*Лекция 8*

## *Основые равносильности логики высказываний*

Основные равносильности логики высказываний справедливы для произвольных формул A, B и C.

1) Коммутативность.
   $A\&B \equiv B\&A$ $\quad\quad$ $A \vee B \equiv B \vee A$
2) Ассоциативность.
   $(A\&B)\&\, C \equiv A\&(B\&C)$ $\quad\quad$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
3) Дистрибутивность.
   $A \vee (B\&C) \equiv (A \vee B)\&(A \vee C)$ $\quad\quad$ $A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C)$
4) Законы де Моргана.
   $\neg(A\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$ $\quad\quad$ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \,\&\neg\, B$
5) Идемпотентность
   $A \vee A \equiv A$ $\quad\quad$ $A\&A \equiv A$
6) Закон поглощения.
   $A\&(A \vee B) \equiv A$ $\quad\quad$ $A \vee (A\&\, B) \equiv A$
7) Закон расщепления
   $A \equiv (A\&B) \vee (A\&\neg B)$ $\quad\quad$ $A \equiv (A \vee B)\&(A \vee \neg B)$
8) Снятие двойного отрицания
   $\neg\neg A \equiv A$

### *Тождества, выражающие одни операции через другие*

9) $A \vee B \equiv \neg(\neg A\&\neg B)$
10) $A\&B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$
11) $A \supset B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A\&\neg B)$
12) $A \vee B \equiv \neg A \supset B$
13) $(A \sim B) \equiv (A \supset B)\&(B \supset A) \equiv (\neg A \vee B)\&(\neg B \vee A)$
14) $A + B \equiv \neg(A \sim B)$

### *Обобщенные законы*

15) Обобщенные законы де Моргана:
$\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_k) \equiv \neg A_1\&\neg A_2\&\ldots\&\neg A_k$
$\neg(A_1\&\ldots\&A_k) \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_k$
16) Обобщенные законы дистрибутивности:
$(A_1 \vee \ldots \vee A_k)\&(B_1 \vee \ldots \vee B_m) = (A_1\&B_1) \vee \ldots \vee (A_k\&B_k)$
$(A_1\&\ldots\&A_k) \vee (B_1\&\ldots\&B_m) = (A_1 \vee B_1)\&\ldots\&(A_k \vee B_m)$

***Равносильности доказываются:***

1. Табличный метод.
2. Логические рассуждения.
3. Преобразования, использующие основные тождества логики высказываний. (аналогично алгебраических).

**Пример 3.**

Докажем закон де Моргана.

$\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$

1. Составим таблицу истинности

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A\&B$ | $\neg(A\&B)$ | $\neg A \vee \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **И** | **И** | **Л** | **Л** | **И** | **Л** | **Л** |
| **И** | **Л** | **Л** | **И** | **Л** | **И** | **И** |
| **Л** | **И** | **И** | **Л** | **Л** | **И** | **И** |
| **Л** | **Л** | **И** | **И** | **Л** | **И** | **И** |

2. Логическое доказательство закона де Моргана.

$\neg(A\&B) = \text{Л} \Leftrightarrow A\&B = \text{И} \Leftrightarrow A = \text{И и } B = \text{И} \Leftrightarrow \neg A = \text{Л и } \neg B = \text{Л} \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B = \text{Л}$

3. Методом преобразований докажем тождество

$$\neg(A\sim B) \supset A \equiv B \supset A$$

$$\neg(A\sim B) \supset A \equiv \neg\neg(A\sim B) \vee A \equiv (A\sim B) \vee A \equiv \big((\neg A \vee B)\&(\neg B \vee A)\big) \vee A \equiv$$
$$\equiv (\neg A \vee B \vee A)\&(\neg B \vee A \vee A) \equiv \text{И}\&(\neg B \vee A) \equiv \neg B \vee A \equiv B \supset A$$

4. Покажем, что операция импликация ($\supset$) не ассоциативна.

$$(A \supset B) \supset C \not\equiv A \supset (B \supset C).$$

Для опровержения тождества можно построить таблицу истинности для левой и правой части, а можно указать одну оценку на которой тождество не выполняется. В этом примере тождество не выполняется на оценке $<\text{Л},\text{Л},\text{Л}>$: $(\text{Л} \supset \text{Л}) \supset \text{Л} \not\equiv \text{Л} \supset (\text{Л} \supset \text{Л})$. Т.е. $\text{Л} \not\equiv \text{И}$.

