Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский Авиационный Институт»

(Национальный Исследовательский Университет)

Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Курсовой проект

по курсу «Вычислительные системы»

1 семестр

Задание 4

Процедуры и функции в качестве параметров

Выполнил: Алиев Р.М

Группа: М8О-104Б-22

Руководитель: Потенко М.А.

Оценка:

Дата: 15.12.2022

Подпись:

Москва, 2022

Содержание

Введение 3
Теоретическая часть 3
  Метод дихотомии (половинного деления) 3
  Метод итераций 4
  Метод Ньютона 5
Практическая часть 6
  Задание 6
  Вариант 6
  Графики функций и их производных 7
  Функция из варианта 7 7
  Функция из варианта 6 9
  Использованные переменные и функции 10
  Протокол 11
  Выходные данные 16
Вывод 17
Источники 17

ЗАДАНИЕ №4

Введение

Нахождение корней трансцендентных уравнений является зачастую достаточно сложной задачей, не решаемой аналитически с помощью конечных формул. Кроме того, иногда на практике уравнение содержит коэффициенты, значения которых заданы приблизительно, так что говорить о точном решении уравнений в таких случаях не стоит, поэтому задачи приближенного определения корней уравнения и соответствующей оценки их точности имеют большое значение.

В ходе выполнения работы необходимо составить программу на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итераций, Ньютона и половинного деления – дихотомии). Применить каждую процедуру к решению двух уравнений.

Теоретическая часть

Метод дихотомии (половинного деления)

Если на отрезке [a, b] существует корень уравнения, то значения функции на концах отрезка имеют разные знаки: F(a)*F(b)<0. Метод заключается в делении отрезка пополам и его сужении в два раза на каждом шаге итерационного процесса в зависимости от знака функции в середине отрезка.

Итерационный процесс строится следующим образом: за начальное приближение принимаются границы исходного отрезка $a^{(0)} = a,\ b^{(0)} = b$.

Далее вычисления проводятся по формулам:

$$a^{(k+1)} = \frac{(a^{(k)}+b^{(k)})}{2}, b^{(k+1)} = b^{(k)},\ \text{если}\ \ F\left(a^{(k)}\right)\cdot F\left(\frac{(a^{(k)}+b^{(k)})}{2}\right) > 0;$$

$$a^{(k+1)} = a^{(k)},\ b^{(k+1)} = \frac{(a^{(k)}+b^{(k)})}{2}, \text{если}\ F\left(b^{(k)}\right)\cdot F\left(\frac{(a^{(k)}+b^{(k)})}{2}\right) > 0.$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие окончания:

$$\left|a^{(k)} - b^{(k)} < \varepsilon\right|$$

Приближенное значение корня к моменту окончания итерационного процесса получается следующим образом:

$$x^* \approx \frac{a^{(\text{конечное})}+b^{(\text{конечное})}}{2}$$

Иллюстрация метода дихотомии:

Метод итераций

Идея метода заключается в замене исходного уравнения f(x) = 0 уравнением вида x = f(x).

Достаточное условие сходимости метода |f'(x)| < 1, x ∈ [a, b]. Это условие необходимо проверить перед началом решения задачи, так как функция f(x) может быть выбрана неоднозначно, причем в случае неверного выбора указанной функции метод расходится.

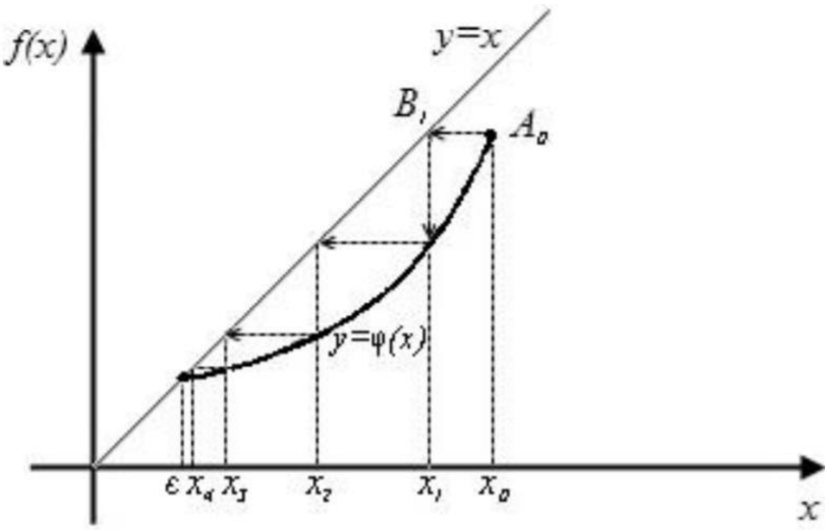
Начальное приближение корня: $x^{(0)} = \frac{a+b}{2}$ (середина исходного отрезка).

