Лекция 12

Логика предикатов

Определение 1. Предикатом называется функция $P(x_1, \dots, x_n), x_i \in M$, $i = 1, \dots, n$ значение $P(x_1, \dots, x_i) \in \{И, Л\}$. $P: M^n \to \{И, Л\}$.

Если n = 0, то это высказывание.

Логические операции: $\neg, \&, \vee, \supset, \sim, +$;

Дополнительно существует 2 квантора:

$\forall$ – квантор общности (для любого);

$\exists$ – квантор существования (существует).

Определение 2. $(\forall\, x)\, P(x)$ принимает значение истина $\leftrightarrow$ для всех $a \in M: P(a) = И$. $(\forall\, x) P(x)$ принимает значние ложь $\Leftrightarrow$ существует хотя бы одно $a_0 \in M : P(a_0) = Л$.

Определение 3. $(\exists\, x) P(x)$ принимает значение истина $\Leftrightarrow$ существует хотя бы одно $a_0 \in M : P(a_0) = И$. $(\exists\, x) P(x)$ принимает значение ложь $\Leftrightarrow$ для всех $a \in M$ $P(a) = Л$.

Пример 1. Пусть $P(x) \to {}'x$ – четное' на множестве N.

Тогда $(\forall\, x) P(x) = Л$, $(\exists\, x) P(x) = И$;

Область истинности предикатов

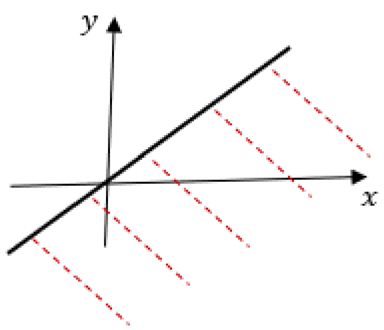
Определение 4. Областью истинности предиката $P(x_1, \dots, x_n)$ называется подмножество $\widetilde{M} \subseteq M^n$: $\forall < s_1, \dots, s_n > \in \widetilde{M}$ $P|_{<s_1, \dots, s_n>} = И$.

$\underline{P_1(x_1, \dots, x_n) \,\&\, P_2(x_1, \dots, x_n)} = \underline{P_1(x_1, \dots, x_n)} \cap \underline{P_2(x_1, \dots, x_n)}$;

$\underline{P_1(x_1, \dots, x_n) \vee P_2(x_1, \dots, x_n)} = \underline{P_1(x_1, \dots, x_n)} \cup \underline{P_2(x_1, \dots, x_n)}$;

Пример 2.

$P_1(x, y) \to x \geq y$; область истинности под прямой $y = x$.



Формула логики предикатов (ЛП)

Алфавит логики предикатов.

1. $x_1, \dots, x_n$ – предметные переменные.
2. $A_i^{(j)}$ – предикатные символы, где j – число мест предиката (число переменных), i – номер предикатного символа.
3. Логические операции: $\neg, \&, \vee, \supset, \sim, +$.
4. $\forall$, $\exists$ – кванторы.
5.), (– скобки.

Определение 5. Переменные, находящиеся в области действия какого-либо квантора, называются связными. Остальные – свободные.

Пример 3.

$A(x, y)\colon x, y -$ свободные;

$(\forall x)\ A(x, y)$; x – связная, y – свободная;

$(\forall x)\ (\exists y)\ A(x, y)$; x, y – связные;

Определение 6. Формулой логики предикатов будем называть слово в алфавите ЛП, удовлетворяющее условиям.

1. $A_i^{(j)}(x_1, \dots, x_n)$ – атомарная формула.
2. Если A и B – формулы, то $(\neg A), (A \& B), (A \vee B), (A \supset B), (A \sim B), (A + B)$ – тоже формулы. Связные переменные одной формулы не могут быть свободными другой.
3. Если $\mathrm{A}(x, x_1, \dots, x_n)$ – формула со свободными переменными $x, x_1, \dots, x_n$, то

   $(\forall \mathrm{x})\ \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ и $(\exists \mathrm{x})\ \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ – тоже формулы со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$. Свободная переменная x становится связной.

