Лекция 1

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

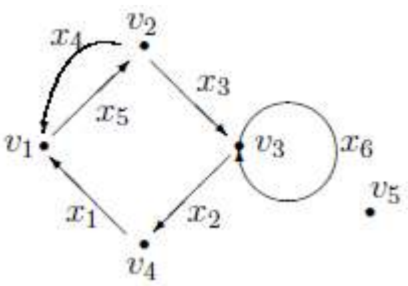
ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ.

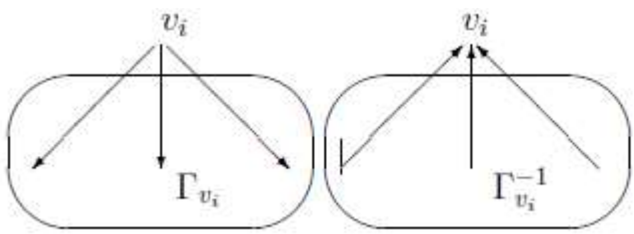
ГРАФЫ И БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Будем рассматривать конечные графы.

Определение 1. Ориентированным графом $G =< V, \mathit{\Gamma} >$ называется упорядоченная пара, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ – конечное непустое множество вершин графа, множество $\mathit{\Gamma} = \{x_1, \ldots x_m\}$ – множество дуг графа.

Каждая дуга x_k – упорядоченная пара вершин $x_k =< v_i, v_j >$; v_i – начало дуги, v_j – конец дуги $< v_i, v_j >$. Дуга x_k исходит из v_i, заходит в v_j. Вершины v_i, v_j смежны. Дуга x_k инцидентна вершинам v_i и v_j, а вершины инцидентны дуге. Вершина, которая не имеет инцидентных ей дуг – изолированная. Дуга $< v_i, v_i >$ – петля.





$$\Gamma_{v_i} = \{v_j \mid \exists < v_i, v_j > \in \mathit{\Gamma}\}$$

$$\Gamma_{v_2} = \{v_1, v_3\}$$

$$\Gamma^{-1}_{v_i} = \{v_j \mid \exists < v_j, v_i > \in \mathit{\Gamma}\}$$

$$\Gamma^{-1}_{v_1} = \{v_2, v_4\}$$

Определение 2. Последовательность дуг графа, такая что начало следующей дуги совпадает с концом предыдущей является путем. Контур – путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом последней (замкнутый путь).

$v_1 \to v_4$ – путь; через дуги: $\{x_5, x_3, x_2\}$, через вершины: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

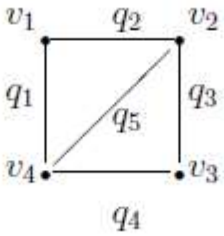
$v_1 \to v_1$ – контур; через дуги: $\{x_5, x_3, x_2, x_1\}$, через вершины: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\}$.

Путь (контур) – простой, если все его дуги различны. Путь (контур) – элементарный, если все его вершины различны (в контуре – кроме первой и последней).

Путь v_1, v_2, v_1, v_2 – не является ни простым, ни элементарным.

Определение 3. Неориентированным графом $G =< V, Q >$ называется упорядоченная пара, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – конечное непустое множество вершин графа, $Q = \{q_1, \dots q_m\}$ множество ребер графа.

Каждое ребро $q_k = (v_i, v_j) = \{v_i, v_j\}$.



Определение 4. Цепь (маршрут) – последовательность ребер, которую заданием ориентации можно превратить в путь. Цикл – замкнутая цепь (введением ориентации можно превратить в контур).

Цепи и циклы аналогично бывают простые и элементарные.

Орграф	**Неориентированный граф**
дуга	**ребро**
путь	**цепь (маршрут)**
контур	**цикл**

Граф – иллюстрация бинарных отношений на конечных множествах. Множество дуг орграфа соответствует бинарному отношению на множестве вершин. Если граф неориентированный, то это симметричное отношение. Каждому графу соответствует отношение, а каждому отношению соответствует граф.