Итерационный процесс: $x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$.

Условие окончания: $\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| < \varepsilon$.

Приближенное значение корня: $x^* \approx x^{(\text{конечное})}$.

Иллюстрация метода итераций:



Метод Ньютона

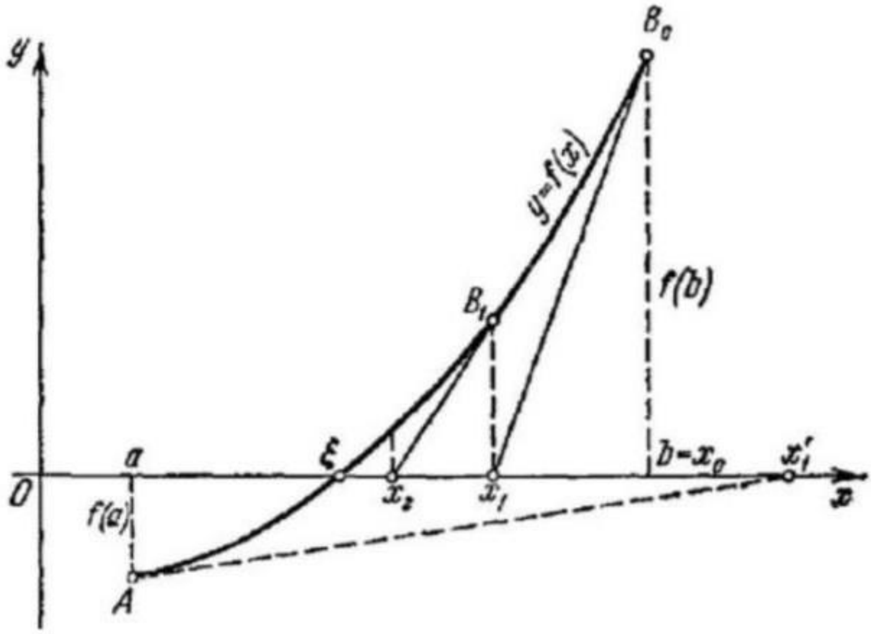
Метод Ньютона является частным случаем метода итераций.

Условие сходимости метода: $|f(x) \cdot f''(x)| < (f'(x))^2$ на отрезке [a, b].

Итерационный процесс:

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k)} - F(x^{(k)})}{F\prime(x^{(k)})}$$

Иллюстрация метода Ньютона:



Практическая часть

Задание

Составить программу на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итераций, Ньютона и половинного деления – дихотомии). Нелинейные уравнения оформить как параметры-функции, разрешив относительно неизвестной величины в случае необходимости. Применить каждую процедуру к решению двух уравнений, заданных двумя строками таблицы, начиная с варианта с заданным номером. Если метод неприменим, дать математическое обоснование и графическую иллюстрацию.

Вариант

6	$x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0$	[0.5, 1]	итераций	0.9892
7	$3\ln^2 x + 6\ln x - 5 = 0$	[1, 3]	Ньютона	1.8832

