Лекция 14

Устойчивые множества в графе

В этом разделе будем рассматривать орграфы без петель

Внутренне устойчивые множества

Определение 1. Подмножество $S \subseteq V, V = \{v_1, \dots, v_n\}$ вершин орграфа $G =< V, \Gamma >$ называется внутренне устойчивым, если для любой вершины $v_i \in S$: $S \cap \Gamma v_i = \emptyset$. (Вершины попарно не смежны).

Определение 2. Максимальное внутренне устойчивое подмножество графа – подмножество, не являющееся собственным подмножеством никакого другого внутренне устойчивого подмножества этого графа.

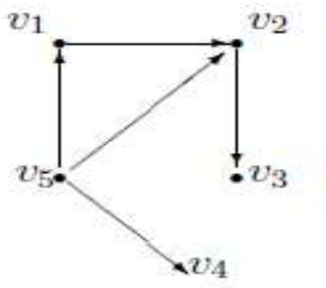


Рис. 1

Максимальные внутренне устойчивые множества: $\{v_1, v_3, v_4\}$

$\{v_2, v_4\}$

$\{v_3, v_5\}$

Максимальное количество вершин в максимальном внутренне устойчивом подмножестве – число внутренней устойчивости. В примере – 3.

Метод Магу

нахождения максимальных внутренне устойчивых подмножеств графа

Введем предикаты:

$$v_i = \text{И}\ (1) \Leftrightarrow v_i \in S$$

$$\alpha(v_i, v_j) = \alpha_{ij} = \text{И} \ \Leftrightarrow v_j \in \Gamma v_i (< v_i, v_j > \in \Gamma)$$

α_{ij} – элементы матрицы смежности графа (И–1, Л–0).

Из определения внутренне устойчивого подмножества графа следует истинность утверждения:

$$\forall v_i, v_j \big(v_j \in \Gamma v_i \text{ или } v_i \in \Gamma v_j\big) \implies \big(v_i \notin S \text{ или } v_j \notin S\big) = \text{И}$$

Запишем истинную формулу на языке логики предикатов:

$$(\forall v_i)(\forall v_j)\Big(\big(\alpha_{ij} \vee \alpha_{ji}\big) \supset \big(\overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big)\Big) = \text{И}$$

$$\big(\alpha_{ij} \vee \alpha_{ji}\big) \supset \big(\overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big) = \neg\big(\alpha_{ij} \vee \alpha_{ji}\big) \vee \big(\overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big) = \big(\overline{\alpha_{ij}} \& \overline{\alpha_{ji}}\big) \vee \big(\overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big)$$
$$= \big(\overline{\alpha_{ij}} \vee \overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big) \& \big(\overline{\alpha_{ji}} \vee \overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big)$$

В силу конечности множества вершин запишем:

$$F = \mathop{\&}_{i=1}^{n} \mathop{\&}_{j=1}^{n} \big(\overline{\alpha_{ij}} \vee \overline{v_i} \vee \overline{v_j}\big) = \text{И} \tag{*}$$

(для конечных множеств $\forall$ заменяем & всех элементов).

Приведем формулу F к сокращенной ДНФ:

$$F = \bigvee_{\substack{\text{по всем конъюнкциям} \\ \text{сокращенной ДНФ}}} \big(\overline{v}_{i_1} \& \overline{v}_{i_2} \& \dots \& \overline{v}_{i_k}\big) = \text{И}.$$

Тогда элементарной конъюнкции $(\overline{v}_{i_1} \& \overline{v}_{i_2} \& \dots \& \overline{v}_{i_k})$ соответствует внутренне устойчивое подмножество $V \backslash \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$.

Утверждение 1. Формула F позволяет найти все **максимальные** внутренне устойчивые подмножества орграфа.

Докажем от противного. Пусть внутренне устойчивое подмножество $V \backslash \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ не является максимальным. Тогда можно добавить еще вершину, например v_{i_1}, и подмножество $V \backslash \{v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ также будет внутренне устойчивым. Но в этом случае в сокращенной ДНФ будут находится одновременно две конъюнкции:

$$\big(\overline{v}_{i_1} \& \overline{v}_{i_2} \& \dots \& \overline{v}_{i_k}\big) \vee \big(\overline{v}_{i_2} \& \dots \& \overline{v}_{i_k}\big) \equiv \big(\overline{v}_{i_2} \& \dots \& \overline{v}_{i_k}\big)$$

Тождество, справедливое по закону поглощения, показывает, что в сокращенной ДНФ может содержаться только одна из этих конъюнкций, соответствующая **максимальному** внутренне устойчивому подмножеству.

