Первообразная и неопределённый интеграл

<u>Опр</u> $f(x) : (a, b) \to R$

Функция $F(x) : (a, b) \to R$, $F(x) \in D(a, b)$
называется <u>первообразной</u> функции $f(x)$, если
$\forall x \in (a, b) : \quad F'(x) = f(x) \quad$ (или: $dF(x) = f(x)dx$)

<u>Примеры</u> 1. $F(x) = x^2$ есть первообразная для $f(x) = 2x$

2. $F(x) = \sin x$ есть первообразная для $f(x) = \cos x$

3. $F(x) = \sin x - 28{,}3$ есть первообразная для $f(x) = \cos x$

4. $F(x) = \operatorname{arctg} x$ есть первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

5. $F(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}$ есть первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

В примерах 1.–5. : $(a, b) = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$

6. $F(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}$ есть первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Здесь $(a, b) = (0; +\infty)$ или $(a, b) = (-\infty; 0)$

Почему? $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x \quad (\forall x > 0)$ $\Big\{$ $\boxed{\text{а если } x < 0?}$

или $F'(x) = -\dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2+1}$

7. $F(x) = \ln(-x)$ есть первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$
если $(a, b) = (-\infty; 0)$

8. $F(x) = \ln(x) + 2$ есть первообразная для $f(x) = \dfrac{1}{x}$
если $(a, b) = (0; +\infty)$

etc, etc, etc.

<u>Утв.</u> Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции $f(x)$ на промежутке (a, b), то разность $F_1(x) - F_2(x)$ есть постоянная на (a, b).

<u>Д-во</u> Пусть $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$;

$\forall\, \hat{x}, \tilde{x} \in (a, b) \Rightarrow \varphi(\hat{x}) - \varphi(\tilde{x}) = \varphi'(\xi)(\hat{x} - \tilde{x})$ (теорема Лагранжа о конечном приращении)

$$\hat{x} < \xi < \tilde{x} \quad (\text{или} \quad \tilde{x} < \xi < \hat{x})$$

но! $\forall \xi \in (a, b)$: $\varphi'(\xi) = F_1'(\xi) - F_2'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(\hat{x}) = \varphi(\tilde{x})$.

<u>Опр</u> Совокупность <u>всех</u> первообразных функции $f(x)$ на заданном промежутке называется <u>неопределенным интегралом</u> функции $f(x)$ на этом промежутке.

Обозначение: $\int \underbrace{f(x)\,dx}$

знак интеграла, подинтегральное выражение.

$f(x)$ – подынтегральная функция

<u>Утв.</u> Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на (a, b), то на этом промежутке

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

(По-другому: любая другая первообразная ф-ции $f(x)$ на промежутке (a, b) может быть получена из $F(x)$ добавлением некоторого числа (произвольной постоянной))

<u>Связь дифференциала и неопределённого интеграла</u>

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке

Тогда:

1. $d\int f(x)\,dx = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx \qquad (d\int)$

2. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (\int d)$

Таким образом, можно сказать, что дифференцирование и интегрирование есть взаимообратные операции.

Некоторые свойства неопределённого интеграла

Утв 1 $u(x), v(x) : (a, b) \to R$, $\alpha, \beta \in R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int (\alpha u(x) + \beta v(x))\, dx = \alpha \int u(x)\, dx + \beta \int v(x)\, dx + C$$

Д-во Пусть $U(x)$ – первообразная $u(x)$ на (a, b)

$V(x)$ – первообразная $v(x)$ на (a, b)

Тогда $\alpha U(x) + \beta V(x)$ – первообразная $\alpha u(x) + \beta v(x)$ на (a, b)

т.к. $\forall x \in (a; b)$: $(\alpha U(x) + \beta V(x))' = \alpha U'(x) + \beta V'(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$

Утв. 2 $u(x), v(x) : (a, b) \to R$, $u(x), v(x) \in D(a, b)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int (uv)'\, dx = \int u'(x) v(x)\, dx + \int u(x) v'(x)\, dx.$$

(если интегралы стоящие в правой части существуют)

Утв 3 1) Пусть на (a, b) : $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

2) $\varphi(t) : (\alpha, \beta) \to (a, b)$, $\varphi \in CD(\alpha, \beta)$
$(\exists \varphi'(t) \in C(\alpha, \beta))$

$$1)\, 2) \Rightarrow \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C$$

Д-во $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$,

т.е. $F(\varphi(t))$ есть первообразная ф-ции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на (α, β)

Замечание Если $x = \varphi(t)$ то можно написать

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \underline{d(\varphi(t))} = \int f(\varphi(t))\, \underline{\varphi'(t)\, dt}$$

Стандартная минимальная таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \alpha > 0,\ \alpha \neq 1$

3a. $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ (или „$-\arccos x + C_1$")

