Несобственные интегралы

<u>Опр</u> I $f(x): [a;+\infty) \to \mathbb{R}$, $\forall b>a: f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

Величина
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx, \qquad (*)$$

если существует этот предел, называется <u>несобственным интегралом</u> от $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ (несобственный интеграл <u>первого рода</u>).

<u>Опр</u> Говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ <u>сходится</u>, если существует <u>конечный</u> предел $(*)$.

В противном случае говорят, что интеграл <u>расходится</u>.

<u>Пример</u> (интеграл Дирихле)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right), & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln x\Big|_1^b = \ln b, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} \quad (b>1)$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{если } \alpha \le 1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{array}{l} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \le 1 \end{array}$$

<u>Опр</u>$_{II}$ $f(x):[a, B) \to \mathbb{R}$, $\forall\, a<b<B: f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$

Величина
$$\int_a^B f(x)dx = \lim_{b \to B-0} \int_a^b f(x)dx, \quad (**)$$

если существует этот предел, называется <u>несобственным интегралом</u> от $f(x)$ по промежутку $[a;B)$ (несобственный интеграл <u>второго рода</u>).

<u>Опр</u> Говорят, что интеграл $\int_a^B f(x)dx$ <u>сходится</u> если существует <u>конечный</u> предел $(*)$.

В противном случае говорят, что интеграл <u>расходится</u>.

<u>Замечание</u>

Интеграл $\int_a^B f(x)dx$ может расходиться, если функция $f(x)$ является неограниченной в любой левой полуокрестности точки B.

<u>Замечание</u> Аналогичным образом можно определить интегралы от функций, определённых на промежутках $(-\infty, b]$, $(A, b]$, а также $(-\infty;+\infty)$, (A, B).

<u>Пример</u> (интеграл Дирихле)
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-a^{1-\alpha}\right), & \text{если } \alpha \neq 1 \\ \ln x\Big|_a^1 = -\ln a & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} \quad (0<a<1)$$

$$\lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{если } \alpha < 1 \\ \infty, & \text{если } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{сходится при } \alpha < 1$$

$$\text{расходится при } \alpha \geq 1$$

<u>Замечание</u> Если $f(x) : [a; B) \cup (B; b] \to \mathbb{R}$ можно говорить об $\int_a^b f(x)\,dx$ с <u>особенностью</u> при $x = B$.

В этом случае естественно считать, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^B f(x)dx + \int_B^b f(x)dx \quad \text{сходится, если}$$

сходятся <u>оба</u> интеграла в правой части равенства.

<u>Пример</u>

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{-x}\Big|_{-1}^0 + 2\sqrt{x}\Big|_0^1 =$$

$= 2+2 = 4 \to$ оба интеграла <u>сходятся при $x=0$.</u>

<u>Пример</u>

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x}}_{\text{расходится}} \to \text{интеграл расходится,}$$

но!

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon \right) = 0$$

v.p. (valeur principale de Cauchy) –

– <u>главное значение в смысле Коши.</u>

Опр
$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right), \quad a<c<b$$

Пример
$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^0 = e^0 - \lim_{x\to-\infty} e^x = e^0 - 0 = 1$$

Опр$_{I\ II}$ $f(x): [a,\omega) \to \mathbb{R}$, $f(x)\in \mathcal{R}[a,b]$, где $[a,b]\subset[a,\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}\cup\{+\infty; -\infty\}$ $\overset{def}{\Rightarrow}$ $\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx.$

Утв. (основные свойства несобственного интеграла)

1) $f: [a,\omega)\to\mathbb{R}$, $g: [a,\omega)\to\mathbb{R}$,

2) $\forall\ [a,b]\subset[a,\omega)$: $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $g\in\mathcal{R}[a,b]$

3) $\int_a^\omega f(x)dx$, $\int_a^\omega g(x)dx$ – сходятся

1)2)3) $\Rightarrow$ а) Если $\omega\in\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{R}[a,\omega]$, то значения $\int_a^\omega f(x)dx$ в собственном и несобственном смыслах совпадают

б) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:
$$\int_a^\omega (\lambda_1 f + \lambda_2 g)dx = \lambda_1\int_a^\omega f(x)dx + \lambda_2\int_a^\omega g(x)dx$$

в) если $c\in[a,\omega)$, то
$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx.$$

