Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт №8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 804 «Прикладная математика»

Курсовой проект

по курсу
«Вычислительные системы»
I семестр

на тему
«Процедуры и функции в качестве параметров»

Студент: Алиев Р.М.
Группа: М8О-104Б-22
Руководитель: Потенко М.А.
Дата: 03.12.2022
Оценка: _____

Москва, 2022

1. Задача

Составить программу на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итерации, Ньютона и половинного деления – дихотомии). Нелинейные уравнения оформить как параметры-функции, разрешив относительно неизвестной величины в случае необходимости. Применить каждую процедуру к решению двух уравнений, начиная с варианта с заданным номером. Если метод неприменим, дать математическое обоснование и графическую иллюстрацию.

2. Вариант

6	$x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0$	[0.5, 1]	итераций	0.9892

3. Общий метод решения

Описание методов:

Описание методов:

1. Метод дихотомии

Численное нахождение приближенного значения корня функции строится на базе следствия из теоремы Больцано-Коши: «Если непрерывная функция на концах некоторого интервала имеет значение разных знаков, то внутри этого интервала у нее есть как минимум один корень».

Задача заключается в том, чтобы найти корень методом половинного деления, т.е. найти приближенное значение корня с заданной точностью ε.

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$, $x\in(a,\ b)$ – единственный корень уравнения $f(x)=0$.

Поделим отрезок $(a,\ b)$ пополам. Получим точку $c=\dfrac{a+b}{2}$ и два отрезка $(a,\ c)$, $[c,b]$.

Если $f(c)=0$, то корень найден ($x=c$).

Если нет, то из двух полученных отрезков $(a,\ c)$ $и$ $[c,b]$ надо выбрать один $(a_1,\ b_1)$ такой, что $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$, то есть

$(a_1,\ b_1)=(a,\ c)$, если $f(a)\cdot f(c)<0$ или

$(a_1,\ b_1)=(c,\ b)$, если $f(b)\cdot f(c)<0$

Новый отрезок $(a_1,\ b_1)$ делим пополам. Получаем середину этого отрезка $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ и так далее.

Для того, чтобы найти приближенное значение корня с точностью до ε, необходимо остановить процесс половинного деления на таком шаге n, на котором $(a_n-b_n)<\varepsilon$ и вычислить $x=\frac{a_n-b_n}{2}$. Тогда можно взять $c\approx x$.

Функция f(x) = $x+\cos(x^{0,52}+2)$ непрерывна на отрезке $[0.5,\ 1]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $F(0.5)\approx-0,403$; $F(1)\approx0,010$

2. Метод итераций

Суть метода в поиске по известному приближению искомой величины следующего, более точного приближения.

Пусть дана функция $F(x)$. Заменим исходное уравнение $F(x)=0$ на эквивалентное $f(x)=x$. Выберем начальное приближение корня x_0. Тогда получим некоторое число $x_1=f(x_0)$. Теперь подставляя вместо x_0 число x_1 получим $x_2=f(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность $x_n=f(x_{n-1}),\ n=1,\ 2,\ldots$. Если эта последовательность сходящаяся, то существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n$, то данный предел является корнем уравнения и может быть вычислен по формуле $x_n=f(x_{n-1})$.

Для преобразования $F(x)=0$ в $f(x)=x$ используется уравнение вида $f(x)=x-\lambda F(x)$, где λ – некоторая постоянная, знак которой совпадает со знаком производной $F'(x)$ в некоторой окрестности корня.

Условие сходимости метода итераций: $|f'(x)|<1$

Найдем $f(x)$ для функции $F(x)=x+\cos(x^{0.52}+2) \Longleftrightarrow -cos(x^{0.52}+2)$

$$f'(x)=\sin(x^{0.52}+2)*\frac{0.52}{x^{0.48}}; \left(\sin(x^{0.52}+2)*\frac{0.52}{x^{0.48}}\right)<1$$

Условие сходимости выполняется.

3. Метод Ньютона

Метод Ньютона – частный случай метода итераций ($f(x)=x-\frac{F(x)}{F'(x)}$).

Суть метода состоит в разбиении отрезка (a,b) на два отрезка с помощью касательной и выборе нового отрезка от точки пересечения касательной с осью абсцисс до неподвижной точки, на которой функция меняет знак и содержит решение.

Построение касательных продолжается до достижения необходимой точности ε.

