3 घातांक व घनमूळ

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण घातांकांचा व त्यांच्या नियमांचा अभ्यास केला आहे.

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ही गुणाकार रूपातील संख्या थोडक्यात आपण 2^5 अशी लिहितो.

  येथे 2 हा पाया व 5 हा घातांक आहे. 2^5 ही घातांकित संख्या आहे.

- घातांकाचे नियम : m व n या पूर्णांक संख्या असतील, तर

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

  (v) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

- घातांकांचे नियम वापरून खालील उदाहरणांतील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

  (i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

  (iv) $5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

  (vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$

जाणून घेऊया.

घातांक परिमेय असलेल्या संख्यांचा अर्थ (The number with rational index)

(I) संख्येचा घातांक $\frac{1}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल अशा संख्यांचा अर्थ.

संख्येचा घातांक $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल तर त्या संख्येचा अर्थ पाहू.

एखाद्या संख्येचा वर्ग दाखवण्यासाठी तिचा घातांक 2 लिहितात आणि संख्येचे वर्गमूळ दाखवण्यासाठी तिचा घातांक $\frac{1}{2}$ लिहितात.

उदाहरणार्थ, 25 चे वर्गमूळ $\sqrt{\ }$ हे करणी चिन्ह वापरून आपण $\sqrt{25}$ असे लिहितो. घातांक वापरून ती संख्या $25^{\frac{1}{2}}$ अशी लिहितात. म्हणजे $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

साधारणपणे a या संख्येचा वर्ग a^2 असा लिहितात तर a चे वर्गमूळ $\sqrt[2]{a}$ असे किंवा $\sqrt{a}$ किंवा $a^{\frac{1}{2}}$ असे लिहितात.

याचप्रमाणे a या संख्येचा घन a^3 असा लिहितात तर a चे घनमूळ $\sqrt[3]{a}$ असे किंवा $a^{\frac{1}{3}}$ असे लिहितात.

जसे, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

$\therefore$ 64 चे घनमूळ $\sqrt[3]{64}$ किंवा $(64)^{\frac{1}{3}}$ असे लिहितात. लक्षात घ्या की, $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$. म्हणजे 3 चा 5 वा घात 243 आहे.

याउलट 243 चे पाचवे मूळ हे $(243)^{\frac{1}{5}}$ असे किंवा $\sqrt[5]{243}$ असे लिहितात. $\therefore$ $(243)^{\frac{1}{5}} = 3$

सामान्यपणे a चे n वे मूळ $a^{\frac{1}{n}}$ असे लिहितात.

उदाहरणार्थ, (i) $128^{\frac{1}{7}}$ =128 चे 7 वे मूळ, (ii) $900^{\frac{1}{12}}$ = 900 चे 12 वे मूळ, इत्यादी.

लक्षात घ्या की $10^{\frac{1}{5}} = x$ ही संख्या असेल तर $x^5 = 10$.

सरावसंच 3.1

1. घातांक वापरून पुढील संख्या लिहा.

(1) 13 चे पाचवे मूळ (2) 9 चे सहावे मूळ (3) 256 चे वर्गमूळ

(4) 17 चे घनमूळ (5) 100 चे आठवे मूळ (6) 30 चे सातवे मूळ

2. खालील घातांकित संख्या कोणत्या संख्येचे कितवे मूळ आहे ते लिहा.

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(II) संख्येचा घातांक $\frac{m}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल, अशा संख्यांचा अर्थ.

आपल्याला माहीत आहे की $8^2 = 64$,

64 चे घनमूळ = $(64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

$\therefore$ 8 च्या वर्गाचे घनमूळ = 4 .... (I)

तसेच, 8 चे घनमूळ = $8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 च्या घनमुळाचा वर्ग $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ....(II)

(I) व (II) वरून

8 च्या वर्गाचे घनमूळ = 8 च्या घनमुळाचा वर्ग; म्हणजेच, $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ हे लक्षात येते.

घातांक पूर्णांक संख्या असतानाचे घातांकांचे जे नियम आहेत, तेच नियम घातांक परिमेय असणाऱ्या संख्यांसाठी आहेत. $\therefore$ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ हा नियम वापरून $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

यावरून $8^{\frac{2}{3}}$ या संख्येचा अर्थ दोन प्रकारे लावता येतो.

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}}$ = 8 च्या वर्गाचे घनमूळ. (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = 8 च्या घनमुळाचा वर्ग.

त्याचप्रमाणे $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^4\right)^{\frac{1}{5}}$ म्हणजे '27 च्या चौथ्या घाताचे पाचवे मूळ',

आणि $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ म्हणजे '27 च्या पाचव्या मुळाचा चौथा घात' असे दोन अर्थ होतात.

सामान्यपणे $a^{\frac{m}{n}}$ या संख्येचा अर्थ दोन प्रकारे व्यक्त करता येतो.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ म्हणजे a च्या m व्या घाताचे n वे मूळ किंवा

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ म्हणजे a च्या n व्या मुळाचा m वा घात.

सरावसंच 3.2

1. खालील सारणी पूर्ण करा.