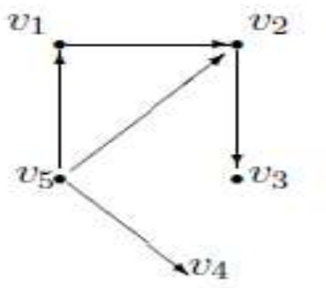
Внешне устойчивые множества

Определение 3. Подмножество T вершин орграфа $G =< V, \Gamma >, T \subseteq V, V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – внешне устойчивое, если для $\forall v_i \notin T$ выполняется $T \cap \Gamma v_i \neq \emptyset$.

(Из $\forall v_i \notin T$ исходит дуга в одну из вершин T)

Определение 4. Минимальное внешне устойчивое подмножество графа – внешне устойчивое подмножество такое, что никакое другое внешне устойчивое подмножество не является его собственным подмножеством.

Пример 2. Для графа, представленного на рис. 1:



Минимальные внешне устойчивые

подмножества: $\{v_2, v_3, v_4\}$

$\{v_1, v_3, v_4\}$

Метод Магу
нахождения минимальных внешне устойчивых подмножеств графа.

Вводим предикаты:

$$v_i = \text{И}\ (1) \Leftrightarrow v_i \in T$$

$$\alpha(v_i, v_j) = \alpha_{ij} = \text{И} \ \Leftrightarrow v_j \in \Gamma v_i (< v_i, v_j > \in \Gamma)$$

α_{ij} – элементы матрицы смежности графа (И–1, Л–0).

Для нахождения внешне устойчивых подмножеств положим $\alpha_{ii} = \text{И}(1)$

Из определения внешне устойчивого подмножества графа следует:

$$\forall v_i (v_i \in T \text{ или } \exists v_j : v_j \in T \text{ и } v_j \in \Gamma v_i) = \text{И}$$

Запишем истинную формулу на языке логики предикатов:

$$(\forall v_i) \left(v_i \vee (\exists v_j)(\alpha_{ij} \& v_j) \right) = \text{И}$$

В силу конечности множества вершин запишем:

$$F = \mathop{\&}_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} \& v_j) = \text{И}. \qquad (**)$$

Приведем формулу F к сокращенной ДНФ:

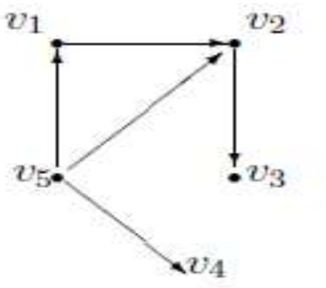
$$F = \bigvee_{\substack{\text{по всем конъюнкциям} \\ \text{сокращенной ДНФ}}} (v_{i_1} \& v_{i_2} \& \dots \& v_{i_k}) = \text{И}$$

Тогда элементарной конъюнкции $(v_{i_1} \& v_{i_2} \& \dots \& v_{i_k})$ соответствует внешне устойчивое подмножество $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$.

Аналогично внутренне устойчивым подмножествам можно показать, что этот метод позволяет найти все **минимальные** внешне устойчивые подмножества.

Пример 3. Для графа, представленного на рис. 1, найдем методом Магу максимальные внутренне и минимальные внешне устойчивые подмножества.

Выпишем матрицу смежности графа (рис.1).



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Найдем максимальные внутренне устойчивые подмножества по формуле $(*)$, которую необходимо привести к сокращенной ДНФ

$$F = (\overline{v_1} \vee \overline{v_2}) \& (\overline{v_2} \vee \overline{v_3}) \& (\overline{v_5} \vee \overline{v_1}) \& (\overline{v_5} \vee \overline{v_2}) \& (\overline{v_5} \vee \overline{v_4}) = \big(\overline{v_2} \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_3})\big) \&$$

$$\& \big(\overline{v_5} \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_2} \& \overline{v_4})\big) = (\overline{v_2} \& \overline{v_5}) \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_2} \& \overline{v_4}) \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_3} \& \overline{v_5}) \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_2} \& \overline{v_3} \& \overline{v_4}) =$$

$$= (\overline{v_2} \& \overline{v_5}) \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_2} \& \overline{v_4}) \vee (\overline{v_1} \& \overline{v_3} \& \overline{v_5})$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\{v_1, v_3, v_4\} \qquad \{v_3, v_5\} \qquad \{v_2, v_4\}$$

Максимальные внутренне устойчивые подмножества графа

2. Найдем минимальные внешне устойчивые подмножества по формуле $(**)$, которую необходимо привести к сокращенной ДНФ.

