Замечание Множество функций $R[a,b]$ можно рассматривать как линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число.

Remember Линейное (векторное) пространство это $(V, F, +, \cdot)$ где: V - мн-во векторов, F - поле скаляров, $+$ - операция сложения векторов ($a, b \in V \Rightarrow a+b \in V$), $\cdot$ - операция умножения вектора на скаляр ($a \in V, \alpha \in F \Rightarrow \alpha a \in V$), причём справедливы следующие аксиомы:

1. $\forall a, b \in V: a+b = b+a$
2. $\forall a, b, c \in V: (a+b)+c = a+(b+c)$
3. $\exists\, 0 \in V: \forall a \in V: 0+a = a+0$
4. $\forall a \in V\ \exists\, (-a) \in V: a+(-a) = 0$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, \forall a \in V: \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
6. $\forall a \in V: 1 \cdot a = a$ (1 - единица в поле F)
7. $\forall \alpha, \beta \in F, \forall a \in V: (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $\forall \alpha \in F\ \forall a, b \in V: \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

В нашем случае $V = R[a,b]$, $F = \mathbb{R}$, $+$ - сложение функций, $\cdot$ - умножение функции на действительное число.

Замечание Операция интегрирования по Риману ставит в соответствие каждой интегрируемой функции действительное число: $I: R[a,b] \to \mathbb{R}$,

т.е. интегрирование есть функция, определённая на множестве функций и имеющая значениями действительные числа. Такие функции принято называть функционалами.

Аддитивность интеграла

Утв. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,c]$, $a<b<c$, тогда $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f \in \mathcal{R}[b,c]$ и

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (*)$$

Д-во Будем рассматривать только те разбиения отрезка $[a,c]$, которые содержат точку b.
Пусть (P,ξ) — такое разбиение (с отмеченными точками)
Тогда $P = P' \cup P''$, $\xi = \xi' \cup \xi''$, где
P' — разбиение $[a,b]$ (с отмеченными точками ξ')
P'' — разбиение $[b,c]$ (с отмеченными точками ξ'')
Очевидно, что

$$\sigma(f,P,\xi) = \sigma(f,P',\xi') + \sigma(f,P'',\xi'')$$

Далее $(*)$ доказывается переходом к пределу при $\lambda(P) \to 0$, если заметить, что $\lambda(P') \le \lambda(P)$ и $\lambda(P'') \le \lambda(P)$.

Опр Если $b<a$ то будем считать, что

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Замечание Такое определение оказывается обоснованным, если допустить, что нумерация точек разбиения идет не в порядке возрастания, а в порядке убывания x_i, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ может быть отрицательной.

Опр $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Утв. Если $a,b,c \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{R}[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$, то

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

Д-во Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $a = \min\{a, b, c\}$.

1) Если $c = \max\{a, b, c\}$ то

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{= -\int_c^a f(x)\,dx} = 0$$

2) Если $b = \max\{a, b, c\}$

$$\underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{-\int_c^a f(x)\,dx} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{-\int_b^c f(x)\,dx} - \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

Замечание к д-ву Если среди чисел a, b, c будут совпадающие, то некоторые слагаемые будут равны 0.

Опр Пусть $I : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$, т.е. функция I ставит в соответствие упорядоченной паре точек из $[a, b]$ действительное число. Пусть $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$:

$$I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma)$$

Тогда $I(\alpha, \beta)$ называется аддитивной функцией ориентированного промежутка.

Замечание Если $f \in R[a, b]$, $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$, то если $I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, то интеграл является аддитивной функцией промежутка интегрирования, т.к.

$$I(\alpha, \beta) = I(\alpha, \gamma) + I(\gamma, \beta)$$

Оценка интеграла

Утв. Если $a \le b$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Д-во Пусть $a < b$ (иначе всё очевидно)

$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$

$$|\sigma(f,P,\xi)| =: \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \cdot \underbrace{|x_i - x_{i-1}|}_{(x_i - x_{i-1})} \quad (\text{т.к. } x_i > x_{i-1})$$

$$\lambda(P) \to 0 \downarrow \qquad\qquad \lambda(P) \to 0 \downarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Утв. Если $a \le b$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall x \in [a,b] : |f(x)| \le C$, $C \in \mathbb{R}$,

то
$$\int_a^b |f(x)|\,dx \le C(b-a)$$

Д-во $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$, если $a < b$, то

$$\sigma(|f|, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \le C\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = C(b-a)$$

$$\lambda(P) \to 0 \downarrow$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \le C(b-a)$$

(если $a = b$ - утв. тривиально)

Утв. Если $a \le b$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall x \in [a,b] : f_1(x) \le f_2(x)$, то

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Д-во Если $a=b$, то утверждение тривиально.
Если $a<b$, то

$$\sigma(f_1, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \sigma(f_2, P, \xi)$$

$\lambda(P)\to 0$

$$\int_a^b f_1(x)dx \longrightarrow \quad \le \quad \longleftarrow \int_a^b f_2(x)dx$$

Следствие 1 Если $a\le b$, $f\in R[a,b]$, $\forall x\in[a,b]: m\le f(x)\le M$,

то

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Следствие 1.0 Если $\forall x\in[a,b]: f(x)\ge 0$, и $f\in R[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Следствие 2 Если $f\in R[a,b]$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$,

то $\exists \mu\in[m,M]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

Д-во Рассмотрим только случай $a<b$ ($a=b$ – тривиально)

Пусть $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow m\le\mu\le M$ (см. следствие 1)

Следствие 3 Если $f\in C[a,b]$, то $\exists\, \xi\in[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Д-во $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$

$f\in C[a,b] \Rightarrow$ область значений функции $f(x)$ есть отрезок

$\left[\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x);\ \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right]$.

Из следствие 2: $\exists \mu \in [\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$, т.ч.

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$ но

μ входит в область значений функции $f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu$.

Теорема (первая теорема о среднем)

1) $f, g \in R[a,b]$

2) $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

1)2) $\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.

3) $f \in C[a,b]$

1)2)3) $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

Д-во Рассмотрим только случай $a<b$, $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

Тогда $$mg(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \qquad (\vee)$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$ в качестве μ можно взять любое число из $[m, M]$.

Если $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ (>0), то пусть

$$\mu = \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\cdot\int_a^b f(x)g(x)dx.$$ Тогда $(\vee) \Rightarrow m \leq \mu \leq M$.

Если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$, $f(\xi) = \mu$. (т.к. область значений $f(x)$ – отрезок $[m, M]$)

Вопрос 1 Почему все используемые в доказательстве интегралы существуют?

Вопрос 2 Как доказать теорему, если $a \geq b$ и если $g(x)$ может принимать на $[a,b]$ значения разных знаков?

Замечание. Если положить $g(x) \equiv 1$, то из первой теоремы о среднем следуют следствие 2 и следствие 3

Пусть $f \in R[a,b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$.

Утв. $F(x) \in C[a,b]$

Д-во $\exists C : \forall x \in [a,b] ; |f(x)| \leq C$

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)|dt \right| \leq C|h| \Rightarrow \lim_{h \to 0} |F(x+h) - F(x)| = 0$$

Теорема (вторая теорема о среднем) (формула Бонне)

1) $f, g \in R[a,b]$

2) g – функция, монотонная на $[a,b]$

1) 2) $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$