Графики функций и их производных

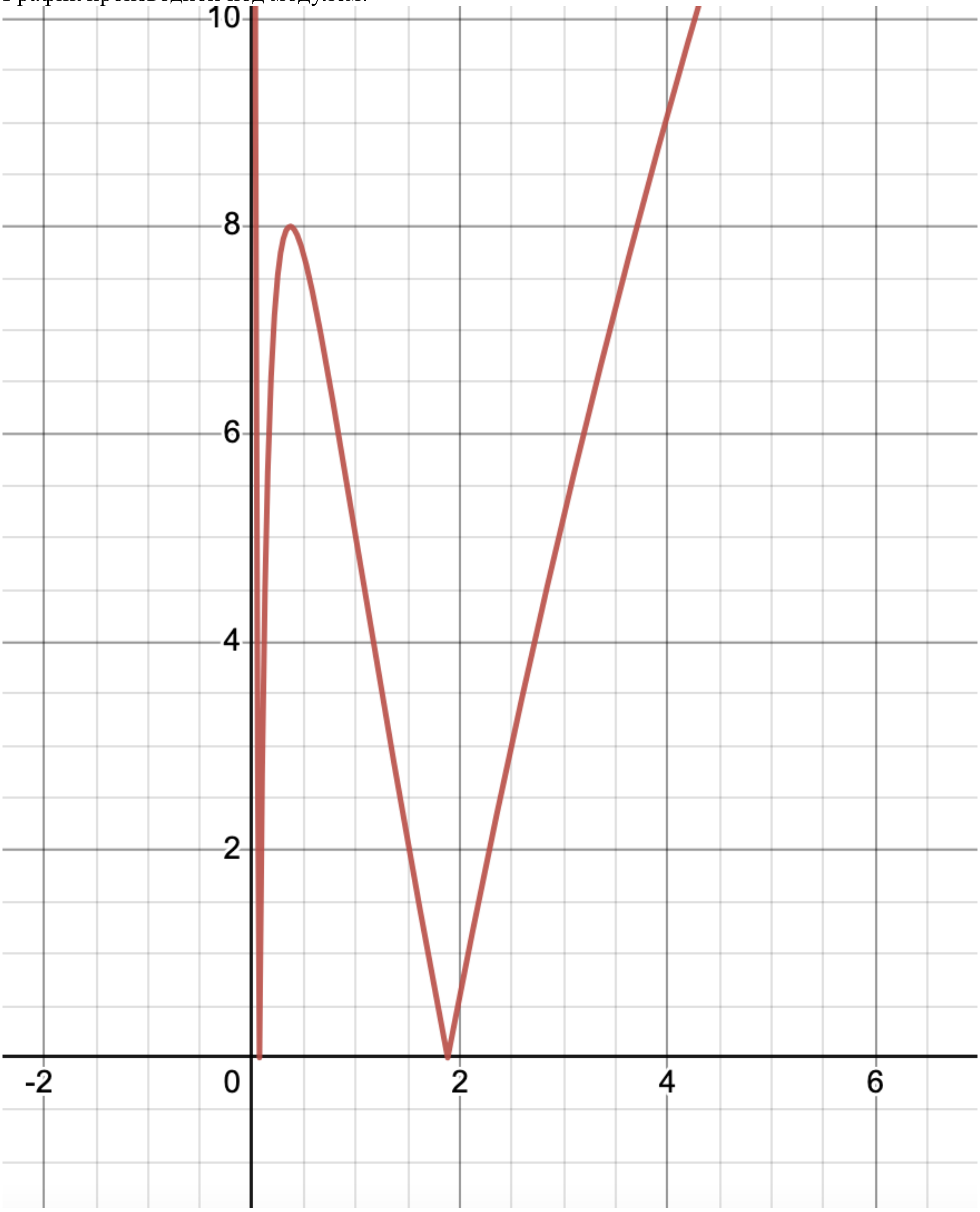
Функция из варианта 7

7	$3\ln^2 x + 6\ln x - 5 = 0$	$[1, 3]$

График функции:

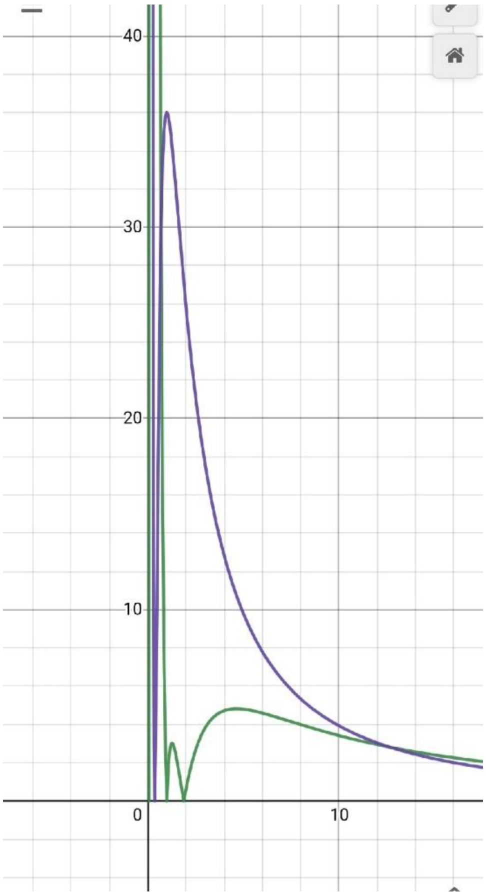
$$F'(x) = (3\ln^2 x + 6\ln x - 5)' = \frac{6\ln x + 6}{x}$$

