Мощность множеств

Определение 1. Два множества A и B называются равномощными A~B (аналогичная запись: $m(A) = m(B)$ или $|A| = |B|$), если $\exists$ биекция $f: A \to B$.

Утверждение 1. Отношение равномощности – отношение эквивалентности.

Доказательство.

1. Рефлексивность: $A \sim A,$ так как существует биекция $e_A: A \to A$.
2. Симметричность: A~B $\Rightarrow B \sim A$, так как $\exists$ биекция $f: A \to B \Rightarrow \exists$ биекция $f^{-1}: B \to A$.
3. Транзитивность: $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$, т.к. $\exists$ биекция $f: A \to B$, $\exists$ биекция $\varphi: B \to C \Rightarrow \varphi \circ f: A \to C$ – биекция.

Множества бывают конечные (с конечным числом элементов) и бесконечные.

Конечные множества

Утверждение 2. Пусть множества A и B конечны. $A \sim B$, тогда и только тогда, когда A и B содержат одинаковое число элементов.

Доказательство:

Достаточность.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $f: A \to B$.

И пусть $m \neq n$

1. $m > n - f$ не инъективна.
2. $m < n - f$ не сюръективна.

Противоречие, т.к. и в том, и в другом случаях $f: A \to B$ не является биекцией и, следовательно, не выполняется $A \sim B$.

Необходимость очевидна: $m = n \Rightarrow f$ – биекция. Ч.т.д.

Счетные множества

Определение 2. Счетным называется множество, равномощное множеству натуральных чисел ($A \sim \mathbb{N}$).

Все элементы счетного множества можно занумеровать в бесконечную числовую последовательность.

Примеры.

1) Z: 0, -1, 1, -2, 2,…
   N: 1, 2, 3, 4, 5,…

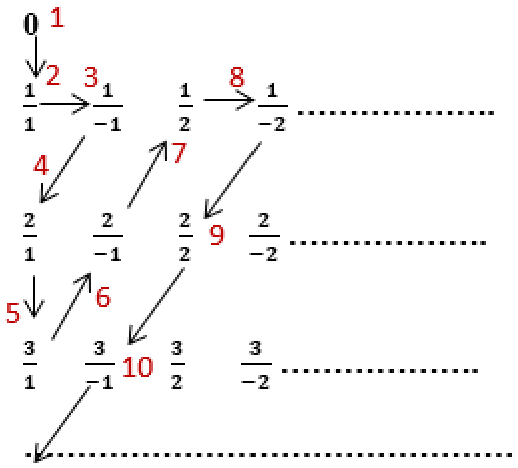
Ставим в соответствие *2z+1* неотрицательным *z* и *2|z|* – отрицательным.

2) $2^n \leftrightarrow n$

3) Q – рациональные числа

$\frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

Один из способов пересчета рациональных чисел – «змейка»:



Свойства счетных множеств

1) Любое подмножество счётного множества счётно или конечно.
2) Пересечение счетных множеств счётно или конечно. Так как

$$A \cap B \subseteq A.$$

3) Объединение конечного или счетного числа счетных множеств – $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ счетно.

Доказательство («змейка»)

$$A_1 = \{a_{11}, \; a_{12}, a_{13} \; \ldots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, \; a_{22}, \; a_{23} \ldots\}$$
$$A_3 = \{a_{31}, \; a_{32}, a_{33} \ldots\}$$

....

4) Прямое произведение **конечного! (иначе континуум)** числа счетных множеств счетно.

Доказательство («змейка»). Для двух множеств $X \times Y$

	y_1	y_2	y_3	…
x_1	$<x_1, y_1>$	$<x_1, y_2>$	$<x_1, y_3>$	…
x_2	$<x_2, y_1>$	$<x_2, y_2>$	$<x_2, y_3>$	…
x_3	$<x_3, y_1>$	$<x_3, y_2>$	$<x_3, y_3>$	….
…	…	…	…	…

И т.д. для трех множеств. И для любого конечного числа множеств. Если счетных множеств счетное число, то прямое произведение имеет мощность континуум.

5) Из любого бесконечного множества можно выделить конечное или счётное подмножество.

Выбираем первый элемент – нумеруем, второй – нумеруем и т.д.

Множества мощности континуум

Теорема Кантора. Множество точек отрезка $[0,1]$ несчётно.

Доказательство:

Предположим, что счётно, т.е. множество точек отрезка $[0,1] \sim N$. Существует биекция. Занумеруем точки отрезка:

$N \quad \alpha_i \in [0,1]$

$1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots$

$2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots$

$3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots$

…

Составим число $\beta = 0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,..\ \ \beta \in [0,1]$

$\beta_1 \neq \alpha_{11}$

$\beta_2 \neq \alpha_{22}$

$\beta_3 \neq \alpha_{33}$

……………..

Таким образом $\beta \neq \alpha_i$, следовательно, у β нет прообраза, т.е. нарушается сюръекция, а значит и биекция. Следовательно, множество точек отрезка $[0,1]$ – несчетное множество.

Заметим, что выбираем

$\beta_i \neq 0$; $\beta_i \neq 9$ из-за неоднозначности:

$\frac{1}{2} = 0{,}50000\dots$

$\frac{1}{2} = 0{,}49999\dots$

Определение 3. Множества, равномощные множеству точек отрезка $[0,1]$, называются множествами мощности континуум или континуальной мощности.

