Лекция 5.

Смежные классы. Нормальный делитель

Определение 1. Левый смежный класс (ЛСК) группы G по подгруппе Н – множество элементов

$$gH = \{gh \mid g \in G, h \in H\},$$

g – фиксированный элемент группы G, h – пробегает все элементы подгруппы Н.

Количество элементов любого смежного класса совпадает с количеством элементов в подгруппе Н.

Определение 2. Правый смежный класс (ПСК) группы G по подгруппе Н – множество элементов

$$Hg = \{hg \mid g \in G, h \in H\}.$$

Пример 1. $G =< \mathbb{Z}, +, 0 >$. Н $= \{3k\} = \{0; \pm 3; \pm 6\} =< 3 >$.

Три левых смежных класса:

1. $0 + H = H + 0$
2. $1 + H = \{1, 4, -2, 7, -5, \dots\} = H + 1$
3. $2 + H = \{2, 5, -1, 8, -4, \dots\} = H + 2$

Если операция коммутативна, то множество левых смежных классов совпадёт с множеством правых смежных классов.

Пересечение левых смежных классов пусто, а объединение дает все множество $\mathbb{Z}$.

Пусть G – группа, H – подгруппа G.

Теорема 1. Левые смежные классы группы G по подгруппе H образуют разбиение множества элементов группы G.

Доказательство.

Рассмотрим два ЛСК: g_1H и g_2H и предположим, что у них есть общий элемент: $g_1h' = g_2h''$. Т.к. в группах каждый элемент обратим:

$$g_1h'(h')^{-1} = g_2h''(h')^{-1} \Rightarrow g_1 = g_2h''(h')^{-1}.$$

Для $\forall h \in H$ домножим равенство на h: $g_1h = g_2h''(h')^{-1}h$, т.к. все три элемента

$h, h', h'' \in H$, то их произведение также находится в H. Таким образом любой элемент ЛСК $g_1 H$ является элементом класса $g_2 H$, следовательно, $g_1 H \subseteq g_2 H$

Аналогично, домножая $g_1 h' = g_2 h''$ на ${h''}^{-1}$, получим $g_2 H \subseteq g_1 H$.

$\Rightarrow g_1 H = g_2 H$, т.е. два левых смежных класса, имеющих общий элемент, совпадают. Следовательно, ЛСК образуют разбиение: классы либо не пересекаются, либо совпадают.

$\boldsymbol{G/H}$	$\boldsymbol{h_1 = e \quad h_2 \quad \dots \quad h_i \quad \dots}$	
$\boldsymbol{g_1 = e}$	$\boldsymbol{g_1 h_1 \quad g_1 h_2 \quad \dots \quad g_1 h_i \quad \dots}$	$\boldsymbol{g_1 H = eH = H}$
…		
$\boldsymbol{g_k}$	$\boldsymbol{g_k h_1 \quad g_k h_2 \quad \dots \quad g_k h_i \quad \dots}$	$\boldsymbol{g_k H}$
…		

Каждый раз домножаем каждый элемент подгруппы H на элемент, которого ещё не было в построенных смежных классах: g_k не принадлежит ни одному из уже построенных ЛСК.

Аналогичную теорему можно доказать для правых смежных классов.

Нормальный делитель

Рассмотрим два эквивалентных определения нормального делителя.

Определение 1. Подгруппа H – нормальный делитель (нормальная подгруппа) группы G, если множества левых смежных классов и правых смежных классов группы G по подгруппе H совпадают.

Определение 2. Подгруппа H – нормальный делитель (нормальная подгруппа) группы G, если

$$\forall g \in G \quad gH = Hg.$$

Доказательство эквивалентности двух определений.

Очевидно, что из определения 2 следует определение 1. Покажем, что определение 1 влечет определение 2.

Так как $e \in H \Rightarrow g \in gH$ и $g \in Hg$, а т.к. ЛСК и ПСК совпадают и классы образуют разбиение, то это один и тот же класс: $gH = Hg$.

В коммутативной группе все подгруппы являются нормальными делителями.

Пример 1. $G = < \mathrm{Z}, +, 0 >$

$H = \{3k\} = \{0, \pm 3, \ \pm 6, \dots\} = < 3 >.$

Пример 2. Рассмотрим группу $S_3 = \{\pi_0, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ и ее циклическую подгруппу $H = < (1\ 3) > = \{\pi_0, \ (1\ 3)\}$. $(1\ 3)^2 = \pi_0$

ЛСК	ПСК
1. $\pi_0 H = H$	1. $H\pi_0 = H$
2. $(1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 3\ 2)\}$	2. $H(1\ 2) = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$
3. $(2\ 3)H = \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$	3. $H(2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

ЛСК≠ПСК, следовательно, H не является нормальным делителем.

