Дифференцирование функции нескольких переменных

<u>Опр</u> $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ называется <u>дифференцируемой в точке $x \in E$</u> (x – предельная для E) если

$$f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x; h), \qquad (*)$$

где $L(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – <u>линейная функция</u> h,

$\alpha(x, h) = \bar{o}(h)$, если $h \to 0$, $x+h \in E$

<u>Комментарий</u> Линейной называется функция L, удовлетворяющая св-ву: $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$:

$\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$: $\quad L(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 L(h_1) + \lambda_2 L(h_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Если $h = (h^1 \dots h^m)$ то

$$L(x)h = A(x) \cdot h = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ - & - & - & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = a_{ij}(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

<u>В частности</u>, если $f: E \to \mathbb{R}$, то f называется дифференцируемой в точке $x \in E \subset \mathbb{R}^m$, ($x$ предельная точка E), если

$$f(x+h) - f(x) = A^1(x)h^1 + A^2(x)h^2 + \dots + A^m(x)h^m + \alpha(x, h),$$

где $\alpha(x, h) \to 0$ при $h \to 0$. $\quad (x+h \in E)$

<u>Замечание</u> $\Delta x(h) = (x+h) - x = h$ – приращение аргумента

$\Delta f(x, h) = f(x+h) - f(x)$ – приращение функции

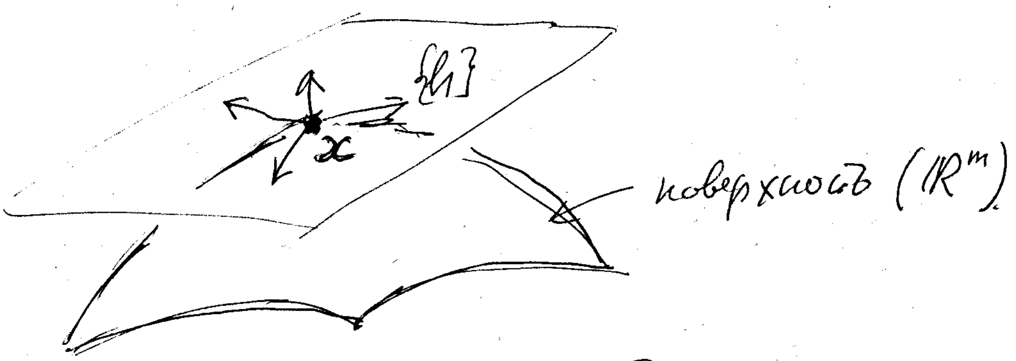
<u>Опр*</u> Функция $L(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в $(*)$ называется:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{\underline{дифференциалом}} \\ \text{\underline{касательным отображением}} \\ \text{\underline{производным отображением}} \end{array} \right\} \text{ функции } f: E \to \mathbb{R}^n \text{ в точке } x.$$

Обозначения $df(x)$, $Df(x)$, $f'(x)$

Т. о, $\Delta f(x,h) = df(x)h + \alpha(x,h)$

Замечание $\{h\}$ – совокупность векторов, приложенных к точке x. Они образуют векторное пространство размерности m, обозначаемое $T_x\mathbb{R}^m$ и называемое касательным пространством к $\mathbb{R}^m$ в точке x.



Замечание Линейное отображение $df(x)$ есть отображение $T_x\mathbb{R}^m \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$.

Частные производные

Пусть $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x))$ Тогда

$L(x) = (L^1(x), L^2(x), \dots L^n(x))$

$$(*) \Leftrightarrow \quad f^i(x+h) - f^i(x) = L^i(x)h + \alpha^i(x,h), \quad i = 1,2,\dots n.$$

$L^i(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – линейные функции,

$\alpha^i(x,h) \to 0$ при $h \to 0$, $x+h \in E$. $\forall i = 1,2,\dots n$.

