Лекция 6.

Смежные классы. Фактор-группы.

Сопряженные элементы

Определение 1. Элемент a группы G сопряжен b, если $\exists g \in G: a = g^{-1}bg$.

Если a сопряжен b, то b сопряжен a. Покажем это.

a сопряжен b: $a = g^{-1}bg$. В группе существуют обратные элементы. Домножим равенство слева на $(g = (g^{-1})^{-1})$, а затем справа на g^{-1}. Получим

$$(g^{-1})^{-1}a = bg \Rightarrow (g^{-1})^{-1}ag^{-1} = bgg^{-1} \Rightarrow b = (g^{-1})^{-1}ag^{-1} \Rightarrow \exists g^{-1} \in G.$$

Из последнего равенства следует, что b сопряжен a.

Теорема 1. Подгруппа H – нормальный делитель группы G тогда и только тогда, когда вместе с каждым своим элементом H содержит и все сопряженные.

Доказательство.

1. Докажем, что если H – нормальный делитель, то H содержит вместе с любым своим элементом h и все сопряженные к нему. H – нормальный делитель. Тогда $gH = Hg$, $\forall g \in G$. $\forall h, \exists h' \in \text{H}: gh = h'g$, домножим на $g^{-1}: g^{-1}gh = g^{-1}h'g \Rightarrow h = g^{-1}h'g$ для $\forall g \in G$.

2. Докажем, что если H содержит вместе с любым своим элементом h все сопряженные, то H – нормальный делитель. Пусть для $\forall g \in G$ и $\forall h \in H$ выполняется $g^{-1}hg = h' \in H$. Домножим равенство на $g: gg^{-1}hg = gh' \Rightarrow hg = gh'$. Следовательно, все элементы правого смежного класса являются элементами левого смежного класса (ПСК $\subseteq$ ЛСК). Аналогично $(g^{-1})^{-1}hg^{-1} = h'' \in H \Rightarrow ghg^{-1} = h''$. Домножим равенство на $g: gh = h''g$, следовательно, элементы левого смежного класса являются элементами правого смежного класса (ЛСК $\subseteq$ ПСК). Получим: левые и правые смежные классы совпадают, и H – нормальный делитель: $gH = Hg$, $(\forall g \in G)$.

Фактор-группа

Пусть H – нормальный делитель группы G.

G/H – фактор-множество группы G по нормальной подгруппе H.

Введем операцию на множестве следующим образом:

$A * B = \{a * b \mid a \in A, b \in B\}$.

Очевидно, что $H * H \equiv H$, $(g_1 H) * (g_2 H) = (g_1 g_2)H$, т.к. $H -$ нормальный делитель и $Hg_2 = g_2 H$.

Утверждение 1. Фактор-множество G/H группы G по нормальной подгруппе H является фактор-группой.

Доказательство.

1. Ассоциативность:

   $(g_1 H * g_2 H) * g_3 H = g_1 H * (g_2 H * g_3 H)$ – следует из ассоциативности групповой операции G.

2. Единичный элемент принадлежит фактор-множеству и равен $E = eH$:

   $\boldsymbol{eHgH} = egH = \boldsymbol{gH} = geH = \boldsymbol{gHeH}$ – существует единичный элемент.

3. Для каждого элемента gH множества G/H обратный элемент $(gH)^{-1}$ также принадлежит этому множеству и равен $(gH)^{-1} = g^{-1}H$:

   $\boldsymbol{g^{-1}H} \cdot \boldsymbol{gH} = g^{-1}gH = eH = \boldsymbol{E}$

   $\boldsymbol{gHg^{-1}H} = gg^{-1}H = eH = \boldsymbol{E}$ – все элементы G обратимы.

   $1 \cup 2 \cup 3 \Rightarrow G/H$ – группа.

Пример 1. $G_Z = <\mathbb{Z}, +, 0>$, $H = \{4k\} = \{0; \pm 4; \pm 8; \dots\}$ $k \in \mathbb{Z}$.

В силу коммутативности сложения H – нормальный делитель, следовательно, смежные классы совпадают.