   По алгоритму рассмотрим матрицу $A \vee E$ (1 на диагонали)

$$A \vee E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Из каждой строчки выписываем дизъюнкции – все единицы и переменные без отрицания.

$$(v_1 \vee v_2)\&(v_2 \vee v_3)\&v_3\&v_4\&(v_1 \vee v_2 \vee v_4 \vee v_5) = (v_1 \vee v_2)\&v_3\&v_4 =$$

$$= (v_1\&v_3\&v_4) \vee (v_2\&v_3\&v_4)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\{v_1, v_3, v_4\} \qquad \{v_2, v_3, v_4\}$$

Минимальные внешне устойчивые подмножества графа.

Полученные подмножества совпадают с подмножествами из примеров 1 и 2, которые мы выписали по определению.

Ядро графа

Определение 5. Ядром называется подмножество вершин орграфа N, одновременно являющееся внешне и внутренне устойчивым.

$$\forall v_i \in N \quad N \cap \Gamma v_i = \emptyset$$

$$\forall v_j \notin N \quad N \cap \Gamma v_j \neq \emptyset$$

Граф может не обладать ядром или обладать несколькими ядрами.

Пример 4.

1. Для графа, представленного на рис. 1, ядром является подмножество $\{v_1, v_3, v_4\}$, являющееся одновременно внутренне и внешне устойчивым.
2. Граф, представленный на рис. 2, имеет два ядра.

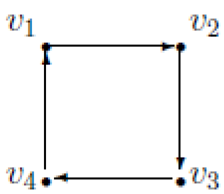


Рис.2

Внутренне и внешне устойчивые подмножества: $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$.

Следовательно, граф имеет два ядра: $\{v_2, v_4\}$ и $\{v_1, v_3\}$.

3. Граф, представленный на рис. 3 не обладает ядром.

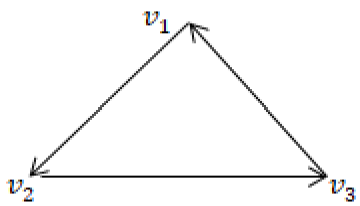


Рис.3

Внутренне устойчивые подмножества: $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$.

Внешне устойчивые подмножества: $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}$.

Ни одно внутренне и внешне устойчивое подмножество не совпадает. Следовательно, граф не имеет ядра.

Утверждение 3. Для того чтобы подмножество $N \subseteq V$ вершин графа $G =< V, \Gamma >$ было ядром, необходимо и достаточно, чтобы оно было максимальным внутренне и минимальным внешне устойчивым подмножеством.

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Докажем необходимость.

Пусть N не является максимальным внутренне устойчивым. Тогда можно добавить еще одну вершину, например v_i, и всё равно $N' = N \cup \{v_i\}$ будет внутренне устойчивым. Из внешней устойчивости N следует, что $N \cap \Gamma v_i \neq \emptyset$, но $N \subseteq N' \Rightarrow N' \cap \Gamma v_i \neq \emptyset$ что противоречит предположению о внутренней устойчивости N'.

Предположим теперь, что N не является минимальным внешне устойчивым. Уберем из него тогда хотя бы одну вершину, получим: $N'' = N \backslash \{v_i\}$. Из внешней устойчивости N'' получим $N'' \cap \Gamma v_i \neq \emptyset$, но $N'' \subseteq N \Rightarrow N \cap \Gamma v_i \neq \emptyset$, что противоречит внутренней устойчивости N.

Устойчивость в неориентированных графах

Определение 4. Внутренне устойчивое подмножество графа – S, в котором никаких две вершины не смежны.

Определение 5. T – внешне устойчивое подмножество неориентированного графа $G =< V, Q >$, если $\forall v_i \in V, v_i \notin T\ \exists v_j \in T: (v_i, v_j) \in Q$.

Ядро N – одновременно внутренне и внешне устойчивое подмножество вершин графа.

Пример 5. Рассмотрим граф, представленный на рис. 4

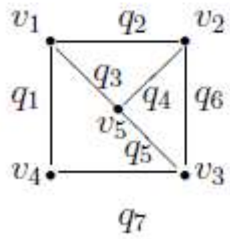


Рис. 4

Максимальные внутренне устойчивые подмножества: $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$. Они также являются и минимально внешне устойчивыми, а, следовательно, и ядрами. Но в данном графе есть еще минимальные внешне устойчивые подмножества, не являющиеся внутренне устойчивыми, например $\{v_1, v_4\}$.

Для нахождения максимальных внутренне и минимальных внешне устойчивых подмножеств графа также используется алгоритм Магу: вводится ориентация на ребрах и в ту, и в другую сторону.

Задача.

Как расставить часовых в тюрьме, чтобы их было минимальное количество и все коридоры просматривались?

Найти минимальные внешне устойчивые подмножества графа, где коридоры – ребра, а их пересечение вершины. Если их несколько, выбрать то, которое с наименьшим числом вершин.

Разбиение графа на уровни. Функции на графах

Рассматриваем орграфы без петель.