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ (или „$-\operatorname{arcctg} x + C_1$)

10. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$

11. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

15. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

16. $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

<u>Замечание к пункту 2.</u>

Точнее было бы написать

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x<0 \\ \ln x + C_2 & x>0 \end{cases}$$

<u>Проверим 15.</u>

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm 1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 \pm 1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2\pm 1}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2\pm 1}+x}}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

<u>Вычисление 16 с помощью 2:</u>

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C, \quad \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \ln|x-1|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

<u>Интеграл от многочлена</u>

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\,dx =$$

$$= a_0 \int 1 \cdot dx + a_1 \int x\,dx + a_2 \int x^2 dx + \ldots + a_n \int x^n dx =$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n} + C$$

Интегрирование по частям

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx$$

$$u(x)v(x) = \int u(x)\,dv(x) + \int v(x)\,du(x) + C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x) + C}$$

формула интегрирования по частям.

(т.е. интегрирование функции $u(x)v'(x)$ можно свести к интегрированию функции $u'(x)v(x)$)

<u>Пример</u> $\int \ln x\,dx = ?$

Пусть $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$; $v(x) = x$ $(+C)$

$$\int \ln x\,dx = \int u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int \underbrace{u'(x)}v(x)\underbrace{dx}_{du(x)} =$$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

<u>Пример</u>

$$\int x^2e^xdx = \begin{vmatrix} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{x^2}_{u(x)}\underbrace{e^x}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{v(x)}\cdot\underbrace{2x}_{u'(x)}\,dx = x^2e^x - 2\int xe^xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & v(x) = e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - 2\Big(\underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{e^x}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{v(x)}\cdot\underbrace{1}_{u'(x)}\,dx\Big) =$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Замена переменной в неопределённом интеграле

Remember: $\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(x)dx = F(x)+C =$$

$$= F(\varphi(t)) + C \qquad (\text{если } x=\varphi(t))$$

Пример $\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = ?$

Заметим, что $(1+t^2)' = 2t$. Тогда пусть $x = 1+t^2$

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)'\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{x'\,dt}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$$

Пример $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{tg(\frac{x}{2})}\cdot\left(tg\frac{x}{2}\right)' d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

Здесь производная берётся по переменной $u = \frac{x}{2}$

$$= \int \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\, d\left(tg\frac{x}{2}\right) = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Комбинация методов

Пример $$\int \arcsin x\cdot dx = x\arcsin x - \int x\, d(\arcsin x) =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Пример $\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{=I} = \frac{1}{a}\int \cos bx\, d(e^{ax}) =$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\cdot(\cos bx)'dx = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\, de^{ax} =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{=I}$$

$$I + \frac{b^2}{a^2}I = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$I(a^2+b^2) = e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$I = e^{ax}\,\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C$$

Пример „неберущегося" интеграла

$$Si(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx \qquad (\,Si(x) \to 0 \text{ при } x \to 0)$$

(первообразная существует, но не может быть выражена через элементарные функции)

Интегралы, которые нельзя выразить через элементарные функции, служат источником специальных функций.

Интегрирование рациональных функций

Опр Функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, называется рациональной функцией.

Опр Если степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$, то $R(x)$ называется неправильной дробью

в противном случае - правильной дробью.

Утв. Любую неправильную дробь можно представить как сумму многочлена и правильной дроби.

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \underbrace{L_{m-n}(x)}_{\text{целая часть}} + \frac{M_k(x)}{Q_n(x)}$$ ← правильная дробь.

(здесь индексы – степени многочленов, $m \geq n$, $k < n$)

Пример $R(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\;\; x^3+x & x \;\; \text{частное} \\ \cline{1-1} -x & \\ \text{остаток.} & \end{array}$$

Утв. (основная теорема алгебры) Любой многочлен имеет корень (действительный или комплексный)

Утв. (теорема Безу). Если α – корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x-\alpha) P_{n-1}(x)$

Утв Если многочлен $P_n(x)$ с <u>действительными</u> коэффициентами имеет комплексный корень $\alpha + i\beta$, то число $\alpha - i\beta$ также является корнем этого многочлена.

Утв (Следствие предыдущего) Если многочлен (с действит. коэфф.) имеет корень $\alpha + i\beta$, то он делится на

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2+\beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2,$$

то есть на некоторый квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом.

Утв (следствие основной теоремы алгебры) Любой многочлен степени n имеет n корней, некоторые из которых могут совпадать.

Утв. (следствие всего предыдущего). Любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение многочленов первой и второй степени, причём многочлены второй степени ~~не~~ могут быть разложены на множители с действительными коэффициентами

Опр. Многочлены с действительными коэффициентами которые нельзя разложить на множители с действительными коэффициентами, называются **неприводимыми** над полем действительных чисел.

