Теорема о неявной функции

$F(x,y)$; $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = C$ — множество точек в $\mathbb{R}^2$, называемое
$(C \in \mathbb{R})$ __линией уровня__ ф-ции $F(x,y)$

(__Пример__ $F(x,y) = x^2+y^2+5$ — линии уровня — окружности с центром в начале координат)

Рассмотрим соотношение: $F(x,y)=0$, которое определяет __зависимость__ между y и x. Но является ли эта зависимость функцией??

__Пример__ $x^2+y^2=1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$, т.е. зависимость функцией __не является__.

__Утв.__ („одномерный" вариант теоремы о неявной функции)

1. $F: U(x_0,y_0) \to \mathbb{R}$, $U(x_0,y_0) \subset \mathbb{R}^2$, $U(x_0,y_0)$ — окрестность точки (x_0,y_0) в $\mathbb{R}^2$

2. $F \in C^{(p)}(U)$, $p \geq 1$

3. $F(x_0,y_0)=0$

4. $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$

$1)2)3)4) \Rightarrow \exists$ $I = I_x \times I_y$, $I_x = \{x \in \mathbb{R}, |x-x_0|<\alpha\}$
$I_y = \{y \in \mathbb{R}, |y-y_0|<\beta\}$, $I \subset U(x_0,y_0)$,

$\exists f \in C^p(I_x)$: $\forall (x,y) \in I$:
$(f: I_x \to \mathbb{R})$

$$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x),$$

причём

$$f'(x) = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x,f(x))}}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x,f(x))}}$$

Д-во. Без ограничения общности $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0 y_0)} > 0$

$F \in C^{(1)}(U) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} > 0$ в некоторой окрестности точки $(x_0\, y_0)$

Без ограничения общности, будем считать, что

$\forall (x, y) \in U(x_0, y_0) : \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} > 0$ или:

существует шар с центром в (x_0, y_0) и некоторым радиусом 2β, в котором $\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ функция $\varphi(y) = F(x_0, y)$ монотонно возрастает на $[y_0 - \beta;\ y_0 + \beta]$, т. е.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < \underset{F(x_0, y_0)}{\overset{\parallel}{0}} < F(x_0, y_0 + \beta)$$

$F \in C(U) \Rightarrow \exists\, \alpha < \beta$: если $|x - x_0| \leq \alpha$ то

$$F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta)$$

Пусть $I = \underbrace{\{x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \alpha\}}_{I_x} \times \underbrace{\{y \in \mathbb{R},\ |y - y_0| < \beta\}}_{I_y}$

Пусть $x \in I_x$. Рассмотрим отрезок с концами $(x, y_0 - \beta)$, $(x, y_0 + \beta)$. Тогда функция $\psi(y) = F(x, y)$ – возрастающая функция на этом отрезке, принимающая на его концах значения разных знаков. $\Rightarrow \exists!\, y \in I_y : F(x, y) = 0$. Положим $f(x) = y$. это и есть искомая функция

Также можно доказать, что $f(x) \in C^p(I_x)$

Далее, Пусть $x,\ x + \Delta x \in I_x$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x + \Delta x) - y$

$0 = F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) - F(x, f(x)) =$

$$= \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_1} \Delta x, \quad \text{где } x_1 \in (x, x+\Delta x) \text{ (или } (x+\Delta x, x))$$

(Теорема о средних)

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y=f(x_1)}} \cdot 1 + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_1\\ y=f(x_1)}}}_{\neq 0} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_1} = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right|_{\substack{x=x_1\\ y=f(x_1)}}$$

если $\Delta x \to 0$ то $x_1 \to x$, т.е $\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$,

Упражнение Вычислите $\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x)$

Пример $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} = f(x)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$

Если $x \neq \pm 1$, то $y \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{x}{y} = \mp\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Экстремум функции нескольких переменных.

$f: E \to \mathbb{R}, \quad E \subset \mathbb{R}^m$, x_0 - внутренняя точка E.

Опр x_0 - точка локального максимума, если $\exists U(x_0) \subset E$, если $\forall x \in U(x_0): f(x) \leq f(x_0)$

Опр x_0 - точка локального минимума, если $\exists U(x_0) \subset E$, если $\forall x \in U(x_0): f(x) \geq f(x_0)$

Замечание Если при $x \neq x_0$, $x \in U(x_0)$ в условиях этих двух определений неравенства становятся строгими, то говорят о точках строгого локального максимума или минимума.

<u>Опр</u> Локальные максимумы и минимумы называются <u>локальными экстремумами</u>.

