ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
ФАКУЛЬТЕТ №8; 1 КУРС; 2 СЕМЕСТР.

Все вопросы рассматривались на лекциях. В скобках указаны ссылки на учебное пособие: *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2010.

1. Линейное пространство: определение, примеры, простейшие следствия из аксиом (разд.8.1).
2. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства (разд.8.2.1). Свойства (разд. 8.2.2).
3. Размерность и базис линейного пространства (разд.8.3.1). Примеры (разд.8.3.2).
4. Теорема о разложении элементов линейного пространства по базису (с.377).
5. Линейная оболочка конечной системы векторов. Линейная оболочка подмножества линейного пространства. Свойства (см. разд.8.2.3 и пп.1,2 в замечаниях 8.3).
6. Теорема о дополнении системы векторов до базиса (с.377-378).
7. Матрица перехода от базиса к базису. Свойства матрицы перехода (разд.8.4.3,8.4.4).
8. Связь координат вектора в разных базисах (разд.8.4.3).
9. Теорема об изоморфизме конечномерных линейных пространств (разд.8.5).
10. Подпространства линейного пространства (разд.8.6.1). Примеры (разд.8.6.2).
11. Пересечение и алгебраическая сумма подпространств (разд.8.6.3). Примеры (с.398).
12. Прямая сумма, алгебраическое дополнение (разд.8.6.4).
13. Теорема о размерности суммы подпространств (с.397).

----

14. Евклидово пространство: определение, примеры, простейшие следствия из аксиом. (8.8.1, 8.8.2)
15. Основные метрические понятия (разд.8.8.3). Неравенство Коши – Буняковского (с.427).
16. Неравенство треугольника (с.431). Теорема Пифагора (п.6 на с.434).
17. Изоморфизм евклидовых пространств (с.442).
18. Ортогональные векторы: определение, примеры, свойства (разд.8.8.4).
19. Ортонормированный базис и его преимущества (разд.8.8.6).
20. Ортогональные дополнения подмножеств: определения, примеры, свойства (разд.8.8.7).
21. *Процесс ортогонализации Грама – Шмидта* (разд.8.8.5).
22. Задача о перпендикуляре и ее решение (разд.8.8.8).
23. Определитель Грама, его свойства (с.440-441).
24. Метрические приложения определителя Грама (с. 451).
25. Неравенства Адамара, Бесселя (п.3 замечаний 8.12, п.3 замечаний 8.14).

----

26. Отображения: определение, образ, полный прообраз. Сюръективные, инъективные, биективные, тождественные и обратимые отображения (с.459).
27. Композиция отображений. Теорема об обратном отображении (с.459).
28. Линейные отображения: определение (с.460), примеры (разд.9.1.2), свойства (разд.9.1.3).
29. Матрицы линейных отображений (разд.9.1.4) и их свойства (с.467).
30. Ядро и образ линейного отображения: определение, примеры, свойства.
31. Теорема о размерностях ядра и образа (разд.9.1.5).

----

32. Линейные преобразования: определение, примеры (разд.9.2.1).
33. Матрицы линейного преобразования в разных базисах (разд.9.2.2).
34. Алгебра линейных преобразований: сложение, умножение на число, произведение и степень линейных операторов (разд.9.2.3).
35. Инвариантные подпространства: определение, примеры (разд.9.3.1). Сужение (ограничение) оператора на подпространство (с.478). Свойства инвариантных подпространств (разд.9.3.2).
36. Теорема о матрицах оператора и его сужения на инвариантное подпространство, следствие (с.481).

37. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования (разд.9.4.1). Геометрический смысл собственных векторов (с.482). Примеры (разд.9.4.2). Свойства (п.1,2 разд.9.4.3).
38. Теорема о собственных векторах линейного преобразования и его матрицы (с.483).
39. *Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного преобразования* (с.486).
40. Характеристический многочлен линейного преобразования и его свойства (с.483, замечания 9.4).
41. Теорема об инвариантных подпространствах линейного преобразования вещественного линейного пространства (теорема 9.4 с.484-486).
42. Собственные и корневые подпространства линейного преобразования, цепочка инвариантных подпространств (п.3,4 разд.9.4.3).
43. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств (разд.9.4.3 с.489-492).
44. Теорема об алгебраической и геометрической кратностях собственных значений линейного преобразования (разд.9.4.3 с.493).
45. Теорема о диагонализируемости матрицы линейного преобразования (с.495) и ее следствия (с.495-496).
46. Жорданова форма матрицы (с.496). Собственные и присоединенные векторы (с.497-498).
47. Теорема о приведении линейного преобразования к каноническому виду (без доказательства) (с.500 и п.3 замечаний 9.5).
48. *Алгоритм приведения линейного преобразования к каноническому виду* (с.501-504 и первый способ на с.316).
49 *Алгоритм нахождения многочлена от матрицы* (разд.7.3.4).
50. Теорема Гамильтона – Кэли (формулировка есть на с.301, доказательство в конспекте).

----

51. Ортогональные преобразования: определение, примеры, свойства (с.513-516).
52. Канонический вид ортогонального преобразования и его геометрический смысл (с.516-518).
53 *Алгоритм приведения ортогонального преобразования к каноническому виду* (с.518-519).
54. Сопряженные преобразования: определение, примеры, свойства (разд.9.6.2).
55. Самосопряженные преобразования: определение, примеры, свойства (разд.9.6.3 с.523-524)
56. Теорема о диагонализируемости матрицы самосопряженного преобразования (с.524).
57 *Алгоритм приведения самосопряженного преобразования к каноническому виду* (с.526-527).
58. Теорема о структуре невырожденного линейного преобразования евклидова пространства и ее геометрический смысл (с.525).

----

59. Приведение квадратичной формы к главным осям (разд.9.6.4).
60. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду (конспект лекций, методичка).