Лекция 16

Комбинаторика

Формула включений и исключений

Число элементов множества $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ можно найти по формуле:

$$\#X = \#X_1 + \#X_2 - \#(X_1 \cap X_2),$$

Где обозначение $\#X$ – число элементов множества X.

Теперь рассмотрим множество $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. Тогда формула для нахождения числа элементов множества будет выглядеть следующим образом:

$$\#X = \sum_{i=1}^{n} \#X_i - \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\ldots,n,}} \#\left(X_i \cap X_j\right) + \sum_{\substack{i \neq j \neq k \neq i \\ i,j,k=1,\ldots,n,}} \#\left(X_i \cap X_j \cap X_k\right) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\#(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n). \qquad (*)$$

Докажем эту формулу индукцией по числу подмножеств.

1. Для 2-х подмножеств формула справедлива.
2. Предположим, что справедливо для n подмножеств.
3. Докажем справедливость для $(n+1)$ подмножества.

$$\#(X \cup X_{n+1}) = \#X + \#X_{n+1} - \#(X \cap X_{n+1}) =$$

Так как $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, получим

$$= \#X + \#X_{n+1} - \#\big((X_1 \cap X_{n+1}) \cup \ldots \cup (X_n \cap X_{n+1})\big)$$

Применим предположение индукции для n множеств $(X_1 \cap X_{n+1}), \ldots, (X_n \cap X_{n+1})$:

$$\#(X \cup X_{n+1}) = \#X + \#X_{n+1} -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} \#(X_i \cap X_{n+1}) - \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\ldots,n}} \left(X_i \cap X_j \cap X_{n+1}\right) + \cdots + (-1)^{(n-1)}\#(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{n+1})\right).$$

Подставив $\#X$ из предположения индукции, окончательно получим:

$$\#(X \cup X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \#X_i - \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,n+1}} \#(X_i \cap X_j) + \dots + (-1)^{(n)} \#(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{n+1}).$$

Задача 10.

В группе 20 человек: 6 девочек, 8 студентов учится на «4» и «5», 10 занимается спортом. Девочек, учащихся на «4» и «5» – 4. Девочек, занимающихся спортом – 5. Всего учащихся на «4» и «5» и спортсменов – 6 человек. Девочек, учащихся на «4» и «5» и спортсменок – 3. Сколько в группе неспортивных и плохо учащихся мальчиков?

Решение:

$$\#A = 6, \#B = 8, \#C = 10,$$

$$\#(A \cap B) = 4,$$

$$\#(A \cap C) = 5,$$

$$\#(B \cap C) = 6,$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 3.$$

$$\#(A \cup B \cup C) = 6 + 8 + 10 - 4 - 5 - 6 + 3 = 12,$$

$$20 - 12 = 8.$$

Ответ: 8.

Следствие из $(*)$. Рассмотрим множество $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = X \cup Y, \qquad X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, \qquad X_i \cap Y = \emptyset, \qquad i = 1, \dots, n.$$

$$\#Y = \#\tilde{X} - \#X = \#\tilde{X} - \sum_{i=1}^{n} \#X_i + \sum_{i \neq j} \#(X_i \cap X_j) - \dots + (-1)^{(n)} \#(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n) \qquad (**)$$

Формула для числа объектов, не обладающих свойствами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Пусть у нас имеются некоторые свойства $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Нужно вычислить число объектов, не обладающих ни одним из этих свойств. Из $(**)$ получим:

$$P_{\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}} = N - \sum_{i=1}^{n} P_{\alpha_i} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,n,}} P_{\alpha_i, \alpha_j} + \dots + (-1)^n P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}.$$

Задача 11. Найти количество простых чисел от 1 до 100.

$P_{\overline{2}, \overline{3}, \overline{5}}$ – количество чисел, которые не делятся на 2, 3 и 5.

$$P_{\overline{2},\overline{3},\overline{5}} = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

Простые числа 2, 3 и 5 компенсируются числами 49=7·7, 77=7· 11 и 91=7·13, которые не являются простыми. 1 не является простым числом. Следовательно, 25.

Количество целочисленных решений системы

Найдем количество целочисленных решений системы при различных ограничениях на неизвестные $x_1, \dots, x_n$

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = k, \quad x_i \geq 0$

Ответ: $\bar{C}_n^k$

2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = k,$

$x_i \geq k_i \geq 0.$

Сделав замену $x_i = y_i + k_i \Longrightarrow y_i = x_i - k_i$, получим систему

$\sum_{i=1}^{n} y_i = \tilde{k}, \quad$ где $\tilde{k} = k - \sum_{i=1}^{n} k_i.$

$y_i \geq 0$

Количество целочисленных решений этой системы: $\bar{C}_n^{\tilde{k}}$

3. $\sum_{i=1}^{n} x_i = k.$

$0 \leq x_i \leq m_i$

Составим отрицание этих условий:

$\propto_i : x_i \geq m_i + 1.$

По формуле включений и исключений для числа объектов, не обладающих данными свойствами находим значение $P_{\overline{\alpha_1},\dots,\overline{\alpha_n}}$

4. $\sum x_i = k$

$k_i \leq x_i \leq m_i$ (обобщение п.2 и п. 3).

