Теорема (о пределе композиции)

1) $g: Y \to \mathbb{R}^n$

2) $\mathcal{B}_Y$ – база в Y, $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g(y) = A \in \mathbb{R}^n$

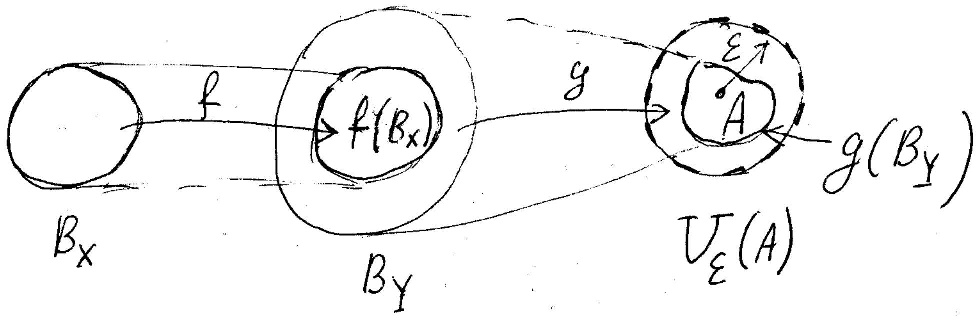
3) $f: X \to Y$

4) $\mathcal{B}_X$ – база в X

5) $\forall B_Y \in \mathcal{B}_Y \ \exists B_X \in \mathcal{B}_X : f(B_X) \subset B_Y$

1) 2) 3) 4) 5) $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}_X} g(f(x)) = A.$

Д-во



Пример

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$f(0,y) = f(x,0) = 0$, но! $f(x,x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 0$

легко проверить, что

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

Но! $\quad \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(если $x=0$ и $y \to 0$ то $f(0,y) \to 0$, но
если $x=y$ и $\cancel{y} \to 0$ то $f(x,x) \to \frac{1}{2}$)

Пример

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \qquad \left((x,y)\to(0,0) \Rightarrow \begin{matrix} x\to 0 \\ y\to 0 \end{matrix} \Rightarrow y\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{ограниченная}} \to 0 \right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

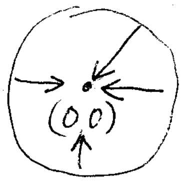
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = ?\ (\nexists) \quad \text{т.к. } \nexists \lim_{x\to 0} x + y\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\to ??}$$

Пример

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Пусть $\underset{\alpha\neq 0}{x = \alpha t}$ $\quad \underset{\beta\neq 0}{y = \beta t}$ $\Rightarrow f(x,y) = \dfrac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} = \dfrac{\alpha^2\beta t}{\beta^2 + \alpha^4 t^2} = g(t)$

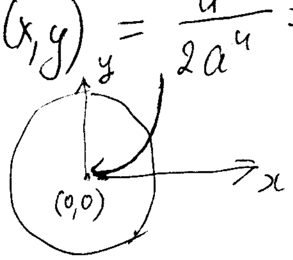
$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0$$



При движении по любому лучу в точку $(0,0)$, $f(x,y)\to 0$

Пусть $x = a$, $y = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y) = \dfrac{a^4}{2a^4} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\lim\limits_{a\to 0} f(a,a^2) = \dfrac{1}{2}$



при движении по параболе в точку $(0,0)$: $f(x,y)\to\dfrac{1}{2}$

Т.о., $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Непрерывность

Опр.* ($f: E\to\mathbb{R}^n$ непрерывна в $a\in E$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall V(f(a))\ \exists U_E(a):$
$f(U_E(a)) \subset V(f(a))$

Здесь: $V(f(a))$ – окрестность точки $f(a)$ в $\mathbb{R}^n$

$U_E(a) = U(a) \cap E$, где $U(a)$ – окрестность точки a.

Вариации определения непрерывности

Опр $f: E \to \mathbb{R}^n$

$$\left(\underset{a\in E}{f \in C(a)}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E : d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon)$$

Опр $f: E \to \mathbb{R}^n$, a – предельная точка E.

$$\left(\underset{a\in E}{f \in C(a)}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\exists \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = f(a)\right)$$

Замечание Если $E \subset \mathbb{R}^m$, $f: E \to \mathbb{R}^n$, то

$$x = (x^1, \dots, x^m) \xrightarrow{f} y = (y^1, \dots, y^n) =$$

$$= \underbrace{(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m))}_{}$$

координатные функции : $f^i(x^1, \dots x^m): E \to \mathbb{R}$

Утв. $a \in E \subset \mathbb{R}^m$: $(f \in C(a), a \in E) \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, n\ f^i \in C(a))$

Опр Колебанием функции $f: E \to \mathbb{R}^n$ в точке $a \in E$ называется

$$\omega(f, a) = \lim_{r \to 0+} \omega(f; B_E(a, r)), \text{ где}$$

$B_E(a, r) = B(a, r) \cap E$.