## Закон двойственности

Будем рассматривать формулы, содержащие только логические операции $\&, \vee, \neg$.

Символы $\&$, $\vee$ двойственны друг другу.

Это означает следующее. Если поменять значения оценок для операции дизъюнкция и результат операции на противоположные, то получим таблицу для операции конъюнкция. И наоборот. Оценки И и Л также называются двойственными.

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| **И** | **И** | **И** |
| **И** | **Л** | **И** |
| **Л** | **И** | **И** |
| **Л** | **Л** | **Л** |

| $P$ | $Q$ | $P\,\&\,Q$ |
|---|---|---|
| **Л** | **Л** | **Л** |
| **Л** | **И** | **Л** |
| **И** | **Л** | **Л** |
| **И** | **И** | **И** |

Откуда получаем законы де Моргана.

$\neg(A\&B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \,\&\neg B$

Эти законы часто называют принципами двойственности.

Обобщим понятие двойственности для произвольной формулы, содержащей только операции &,∨, ¬.

**Определение 2.** Формула $A^*$ называется двойственной к формуле A, если $A^*$ получена из A одновременной заменой всех символов &, ∨ на двойственные.

*Пример*.

$$\left(x\&(\neg y \vee z)\right)^* \equiv x \vee (\neg y\&z).$$

**Теорема. (Принцип двойственности).**

Если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

***Доказательство*** рассмотрим позднее, в разделе двойственных булевых функций.

Исходя из принципа двойственности, можно показывать справделивость законов только для одной из операций. Например, доказав равносильность закона дистрибутивности относительно &:

$$A\&(B \vee C) \equiv (A\&B) \vee (A\&C),$$

можно, используя принцип двойственности

$$\left(A\&(B \vee C)\right)^* \equiv \left((A\&B) \vee (A\&C)\right)^*,$$

получить закон дистрибутивности относительно ∨:

$$A \vee (B\&C) \equiv (A \vee B)\&(A \vee C).$$

Аналогично и остальные парные основные равносильности.

Принцип двойственности будем использовать при доказательстве теорем следующего раздела.

## Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы формул

## (ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ)

**Определение 1.** Формулу называют ***элементарной конъюнкцией***, если она является конъюнкцией переменных и отрицаний переменных (быть может одночленной).

Например, формулы $X_2$, $X_2\& \neg X_3$, $X_1\&X_3\&X_2$ являются элементарными конъюнкциями. (Одночленные и многочленные).

**Определение 2.** ***Элементарной дизъюнкцией*** будем называть дизъюнкцию переменных и отрицаний переменных (быть может одночленной).

Например, $(X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3)$, $X_2$ являются элементарными дизъюнкциями.

**Определение 3.** Формула находится в дизъюнктивной нормальной форме (**ДНФ**), если она дизъюнкция элементарных конъюнкций (быть может одночленная).

**Определение 4.** Формула находится в конъюнктивной нормальной форме (**КНФ**), если она конъюнкция элементарных дизъюнкций (быть может одночленной).

КНФ также определяется, как формула двойственная к ДНФ.

Например,

$(X_1\&X_2) \vee \neg X_3$ – ДНФ

$(X_1 \vee X_2)\&\neg X_3$ – КНФ

$(X_1\&X_2) \vee (\neg X_3\&X_1\&\neg X_2)$ – ДНФ

$(X_1 \vee X_2)\&(\neg X_3 \vee X_1 \vee \neg X_2)$ – КНФ

$(X_1\&X_2)$ – ДНФ и КНФ одновременно

**Теорема 1 (о приведении формулы к ДНФ).**

Для любой формулы $F$ существует формула $\tilde{F}$, находящаяся в ДНФ и равносильная $F$:

$F \equiv \tilde{F}$.

Формула $\tilde{F}$ называется дизъюнктивной нормальной формой формулы $F$.