Определение 1. Уровнями $N_0,\ N_1, \dots, N_k$ орграфа $G =< V,\ \Gamma >$ называются следующие непустые множества вершин графа:

$N_0 = \{v_i \mid v_i \in V, \Gamma v_i = \emptyset\}$;

$N_1 = \{v_i \mid v_i \in V \backslash N_0, \Gamma v_i \subseteq N_0\}$;

…………………….……………………………………….…

$N_k = \{v_i \mid v_i \in V \backslash \bigcup_{i=0}^{k-1} N_j, \Gamma v_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} N_j\}$.

$\Gamma^{-1} N_k = \emptyset$.

Уровни $N_0, N_1, \dots, N_k$ образуют разбиение вершин графа:

$$V = \bigcup_{j=0}^{k} N_j;\ \ N_i \cap N_j = \emptyset, i \neq j;\ i, j = 0, \dots, k$$

Пример 6.

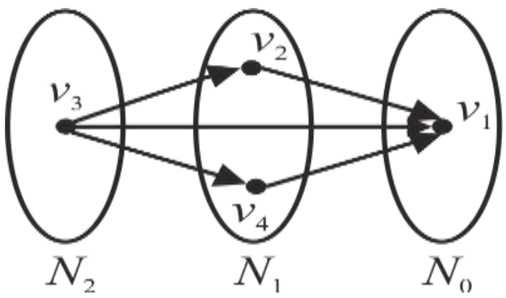


Рис. 5

Утверждение 1. Если граф не содержит контуров, то его можно разбить на уровни. И обратно, если граф можно разбить на уровни, то он не содержит контуров.

Рассмотрим один из наиболее простых, легко реализуемых алгоритмов сортировки вершин орграфа.

Алгоритм Демукрона разбиения графа без контуров на уровни

0) Ищем вектор $L^{(0)} = \begin{pmatrix} l_1^{(0)} \\ l_2^{(0)} \\ \dots \\ l_n^{(0)} \end{pmatrix}$, где $l_i^{(0)}$ – сумма единиц в i-й строке матрицы смежности.

Если l_i^0=0, то вершина $v_i \in N_0$. В этом случае обнуляем i-й столбец матрицы смежности A, получим матрицу $A^{(1)}$

1) Ищем вектор $L^{(1)} = \begin{pmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \\ \dots \\ l_n^{(1)} \end{pmatrix}$, где $l_i^{(1)}$ равно сумме единиц в i-й строке матрицы $A^{(1)}$

или $*$, если $l_i^{(0)} = 0$. Если $l_i^{(1)} = 0$, то вершина $v_i \in N_1$. В этом случае обнуляем i-й столбец матрицы $A^{(1)}$.

……………………………………………….

k) Ищем вектор $L^{(k)} = \begin{pmatrix} l_1^{(k)} \\ l_2^{(k)} \\ \dots \\ l_n^{(k)} \end{pmatrix}$, где $l_i^{(k)}$ равно сумме единиц в i-й строке матрицы

$A^{(k)}$или $*$, если $l_i^{(k-1)} = 0$ или $l_i^{(k-1)} =*$.

Если $l_i^{(k)} = 0$, то вершина $v_i \in N_\text{k}$. В этом случае обнуляем i-й столбец матрицы $A^{(k)}$.

Алгоритм заканчивает работу, когда в матрице A все элементы равны нулю.

Пример 7. Матрица смежности графа имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L^{(0)}$	$L^{(1)}$	$L^{(2)}$	$L^{(3)}$	$L^{(4)}$
0	$*$	$*$	$*$	$*$
1	0	$*$	$*$	$*$
3	2	1	0	$*$
4	3	2	1	0
2	1	0	$*$	$*$
$v_1 \in N_0$	$v_2 \in N_1$	$v_5 \in N_2$	$v_3 \in N_3$	$v_4 \in N_4$

Используя алгоритм Демукрона, разобьем граф на уровни. Согласно алгоритму, просуммируем элементы каждой строки матрицы смежности. Получим вектор

$L^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Элемент $l_1^{(0)} = 0$, следовательно, вершина $v_1 \in N_0$. (См. первый столбец таблицы.)

Обнулим первый столбец матрицы A, получим матрицу

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем вектор $L^{(1)}$, компоненты которого равны сумме единиц каждой строки полученной матрицы. (См. второй столбец таблицы.) Элемент $l_1^{(1)} =*$, так как вершина $v_1 \in N_0$. Элемент $l_2^{(1)} = 0$, следовательно, вершина $v_2 \in N_1$.

Обнуляем второй столбец матрицы $A^{(1)}$, получаем матрицу

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Найдем вектор $L^{(2)}$, компоненты которого равны сумме единиц каждой строки полученной матрицы. (См. третий столбец таблицы.)

