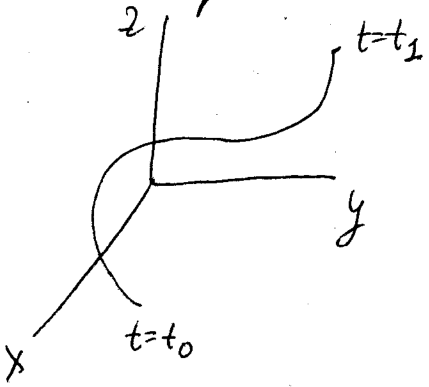
Приложения определённого интеграла (часть 2)

Remember! Длина кривой.

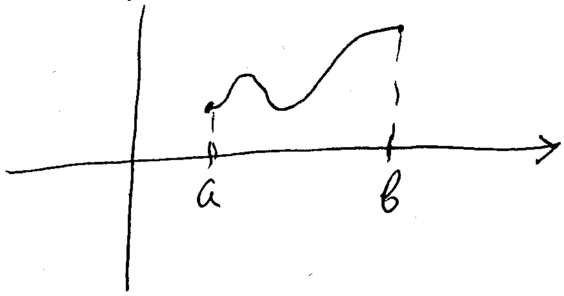
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1$$



$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Длина графика функции.

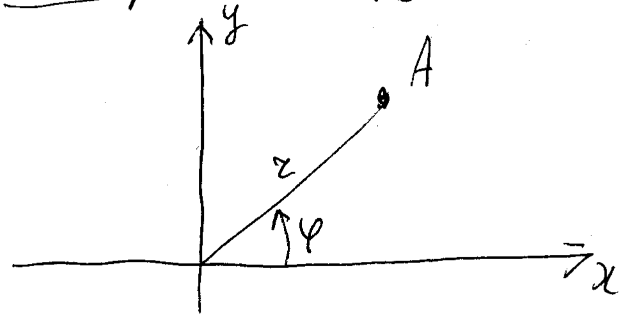
$$y = f(x)$$
$$a \le x \le b$$



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Длина кривой, заданной в полярных координатах

Полярные координаты



$A(x, y)$ – декартовы координаты

$A(r, \varphi)$ – полярные координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Кривая в полярных координатах.

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \qquad t_0 < t < t_1$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{((r\cos\varphi)')^2 + ((r\sin\varphi)')^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi)^2}\,dt =$$

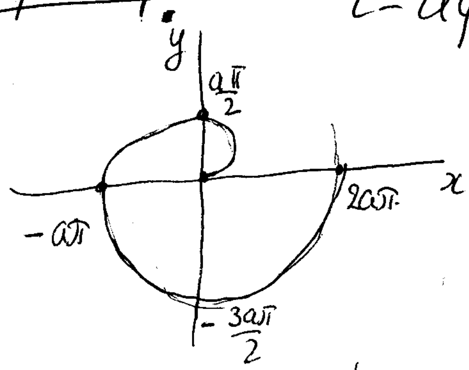
$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r'^2\cos^2\varphi - \cancel{2rr'\varphi'\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\varphi'^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + \cancel{2rr'\varphi'\sin\varphi\cos\varphi} + r^2\varphi'^2\cos^2\varphi}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

Кривая может быть задана в виде: $r = r(\varphi)$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$

Тогда:
$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\,d\varphi$$

<u>Пример</u> $r = a\varphi$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ (спираль Архимеда)



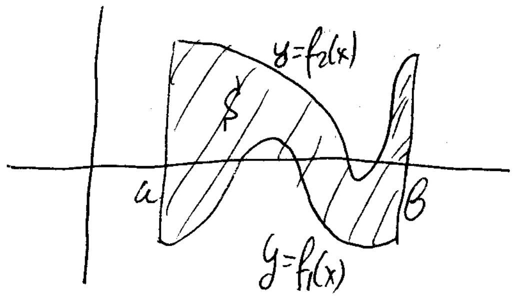
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$$

