Лекция 9

Представление булевой функции формулами в СДНФ и СКНФ

Теорема 1 (о представлении булевой функции формулой в СДНФ).

Для любой булевой функции $f(x_1 \ldots x_n) \not\equiv 0$, существует формула F, которая находится в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$ и выражает булеву функцию $f(x_1 \ldots x_n)$. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Обозначим

$$X_i{}^s = \begin{cases} X_i, \text{если } s = 1 \\ \neg X_i, \text{если } s = 0 \end{cases}.$$

И для оценок, принадлежащих множеству $\{0; 1\}$ будет выполняться

$$s^t = \begin{cases} s, \text{если t} = 1 \\ \neg s, \text{если t} = 0 \end{cases}.$$

$s, t \in \{0,1\}$

Назовем элементарную конъюнкцию $X_1{}^{s_1} \& \ldots \& X_n{}^{s_n}$ ***ассоциированной* с оценкой** $< s_1, \ldots, s_n >$.

Например, для оценки $< 0, 1, 0 >$ списка переменных $< X_1, X_2, X_3 >$ ассоциированной с ней элементарной конъюнкцией является

$$X_1{}^0 \& X_2{}^1 \& X_3{}^0 = \neg X_1 \& X_2 \& \neg X_3.$$

Лемма 1. Конъюнкция $X_1^{t_1} \& X_2^{t_2} \& \ldots \& X_n^{t_n}$, ассоциированная с оценкой $< t_1, t_2, \ldots, t_n >$, принимает значение И (или 1) на оценке $< t_1, \ldots, t_n >$ и только на ней.

Доказательство:

1) Значение конъюнкции $X_1^{t_1} \& X_2^{t_2} \& \ldots \& X_n^{t_n}$ на оценке $< t_1, t_2, \ldots, t_n >$:
$t_1^{t_1} \& t_2^{t_2} \& \ldots \& t_n^{t_n} \equiv 1 \& \, 1 \& \ldots \& \, 1 = 1$(И), т.к.

$$t_i^{t_i} = \begin{cases} 0^0 = \neg 0 = 1 \\ 1^1 = 1 \end{cases}.$$

2) Для любой оценки списка переменных $< s_1, \ldots, s_n > \neq < t_1, \ldots, t_n >$ значение конъюнкции $X_1^{t_1} \& X_2^{t_2} \& \ldots \& X_n^{t_n} = 0$(Л). Так как существует $t_j \neq s_j$:

$$s_j{}^{t_j} = \begin{cases} 0^1 = 0 \\ 1^\circ = \neg 1 = 0 \end{cases}. \text{ И } s_1{}^{t_1} \& \ldots \& \, s_j{}^{t_j} \& \ldots \& s_n{}^{t_n} \equiv A \ldots \& 0 \& \ldots B \equiv 0(Л).$$

Ч.т.д.

Доказательство теоремы 1 *. Конструктивное с обоснованием.*

Алгоритм построения СДНФ для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, заданной таблицей

Приведем алгоритм построения для булевой функции $f(x_1 \ldots x_n) \not\equiv 0$ формулы F, находящейся в СДНФ относительно списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$ и выражающей булеву функцию $f(x_1 \ldots x_n)$.

1. Выберем в таблице булевой функции f все те оценки, на которых f принимает значение 1 (так как f не равна тождественно 0, такие оценки (строки) найдутся). Отмечаем все единицы функции символом *.

2. Для оценки списка переменных в каждой выбранной строке строим ассоциированную с ней элементарную конъюнкцию.

$< t_1, \dots, t_n >: f(t_1, \dots, t_n) = 1$ строим конъюнкцию $x_1{}^{t_1} \& \dots . \& x_n{}^{t_n}$.

Пример 4. Функция $f(x, y, z)$ задана таблично.

x	y	z	$f(x,y,z)$	СДНФ
1	1	1	1*	$x^1 \& y^1 \& z^1 = x \& y \& z$
1	1	0	1*	$x^1 \& y^1 \& z^0 = x \& y \& \neg z$
1	0	1	0	
1	0	0	1*	$x^1 \& y^0 \& z^0 = x \& \neg y \& \neg z$
0	1	1	1*	$x^0 \& y^1 \& z^1 = \neg x \& y \& z$
0	1	0	0	
0	0	1	1*	$x^0 \& y^0 \& z^1 = \neg x \& \neg y \& z$
0	0	0	0	

3. Составляем дизъюнкцию всех полученных в пункте 2 элементарных конъюнкций. Построим формулу

$$F = \bigvee (x_1{}^{t_1} \& \dots . \& x_n{}^{t_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем оценкам $< t_1, \dots, t_n >$, для которых $f(t_1, \dots, t_n) = 1$. В результате получим СДНФ, выражающую формулу F

$$F = (x \& y \& z) \vee (x \& y \& \neg z) \vee (x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (\neg x \& \neg y \& z).$$

Обоснование табличного метода построения СДНФ.

Докажем, что построенная таким способом формула F в СДНФ выражает данную функцию, т.е.

