Функции многих переменных

Пример. Температура воздуха у поверхности Земли → зависит от широты и долготы, а также от времени. (вообще говоря, ещё и от высоты над уровнем моря).

т. е. $T(\varphi, \lambda, t, (h))$.

Пространство $\mathbb{R}^m$

Опр. $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^m = \{(x^1, \dots, x^m),\ x^i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, m\},$$

т. е. $\mathbb{R}^m$ - множество упорядоченных наборов из m действительных чисел.

Опр. Пусть $x = (x^1, \dots, x^m)$, тогда x^i называется i-ой координатой x

Опр. Пусть $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^m)$ и $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^m)$

Расстоянием между x_1 и x_2 называется число

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + \dots + (x_1^m - x_2^m)^2}.$$

Утв. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$:

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

1) $d(x_1, x_2) \geq 0$
2) $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$
3) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
4) $\forall x_3 \in \mathbb{R}^m$: $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ ← докажите!! („неравенство треугольника")

Замечание. Функция $d(x_1, x_2)$ задаёт метрику на $\mathbb{R}^m$, т. е. $\mathbb{R}^m$ является метрическим пространством

Утв. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m; \ \forall i = 1, 2, \dots m:$

$$|x_1^i - x_2^i| \le d(x_1, x_2) \le \sqrt{m} \max_{i=1,2,\dots,m} |x_1^i - x_2^i|$$

Геометрические интерпретации

1. $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (координаты точки на прямой)
2. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (координаты точки на плоскости)
3. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (координаты точки в пространстве)

Замечание В $\mathbb{R}^m$ можно естественным образом ввести операции сложения и умножения на действительные число, т. е. $\mathbb{R}^m$ также можно рассматривать как линейное пространство.

Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$

Опр Шаром (открытым шаром) в $\mathbb{R}^m$ с центром в $a \in \mathbb{R}^m$ и радиусом $\delta > 0$ называется множество

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m, \ d(a, x) < \delta\}$$

Опр δ-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^m$ называется шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в точке a и радиусом δ.

Опр Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется открытым в $\mathbb{R}^m$ если $\forall x \in G \ \exists \ B(x, \delta) \subset G$.

Пример $\mathbb{R}^m$ - открытое множество в $\mathbb{R}^m$

Пример $\emptyset$ - может считаться открытым в $\mathbb{R}^m$

Пример Шар $B(a, r)$ - открытое множество в $\mathbb{R}^m$ (здесь: $a \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$)

Д-во Пусть $x \in B(a, r) \Rightarrow d(x, a) < r$.

$\forall \delta: \ 0 < \delta < r - d(a, x): \quad B(x; \delta) \subset B(a, r)$. Why??

$$(\xi \in B(x, \delta)) \Rightarrow (d(x, \xi) < \delta) \Rightarrow (d(a, \xi) \le d(a, x) + d(x, \xi) < d(a, x) + r - d(a, x) =$$
$$= r$$

Пример $G = \{x \in \mathbb{R}^m,\ d(a;x) > r,\ a \in \mathbb{R}^m;\ r \geq 0\}$ –

– открытое.

Д-во Также, как предыдущее, только некоторые знаки – обратные

Опр $F \subset \mathbb{R}^m$ называется замкнутым в $\mathbb{R}^m$ если

F' – открытое в $\mathbb{R}^m$

(Remember! $F' = \mathbb{R}^m \setminus F$ – дополнение множества F в $\mathbb{R}^m$)

Пример $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m,\ d(a,x) \leq r,\ a \in \mathbb{R}^m;\ r \in \mathbb{R}\}$

(замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром a и радиусом r) –

– замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$

Утв. 1) Объединение системы открытых в $\mathbb{R}^m$ множеств есть открытое в $\mathbb{R}^m$ множество

(система открытых множеств может быть конечной или бесконечной)

2) Пересечение конечного числа открытых в $\mathbb{R}^m$ множеств есть открытое в $\mathbb{R}^m$ множество.

3) Пересечение системы замкнутых в $\mathbb{R}^m$ множеств есть замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество.

(система замкнутых множеств может быть конечной или бесконечной)

4) Объединение конечного числа замкнутых в $\mathbb{R}^m$ множеств есть замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество

Д-во 1) Пусть $\{G_a,\ a \in A\}$ – система открытых мн-в.

Пусть $x \in \bigcup\limits_{a \in A} G_a \Rightarrow \exists\, a_0 \in A : x \in G_{a_0} \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : B(x,\delta) \subset G_{a_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x,\delta) \subset \bigcup\limits_{a \in A} G_a$.

