$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+d)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+d)}{(y^2+d)^k} = \frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(y^2+d)^{k-1}} + C$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+d)^k} = ?$$

$k>1$

$$\int \frac{dy}{(y^2+d)^{k-1}} = \int (y^2+d)^{1-k}dy = y(y^2+d)^{1-k} - \int y\cdot(1-k)(y^2+d)^{-k}\cdot 2y\,dy =$$

$$= y(y^2+d)^{1-k} + 2(k-1)\int \frac{y^2}{(y^2+d)^k}dy = \frac{y}{(y^2+d)^{k-1}} + 2(k-1)\left(\int\frac{y^2+d}{(y^2+d)^k}dy - \int\frac{d}{(y^2+d)^k}dy\right) =$$

$$= \frac{y}{(y^2+d)^{k-1}} + 2(k-1)\int\frac{dy}{(y^2+d)^{k-1}} - 2(k-1)\cdot d\cdot\int\frac{dy}{(y^2+d)^k}$$

$$\int\frac{dy}{(y^2+d)^k} = \frac{1}{2(k-1)d}\left(\frac{y}{(y^2+d)^{k-1}} + 2(k-1)\int\frac{dy}{(y^2+d)^{k-1}} - \int\frac{dy}{(y^2+d)^{k-1}}\right)$$

$$\boxed{\int\frac{dy}{(y^2+d)^k} = \frac{y}{2(k-1)d(y^2+d)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)d}\int\frac{dy}{(y^2+d)^{k-1}}}$$

степень знаменателя понизилась на 1

т.о. вычисление $\int\frac{dy}{(y^2+d)^k}$ сводится к вычислению $\int\frac{dy}{(y^2+d)^{k-1}}$, $\int\frac{dy}{(y^2+d)^{k-2}}$, ..., $\int\frac{dy}{y^2+d}$.

Некоторые интегралы, приводящиеся к интегралам от рациональной функции

1) $\int R(\cos x, \sin x)dx$, $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$,

$P(u,v)$, $Q(u,v)$ – линейные комбинации произведений $u^n v^m$

Замена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = 2\int R\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{dt}{1+t^2} \to$$

→ интеграл преобразовался в интеграл от рациональной функции.

1а) $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\,dx$: замена $t = \operatorname{tg} x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dt = (1+t^2)\,dx.$$

1б) $\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x\,dx$ замена $t = \cos x$

$$\sin^2 x = 1 - t^2, \quad \sin x\,dx = -d\cos x = -dt.$$

etc., etc., etc.

2. $\int R(x, y(x))\,dx$

2а) $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad n \in N$

Замена: $t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \frac{d\cdot t^n - b}{a - c\cdot t^n}$

рациональная функция t.

$$dx = \frac{nd\cdot t^{n-1}(a-c\cdot t^n) + (dt^n - b)\cdot c\cdot n\cdot t^{n-1}}{(a-c\cdot t^n)^2}\,dt = R_1(t)\,dt$$

$R(x, y(x)) = R\left(\frac{d\cdot t^n - b}{a - c\cdot t^n}, t\right)$ → рациональная функция t

2б) $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$

$$ax^2+bx+c = a(\underbrace{x+\tfrac{b}{2a}}_{=t})^2 + \overbrace{\left(c - \tfrac{b^2}{4a}\right)}^{f} = at^2 + f =$$

$$= |f|\left(\frac{a}{|f|}t^2 \pm 1\right) = \pm|f|(u^2 \pm 1), \quad u = \sqrt{\frac{|a|}{|f|}}\,t$$

Тогда $\quad y=\sqrt{|f|}\sqrt{\pm u^2\pm 1}=\begin{cases}\sqrt{|f|}\sqrt{u^2+1}\\ \sqrt{|f|}\sqrt{u^2-1}\\ \sqrt{|f|}\sqrt{1-u^2}\end{cases}$

Тогда исходный интеграл имеет вид:
(подстановки Эйлера)