4. Других правил образования формул нет.

Пример 4. Слово $(\forall x) A_1(x)\ \&\ A_2(x)$ не является формулой, т.к. в A_1 x связная переменная, а в A_2 x – свободная переменная.

Значение формулы в данной интерпретации

Определение 7. Под интерпретацией будем понимать упорядоченную пару $I = < M, f >$, где M – множество значений переменных, f – соответствие предикатному символу конкретного предиката.

$A_i^{(j)} \to \mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)$;

Пример 5. $I = < R, f >$, $f\colon A^{(2)}(x, y) \to x \geq y$;

$A^{(2)}(x, y)\big|_{<2,4>} = Л$;

$A^{(2)}(x, y)\big|_{<5,3>} = И$;

$(\forall x)(\exists y)A^{(2)}(x, y) = И$;

$(\exists x)(\forall y)A^{(2)}\,(x, y) = Л$.

Рассмотрим, какое значение может принимать формула F в заданной интерпретации $I =< M, f >$ на оценке $< s_1, \dots, s_n >$.

Повторим пункты определения формулы.

1. Если формула атомарная, то её значение равно значению соответствующего предиката.
2. Пусть
   $A|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_1$; $B|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_2$; $t_1, t_2 \in \{И, Л\}$.
   Тогда
   $\neg A|_{<s_1,\dots,s_n>} = \neg t_1$
   $(A \,\&\, B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_1 \,\&\, t_2$
   $(A \vee B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_1 \vee t_2$
   $(A \supset B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_1 \supset t_2$
   $(A + B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_1 + t_2$
   $(A \sim B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = t_1 \sim t_2$
3. В формуле $A(x)$ содержатся еще свободные переменные $x_1, \dots, x_n$. Тогда
   $(\forall x)\ A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И \Leftrightarrow \forall a \in M\ \ A(a)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$
   $(\forall x)\ A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л \Leftrightarrow \exists a_0 \in M\ \ A(a_0)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$
   $(\exists x)\ A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И \Leftrightarrow \exists a_0 \in M\ \ A(a_0)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$
   $(\exists x)\ A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л \Leftrightarrow \forall a \in M\ \ A(a)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$

Задача 1. Рассмотрим интерпретацию

$I =< N \cup \{0\}, f >$

$f : S(x, y, z) = И \leftrightarrow x + y = z$

$P(x, y, z) = И \leftrightarrow x * y = z$

Требуется на языке логики предикатов записать формулы истинные тогда и только тогда, когда:

1. $x = 0$.
2. $x = 1$.
3. x − четное.
4. x − простое.
5. $x \leq y$.
6. $x = y$.
7. Сложение коммутативно.

Решение.

1. $x = 0$

$(\forall y)\ (x + y = y)$

$(\forall y)\ S(x, y, y) = F_0(x)$ – обозначение, причем x − свободная переменная, y − связная (те переменные, которые есть в формулировке утверждения, свободные).

2. $x = 1.$

$(\forall y)\ (x \cdot y = y)$

$(\forall y)\ P(x, y, y) = F_1(x)$

3. x – чётное

$(\exists y)\ (\ y + y = x)$

$(\exists y)\ S(y, y, x) = F_2(x)$

4. x − нечётное:

$\neg F_2(x)$

5. x − простое

$(x \neq 0\&1)\&(\forall y)(\forall z)(y \cdot z = x \supset (y = 1) \vee (z = 1))$

$\neg F_0(x)\&\neg F_1(x)\&(\forall y)(\forall z)(P(\ y, z, x) \supset (F_1(y) \vee F_1(z)).$

6. $x \leq y$

$(\exists z)\ (x + z = y)$

$(\exists z)\ S(x, z, y) = F_3(x, y).$

7. $x = y$

$F_3(x, y)\&F_3(y, x)$

или

$(\forall v)\ (\exists u)\ (x + v = u\ \supset y + v = u)$

$(\forall v)\ (\exists u)\ (\ S(x, v, u) \supset S(y, v, u)).$

8. Сложение коммутативно. Свободных переменных нет.

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(S(x, y, z) \supset (S(y, x, z))$

Могут существовать несколько вариантов формул.

