Расчетно-графическая работа (РГР)
Дискретная математика
8 факультет, 1 курс, 1 семестр

1. Доказать или опровергнуть утверждение:
   а) методом рассуждений;
   б) с помощью характеристических функций.

2. Задано бинарное отношение ρ на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Проверить его на рефлексивность, симметричность, антисимметричность, асимметричность, транзитивность. Найти D_ρ, R_ρ, ρ^{-1}, ρ^2; изобразить указанные бинарные отношения на координатной плоскости.

3. График функции $f(x)$ представляет собой ломаную, звенья которой параллельны координатной оси либо биссектрисам координатных углов; координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. $f(x)$ определяет отношение ρ на множестве $X = [0; 5]: x\rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Доказать, что ρ – отношение эквивалентности на множестве X. Перечислить все классы эквивалентности.

4. В частично упорядоченном множестве, заданном диаграммой, найти (если таковые есть) наибольший, наименьший, минимальный, максимальный элементы. Выписать соответствующее диаграмме отношение. Продолжить его до линейного порядка.

5. Определить для данной формулы логики высказываний:
   а) таблицу истинности;
   б) ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ (методом равносильных преобразований);
   в) задать табличным способом соответствующую булеву функцию;
   г) определить СДНФ, СКНФ табличным способом (сравнить с п. 1.б);
   д) найти минимальную ДНФ, указать соответствующую ей переключательную схему;
   е) построить многочлен Жегалкина.

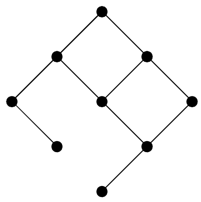
6. Привести равносильными преобразованиями к приведенной нормальной форме данную формулу логики предикатов.

7. Проверить правильность рассуждения в логике предикатов.

Вариант № 1

1. $A + C = A \setminus B \iff C = A \cap B$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>, <4, 4>}
3.

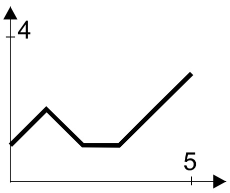
4.



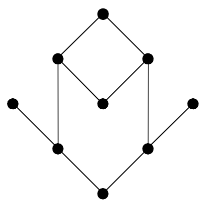
5. $(y \sim z) \supset (x \sim y)$
6. $\neg\left(\exists x \forall y P^{(2)}(x, y) \,\&\, \forall x \exists y Q^{(2)}(x, y)\right)$
7. В данном городе есть парикмахер, который бреет всех тех и только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в этом городе никто сам не бреется.

Вариант № 2

1. $A + C = A \cap B \iff C = A \setminus B$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 3>, <4, 1>, <4, 4>}
3.



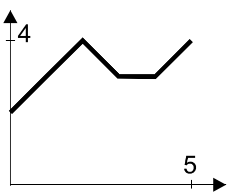
4.



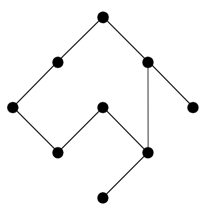
5. $(\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z)$
6. $\neg\left(\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \vee \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)\right)$
7. Всякий парикмахер в данном городе бреет только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в этом городе никто никого не бреет.

Вариант № 3

1. $A \cap B \subseteq C \iff A \subseteq \overline{B} \cup C$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 4>}
3.

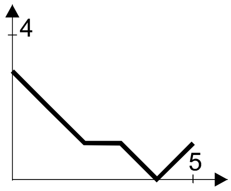


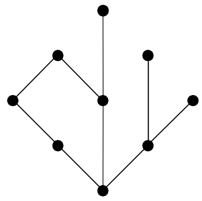
4.



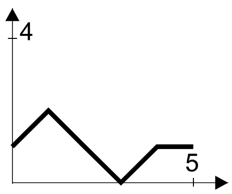
5. $\neg(y \supset \neg z) \sim (y \vee \neg x)$
6. $\neg(\exists x) \forall y \left(\neg P^{(2)}(x, y) \vee Q^{(2)}(x, y)\right) \vee \exists x \forall y R^{(2)}(x, y)$
7. Всякий парикмахер в данном городе бреет только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в этом городе никто сам не бреется.