Сделав замену $x_i = y_i + k_i \Longrightarrow y_i = x_i - k_i$, получим систему

$\sum_{i=1}^{n} y_i = \tilde{k}, \quad$ где $\tilde{k} = k - \sum_{i=1}^{n} k_i.$

$0 \leq y_i \leq m_i - k_i$

Составим отрицание этих условий:

$\propto_i : y_i \geq m_i - k_i + 1.$

По формуле включений и исключений для числа объектов, не обладающих данными свойствами находим значение $P_{\overline{\alpha_1},\dots,\overline{\alpha_n}}$

Задача 12.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3.$$

Ответ: $\bar{C}_3^{20} = C_{22}^{20} = \frac{22!}{20!2!} = 231$

$$\bar{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{k+n-1}^k$$

Задача 13.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20.$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 5$$

Делаем замену

$$y_1 = x_1 - 3,$$

$$y_2 = x_2 - 2,$$

$$y_3 = x_3 - 5.$$

И решаем систему

$$y_1 + y_2 + y_3 = 10$$

$$y_i \geq 0, i = 1,2,3.$$

Ответ: $\bar{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!2!} = 66.$

Задача 14.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20.$$

$$0 \leq x_1 \leq 7,$$

$$0 \leq x_2 \leq 9,$$

$$0 \leq x_3 \leq 8.$$

Составим отрицание этих условий:

$$\propto_1 : x_1 \geq 8$$

$$\propto_2 : x_2 \geq 10$$

$$\propto_3 : x_3 \geq 9$$

По формуле для отрицания этих свойств получим:

$$P_{\overline{\propto_1}, \overline{\propto_2}, \overline{\propto_3}} = \bar{C}_3^{20} - \bar{C}_3^{20-8} - \bar{C}_3^{20-10} - \bar{C}_3^{20-9} + \bar{C}_3^{20-8-10} + \bar{C}_3^{20-8-9} + \bar{C}_3^{20-10-9} - 0 =$$

$$= \bar{C}_3^{20} - \bar{C}_3^{12} - \bar{C}_3^{10} - \bar{C}_3^{11} + \bar{C}_3^{2} + \bar{C}_3^{3} + \bar{C}_3^{1} =$$

$$= C_{22}^{20} - C_{14}^{12} - C_{12}^{10} - C_{13}^{11} + C_4^2 + C_5^3 + C_3^1 =$$

$$= \frac{22!}{20!\,2!} - \frac{14!}{12!\,2!} - \frac{12!}{10!\,2!} - \frac{13!}{11!\,2!} + \frac{4!}{2!\,2!} + \frac{5!}{3!\,2!} + \frac{3!}{1!\,2!} =$$

$$= 231 - 91 - 66 - 78 + 6 + 10 + 3 = 15$$

Задача 15.

$x_1 + x_2 + x_3 = 20.$

$3 \le x_1 \le 7,$

$2 \le x_2 \le 9,$

$5 \le x_3 \le 8.$

Делаем замену

$y_1 = x_1 - 3,$

$y_2 = x_2 - 2,$

$y_3 = x_3 - 5.$

Получим систему

$y_1 + y_2 + y_3 = 10,$

$0 \le y_1 \le 4,$

$0 \le y_2 \le 7,$

$0 \le y_3 \le 3,$

Составим отрицание условий:

$\propto_1: y_1 \ge 5,$

$\propto_2: y_2 \ge 8,$

$\propto_3: y_3 \ge 4.$

По формуле для отрицания этих свойств получим:

$$P_{\overline{\propto_1},\overline{\propto_2},\overline{\propto_3}} = \bar{C}_3^{10} - \bar{C}_3^{10-5} - \bar{C}_3^{10-8} - \bar{C}_3^{10-4} + \bar{C}_3^{10-5-4} =$$

$$= \bar{C}_3^{10} - \bar{C}_3^{5} - \bar{C}_3^{2} - \bar{C}_3^{6} + \bar{C}_3^{1} =$$

$$= C_{12}^{10} - C_7^5 - C_4^2 - C_8^6 + C_3^1 = 66 - 21 - 6 - 28 + 3 = 14$$

Задача 16. Студент забыл последние 5 цифр номера телефона друга. Он помнит, что их сумма была 25, среди них были 2 и 3, а остальные были больше трех. Какое максимальное количество звонков нужно будет сделать, чтобы дозвониться?