***Доказательство*** конструктивное.

### Алгоритм построения ДНФ

1. Используя правило равносильных преобразований, выражаем все операции $\supset, +, \sim$ через $\&$, $\vee$, $\neg$ по формулам

   $A \supset B \equiv \neg A \vee B$

   $A \sim B \equiv (A \supset B)\&(B \supset A) \equiv (\neg A \vee B)\&(\neg B \vee A) \equiv (A \& B) \vee (\neg A\&\neg B)$

   $A + B \equiv \neg(A \sim B) \equiv (A\& \neg B) \vee (B\&\neg A) \equiv (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B)$

   Получим формулу $F_1 \equiv F$ .

2. Приводим формулу $F_1$ к формуле с тесными отрицаниями (все отрицания стоят только перед переменными). Получим формулу $F_2 \equiv F_1$.

Докажем, что $F_1$ можно привести к формуле с тесными отрицаниями индукцией по числу логических символов $k$.

1) $k$ =0 – очевидно $F_1 \doteqdot X$ ($\doteqdot$ $-$ имеет вид)

2) Пусть для любой формулы с не более, чем $k$ логическими символами справедливо, что ее можно привести к равносильной формуле с тесными отрицаниями.

3) Покажем, что утверждение справедливо для формул с $(k+1)$ символами.

Рассмотрим случаи

а) $F_1 \doteqdot A \vee B \equiv \tilde{A} \vee \tilde{B}$. $\tilde{A}, \tilde{B}$ с тесными отрицаниями по предположению индукции для формул с $k$ и менее символами. Следовательно, $\tilde{A} \vee \tilde{B} -$ формула с тесными отрицаниями.

б) $F_1 \doteqdot A \,\&\, B \equiv \tilde{A} \& \tilde{B}$ – аналогично а).

в) $F_1 \doteqdot \neg A$

Рассмотрим подслучаи:

в1) $A \doteqdot \neg B \Rightarrow F_1 \doteqdot \neg A \equiv \neg(\neg B) \equiv B \equiv \tilde{B}$ – с тесными отрицаниями по предположению индукции.

в2) $A \doteqdot B \vee C \Rightarrow F_1 \doteqdot \neg(B \vee C) \equiv \neg B \,\&\, \neg C \equiv \tilde{A} \& \tilde{B}$ – с тесными отрицаниями по предположению индукции.

в3) $A \doteqdot B \& C$ – аналогично в2.

Получим формулу с тесными отрицаниями $F_2 \equiv F_1$.

3. Приводим $F_2$ к виду, аналогичному алгебраическому многочлену, где $\& - \times$, $\vee - +$ . Используем закон дистрибутивности & относительно $\vee$. Получим $F_3 \equiv F_2$, $F_3 = \tilde{F} -$ искомая ДНФ.

Ч.т.д.

**Теорема 2 (о приведении формулы к КНФ).**

Для любой формулы $F$ можно найти такую формулу $\tilde{F}$, находящуюся в КНФ, что $F \equiv \tilde{F}$.

Формула $\tilde{F}$ называется конъюнктивной нормальной формой формулы $F$.

***Доказательство I*** конструктивное.

**Алгоритм построения КНФ**

Пункты 1 и 2 повторяют пункты построения ДНФ.

В пункте 3 Приведем $F_2$ к виду аналогичному алгебраическому многочлену,

где $\& - +$, $\vee - \times$. Используем закон дистрибутивности $\vee$ относительно &.

***Доказательство II.***

После замены операций $\supset, +, \sim$ формулу F1 приводим к КНФ. Для этого приводим двойственную формулу $F1^*$ к ДНФ: $\check{F}1$. Затем находим двойственную к $\check{F}1$.

$F_1 \equiv (F_1{}^*)^* \equiv \left(\breve{F}_1\right)^* = \tilde{F}$ – КНФ.

Заметим, что ДНФ и КНФ данной формулы не единственные. Например, КНФ $x_1 \equiv x_1\&(x_1 \vee x_2)$.

Хотя в алфавите ЛВ переменные указаны заглавными буквами, мы будем использовать и строчные буквы. С учетом того, что в дальнейшем переменные булевых функций обозначаются строчными буквами.

