***Лекция 4***

## Теория отношений

Обратным отношением для $\rho$ называется отношение

$\rho^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \rho\}$

Композицией отношений $\rho_1$ и $\rho_2$ называется отношение

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{|\langle x, y\rangle \mid \exists z : \langle x, z\rangle \in \rho_2, \langle z, y\rangle \in \rho_1\}$

Пример:

$X = \{1,2,3\}$

$\rho_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

$\rho_1^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$\rho_2 = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$\rho_2^{-1} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle 2,2\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

$\rho_2 \circ \rho_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$\rho_1 \circ \rho_2 \neq \rho_2 \circ \rho_1$

Свойства отношений:

1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$
2) $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = {\rho_2}^{-1} \circ {\rho_1}^{-1}$
1) Доказательство свойства 2). $< x, y > \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow < y, x > \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow$ $\exists z : \begin{cases} < y, z > \in \rho_2 \\ < z, x > \in \rho_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} < z, y > \in {\rho_2}^{-1} \\ < x, z > \in {\rho_1}^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow < x, y > \in {\rho_2}^{-1} \circ {\rho_1}^{-1}$.

## Отношения эквивалентности и порядка.

Пусть задано отношение $\rho$ на множестве $X$. Введем следующие определения.

1. $\rho$ называется **рефлексивным**, если $\forall\ x \in X$ выполняется $\langle x, x\rangle \in \rho$

2. $\rho$ называется **симметричным,** если $\forall\ x, y \in X\ \ \langle x, y\rangle \in \rho \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \rho$

3. $\rho$ называется **антисимметричным**, $\forall\ x, y \in X\ \ \langle x, y\rangle \in \rho$ и $\langle y, x\rangle \in \rho \Rightarrow$ x = y

4. $\rho$ называется **асимметричным**, $\forall\ x, y \in X\ \ \langle x, y\rangle \in \rho \Rightarrow < y, x > \notin \rho$

5. $\rho$ называется **транзитивным,** если $\forall \quad x, y, z \in X$ , $\langle x, y\rangle \in \rho$ и $\langle y, z\rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \rho$

6. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве X называется **отношением эквивалентности** на множестве X.

7. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется **отношением частичного порядка** на множестве X и обозначается $\preccurlyeq$.

8. Отношение частичного порядка, у которого все элементы сравнимы между собой, называется **отношением линейного порядка**.

9. Асимметричное и транзитивное отношение на множестве X называется **отношением строгого порядка** на X.

(Аналогично – строгий линейный порядок).

10. Рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X называется **отношением квазипорядка** на множестве X.

Квазипорядок обобщает отношения частичного порядка и эквивалентности. Отношения частичного порядка и эквивалентности – частный случай квазипорядка.

Является ли отношение рефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным и транзитивным можно проверить убедившись в справедливости следующих соотношений.

1) рефлексивно: $d \subseteq \rho$ ;

2) симметрично: $\rho^{-1} = \rho$ ;

3) антисимметрично: $\rho^{-1} \cap \rho \subseteq d$ ;

4) асимметрично: $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$

5) транзитивно: $\rho^2 \subseteq \rho$ .

Где $d$=$e$ отношение диагональ – все пары <x, x>, $x \in X$ .

***Примеры:***

1) Пусть X = {1,2,3}.
$d = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$ – рефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное отношение. Эквивалентность и частичный порядок.

$\rho_1 = \{\langle 1,1\rangle\}$ - симметричное, антисимметричное, транзитивное отношение.

$\rho_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - антисимметричное.

$\rho_3 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - не обладает ни одним из свойств.

$\rho_4 = d \cup \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - линейный порядок.

$\rho_5 = d \cup \{<1,2>, <2,1>, <1,3>, <3,1>, <2,3>, <3,2>\}$- эквивалентность.
$\rho_6 = d \cup \{<1,2>, <2,1>, <1,3>, <2,3>\}$ - квазипорядок, но не эквивалентность и не частичный порядок.
$\rho_7 = \{<1,2>, <1,3>, <2,3>\}$ - строгий порядок.

2) Отношение $x \leq y$ на множестве $R$ - отношение частичного (линейного) порядка. Отношение $x < y$ – строгий линейный порядок.

3) Отношение подобия треугольников на множестве треугольников – эквивалентность.

4) Отношение принадлежности к одной группе на множестве студентов института – эквивалентность.

5) Отношение равенства на числовом множестве М - отношение эквивалентности и отношение частичного порядка одновременно.

6) Отношение включения на множестве всех подмножеств множества $A$ – частичный порядок.

7) Подчинение по званию на множестве военных – квазипорядок.