1)$f(t_1, \dots, t_n) = 1 \Rightarrow F|_{<t_1, \dots, t_n>} = 1$

2)$f(t_1, \dots, t_n) = 0 \Rightarrow F|_{<t_1, \dots, t_n>} = 0$

Если функция на оценке $< t_1, \dots, t_n >$, принимает значение 1, то ассоциированная с ней конъюнкция входит в СДНФ: $F = (x_1{}^{t_1} \& \dots . \& x_n{}^{t_n}) \vee D, D$ −остальная часть СДНФ. По лемме на оценке $< t_1, \dots, t_n >$ ассоциированная конъюнкция принимает значение 1.

Следовательно, $F|_{<t_1,...,t_n>} = 1 \vee D = 1$.

Если функция на оценке $< s_1, \ldots, s_n >$: принимает значение 0, то $F = 0$, т.к. F не содержит ассоциированных с оценкой $< s_1, \ldots, s_n >$ конъюнкций (по лемме другие конъюнкции на этой оценке равны нулю): $F = 0 \vee ... \vee 0 = 0$.

Покажем единственность построения СДНФ. От противного.

Пусть для функции f существуют две формулы в СДНФ, причем $F_1 \neq F_2$ с точностью до перестановки элементарных конъюнкций. И пусть для определенности существует ассоциированная конъюнкция ${X_1}^{s_1} \& \ldots \& {X_n}^{s_n}$, которая содержится в F_1, но не содержится в F_2. Тогда на оценке $< s_1, \ldots, s_n >$:

$F_1|_{<s_1,...,s_n>} = 1$

$F_2|_{<s_1,...,s_n>} = 0$

Следовательно, формулы F_1 и F_2 не могут выражать одну и ту же функцию.

Теорема 2. (О представлении булевой функции формулой в СКНФ).

Для любой булевой функции $f(x_1 \ldots x_n) \not\equiv 1$, существует формула F, которая находится в СКНФ относительно списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$ и выражает булеву функцию $f(x_1 \ldots x_n)$. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Назовем дизъюнкцию ${X_1}^{1-t_1} \vee \ldots \vee {X_n}^{1-t_n}$ ассоциированной с оценкой $< t_1, \ldots, t_n >$.

Например, для оценки $< 0, 1, 0 >$ списка переменных $< X_1, X_2, X_3 >$ ассоциированной с ней элементарной дизъюнкцией является

${X_1}^{1-0} \vee {X_2}^{1-1} \vee {X_3}^{1-0} = {X_1}^1 \vee {X_2}^0 \vee {X_3}^1 = X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3$.

Лемма 2. Дизъюнкция ${X_1}^{1-t_1} \vee \ldots \vee {X_n}^{1-t_n}$, ассоциированная с оценкой $< t_1, ..., t_n >$, принимает значение 0(Л) на оценке $< t_1, \ldots, t_n >$ и только на ней.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Доказательство теоремы 2. Приведем алгоритм построения для булевой функции $f(x_1 \ldots x_n) \not\equiv 1$ формулы F, находящейся в СКНФ относительно списка переменных $< X_1, \ldots, X_n >$ и выражающей функцию f.

Алгоритм построения СКНФ для функции $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 1$, заданной таблицей

1. Выберем в таблице булевой функции f все те оценки (строки), на которых f принимает значение 0 (так как f не равна тождественно 1, такие строки найдутся). Отмечаем все нули функции.
2. Для оценки списка переменных в каждой выбранной строке строим ассоциированную с ней элементарную дизъюнкцию ${X_1}^{1-t_1} \vee \ldots \vee {X_n}^{1-t_n}$.
3. Составляем конъюнкцию всех полученных в пункте 2 элементарных дизъюнкций.

$$F = \&({X_1}^{1-t_1} \vee \ldots \vee {X_n}^{1-t_n})$$

Обоснование – аналогично СДНФ.

Пример 5. Построим СКНФ для функции из примера 4.

x	y	z	$f(x,y,z)$	СКНФ
1	**1**	**1**	**1***	
1	**1**	**0**	**1***	
1	**0**	**1**	**0**	$x^{1-1} \vee y^{1-0} \vee z^{1-1} = x^0 \vee y^1 \vee z^0 = \neg x \vee y \vee \neg z$
1	**0**	**0**	**1***	
0	**1**	**1**	**1***	
0	**1**	**0**	**0**	$x^{1-0} \vee y^{1-1} \vee z^{1-0} = x^1 \vee y^0 \vee z^1 = x \vee \neg y \vee z$
0	**0**	**1**	**1***	
0	**0**	**0**	**0**	$x^{1-0} \vee y^{1-0} \vee z^{1-0} = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x \vee y \vee z$

$$F = (\neg x \vee y \vee \neg z)\&(x \vee \neg y \vee z)\&(x \vee y \vee z).$$

Из приведенных теорем следует еще один способ построения СДНФ и СКНФ заданной формулы.

