Лекция 7

Задание группы образующими и определяющими соотношениями

Обычно группы задаются образующими элементами и определяющими соотношениями. Это удобно для анализа структуры группы, её свойств, нахождения подгрупп, в частности, нормальных делителей. А уже затем приводятся примеры групп, удовлетворяющих заданным соотношениям. Такой подход позволяет обобщить изучение групп одинаковых структур и не делать дополнительной работы.

Свободная группа

$A = \{a, b, c, \ldots\}$ – алфавит

Множество обратных символов – $\tilde{A} = \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \ldots\}$.

Элементы группы – слова:

$w_1 = f_1 f_2 \ldots f_k, \quad f_i \in A \cup \tilde{A}, \qquad i = 1 \ldots k$

$w_2 = h_1 h_2 \ldots h_m, \quad h_i \in \mathrm{A} \cup \tilde{A}, \quad i = 1 \ldots m$

Групповая операция – приписывание одного слова к другому:

$$w_1 w_2 = f_1 f_2 \ldots f_k h_1 h_2 \ldots h_m$$

1. Ассоциативность: $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3)$
2. Λ – пустое слово – единичный элемент.
3. $w_1^{-1} = f_k^{-1} \ldots f_2^{-1} f_1^{-1}$

   $$w_1 w_1^{-1} = f_1 f_2 \ldots f_k f_k^{-1} \ldots f_2^{-1} f_1^{-1} = f_1 f_2 \ldots \Lambda \ldots f_2^{-1} f_1^{-1} = \Lambda.$$

   Аналогично $w_1^{-1} w_1 = \Lambda$.
4. Некоммутативная операция: $w_1 w_2 \neq w_2 w_1$.

Определяющие соотношения

$$G =< a, b, c \ldots |\, P, Q, R, \ldots >,$$

где $a, b, c, \ldots$ – образующие элементы, P, Q, R, ... – определяющие соотношения.

(Пример: $a^3 = e, \quad ab = ba$ ...)

Определение 1. Слова w_1 и w_2 эквивалентны ($w_1 \sim w_2$), если w_2 можно получить из w_1 за конечное число шагов, используя следующие преобразования:

1. Вставка в начало, середину или конец слова определяющих соотношений $P, Q, R, \dots$ или $P^{-1}, Q^{-1}, R^{-1}, \dots$ или слов, тождественно равных единице Λ.

2. Удаление из начала, середины или конца слова определяющих соотношений $P, Q, R, \dots$ или $P^{-1}, Q^{-1}, R^{-1}, \dots$ или слов, тождественно равных единице.

Введем отношение предшествования на множестве слов:

1) $a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec \cdots -$ предшествование на множестве символов.

2) $l(w_1) < l(w_2) \Rightarrow w_1 \prec w_2$, где l – длина слова.

3) $l(w_1) = l(w_2)$ – отношение предшествования определяется первыми несовпадающими символами (см. п.1).

В примерах, где очевидно присутствует единичный элемент, цепочку предшествования элементов будем начинать с него.

Пример 1. Для группы $G =< a \mid a^4 = e >$

1. Составить таблицу Кэли.
2. Выписать подгруппы.
3. Привести примеры групп заданной структуры.

Выпишем цепочку элементов в порядке предшествования:

$$e \prec a \prec a^{-1} \prec aa \prec aa^{-1} \prec a^{-1}a \prec a^{-1}a^{-1} \prec aaa\dots$$

$$\boldsymbol{e \prec a \prec a^{-1} \prec aa = a^2} \prec aa^{-1} = e \prec a^{-1}a = e \prec a^{-1}a^{-1} = a^{-2} = a^2 \prec aaa\dots$$

Составляем таблицу Кэли:

	e	a	a^{-1}	a^2
e	e	a	a^{-1}	a^2
a	a	a^2	e	a^{-1}
a^{-1}	a^{-1}	e	a^2	a
a^2	a^2	a^{-1}	a	e

Циклическая группа четвертого порядка (например, группа вращений квадрата).

Обычно мы обозначали $G =< a >= \{a,\ a^2, a^3, a^4 = a^0 = e\}$. В обозначениях, определенных отношением предшествования $a^3 = a^{-1}$

Подгруппа $H =< a^2 \mid a^4 = e >= \{e, a^2\}$ – нормальный делитель (группа циклическая).

Любую циклическую группу конечного порядка p можно задать следующим образом:

$$G =< a \mid a^p = e >.$$

Любая её подгруппа является нормальным делителем.

Пример 2.

$$G =< a, b \mid a^2 = e, b^2 = e, ab = ba >$$

1. Составить таблицу Кэли.
2. Выписать подгруппы.
3. Привести примеры групп заданной структуры.