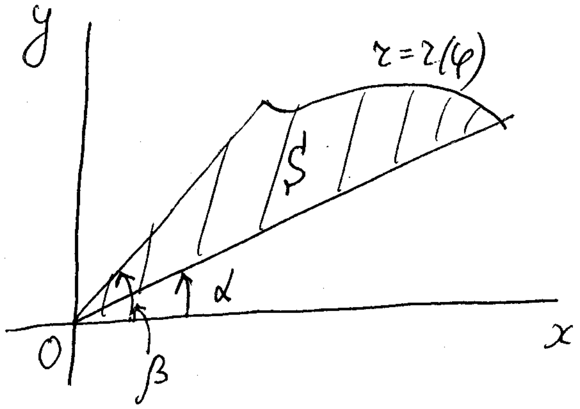
<u>Вычисление площадей (плоских фигур)</u>

Remember:



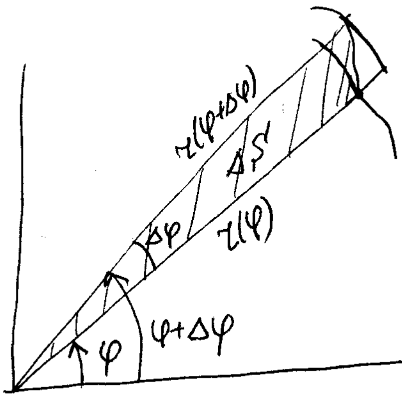
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$$

Площадь сектора (площадь в полярных координатах)



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Пояснение



$\Delta S = ?$

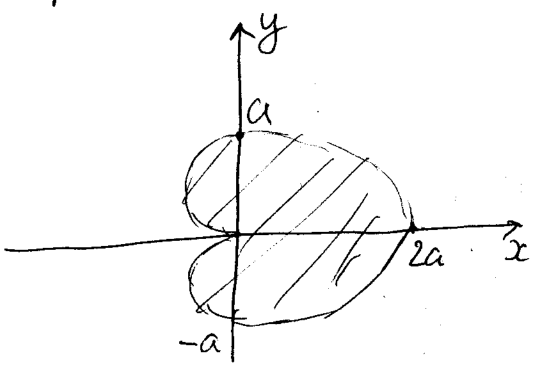
$$\frac{1}{2}(r(\varphi))^2\Delta\varphi \le \Delta S \le \frac{1}{2}(r(\varphi+\Delta\varphi))^2\Delta\varphi$$ (в данном случае)

Если P - разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$, то

$$\overline{S}\left(\frac{r^2(\varphi)}{2}, P\right) \le S \le \underline{S}\left(\frac{r^2(\varphi)}{2}, P\right)$$

Пример

$r = a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида)



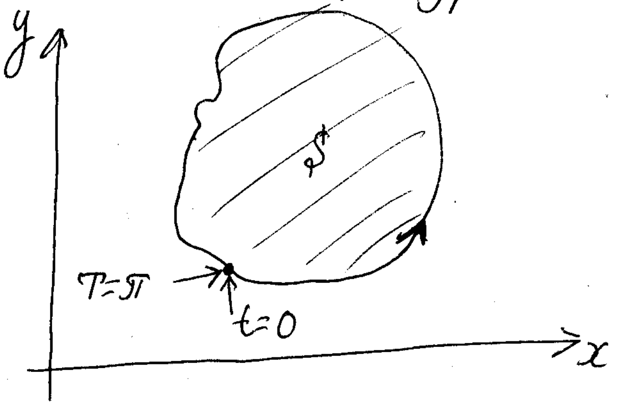
$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\pi$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой.