1. $0 + H = H + 0 = E$
2. $1 + H = \{1, 5, -3, 9, -7, \dots\} = H + 1$
3. $2 + H = \{2, 6, -2, 10, -6, \dots\} = H + 2$
4. $3 + H = \{3, 7, -1, 11, -5, \dots\} = H + 3$

Фактор-множество $\frac{G_Z}{H}$={ $H = E, 1 + H, 2 + H,\ 3 + H\}$ является фактор-группой;

$H^{-1} = H,$

$(1 + H) + (3 + H) = (4 + H) = H = E$, следовательно,

$(1 + H)^{-1} = 3 + H$ и $(2 + H)^{-1} = 2 + H.$

Составим таблицу Кэли этой группы с элементами – смежными классами.

Напомним, что $(g_1H) * (g_2H) = (g_1g_2)H$

$+$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{1+H}$	$\boldsymbol{2+H}$	$\boldsymbol{3+H}$
$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{1+H}$	$\boldsymbol{2+H}$	$\boldsymbol{3+H}$
$\boldsymbol{1+H}$	$\boldsymbol{1+H}$	$\boldsymbol{2+H}$	$\boldsymbol{3+H}$	$\boldsymbol{H}$
$\boldsymbol{2+H}$	$\boldsymbol{2+H}$	$\boldsymbol{3+H}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{1+H}$
$\boldsymbol{3+H}$	$\boldsymbol{3+H}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{1+H}$	$\boldsymbol{2+H}$

G_Z/H – циклическая группа: $G_Z/H =< 1 + H > = < 3 + H >.$

Пример 2. Группа самосовмещений квадрата:

$$G_{\square} = \{\varphi_0, \varphi_{\frac{\pi}{2}}, \varphi_{\pi}, \varphi_{\frac{3\pi}{2}}, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}.$$

Таблица Кэли для $G_{\square}$ была уже построена (пред. лекция). Были найдены смежные классы группы $G_{\square}$ по подгруппе $H = \{\varphi_0, \varphi_{\pi}\}$ и показано, что подгруппа $H = \{\varphi_0, \varphi_{\pi}\}$ – нормальный делитель.

Обозначим

$E = \varphi_0 H = \{\varphi_0, \varphi_{\pi}\}$

$A = \varphi_{\frac{\pi}{2}} H = \{\varphi_{\frac{\pi}{2}}, \varphi_{\frac{3\pi}{2}}\}$

$B = \psi_1 H = \{\psi_1, \psi_3\}$

$C = \psi_2 H = \{\psi_2, \psi_4\}$

Составим таблицу Кэли для смежных классов.

$\cdot$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{E}$

Проверим замкнутость:

$A \cdot B = C$, т.к. $A \cdot B = \varphi_{\frac{\pi}{2}} H \cdot \psi_1 H = \left(\varphi_{\frac{\pi}{2}} \cdot \psi_1\right) H = \psi_4 H = \psi_2 H = \{\psi_2, \psi_4\} = C = B \cdot A$

$A \cdot C = B$, т.к. $A \cdot C = \varphi_{\frac{\pi}{2}} H \cdot \psi_2 H = \left(\varphi_{\frac{\pi}{2}} \cdot \psi_2\right) H = \psi_1 H = \{\psi_1, \psi_3\} = B = C \cdot A$

$B \cdot C = A$, т.к. $B \cdot C = \psi_1 H \cdot \psi_2 H = (\psi_1 \cdot \psi_2) H = \varphi_{\frac{\pi}{2}} H = \left\{\varphi_{\frac{\pi}{2}}, \varphi_{\frac{3\pi}{2}}\right\} = A = C \cdot B$

Получим фактор-группу $G_{\square}/H$. Группа из четырех элементов всегда коммутативна. Легко убедиться, что каждый элемент сам себе обратный. Следовательно, $G_{\square}/H$ – четвертная группа Клейна.

В примерах рассмотрены две фактор-группы четвёртого порядка: циклическая и четвертная группа Клейна.