Матричное задание графов

Способы матричного задания графов:

1. Матрица смежности.
2. Матрица инцидентности.

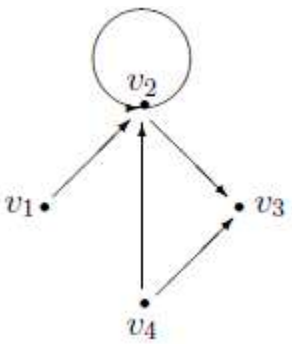
Определение 1. Матрица смежности ориентированного графа – квадратная матрица порядка n (n – число вершин графа) $A = ||a_{ij}||$ с элементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } \exists < v_i, v_j > \in X \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Определение 2. Матрица смежности неориентированного графа – квадратная матрица порядка n: $A = ||a_{ij}||$ с элементами

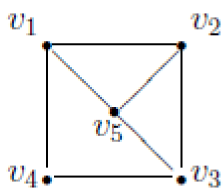
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \quad \text{если } (v_i, v_j) \in Q \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Пример 1.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности неориентированного графа симметрическая.

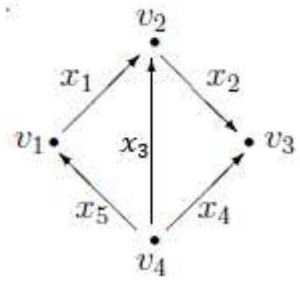
Определение 3. Матрица инцидентности ориентированного графа – матрица порядка $n \times m$ (n – число вершин графа; m – число дуг) : $B_{n \times m} = \left\| b_{ij} \right\|$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{если дуга } x_j \text{ исходит из } v_i, \\ 1, \text{если дуга } x_j \text{ заходит в } v_i \text{ ,} \\ 0, \text{если дуга } x_j \text{ не инцидентна } v_i. \end{cases}$$

Определение 4. Матрица инцидентности неориентированного графа – матрица порядка $n \times m$: $B_{n\times m} = \left\|b_{ij}\right\|$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребро } q_j \text{ инцидентно } v_i, \\ 0, \text{если ребро } q_j \text{ не инцидентно } v_i. \end{cases}$$

Пример 3.

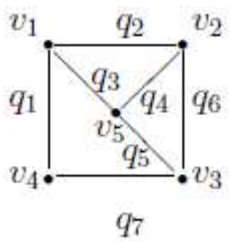


$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Свойство: сумма строк матрицы инцидентности орграфа равна нулевой строке. Доказано, что

$$rg\, B = n - 1.$$

Пример 4.



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Связность в графе

Определение 1. Неориентированный граф $G =< V, Q >$ – связный, если любые его вершины v_i, v_j соединены цепью.

Определение 2. Компонента связности графа – максимальный связный подграф, т.е. не является подграфом никакого другого связного подграфа.

Определение 3. Матрица связности неориентированного графа – квадратная матрица порядка n: $S = ||s_{ij}||$ с элементами

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если существует цепь из } v_i \text{ в } v_j \\ \quad 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Определение 4. Ориентированный граф $G =< V, Г >$ – односторонне (слабо) связный, если для любой пары вершин $v_i, v_j (i \neq j)$ существует путь из v_i в v_j или из v_j в v_i.

Определение 5. Ориентированный граф $G =< V, Г >$ – сильно связный, если для любой пары вершин $v_i, v_j (i \neq j)$ существуют путь и из v_i в v_j и из v_j в v_i.

Аналогично определяются компоненты односторонней и сильной связности.

