Суммы Дарбу (Jean Gaston Darboux 1842-1917)

<u>Опр</u> Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, P – разбиение $[a,b]$,

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \ ; \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

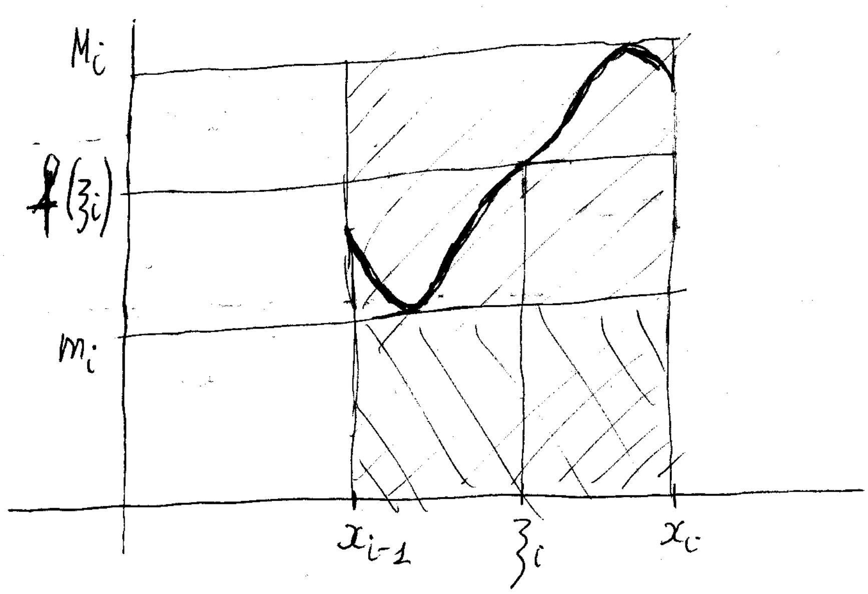
Тогда $\bar{\bar{s}}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ нижняя сумма Дарбу.

$\underline{\underline{S}}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ – верхняя сумма Дарбу.

($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка разбиения $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$).

<u>Замечание</u> $\forall (P, \xi)$:

$$\bar{\bar{s}}(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le \underline{\underline{S}}(f,P)$$



<u>Лемма</u>

$$\bar{\bar{s}}(f,P) = \inf_{\xi} \sigma(f,P,\xi)$$

$$\underline{\underline{S}}(f,P) = \sup_{\xi} \sigma(f,P,\xi)$$

<u>Д-во</u> (для нижней суммы Дарбу).

1) $\forall \xi$: $\bar{\bar{s}}(f,P) \le \sigma(f,P,\xi)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $f(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{b-a} < m_i \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} \left(f(\bar{\xi}_i) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i) \Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}_{b-a} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i) \Delta x_i - \varepsilon$$

Таким образом, нельзя найти миноранту для $\sigma(f, P, \xi)$, большую, чем $\bar{S}(f, P)$

<u>Опр.</u> Если $\exists$ числовой предел

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P) \to 0} \bar{\bar{s}}(f, P),$$ то он называется

<u>нижним интегралом</u> Дарбу

<u>Опр</u> Если $\exists$ числовой предел

$$\bar{I} = \lim_{\lambda(P) \to 0} \underline{\underline{S}}(f, P),$$ то он называется

<u>верхним интегралом</u> Дарбу.

<u>Пример</u> $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ (функция Дирихле)

Заметим, что $D(x)$ не является интегрируемой по Риману, например, на $[0; 1]$, так как интегральная сумма для любого разбиения P выбором ξ может быть сделана равной как 0, так и 1.

Однако, для любого разбиения P: $m_i = 0$, $M_i = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на отрезке $[0; 1]$ $\quad \bar{I} = 1$, $\quad \underline{I} = 0$

<u>Вопрос</u> А при каких условиях существуют $\bar{I}$ и $\underline{I}$?

<u>Теорема</u> Пусть $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\left(f \in \mathcal{R}[a, b] \right) \Longleftrightarrow \left(\exists\, \bar{I}, \underline{I};\ \bar{I} = \underline{I} \right)$$

при этом $I = \int_a^b f(x)\,dx = \bar{I} = \underline{I}$.

Д-во 1) Пусть $\exists\, \overline{I}$ и $\underline{I}$, причём $\overline{I} = \underline{I}$

$$\forall (P, \xi) \qquad \underset{\substack{\downarrow \lambda(P)\to 0 \\ \underline{I}}}{\overline{\overline{S}}(f,P)} \le \sigma(f,P,\xi) \le \underset{\substack{\downarrow \lambda(P)\to 0 \\ \overline{I}}}{\underline{\underline{S}}(f,P)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = \underline{I} = \overline{I}.$$

2) Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, т.е. $\exists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) = I. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall P,\ \lambda(P) < \delta : I - \varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < I + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I - \varepsilon \le \inf_{\xi} \sigma(f,P,\xi) \le \sup_{\xi} \sigma(f,P,\xi) \le I + \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$I - \varepsilon \le \overline{\overline{S}}(f,P) \le \underline{\underline{S}}(f,P) \le I + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \underline{I},\ \exists\, \overline{I}, \text{ причём } \underline{I} = \overline{I} = I$$

Теорема Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\left(f \in \mathcal{R}[a,b]\right) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\,\Delta x_i = 0\right)$$

(Здесь: $\omega(f,\Delta_i) \to$ колебание функции f на $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$)

Докажите, используя предыдущую теорему!