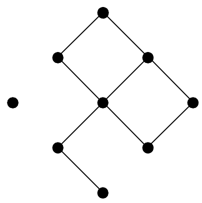
Вариант № 4

1. $A + C = A \cup B \;\Leftrightarrow\; C = B \setminus A$
2. {<1, 1>, <1, 4>, <2, 3>, <3, 2>, <4, 1>}
3. 

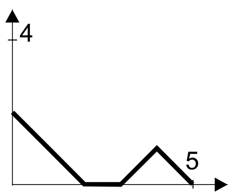
4. 
5. $(\neg z \sim y) \supset (x \sim \neg z)$
6. $\neg(\exists x)\forall y\left(P^{(2)}(x, y)\,\&\,\neg Q^{(2)}(x, y)\right)\&\,\forall x \exists y R^{(2)}(x, y)$
7. Всякая дифференцируемая на отрезке функция непрерывна на нем. Любая равномерно непрерывная на отрезке функция не является разрывной на нем. Следовательно, всякая дифференцируемая на отрезке функция не является равномерно непрерывной на этом отрезке.

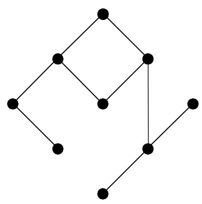
Вариант № 5

1. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B \;\Leftrightarrow\; A \cap C \subseteq A \cap \overline{B}$
2. {<1, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 1>, <4, 4>}
3. 

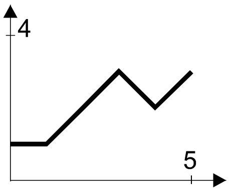
4. 
5. $(\neg z \vee y) \supset \neg(y \sim x)$
6. $\neg(\exists x)\left(\exists y P^{(2)}(x, y)\,\&\,\forall y Q^{(2)}(x, y)\right) \vee \exists y R^{(1)}(y)$
7. Всякая дифференцируемая на отрезке функция непрерывна на нем. Любая равномерно непрерывная на отрезке функция непрерывна на нем. Следовательно, всякая равномерно непрерывная на отрезке функция дифференцируема на нем.

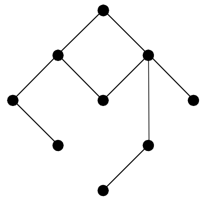
Вариант № 6

1. $A + (B \cup C) = A + B \;\Leftrightarrow\; C \subseteq B$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 4>}
3. 

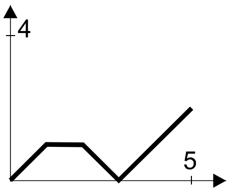
4. 
5. $\neg(y \supset z) \sim \neg(z \supset x)$
6. $\exists x \forall y \neg P^{(2)}(x, y) \supset \neg(\forall x)\exists y Q^{(2)}(x, y)$
7. Существует множество, состоящее из всех тех множеств, которые являются элементами самих себя. Всякое множество или является или не является элементом самого себя. Следовательно, существует множество, являющееся элементом самого себя и не являющееся элементом самого себя.

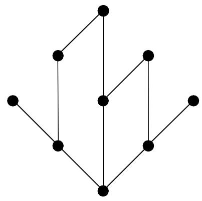
Вариант № 7

1. $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \;\Leftrightarrow\; A \cap B \subseteq \overline{C}$
2. $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$
3. 

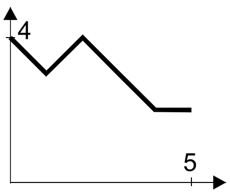
4. 
5. $(z \sim \neg y) \supset (x \sim \neg y)$
6. $\exists x\left(\forall y P^{(2)}(x, y) \supset \exists y Q^{(2)}(x, y)\right)$
7. Существует множество, состоящее из всех тех множеств, которые не являются элементами самих себя. Всякое множество или является или не является элементом самого себя. Следовательно, существует множество, являющееся элементом самого себя и одновременно не являющееся таковым.