Определение 6. Матрица односторонней связности орграфа – квадратная матрица порядка n: $T = ||t_{ij}||$ с элементами

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если существует путь из } v_i \text{ в } v_j \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Определение 7. Матрица сильной связности орграфа – квадратная матрица порядка n: $\bar{S} = ||\bar{s}_{ij}||$ с элементами

$$\bar{s}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если существует путь из } v_i \text{ в } v_j \text{ и из } v_j \text{ в } v_i \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Алгоритм нахождения числа путей длины k в орграфе

Утверждение 1. Число путей (цепей, далее везде) длины k из вершины v_i в v_j орграфа $G =< V, Г >$ с матрицей смежности $A = \left|\left|a_{ij}\right|\right|$ определяет элемент a_{ij}^{k} матрицы $A^{\mathrm{k}} = ||a_{ij}^{\mathrm{k}}||$. (Умножение матриц определяется обычным образом)

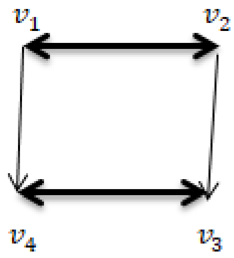
Докажем индукцией по k.

1. Для $k = 1$ получаем просто матрицу смежности $A = ||a_{ij}||$.
2. Предположим, что справедливо: элемент a_{ij}^{k} матрицы $A^{\mathrm{k}} = ||a_{ij}^{\mathrm{k}}||$ определяет число путей длины k из вершины v_i в v_j (обозначим – $\#P(v_i, v_j, k)$).
3. Докажем справедливость утверждения для $k + 1$.

   $\#P(v_i, v_j, k + 1) = \#P(v_i, v_1, k))\cdot \#P(v_1, v_j, 1) + \#P(v_i, v_2, k))\cdot \#P(v_2, v_j, 1) + \ldots$
   $+ \#P(v_i, v_n, k))\cdot \#P(v_n, v_j, 1)$

   По индуктивному предположению число путей длины k из вершины v_i в вершину v_t равно a_{it}^{k}, $t = 1,2, \ldots, n$, т.е. $\#P(v_i, v_t, k) = a_{it}^{\mathrm{k}}$, а по определению матрицы смежности $\#P(v_t, v_j, 1) = a_{tj}^1$. Следовательно,
   $\#P(v_i, v_j, k + 1) = a_{i1}^{\mathrm{k}} \cdot a_{1j}^1 + a_{i2}^{\mathrm{k}} \cdot a_{2j}^1 + \ldots + a_{in}^{\mathrm{k}} \cdot a_{nj}^1 = a_{ij}^{\mathrm{k}+1}$.

Пример 1.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Существуют три пути из v_1 в v_4 , содержащие по 3 дуги (длины 3).

Алгоритмы Уоршалла нахождения матрицы S связности неориентированного графа по матрице смежности A (матрицы односторонней связности T орграфа)

Так как матрицы булевы, введем операции:

$$C \vee D = \left\|c_{ij} \vee d_{ij}\right\|, \quad C \& D = \left\|c_{ij} \& d_{ij}\right\|, \quad C * D = \left\|q_{ij}\right\|: \quad q_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} \left(c_{ik} \& d_{kj}\right).$$

Первый алгоритм Уоршалла

$$S = E \vee A \vee A^2 \vee \ldots \vee A^{n-1},$$

$A^k = \underbrace{A * A * \ldots * A}_{k}$; A^k содержит дуги, соединяющие путь (цепь) из k дуг.

Для матрицы односторонней связности T аналогично: $T = E \vee A \vee A^2 \vee \ldots \vee A^{n-1}$.

Множество дуг — это фактически упорядоченные пары, входящие в отношение ρ: $\Gamma = \rho$. Отношение можно задавать матрицей смежности соответствующего графа.

