैकी पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.
 - (i) 700 रुपये, 308 रुपये (ii) 14 रु, 12 रु. 40 पै.
 - (iii) 5 लीटर, 2500 मिलिलीटर (iv) 3 वर्ष 4 महिने, 5 वर्ष 8 महिने
 - (v) 3.8 किलोग्रॅम, 1900 ग्रॅम (vi) 7 मिनिटे 20 सेकंद, 5 मिनिटे 6 सेकंद.
- (3) पुढील शतमाने संक्षिप्त गुणोत्तरांच्या रूपात लिहा.
 - (i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%
- (4) एक लहान घर 3 माणसे 8 दिवसांत बांधू शकतात, तर तेच घर 6 दिवसांत बांधण्यास किती माणसे लागतील ?
- (5) पुढील गुणोत्तरांचे शतमानात रूपांतर करा.
 - (i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$
- (6) आभा आणि तिची आई यांच्या वयांचे गुणोत्तर 2:5 आहे. आभाच्या जन्माच्या वेळी तिच्या आईचे वय 27 वर्षे होते. तर आभा आणि तिची आई यांची आजची वये काढा.
- (7) वत्सला व सारा यांची आजची वये अनुक्रमे 14 वर्षे व 10 वर्षे आहेत; किती वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 5:4 होईल ?
- (8) रेहाना व तिची आई यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 7 आहे. 2 वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 1 : 3 होईल. तर रेहानाचे आजचे वय किती ?



जाणून घेऊया.

गुणोत्तरांची तुलना

जर $b > 0, d > 0$ तर $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ या गुणोत्तरांची तुलना पाहू. ही तुलना खालील नियमांनुसार करता येते.

(i) जर $ad > bc$ तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) जर $ad < bc$ तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) जर $ad = bc$ तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

खाली दिलेल्या गुणोत्तरांच्या प्रत्येक जोडीतील क्रमसंबंध ठरवा.

उदा (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

उकल : $4 \times 8 \quad ? \quad 7 \times 9$
 $32 < 63$
 $\therefore \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

उदा (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \quad ? \quad \sqrt{8} \times \sqrt{7}$
 $\sqrt{65} \quad ? \quad \sqrt{56}$
 $\sqrt{65} > \sqrt{56}$
 $\therefore \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

उदा (3) जर a व b पूर्णांक संख्या असतील आणि $a < b, b > 1$ तर $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ या गुणोत्तरांतील क्रमसंबंध ठरवा.

उकल : $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$

आता $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ या वजाबाकीचा विचार करू.

$$\begin{aligned} \frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} &= \frac{(a-1)(b+1) - (a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)} \\ &= \frac{(ab - b + a - 1) - (ab + b - a - 1)}{b^2 - 1} \\ &= \frac{ab - b + a - 1 - ab - b + a + 1}{b^2 - 1} \\ &= \frac{2a - 2b}{b^2 - 1} \\ &= \frac{2(a-b)}{b^2 - 1} \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

आता $a < b \quad \therefore a - b < 0$

तसेच $b^2 - 1 > 0$ कारण $b > 1$

$$\frac{2(a-b)}{b^2 - 1} < 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0 \quad \dots\dots (1) \text{ व } (2) \text{ वरून}$

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$$

उदा (4) जर $a : b = 2 : 1$ आणि $b : c = 4 : 1$ तर $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ या राशीची किंमत काढा.

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1} \quad \therefore a = 2b \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{1} \quad \therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \quad \therefore a = 8c$

आता $a = 8c$, $b = 4c$ या किमती घालून

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 &= \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3 \\ &= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3 \\ &= (8)^3 \\ \therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 &= 512 \end{aligned}$$

सरावसंच 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ या गुणधर्माचा उपयोग करून रिकाम्या जागी योग्य संख्या लिहा.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{\dots}{28} = \frac{35}{\dots} = \frac{\dots}{3.5}$

(ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{\dots} = \frac{\dots}{42} = \frac{\dots}{3.5}$

(2) पुढील गुणोत्तरे काढा.