**Пример 1.**

$(x_1 \supset x_2) \sim \neg x_3 \equiv (\neg x_1 \vee x_2) \sim \neg x_3 \equiv ((\neg x_1 \vee x_2)\&\neg x_3) \vee (\neg(\neg x_1 \vee x_2)\&\neg\neg x_3) \equiv$

$\equiv (\neg x_1\&\neg x_3) \vee (x_2\&\neg x_3) \vee (x_1\&\neg x_2\&x_3)$ (ДНФ)

$(x_1 \supset x_2) \sim \neg x_3 \equiv (\neg x_1 \vee x_2) \sim \neg x_3 \equiv (\neg(\neg x_1 \vee x_2) \vee \neg x_3)\&(\neg\neg x_3 \vee (\neg x_1 \vee x_2)) \equiv$

$\equiv ((x_1\&\neg x_2) \vee \neg x_3)\&(x_3 \vee \neg x_1 \vee x_2) \equiv (x_1 \vee \neg x_3)\&(\neg x_2 \vee \neg x_3)\&(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ (КНФ)

Приведем формулу к КНФ через двойственную к ДНФ. Возьмем $F_1$ равную ДНФ.

$$F_1 \equiv (\neg x_1\&\neg x_3) \vee (x_2\&\neg x_3) \vee (x_1\&\neg x_2\&x_3) \equiv$$

$$\equiv \left(\left((\neg x_1\&\neg x_3) \vee (x_2\&\neg x_3) \vee (x_1\&\neg x_2\&x_3)\right)^*\right)^* \equiv$$

$$\equiv ((\neg x_1 \vee \neg x_3)\&(x_2 \vee \neg x_3)\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3))^*$$

Приведем формулу к ДНФ. Применим законы дистрибутивности. Тождественно ложные элементарные конъюнкции (содержащие переменную и ее отрицание одновременно) не записываем.

$$(\neg x_1 \vee \neg x_3)\&(x_2 \vee \neg x_3)\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \equiv (\neg x_3 \vee (\neg x_1\&x_2))\&(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \equiv$$

$$\equiv (\neg x_3\&x_1) \vee (\neg x_3\&\neg x_2) \vee (\neg x_1\&x_2\&x_3) \text{ –ДНФ.}$$

Двойственная формула совпала с КНФ, полученной первым способом.

$$(x_1 \vee \neg x_3)\&(\neg x_2 \vee \neg x_3)\&(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

## СДНФ и СКНФ
## (Совершенные ДНФ и КНФ)

**Определение 1**. Пусть формула F зависит от списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$.

Говорят, что $F$ находится в ***совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)*** относительно этого списка, если выполняются следующие условия:

1) $F$ находится в ДНФ;

2) каждая элементарная конъюнкции содержит все переменные, причем на $i$-м месте стоит либо переменная $X_i$, либо ее отрицание.

3) все элементарные конъюнкции различны.

Например, $(X_1\&\neg X_2\&X_3) \vee (\neg X_1\&X_2\&X_3)$ находится в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, X_2, X_3 >$.

**Определение 2.** Пусть формула $F$ зависит от списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$

Говорят, что $F$ находится в ***совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)*** относительно этого списка, если выполняются следующие условия:

1) $F$ находится в КНФ;

2) каждая элементарная дизъюнкции содержит все переменные, причем на $i$-м месте стоит либо переменная $X_i$, либо ее отрицание.

3) все элементарные дизъюнкции различны.

Например, $(X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) \& (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3)$ находится в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, X_2, X_3 >$.

**Определение 2'.** Пусть формула $F$ зависит от списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$.

Говорят, что $F$ находится в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ), если она двойственная к СДНФ.

**Теорема 1 (о приведении формулы к СДНФ).**

Пусть формула $F$ зависит от списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$ и $F$ – не тождественно-ложная формула. Тогда существует такая формула $\tilde{F}$, что $F \equiv \tilde{F}$ и $\tilde{F}$ находится в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$. Формула $\tilde{F}$ определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных конъюнкций.