Равносильность формул логики предикатов

Определение 1. Формулы $F_1 \equiv_I F_2$ равносильны в данной интерпретации $I =< M, f >$, если в этой интерпретации на любой оценке свободных переменных они принимают одинаковые истинностные значения.

Определение 2. Формула $F_1 \equiv_M F_2$ равносильны на множестве М, если в любой интерпретации $I =< M, f >$, содержащей множество M на любой оценке свободных переменных они принимают одинаковые истинностные значения.

Определение 3. Формула $F_1 \equiv F_2$ равносильны в логике предикатов, если они равносильны на всех множествах, т.е. в любой интерпретации и на любой оценке свободных переменных они принимают одинаковые истинностные значения.

Пример 1.

$F_1 = (\forall x\,)A\,(x)$

$F_2 = (\exists x\,)A\,(x)$

1. $I =< \mathbb{N}, f >$
   $f: A(x) \to x \geq 1$
   $F_1 \equiv_I F_2 : \; F_1 = F_2 =$ И
2. На одноэлементном множестве $M = \{a\}$.
   $F_1 \equiv_M F_2$.
3. $F_1 \not\equiv F_2$ в ЛП
   Рассмотрим $I =< \mathbb{N}, f >, f: A(x) \to x -$ чётное
   Тогда $F_1 =$ Л , $F_2 =$ И

Основные равносильности логики предикатов

1. Перенос отрицания через квантор: квантор меняется на противоположный.

$$\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x) \quad (1.1)$$

$$\neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x) \quad (1.2)$$

2. Квантор с переменной x можно выносить за скобки, если одна формула зависит от x, а другая нет.

$$(\forall\, x)\; A(x) \vee B \equiv \; (\forall\, x)\; (A(x) \vee B) \quad (2.1)$$

$$(\exists\, x)\; A(x) \vee B \equiv \; (\exists\, x)\; (A(x) \vee B) \quad (2.2)$$

$$(\forall\, x)\; A(x)\;\&\; B \equiv \; (\forall\, x)\; (A(x)\;\&\; B) \quad (2.3)$$

$$(\exists\, x)\; A(x)\;\&\; B \equiv \; (\exists\, x)\; (A(x)\;\&\; B) \quad (2.4)$$

3. Если обе формулы зависят от x, то справедливы только 2 тождества из 4:

$$(\forall\, x)\; A(x)\;\&\;(\forall\, x)\; B(x) \equiv \; (\forall\, x)\; (A(x)\;\&\; B(x)) \quad (3.1)$$

$$(\exists\, x)\; A(x) \vee (\exists\, x)\; B(x) \equiv \; (\exists\, x)\; (A(x) \vee B(x)) \quad (3.2)$$

4. Одноимённые кванторы можно переставлять (разноимённые – нет).

$$(\forall\, x)\; (\forall\, y)\; A(x,y) \equiv \; (\forall\, y)\; (\forall\, x)\; A(x,y) \quad (4.1)$$

$$(\exists x)\; (\exists y)\; A(x,y) \equiv \; (\exists\, y)\; (\exists\, x)\; A(x,y) \quad (4.2)$$

5. Правило замены (переименования) переменной в области действия квантора. Всюду в области действия квантора связную переменную формулы можно переименовать в другую переменную, не содержащуюся в A.

$$(\forall\, x)\; A(x) \equiv \; (\forall\, z)\; A(z) \quad (5.1)$$

$$(\exists\, x)\; A(x) \equiv \; (\exists\, z)\; A(z) \quad (5.2)$$

Доказательство тождеств

1. ***Докажем тождество*** $\mathbf{(1.1)}$**:** $\urcorner(\forall\, \boldsymbol{x})\; \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv\; (\exists\, \boldsymbol{x})\, \urcorner\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$

$A(x)$: свободные переменные – $< x, x_1, \dots, x_n >$,

$(\forall\, x)\; A(x)$: свободные переменные – $< x_1, \dots, x_n >$.

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I =< M, f >$ и произвольную оценку свободных переменных $< s_1, \dots, s_n >$.