(i) वर्तुळाच्या त्रिज्येचे त्याच्या परिघाशी असलेले गुणोत्तर.

(ii) r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या परिघाचे, त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) बाजू 7 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाचे त्याच्या बाजूशी असलेले गुणोत्तर.

(iv) लांबी 5 सेमी व रुंदी 3.5 सेमी असलेल्या आयताच्या परिमितीचे, क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(3) पुढे दिलेल्या गुणोत्तरांच्या जोड्यांमधील लहान-मोठेपणा ठरवा.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$

(ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$

(iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$

(v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) $\square ABCD$ समांतरभुज चौकोन आहे. त्याच्या $\angle A$ व $\angle B$ च्या मापांचे गुणोत्तर 5 : 4 आहे. तर $\angle B$ चे माप काढा.

(ii) अल्बर्ट आणि सलीम यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 5 : 9 आहे. पाच वर्षांनंतर त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 5 होईल, तर त्यांची आजची वये काढा.

(iii) एका आयताच्या लांबी व रुंदीचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. आयताची परिमिती 36 सेमी आहे, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

(iv) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 31 : 23 असून त्यांची बेरीज 216 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(v) दोन संख्यांचा गुणाकार 360 आहे व त्याचे गुणोत्तर 10 : 9 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(5*) जर $a : b = 3 : 1$ आणि $b : c = 5 : 1$ तर (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ या राशींच्या किमती काढा.

(6*) $\sqrt{0.04 \times 0.4 \times a} = 0.4 \times 0.04 \times \sqrt{b}$ तर $\frac{a}{b}$ हे गुणोत्तर काढा.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ तर x ची किंमत काढा.



जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांवरील क्रिया

समानतेच्या गुणधर्माचा उपयोग करून दोन समान गुणोत्तरांवर काही क्रिया करता येतात. त्यांचा अभ्यास करू.

जर a, b, c, d या धन संख्या असतील तर त्यांसाठी खालील गुणधर्म समजून घेऊ.

(I) व्यस्त क्रिया (Invertendo) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $\therefore a \times d = b \times c$
 $\therefore b \times c = a \times d$
 $\therefore \frac{b \times c}{a \times c} = \frac{a \times d}{a \times c}$ (दोन्ही बाजूंस $a \times c$ ने भागून.)
 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
 \therefore जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ या गुणधर्माला 'व्यस्त क्रिया' म्हणतात.

(II) एकांतर क्रिया (Alternando) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $\therefore a \times d = b \times c$
 $\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{b \times c}{c \times d}$ (दोन्ही बाजूंस $c \times d$ ने भागून)
 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ या गुणधर्माला 'एकांतर क्रिया' म्हणतात.

(III) योग क्रिया (Componendo) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \quad (\text{दोन्ही बाजूंत 1 मिळवून})$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ या गुणधर्माला 'योग क्रिया' म्हणतात.

(IV) वियोग क्रिया (Dividendo) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \quad (\text{दोन्ही बाजूंतून 1 वजा करून})$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ या गुणधर्माला 'वियोग क्रिया' म्हणतात.

(V) योग वियोग क्रिया (Componendo-dividendo) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b$, $c \neq d$

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (योग क्रिया करून)(1)

$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (वियोग क्रिया करून)(2)

$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (1) व (2) वरून.

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ या गुणधर्माला 'योग-वियोग क्रिया' म्हणतात.

योग क्रिया आणि वियोग क्रिया यांचे सामान्य रूप

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (एकदा योग क्रिया)

$$\frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d} \quad (\text{दोनदा योग क्रिया करून})$$

सामान्यपणे $\frac{a+mb}{b} = \frac{c+md}{d}$ (m वेळा योग क्रिया करून) ... (1)

तसेच जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a-mb}{b} = \frac{c-md}{d}$ (m वेळा वियोग क्रिया करून) ... (2)

आणि जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+mb}{a-mb} = \frac{c+md}{c-md}$... ((1) व (2) वरून, भागाकार करून)



हे लक्षात ठेवूया.