Кривая:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ 0 \le t \le T, \end{cases}$$

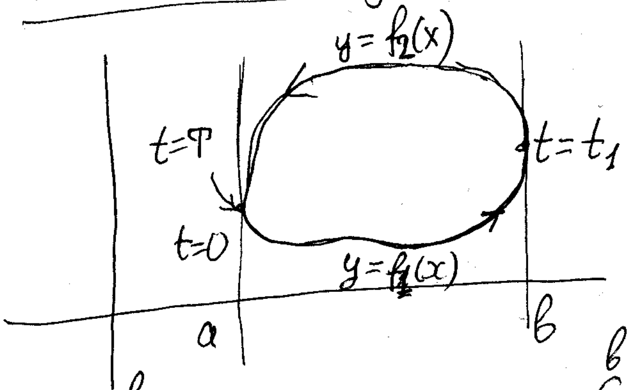
$x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$

Если кривая пробегается <u>против часовой стрелки</u>, то

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T \big(x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)\big)\,dt \quad \text{или:}$$

$$S = \int_0^T x(t)\,y'(t)\,dt\,, \qquad S = -\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt.$$

<u>Пояснение для частного случая</u>



$x = x(t)$

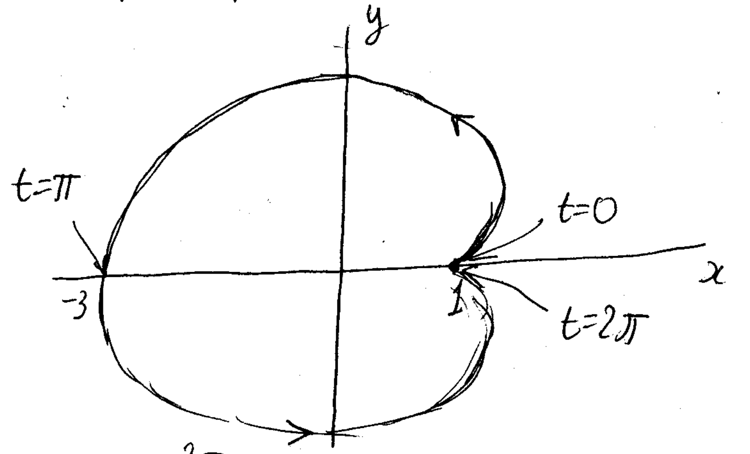
$y = y(t)$

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx = \int_a^b \underbrace{f_2(x)}_{y}\,dx - \int_a^b \underbrace{f_1(x)}_{y}\,dx = \left|\begin{matrix} x = x(t) \\ dx = x'(t)\,dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_T^{t_1} y(t)\,x'(t)\,dt - \int_0^{t_1} y(t)\,x'(t)\,dt = -\int_{t_1}^T y(t)\,x'(t)\,dt - \int_0^{t_1} y(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt$$

Пример $x = a(2\cos t - \cos 2t)$ $y = a(2\sin t - \sin 2t)$



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - x'y)\,dt =$$

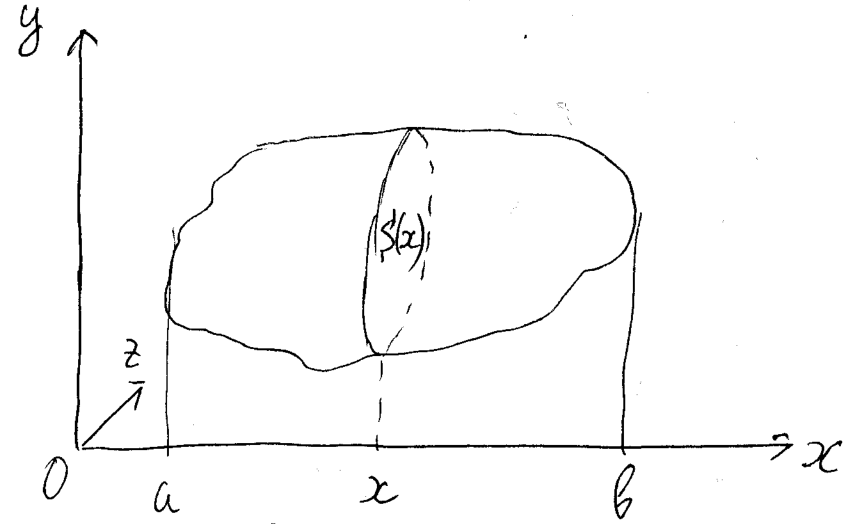
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\Big((2\cos t - \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t) - (-2\sin t + 2\sin 2t)(2\sin t - \sin 2t)\Big)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\Big(4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t - 2\cos 2t\cos t + 2\cos^2 2t + 4\sin^2 t -$$
$$- 2\sin t\sin 2t - 4\sin 2t\sin t + 2\sin^2 2t\Big)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(4 - 6\cos t + 2)\,dt = 3a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)\,dt =$$