***Доказательство конструктивное.***

### Алгоритм построения СДНФ

1. $F_1 \equiv F$ ($F_1$ в ДНФ можно построить по теореме, доказанной выше).
2. Удаляем конъюнкции, в которых одновременно присутствует какая-нибудь переменная и ее отрицание ($\dots \& X_i \& \dots \& \neg X_i \dots$), т.к. для произвольной формулы $D$ $X_i \& \neg X_i \equiv Л$, $Л \& D \equiv Л$, $Л \vee D \equiv D$. Получим
$$F_2 \equiv F_1$$
3. Из нескольких вхождений $X_i$ или нескольких вхождений $\neg X_i$ по закону идемпотентности оставляем только одно вхождение. $X_i \& X_i \equiv X_i$, $\neg X_i \& \neg X_i \equiv \neg X_i$. Получим
$$F_3 \equiv F_2$$
4. В каждой элементарной конъюнкции должны быть все переменные. Добавляем недостающую переменную $X_i$ по закону расщепления $C \equiv (C \& X_i) \vee (C \& \neg X_i)$.
$$F_4 \equiv F_3$$
5. Переменную $X_i$ или её отрицание ставим на i-е место, используя закон коммутативности: $X_i \& X_j \equiv X_j \& X_i$. Получим
$$F_5 \equiv F_4$$
6. $C \vee C \equiv C$ – оставляем одно вхождение каждой элементарной конъюнкции. Получим $F_6 \equiv F_5$ и $\tilde{F} \equiv F_6$ –искомая СДНФ.
Ч.т.д.

**Теорема 2 (о приведении формулы к СКНФ).**

Пусть формула $F$ зависит от списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$ и $F$ – не тождественно-истинная формула. Тогда существует такая формула $\tilde{F}$, что $F \equiv \tilde{F}$ и $\tilde{F}$ находится в СКНФ относительно списка переменных $< X_1, \dots, X_n >$. Формула $\tilde{F}$ определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных дизъюнкций.

***Доказательство конструктивное.***

### Алгоритм построения СКНФ

1. $F_1 \equiv F$ ($F_1$ в КНФ можно построить по теореме, доказанной выше).
2. Удаляем элементарные дизъюнкции, в которых одновременно присутствует какая-нибудь переменная и ее отрицание $(\dots \vee X_i \vee \dots \vee \neg X_i \dots)$, т.к. для произвольной формулы $D$ выполняется И $\vee D \equiv$ И, И$\&D \equiv D$. Получим
$$F_2 \equiv F_1$$
3. Из нескольких вхождений $X_i$ или $\neg X_i$ оставляем только одно вхождение.
$X_i \vee X_i \equiv X_i, \quad \neg X_i \vee \neg X_i \equiv \neg X_i$. Получим
$$F_3 \equiv F_2$$
4. В каждой элементарной дизъюнкции должны быть все переменные. Добавляем недостающую переменную $X_i$ по закону расщепления $C = (C \vee X_i) \& (C \vee \neg X_i)$.
$$F_4 \equiv F_3$$
5. Переменную $X_i$ или её отрицание ставим на $i$-место, используя закон коммутативности $X_i \vee X_j \equiv X_j \vee X_i$. Получим
$$F_5 \equiv F_4$$
6. $C \& C = C$ – оставляем одно вхождение каждой элементарной дизъюнкции. Получим $F_6 \equiv F_5$ и $\tilde{F} = F_6$ – искомая СКНФ.

Ч.т.д.

Доказательство по закону двойственности аналогично доказательству приведения формулы в КНФ.

**Пример 2.**

Найдем СДНФ следующей формулы, находящейся в ДНФ.

$$(\neg x_1 \& \neg x_3 \& x_1) \vee (x_2 \& \neg x_3 \& x_2) \vee (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \overset{2}{\Leftrightarrow} \text{Л} \vee (x_2 \& \neg x_3 \& x_2) \vee (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \overset{3}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{3}{\Leftrightarrow} (x_2 \& \neg x_3) \vee (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \overset{4}{\Leftrightarrow} (x_2 \& \neg x_3 \& x_1) \vee (x_2 \& \neg x_3 \& \neg x_1) \vee (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \overset{5}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{5}{\Leftrightarrow} (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \vee (\neg x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \vee (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \overset{6}{\Leftrightarrow} (x_1 \& x_2 \& \neg x_3) \vee (\neg x_1 \& x_2 \& \neg x_3).$$

## Булевы функции

**Определение 1.** Функция $f(x_1 \dots x_n)$, аргументы которой определены на множестве $\{0; 1\}$ и которая сама принимает значения из множества $\{0; 1\}$ называется ***булевой функцией***. $f: \{0; 1\}^n \to \{0; 1\}$.