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (व्यस्त क्रिया)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (योग क्रिया)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (एकांतर क्रिया)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (वियोग क्रिया)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (योग-वियोग क्रिया)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) जर $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ तर $\frac{a+7b}{7b} =$ हे गुणोत्तर काढा.

रीत I

उकल : जर $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ तर $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = k$, एकांतर क्रिया करून

$$\therefore a = 5k, b = 3k$$

$$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{5k+7 \times 3k}{7 \times 3k}$$

$$= \frac{5k+21k}{21k}$$

$$= \frac{26k}{21k} = \frac{26}{21}$$

रीत II

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{7b} = \frac{5}{21}$$

$$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{5+21}{21} \quad (\text{योगक्रिया करून})$$

$$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{26}{21}$$

उदा. (2) जर $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ तर $\frac{5a-b}{b}$ काढा.

रीत I

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$

$$\therefore \frac{a}{7} = \frac{b}{4} \quad \text{एकांतर क्रिया करून}$$

$$\therefore \frac{a}{7} = \frac{b}{4} = m \quad \text{मानू}$$

$$\therefore a = 7m, b = 4m$$

$$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$$

$$= \frac{35m-4m}{4m}$$

$$= \frac{31}{4}$$

रीत II

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{5a}{b} = \frac{5 \times 7}{4}$$

$$= \frac{35}{4}$$

$$\frac{5a-b}{b} = \frac{35-4}{4} \quad (\text{वियोग क्रिया करून})$$

$$\frac{5a-b}{b} = \frac{31}{4}$$

उदा. (3) जर $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तर $\frac{a+2b}{a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I : समजा $a = 7m, b = 3m$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a+2b}{a-2b} &= \frac{7m+2 \times 3m}{7m-2 \times 3m} \\ &= \frac{7m+6m}{7m-6m} \\ &= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}\end{aligned}$$

रीत II : $\therefore \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a}{2b} &= \frac{7}{6} \dots\dots \text{दोन्ही बाजूंना } \frac{1}{2} \text{ ने गुणून} \\ \therefore \frac{a+2b}{a-2b} &= \frac{7+6}{7-6} \text{ (योग-वियोग क्रिया करून)} \\ \therefore \frac{a+2b}{a-2b} &= \frac{13}{1}\end{aligned}$$

उदा (4) जर $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ तर $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I

$$\begin{aligned}\frac{a}{3} &= \frac{b}{2} \\ \therefore \frac{a}{b} &= \frac{3}{2} \dots\dots\dots \text{एकांतर क्रियेने} \\ \text{आता } \frac{5a+3b}{7a-2b} &\text{ च्या प्रत्येक पदास } b \text{ ने भागून.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{5a}{b} + \frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b} - \frac{2b}{b}} &= \frac{5\left(\frac{a}{b}\right) + 3}{7\left(\frac{a}{b}\right) - 2} \\ &= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right) + 3}{7\left(\frac{3}{2}\right) - 2} \\ &= \frac{\frac{15}{2} + 3}{\frac{21}{2} - 2} \\ &= \frac{15+6}{21-4} \\ &= \frac{21}{17}\end{aligned}$$

रीत II

$$\begin{aligned}\frac{a}{3} &= \frac{b}{2} \\ \therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2} &= t \text{ मानू.} \\ \therefore a = 3t \text{ व } b = 2t &\text{ या किमती ठेवून.} \\ \frac{5a+3b}{7a-2b} &= \frac{5(3t) + 3(2t)}{7(3t) - 2(2t)} \quad (t \neq 0) \\ &= \frac{15t + 6t}{21t - 4t} \\ &= \frac{21t}{17t} \\ &= \frac{21}{17}\end{aligned}$$