$$= 3a^2(t - \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2$$

Объёмы



$S(x)$ – площадь сечения плоскостью, проходящую через точку с абсциссой x параллельной Oyz

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Пояснения Пусть P – разбиение отрезка $[a,b]$

Тогда сумму Дарбу $\overline{S}(S(x),P)$ можно интерпретировать как сумму объёмов цилиндров, целиком лежащих внутри тела,

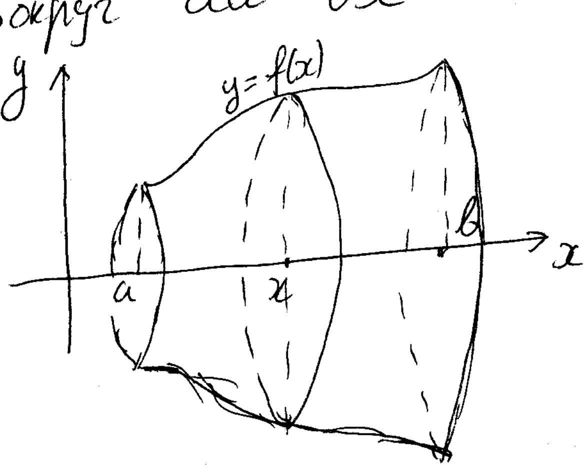
и сумму Дарбу $\underline{S}(S(x),P)$ можно интерпретировать как сумму объёмов цилиндров, объединение которых содержит тело. Если $S(x)\in\mathcal{R}[a,b]$, то

при $\lambda(P)\to 0$ $\quad \overline{S}\to V\leftarrow \underline{S}$

Объём тела вращения

(Объём тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси)

1. Вокруг оси Ox



$y=f(x)$, $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

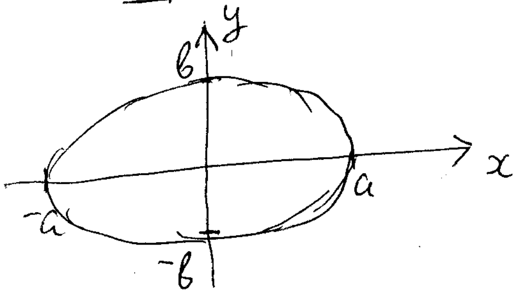
$f(x)\in C[a,b]$

$S(x)=\pi(f(x))^2 \Rightarrow$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \text{ или}$$

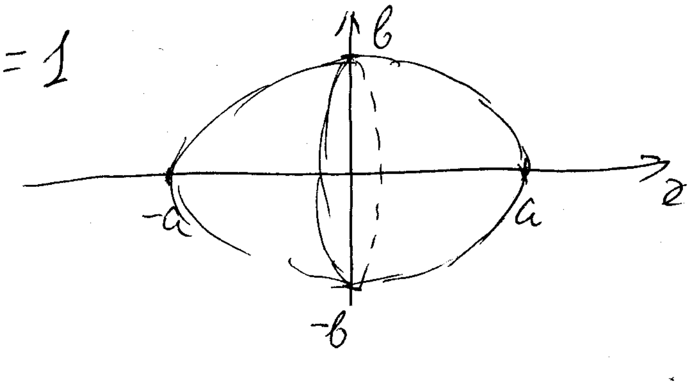
$$\boxed{V=\pi\int_a^b y^2\,dx}$$

Пример Объём эллипсоида вращения (вокруг Ox)