Гомоморфизм групп

Определение 1. Отображение $\varphi: G \to G'$ называется гомоморфизмом, если оно сохраняет групповую операцию:

$\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2)$.

$$g_1, g_2, (g_1 \circ g_2) \in G, \quad \varphi(g_1 \circ g_2), \quad \varphi(g_1) \in G', \varphi(g_2) \in G'.$$

Виды гомоморфизма:

• сюръективный (эпиморфизм), отображение «НА»;

• инъективный (мономорфизм);

• биективный (изоморфизм);

•$\varphi: G \to G$ (эндоморфизм);

•$\varphi: G \to G/H$(естественный гомоморфизм).

Свойства гомоморфизма:

1. $\varphi(e) = e'$ – единичный элемент переходит в единичный.

2. $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ – обратный элемент переходит в обратный.

Ядро и образ гомоморфизма

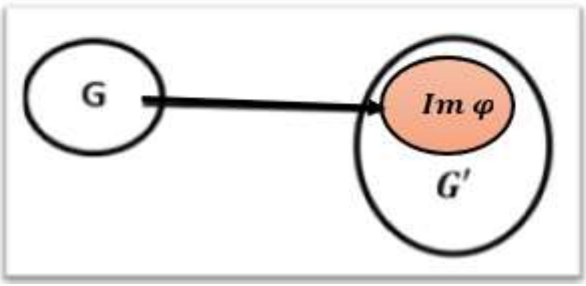
Пусть отображение $\varphi: G \to G'$,

Определение 2. Образ гомоморфизма – это элементы группы G', у которых существует прообраз в группе G:

$Im\ \varphi = \{h \in G' \mid \exists g \in G, \varphi(g) = h\}$.

$Im\ \varphi$ – образ гомоморфизма. $Im\ \varphi \subseteq G'$.

Если $Im\ \varphi = G'$, то $\varphi: G \to G'$, φ – сюръективное отображение G “**на**” G'.



Теорема 1. Образ гомоморфизма $Im\ \varphi$ – подгруппа группы G'.

Доказательство.

1) Т.к. все элементы образа – также элементы группы, то ассоциативность очевидна.
2) $e' \in Im\ \varphi$, т.к. $\varphi(e) = e', e \in G, e' \in G'$. e – прообраз e'. Единичный элемент переходит в единичный.
3) Если $h \in Im\ \varphi \Rightarrow h^{-1} \in Im\ \varphi.$ $h \in Im\ \varphi \ \Rightarrow \ \exists g \in G: h = \varphi(g)$. Тогда

$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = h^{-1}$, следовательно, т.к. $\exists g^{-1} \in G$, то $h^{-1} \in Im\ \varphi$.

4) Замкнутость:

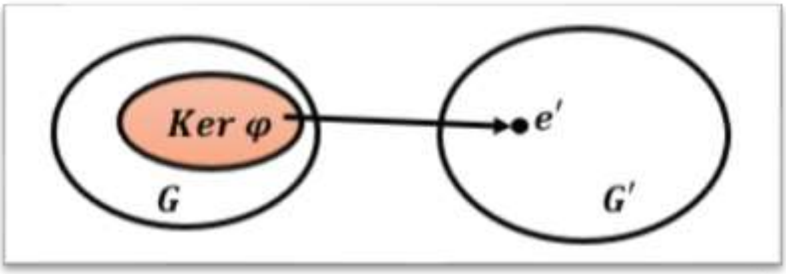
$h_1 \in Im\ \varphi, h_2 \in Im\ \varphi \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in Im\ \varphi$

$\exists g_1 \in G: \varphi(g_1) = h_1, \exists g_2 \in G: \varphi(g_2) = h_2 \Rightarrow$

$h_1 \cdot h_2 = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) \in Im\ \varphi$ (у элемента $h_1 \cdot h_2$ прообраз в $G - (g_1 g_2)$).