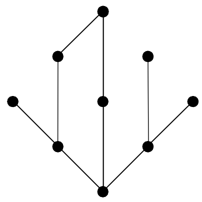
Вариант № 8

1. $A + (B \cap C) = A + B \;\Leftrightarrow\; B \subseteq C$
2. $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$
3. 

4. 
5. $(z \supset x) \supset \neg(\neg z \sim y)$
6. $\neg(\forall x)\exists y\left(P^{(2)}(x, y) \vee \neg Q^{(2)}(x, y)\right) \& \exists x \forall y R^{(2)}(x, y)$
7. Существует множество, состоящее из всех тех множеств, которые не являются элементами самих себя. Всякое множество или является или не является элементом самого себя. Следовательно, не существует множества, одновременно являющегося и не являющегося элементом самого себя.

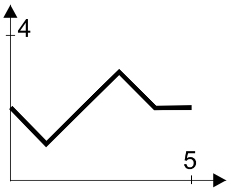
Вариант № 9

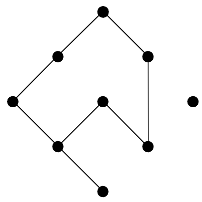
1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus C \;\Leftrightarrow\; B \subseteq C \cup \overline{A}$
2. $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$
3. 

4. 
5. $\neg(\neg x \supset z) \sim (\neg x \vee y)$
6. $\left(\exists x P^{(1)}(x) \vee \forall x Q^{(1)}(x)\right) \supset \forall x \exists y R^{(2)}(x, y)$
7. Любой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, сходится, и его общий член стремится к нулю. Не для всякого ряда верно, что его общий член стремится к нулю или он расходится. Следовательно, существует сходящийся ряд, не удовлетворяющий условиям признака Лейбница.

Вариант № 10

1. $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \;\Leftrightarrow\; C \subseteq B \cup \overline{A}$
2. {<1, 1>, <2, 2>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 3>, <4, 4>}
3. 4.

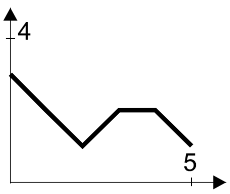


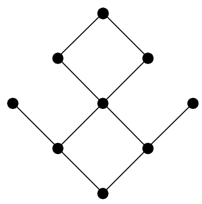


5. $(z \sim \neg x) \supset (\neg y \sim z)$
6. $\left(\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \,\&\, \forall x Q^{(1)}(x)\right) \supset \exists x \forall y R^{(2)}(x, y)$
7. Любой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, сходится, и его общий член стремится к нулю. Неверно, что для любого ряда из стремления к нулю его общего члена следует его сходимость. Следовательно, существует сходящийся ряд, не удовлетворяющий условиям признака Лейбница.

Вариант № 11

1. $A \cap B = A \cap C \;\Leftrightarrow\; B + C \subseteq \overline{A}$
2. {<1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>, <4, 4>}
3. 4.

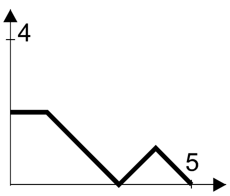


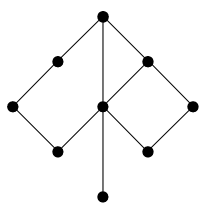


5. $(x \supset y) \supset (z \sim \neg y)$
6. $\neg(\forall x)\forall y P^{(2)}(x, y) \vee \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y) \vee \exists x \neg R^{(1)}(x)$
7. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. Существует знакопеременный ряд, который сходится, но не абсолютно. Следовательно, сходимость ряда не является необходимым и достаточным условием его абсолютной сходимости.

Вариант № 12

1. $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$
2. {<1, 1>, <3, 1>, <3, 2>, <4, 2>, <4, 4>}
3. 4.