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$(a>0$
$b>0)$



$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

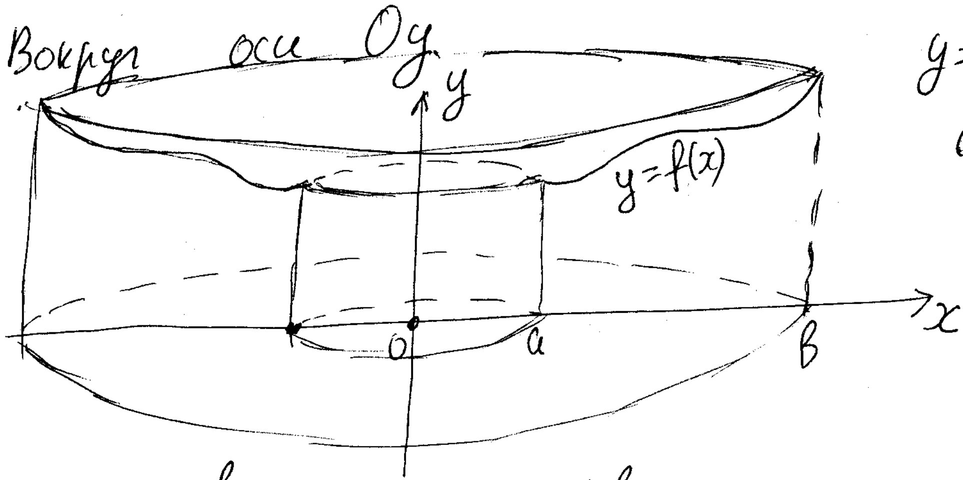
$$= 2\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi b^2\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} a b^2.$$

2. Вокруг оси Oy.

$y = f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$a > 0 \quad b > 0$

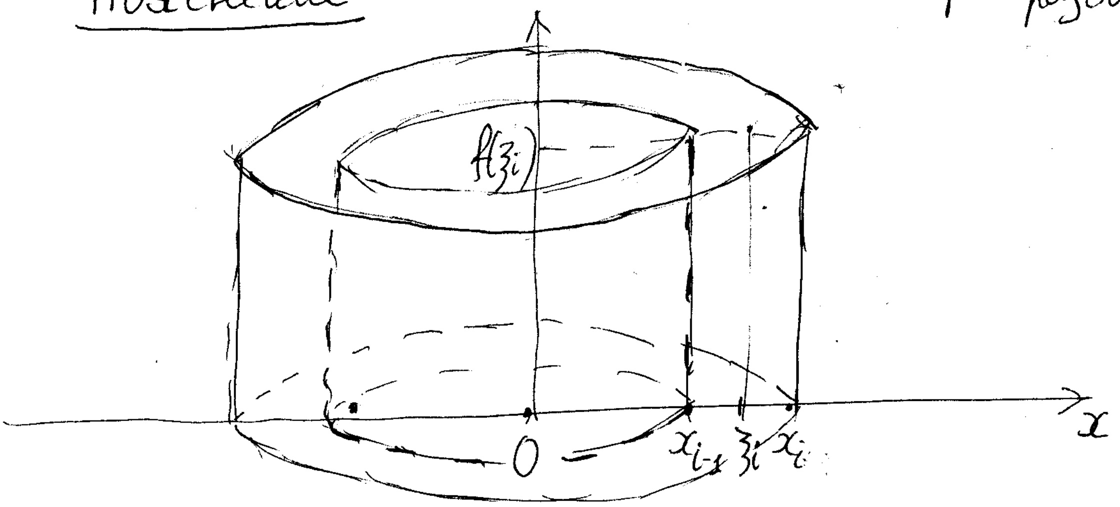
$f(x) \in C[a, b]$



$$V = 2\pi \int_a^b x\, y(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Пояснение