<u>Утв</u> 1) $f: U(x_0) \to R$, $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$

2) $\exists \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x=x_0}$, $i = 1, 2, \dots m$

3) x_0 - точка локального экстремума функции f

$1) 2) 3) \Rightarrow \forall i = 1, 2, \dots m$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x=x_0} = 0$

<u>Д. во</u> Рассмотрим $f(x)$ как функцию одной переменной x^i, т.е пусть $\varphi(x^i) = f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \dots x_0^m)$

тогда x_0^i - точка экстремума функции $\varphi(x^i)$, т.е.

$\left.\frac{d\varphi}{dx^i}\right|_{x^i = x_0^i} = 0$, но $\left.\frac{d\varphi}{dx^i}\right|_{x^i = x_0^i} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x=x_0}$

<u>Замечание</u> Доказанное утверждение даёт только <u>необходимое</u> условие экстремума.

<u>Пример</u> $z = x^2 - y^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \Rightarrow$ при $x=0, y=0$ обе частные производные равны 0, но точка $(0,0)$ не является точкой экстремума

<u>Теорема</u> 1) $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(2)}(U(x_0))$, $U(x_0) \in \mathbb{R}^m$

2) $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$

3) $Q(h^1, \dots h^m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{x=x_0} h^i h^j$

1) 2) 3) $\Rightarrow$ если $Q(h^1, \dots h^m)$ положительно определена, то x_0 – точка локального минимума (строгого)

если $Q(h^1, \dots, h^m)$ отрицательно определена то x_0 – точка локального максимума (строгого)

$Q(h^1, \dots h^m)$ может принимать значения разных знаков, то x_0 не является точкой экстремума

Идея доказательства

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

$$f(x^1+h^1, \dots x^m+h^m) = f(x^1, \dots x^m) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x) h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x) h^m +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^{1\,2}} (h^1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} h^1 h^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{m\,2}} (h^m)^2 \right) + \bar{o}(\|h\|^2),$$

где $\|h\| = \sqrt{(h^1)^2 + \dots + (h^m)^2}$, все производные вычисляются в точке x_0

В нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0 \Rightarrow$

$$f(x_0^1 + h^1, \dots x_0^m + h^m) = f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + \bar{o}(\|h\|^2) \quad \text{или}$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \underbrace{\frac{h^i}{\|h\|}}_{e^i} \cdot \underbrace{\frac{h^j}{\|h\|}}_{e^j} + \bar{o}(1) \right) \quad (*)$$

$e = (e^1, \dots e^m)$, $\|e\| = 1$

т.е. $Q(e^1, \dots e^m)$ – ограничение $Q(h^1, \dots h^m)$ на сферу $S^1(0, 1)$ центр радиус

Если Q – положительно определена, то $\exists\ m, M,\ m > 0, M > m$:

$m < Q(e^1, \dots e^m) < M$.

$\exists\, \delta>0: \ \|h\|<\delta \Rightarrow |\bar{o}(1)|<m \Rightarrow$ при $\|h\|<\delta$

скобка в правой части $(*)$ положительна, т.е.

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0, \text{ если } 0<\|h\|<\delta$$

т.е. x_0 − точка строгого локального минимума.

Аналогично, если $Q(h^1,\dots h^m)$ отрицательно определена, то x_0 оказывается точкой строгого локального максимума.

Если $Q(h^1,\dots h^m)$ принимает значения разных знаков, то $m<0<M$, причем $Q(e_m)=m$, $Q(e_M)=M$

Пусть $x_0+te_m \in U(x_0) \Rightarrow$

$$f(x_0+te_m)-f(x_0)=\frac{1}{2}t^2\underbrace{(m+\bar{o}(1))}_{<0 \text{ при достаточно малых } t}$$

т.е. $f(x_0+te_m) < f(x_0)$

Пусть $x_0+te_M \in U(x_0) \Rightarrow$

$$f(x_0+te_M)-f(x_0)=\frac{1}{2}t^2\underbrace{(M+\bar{o}(1))}_{>0 \text{ при достаточно малых } t}$$

т.е. $f(x_0+te_M) > f(x_0)$

т.о. x_0 − не точка экстремума.

Пример $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=4x^3-4x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=4y^3=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x&=0;1;-1\\ y&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ стационарные точки } (0,0);(1,0);(-1,0)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y$

$(0;0)$: $Q=-4(h^1)^2$

$(1;0)$: $Q=8(h^1)^2$?

$(-1;0)$: $Q=8(h^1)^2$

Теорема не применима!!

$f(x,y)=(x^2-1)^2+y^4-1$

$(1;0)$; $(-1;0)$ → точки строгого минимума

$(0;0)$ − не точка экстремума.