उदा (5) जर $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ तर $\frac{4x-y}{4x+y}$ ची किंमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \quad \dots(\text{दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून})$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \quad \dots(\text{योग-वियोग क्रिया करून})$$

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$

उदा (6) जर $5x = 4y$ तर $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ ची किंमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \quad \dots(\text{दोन्ही बाजूंस 3 ने गुणून})$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \quad \dots(\text{योग-वियोग क्रिया करून})$$

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$



जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांच्या गुणधर्माचा उपयोग (Use of equal ratios)

काही समीकरणे सोडवण्यासाठी इतर पद्धतीपेक्षा समान गुणोत्तरांवरील क्रियांचा उपयोग करणे सोईचे असते.

उदा (1) समीकरण सोडवा. $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

उकल : $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14} = \frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} \quad (\text{दोन्ही बाजूंस 2 ने गुणून})$$

$$\frac{(6x^2 + 10x + 14) - (10x + 14)}{10x + 14} = \frac{(6x^2 + 8x + 6) - (8x + 6)}{8x + 6} \quad (\text{वियोग क्रिया करून})$$

$$\therefore \frac{6x^2}{10x + 14} = \frac{6x^2}{8x + 6}$$

हे समीकरण $x = 0$ या किमतीसाठी सत्य आहे. $\therefore x = 0$ ही एक उकल आहे.

जर $x \neq 0$ तर $x^2 \neq 0$, $\therefore 6x^2$ ने भागून,

$$\frac{1}{10x + 14} = \frac{1}{8x + 6}$$

$$\therefore 8x + 6 = 10x + 14$$

$$\therefore 6 - 14 = 10x - 8x$$

$$\therefore -8 = 2x$$

$$\therefore x = -4$$

$\therefore x = -4$ किंवा $x = 0$ या दिलेल्या समीकरणाच्या उकली आहेत.

उदा (2) सोडवा $\frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2}} = \frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}) + (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2}) - (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2})} = \frac{5+1}{5-1} \quad (\text{योग-वियोग क्रिया करून})$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}} = \frac{3}{2} \quad (\text{दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून})$$

$$\therefore \frac{x+7}{x-2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore 4x + 28 = 9x - 18$$

$$\therefore 28 + 18 = 9x - 4x$$

$$\therefore 46 = 5x$$

$$\therefore \frac{46}{5} = x$$

$$\therefore x = \frac{46}{5} \text{ ही समीकरणाची उकल आहे.}$$

कृती

जाड कागदाचे पाच तुकडे घ्या. प्रत्येक कागदावर खालीलपैकी एक एक विधान लिहा.

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$

a, b, c, d या धनसंख्या आहेत आणि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ही माहिती दिली आहे. वरीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य की असत्य आहे हे कार्डाच्या मागे लिहा. विधान असत्य असल्यास त्याचे कारण लिहा.

सरावसंच 4.3

(1) जर $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती काढा.

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) जर $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती ठरवा.

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) जर $\frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3}$ तर $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

(4) पुढील समीकरणे सोडवा.

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$

(ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$

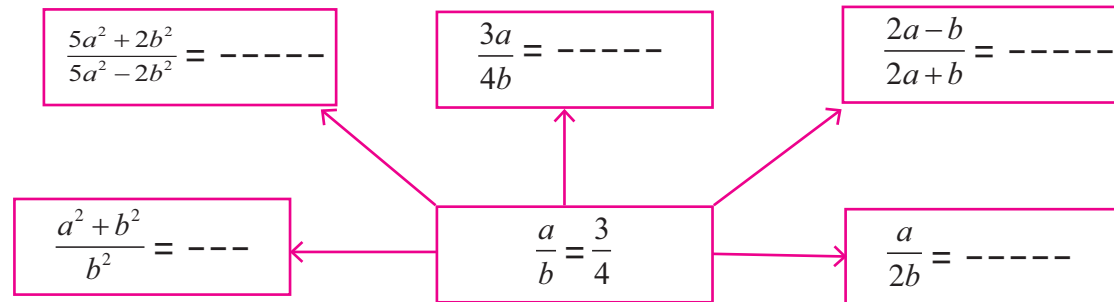
(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$

(iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$

(vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$

कृती : खाली दिलेल्या मधल्या चौकटीतील a आणि b च्या किमती बदलून, म्हणजे $a : b$ चे गुणोत्तर बदलून वेगवेगळी उदाहरणे तयार करता येतील. तसे बदल करून शिक्षकांनी भरपूर सराव द्यावा.





जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत (Theorem on equal ratios)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ या गुणधर्माला समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत म्हणतात.

सिद्धता : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू. $\therefore a = bk$ आणि $c = dk$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

आपल्याला माहीत आहे की, $\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$

$$\therefore \text{जर } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k, \text{ तर } \frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k$$

याच पद्धतीने विचार करून जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ (सांत पदे) आणि जर l, m, n या शून्येतर संख्या

असतील तर प्रत्येक गुणोत्तर $= \frac{al+cm+en+\dots}{bl+dm+fn+\dots}$ (सांत पदे) हे समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचे

सामान्य रूप मिळते.



विचार करूया.

एका व्यायामशाळेत शिशुगटात 35 मुली व 42 मुलगे, बालगटात 30 मुली व 36 मुलगे आणि तरुण गटात 20 मुली व 24 मुलगे आहेत. तर प्रत्येक गटातील मुलींची संख्या आणि मुलगांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

सांघिक कवायतीसाठी तिन्ही गट मैदानावर एकत्र केले. आता एकत्र झालेल्या समूहातील मुलींची संख्या व मुलगांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

वरील प्रश्नांच्या उत्तरातून तुम्हांला समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचा पडताळा आला का ?

उदा (1) खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

$$(i) \frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\dots\dots\dots} \quad (ii) \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\dots\dots\dots}$$

उकल : (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4 \times 3 + 9 \times 7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$

$$(ii) \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5 \times x}{5 \times 3} = \frac{-3 \times y}{-3 \times 5} = \frac{4 \times z}{4 \times 4}$$

$$\therefore = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

----- (समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांतावरून)

उदा (2) जर $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)}$ आणि $x + y + z \neq 0$ तर

प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ हे दाखवा.

उकल : $\frac{a}{(x-2y+3z)} = \frac{b}{(y-2z+3x)} = \frac{c}{(z-2x+3y)} = k$ मानू.

∴ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$\begin{aligned} k &= \frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)} \\ &= \frac{a+b+c}{2x+2y+2z} \\ &= \frac{a+b+c}{2(x+y+z)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{x-2y+3z} = \frac{b}{y-2z+3x} = \frac{c}{z-2x+3y} = \frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

उदा (3) जर $\frac{y}{b+c-a} = \frac{z}{c+a-b} = \frac{x}{a+b-c}$ तर $\frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$ हे सिद्ध करा.

उकल : प्रथम दिलेल्या समान गुणोत्तरांमध्ये व्यस्त क्रिया करून

$$\frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x}$$

$$\text{आता } \frac{b+c-a}{y} = \frac{c+a-b}{z} = \frac{a+b-c}{x} = k \text{ मानू.}$$

∴ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$\begin{aligned} k &= \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x} & k &= \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y} & k &= \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z} \\ &= \frac{2a}{z+x} \quad \text{.....(I)} & &= \frac{2b}{x+y} \quad \text{.....(II)} & &= \frac{2c}{y+z} \quad \text{.....(III)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2a}{z+x} = \frac{2b}{x+y} = \frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore \frac{a}{z+x} = \frac{b}{x+y} = \frac{c}{y+z}$$

उदा (4) सोडवा : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{7x-3}{5x+2}$

उकल : उदाहरणाचे निरीक्षण केल्यावर असे दिसते की उजव्या बाजूच्या गुणोत्तरातील पूर्वपदाला व उत्तरपदाला $2x$ ने गुणले तर पहिल्या गुणोत्तरातील प्रत्येकी दोन पदे मिळतात. म्हणून दुसऱ्या गुणोत्तरातील दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणू. परंतु त्याआधी x शून्य नाही हे निश्चित करून घेऊ.