Выпишем цепочку элементов в порядке предшествования:

$$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec aa \prec aa^{-1} \prec ab \prec ab^{-1} \prec a^{-1}a \prec a^{-1}a^{-1} \prec a^{-1}b \prec a^{-1}b^{-1} \prec$$

$$\prec ba \prec ba^{-1} \prec bb \prec bb^{-1} \prec b^{-1}b^{-1} \prec b^{-1}a \prec b^{-1}a^{-1} \prec b^{-1}b \prec b^{-1}b^{-1} \prec aaa \ldots$$

$$\boldsymbol{e} \prec \boldsymbol{a} \prec a^{-1} = a \prec \boldsymbol{b} \prec b^{-1} = b \prec aa = e \prec aa^{-1} = \mathrm{e} \prec \boldsymbol{ab} \prec ab^{-1} = ab \prec a^{-1}a = e$$
$$\prec a^{-1}a^{-1} = \mathrm{e} \prec a^{-1}b = ab \prec a^{-1}b^{-1} = ab \prec \cdots$$

Составляем таблицу Кэли:

	e	**a**	**b**	**ab**
e	**e**	**a**	**b**	**ab**
a	**a**	**e**	**ab**	**b**
b	**b**	**ab**	**e**	**a**
ab	**ab**	**b**	**a**	**e**

Четвертная группа Клейна – каждый элемент сам себе обратный.

Примеры распознавания элементов группы: $a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$, $bab = bba = ea = a$

Легко убедиться, что остальные элементы совпадают с одним из перечисленных в таблице.

Подгруппы:

1. $H_1 =< a \mid a^2 = e >= \{e, a\}$.
2. $H_2 =< b \mid b^2 = e >= \{e, b\}$.
3. $H_3 =< ab \mid (ab)^2 = e >= \{e, ab\}$.

Все подгруппы – нормальные делители, т.к. группа коммутативна.

Примеры четвертной группы Клейна: группы самосовмещений прямоугольника и ромба.

Заметим, что без определяющего соотношения $ab = ba$ получим бесконечную группу.

Пример 3. $G =< a, b \mid a^3 = e, b^2 = e, ab = ba^2 >$

1. Составить таблицу Кэли.
2. Выписать подгруппы.
3. Привести примеры групп заданной структуры.

$$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec aa \prec aa^{-1} \prec ab \prec ab^{-1} \prec a^{-1}a \prec a^{-1}a^{-1} \prec a^{-1}b \prec a^{-1}b^{-1} \prec$$

$$\prec ba \prec ba^{-1} \prec bb \prec bb^{-1} \prec b^{-1}b^{-1} \prec b^{-1}a \prec b^{-1}a^{-1} \prec b^{-1}b \prec b^{-1}b^{-1} \prec aaa \dots$$

$$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} = b \prec aa = a^2 = a^{3-1} = a^{-1} \prec aa^{-1} = \mathrm{e} \prec \boldsymbol{ab} \prec ab^{-1} = ab \prec$$

$$\prec a^{-1}a = e \prec a^{-1}a^{-1} = a^{-2} = \mathrm{a} \prec \boldsymbol{a^{-1}b} \prec a^{-1}b^{-1} = a^{-1}\mathrm{b} \prec ba = eba =$$

$$= a^{-1}(ab)a = a^{-1}ba^2a = a^{-1}ba^3 = a^{-1}be = a^{-1}b \prec ba^{-1} = ba^2 = ab \dots$$

Составляем таблицу Кэли:

	e	a	a^{-1}	b	ab	$a^{-1}b$
e	e	a	a^{-1}	b	ab	$a^{-1}b$
a	a	a^{-1}	e	ab	$a^{-1}b$	b
a^{-1}	a^{-1}	e	a	$a^{-1}b$	b	ab
b	b	$a^{-1}b$	ab	e	a^{-1}	a
ab	ab	b	$a^{-1}b$	a	e	a^{-1}
$a^{-1}b$	$a^{-1}b$	ab	b	a^{-1}	a	e

$$b^2 = e \Rightarrow b^{-1} = b, \quad aa = a^{3-1} = ea^{-1} = a^{-1}, \quad ab^{-1} = ab, \quad a^{-1}b = a^2b, \quad ba = a^{-1}b$$

Группа содержит шесть элементов $G = \{e, a, a^{-1}, b, ab, a^{-1}b\}$

Примеры подгрупп:

$H_1 =< a \mid a^3 = e >= \{e, a, a^{-1}\}$ – нормальный делитель, т.к. подгруппа индекса 2.

$H_2 =< b \mid b^2 = e >= \{e, b\}$. Можно проверить, что для данная подгруппа не является нормальным делителем.

Примеры такой группы

1. Группа самосовмещений треугольника: $G_\Delta = \{\varphi_0, \varphi_{\frac{2\pi}{3}}, \varphi_{\frac{4\pi}{3}}, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$

   Примеры подгрупп: $H_{\Delta 1} =< \varphi_{\frac{2\pi}{3}} = a >= \{\varphi_0, \varphi_{\frac{2\pi}{3}}, \varphi_{\frac{4\pi}{3}}\}$;

   $$H_{\Delta 2} =< \psi_1 = b >= \{\varphi_0, \psi_1\}.$$

2. Группа симметрий $S_3 = \{\pi_0, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$

   Примеры подгрупп:

   $H_1 =< (1\ 2\ 3) = a >= \{\varphi_0, \varphi_{\frac{2\pi}{3}}, \varphi_{\frac{4\pi}{3}}\}$

   $H_2 =< (1\ 2) = b >= \{\varphi_0, \psi_1\}$.