Локальные св-ва непрерывных функций

Утв. 1) $f: E \to \mathbb{R}^n$, $a \in E$

$\left(\underset{a\in E}{f \in C(a)}\right) \Leftrightarrow (\omega(f, a) = 0)$

2) $f: E \to \mathbb{R}^n$, если $\underset{a\in E}{f \in C(a)}$, то

$\exists U_E(a)$: f ограничено в $U_E(a)$ $\quad (U_E(a) = U(a) \cap E)$

3) $g: Y \to \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $g \in C(y_0)$, $y_0 \in Y$

$f: X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C(x_0)$, $x_0 \in X$,

$f(x_0) = y_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = g(f(x)) \in C(x_0)$, $x_0 \in X$.

4) $f: E \to \mathbb{R}$, $f \in C(a)$, $a \in E$, $f(a) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, U_E(a): \forall x \in U_E(a): f(x) > 0$.

5) $f: E \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$, $f \in C(a)$, $g \in C(a)$, $a \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in C(a)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $f \cdot g \in C(a)$,

если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g} \in C(a)$

<u>Пример</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$f(x) \in C(a)$, $a \neq (0,0)$, но! $f(x) \notin C((0,0))$, т.к.

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ !!$$

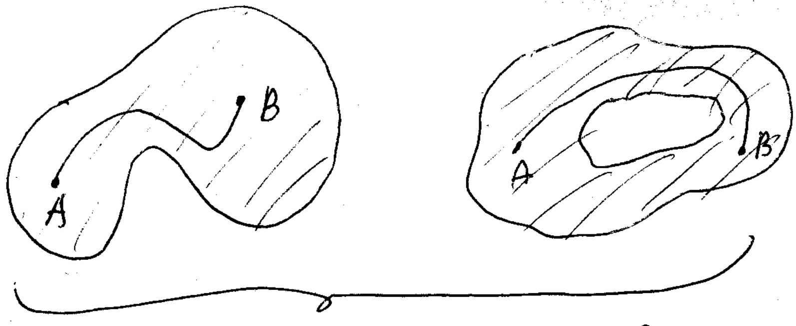
Глобальные св-ва непрерывных функций

<u>Опр</u> $f: E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ называется <u>равномерно-непрерывным на E</u>, если

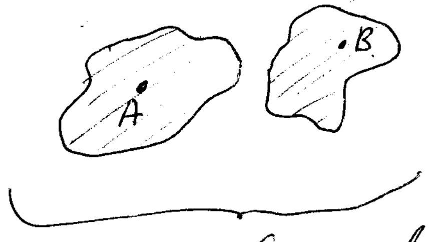
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in E: \underbrace{d(x_1, x_2)}_{\text{расстояние в } \mathbb{R}^m} < \delta \Rightarrow \underbrace{d(f(x_1), f(x_2))}_{\text{расстояние в } \mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

<u>Опр</u> Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется **связным**, если $\forall x_1, x_2 \in E$ $\exists f: [a,b] \to E$, $f(a) = x_1$, $f(b) = x_2$, $f \in C[a,b]$.

(т.е. точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в E)



связные множества



множество не является связным.

<u>Опр</u> Открытое связное множество называется <u>областью</u>.

<u>Пример</u> $B(a,r)$ - область,

$S(a,r)$ - связное множество, но не область

<u>Утв.</u> 1) $f: K \to \mathbb{R}^n$, K - компакт.

Тогда $f \in C(K) \Rightarrow f$ - равномерно непрерывна на K.

2) $f: K \to \mathbb{R}^n$, K - компакт

Тогда $f \in C(K) \Rightarrow f$ - ограничена на K.

3) $f: K \to \mathbb{R}^n$, K - компакт

Тогда $f \in C(K) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in K: f(x_1) = \min\limits_K f(x)$

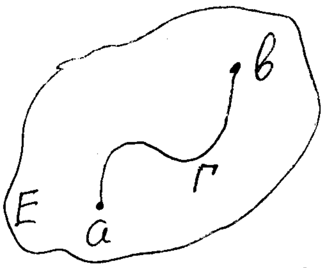
$f(x_2) = \max\limits_K f(x)$

4) $f: E \to \mathbb{R}$, E - связное множество

Тогда $f \in C(E) \Rightarrow$ если для $a, b \in E: f(a) = A,\ f(b) = B$, то

$\forall\, \underline{C},\ \underline{C} \in [A,B]$ (или $[B,A]$) $\exists\, \bar{c} \in E: f(\bar{c}) = \underline{C}$

<u>Д-во 4)</u> (иллюстрация)



E - связное мн-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varphi: [\alpha, \beta] \to \Gamma$, $\varphi \in C[\alpha,\beta]$,

$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Пусть $g(t) = f(\varphi(t)) \Rightarrow g \in C[\alpha, \beta]$

$g(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(a) = A$,

$g(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(b) = B$

$\forall\, \underline{C},\ \underline{C} \in [A,B]$ (или $[B,A]$) $\exists\, \gamma \in [\alpha,\beta]: g(\gamma) = \underline{C}$. Пусть $\varphi(\gamma) = \bar{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{c}) = \underline{C}$