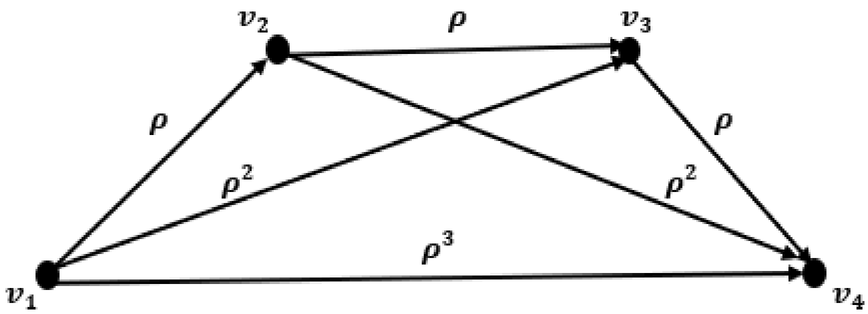
$Tr\rho$ – транзитивное замыкание отношения ρ

– наименьшее транзитивное отношение, содержащее ρ:

$$Tr\rho = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^{n-1}.$$

Если матрица A задает отношение, то по формуле Уоршалла (без единичной матрицы) можно найти матрицу транзитивного замыкания этого отношения.

Пример 2. Рассмотрим граф отношения ρ.



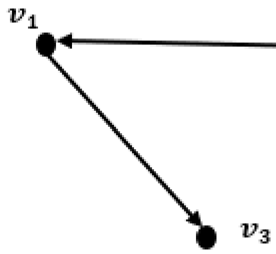
$$TrA = A \vee A^2 \vee A^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$TrA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.

Рассмотрим орграф на рис.1.



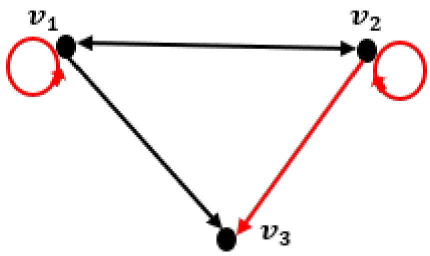
Матрица смежности орграфа $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Вычислим матрицу односторонней связности.

$$T = E \vee A \vee A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица транзитивного замыкания соответствующего отношения

$$TrA = A \vee A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Рассмотрим ещё один алгоритм Уоршалла, который используется при написании программ. Второй алгоритм имеет вычислительную сложность $O(n^3)$, что соответствует возведению матрицы в квадрат. Алгоритм также позволяет найти матрицу связности S неориентированного графа и односторонней связности T орграфа, а также матрицу смежности транзитивного замыкания отношения (матрица E в нулевой итерации отсутствует).

Второй алгоритм Уоршалла (итерационный)

Утверждение 2. Пусть $G =< V, Q >$ – неориентированный граф с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и матрицей смежности A, и пусть $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ – последовательность матриц порядка n, элементы которых вычисляются по следующей итерационной формуле:

$S^{(0)} = E \vee A;$

где E – единичная матрица порядка n;

$S^{(k)} = ||s_{ij}^{(\mathrm{k})}||, \quad s_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k-1)} \vee (s_{ik}^{(k-1)} \& \, s_{kj}^{(k-1)}), \quad k = 1,2, \dots, n.$

Тогда $S^{(n)} = S.$

Доказательство (Обоснование алгоритма).

Достаточно доказать, что элемент $s_{ij}^{(k)} = 1$ тогда и только тогда, когда существует цепь (путь) из v_i в v_j, промежуточные вершины которой могут быть только из множества $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Покажем, что если $s_{ij}^{(k)} = 1$, то существует цепь (путь) из v_i в v_j, проходящая через вершины $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Метод индукции по номеру итерации:

1) $S^{(0)} = A \vee \mathrm{E}$ – нулевая индукция справедлива, т.к. нет промежуточных вершин.

2) Пусть из $s_{ij}^{k-1} = 1 \Rightarrow$ существует цепь из v_i в v_j, проходящая через вершины $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ – выполняется.