Аналогично обнуляем соответствующие столбцы матрицы и получаем матрицы

$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, и $A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Суммируем элементы строк этих матриц (см. таблицу).

Разбиение графа на уровни представлено на рис.6.

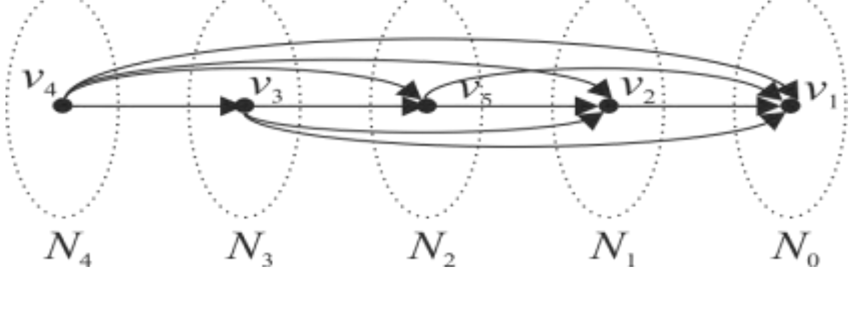


Рис.6.

Функции на графах

Определение 2. *Порядковая функция* орграфа – функция, определенная на множестве вершин со значениями во множестве $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, которая ставит в соответствие каждой вершине номер уровня графа:

$$O: V \to \mathbb{N}_0$$

Порядковая функция существует только для графов без контуров.

Определение 3. *Функция Гранди* орграфа – функция, определенная на множестве вершин со значениями в множестве $\mathbb{N}_0$

$$g: V \to \mathbb{N}_0$$

определяемая следующим образом:

$$g(v_i) = \min\{\mathbb{N}_0 \backslash g(v_j) | v_j \in \Gamma v_i\}.$$

Причем $g(v_i) = 0$, если $\Gamma v_i = \emptyset$.

Функция Гранди может не существовать в графе, имеющем контуры нечетной длины.

У графа с контурами может быть несколько различных функций Гранди.

Пример 3.

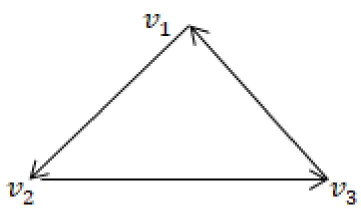


Рис.3.

Функции Гранди не существует.

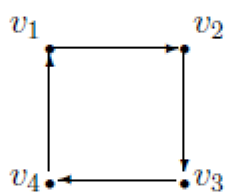


Рис.4.

Две функции Гранди: <0,1,0,1> и <1,0,1,0>.

Теорема 1. Для графов без контуров существует, и притом единственная, функция Гранди.

Доказательство конструктивное, то есть приведем алгоритм построения функции Гранди.

Граф без контуров можно разбить на уровни $N_0, \dots, N_k$.

0) Функция Гранди для вершин уровня N_0 по определению равна нулю: $g(v_i) = 0$

1) Для вершин уровня N_1: $g(v_i) = 1$

....

k) Дуги, исходящие из вершин уровня N_k, по определению заходят в вершины уровней $N_0, \dots, N_{k-1}$, для которых значения функции Гранди уже определены. Тогда для вершины $v_i \in N_k$ строим функцию по определению функции Гранди.

Утверждение 2. Вершины, в которых функция Гранди равна нулю, являются ядром графа.

Доказательство.

Пусть $N = \{v_i | g(v_i) = 0\}$.

Вершины, в которых функция Гранди равна нулю, по определению не могут быть смежными, следовательно, $N -$ внутренне устойчивое множество:

$g(v_i) = 0$ и $g(v_j) = 0 \Rightarrow \nexists < v_i, v_j >$ и $\nexists < v_j, v_i >$.

Если $\exists v_i \notin N,$ то $\exists < v_i, v_j >$ – дуга графа, причем $v_j \in N$, $g(v_j) = 0$ (по определению функции Гранди). Следовательно, $N -$ внешне устойчивое множество.

Утверждение 3. Для транзитивного графа без контуров порядковая функция совпадает с функцией Гранди.

Доказательство. Для вершин уровней N_0 и N_1 значения этих двух функций совпадают всегда. Для любой вершины уровня N_2 существует дуга, исходящая из этой вершины и заходящая в вершину уровня N_1. Для вершины уровня N_1 существует дуга, исходящая из неё и заходящая в вершину уровня N_0. Следовательно, по транзитивности для любой вершины уровня N_2 существует дуга, исходящая из неё и заходящая в вершину уровня N_0. Тогда, по определению, значения функции Гранди в вершинах уровня N_2 равны двум и, следовательно, совпадают со значениями порядковой функции. Аналогично доказывается совпадение значений функции Гранди и порядковой функции для всех вершин следующих уровней графа.