Замечание Многочлены, неприводимые над полем действительных чисел могут быть только первой и второй степени.
(а над полем комплексных чисел – только первой степени)

Вывод Любой многочлен степени n с действительными коэффициентами может быть представлен в виде:

$$P_n(x)=A_1^{k_1}(x)\cdot A_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot A_l^{k_l}(x)\cdot B_1^{m_1}(x)\cdot B_2^{m_2}(x)\cdot\ldots\cdot B_q^{m_q}(x),$$

где $A_1(x),\ldots,A_l(x)$ – двучлены вида $ax+b$,
$B_1(x),\ldots B_q(x)$ – трехчлены вида ax^2+bx+c с отрицательными дискриминантами,

$$k_1+k_2+\ldots+k_l+2(m_1+m_2+\ldots+m_q)=n.$$

Примеры
1) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$
2) $x^4+1=\underbrace{x^4+1+2x^2}-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=$
$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$
3) $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$ и т.д.

Опр **Простейшей дробью** называется рациональная функция вида: $R(x)=\dfrac{P(x)}{(Q(x))^k}$, где

$Q(x)$ – неприводимый многочлен, $P(x)$ – многочлен степени меньшей чем $Q(x)$, k – натуральное число.

Примеры $\dfrac{1}{x-3}$; $\dfrac{5}{(x+2)^3}$; $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$; $\dfrac{x-8}{(x^2+2x+2)^5}$; $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

etc, etc, etc.

Утв. Любая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей.

D-во (схема)

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \qquad (m<n)$$

$$Q_n(x) = A(x-a)^k \cdot \ldots \ldots \cdot (x^2+bx+c)^q \qquad (b^2-4c<0)$$

тогда всегда можно подобрать коэффициенты $\alpha_j, \beta_r, \gamma_r$ так что

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x-a} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{(x-a)^k} + \ldots +$$

$$+ \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{x^2+bx+c} + \frac{\beta_2 x + \gamma_2}{(x^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{\beta_q x + \gamma_q}{(x^2+bx+c)^q}$$

Пример $\quad R(x) = \dfrac{x^3}{x^4-1}$

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x+1} + \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{x^2+1}$$

$$R(x) = \frac{\alpha_1(x+1)(x^2+1) + \alpha_2(x-1)(x^2+1) + (\beta_1 x + \gamma_1)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{x^3(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1) + x^2(\alpha_1-\alpha_2+\gamma_1) + x(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1) + \alpha_1-\alpha_2-\gamma_1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{x^3}{x^4-1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\beta_1 = 1 \\ \alpha_1-\alpha_2+\gamma_1 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2-\beta_1 = 0 \\ \alpha_1-\alpha_2-\gamma_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} (2)-(4) \quad 2\gamma_1 = 0 & \gamma_1 = 0 \\ (1)-(3): 2\beta_1 = 1 & \beta_1 = \frac{1}{2} \\ (2): \alpha_1 = \alpha_2 & \\ (1): 2\alpha_1 + \frac{1}{2} = 1 : & \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4} \end{array}$$

$$R(x) = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$\int R(x)\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x^4-1) + C$$

Естественно, в данном случае этот результат можно получить значительно проще.

Таким образом, интегрирование рациональных функций может быть сведено к интегрированию простейших дробей вида:

$$\frac{1}{(x-a)^k}, \quad \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^q}, \quad k, q \in N, \quad b^2-4c<0$$

$$\int\frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \text{если } k=1 \\ \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C & \text{если } k>1 \end{cases}$$

$$\int\frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c}\,dx = \int\frac{(\beta x+\gamma)\,dx}{(x+\frac{b}{2})^2+c^2-\frac{b^2}{4}} = \int\frac{\beta(x+\frac{b}{2})+\gamma-\frac{\beta b}{2}}{(x+\frac{b}{2})^2+c^2-\frac{b^2}{4}}\,dx =$$

$$= \int\frac{\beta y+\delta}{y^2+d}\,dy, \quad \text{где } \delta=\gamma-\frac{\beta b}{2}, \quad d=c^2-\frac{b^2}{4}>0$$

$$\int\frac{\beta y+\delta}{y^2+d}\,dy = \beta\int\frac{y\,dy}{y^2+d} + \delta\int\frac{dy}{y^2+d} = \frac{\beta}{2}\int\frac{d(y^2+d)}{y^2+d} + \frac{\delta}{d}\int\frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{d}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{\beta}{2}\ln(y^2+d) + \frac{\delta}{\sqrt{d}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{d}}\right) + C = \frac{\beta}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{\delta}{\sqrt{d}}\,\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{d}} + C$$

$$\int\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \int\frac{\beta(x+\frac{b}{2})+\delta}{((x+\frac{b}{2})^2+d)^k}\,dx = \beta\int\frac{y\,dy}{(y^2+d)^k} + \delta\int\frac{dy}{(y^2+d)^k}$$

simple ??