4) $\varphi: [\alpha,\gamma)\to[a,\omega)$, $\varphi\in C^1[\alpha,\gamma)$, φ строго монотонна на $[\alpha,\gamma)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{\beta\to\gamma}\varphi(\beta) = \omega$, $\beta\in[\alpha,\gamma]$

1) 2) 3) 4) $\Rightarrow$
$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Утв. (интегрирование по частям)

1) $f(x), g(x) \in C^1[a,\omega)$

2) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} f(x)\cdot g(x) = A \in \mathbb{R}$

3) $f\cdot g'$ и $f'\cdot g$ – интегрируемы (в несобственном смысле) на $[a,\omega)$ (т.е. соответствующие интегралы сходятся)

1) 2) 3) $\Rightarrow$
$$\int_a^\omega f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^\omega - \int_a^\omega f'(x)\cdot g(x)\,dx,$$

где $f(x)\cdot g(x)\Big|_a^\omega = \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} \big(f(x)\cdot g(x)\big) - f(a)g(a).$

Замечание Если $f(x) : [a,\omega)$, $f(x)\in R[a,c]$, $c\in[a,\omega)$, то $\int_a^\omega f(x)\,dx$ и $\int_c^\omega f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Т. о., сходимость или расходимость несобственного интеграла определяется поведением функции в окрестности „особенности" $x=\omega$.

Исследование сходимости несобственного интеграла.

Утв. (критерий Коши)

Пусть $f(x) : [a,\omega)$, $f(x)\in R[a,b]$, $\forall [a,b]\subset[a,\omega)$. Тогда

$\left(\int\limits_a^{\omega} f(x)dx \text{ - сходится}\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a,\omega)\ \forall b_1, b_2 \in [a,\omega),\right.$

$\left. b_1 > B,\ b_2 > B : \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon\right).$

<u>Д-во</u> Пусть $\mathcal{F}(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$, Тогда

$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx = \mathcal{F}(b_2) - \mathcal{F}(b_1)$

$\left(\int\limits_a^{\omega} f(x)dx \text{ - сходится}\right) \Leftrightarrow \left(\exists \lim\limits_{b\to\omega} \mathcal{F}(b) = A\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a,\omega]\ \forall b_1, b_2 \in [a,\omega),\ b_1 > B,\ b_2 > B :\right.$

$\left. |\mathcal{F}(b_2) - \mathcal{F}(b_1)| < \varepsilon.\right)$

<u>Опр</u> Говорят, что $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ <u>сходится абсолютно,</u>

если $\int\limits_a^{\omega} |f(x)|dx$ - сходится

<u>Замечание</u> Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится (<u>Доказать это строго</u>!).

<u>Утв.</u> 1) $f(x) : [a,\omega) \to \mathbb{R}$

2) $\forall [a,b] \subset [a,\omega) : f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

3) $\forall x \in [a,\omega),\ f(x) \geq 0$

4) $\mathcal{F}(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$

1) 2) 3) 4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\int\limits_a^{\omega} f(x)dx \text{ - сходится}\right) \Leftrightarrow \left(\mathcal{F}(b) \text{ ограничена на } [a,\omega)\right)$

Д-во $f(x) \geq 0 \Rightarrow F(b)$ - неубывающая на $[a,\omega) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\exists \lim\limits_{\substack{b\to\omega \\ b\in[a,\omega)}} F(b) \Leftrightarrow F(b) \text{ - ограничена на } [a,\omega) \right)$

(предел - конечный!)

Теорема (признак сравнения)

1) $f(x): [a,\omega) \to \mathbb{R}, \quad g(x): [a,\omega) \to \mathbb{R}$

2) $\forall [a,b] \subset [a,\omega): \quad f(x) \in R[a,b], \ g(x) \in R[a,b]$

3) $\forall x \in [a,\omega): \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

1) 2) 3) $\Rightarrow$ а) если $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ - сходится, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ - сходится

б) если $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ - расходится, то $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ - расходится

Д-во $\quad 0 \leq F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx = G(b)$

а) Если $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ - сходится, то $G(b)$ ограничена на $[a,\omega]$

Тогда и $F(b)$ ограничена на $[a,\omega] \Rightarrow \int\limits_a^\omega f(x)dx$ - сходится

б) Если $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ - расходится, то $F(b)$ - неограниченная на $[a,\omega)$

Тогда и $G(b)$ - неограниченная на $[a,\omega) \Rightarrow \int\limits_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

Следствие Если выполнены условия 1) 2) теоремы, то если $\exists \, c_1, c_2$, $c_1 > 0, c_2 > 0$, такие что $\forall x \in [a,\omega)$

$c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x)$, то

$\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x^4+x^2+1)}{x^2}dx \to$ сходится абсолютно, т.к.

