Интеграл.

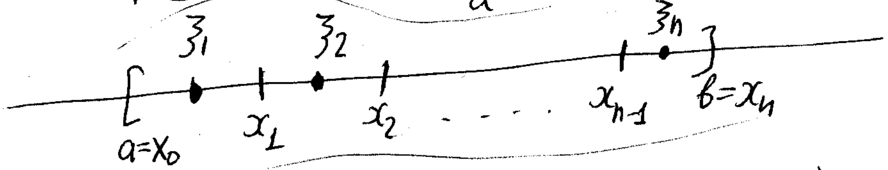
Опр Разбиением P отрезка $[a,b]$ называется множество точек $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ такое, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Опр $\lambda(P) = \max\limits_{n=1,2,\dots,n} (x_n - x_{n-1})$ — параметр разбиения P

Опр Разбиением (P, ξ) с отмеченными точками называется разбиение P, на каждом из отрезков которого выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots n$.

Таким образом, $P = \{\underset{a}{x_0}, x_1, \dots, x_{n-1}, \underset{b}{x_n}\}$, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$



Опр B_d — множество всех (P, ξ) отрезка $[a,b]$, таких что $\lambda(P) < d$. $(d \in R^+)$

Утв. $\mathcal{B} = \{B_d\}$ — база на множестве всех разбиений с отмеченными точками.

Д-во 1) $\forall d > 0 \quad \exists (P, \xi), \ \lambda(P) < d$

Достаточно взять $n = \left[\frac{b-a}{d}\right] + 1$ и разделить $[a; b]$ точками $x_0, x_1, \dots, x_n$ на отрезки равной длины $\Delta = \frac{b-a}{n}$

очевидно, $\Delta < d$, т.е. для такого разбиения $\lambda(P) < d$.

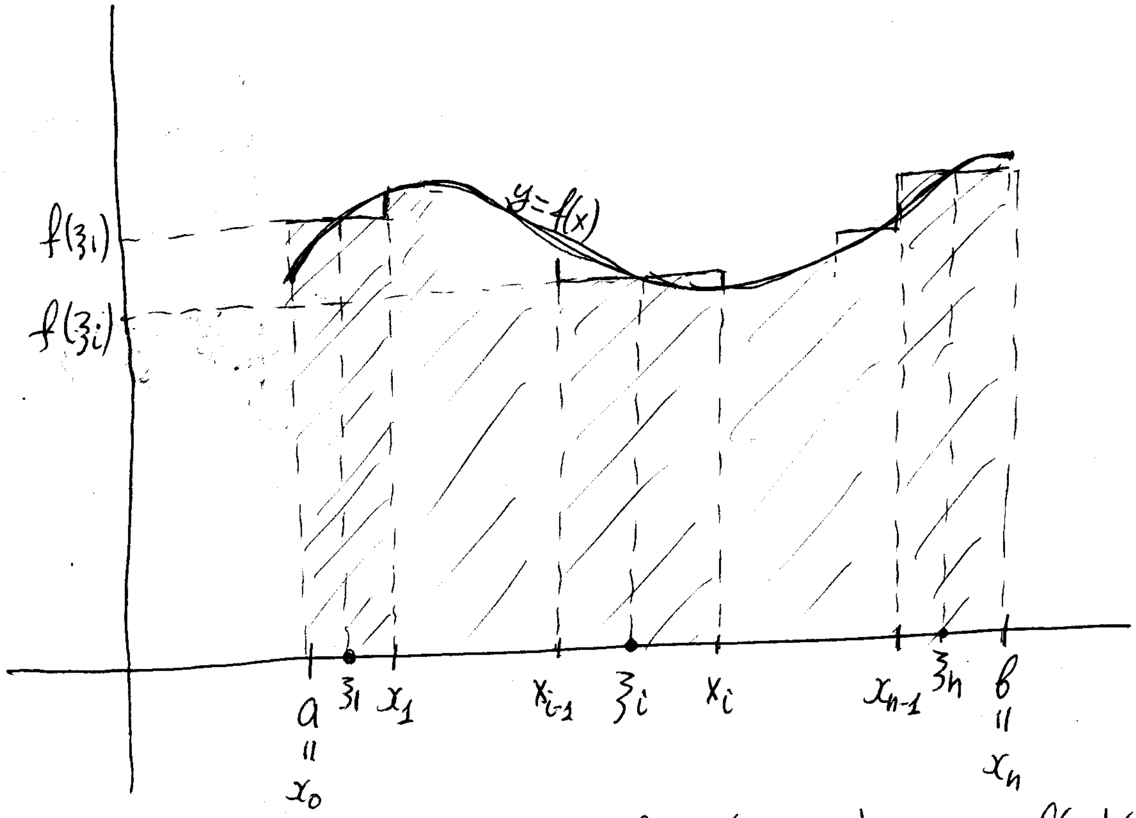
2) Пусть B_{d_1} и B_{d_2} — два элемента $\mathcal{B}$.