P – разбиение $[a, b]$



Объём фигуры, лежащей между цилиндрами:

$$\Delta V_i = \pi x_i^2 f(\xi_i) - \pi x_{i-1}^2 f(\xi_i) = \pi f(\xi_i)(x_i + x_{i-1}) \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

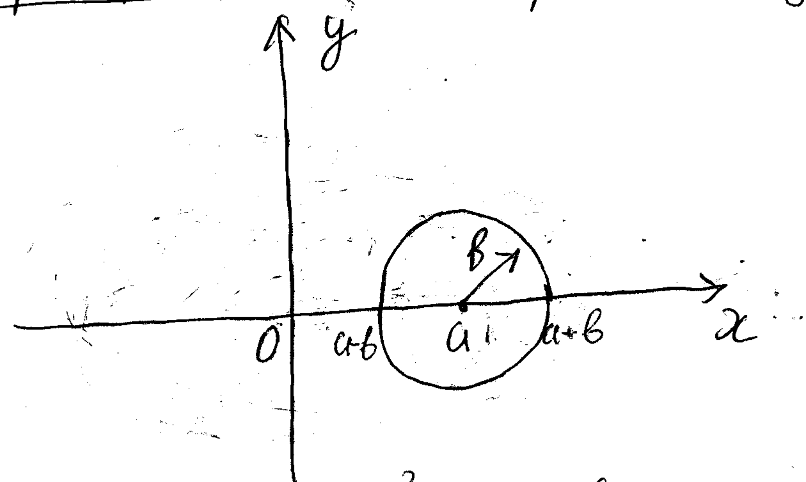
$$2\pi x_{i-1} \inf_{[x_{i-1}x_i]} f(x)\cdot \Delta x_i \le \Delta V_i \le 2\pi x_i \sup_{[x_{i-1}x_i]} f(x)\,\Delta x_i$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \inf_{[x_{i-1}x_i]} f(x)\cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \le 2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i \sup_{[x_{i-1}x_i]} f(x)\cdot \Delta x_i$$

$\lambda(P)\to 0$

$$2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

<u>Пример</u> Объём тора. (бублик)



результат вращения вокруг Oy круга радиуса b с центром в $(a,0)$ $(a>b)$

$(x-a)^2+y^2=b^2$ – уравнение окружности.

$y=\pm\sqrt{b^2-(x-a)^2} \Rightarrow$

$$V = 2\cdot 2\pi \int_{a-b}^{a+b} x\sqrt{b^2-(x-a)^2}\,dx = 4\pi \int_{a-b}^{a+b} (x-a+a)\sqrt{b^2-(x-a)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{b^2-(x-a)^2}\,d(x-a)^2 + 4\pi a \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{b^2-(x-a)^2}\,d(x-a) =$$

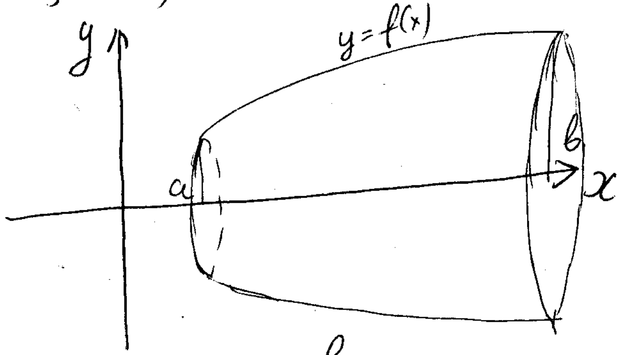
$$= -2\pi\cdot\frac{2}{3}\left(b^2-(x-a)^2\right)^{3/2}\Big|_{a-b}^{a+b} + 4\pi a\left(\frac{x-a}{2}\sqrt{b^2-(x-a)^2}+\frac{b^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{b}\right)\Big|_{a-b}^{a+b} =$$