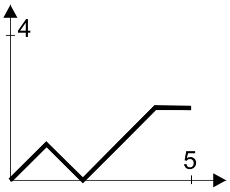




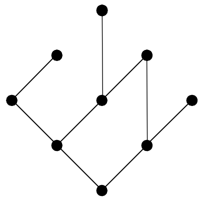
5. $\neg(x \supset y) \sim (y \supset z)$
6. $\left(\exists x P^{(1)}(x) \vee \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)\right) \& \,\forall y \exists x R^{(2)}(x, y)$
7. Для любого множества *X* существует множество *Y* такое, что мощность множества *Y* больше мощности множества *X*. Если *X* есть подмножество *Y*, что мощность *X* не больше мощности *Y*. Всякое множество является подмножеством универсального множества *U*. Следовательно, *U* не является множеством.

Вариант № 13

1. $A \setminus B = A \setminus C \iff B + C \subseteq \overline{A}$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 4>, <4, 3>, <4, 4>}
3.



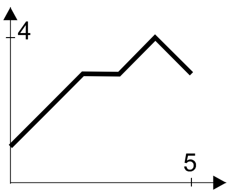
4.



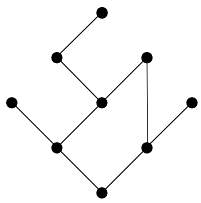
5. $(\neg x \sim y) \supset (z \sim \neg x)$
6. $\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \supset \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)$
7. Всякий, кто находится в здравом уме, может понять математику и допускается к голосованию. Ни один из писателей не может понять математику. Сумасшедшие не допускаются к голосованию. Следовательно, все писатели не допускаются к голосованию.

Вариант № 14

1. $A \cap B = A \cup C \iff C \subseteq A \subseteq B$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>}
3.



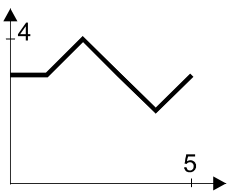
4.



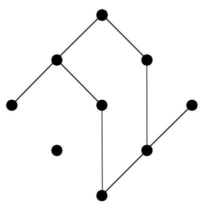
5. $(x \supset z) \supset \neg(z \sim y)$
6. $\forall x \neg P^{(1)}(x) \,\&\, \forall x \exists y Q^{(2)}(x, y) \,\&\, \neg(\exists x) \exists y R^{(2)}(x, y)$
7. Всякий родственник данного человека является также родственником ещё кого-нибудь. Никакой человек не приходится родственником самому себе. Следовательно, не существует человека, не имеющего никаких родственников.

Вариант № 15

1. $A \subseteq B \iff A \cap C \subseteq B \cap C$
2. {<1, 1>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 1>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}
3.



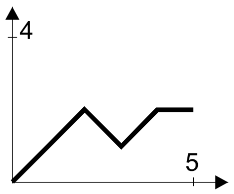
4.



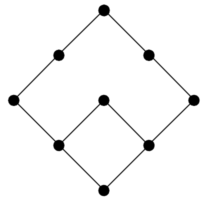
5. $\neg(z \supset x) \sim (x \supset y)$
6. $\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \vee \left(\forall x Q^{(1)}(x) \,\&\, \exists x \forall y R^{(2)}(x, y)\right)$
7. Всякое множество является подмножеством некоторого множества. Следовательно, или не существует множества, включающего в себя все множества, или существуют два множества, одно из которых не является подмножеством другого.

Вариант № 16

1. $A \cup B = A \setminus C \iff B \subseteq A \subseteq \overline{C}$
2. {<1, 2>, <2, 4>, <3, 3>, <4, 1>}
3.



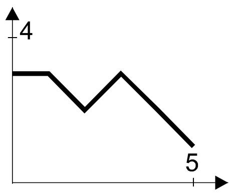
4.



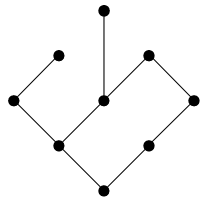
5. $(x \sim y) \supset (z \sim x)$
6. $\left(\exists x \forall y P^{(2)}(x, y) \vee \forall x Q^{(1)}(x)\right) \& \exists x R^{(1)}(x)$
7. Существует множество, включающее в себя все множества. Всякое множество является подмножеством некоторого множества. Следовательно, для любых двух множеств первое не является подмножеством второго.