Определение 3. Ядро гомоморфизма – все элементы группы G, которые переходят в единичный элемент G':

$$Ker\ \varphi = \{g \mid g \in G, \varphi(g) = e' \in G'\}.$$



Теорема 2. Ядро $Ker\ \varphi$ – нормальная подгруппа группы G.

Доказательство.

I. Покажем, что $Ker\ \varphi$ – подгруппа группы G.

1. $e \subseteq Ker\ \varphi$, т.к. $\varphi(e) = e'$. Единичный элемент переходит в единичный.
2. Если $a \in Ker\ \varphi \Rightarrow a^{-1} \in Ker\ \varphi.$ $\varphi(a) = e' \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = (e')^{-1} = e'$, т.к. обратный элемент переходит в обратный.
3. Замкнутость: $a_1 \in Ker\ \varphi, a_2 \in Ker\ \varphi \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \in Ker\ \varphi$

$$\varphi(a_1) = e', \varphi(a_2) = e' \Rightarrow \varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) = e' \cdot e' = e'.$$

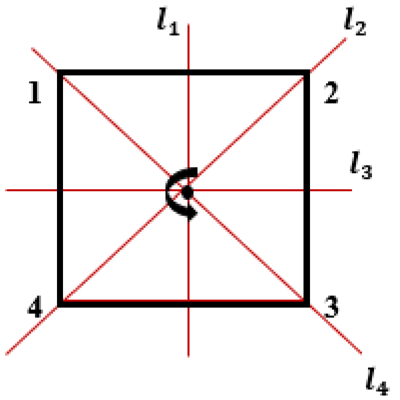
II. Покажем, что $Ker\ \varphi$ – нормальный делитель группы G.

Используем доказанное ранее необходимое и достаточное условие того, что подгруппа является нормальным делителем: ядро – нормальный делитель тогда и только тогда, когда вместе с каждым своим элементом оно содержит и все к нему сопряженные. Покажем, что для $\forall a \in Ker\ \varphi, \forall g \in G$ выполняется $g^{-1}ag \in Ker\ \varphi.$

$$\varphi(g^{-1}ag) = \varphi(g^{-1})\varphi(a)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})e'\varphi(g) = (\varphi(g))^{-1}\varphi(g) = e'.$$

Пример 1. Рассмотрим $G_{\square}$ – группа самосовмещений квадрата.

Группа самосовмещений квадрата: $G_{\square} = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$



$\boldsymbol{\psi_i}$ **соответствует оси** $\boldsymbol{l_i}$

Таблица Кэли:

$\circ$	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_0	ψ_4	ψ_1	ψ_2	ψ_3
φ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1	ψ_3	ψ_4	ψ_1	ψ_2
φ_3	φ_3	φ_0	φ_1	φ_2	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_1
ψ_1	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
ψ_2	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_1	φ_3	φ_0	φ_1	φ_2
ψ_3	ψ_3	ψ_4	ψ_1	ψ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1
ψ_4	ψ_4	ψ_1	ψ_2	φ_3	φ_1	φ_2	φ_3	φ_0

Гомоморфизм групп: $\chi: G_{\square} \to S_4$ зададим следующим образом: каждому элементу группы $G_{\square}$ поставим в соответствие подстановку осей симметрии квадрата (в подстановке будем писать номер оси):

$\varphi_0 \leftrightarrow \pi_0$

$\varphi_{\frac{\pi}{2}} \leftrightarrow (1\ 3)(2\ 4)$

$\varphi_{\pi} \leftrightarrow \pi_0$

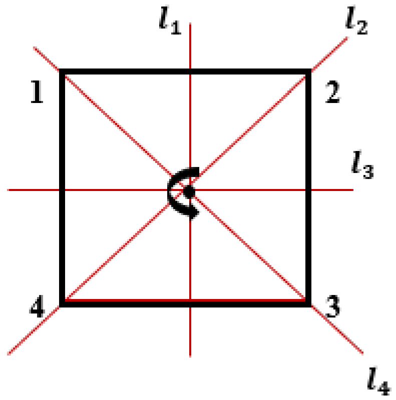
$\varphi_{\frac{3\pi}{2}} \leftrightarrow (1\ 3)(2\ 4)$

$\psi_1 \leftrightarrow (2\ 4)$

$\psi_2 \leftrightarrow (1\ 3)$

$\psi_3 \leftrightarrow (2\ 4)$

$\psi_4 \leftrightarrow (1\ 3)$



$$L = \{\pi_0, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3), (2\ 4)\ \}$$

$L = Im\ G_{\square}$, L – подгруппа S_4.