$$= 4\pi a\cdot\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 a b^2$$

Площадь поверхности вращения

$y = f(x)$, $\quad x \in [a, b]$, $\quad f(x) \geq 0 \qquad f(x) \in C[a, b]$

$S_{пов} = ?$



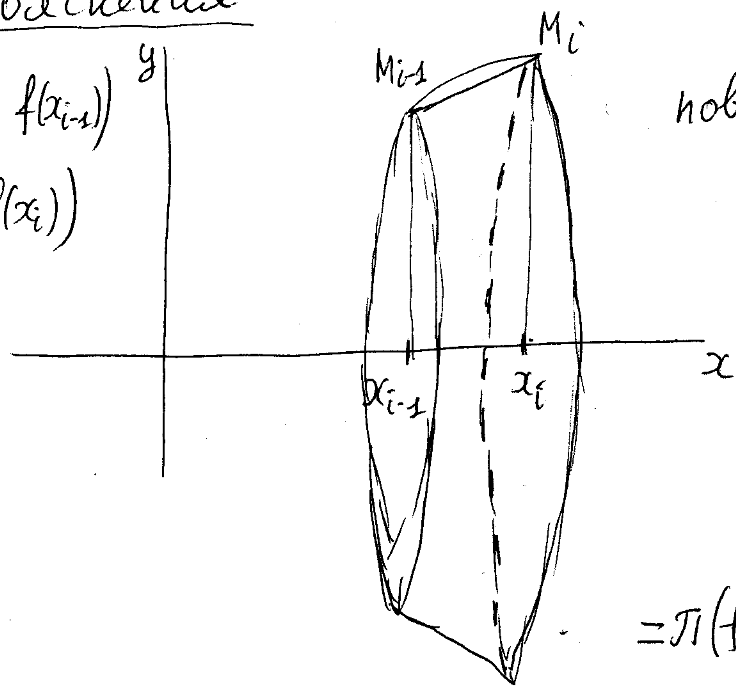
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Пояснение

P - разбиение $[a, b]$

$M_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$

$M_i(x_i, f(x_i))$



Площадь боковой поверхности усечённого конуса с основаниями радиусов $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

$$S_i = \pi\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \cdot |M_{i-1} M_i| =$$

$$= \pi\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \cdot \sqrt{\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2 + (x_i - x_{i-1})^2} =$$

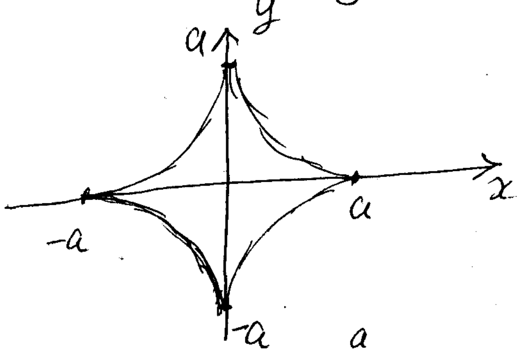
$$= \pi\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \Delta x_i =$$

$$= \pi\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i, \quad \text{где } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$S_{пов} = \sup_P \sum_{i=1}^{n} S_i \underset{(\text{почему?})}{=} \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Пример Площадь поверхности, полученной вращением астроиды вокруг Ox.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$



$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}$$

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}\cdot\sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}}}\,dx=$$

$$=4\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}\sqrt{a^{4/3}x^{-\frac{2}{3}}}\,dx=$$

$$=4\pi a^{1/3}\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}x^{-\frac{1}{3}}dx=4\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}d\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=$$

$$=-6\pi a^{1/3}\left.\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{2/3}\right)^{5/2}}{5/2}\right|_0^a=6\pi a^{1/3}\cdot\frac{2}{5}a^{\frac{5}{3}}=\frac{12}{5}\pi a^2$$