(Remember, $\omega(f;\Delta_i) = \sup\limits_{\Delta_i} f - \inf\limits_{\Delta_i} f$)

Утв. („арифметические свойства" интеграла)

Пусть $f, g : [a;b] \to R$, $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$. Тогда:

1) $(f+g) \in \mathcal{R}[a,b]$ $\left(\int\limits_a^b (f+g)\,dx = \int\limits_a^b f dx + \int\limits_a^b g dx \right)$

2) $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$: $\int\limits_a^b \alpha f dx = \alpha \int\limits_a^b f dx$

3) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$

4) если $[c,d] \subset [a,b]$, то $g, f \in \mathcal{R}[c,d]$

5) $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$

Д-во 1) $\sigma(f+g, P, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + g(\xi_i))\Delta x_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(f, P, \xi) + \sigma(g, P, \xi)$

Далее переходим к пределу при $\lambda(P) \to 0$

2) $\sigma(\alpha f, P, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha f(\xi_i))\Delta x_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sigma(f, P, \xi)$

Далее переходим к пределу при $\lambda(P) \to 0$

3) $\omega(|f|, \Delta_i) \le \omega(f, \Delta_i)$ (докажите сами!) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(|f|; \Delta_i)\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i \to 0$ при $\lambda(P) \to 0$

4) Пусть Π – разбиение $[c,d]$, а P – разбиение $[a,b]$, включающее точки Π, причем $\lambda(P) \le \lambda(\Pi)$. Тогда

$$\underbrace{\sum_{\Pi} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i}_{\text{сумма по всем отрезкам разбиения } \Pi} \le \underbrace{\sum_{P} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i}_{\text{сумма по всем отрезкам разбиения } P} \to 0 \text{ при } \lambda(P) \to 0$$

5) $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f$ – ограничена на $[a,b]$.

Пусть $\forall x \in [a,b]$: $|f(x)| < C < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow |f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1) - f(x_2)) \cdot (f(x_1) + f(x_2))| \le 2C|f(x_1) - f(x_2)| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega(f^2, \Delta_i) \le 2C\,\omega(f, \Delta_i) \to 0 \text{ при } \lambda(P) \to 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$$

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

$$f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow (f+g), (f-g) \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f+g)^2, (f-g)^2 \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$$

Критерий Лебега интегрируемости по Риману.

(Henri Léon Lebesgue 1875 – 1941)

Опр Множество E ($E \subset \mathbb{R}$) имеет меру ноль, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ покрытие множества E не более чем счётной системой интервалов, сумма длин которых не больше ε

Некоторые свойства множеств меры ноль

1. Точка есть мн-во меры ноль.
2. Объединение конечного или счётного числа множеств меры ноль есть множество меры ноль
3. Подмножество мн-ва меры ноль есть множество меры ноль.
4. Отрезок $[a,b]$ ($b>a$) не является множеством меры 0.

Д-во 1. А что здесь доказывать?

2. А вот здесь есть что.

Рассмотрим объединение счётного числа множеств меры ноль. Перенумеруем эти множества. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для первого мн-ва существует покрытие с общей длиной интервалов не превосходящей $\varepsilon/2$, для второго существует покрытие с общей длиной интервалов, непревосходящей $\varepsilon/4$, и т.д., для n-го мн-ва существует покрытие, сумма длин интервалов которого не превосходит $\frac{\varepsilon}{2^n}$ (ит.д.). Тогда объединение всех интервалов, входящих во все покрытия есть покрытие объединённого множества, а сумма длин всех этих интервалов не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^n}+\ldots=\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon.$$

3. Это — очевидно.

4. Отрезок $[a,b]$ содержит в себе интервал длины $\frac{b-a}{2}$. Потому нельзя построить покрытие отрезка интервалами, сумма длин которых меньше $\frac{b-a}{2}$ (на самом деле, и $b-a$).

<u>Опр</u> Если некоторое свойство выполнено в любой точке мн-ва E, за исключением множества точек меры ноль, то говорят, что свойство выполнено <u>почти всюду</u> на E.

<u>Теорема</u> (критерий Лебега)

Функция интегрируема (по Риману) на отрезке тогда и только тогда, когда она непрерывна почти во всех точках этого отрезка.

<u>Пример</u> Функция Римана

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если } x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{m}{n} \text{ (дробь несократимая)}\\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Эта функция разрывна только в рациональных точках. Следовательно, она интегрируема на любом отрезке.

<u>Пример</u> 1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in R[a,b]$, $f([a,b])=[c;d]$

2) $g:[c,d]\to\mathbb{R}$, $g\in C[c,d]$

1) 2) $\Rightarrow$ $g(f(x))\in R[a,b]$ (т.к. $\varphi(x)=g(f(x))\in C[a,b]$)

<u>Пример</u> $g(x)=|\operatorname{sign}(x)|=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$f(x)=R(x)$

$g(f(x))=D(x)$! Композиция интегрируемых функций неинтегрируема!!