2) Пусть $\{G_i,\ (i = 1, 2, \dots n)\}$ – конечная система открытых множеств. Пусть $x \in \bigcap\limits_{i=1,\dots,n} G_i$. Тогда $\forall\, i = 1, 2, \dots, n\ \exists\, \delta_i > 0$:

$B(x, \delta_i) \subset G_i$.

Пусть $\delta = \min\limits_{i=1,\dots,n} \delta_i$. Тогда

$\forall i=1,2\dots n$: $B(x,\delta) \subset B(x,\delta_i) \subset G_i' \Rightarrow B(x,\delta) \subset \bigcap\limits_{i=1,\dots n} G_i'$

3) Пусть $\{F_a, a\in A\}$ – система замкнутых мн-в.

Пусть $\forall a\in A$: $G_a' = \mathbb{R}^m \setminus F_a = F_a'$, G_a' – открытое мн-во.

Из 1) $\Rightarrow \bigcup\limits_{a\in A} G_a' \to$ открытое множество, но

$$\bigcap_{a\in A} F_a = \bigcap_{a\in A}(\mathbb{R}^m \setminus G_a') = \mathbb{R}^m \setminus \underbrace{\Big(\bigcup_{a\in A} G_a'\Big)}_{\text{открытое}} \Leftrightarrow \text{замкнутое мн-во}$$

4) Также, как 3) следует из 1), 4) следует из 2).

<u>Замечание</u> Пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть множеством замкнутым.

<u>Пример</u> Пусть $G_\delta' = B(x,\delta)$, $\delta\in\mathbb{R}$, $\delta>0$

$\bigcap\limits_{\delta>0} G_\delta' = \{x\}$, т.е. пересечение всех открытых шаров с центром в $x\in\mathbb{R}^m$ есть множество, состоящее из одной точки x. Очевидно (?) что множество, состоящее из одной точки замкнуто.

<u>Замечание</u> Объединение бесконечного числа замкнутых множеств может быть открытым множеством.

<u>Пример</u> Пусть $F_\delta = \overline{B}(x, 1-\delta)$, $0<\delta<1$. Тогда

$\bigcup\limits_{0<\delta<1} F_\delta = B(x,1)$.

<u>Опр</u> <u>Сферой в $\mathbb{R}^m$</u> с центром в $a\in\mathbb{R}^m$ и радиусом r называется множество $S(a,r) = \{x\in\mathbb{R}^m, d(x,a)=r\}$, $(r>0, r\in\mathbb{R})$

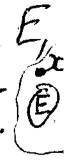
<u>Замечание</u> Сфера является замкнутым множеством, как дополнение к объединению двух открытых множеств.

<u>Опр</u> <u>Окрестностью</u> точки $x\in\mathbb{R}^m$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Замечание δ-окрестность точки x является окрестностью точки x.

Опр. Если точка x принадлежит множеству E вместе с некоторой своей окрестностью, то x называется <u>внутренней точкой</u> множества E. 

Опр. Если в любой окрестности точки x есть как точки множества E, так и точки, не принадлежащие E, то x называется <u>граничной точкой</u> множества E. 

Опр Точка x называется <u>внешней точкой</u> множества E, если она является внутренней точкой дополнения к E. 

Пример $S(a,r)$, $r>0$ есть множество граничных точек для $B(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$ и $S(a,r)$

? Существуют ли множества не имеющие: граничных точек или внутренних точек или внешних точек ??

Опр Точка $x \in \mathbb{R}^m$ называется <u>предельной точкой</u> множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если в любой окрестности точки x содержится бесконечно много точек множества E.

Опр Объединение множества E и множества его предельных точек называется <u>замыканием</u> множества E.
($\overline{E}$ - замыкание E)

Пример $\overline{B}(a,r) \to$ множество предельных точек для $B(a,r)$, т.е. замкнутый шар $\overline{B}(a,r)$ есть замыкание $B(a,r)$

Пример $\overline{S}(a,r) = S(a,r)$

Утв. $(F$ - замкнуто в $\mathbb{R}^m) \Longleftrightarrow (F = \overline{F}$ в $\mathbb{R}^m)$

Д-во Пусть F - замкнуто в $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$, $x \notin F \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \mathbb{R}^m \setminus F$, где $\mathbb{R}^m \setminus F$ - открытое множество, т.е. окрестность точки x, не содержащая точек $F \Rightarrow x$ - внешняя точка F.