Пусть $d = \min\{d_1, d_2\}$ Тогда $B_{d_1} \cap B_{d_2} = B_d$

Опр Пусть $f: [a,b] \to R$, (P, ξ) — разбиение $[a,b]$ с отмеченными точками тогда

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

называется **интегральной суммой** функции f, соответствующей (P, ξ) на отрезке $[a, b]$



$$\sigma(f, P, \xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

Опр (интеграл Римана) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число

$$I = \lim_{\mathcal{B}} \sigma(f, P, \xi)$$

Опр (в развёрнутом виде) число I называется интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое что $\forall (P, \xi)$ (разбиения отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками) с параметром разбиения $\lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Ещё одна запись:

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Стандартное обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)dx.$

Опр Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, если для неё существует интеграл Римана.

Опр $\mathcal{R}[a,b]$ - множество функций, интегрируемых по Риману на $[a;b]$

Утв. (Критерий Коши для интеграла Римана)

($f:[a,b]\to R$ - интегрируема по Риману на $[a,b]$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ($\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0: \forall \; (P',\xi'), (P'',\xi''), \; \lambda(P')<\delta, \; \lambda(P'')<\delta:$

$$|\sigma(f,P',\xi') - \sigma(f,P'',\xi'')| < \varepsilon$$

или

$$\left| \sum_{i=1}^{n'} f(\xi_i')\Delta x_i' - \sum_{i=1}^{n''} f(\xi_i'')\Delta x_i'' \right| < \varepsilon$$)

Необходимое условие интегрируемости

Утв. ($f\in\mathcal{R}[a,b]$) $\Rightarrow$ (f - ограничена на $[a,b]$)

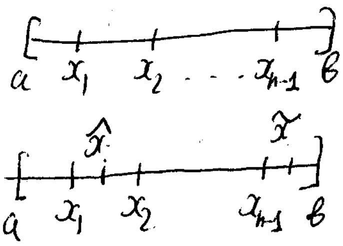
(для того, чтобы функция f была интегрируема по Риману на $[a,b]$ необходимо чтобы f была ограничена на $[a,b]$

Д-во Пусть f не ограничена на $[a,b]$. Тогда, каково бы ни было разбиение P, найдётся отрезок этого разбиения $[x_{i-1},x_i]$ на котором $f(x)$ не является ограниченной. Тогда отмеченную точку $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ можно выбрать так, что $|f(\xi_i)\Delta x_i|$ будет как угодно большой. Но тогда и интегральную сумму $\sigma(f,P,\xi)$ можно сделать как угодно большой по абсолютной величине. Но тогда $f(x)$ не является интегрируемой.

reductio ad absurdum!

А как по поводу достаточных условий интегрируемости??

__Опр__ Разбиение $\tilde{P}$ называется __продолжением__ разбиения P, если $\tilde{P}$ получено из P добавлением одной или нескольких новых точек.



$$P=\{x_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, b\}$$

$$\tilde{P}=\{x_0, x_1, \hat{x}, x_2, \dots x_{n-1}, \tilde{x}, b\}$$

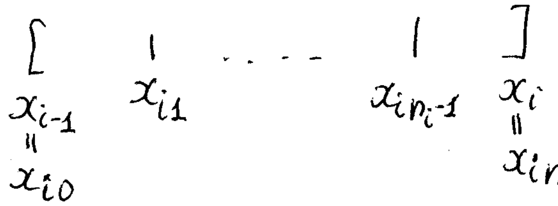
__Пример:__ Пусть $\tilde{P}=P' \cup P''$, т.е. $\tilde{P}$ образовано всеми точками, входящими в P' и P''. Тогда $\tilde{P}$ – продолжение как P', так и P'' (если, конечно, $P' \neq P''$)

__Утв.__ Если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall P,\ \lambda(P)<\delta:\ \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i<\varepsilon$, то $f \in \mathcal{R}[a;b]$.