जर $x = 0$ असेल तर $\frac{14x^2 - 6x + 8}{10x^2 + 4x + 7} = \frac{8}{7}$ आणि $\frac{7x - 3}{5x + 2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore \frac{8}{7} = \frac{-3}{2}$ हे विसंगत विधान मिळते.

$\therefore x \neq 0$

\therefore दुसऱ्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणून.

$$\frac{14x^2 - 6x + 8}{10x^2 + 4x + 7} = \frac{2x(7x - 3)}{2x(5x + 2)} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2 - 6x + 8}{10x^2 + 4x + 7} = \frac{14x^2 - 6x}{10x^2 + 4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2 - 6x + 8 - 14x^2 + 6x}{10x^2 + 4x + 7 - 10x^2 - 4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x - 3}{5x + 2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x - 21 = 40x + 16$$

$$\therefore 49x - 40x = 16 + 21$$

$$\therefore 9x = 37 \quad \therefore x = \frac{37}{9}$$

सरावसंच 4.4

(1) पुढील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

$$(i) \frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{\dots\dots} = \frac{7x-9y}{\dots\dots} \quad (ii) \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{6-8+14}$$

(2) $5m - n = 3m + 4n$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा. "

$$(i) \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} \quad (ii) \frac{3m + 4n}{3m - 4n}$$

(3) (i) जर $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ आणि a, b, c पैकी कोणत्याही दोन संख्या समान नाहीत

$$\text{तर } \frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)} \text{ हे दाखवा.}$$

(ii) जर $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत 1 आहे असे दाखवा.

(iii) जर $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{bx+az}{x+z} = \frac{ay+bz}{y+z}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{a+b}{2}$ आहे, हे सिद्ध करा.

(iv) जर $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$ तर $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ हे दाखवा.

(v) जर $\frac{3x-5y}{5z+3y} = \frac{x+5z}{y-5x} = \frac{y-z}{x-z}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{x}{y}$ एवढे आहे हे दाखवा.

(4) सोडवा. (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \frac{y+8}{1+2y}$



जाणून घेऊया.

परंपरित प्रमाण (Continued Proportion)

पुढील गुणोत्तरे विचारात घ्या. 4:12 आणि 12:36 ही गुणोत्तरे समान आहेत. या दोन प्रमाणांतील पहिल्याचे उत्तरपद आणि दुसऱ्याचे पूर्व पद समान आहे. म्हणून 4, 12, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जेव्हा $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ तेव्हा a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जर $ac = b^2$, तर दोन्ही बाजूंना bc ने भागून $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ हे समीकरण मिळते.

$\therefore ac = b^2$ असेल, तर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात.

जेव्हा a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात तेव्हा b ला a आणि c यांचा 'भूमितीय मध्य' (Geometric mean) किंवा 'मध्यम प्रमाण पद' (Mean proportional) म्हणतात.

यावरून लक्षात घ्या, की खालील सर्व विधाने समान अर्थाची आहेत.

\therefore (1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत.

(4) b हा a व c यांचा भूमितीयमध्य आहे. (5) b हे a व c चे मध्यम प्रमाणपद आहे.

परंपरित प्रमाणाची संकल्पनासुद्धा विस्तारित करता येते.

जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f}$ तर a, b, c, d, e आणि f या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत, असे म्हणतात.

उदा (1) x ही संख्या 25 व 4 यांचा भूमितीयमध्य आहे तर x ची किंमत काढा.