2б) 1. $\int R_1(u,\sqrt{u^2+1})\,du$

подстановки $\sqrt{u^2+1}=uz+1$, $\sqrt{u^2+1}=uz-1$, $\sqrt{u^2+1}=u-z$

2б) 2. $\int R_1(u,\sqrt{u^2-1})\,du$

подстановки $\sqrt{u^2-1}=z(u-1)$, $\sqrt{u^2-1}=z(u+1)$, $\sqrt{u^2-1}=u-z$

2б) 3. $\int R_1(u,\sqrt{1-u^2})\,du$

подстановка: $\sqrt{1-u^2}=z(1-u)$, $\sqrt{1-u^2}=z(1+u)$, $\sqrt{1-u^2}=zu\pm 1$

Пример $\quad \int R_1(u,\sqrt{u^2+1})\,du$, $\quad \sqrt{u^2+1}=uz+1\Rightarrow$

$$\Rightarrow u^2+\cancel{1}=u^2z^2+2uz+\cancel{1}\Rightarrow u=uz^2+2z\Rightarrow u=\frac{2z}{1-z^2}$$

$$\sqrt{u^2+1}=\sqrt{\frac{4z^2}{(1-z^2)^2}+1}=\sqrt{\frac{4z^2+(1-z^2)^2}{(1-z^2)^2}}=\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

$$du=\frac{2(1-z^2)+2z\cdot 2z}{(1-z^2)^2}dz=2\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}dz$$

$$\int R_1(u,\sqrt{u^2+1})\,du=2\int R_1\left(\frac{2z}{1-z^2},\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}dz=2\int R_2(z)\,dz.$$

т.о, интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Пример

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x+1=u \\ x=u-1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u-1+\sqrt{u^2+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{u^2+1} = z-u \Rightarrow \cancel{u^2}+1 = z^2-2zu+\cancel{u^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u = \frac{z^2-1}{2z} \quad \Rightarrow \sqrt{u^2+1} = \sqrt{\frac{(z^2-1)^2}{4z^2}+1} = \frac{z^2+1}{2z} \\ du = \frac{2z\cdot 2z-(z^2-1)\cdot 2}{4z^2}dz = \frac{z^2+1}{2z^2}dz \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{z^2+1}{2z^2}dz}{\frac{z^2-1}{2z}-1+\frac{z^2+1}{2z}} = \int \frac{(z^2+1)\cdot \cancel{2z}\, dz}{\cancel{2}z^{\cancel{2}}(z^2-\cancel{1}-2z+z^2+\cancel{1})} = \frac{1}{2}\int \frac{(z^2+1)dz}{z^2(z-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} \right) dz = (*)$$

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} = \frac{z^2+1}{z^2(z-1)} \Rightarrow \quad Az(z-1)+B(z-1)+Cz^2 = z^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} A+C=1 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=-1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{array}$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z-1} \right) dz = \frac{1}{2}\left(-\ln|z| + \frac{1}{z} + 2\ln|z-1| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \ln\frac{(z-1)^2}{|z|} \right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+\sqrt{u^2+1}} + \ln\frac{(u-1+\sqrt{u^2+1})^2}{u+\sqrt{u^2+1}} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}} + \ln\frac{(x+\sqrt{x^2+2x+2})^2}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}} \right) + 1$$

Эллиптические интегралы

(*) $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, $P(x)$ – полином степени 3 или 4.

(*) приводится к одному из трёх интегралов:

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) \quad (x=\sin\varphi)$$

эллиптический интеграл первого рода $(0<k<1)$

2) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(k,\varphi) \quad (x=\sin\varphi)$$

$0<k<1$

эллиптический интеграл второго рода.

3) $$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dx}{(1-h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(h,k,\varphi)$$

$(x=\sin\varphi,\ 0<k<1)$

эллиптический интеграл третьего рода.

<u>Замечание</u> Принято считать, что $F(k,0)=E(k,0)=\Pi(h,k,0)=0$