Дифференцирование композиции функций

Теорема 1) $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f \in D(x)$, $x \in X$.

2) $g : Y \to \mathbb{R}^k$, $g \in D(y)$, $y = f(x)$.

1) 2) $\Rightarrow$ $g(f(x)) \in D(x)$, причём

$d(g(f))(x) : T_x\mathbb{R}^m \to T_{g(f(x))}\mathbb{R}^k$ есть композиция

дифференциалов $df(x) : T_x\mathbb{R}^m \to T_{y=f(x)}\mathbb{R}^n$ и

$dg(y) : T_y\mathbb{R}^n \to T_{g(y)}\mathbb{R}^k$ $(y = f(x))$

Идея доказательства

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = \underset{(y=f(x))}{dg(y)}(f(x+h) - f(x)) + \bar{o}(f(x+h) - f(x)) =$$

$$= dg(y)(df(x)h + \bar{o}(h)) + \bar{o}(f(x+h) - f(x)) =$$

$$= \underbrace{dg(y)(df(x)h)}_{\text{композиция дифференциалов}} + \underbrace{dg(y)(\bar{o}(h)) + \bar{o}(f(x+h) - f(x))}_{\alpha(x,h)}$$

$$\begin{cases} dg(y)(\bar{o}(h)) = \bar{o}(h) \\ f(x+h) - f(x) = df(x)h + \bar{o}(h) = \underline{O}(h) + \bar{o}(h) = \underline{O}(h) \quad (h \to 0) \\ \bar{o}(f(x+h) - f(x)) = \bar{o}(\underline{O}(h)) = \bar{o}(h) \end{cases}$$

$$\to \alpha(x,h) = \bar{o}(h)$$

В координатной форме:

$$f=\begin{pmatrix} f^1(x^1,\dots x^m) \\ - - - - - \\ f^n(x^1,\dots x^m) \end{pmatrix};\quad df(x)=\begin{pmatrix} df^1(x^1\dots x^m) \\ - - - - - \\ df^n(x^1\dots x^m) \end{pmatrix};\quad h=\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}$$

$$df^i(x^1,\dots x^m)h=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f^i}{\partial x^j}h^j \quad \left(h^j=dx^j \Rightarrow df^i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j\right)$$

$$df(x)h=\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ - - & - - & - - \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}}_{\text{Якобиан.}}\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}=\left(\partial_i f^j(x)\right)\cdot h \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1\dots n. \end{matrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} g^1(y^1,\dots y^n) \\ - - - - - \\ g^k(y^1\dots y^n) \end{pmatrix};\quad dg(x)=\begin{pmatrix} dg^1(y^1\dots y^n) \\ - - - - - \\ dg^n(y^1\dots y^n) \end{pmatrix};\quad p=\begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$$

$$dg(y)p=\begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial y^n} \\ - - & - - & - - \\ \frac{\partial g^k}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial g^k}{\partial y^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}=\partial_\alpha g^\beta(y)p \qquad \begin{matrix} \alpha=1,\dots,n \\ \beta=1,\dots k \end{matrix}$$

$$dg(f(x))h=dg(y)\circ df(x)h=$$

$$=\partial_\alpha g^\beta(y)\cdot\underbrace{\partial_i f^j(x)h}_{\text{вместо } p}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial y^n} \\ - - & - - & - - \\ \frac{\partial g^k}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial g^k}{\partial y^n} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ - - & - - & - - \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}}_{p}$$

О частных производных

$$\varphi(x) = g(f(x)) : X \to \mathbb{R}^k \;, \quad X \subset \mathbb{R}^m$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x) \\ \vdots \\ \varphi^k(x) \end{pmatrix}$$

$$d\varphi^\beta(x)\,h = \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^1}(x) h^1 + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^2}(x) h^2 + \ldots + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^m}(x) h^m$$

$\beta = 1, 2, \ldots, k$

$$d\varphi^\beta(x) h = dg^\beta(y) \circ df(x)\, h =$$

$(y = f(x))$

$$= \left(\frac{\partial g^\beta}{\partial y^1} \cdots\cdots \frac{\partial g^\beta}{\partial y^n}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g^\beta}{\partial y^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}}_{\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i}} h^i \Rightarrow \underline{\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} = \frac{\partial g^\beta}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial g^\beta}{\partial y^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^i}}$$

Пример

$$u = f(\underbrace{x+y+z}_{v}, \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{w}) \qquad du = ?$$

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial u}{\partial w} dw \\ dv &= dx + dy + dz \\ dw &= 2x dx + 2y dy + 2z dz \end{aligned}\right\} \; du = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot (dx + dy + dz) + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot (2x dx + 2y dy + 2z dz) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial v} + 2x \frac{\partial f}{\partial w}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial v} + 2y \frac{\partial f}{\partial w}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial v} + 2z \frac{\partial f}{\partial w}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial z}} dz$$

Производная по направлению и градиент

$f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ (окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^m$)

$v \in T_{x_0}\mathbb{R}^m$ (v - вектор, приложенный к точке x_0)

Опр Производной функции f в точке x_0 по вектору v называется

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + vt) - f(x_0)}{t}$$

$$\left(vt = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} tv^1 \\ \vdots \\ tv^m \end{pmatrix} \right).$$

Замечание 1 Если $x(t) = x_0 + vt$, то

$$D_v f(x_0) = \frac{d\,(f(x(t)))}{dt}(0) = df(x_0)\,v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\,v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\,v^m$$