Утв. ($f: E \to \mathbb{R}^n$ ($E \subset \mathbb{R}^m$) дифференцируемо в точке $x \in E$ (x – предельная для E)) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($\forall i = 1,2\dots n$: $f^i: E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в т. x)

В дальнейшем будем рассматривать функции $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^m)$, т.е.

для дифференцируемой в т. x (предельной к E) функции f:

$$f(x^1+h^1, \ldots, x^m+h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) =$$

$$= A^1(x)h^1 + \ldots + A^m(x)h^m + \bar{o}(h) \quad (h \to 0,\ x+h \in E)$$

Выберем $h^j = 0$, если $j \neq i$ (т.е. пусть $h = (0, \ldots 0, h^i, 0 \ldots 0)$).

Тогда: $$f(x^1, \ldots x^{i-1}, x^i+h^i, x^{i+1}, \ldots, x^m) - f(x^1, \ldots x^i, \ldots x^m) =$$

$$= A^i(x)h^i + \bar{o}(h^i) \quad \text{при } h^i \to 0$$

Тогда: $$A^i(x) = \lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^i+h, \ldots x^m) - f(x^1, \ldots x^m)}{h}$$

Обозначим: $A^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ – частная производная от функции $f(x)$ по переменной x^i в точке x

<u>Пример</u> $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xy^2) + e^z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{1+x^2y^4}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{1+x^2y^4}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^z.$$

<u>Утв</u> Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^m)$ дифференцируема во <u>внутренней</u> точке $x \in E$, то в этой точке существуют частные производные этой функции по каждой переменной, причём дифференциал однозначно определяется этими производными в виде

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)h^m =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)h^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)h^i$$

часто используемое обозначение суммы, когда есть „верхний" и „нижний" индексы.

Пример. Пусть $f(x) = x^i$ (т.н. проекция)

$$f(x+h) - f(x) = x^i + h^i - x^i = h^i$$ или

$$\Delta f(x,h) = h^i \Rightarrow \Delta f(x,h) = df(x)h$$

но! $f = x^i \Rightarrow dx^i(x)h = dx^i h = h^i$

Тогда:

$$\boxed{df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\,dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)\,dx^m = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\,dx^i}$$

Пусть теперь $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $x \in E$,

x - внутренняя точка E, и

$f \in D(x)$ (дифференцируема в точке x)

Тогда:

$$df(x)h = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ \vdots \\ df^n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} h^i \\ \cdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^i} h^i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}$$

$$\frac{D(f^1, \ldots f^n)}{D(x^1, \ldots x^m)} \longrightarrow \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x)\right) -$$

(другое обозначение) - матрица Якоби (якобиан) отображения f в точке x.

Замечание. Чаще якобианом называют

$$\det\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x)\right) = \left|\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x)\right| \quad \text{(определитель)}$$

Утв. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке

(Достаточно очевидный факт, следующий из определения дифференцируемости)

Замечание. Существование частных производных функции в точке не гарантирует дифференцируемости функции в этой точке.

Пример
$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } xy=0\\ 1, & \text{если } xy\neq 0\end{cases}$$

$$f(0,y)=0 \Rightarrow \exists \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}=0$$

$$f(x,0)=0 \Rightarrow \exists \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}=0$$

Но! $f(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$, т.е. не является дифференцируемой в этой точке.

Утв. Операция дифференцирования линейна.

(Здесь под операцией дифференцирования понимается сопоставление функции её дифференциала в точке)

$$d(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 df_1(x)+\lambda_2 df_2(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

(если, конечно, f_1 и f_2 дифференцируемы в точке x)

Утв.
1) $f: E\to\mathbb{R}$, $g: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$

2) $f\in D(x)$, $g\in D(x)$, $x\in E$ (x – внутренняя точка E)

1) 2) $\Rightarrow$

а) $d(f\cdot g)(x) = g(x)\,df(x)+f(x)\,dg(x)$

б) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{g(x)\,df(x)-f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}$ (при условии $g(x)\neq 0$)