Вариант № 17

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap C \iff A \cap C \subseteq B$
2. {<2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <3, 4>}
3.



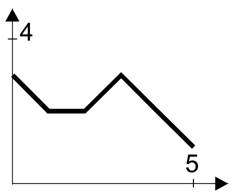
4.



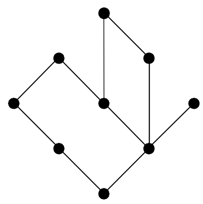
5. $(y \supset z) \supset (x \sim \neg y)$
6. $\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \& \left(\forall x \exists y Q^{(2)}(x, y) \vee \forall x R^{(1)}(x)\right)$
7. Существует множество, такое, что любое множество является его подмножеством. Всякое множество является подмножеством некоторого множества. Следовательно, найдется множество, являющееся подмножеством самого себя.

Вариант № 18

1. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = A + B$
2. {<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 3>, <4, 2>, <4, 4>}
3.

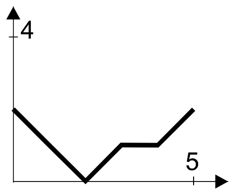


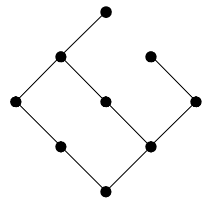
4.



5. $\neg(z \supset y) \sim (x \supset z)$
6. $\left(\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \& \exists x Q^{(1)}(x)\right) \vee \exists x R^{(1)}(x)$
7. В данном частично упорядоченном множестве всякий минимальный элемент является максимальным. В нем не существует наименьшего элемента, являющегося одновременно максимальным. Неверно, что любой минимальный элемент является наименьшим. Следовательно, в данном частично упорядоченном множестве существует наименьший элемент, являющийся минимальным.

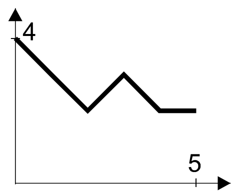
Вариант № 19

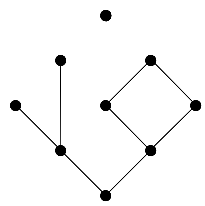
1. $(A \cup B) \cup C = A \cup C \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A \cup C$
2. {<1, 1>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>}
3. 

4. 

5. $(\neg x \sim \neg z) \supset (y \sim \neg x)$
6. $\exists x \forall y \neg P^{(2)}(x, y) \,\&\, \exists x \exists y Q^{(2)}(x, y) \,\&\, \exists x R^{(1)}(x)$
7. В любом частично упорядоченном множестве всякий наименьший элемент является минимальным. В данном частично упорядоченном множестве существует наименьший элемент, не являющийся минимальным. Следовательно, в данном частично упорядоченном множестве не существует наименьший элемент.

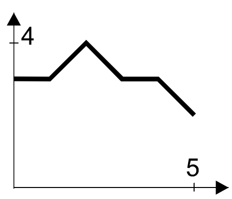
Вариант № 20

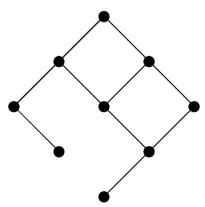
1. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
2. {<1, 1>, <1, 4>, <2, 1>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 4>}
3. 

4. 

5. $(x \supset y) \supset (x \sim z)$
6. $\neg(\exists x)\big(P^{(1)}(x) \,\&\, \exists y Q^{(2)}(x, y)\big) \vee \exists x \forall y R^{(2)}(x, y)$
7. Не существует функции, равномерно непрерывной на отрезке и в то же время разрывной на нем. Всякая функция дифференцируема на отрезке или же разрывна на нем. Следовательно, любая функция дифференцируема на отрезке или не равномерно непрерывна на этом отрезке.