Каждую булеву функцию можно задать таблицей из $2^n$ строк (где $n$ – число аргументов функции), в каждой строке которой пишется один из различных двоичных наборов значений аргументов и соответствующее значение функции на этом наборе.

Всего булевых функций от $n$ переменных – $2^{2^n}$. При $n = 2$ число булевых функций равно $2^{2^2} = 16$.

Сопоставим истинностному значению И число 1, а истинностному значению Л – 0. Тогда любой формуле логики высказываний соответствует определенная булева функция. Заметим, что если формуле $A$ соответствует булева функция $f_1$ , а формуле $B$ – булева функция $f_2$ и $A \equiv B$, то $f_1 = f_2$ (т.е. значения функций $f_1$ и $f_2$ совпадают на всех наборах значений их булевых переменных).

| x | y | $f_1(x,y)$ | $f_2(x,y)$ | $f_3(x,y)$ | $f_4(x,y)$ | $f_5(x,y)$ | $f_6(x,y)$ | $f_7(x,y)$ | … | $f_{15}(x,y)$ | $f_{16}(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 |
| | | const | const | $x\&y$ | $x \vee y$ | $x \supset y$ | $x \sim y$ | $x + y$ | … | | |

Каждой формуле ЛВ соответствует булева функция, если положить И – 1; Л – 0.

**Пример 3.** Зададим табличным способом булеву функцию $f_A(x,y,z)$, соответствующую рассматриваемой формуле $A = \neg(Y\&\neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $\neg Z$ | $Y\&\neg Z$ | $\neg(Y\&\neg Z)$ | $\neg Y$ | $\neg X$ | $\neg Y \supset \neg X$ | $\neg(\neg Y \supset \neg X)$ | $f_A(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Далее будут доказаны теоремы, которые позволят каждой булевой функции поставить в соответствие формулу логики высказываний.

## Представление булевой функции формулами в СДНФ и СКНФ

**Теорема 1 (**о представлении булевой функции формулой в СДНФ).

Для любой булевой функции $f(x_1 ... x_n) \not\equiv 0$, существует формула $F$, которая находится в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, ..., X_n >$ и выражает булеву функцию $f(x_1 ... x_n)$. Формула $F$ определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Обозначим

$$X_i{}^s = \begin{cases} X_i, \text{если } s = 1 \\ \neg X_i, \text{если } s = 0 \end{cases}.$$

И для оценок, принадлежащих множеству $\{0; 1\}$ будет выполняться

$$s^t = \begin{cases} s, \text{если t} = 1 \\ \neg s, \text{если t} = 0 \end{cases}.$$

$s, t \in \{0,1\}$

Назовем элементарную конъюнкцию $X_1{}^{s_1} \& ... \& X_n{}^{s_n}$ ***ассоциированной*** **с оценкой** $< s_1, ..., s_n >$.

Например, для оценки $< 0, 1, 0 >$ списка переменных $< X_1, X_2, X_3 >$ ассоциированной с ней элементарной конъюнкцией является

$$X_1{}^0 \& X_2{}^1 \& X_3{}^0 = \neg X_1 \& X_2 \& \neg X_3.$$

**Лемма 1.** Конъюнкция $X_1^{t_1} \& X_2^{t_2} \& \dots \& X_n^{t_n}$, ассоциированная с оценкой $< t_1, t_2, ..., t_n >$, принимает значение И (или 1) на оценке $< t_1, ..., t_n >$ и только на ней.

***Доказательство:***

1) Значение конъюнкции $X_1^{t_1} \& X_2^{t_2} \& \dots \& X_n^{t_n}$ на оценке $< t_1, t_2, ..., t_n >$:
$t_1^{t_1} \& t_2^{t_2} \& \dots \& t_n^{t_n} \equiv 1 \& 1 \& ... \& 1 = 1$(И), т.к.

$$t_i^{t_i} = \begin{cases} 0^0 = \neg 0 = 1 \\ 1^1 = 1 \end{cases}.$$

2) Для любой оценки списка переменных $< s_1, ..., s_n > \neq < t_1, ..., t_n >$ значение конъюнкции $X_1^{t_1} \& X_2^{t_2} \& \dots \& X_n^{t_n} = 0$(Л). Так как существует $t_j \neq s_j$:

$$s_j{}^{t_j} = \begin{cases} 0^1 = 0 \\ 1^\circ = \neg 1 = 0 \end{cases}. \text{ И } s_1{}^{t_1} \& ... \& s_j{}^{t_j} \& \dots \& s_n{}^{t_n} \equiv A \dots \& 0 \& \dots B \equiv 0(Л).$$

Ч.т.д.