उकल : x हा 25 व 4 यांचा भूमितीयमध्य आहे.

$$\therefore x^2 = 25 \times 4$$

$$\therefore x^2 = 100$$

$$\therefore x = 10$$

उदा (2) जर $4a^2b$, $8ab^2$, p परंपरित प्रमाणात असतील तर p ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या माहितीवरून $4a^2b$, $8ab^2$, p परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

उदा (3) 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून कोणती संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

उकल : 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून x ही संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात येतील असे मानू.

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ परंपरित प्रमाणात आहेत.

पडताळा

$$\therefore (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$(7-x) = 7 - (-18) = 25$$

$$\therefore 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$(12-x) = 12 - (-18) = 30$$

$$\therefore -24x + 25x = 126 - 144$$

$$(18-x) = 18 - (-18) = 36$$

$$\therefore x = -18$$

$$30^2 = 900 \text{ आणि } 25 \times 36 = 900$$

25, 30, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत.

\therefore 7, 12, 18 मधून -18 वजा केल्यास येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील.

k - पद्धती (k -method)

गुणोत्तरातील k - पद्धती ही समान गुणोत्तरांवरील म्हणजेच प्रमाणावरील काही प्रश्न सोडवण्याची एक सोपी रीत आहे. या रीतीमध्ये दिलेल्या समान गुणोत्तरांपैकी प्रत्येकाची किंमत k मानतात.

उदा (1) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर दाखवा की $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू $\therefore a = bk$, $c = dk$

a आणि c च्या किमती दोन्ही बाजूंत ठेवून.

$$\text{डावी बाजू} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{उजवी बाजू} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

\therefore डावी बाजू = उजवी बाजू.

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

उदा (2) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उकल : a, b, c हे परंपरित प्रमाणात आहेत. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ मानू.

$$\therefore b = ck, a = bk = ck \times k = ck^2$$

a आणि b च्या किमती घालून

$$\text{डावी बाजू} = \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2 + ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\text{उजवी बाजू} = \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck + c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\therefore \text{डावी बाजू} = \text{उजवी बाजू.} \quad \therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$$

उदा (3) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील,

$$\text{तर सिद्ध करा } \frac{a}{c} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2 + bc + c^2}$$

उकल : a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत. $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$$\text{समजा, } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \quad \therefore b = ck \text{ आणि } a = ck^2$$

$$\text{डावी बाजू} = \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$$

$$\begin{aligned} \text{उजवी बाजू} &= \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2 + bc + c^2} \\ &= \frac{(k^2c)^2 + k^2c(ck) + (ck)^2}{(ck)^2 + (ck)(c) + c^2} \\ &= \frac{k^4c^2 + k^3c^2 + c^2k^2}{c^2k^2 + c^2k + c^2} \\ &= \frac{c^2k^2(k^2 + k + 1)}{c^2(k^2 + k + 1)} \\ &= k^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{डावी बाजू} = \text{उजवी बाजू}$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2 + bc + c^2}$$

उदा (4) पाच संख्या परंपरित प्रमाणात असून पहिले पद 5 व शेवटचे पद 80 आहे. तर त्या संख्या काढा.

उकल : समजा, परंपरित प्रमाण असलेल्या पाच संख्या a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 आहेत.

$$\text{येथे } a = 5 \text{ आणि } ak^4 = 80$$

$$\therefore 5 \times k^4 = 80$$

$$\therefore k^4 = 16$$

$$\therefore k = 2 \quad \because 2^4 = 16$$

$$ak = 5 \times 2 = 10 \quad ak^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \quad ak^4 = 5 \times 16 = 80$$

\therefore त्या संख्या 5, 10, 20, 40, 80 आहेत.