Утверждение 4. Ядро транзитивного графа без контуров полностью совпадает с уровнем N_0.

Доказательство следует из предыдущих теоремы и утверждения.

Пример 8. Для графа на рис. 7:

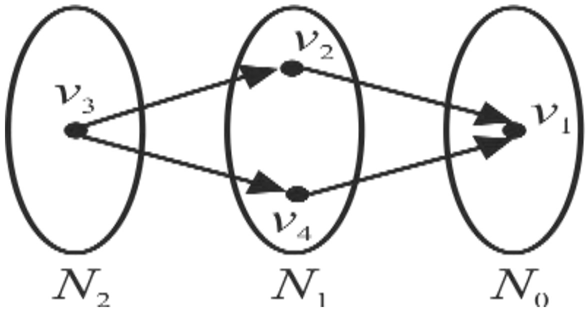


Рис. 7.

Порядковая функция: $O(v_1) = 0; O(v_2) = 1; O(v_4) = 1; O(v_3) = 2.$

Функция Гранди: $g(v_1) = 0; g(v_2) = 1; g(v_4) = 1; g(v_3) = 0.$

Порядковая функция и функция Гранди не совпадают.

Граф на рис. 8 транзитивный: порядковая функция совпадает с функцией Гранди

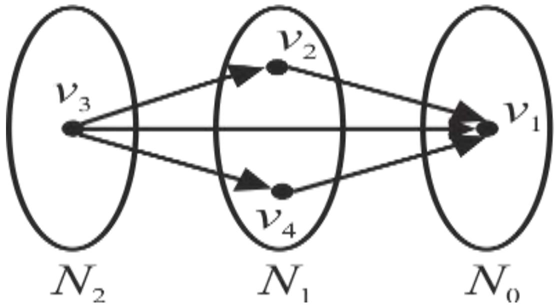


Рис. 8.

Порядковая функция: $O(v_1) = 0; O(v_2) = 1; O(v_4) = 1; O(v_3) = 2.$

Функция Гранди: $g(v_1) = 0; g(v_2) = 1; g(v_4) = 1; g(v_3) = 2.$

Ядро $-\{v_1\}$ полностью принадлежит уровню N_0.

Игры на графах. Игра Ним

Игра Ним — это игра на графе двух игроков, в которой победителем считается игрок, сделавший последний ход.

Пусть задан ориентированный граф G, и начальная вершина в нем. Игра протекает следующим образом. Специальная фишка помещается в начальную вершину. Игроки по очереди делают ходы, ход состоит в перемещении фишки по дуге графа, исходящей из вершины, в которой она находится. Если игрок не может сделать очередной ход, поскольку таких дуг нет, он проигрывает. Вершины, из которых нельзя сделать ход, называют терминальными.

Можно дополнить условием по уже пройдённым дугам (вершинам) не ходить. Иногда их вообще удаляют.

Теорема. Если граф имеет ядро N и один из игроков выбрал вершину в ядре, то этот выбор обеспечивает ему выигрыш или ничью.

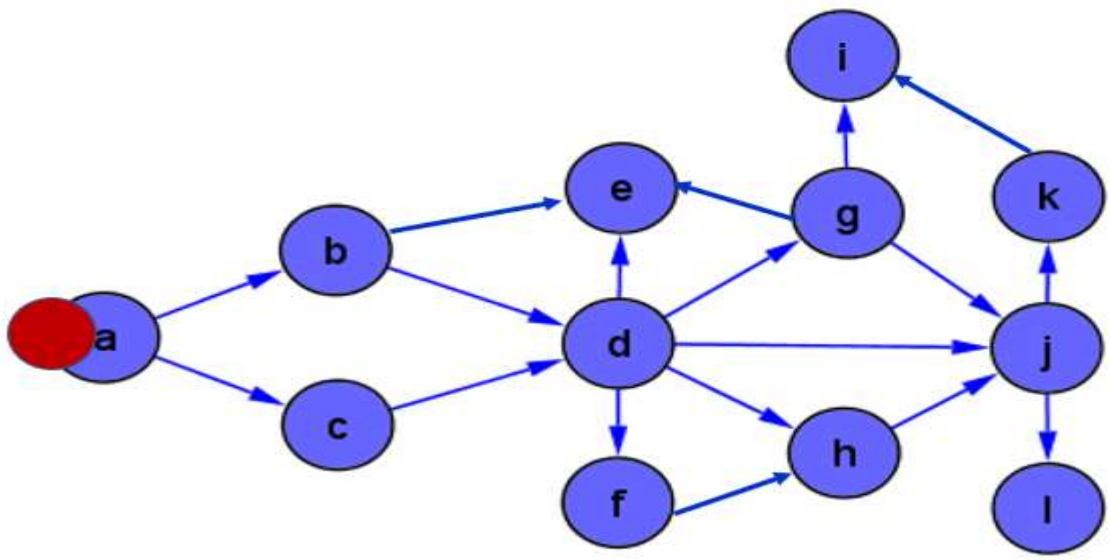
Ничья считается в случае, когда партия бесконечна (наличие контуров).