Примеры с доказательствами равномощности множеств мощности континуум

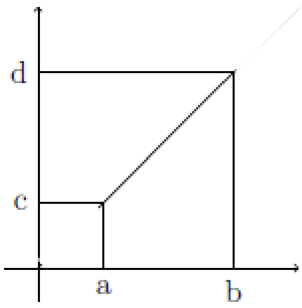
1. Любой отрезок и любой интервал являются множествами мощности континуум.

При этом

$$[a;b] \sim [c;d]$$

$$(a;b) \sim (c;d)$$

Доказательство:

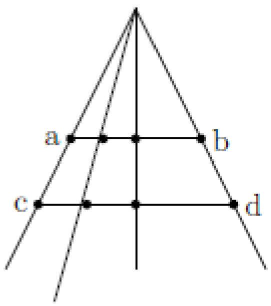


$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-c}{d-c}$$

$y = kx + f$ – биекция

$$tg\ \alpha = \frac{d-c}{b-a}$$

2)



Покажем, что $[a;b]\sim(a;b)\sim[a;b)\sim(a;b]$

Утверждение 3. Пусть A – любое бесконечное множество.

В – счетное или конечное множество.

Тогда $(A\cup B)\sim A$.

Доказательство.

Пусть $\tilde{A}$ – конечное или счетное подмножество множества A. Тогда

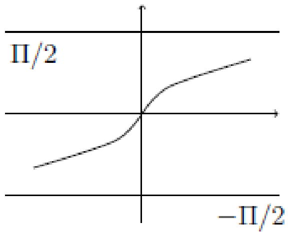
$$A\cup B\ =((A\setminus \tilde{A})\ \cup\ \tilde{A})\cup B\ =\ (A\setminus\tilde{A})\ \cup\ (\tilde{A}\ \cup\ B)\ \sim\ (A\setminus\tilde{A})\ \cup\ \tilde{A}=\ A$$

Последнее равенство справедливо только в случае, когда $\tilde{A}$ подмножество А.

Ч.т.д.

Пусть А=$(a;b)$, В= {a; b}. В этом случае из утверждения следует $[a;b]\sim(a;b)$.

3) $\mathbb{R}$ -множество действительных чисел имеет мощность континуум.



$$\mathbb{R} \sim [a; b] \sim \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = arctg\ x$$

Или для интервала (0; 1) $y = \frac{1}{\pi} arctg\ x + \frac{1}{2}$

4) I - множество иррациональных чисел имеет мощность континуум.

$$\mathbb{I} \sim \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Q - рациональное счетное множество.

$\mathbb{I}$ - иррациональное несчетное множество.

Действительно, если бы $\mathbb{I}$ было счетным, то $\mathbb{R}$ было бы тоже счётным, т.к. объединение счётных множеств счетно.

Таким образом получаем последовательность:

$$m(\mathbb{K}) < m(\mathbb{N}) < m(\mathbb{R}) < \ldots$$

m – мощность.

Бесконечна ли эта последовательность (увеличения мощности)?

Теорема Кантора-Бернштейна

Пусть A и B — произвольные множества, и существуют подмножества A_1 и B_1, такие что $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Тогда из $A_1 \sim B$ и $B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$. (Без док-ва).

Из теоремы следует, что возможны четыре случая:

1) Если $\exists A_1 \sim B$, $\exists B_1 \sim A$, тогда по теореме $m(A) = m(B)$
2) Если $\exists A_1 \sim B$, не $\exists B_1 \sim A$, тогда $m(A) > m(B)$
3) Если $\exists B_1 \sim A$ не $\exists A_1 \sim B \Rightarrow m(B) > m(A)$
4) Не $\exists A_1 \sim B$, не $\exists B_1 \sim A$, тогда множества A и B — несравнимы?

Оказывается, что четвертый случай невозможен – все множества сравнимы по мощности (аксиоматика Цермело).

Теорема о мощности множества всех подмножеств.

Мощность $P(A)$ – множества всех подмножеств множества A больше мощности самого множества A:

$$m(P(A)) > m(A). \qquad A \neq \emptyset, A \neq \{a\}$$

Доказательство.

Очевидно, что $m\big(P(A)\big) \geq m(A)$.

Докажем, что $m\big(P(A)\big) \neq m(A)$.

Пусть $\tilde{A}, X \in P(A)$, $\tilde{a}, x \in A$.

Предположим, что $m\big(P(A)\big) = m(A)$, т.е. можно установить биекцию между элементами множества $P(A)$ и элементами множества A: $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{a}$.

Сконструируем множество $\boldsymbol{X}$ следующим образом:

Если $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{A}$ и $\tilde{a} \notin \tilde{A} \Rightarrow \tilde{a} \in X$.

Если $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{A}$ и $\tilde{a} \in \tilde{A} \Rightarrow \tilde{a} \notin X$.

Покажем, что у $\boldsymbol{X}$ нет прообраза в А. По построению $\boldsymbol{X}$ получим.

Если $x \leftrightarrow \boldsymbol{X}$ и $x \notin X \Rightarrow x \in X$.

Если $x \leftrightarrow \boldsymbol{X}$ и $x \in X \Rightarrow x \notin X$.

И в том, и в другом случае получаем противоречие: $x \in X$ и $x \notin X$ одновременно. Следовательно, у множества $\boldsymbol{X}$ нет прообраза в A. Нарушается сюръективность. Таким образом. нельзя установить биекцию между элементами множеств $P(A)$ и A. Ч.т.д.

Из теоремы в частности следует: $m\big(P(\mathbb{N})\big) > m(\mathbb{N}), P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, $m\big(P(\mathbb{R})\big) > m(\mathbb{R})$.