Замечание 2 Если $v = (0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ое место}}}{1}, 0 \dots 0) = e_i$, то

$$D_v f(x_0) = D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$$

(производная по базисному вектору совпадает с соответствующей частной производной)

Замечание 3 Пространство $\mathbb{R}^m$ можно рассматривать как евклидово пространство (пространство со скалярным произведением). Если $v, w \in T_{x_0}\mathbb{R}^m$, то

$$(v, w) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^m w^m$$ (определение скалярного произведения)

Замечание 4 В евклидовом пространстве любая линейная функция может быть представлена как скалярное произведение

$$Lx = (\xi, x), \quad \xi \text{ - некоторый вектор.}$$

Замечание 5 $\exists\, \xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^m : \quad df(x_0)v = (\xi, v)$

Опр Вектор ξ, определяемый замечанием 5, называется градиентом $f(x)$ в точке x_0

$$\xi = \operatorname{grad} f(x_0) : \quad df(x_0)v = (\operatorname{grad} f(x_0), v)$$

Замечание 6 $$\operatorname{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\right)$$

Замечание 7 Если $e \in T_{x_0}\mathbb{R}^m$ – единичный вектор ($(e,e)=1$), то $D_e f(x_0) = |\operatorname{grad} f(x_0)| \cos\varphi$, где φ – угол между векторами e и $\operatorname{grad} f(x_0)$

Пояснение Углом между векторами V, W называется $\varphi = \arccos \dfrac{(V,W)}{|V|,|W|}$, где $|V| = \sqrt{(V,V)}$, $|W| = \sqrt{(W,W)}$

Далее, $D_e f(x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0), e) = |\operatorname{grad} f(x_0)| \cdot \underbrace{|e|}_{=1} \cdot \cos\varphi$

Замечание 8 $$\max_{\substack{e \in T_{x_0}\mathbb{R}^m \\ |e|=1}} D_e f(x_0) = |\operatorname{grad} f(x_0)|,$$ причем этот максимум достигается, если $\operatorname{grad} f(x_0) \uparrow\uparrow e$.

Опр Если e – единичный вектор, то множество векторов $\{te,\ t \in \mathbb{R},\ t>0\}$ называется направлением вектора e.

Опр Величина $D_e f(x_0)$, где e – единичный вектор, называется производной функции $f(x_0)$ по направлению e

$$\left(D_e f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e}(x_0) \right)$$

Замечание 9 $\forall e \ \exists\, \alpha_1, \dots \alpha_m : \quad e = (\underbrace{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots \cos\alpha_m}_{\text{направляющие косинусы вектора } e})$

Координатная форма производной по направлению

$$D_e f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)\cos\alpha_m$$

Дифференцирование обратной функции

Теорема

1) $f : U(x) \to V(y)$, $U(x) \subset \mathbb{R}^m$, $V(y) \subset \mathbb{R}^m$, $y = f(x)$
2) $f \in C(x)$ (непрерывна в точке x)
3) $\exists\ f^{-1} : V(y) \to U(x)$, $f^{-1} \in C(y)$
4) $f \in D(x)$ (дифференцируема в т. x)
5) Отображение $df(x) : T_x\mathbb{R}^m \to T_y\mathbb{R}^m$ имеет обратное отображение $(df(x))^{-1} : T_y\mathbb{R}^m \to T_x\mathbb{R}^m$

1) 2) 3) 4) 5) $\Rightarrow$ $f^{-1} \in D(y)$, причем

$$d f^{-1}(y) = (df(x))^{-1}$$

В координатной форме

$y = f(x)$, $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$, $f \in D(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow df(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix} = (\partial_i f^j(x))\, h$$

$x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$

$$d f^{-1}(y)t = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial y^m} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^m}{\partial y^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^m \end{pmatrix} = (\partial_\alpha \varphi^\beta(y))\, t$$

Если выполнены условия теоремы, то

$$\left(\partial_\alpha \varphi^\beta(y)\right)^{-1} = \left(\partial_i f^j(x)\right) \qquad (y=f(x))$$

т. е. матрицы Якоби взаимнообратных отображений взаимно обратны

$$\varphi = f^{-1} \Rightarrow x = \varphi(f(x))$$

Пусть $\psi(x) = \varphi(f(x)) \Rightarrow \dfrac{\partial \psi^i}{\partial x^j} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0 & \text{если } i\neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots m \end{matrix}$

т. е. $d\psi(x)h = Eh$, где E – единичная матрица.

С другой стороны,

$$d\psi(x)h = d\varphi(y)\circ df(x)h = \underbrace{\partial_\alpha \varphi^\beta(y)\cdot \partial_i f^j(x)}_{E} h$$

<u>Замечание</u> $\det\left(\partial_\alpha \varphi^\beta(y)\right) \neq 0$; $\det\left(\partial_i f^j(x)\right)\neq 0$

П-теорема

<u>О частных производных высших порядков</u>

$y=f(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x)\in D^2(G)$ G-область в $\mathbb{R}^m$

<u>Опр</u> $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^j}\right)$

<u>Теорема</u> 1) $f: G\to\mathbb{R}$, $G\subset \mathbb{R}^m$

2) $f\in D^2(G)$, т.е. $\forall x\in G, \forall i,j \ \exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$

3) $\exists x\in G: \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}\in C(x)$, $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i}\in C(x)$, $i\neq j$

1) 2) 3) $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x)$