***Доказательство теоремы 1*** . *Конструктивное с обоснованием.*

### *Алгоритм построения СДНФ для функции $f(x_1, ..., x_n) \not\equiv 0$, заданной таблицей*

Приведем алгоритм построения для булевой функции $f(x_1 ... x_n) \not\equiv 0$ формулы $F$, находящейся в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, ..., X_n >$ и выражающей булеву функцию $f(x_1 ... x_n)$.

1. Выберем в таблице булевой функции $f$ все те оценки, на которых $f$ принимает значение 1 (так как $f$ не равна тождественно 0, такие оценки (строки) найдутся). Отмечаем все единицы функции символом *.

2. Для оценки списка переменных в каждой выбранной строке строим ассоциированную с ней элементарную конъюнкцию.

$< t_1, \dots, t_n >: f(t_1, \dots, t_n) = 1$ строим конъюнкцию $x_1{}^{t_1} \& \dots . \& x_n{}^{t_n}$.

**Пример 4**. Функция $f(x, y, z)$ задана таблично.

| x | y | z | $f(x,y,z)$ | СДНФ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1* | $x^1 \& y^1 \& z^1 = x \& y \& z$ |
| 1 | 1 | 0 | 1* | $x^1 \& y^1 \& z^0 = x \& y \& \neg z$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1* | $x^1 \& y^0 \& z^0 = x \& \neg y \& \neg z$ |
| 0 | 1 | 1 | 1* | $x^0 \& y^1 \& z^1 = \neg x \& y \& z$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1* | $x^0 \& y^0 \& z^1 = \neg x \& \neg y \& z$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |

3. Составляем дизъюнкцию всех полученных в пункте 2 элементарных конъюнкций. Построим формулу

$$F = \bigvee (x_1{}^{t_1} \& \dots . \& x_n{}^{t_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем оценкам $< t_1, \dots, t_n >$, для которых $f(t_1, \dots, t_n) = 1$ . В результате получим СДНФ, выражающую формулу $F$

$$\boldsymbol{F = (x \& y \& z) \vee (x \& y \& \neg z) \vee (x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (\neg x \& \neg y \& z).}$$

***Обоснование табличного метода построения СДНФ.***

Докажем, что построенная таким способом формула F в СДНФ выражает данную функцию, т.е.

1)$f(t_1, \dots, t_n) = 1 \Rightarrow F|_{<t_1, \dots, t_n>} = 1$

2)$f(t_1, \dots, t_n) = 0 \Rightarrow F|_{<t_1, \dots, t_n>} = 0$

Если функция на оценке $< t_1, \dots, t_n >$, принимает значение 1, то ассоциированная с ней конъюнкция входит в СДНФ: $F = (x_1{}^{t_1} \& \dots . \& x_n{}^{t_n}) \vee D, D -$остальная часть СДНФ. По лемме на оценке $< t_1, \ldots, t_n >$ ассоциированная конъюнкция принимает значение 1. Следовательно, $F|_{<t_1,\ldots,t_n>} = 1 \vee D = 1$.

Если функция на оценке $< s_1, \ldots, s_n >$: принимает значение 0, то $F = 0$, т.к. $F$ не содержит ассоциированных с оценкой $< s_1, \ldots, s_n >$ конъюнкций (по лемме другие конъюнкции на этой оценке равны нулю): $F = 0 \vee \ldots \vee 0 = 0$.