Метод итераций сходится тогда и только тогда, когда $|f'(x)|<1$, подставим в условие выражение для $f(x)$ и получим условие сходимости метода Ньютона: $\left(\frac{F(x)F''(x)}{(F'(x))^2}\right)<1$

Условие окончания: если $(x_{n+1}-x_n)<\varepsilon$, то значение x_{n+1} считается приближенным значением корня уравнения

Найдем производные данных функций:

Вариант 6:

$$F'(x)=\left(x+\cos\left(x^{0.52}+2\right)\right)'=1-\frac{13*sin\left(\sqrt[25]{x^{13}}+2\right)}{25*\sqrt[25]{x^{12}}}$$

$$F''(x)=\left(1-\frac{13*sin\left(\sqrt[25]{x^{13}}+2\right)}{25*\sqrt[25]{x^{12}}}\right)'=\frac{-13\left(13\cos\left(25\sqrt[25]{x^{13}}+2\right)-\frac{12\,sin\left(\sqrt[25]{x^{13}}+2\right)}{25*\sqrt[25]{x^{12}}}\right)}{625\sqrt[25]{x^{24}}}$$

$|f(x)\cdot f''(x)|<f'(x)^2$ на отрезке $[0.5,\ 1]$

Условие сходимости выполняется.

4. Код программы

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

const double eps = 0.000001;

double f2(double x)
{
   return 3*pow(log(x),2) + 6 * log(x) -5;
}

double F2(double x)
{
   return exp((5 - 3 * pow(log(x), 2))/6);
}

double Fp2(double x)
{
   return 6*((log(x))/x)+6/x;
}

double f1(double x)
{
   return x + cos(pow(x, 0.52) + 2);
}

double F1(double x)
{
   return -cos(pow(x, 0.52) + 2);
}

double Fp1(double x)
{
   return 1 - (13 * sin(pow(x, 0.52) + 2)) / (25 * pow(x, 0.48));
```

```c
}

double dichotomy(double function(double), double left, double right) {
    double result;
    while (fabs(left - right) > eps) {
        result = (right + left) / 2;
        if (function(left) * function(result) > 0) {
            left = result;
        } else {
            right = result;
        }
    }
    return result;
}

double dabs(double x)
{
    return (x > 0 ? x : -x);
}

double iteration(double f(double), double a, double b) {
    double prevX = (a + b) / 2., x = f(prevX);
    while (dabs(x - prevX) > eps) {
        prevX = x;
        x = f(x);
    }
    return x;
}

double newton(double F(double), double F1(double), double a, double b, double eps) {
    double x = (a + b / 2);
    while (fabs(F(x) / F1(x)) > eps) {
        x -= F(x) / F1(x);
    }
    return x;
}

int main() {
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| Уравнение | Отрезок | Метод | Результат |\n");
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 1 | [0.5;1] | Дихотомии | %.10f |\n", dichotomy(f2, 1, 3));
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 1 | [0.5;1] | Ньютона | %.10f |\n", newton(f2, Fp2, 1, 3, eps));
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 1 | [0.5;1] | Итераций | %.10f |\n", iteration(F2, 1, 3));
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 2 | [1;3] | Дихотомии | %.10f |\n", dichotomy(f1, 0.5, 1));
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 2 | [1;3] | Ньютона | %.10f |\n", newton(f1, Fp1, 0.5, 1, eps));
    printf("------------------------------------------------------\n");
    printf("| \t 2 | [1;3] | Итераций | %.10f |\n", iteration(F1, 0.5, 1));
```

```
    printf("--------------------------------------------------\n");
    return 0;
}
```

Результат программы

```
---------------------------------------------------
| Уравнение | Отрезок | Метод | Результат |
---------------------------------------------------
|        1 | [0.5;1] | Дихотомии | 1.8832387924 |
---------------------------------------------------
|        1 | [0.5;1] | Ньютона | 1.8832389883 |
---------------------------------------------------
|        1 | [0.5;1] | Итераций | 1.8832393103 |
---------------------------------------------------
|        2 | [1;3] | Дихотомии | 0.9891805649 |
---------------------------------------------------
|        2 | [1;3] | Ньютона | 0.9891807350 |
---------------------------------------------------
|        2 | [1;3] | Итераций | 0.9891806553 |
---------------------------------------------------
yoonseak@MacBook-Air-Ruslan Cpap %
```

5. Выводы

Нахождение корней трансцендентных уравнений является зачастую достаточно сложной задачей, не решаемой аналитически с помощью конечных формул. Кроме того, иногда на практике уравнение содержит коэффициенты, значения которых заданы приблизительно, так что говорить о точном решении уравнений в таких случаях вообще не имеет смысла. Поэтому задачи приближенного определения корней уравнения и соответствующей оценки их точности имеют большое значение.

В курсовом проекте были рассмотрены 3 численных метода решения трансцендентных уравнений – метод дихотомии, метод итераций и метод Ньютона.

Численные методы являются основным инструментом решения современных прикладных задач. Аналитическое решение той или иной задачи в виде отдельных формульных соотношений является скорее исключением, нежели правилом в силу сложного и приближенного характера исследуемых моделей. Вот почему численный анализ математических моделей является в настоящее время актуальным и наиболее эффективным аппаратом конструктивного исследования прикладных проблем.