Пример 3. $S_3 = \{\pi_0, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$

И циклическая подгруппа $H = < (1\ 3\ 2) > = \{\pi_0, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$.

ЛСК	ПСК
1. $\pi_0 H = H$	1. $H\pi_0 = H$
2. $(1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$	2. $H(1\ 2) = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$

Смежные классы совпадают, следовательно, H – нормальный делитель.

Здесь H – подгруппа индекса 2 (элементов в два раза меньше, чем в группе). Подгруппа индекса 2 всегда нормальный делитель, т.к. смежные классов 2: H и $G\backslash H$.

Индекс $i = |\mathrm{G}/\mathrm{H}|$ – число смежных классов. Для конечной группы число смежных классов равно отношению числа элементов группы к числу элементов ее нормального делителя

$$i = \frac{\#G}{\#H}.$$

Теорема Лагранжа. Порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы.

Доказательство следует из формулы

$$i = \frac{\#G}{\#H} \Rightarrow \#G = \#H \cdot i.$$

Пример 4. Группа самосовмещений квадрата:

$$G_{\square} = \{\varphi_0, \varphi_{\frac{\pi}{2}}, \varphi_{\pi}, \varphi_{\frac{3\pi}{2}}, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}.$$

$H_1 = \{\varphi_0, \varphi_{\pi}\}$ – подгруппа. $\varphi_{\pi}^2 = \varphi_0 \Rightarrow \varphi_{\pi}^{-1} = \varphi_{\pi}$.

ЛСК=ПСК

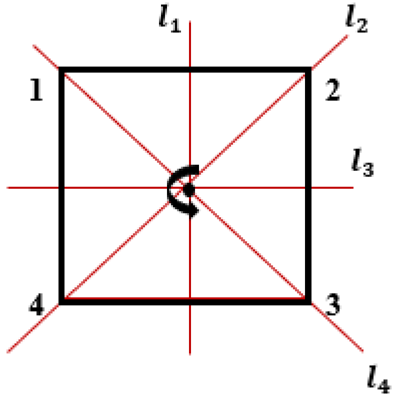
1. $E = \varphi_0 H_1 = H_1 = H_1 \varphi_0$
2. $A = \varphi_{\frac{\pi}{2}} H_1 = \{\varphi_{\frac{\pi}{2}}, \varphi_{\frac{3\pi}{2}}\} = H_1 \varphi_{\frac{\pi}{2}}$
3. $B = \psi_1 H_1 = \{\psi_1, \psi_3\} = H_1 \psi_1$
4. $C = \psi_2 H_1 = \{\psi_2, \psi_4\} = H_1 \psi_2$

H_1 – нормальный делитель.

Рассмотрим подгруппу $H_2 = \{\varphi_0, \psi_1\}$.

Легко убедиться, что ЛСК≠ПСК и, следовательно, H_2 не является нормальным делителем. Достаточно одного не совпадения класса $gH_2 \neq H_2 g$, но мы выпишем все.

	ЛСК		ПСК
1.	$\varphi_0 H_2 = H_2 = H_2 \varphi_0$		
2.	$\varphi_{\frac{\pi}{2}} H_2 = \{\varphi_{\frac{\pi}{2}}, \psi_4\}$	$\neq$	$H_2 \varphi_{\frac{\pi}{2}} = \{\varphi_{\frac{\pi}{2}}, \psi_2\}$
3.	$\varphi_{\pi} H_2 = \{\varphi_{\pi}, \psi_3\}$		$H_2 \varphi_{\pi} = \{\varphi_{\pi}, \psi_3\}$
4.	$\varphi_{\frac{3\pi}{2}} H_2 = \left\{\varphi_{\frac{3\pi}{2}}, \psi_2\right\}$	$\neq$	$H_2 \varphi_{\frac{3\pi}{2}} = \left\{\varphi_{\frac{3\pi}{2}}, \psi_4\right\}$



ψ_i соответствует оси l_i

Таблица Кэли для подсказки. Повороты пронумерованы последовательно

$\circ$	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_0	ψ_4	ψ_1	ψ_2	ψ_3
φ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1	ψ_3	ψ_4	ψ_1	ψ_2
φ_3	φ_3	φ_0	φ_1	φ_2	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_1
ψ_1	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
ψ_2	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_1	φ_3	φ_0	φ_1	φ_2
ψ_3	ψ_3	ψ_4	ψ_1	ψ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1
ψ_4	ψ_4	ψ_1	ψ_2	φ_3	φ_1	φ_2	φ_3	φ_0