$\left|\frac{\sin(x^4+x^2+1)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ - сходится

Следствие (предельный признак сравнения)
Если выполнены условия 1) 2) теоремы и $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, то

$\exists \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A\ne 0$, $A\in\mathbb{R}$, то

$\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\omega} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Д-во $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, b\in[a,\omega)$:

$:\forall\, x\in[a,\omega)$, $x>b$: $A-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon$

Пусть $\varepsilon<A$ тогда $(A-\varepsilon)g(x) < f(x) < (A+\varepsilon)g(x)$ $\to$ далее

см. предыдущее следствие

Следствие В условиях теоремы если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to\omega$

то $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\omega} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Примеры

1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ при $x\to+\infty$; $\frac{3}{2}>1$ - сходится

2. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$: $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ при $x > 1$, $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ – сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходный интеграл сходится

3. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$: $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ при достаточно больших x,

(т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ – расходится $\Rightarrow$ исходный интеграл расходится.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx$ (особенность при $x=0$)

при $x \to 0+$: $\ln \sin x \sim \ln x < \frac{1}{\sqrt{x}}$ (т.к. $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x = 0$)

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ – сходится $\Rightarrow$ исходный интеграл сходится

<u>Опр</u> Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он сходится <u>условно</u>

<u>Пример</u> $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{d\cos x}{x} = \underbrace{-\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}}_{0} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \to \text{сходится}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_{\pi/2}^{b} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b} \frac{1-\cos 2x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos 2x}{x}dx$$

$$\int_{\pi/2}^{b} \frac{\cos 2x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b} \frac{d\sin 2x}{x} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{b} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\sin 2x}{x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin 2b}{b} + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\sin 2x}{x^2}dx.$$

но! если $b \to +\infty$, то $\frac{1}{2}\frac{\sin 2b}{b} \to 0$, а $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ – сходится

в то же время $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ – расходится, т.е.

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ – расходится, т.о. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ – <u>сходится, но условно</u>!

<u>Теорема</u> (<u>признак Абеля-Дирихле</u> сходимости интеграла)

1) $f(x): [a,\omega) \to \mathbb{R}$, $g(x): [a,\omega) \to \mathbb{R}$

2) $\forall [a,b] \subset [a,\omega)$: $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, $g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

3) $g(x)$ – монотонная функция

Тогда если

α_1) $\int_a^{\omega} f(x)dx$ – сходится <u>и</u> β_1) $g(x)$ ограничена на $[a,\omega)$

<u>или</u>

α_2) $\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a,\omega)$ <u>и</u>

β_2) $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} g(x) = 0$

то

$$\int_a^{\omega}\left(f(x)\cdot g(x)\right)dx \quad \text{сходится.}$$

Д-во $\forall b_1, b_2 \in [a, \omega)\ \exists\ \xi \in (b_1, b_2)$:

$$\int_{b_1}^{b_2} (f(x)\cdot g(x))dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx \quad (*)(V)$$

(см. вторую теорему о среднем для интеграла).

Если выполнены условия $\alpha_1)$ и $\beta_1)$, то в силу сходимости $\int_a^{\omega} f(x)dx$ величины

$\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right|$ и $\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right|$ можно сделать как угодно малыми (меньше $\forall \varepsilon > 0$)

(см. критерий Коши для несобственного интеграла)

т.к. $g(x)$ - ограничена, т.е. $|g(x)| < C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in [a, \omega)$, то всю правую часть $(*)(V)$ можно сделать по абсолютной величине меньшей чем $2C\varepsilon$, $\Rightarrow$ для интеграла $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ выполняется критерий Коши.

Если выполнены условия $\alpha_2)$ и $\beta_2)$, то величины $g(b_1)$ и $g(b_2)$ можно сделать как угодно малыми (меньше $\forall \varepsilon > 0$), в то время как в силу ограниченности $F(b)$, каждый из интегралов в правой части $(*)(V)$ можно ограничить (по абсолютной величине) некоторой фиксированной константой), то есть и в этом случае для интеграла $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ выполняется критерий Коши.