Отображение $\chi: G_{\square} \to S_4$ не является ни сюръективным, ни инъективным.

Рассмотрим подгруппу в $G_{\square}$:

$H = Ker\,\chi = \{\varphi_0, \varphi_{\pi}\}$ $(\varphi_0, \varphi_{\pi}$ переходят в $\pi_0)$

Фактор-группа $G_{\square}/H$ и соответствующие ей элементы из L:

$E = \varphi_0 H = \{\varphi_0, \varphi_{\pi}\} \leftrightarrow \pi_0$

$A = \varphi_{\frac{\pi}{2}} H = \left\{\varphi_{\frac{\pi}{2}}, \varphi_{\frac{3\pi}{2}}\right\} \leftrightarrow (1\ 3)(2\ 4)$

$B = \psi_1 H = \{\psi_1, \psi_3\} \leftrightarrow (2\ 4)$

$C = \psi_2 H = \{\psi_2, \psi_4\} \leftrightarrow (1\ 3)$

$\circ$	***E***	***A***	***B***	***C***
E	***E***	***A***	***B***	***C***
A	***A***	***E***	***C***	***B***
B	***B***	***C***	***E***	***A***
C	***C***	***B***	***A***	***E***

Каждый элемент сам себе обратен – четвертная группа Клейна.

Отображение $\varphi\colon G_{\square} \to L$ – сюръективный гомоморфизм (у каждого элемента в L есть прообраз, даже два).

Отображение ψ: $G_{\square} \to G_{\square}/H$ – группы $G_{\square}$ в фактор-группу по ядру Н (естественный гомоморфизм группы на свою фактор-группу). $H = Ker\,\chi$.

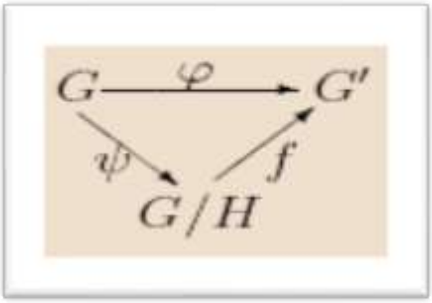
Отображение $f\colon G_{\square}/H \to L$ фактор-группы по ядру в L биективно – изоморфизм.

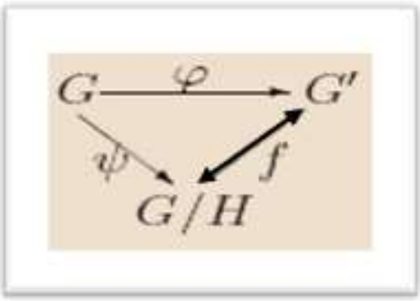
Природа всех сюръективных гомоморфизмов исчерпывается естественным гомоморфизмом, т.е. гомоморфизмом группы на свою фактор-группу по ядру.

Обобщим этот результат.

Теорема (Основная теорема о гомоморфизме)

Пусть φ – сюръективный гомоморфизм группы G в группу G' ($\varphi\colon G \to G'$) с ядром $H = Ker\ \varphi$; ψ – естественный гомоморфизм группы G на свою фактор-группу G/H по ядру $H = Ker\ \varphi$ ($\psi\colon G \to G/H$). Тогда отображение $f\colon G' \to G/H$ – изоморфизм. Причем выполняется $\varphi = \psi \circ f$.





фактически

Естественный гомоморфизм сюръективный: у смежных классов прообразы – элементы этих классов. $f\colon G' \to G/H -$ биекция (можно установить взаимно-однозначное соответствие между элементами фактор-группы G/H и G').