Напоминаю, что ядром называется подмножество вершин графа являющееся одновременно внутренне и внешне устойчивым.

В орграфе, содержащем контуры нечетной длины, ядро может не существовать.

Граф может обладать несколькими ядрами.

Пример. Задан орграф. Фишка помещена в вершину **a**. Игроки передвигают фишку по дугам, стараясь попасть в вершину, из которой другой игрок выйти не сможет.

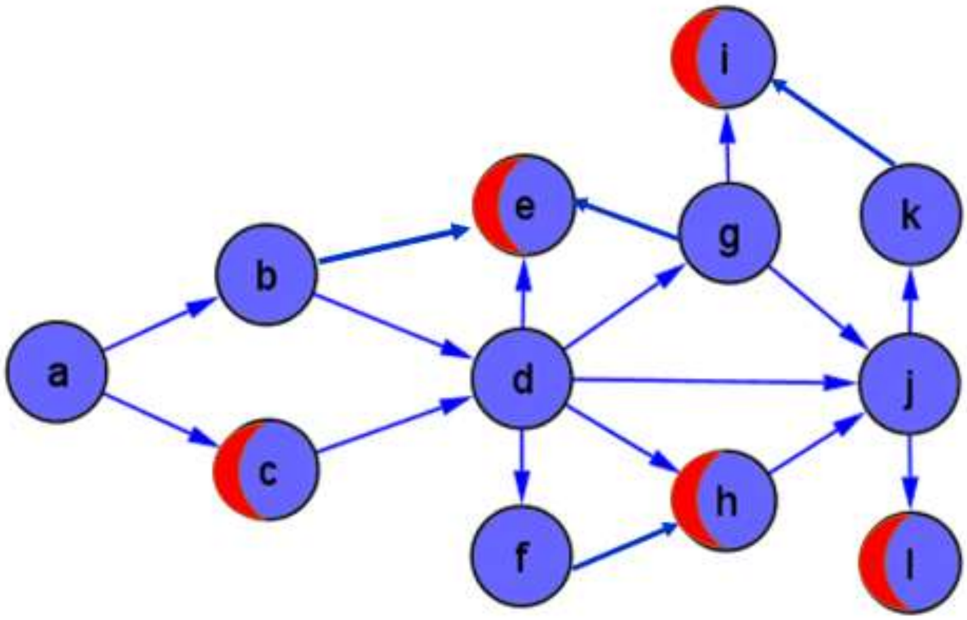


Найдем ядро орграфа.

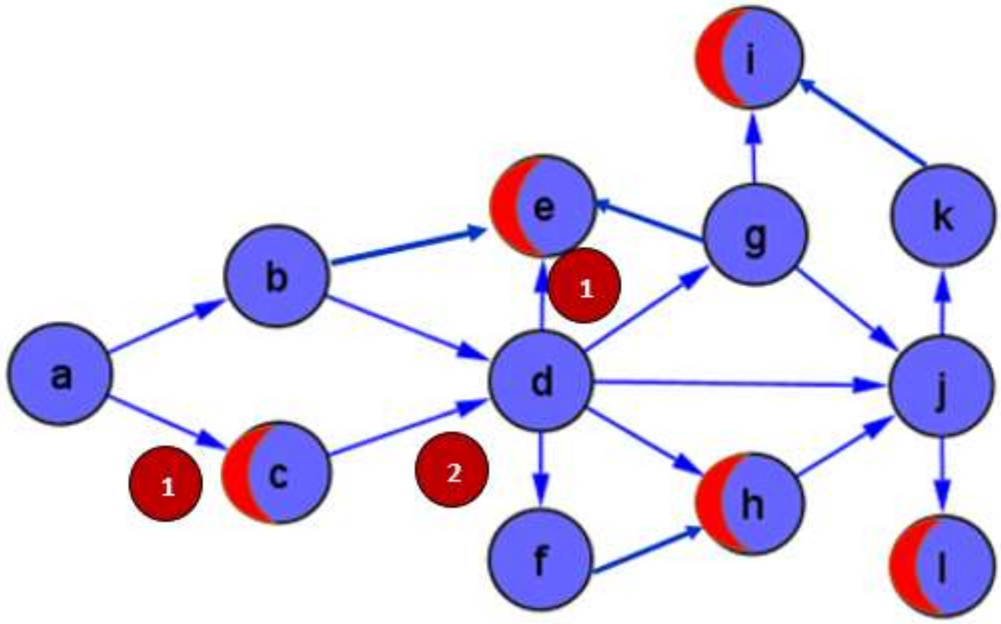
1. Как пересечение максимальных внутренне и минимальных внешне устойчивых подмножеств. (Метод Магу).
2. Для орграфа без контуров через функцию Гранди.