सरावसंच 4.5

- (1) 12, 16 आणि 21 या प्रत्येक संख्येत कोणती संख्या मिळवली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?
- (2) $(23-x)$ व $(19-x)$ यांचे $(28-x)$ हे मध्यम प्रमाणपद आहे, तर x ची किंमत काढा.
- (3) तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. त्यांचे मध्यम प्रमाणपद 12 असून उरलेल्या दोन संख्यांची बेरीज 26 आहे, तर त्या संख्या काढा.
- (4) जर $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ तर a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत हे दाखवा.
- (5) जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ आणि $a, b, c > 0$ तर सिद्ध करा की,
 - (i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$
 - (ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$
 - (iii) $\frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a + c}{b}$
- (6) $\frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2}$ यांतील मध्यम प्रमाणपद काढा.

कृती : भूगोलाच्या पुस्तकातील भारताचा राजकीय नकाशा पाहा. त्यात दिलेले अंतराचे प्रमाण लक्षात घ्या. त्यावरून वेगवेगळ्या शहरांतील सरळ रेषेतील अंतरे काढा.

जसे, (i) नवी दिल्ली ते बंगळुरू (ii) मुंबई ते कोलकता (iii) जयपूर ते भुवनेश्वर

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

- (1) खालील प्रश्नांसाठी बहुपर्यायी उत्तरांतील अचूक पर्याय निवडा.
 - (i) जर $6 : 5 = y : 20$ तर y ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?
 (A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5
 - (ii) 1 मिलिमीटरचे 1 सेंटिमीटरशी असलेले गुणोत्तर खालीलपैकी कोणते ?
 (A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1
 - (iii*) जतीन, नितीन व मोहसीन यांची वये अनुक्रमे 16, 24 व 36 वर्षे आहेत, तर नितीनच्या वयाचे मोहसीनच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर कोणते ?
 (A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

- (iv) शुभम व अनिल यांना 3 : 5 या प्रमाणात 24 केळी वाटली, तर शुभमला मिळालेली केळी किती ?
 (A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9
- (v) 4 व 25 यांचे मध्यम प्रमाणपद खालीलपैकी कोणते ?
 (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12
- (2) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.
 (i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133
- (3) पुढील गुणोत्तरे संक्षिप्त रूपात लिहा.
 (i) वर्तुळाची त्रिज्या व व्यास यांचे गुणोत्तर.
 (ii) आयताची लांबी 4 सेमी व रुंदी 3 सेमी असल्यास आयताच्या कर्णाचे लांबीशी असलेले गुणोत्तर.
 (iii) चौरसाची बाजू 4 सेमी असल्यास चौरसाच्या परिमितीचे त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.
- (4) पुढील संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.
 (i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8
- (5) a, b, c या तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. जर $a = 3$ आणि $c = 27$ असेल तर $b =$ किती ?
- (6) पुढील गुणोत्तरांचे शतमान रूपांतर करा.
 (i) $37 : 500$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$
- (7) पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.
 (i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]
 (ii) 17 रुपये, 25 रुपये 60 पैसे (iii) 5 डझन, 120 नग
 (iv) 4 चौमी, 800 चौसेमी (v) 1.5 किग्रॅ, 2500 ग्रॅम
- (8) जर $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा.
 (i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$
 (iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$
- (9) a, b, c, d प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.
 (i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$
 (ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$
 (iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.

$$(i) \frac{a}{a+2b} = \frac{a-2b}{a-4c} \quad (ii) \frac{b}{b+c} = \frac{a-b}{a-c}$$

$$(11) \text{ सोडवा : } \frac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58} = \frac{2x+3}{3x+2}$$

$$(12) \text{ जर } \frac{2x-3y}{3z+y} = \frac{z-y}{z-x} = \frac{x+3z}{2y-3x} \text{ तर प्रत्येक गुणोत्तर } \frac{x}{y} \text{ आहे, हे सिद्ध करा.}$$

$$(13^*) \text{ जर } \frac{by+cz}{b^2+c^2} = \frac{cz+ax}{c^2+a^2} = \frac{ax+by}{a^2+b^2} \text{ तर } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ हे सिद्ध करा.}$$