Вариант № 21

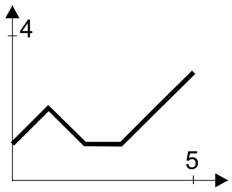
1. $A + C = A \setminus B \;\Leftrightarrow\; C = A \cap B$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>, <4, 4>}
3. 

4. 

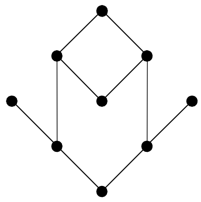
5. $(y \sim z) \supset (x \sim y)$
6. $\neg\big(\exists x \forall y P^{(2)}(x, y) \,\&\, \forall x \exists y Q^{(2)}(x, y)\big)$
7. В данном городе есть парикмахер, который бреет всех тех и только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в этом городе никто сам не бреется.

Вариант № 22

1. $A + C = A \cap B \iff C = A \setminus B$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 3>, <4, 1>, <4, 4>}
3.



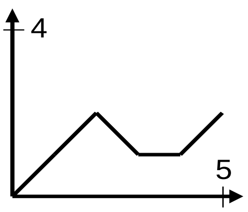
4.



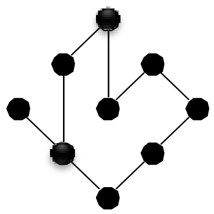
5. $(\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z)$
6. $\neg\left(\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \vee \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)\right)$
7. Всякий парикмахер в данном городе бреет только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в этом городе никто никого не бреет.

Вариант № 23

1. $A \subseteq B \cap C \iff A \subseteq B$ и $A \subseteq C$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}
3.



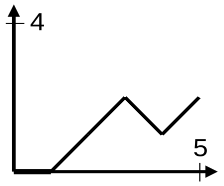
4.



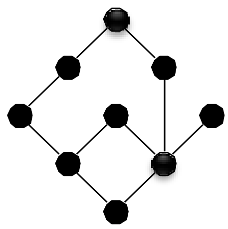
5. $\neg(x \& y) + (\neg z \supset \neg y)$
6. $\forall x \forall y P^{(2)}(x, y) \sim \exists x \exists y Q^{(2)}(x, y)$.
7. Любой первокурсник не сможет решить все эти задачи, если он не посещает все занятия. Неверно, что существует первокурсник, который решил все задачи. Следовательно, ни любой первокурсник, который посещает все занятия решит все задачи.

Вариант № 24

1. $A \subseteq B \iff A \setminus C \subseteq B \setminus C$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <4, 3>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 2>}
3.

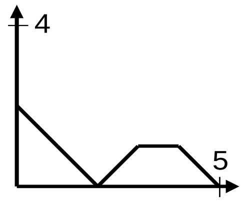


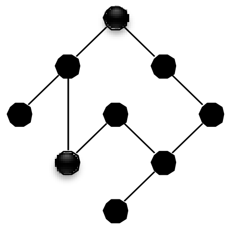
4.



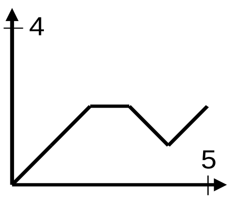
5. $\neg(x \vee y) + (\neg z \supset \neg y)$
6. $\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \sim \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)$.
7. В некотором частично упорядоченном множестве существует минимальный элемент, являющийся наименьшим. Для всех множеств любой наименьший элемент является минимальным. Следовательно, существует множество, в котором нет наименьшего элемента.

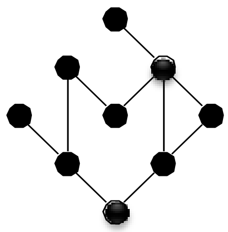
Вариант № 25

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow C \backslash B \subseteq C \backslash A$
2. {<1, 3>, <1, 2>, <4, 3>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}
3. 