Возможны два случая:

1) $\forall\, \tilde{s} \in M \quad A(\tilde{s})|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$

2) $\exists\, s_0 \in M \quad A(s_0)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$

<u>В первом случае.</u> Левая часть: $(\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И \;\Rightarrow \urcorner(\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$

Правая часть: $A(x)|_{<\tilde{s},s_1,\dots,s_n>} = И$, $\forall\, \tilde{s} \in M$. Тогда

$\urcorner A(x)|_{<\tilde{s},s_1,\dots,s_n>} = Л \quad \forall\, x = \tilde{s} \in M$ и $(\exists\, x)\urcorner A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$.

<u>Во втором случае.</u> Левая часть: $\exists\, s_0 \in M\; A(x)|_{<s_0,s_1,\dots,s_n>} = Л \Rightarrow$

$(\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$ и $\urcorner(\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$.

Правая часть: $\exists\, s_0 \in M\; A(s_0)|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л \Rightarrow \urcorner A(s_0)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$

и $\Rightarrow\; (\exists\, x)\urcorner A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$.

Докажем тождество $\mathbf{(1.2)}$**:** $\urcorner(\exists\, \boldsymbol{x})\; \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv\; (\forall\, \boldsymbol{x})\, \urcorner\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$

В тождество (1.1) подставим вместо $A(x) \to \urcorner A(x)$: $\urcorner(\forall\, x)\, \urcorner A(x) \equiv\; (\exists\, x)\urcorner\urcorner A(x)$;

и возьмем отрицание от левой и правой части: $\urcorner\urcorner(\forall\, x)\, \urcorner A(x) \equiv\; \urcorner(\exists\, x) A(x)$.

Получим тождество (1.2): $\urcorner(\exists\, x) A(x) \equiv (\forall\, x)\, \urcorner A(x)$.

2. **Докажем тождество** $\mathbf{(2.1)}$: $(\forall\, x)\; A(x) \vee B \equiv\; (\forall\, x)\; (A(x) \vee B)$

$A(x)$: свободные переменные – $< x, x_1, \dots, x_n >$

$(\forall\, x)\; A(x), B$: свободные переменные – $< x_1, \dots, x_n >$

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I =< M, f >$ и произвольную оценку свободных переменных $< s_1, \dots, s_n >$.

Возможны 2 случая:

1) $B|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$

2) $B|_{<s_1,\dots,s_n>} = Л$

<u>В первом случае.</u> $(\forall\, x)\; A(x) \vee B|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$ и $(\forall\, x)\; (A(x) \vee B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И$.

<u>Во втором случае.</u> $(\forall\, x)\; A(x) \vee B|_{<s_1,\dots,s_n>} = (\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>}$ и $(\forall\, x)\; (A(x) \vee B)|_{<s_1,\dots,s_n>} = (\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>}$. Правая и левая часть тождества равны.

Тождества (2.2) – (2.4) доказываются аналогично.

3. ***Докажем справедливость тождества (3.1):***

$$(\forall\, x)\; A(x)\;\&\;(\forall\, x)\; B(x) \equiv\; (\forall\, x)\; \big(A(x)\;\& B(x)\big)$$

$A(x), B(x)$: свободные переменные – $< x, x_1, \dots, x_n >$

$(\forall\, x)\; A(x), (\forall\, x)\; B(x)$: свободные переменные – $< x_1, \dots, x_n >$

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I =< M, f >$ и произвольную оценку свободных переменных $< s_1, \dots, s_n >$.

Схема доказательства: л.ч. = И $\leftrightarrows$ **пр.ч.** = И.

Докажем **л.ч.** = И $\Rightarrow$ **пр.ч.** = И.