Определяющие соотношения одной и той же группы могут задаваться по-разному. При этом из одних соотношений можно вывести другие.

Другой группой из шести элементов является циклическая группа

$$G =< a \mid a^6 = e >.$$

Утверждение 1. Групп шестого порядка с точностью до изоморфизма две: циклическая и симметрическая (см. таблицу выше).

Доказательство.

Если в G есть элемент порядка 6, то G совпадает с циклической подгруппой этого элемента. Далее будем считать, что элементов порядка 6 в G не имеется, и тогда из теоремы Лагранжа, порядки неединичных элементов могут быть равны только 2 или 3 (порядки подгрупп делители 6).

Допустим, что в G есть элемент a порядка 3. Его степени образуют подгруппу $\{e, a, a^2 = a^{-1}\}$ порядка 3, где $a^3 = e$. Пусть b – элемент, не принадлежащий этой подгруппе. Он может иметь порядок 2 или 3.

Если b имеет порядок 3 ($b^3 = e$), то он образует подгруппу $\{e, b, b^2 = b^{-1}\}$.

Выпишем последовательность:

$$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec aa = a^2 = a^{-1} \prec aa^{-1} = \mathrm{e} \prec ab \prec ab^{-1} \prec a^{-1}a = e \prec \cdots$$

Элемент ab очевидно не совпадает ни с одним из элементов подгрупп и, следовательно, это шестой элемент группы. Его порядок равен 3: $(ab)^3 = e$. Следовательно, $(ab)^2$ совпадает с одним из перечисленных элементов, т.е. $(ab)^2 = a$, или $(ab)^2 = b$, или $(ab)^2 = a^{-1}$, или $(ab)^2 = b^{-1}$.

В первом случае $abab = a \Longrightarrow bab = e \Longrightarrow ab = b^{-1}$, т.е. не новый элемент. Во втором случае аналогично. Противоречие.

Если $(ab)^2 = a^{-1}$, то опять получим противоречие:

$(ab)^2 = a^{-1} \Longrightarrow (ab)^{-1} = a^{-1} \Longrightarrow b^{-1}a^{-1} = a^{-1} \Longrightarrow b^{-1} = e$. Аналогично $(ab)^2 = b^{-1}$.

Следовательно, $b^3 = e$ быть не может.

Если b имеет порядок 2 ($b^2 = e$), то он образует подгруппу $\{e, b\}$. Покажем, что в этом случае группа G совпадает с нашей таблицей. Выпишем последовательность:

$$e \prec a \prec a^{-1} \prec b \prec b^{-1} \prec aa = a^2 = a^{-1} \prec aa^{-1} = \mathrm{e} \prec ab \prec ab^{-1} = ab \prec a^{-1}a = e \prec$$

$$\prec a^{-1}a^{-1} = a^{-2} = a \prec a^{-1}b \prec a^{-1}b^{-1} = a^{-1}\mathrm{b} \prec ba \prec ba^{-1} = ba^2 \ldots$$

Группа G содержит элементы $e,\ a,\ a^{-1}, b$. Рассмотрим элемент ab. Он очевидно не принадлежит $\{e,\ a,\ b\}$ и $ab \neq a^{-1}$, т.к. из $ab = a^{-1} \Longrightarrow ab = a^2 \Longrightarrow b = a$. Следовательно, это новый элемент, берем его в группу G. Элемент $a^{-1}b$ также новый: он не принадлежит $\{e,\ a,\ a^{-1}, b\}$. $a^{-1}b \neq ab$. Мы получили все элементы симметрической группы из примера 3:

$$G =< a, b \mid a^3 = e, b^2 = e, ab = ba^2 >.$$

Тогда следующий элемент цепочки ba равен одному из элементов этой группы. Очевидно, $ba \notin \{e,\ a,\ b\}$. $ba \neq a^{-1}$, т.к. из $ba = a^{-1} \Longrightarrow b^{-1}ba = b^{-1}a^{-1} \Longrightarrow a = (ab)^{-1} \Longrightarrow a^{-1} = ab$, но $ab \neq a^{-1}$. И $ba \neq ab$, т.к. порядок произведения перестановочных элементов равен произведению порядков a и b, т.е. 6. Но в этом случае группа G – циклическая.

Если $ba = a^{-1}b \Longrightarrow bbab = ba^{-1}bb \Longrightarrow eab = ba^{-1}e \Longrightarrow ab = ba^2$. А это определяющее соотношение симметрической группы

$$G =< a, b \mid a^3 = e, b^2 = e, ab = ba^2 >.$$

И других вариантов групп порядка 6 нет.

Заметим, что группы с тремя образующими, очевидно, содержат более 6 элементов:

$\{e, a, b, c,\ ab, ac,\ bc, abc, \ldots\}$.

Утверждение 1 доказано.

Общее число неизоморфных групп по величине порядка от 0 до 23 приведено в Википедии. Для простых порядков группа всегда одна – циклическая. Несобственных подгрупп нет.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
0	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1	**14**	1	5	1	5	2	2	1