***Покажем единственность построения СДНФ***. От противного.

Пусть для функции $f$ существуют две формулы в СДНФ, причем $F_1 \neq F_2$ с точностью до перестановки элементарных конъюнкций. И пусть для определенности существует ассоциированная конъюнкция $X_1^{s_1} \& \ldots \& X_n^{s_n}$, которая содержится в $F_1$, но не содержится в $F_2$. Тогда на оценке $< s_1, \ldots, s_n >$:

$F_1|_{<s_1,\ldots,s_n>} = 1$

$F_2|_{<s_1,\ldots,s_n>} = 0$

Следовательно, формулы $F_1$ и $F_2$ не могут выражать одну и ту же функцию.

**Теорема 2.** (О представлении булевой функции формулой в СКНФ).

Для любой булевой функции $f(x_1 \ldots x_n) \not\equiv 1$, существует формула $F$, которая находится в СКНФ относительно списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$ и выражает булеву функцию $f(x_1 \ldots x_n)$. Формула $F$ определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Назовем дизъюнкцию $X_1^{1-t_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-t_n}$ ассоциированной с оценкой $< t_1, \ldots, t_n >$.

Например, для оценки $< 0, 1, 0 >$ списка переменных $< X_1, X_2, X_3 >$ ассоциированной с ней элементарной дизъюнкцией является

$$X_1^{1-0} \vee X_2^{1-1} \vee X_3^{1-0} = X_1^{1} \vee X_2^{0} \vee X_3^{1} = X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3.$$

**Лемма 2**. Дизъюнкция $X_1^{1-t_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-t_n}$, ассоциированная с оценкой $< t_1, \ldots, t_n >$, принимает значение 0(Л) на оценке $< t_1, \ldots, t_n >$ и только на ней.

***Доказательство*** аналогично доказательству леммы 1.

***Доказательство теоремы 2.*** Приведем алгоритм построения для булевой функции $f(x_1 \ldots x_n) \not\equiv 1$ формулы $F$, находящейся в СКНФ относительно списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$ и выражающей функцию $f$.

***Алгоритм построения СКНФ для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 1$, заданной таблицей***

1. Выберем в таблице булевой функции $f$ все те оценки (строки), на которых $f$ принимает значение 0 (так как $f$ не равна тождественно 1, такие строки найдутся). Отмечаем все нули функции.
2. Для оценки списка переменных в каждой выбранной строке строим ассоциированную с ней элементарную дизъюнкцию $X_1^{1-t_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-t_n}$.
3. Составляем конъюнкцию всех полученных в пункте 2 элементарных дизъюнкций.

$$F = \&(X_1^{1-t_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-t_n})$$

Обоснование – аналогично СДНФ.

**Пример 5**. Построим СКНФ для функции из примера 4.

| x | y | z | $\boldsymbol{f(x,y,z)}$ | **СКНФ** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** | **1*** | |
| **1** | **1** | **0** | **1*** | |
| **1** | **0** | **1** | **0** | $\boldsymbol{x^{1-1} \vee y^{1-0} \vee z^{1-1} = x^0 \vee y^1 \vee z^0 = \neg x \vee y \vee \neg z}$ |
| **1** | **0** | **0** | **1*** | |
| **0** | **1** | **1** | **1*** | |
| **0** | **1** | **0** | **0** | $\boldsymbol{x^{1-0} \vee y^{1-1} \vee z^{1-0} = x^1 \vee y^0 \vee z^1 = x \vee \neg y \vee z}$ |
| **0** | **0** | **1** | **1*** | |
| **0** | **0** | **0** | **0** | $\boldsymbol{x^{1-0} \vee y^{1-0} \vee z^{1-0} = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x \vee y \vee z}$ |

$$\boldsymbol{F = (\neg x \vee y \vee \neg z)\&(x \vee \neg y \vee z)\&(x \vee y \vee z).}$$

Из приведенных теорем следует еще один способ построения СДНФ и СКНФ заданной формулы.

***Алгоритм построения СДНФ (СКНФ) для формулы A***

1) Строим таблицу истинности для формулы $A$: И – 1, Л – 0. Получим булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$

2) По функции строим СДНФ (СКНФ).

Из единственности построения формулы в СДНФ (СКНФ) следует единственность формулы в СДНФ (СКНФ), равносильной данной (теорема была в предыдущем разделе, но единственность мы не доказали).

Итак, каждой формуле $A$ соответствует булева функция:

$A \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow$ функция единственным образом представлена в СДНФ (СКНФ).