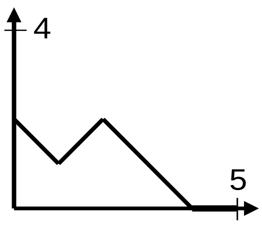
4. 
5. $(\neg x \vee y) + (z \supset \neg y)$
6. $\forall x \forall y P^{(2)}(x, y) + \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)$.
7. Не в любом частично упорядоченном множестве существует максимальный элемент, являющийся наибольшим. Для всех множеств любой наибольший элемент является максимальным. Следовательно, существует множество, в котором нет наибольшего элемента.

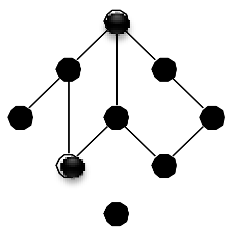
Вариант № 26

1. $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$
2. {<1, 3>, <1, 2>, <4, 3>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}
3. 

4. 
5. $(x \vee y) \sim (z \supset \neg y)$
6. $\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) + \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)$.
7. Любая равномерно непрерывная на отрезке функция дифференцируема на нем. Всякая дифференцируемая на отрезке функция непрерывна на нем. Следовательно, всякая непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной на этом отрезке.

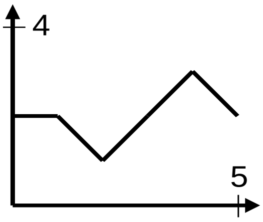
Вариант № 27

1. $A = \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = U$
2. {<1, 3>, <2, 2>, <4, 3>, <2, 4>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}
3. 

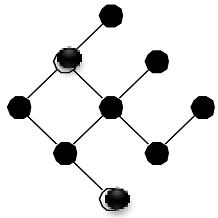
4. 
5. $(x \vee y) \sim (z \& \neg y)$
6. $(\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \supset \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)) \supset \exists x \exists y P^{(2)}(x, y)$.
7. Не любой человек имеет хотя бы одного родственника. Любой человек сам себе не родственник. Следовательно, существует человек, который не имеет родственников.

Вариант № 28

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow C \cap B \subseteq C \cap A$
2. {<1, 1>, <4, 2>, <4, 3>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}
3.



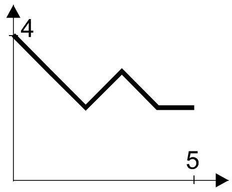
4.



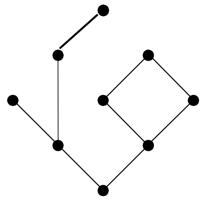
5. $(x \& y) + (z \supset \neg y)$
6. $(\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \supset \exists x \forall y Q^{(2)}(x, y)) \supset \forall x \forall y P^{(2)}(x, y)$
7. Всякое множество или является или не является элементом самого себя. Существует множество, состоящее из всех тех множеств, которые являются элементами самих себя. Следовательно, существует множество, являющееся элементом самого себя и не являющееся элементом самого себя.

Вариант № 29

1. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
2. {<1, 1>, <1, 4>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 4>}
3.



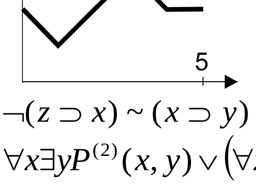
4.



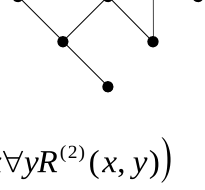
5. $(x + y) \supset (x \sim z)$
6. $\neg(\exists x)\left(P^{(1)}(x) \& \exists y Q^{(2)}(x, y)\right) \vee \forall x \forall y R^{(2)}(x, y)$
7. Всякое множество является подмножеством некоторого множества. Следовательно, существует множество, включающее в себя все множества, или существуют два множества, одно из которых является подмножеством другого.

Вариант № 30

1. $A + C = A \cup B \;\Leftrightarrow\; C = B \setminus A$
2. {<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <4, 4>}
3.



4.



5. $\neg(z \supset x) \sim (x \supset y)$
6. $\forall x \exists y P^{(2)}(x, y) \vee \left(\forall x Q^{(1)}(x) \& \exists x \forall y R^{(2)}(x, y)\right)$
7. В данном городе есть парикмахер, который бреет всех тех и только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в этом городе никто сам не бреется.