График производной под модулем:



$$F''(x) = \left(\frac{6\ln x + 6}{x}\right)' = -\frac{6\ln x}{x^2}$$

$|f(x) \cdot f''(x)| < f'(x)^2$ на отрезке $[1, 3]$

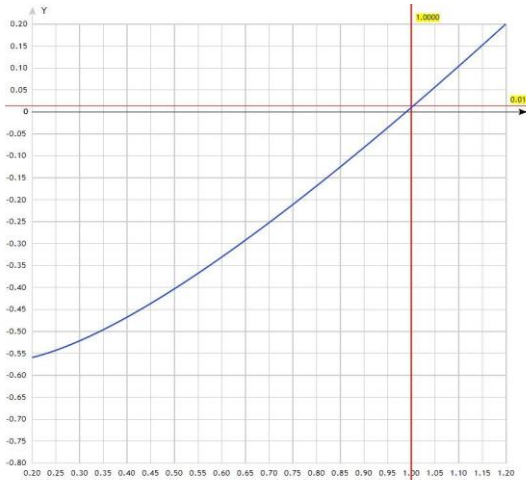


(фиолетовым - $f'(x)^2$, зелёным - $f(x) \cdot f''(x)$)
Условия сходимости выполняется.

Функция из варианта 6

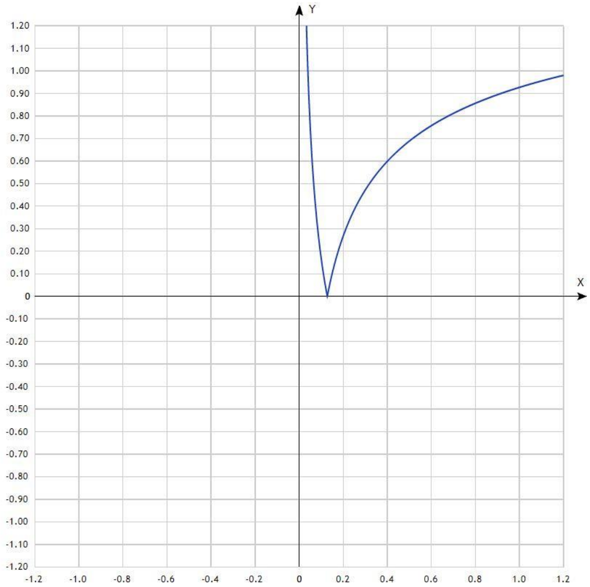
Функция	Отрезок, содержащий корень
$F(x) = x + \cos(x^{0,52} + 2)$	[0.5, 1]

График функции:

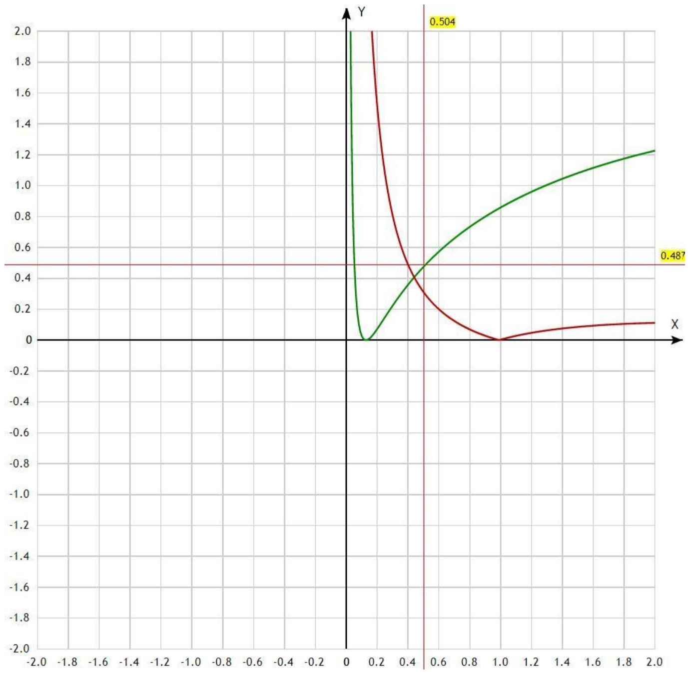


$$F'(x) = -\frac{0.52 \cdot sin((x^{0.52})+2)}{x^{0.48}} + 1$$

График производной под модулем:



Условие $|f'(x)| < 1$ выполняется на всём отрезке [0.5, 1], следовательно, условие сходимости метода итераций выполнено. Графики $|f(x) \cdot f''(x)|$ и $(f'(x))^2$ (красный и зеленый):



Условие $|f(x) \cdot f''(x)| < (f'(x))^2$ выполняется на всём отрезке [0.5, 1], поэтому условие сходимости метода Ньютона выполнено.