3) Докажем, что $s_{ij}^{(\mathrm{k})} = 1 \Rightarrow$ существует цепь из v_i в v_j, проходящая через $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

$$s_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k-1)} \vee (s_{ik}^{(k-1)} \& \, s_{kj}^{(k-1)}) = 1$$

1. $s_{ij}^{(k-1)} = 1 \Rightarrow$ по предположению индукции существует цепь из v_i в v_j, проходящая через вершины $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, а значит и через $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

2. $s_{ik}^{(k-1)} \& s_{kj}^{(k-1)} = 1 \Rightarrow s_{ik}^{(k-1)} = 1$ и $s_{kj}^{(k-1)} = 1$.

$s_{ik}^{(k-1)} = 1 \Rightarrow \exists$ путь $v_i \to v_k$: $\underbrace{v_i, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}}_{\text{через } (v_1, \ldots, v_{k-1})}, v_k$ – по предположению индукции

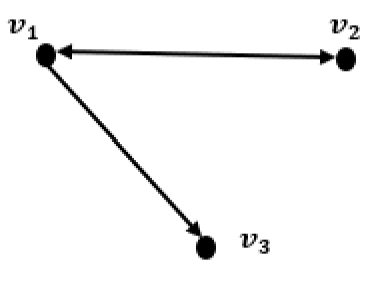
$$s_{kj}^{(k-1)} = 1 \Rightarrow \exists \text{ путь } v_k \to v_j\text{: } v_k, \underbrace{v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}, v_j}_{\text{через } (v_1, \ldots, v_{k-1})}$$

Соединим две цепи: $v_i, v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}, v_k, v_{j_1}, \ldots v_{j_r}, v_j$ – цепь из v_i в v_j, проходящая через вершины $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k\}$.

Аналогично доказывается обратное утверждение. Если существует путь из v_i в v_j, проходящий через вершины $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k\}$, то $s_{ij}^{(k)} = 1$ (самостоятельно).

Пример 4.

Рассмотрим орграф из примера 3. Найдем матрицу односторонней связности вторым алгоритмом.



Матрица смежности орграфа $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдем $T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)} = T$

0. $T^{(0)} = E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Для нахождения k-й итерации будем использовать формулу

$$\boldsymbol{T^{(k)} = \left\| t_{ij}^{(k)} \right\|, \quad t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \& t_{kj}^{(k-1)} \right).}$$

1. $k = 1, \quad t_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(0)} \vee \left(t_{i1}^{(0)} \& t_{1j}^{(0)} \right)$. Формула сохраняет единицы предыдущей итерации, поэтому вычисляем только элементы, где были нули предыдущей итерации

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$t_{23}^{(1)} = 0 \vee \left(t_{21}^{(0)} \& t_{13}^{(0)} \right) = 1\&1 = 1$

$t_{31}^{(1)} = 0 \vee \left(t_{31}^{(0)} \& t_{11}^{(0)} \right) = 0\&1 = 0$

$t_{32}^{(1)} = 0 \vee \left(t_{31}^{(0)} \& t_{12}^{(0)} \right) = 0\&1 = 0$

Следовательно, $T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $k = 2, t_{ij}^{(2)} = t_{ij}^{(1)} \vee \left(t_{i2}^{(1)} \& t_{2j}^{(1)} \right)$. $T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$t_{31}^{(2)} = 0 \vee \left(t_{32}^{(1)} \& t_{21}^{(1)} \right) = 0\&1 = 0$

$t_{32}^{(2)} = 0 \vee \left(t_{32}^{(1)} \& t_{22}^{(1)} \right) = 0\&1 = 0$

Следовательно, $T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $k = 3, t_{ij}^{(3)} = t_{ij}^{(2)} \vee \left(t_{i3}^{(2)} \& t_{3j}^{(2)} \right)$. $T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$t_{31}^{(2)} = 0 \vee \left(t_{33}^{(2)} \& t_{31}^{(2)} \right) = 1\&0 = 0$

$t_{32}^{(2)} = 0 \vee \left(t_{33}^{(2)} \& t_{32}^{(2)} \right) = 1\&0 = 0$

Следовательно, $T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$

$\bar{\boldsymbol{S}} = \left\|\bar{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{ij}}\right\|$ – **матрица сильной связности орграфа** вычисляется через матрицу односторонней связности Т по формуле:

$$\bar{S} = T \& T^{T}.$$

Очевидно, что $\bar{S}$ симметрична.