(здесь P – разбиение отрезка $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Delta_i=[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\omega(f,\Delta_i)=\sup\limits_{\Delta_i}|f(x')-f(x'')|$ – колебание функции f на Δ_i, $x', x'' \in \Delta_i$)

__Д-во__ Пусть P – разбиение, удовлетворяющее условию утверждения, а $\tilde{P}$ – продолжение P.

Будем считать, что каждый отрезок разбиения P разбит на части дополнительными точками разбиения $\tilde{P}$



(возможно, $n_i=1$, если ни одна из дополнительных точек не попала в $[x_{i-1}, x_i]$)

Заметим, что $\lambda(\tilde{P}) \leq \lambda(P)$.

$$\left|\sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi})-\sigma(f, P, \xi)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij}-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i\right|=(*)$$

где $\xi_{ij} \in [x_{i\,j-1}, x_{ij}]$, $\Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i\,j-1}$ | $\sum_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij} = \Delta x_i$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$(*) = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i) \Delta_{ij} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \left(f(\xi_{ij}) - f(\xi_i) \right) \Delta_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_{ij} \ \pm \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i \Rightarrow$$

можно сделать как угодно малым

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P, \lambda(P) < \delta$, $\tilde{P}$ - продолжение P:

$$\left| \sigma(f; \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда если для P' и P'': $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$, то

$$\left| \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f, P', \xi') \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f, P'', \xi'') \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

, где $\tilde{P} = P' \cup P''$

Далее,

$$\left| \sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'') \right| \leq \left| \sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) \right| +$$

$$+ \left| \sigma(f, \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f, P'', \xi'') \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. справедлив критерий Коши. $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$.

<u>Следствие</u> $(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a; b])$

(Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке)

<u>Д-во</u> $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Пусть для разбиения P : $\lambda(P) < \delta$. Тогда для этого разбиения

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a; b]$$

почему здесь не $\leq$?

Следствие Если f ограничена на $[a,b]$ и имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва, то $f \in \mathcal{R}[a;b]$

Д-во Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{8C\cdot k}$, где $|f(x)| < C$, $x \in [a;b]$,

k - число точек разрыва.

Исключим из $[a,b]$ δ_1-окрестности точек разрыва.
Для оставшегося объединения отрезков можно указать $\delta_2 > 0$ такое, что для любого отрезка Δ длиной менее чем δ_2 и целиком принадлежащего одному из отрезков оставшегося объединения в силу непрерывности $\omega(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Пусть для разбиения $P: \lambda(P) < \delta$. Тогда:

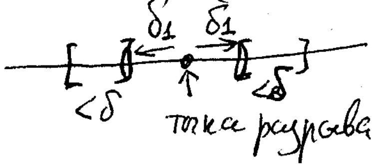
$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i = \sum{}' + \sum{}'',$$

где $\sum'$ включает слагаемые, отвечающие Δ_i-ым, не имеющим общих точек с δ_1-окрестностями

Для таких Δ_i: $\omega(f,\Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum{}' < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum{}' \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Сумма длин оставшихся отрезков разбиения меньше $(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \le 4\delta_1 k = 4\frac{\varepsilon}{8Ck}\cdot k = \frac{\varepsilon}{2C}$



Тогда $\sum'' \le C\sum''\Delta x_i < C\cdot\frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a;b]$

Д.З. Докажите, что ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке, даже если она имеет счётное число точек разрыва.

Следствие Если f монотонна на $[a, b]$, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$

Д-во $\omega(f; [a; b]) = |f(b) - f(a)|$.

Если $f(b) = f(a) \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow f(x) \in C[a; b] \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}[a; b]$

Если $f(b) \neq f(a)$:

$\forall \varepsilon > 0$ пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$

Пусть P разбиение, такое, что $\lambda(P) < \delta$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \underbrace{\Delta x_i}_{< \delta} < \delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) = \delta \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$

$$= \delta \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| = \delta |f(b) - f(a)| = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a; b]$$

А можно ли указать необходимое и достаточное условие интегрируемости функции??

Можно ли описать класс интегрируемых на отрезке функций??