Протокол

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

const double eps = 0.000001;

//Функция для первого уравнения
double f2(double x)
{
   return 3 * log(x) * log(x) + 6 * log(x) -5;
}
//Первообразная первого уравнения
double F2(double x)
{
   return exp((5 - 3 * pow(log(x), 2))/6);
}
//Первая производная от первообразной первого уравнения
double Fp2(double x)
{
   return 6*((log(x))/x)+6/x;
}
//Функция для второго уравнения
double f1(double x)
{
   return x + cos(pow(x, 0.52) + 2);
}
//Первообразная второго уравнения
double F1(double x)
{
   return -cos(pow(x, 0.52) + 2);
}
```

```
//Первая производная от первообразной второго уравнения
double Fp1(double x)
{
    return 1 - (13 * sin(pow(x, 0.52) + 2)) / (25 * pow(x, 0.48));
}
//Функция для нахождения корня уравнения с использованием метода дихотомии
double dichotomy(double function(double), double left, double right) {
    double result;
    while (fabs(left - right) > eps) {
        result = (right + left) / 2;
        if (function(left) * function(result) > 0) {
            left = result;
        } else {
            right = result;
        }
    }
    return result;
}

double dabs(double x)
{
    return (x > 0 ? x : -x);
}
//Функция для нахождения корня уравнения с использованием итерационного метода
double iteration(double f(double), double a, double b) {
    double prevX = (a + b) / 2., x = f(prevX);
    while (dabs(x - prevX) > eps) {
        prevX = x;
        x = f(x);
    }
    return x;
}
//Функция для нахождения корня уравнения с использованием метода Ньютона
double newton(double F(double), double F1(double), double a, double b, double eps) {
    double x = (a + b / 2);
    while (fabs(F(x) / F1(x)) > eps) {
        x -= F(x) / F1(x);
    }
    return x;
}

int main() {
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| Уравнение | Отрезок | Метод | Результат |\n");
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 1 | [0.5;1] | Дихотомии | %.10f |\n", dichotomy(f2, 1, 3));
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 1 | [0.5;1] | Ньютона | %.10f |\n", newton(f2, Fp2, 1, 3, eps));
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 1 | [0.5;1] | Итераций | %.10f |\n", iteration(F2, 1, 3));
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 2 | [1;3] | Дихотомии | %.10f |\n", dichotomy(f1, 0.5, 1));
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 2 | [1;3] | Ньютона | %.10f |\n", newton(f1, Fp1, 0.5, 1, eps));
    printf("---------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 2 | [1;3] | Итераций | %.10f |\n", iteration(F1, 0.5, 1));
    printf("---------------------------------------------------\n");
    return 0;
}
```

Результаты работы программы

```
yoonseak@MacBook-Air-Ruslan Cpap % gcc kp4.c -Wall
yoonseak@MacBook-Air-Ruslan Cpap % ./a.out
----------------------------------------------------
| Уравнение | Отрезок | Метод | Результат |
----------------------------------------------------
|         1 | [0.5;1] | Дихотомии | 1.8832387924 |
----------------------------------------------------
|         1 | [0.5;1] | Ньютона | 1.8832389883 |
----------------------------------------------------
|         1 | [0.5;1] | Итераций | 1.8832393103 |
----------------------------------------------------
|         2 | [1;3] | Дихотомии | 0.9891805649 |
----------------------------------------------------
|         2 | [1;3] | Ньютона | 0.9891807350 |
----------------------------------------------------
|         2 | [1;3] | Итераций | 0.9891806553 |
----------------------------------------------------
yoonseak@MacBook-Air-Ruslan Cpap %
```

Вывод

Нахождение корней трансцендентных уравнений является зачастую достаточно сложной задачей, не решаемой аналитически с помощью конечных формул. Кроме того, иногда на практике уравнение содержит коэффициенты, значения которых заданы приблизительно, так что говорить о точном решении уравнений в таких случаях вообще не имеет смысла. Поэтому задачи приближенного определения корней уравнения и соответствующей оценки их точности имеют большое значение.

В курсовом проекте были рассмотрены 3 численных метода решения трансцендентных уравнений – метод дихотомии, метод итераций и метод Ньютона.

Численные методы являются основным инструментом решения современных прикладных задач. Аналитическое решение той или иной задачи в виде отдельных формульных соотношений является скорее исключением, нежели правилом в силу сложного и приближенного характера исследуемых моделей. Вот почему численный анализ математических моделей является в настоящее время актуальным и наиболее эффективным аппаратом конструктивного исследования прикладных проблем.

Источники

- *https://prog-cpp.ru/*
- *http://yotx.ru/ - построение графиков*