Все дуги контуров графа определяются по формуле

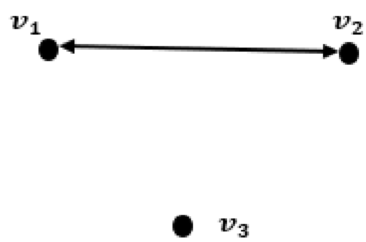
$$K = \bar{S} \& A.$$

Пример 4.

Матрица сильной связности для примера 3:

$$\bar{S} = T \& T^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица контуров для примера 2:



$$K = \bar{S} \& A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Алгоритм нахождения компонент связности неориентированного графа по матрице связности S (компонент сильной связности орграфа по матрице $\bar{S}$)

1. Соответствующие единицам первой строки номера вершин принадлежат первой компоненте связности, $k = 1$. В матрице S обнуляем столбцы (строки), соответствующие номерам вершин первой компоненты связности. Получаем матрицу S_1.

2. Если $S_1 \not\equiv (0)$, то $k = k + 1$. Находим ненулевую строку S_1. Пусть ее номер i_1. Соответствующие единицам i_1-й строки номера вершин принадлежат второй компоненте связности. В матрице S_1 обнуляем столбцы (строки), соответствующие номерам вершин второй компоненты связности. Получаем матрицу S_2.

И т.д.

Процесс заканчивается, когда на -м шаге будет выполнено: матрица $S_t = (0)$. В этом случае все вершины графа уже будут принадлежать какой-нибудь компоненте связности.

Пример 5. Найдем компоненты связности неориентированного графа с матрицей связности

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. В первой строке две единицы: первая и пятая. $k = 1$; $\{v_1, v_5\}$– первая компонента связности. Обнуляем первый и пятый столбцы S получаем матрицу

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. В матрице S_1вторая строка не нулевая, в ней четыре единицы: 2-я, 4-я, 6-я и 9-я. $k = 2$; $\{v_2, v_4, v_6, v_9\}$ – вторая компонента связности. Обнуляем 2-й, 4-й, 6-й и 9-й столбцы S_1 получаем матрицу

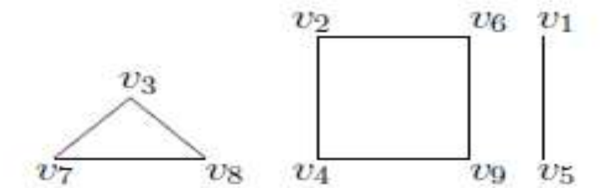
$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. В матрице S_2 третья строка не нулевая, в ней три единицы: 3-я, 7-я и 8-я. $k = 3$; $\{v_3, v_7, v_8\}$ – третья компонента связности. Обнуляем 3-й, 7-й и 8-й столбцы S_2 получаем матрицу

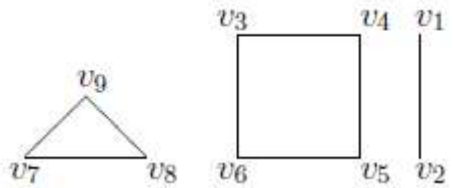
$$S_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

4. Так как матрица $S_3 = (0)$, алгоритм заканчивает свою работу.

Компоненты связности и сам граф представлены на рисунке.



Замечание. Если пронумеровать вершины из одной компоненты связности последовательными номерами, то матрица связности будет состоять из блоков единиц.



$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\ 0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\ 0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1} \end{pmatrix}$$