$(\forall\, x)\; A(x)\;\&\;(\forall\, x)\; B(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} =$ И $\Rightarrow$ $(\forall\, x)\; A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} =$ И и
$(\forall\, x)\; B(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} =$ И. Следовательно,

$\forall\, \tilde{s} \in M \quad A(x)|_{<\tilde{s},s_1,\dots,s_n>} =$ И и $\forall\, \tilde{s} \in M \quad B(x)|_{<\tilde{s},s_1,\dots,s_n>} =$ И. Получим,

$A(x)\;\&\;B(x)|_{<\tilde{s},s_1,\dots,s_n>} =$ И $\;\forall\, \tilde{s} \in M \quad \Rightarrow \quad (\forall\, x)(A(x)\;\&\;B(x))|_{<s_1,\dots,s_n>} =$ И

Доказательство по схеме **пр.ч.** = И $\Rightarrow$ **л.ч.** = И аналогично **(**в обратном порядке)

Опровергнем тождество: $(\forall\, x)\; A(x) \vee (\forall\, x)\; B(x) \equiv\; (\forall\, x)\; (A(x) \vee B(x))$

Контрпример (конкретная интерпретация): $I =< N, f >$,

$$f\!: \begin{cases} A(x) \to x - \text{четное} \\ B(x) \to x - \text{нечетное} \end{cases}.$$

Тогда $(\forall\, x)\; A(x) -\; Л$ и $(\forall\, x)\; B(x) -\; Л$. Вся левая часть – $Л$.

А правая часть $(\forall\, x)\; (A(x) \vee B(x)) =$ И. Тождество несправедливо.

Аналогично опровергнем

$(\exists\, x)\;\; A(x)\;\;\&\;(\exists\, x)\;\; B(x) \equiv\; (\exists\, x)\; (A(x)\;\&\;B(x))$

$(\exists\, x)\; A(x)\;\&\;(\exists\, x)\; B(x) =$ И, но $(\exists\, x)\; (A(x)\;\&\;B(x)) =\; Л$

4. **Доказать самостоятельно.**
$(\forall\, x)\; (\forall\, y)\; A(x,y) \equiv\; (\forall\, y)\; (\forall\, x)\; A(x,y)$. Схема: **л.ч.** = И $\leftrightarrows$ **пр.ч.** = И.
$(\exists x)\; (\exists y)\; A(x,y) \equiv\; (\exists\, y)\; (\exists\, x)\; A(x,y)$. Схема: **л.ч.** = Л $\leftrightarrows$ **пр.ч.** =**Л**
Опровергнем тождество: $(\exists x)\; (\forall\, y)\; A(x,y) \equiv\; (\forall\, y)\; (\exists\, x)\; A(x,y)$.

Контрпример. $I =< \mathrm{R}, f >$, $\; f\!: A(x,y) =$ И $\Leftrightarrow \; x \le y$

$(\exists x)\;\; (\forall\, y)\;\; A(x,y) =$ Л , $\;(\forall\, y)\; (\exists\, x)\; A(x,y) =$ И. Тождество несправедливо.

Разноименные кванторы переставлять нельзя.

Задачи на экзамене.

Доказать или опровергнуть тождества

1. $(\exists\, x)\ A(x) \supset B = (\exists\, x)\ (A(x) \supset B)$
2. $(\exists\, x)\ A(x) \supset B = (\forall\, x)\ (A(x) \supset B)$.

Решим 1. $(\exists\, x)\ A(x) \supset B = \rceil(\exists\, x)\ A(x) \vee B$, $(\exists\, x)\ (A(x) \supset B) = (\exists\, x)\ (\rceil A(x) \vee B)$
$\Rightarrow \rceil(\exists\, x)\ A(x) \vee B = (\exists\, x)\ (\rceil A(x) \vee B) \quad \Rightarrow \quad (\forall\, x)\ \rceil A(x) \vee B = (\exists\, x)\ \rceil A(x) \vee B$

Контрпример: $I = < \mathrm{N}, f >$, $f: B(y) \to y < 0 -$ тожд. Л, $A(x) \to x -$чётное

$(\forall\, x)\ \rceil A(x) \neq (\exists\, x)\ \rceil A(x)$.

Решим $(\exists\, x)\ A(x) \supset B = (\forall\, x)\ (A(x) \supset B) \Rightarrow \rceil(\exists\, x)\ A(x) \vee B = (\forall\, x)\ (\rceil A(x) \vee B)$

$\Rightarrow \quad (\forall\, x)\ \rceil A(x) \vee B) = (\forall\, x)\ \rceil A(x) \vee B)$