   Вершины, в которых функция Гранди равна нулю – ядро Графа.

   Находим способом 2. Получаем в ядре 5 вершин (помечены красным).



Если Игрок1 двигается в вершину ***c***, то сразу попадает в ядро и выигрывает. Если двигается в вершину ***b*** – проигрывает (если стратегию выигрыша знает Игрок 2).



Игрок 1 мог из d пойти в h (из ядра). Для Игрока 2 из h есть выход, но не в вершину ядра, а в вершину $\boldsymbol{j}$. И в этом случае Игрок 1 выиграет, придя в вершину из ядра l, из которой дуги не исходят, но, сделав на два шага больше.

Алгоритм выигрыша следует из построения функции Гранди

Разобьём граф без контуров на уровни, используя алгоритм Демукрона. Это поможет легко найти функцию Гранди.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccc} L^0 & L^1 & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 & L^6 & L^7 & Gr & N \end{array} \\
A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & a \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & * & 1 & b \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & * & 0 & c \\
5 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & * & * & 3 & d \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & e \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & 1 & f \\
3 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & * & 1 & g \\
1 & 1 & 1 & 0 & * & * & * & * & 0 & h \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & i \\
2 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & 2 & j \\
1 & 0 & * & * & * & * & * & * & 1 & k \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & 0 & l
\end{pmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{cccccccc} N_0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 \end{array}
\end{array}
$$

Из 1 столбца (L^0), где нули: вершины e, i, l принадлежат уровню N_0. Обнуляем эти столбцы. (Красные).

Складываю строки.

Из 2 столбца (L^1): вершина k принадлежит уровню N_1. Обнуляем столбец. (Синий).

Складываю.

Из 3 столбца: вершина j принадлежит уровню N_2. Обнуляем столбец. (Зеленый).

Складываю.

Из 4 столбца: вершины g, h принадлежат уровню N_3. Обнуляем столбцы. (Фиолетовый).

Складываю.

Из 5 столбца: вершина f принадлежит уровню N_4. Обнуляем столбец. (Оранжевый).

Складываю.

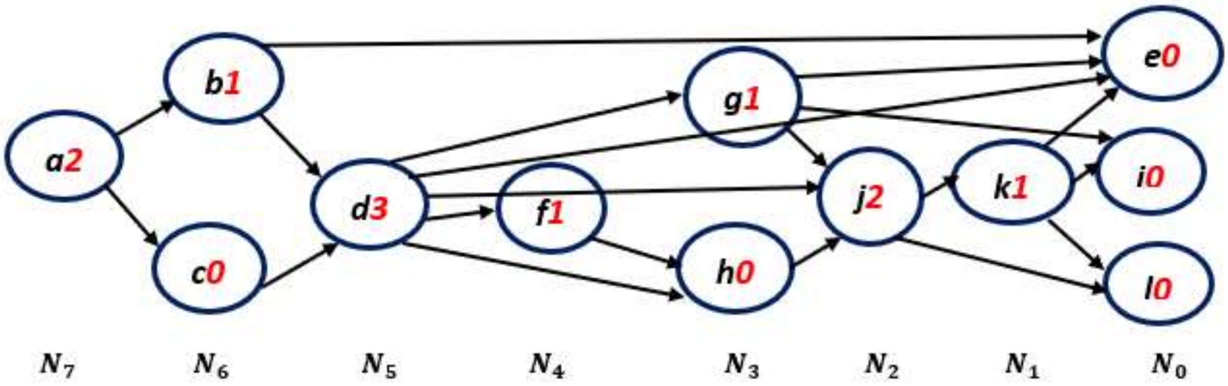
Из 6 столбца: вершина d принадлежит уровню N_5. Обнуляем столбец. (Бордовый).

Складываю.

Из 7 столбца: вершины b, c принадлежат уровню N_6. Обнуляем столбцы. (Серый).

Складываю.

Из 8 столбца: вершина a принадлежит уровню N_7 (последняя).


a2
b1
c0
d3
f1
g1
h0
j2
k1
e0
i0
l0
N_7
N_6
N_5
N_4
N_3
N_2
N_1
N_0