Пусть $F = \overline{F}$, $G = \mathbb{R}^m \setminus F$.
Если $x \in G$, то $x \notin \overline{F}$, т.е. x не является предельной точкой множества F. $\Rightarrow$ существует окрестность точки x, содержащая не более чем конечное число точек множества F. Пусть это точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $r = \min\limits_{i=1,2,\ldots n} d(x, x_i)$
Тогда $B(x, r)$ не содержит точек F, т.е. целиком содержится в G $\Rightarrow$ G – открытое мн-во $\Rightarrow$ F – замкнутое мн-во.

Компакты

Опр $K \subset \mathbb{R}^m$ называется компактом, если из любого покрытия K множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$, можно выделить конечное покрытие.
Remember! $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ – компакт в $\mathbb{R}^1$.

Опр Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^m : a^i \le x \le b^i,\ i = 1, \ldots m\}$ $(x = (x^1, \ldots, x^m),\ a^i, b^i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots m)$ называется m-мерным параллелепипедом (другое название – m-мерный промежуток)

Утв. I – компакт в $\mathbb{R}^m$

Теорема Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ является компактом тогда и только тогда, когда K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^m$.
(Опр Множество K называется ограниченным в $\mathbb{R}^m$, если $\exists\, B(a, r)$: $K \subset B(a, r)$) или:
Множество K называется ограниченным в $\mathbb{R}^m$, если $\exists$ m-мерный промежуток I, такой, что $K \subset I$.

Предел

$X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

<u>Опр</u> $\left(\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A,\ A \in \mathbb{R}^n\right) \overset{def}{=} \left(\forall V(A)\ \exists B \in \mathcal{B} : f(B) \subset V(A)\right)$

(здесь: $V(A)$ – окрестность точки A в $\mathbb{R}^n$)

<u>Опр</u> $f: X \to \mathbb{R}^n$ называется <u>ограниченным</u>, если $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$

<u>Опр</u> $f: X \to \mathbb{R}^n$ называется <u>финально ограниченным при базе $\mathcal{B}$</u> если $\exists B \in \mathcal{B}$, такой что f ограничено на B.

<u>Утв.</u> $f: X \to \mathbb{R}^n$ может иметь не более одного предела по $\mathcal{B}$.

<u>Утв.</u> $f: X \to \mathbb{R}^n$, имеющая предел по $\mathcal{B}$, финально ограничена при $\mathcal{B}$.

<u>Вариации определения предела</u>

<u>Опр'</u> $\left(\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A \in \mathbb{R}^n\right) \overset{def}{=} \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ \forall x \in B : d(A, f(x)) < \varepsilon\right)$

<u>Опр''</u> $\left(\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A \in \mathbb{R}^n\right) \overset{def}{=} \left(\lim\limits_{\mathcal{B}} d(A, f(x)) = 0\right)$

$A \in \mathbb{R}^n$, т.е. $A = (A^1, A^2, \dots A^n)$, $A^i \in \mathbb{R}$

<u>Замечание</u> $f: X \to \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} f_i: X \to \mathbb{R} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$,

так, что если $f(x) = y = (y^1, y^2, \dots y^n)$, то $f_i(x) = y^i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Заметим, также, что

$$|y^i - A^i| \le d(y, A) \le \sqrt{n} \max_{i=1,2,\dots,n} |y^i - A^i|$$

Утв. $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{\mathcal{B}} f^i(x) = A^i$, $i = 1, 2, \dots n$

Опр Последовательностью в $\mathbb{R}^n$ называется функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ($\{y_k\}$, $k \in N$, $y_k \in \mathbb{R}^n$)

Опр Последовательность $\{y_k\}$ наз. фундаментальной если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k_1, k_2 > N: d(y_{k_1}, y_{k_2}) < \varepsilon$.

Заметим, что $y_k = (y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^n)$ определяет n числовых последовательностей $\{y_k^i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Замечание ($\{y_k\}$ – фундаментальная) $\Leftrightarrow$ ($\{y_k^i\}$ фундаментальны) $i = 1, 2, \dots n$.

Утв. Последовательность в $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. (критерий Коши для $\mathbb{R}^n$)

Метрические пространства, в которых каждая фундаментальная последовательность имеет предел, называются полными метрическими пространствами.

Т.о., $\mathbb{R}^n$ - полное метрическое пространство.

Опр. Диаметром множества $X \subset \mathbb{R}^m$ называется число

$$d(X) = \sup_{x_1, x_2 \in X} d(x_1, x_2)$$

(очевидно, $d(B(x, r)) = 2r$.)

Диаметром обладают только ограниченные множества.

Опр Колебанием функции $f: X \to \mathbb{R}^n$ на $E \subset X$ называется число:

$$\omega(f, E) = d(f(E))$$

Теорема (критерий Коши) $f: X \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ - база в X.

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B}: \omega(f, B) < \varepsilon$$