Решение.

2 может стоять на пяти местах номера, тогда 3 на оставшихся 4. Всего вариантов 4·5=20.

Решим следующую задачу:

$x_1 + x_2 + x_3 = 20$

$4 \le x_i \le 9,\ \ i = 1{,}2{,}3.$

(окончательный ответ умножим на 20).

Сделаем замену переменных

$y_i = x_i - 4,$

Получим систему

$y_1 + y_2 + y_3 = 8,$

$0 \le y_i \le 5,$

$\propto_i :\ y_i \ge 6$

По формуле для отрицания этих свойств получим:

$$P_{\overline{\propto_1},\overline{\propto_2},\overline{\propto_3}} = \bar{C}_3^8 - 3 \cdot \bar{C}_3^{8-6} = \bar{C}_3^8 - 3 \cdot \bar{C}_3^2 = C_{10}^8 - 3C_4^2 =$$

$$= \frac{10!}{8!\,2!} - 3 \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} - 6 = 45 - 6 = 39.$$

Умножив 39 на 20, получим: максимальное число звонков 780.

Дополнительные задачи.

Решите самостоятельно и проверьте.

1. 27 человек. Сколько всего рукопожатий?

$$\mathrm{C}_{27}^2 = \frac{27!}{2! \cdot 25!} = \frac{26 \cdot 27}{2} = 351$$

2. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 5 представителей на собрание?

$$\mathrm{C}_{15}^5 = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3003$$

3. Сколькими способами можно разложить 7 одинаковых шаров в 4 корзины?

$$\bar{\mathrm{C}}_4^7 = \mathrm{C}_{7+4-1}^7 = \mathrm{C}_{10}^7$$

4. Сколькими способами можно разлить 5 сортов соков по 12 бутылкам?

$$\bar{\mathrm{C}}_5^{12} = \mathrm{C}_{12+5-1}^{12} = \mathrm{C}_{16}^{12} = \frac{16!}{4! \cdot 12!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 13}{1} = 1820$$

5. Сколькими способами можно выкрасить 8 комнат, так чтобы было: 3 комнаты зелёные, 4 – жёлтые, 1 – синяя.

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

$$\boldsymbol{P}(3,4,1) = \frac{8!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} = 280$$

6. Четверо играют в домино. Всего 28 костей.

Сколькими способами можно распределить поровну между ними все кости?

$$P(7,7,7,7) = \frac{28!}{(7!)^4}$$

7. Сколькими способами можно выбрать 4 карты из 36 так, чтобы среди них оказалось 2 дамы?

$$C_4^2 \cdot C_{32}^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{32!}{2! \cdot 30!}$$

8. Найти количество целочисленных решений системы.

$x_1 + x_2 + x_3 = 22.$

$3 \le x_1 \le 7,$

$2 \le x_2 \le 9,$

$5 \le x_3 \le 9.$

Делаем замену

$y_1 = x_1 - 3,$

$y_2 = x_2 - 2,$

$y_3 = x_3 - 5.$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 12,$$
$$0 \le y_1 \le 4,$$
$$0 \le y_2 \le 7,$$
$$0 \le y_3 \le 4.$$

Составим отрицание условий:

$$\propto_1 : y_1 \ge 5,$$
$$\propto_2 : y_2 \ge 8,$$
$$\propto_3 : y_3 \ge 5.$$

По формуле для отрицания этих свойств получим:

$$P_{\overline{\propto_1}, \overline{\propto_2}, \overline{\propto_3}} = \bar{C}_3^{12} - \bar{C}_3^{12-5} - \bar{C}_3^{12-8} - \bar{C}_3^{12-5} + \bar{C}_3^{12-5-5} =$$
$$= \bar{C}_3^{12} - 2\bar{C}_3^{7} - \bar{C}_3^{4} + \bar{C}_3^{2} =$$

$$= C_{14}^{12} - 2C_9^7 - C_6^4 + C_4^2 = 91 - 72 - 15 + 6 = 10$$

1. Сколькими способами можно выбрать 8 карты из 52 так, чтобы среди них оказалось хотя бы 2 дамы?
2. Возвести в степень, используя полиномиальную формулу.

   $(a + 2b + c)^5$

3. Найти количество целочисленных решений системы.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 25.$$
$$3 \le x_1 \le 8,$$
$$2 \le x_2 \le 9,$$
$$5 \le x_3 \le 11.$$