क्र.	संख्या	कितव्या मुळाचा कितवा घात	कितव्या घाताचे कितवे मूळ
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 च्या वर्गमुळाचा घन	225 च्या घनाचे वर्गमूळ
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. परिमेय घातांक रूपात व्यक्त करा.

(1) 121 च्या पाचव्या घाताचे वर्गमूळ

(2) 324 च्या चौथ्या मुळाचा घन

(3) 264 च्या वर्गाचे पाचवे मूळ

(4) 3 च्या घनमुळाचा घन

जरा आठवूया.

- $4 \times 4 = 16$ म्हणजेच $4^2 = 16$, तसेच $(-4) \times (-4)$ म्हणजेच $(-4)^2 = 16$ यावरून 16 या संख्येला एक धन आणि दुसरे ऋण, अशी दोन वर्गमुळे आहेत. संकेतानुसार 16 चे धन वर्गमूळ $\sqrt{16}$ असे, तर 16 चे ऋण वर्गमूळ $-\sqrt{16}$ असे दर्शवतात. $\sqrt{16} = 4$ आणि $-\sqrt{16} = -4$.
- प्रत्येक धन संख्येला दोन वर्गमुळे असतात.
- शून्य या संख्येचे वर्गमूळ शून्यच असते.

जाणून घेऊया.

घन व घनमूळ (Cube and Cube Root)

एखादी संख्या तीन वेळा घेऊन गुणाकार केल्यास येणारा गुणाकार हा त्या संख्येचा घन असतो. उदाहरणार्थ, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$. म्हणजे 216 ही संख्या 6 चा घन आहे.

परिमेय संख्यांचा घन करणे.

उदा. (1) 17 चा घन करा.

$17^3 = 17 \times 17 \times 17$

$= 4913$

उदा. (2) (-6) चा घन करा.

$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

$= -216$

उदा. (3) $\left(-\frac{2}{5}\right)$ चा घन करा.

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

$= -\frac{8}{125}$

उदा. (4) (1.2) चा घन करा.

$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$

$= 1.728$

उदा. (5) (0.02) चा घन करा.

$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$

$= 0.000008$

जरा डोके चालवा

उदा (1) मध्ये 17 ही धन संख्या आहे. त्या संख्येचा घन 4913 हाही धन आहे.

उदा (2) मध्ये -6 या संख्येचा घन -216 आहे. आणखी काही धन व ऋण संख्या घेऊन त्यांचे घन करून पाहा. त्यावरून संख्येचे चिन्ह आणि त्या संख्येच्या घनाचे चिन्ह यांत कोणता संबंध आढळतो हे शोधा.

उदा (4) व (5) मध्ये दिलेल्या संख्यांतील दशांश चिन्हानंतर येणाऱ्या अंकांची संख्या आणि त्या संख्यांच्या घनामध्ये येणाऱ्या दशांश चिन्हानंतरच्या अंकांची संख्या यांमध्ये कोणता संबंध आढळतो ?

घनमूळ काढणे

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयव पद्धतीने वर्गमूळ कसे काढायचे हे आपण पाहिले आहे. त्याच पद्धतीने आपण घनमूळ काढू.

उदा. (1) 216 चे घनमूळ काढा.

उकल : प्रथम 216 चे मूळ अवयव पाडू. $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 व 2 हे अवयव प्रत्येकी 3 वेळा आले आहेत. म्हणून ते एकेकदा घेऊन पुढीलप्रमाणे गट पाडू.

$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \quad = (3 \times 2)^3 = 6^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ म्हणजेच $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

उदा. (2) -1331 चे घनमूळ काढा.

उकल : -1331 चे घनमूळ काढण्यासाठी प्रथम 1331 चे मूळ अवयव काढू.

$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$

$$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11) = (-11)^3$$

$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$

उदा.(4) $\sqrt[3]{0.125}$ काढा.

उकल : $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$$

$$= \frac{5}{10} = 0.5$$

उदा.(3) 1728 चे घनमूळ काढा.

उकल : $1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3$ .... $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$ (लक्षात घ्या की, -1728 चे घनमूळ -12 येते.)

सरावसंच 3.3

1. खालील संख्यांची घनमुळे काढा.

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. घनमूळ काढा. (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. जर $\sqrt[3]{729} = 9$ तर $\sqrt[3]{0.000729}$ = किती ?

उत्तरसूची

सरावसंच 3.1 (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 चे चौथे मूळ (2) 49 चे वर्गमूळ (3) 15 चे पाचवे मूळ (4) 512 चे नववे मूळ (5) 100 चे एकोणीसावे मूळ (6) 6 चे सातवे मूळ

सरावसंच 3.2 1. (2) 45 च्या पाचव्या मुळाचा चौथा घात, 45 च्या चौथ्या घाताचे पाचवे मूळ

(3) 81 च्या सातव्या मुळाचा सहावा घात, 81 च्या सहाव्या घाताचे सातवे मूळ

(4) 100 च्या दहाव्या मुळाचा चौथा घात, 100 च्या चौथ्या घाताचे दहावे मूळ

(5) 21 च्या सातव्या मुळाचा तिसरा घात, 21 च्या तिसऱ्या घाताचे सातवे मूळ

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

सरावसंच 3.3 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ 3. 0.09