Алгоритм построения СДНФ (СКНФ) для формулы А

1) Строим таблицу истинности для формулы A: И – 1, Л – 0. Получим булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$

2) По функции строим СДНФ (СКНФ).

Из единственности построения формулы в СДНФ (СКНФ) следует единственность формулы в СДНФ (СКНФ), равносильной данной (теорема была в предыдущем разделе, но единственность мы не доказали).

Итак, каждой формуле A соответствует булева функция:

$A \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow$ функция единственным образом представлена в СДНФ (СКНФ).

Полные системы булевых функций

Определение 1. Система булевых функций $f = \{f_1, \ldots, f_l\}$ называется **полной**, если любую булеву функцию можно выразить с помощью суперпозиций этих функций.

Функция может быть получена в результате суперпозиции одним из следующих способов:
1) замена переменной $x_i \to x_j$:

$$f_t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_t) \to f_t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots x_t)$$

2) подстановка функции вместо переменной $f_j \to x_i$.

$$f_t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_t) \to f_t\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_j(x_1, \ldots, x_j), x_{i+1}, \ldots x_t\big)$$

В зависимости от глубины вложений (подстановок) суперпозиция бывает ранга 0,1, …

Пример известной полной системы $\{\neg, \&, \vee\}$, т.к. любую булеву функцию можно представить формулой в СДНФ и\или в СКНФ.

***Два способа доказательства полноты системы булевых функций*:**

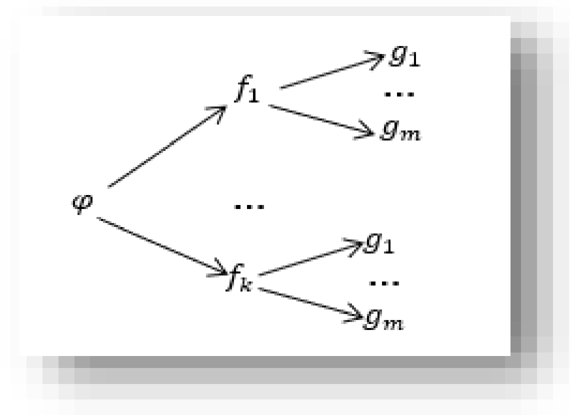
1. По утверждению.
2. По критерию Поста.

Утверждение 1. Пусть система функций $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ – полная. Тогда система функций $g = \{g_1, \ldots, g_m\}$ тоже полная, если любую функцию f_i $(i = 1, \ldots, k)$ можно представить с помощью суперпозиций функций $g_1, \ldots, g_m$.

Известную полную систему выражаем через новую систему!

***Доказательство*:**

Произвольную булеву функцию φ представим с помощью суперпозиций $g_1, \ldots, g_m$.



Выражаем произвольную булеву функцию φ через суперпозиции функций $f_1, \ldots, f_k$. Это можно сделать, т.к. система функций $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ полная. Затем каждую функцию f_i выразим через суперпозиции функций $g_1, \ldots, g_m$ (это возможно по условию теоремы). Таким образом, мы получили, что любую булеву функцию можно выразить через суперпозиции функций $g_1, \ldots, g_m$. Следовательно, система функций $g = \{g_1, \ldots, g_m\}$ тоже полная.

Пример 1.

По утверждению 1 докажем полноту системы:

1. $g_1(x) = \neg\, x,\ g_2(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2$ через известную полную систему $f_1(x) = \neg x,\, f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2,\ f_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.

   Представляем функции известной полной системы через суперпозиции функций новой системы:

   $f_1\ (x) = g_1(x);$

   $f_2(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2);$

   $f_3(x_1, x_2) = g_1\big(\, g_2(g_1(x_1), g_1(x_2))\big)$, т. к. $x_1 \vee x_2 = \neg(\neg\, x_1 \& \neg\, x_2)$.

2. Докажем полноту системы $\{\, \neg, \supset\, \}$

   Как и в примере 1, обозначим эту систему функциями {g}

   $g_1(x) = \neg\, x$

   $g_2(x_1, x_2) = x_1 \supset x_2$

   а исходную полную систему – функциями {f}

   $f_1(x) = \neg x$

   $f_2(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2$

   $f_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

   Здесь, как и в прошлом примере, совпала одна из функций:

   $f_1\ (x) \equiv g_1(x)$

   а остальные попробуем выразить (без записи суперпозиции)

   Т.к. $x_1 \supset x_2 \ \equiv \neg\, x_1 \vee x_2 \quad \Rightarrow$

   $x_1 \vee x_2 \equiv \neg\, x_1 \supset x_2$

   и $\quad x_1 \& \, x_2 \ \equiv \neg(\neg\, x_1 \vee \neg x_2) \equiv \neg(x_1 \supset \neg x_2)$.

В дальнейшем для доказательства полноты системы будем просто указывать формулы, выражающие операции известной полной системы $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ через операции новой системы $g = \{g_1, \ldots, g_m\}$.

Штрих Шеффера и штрих Вебба (стрелка Пирса)

$\boldsymbol{x_1 | x_2 = \neg x_1 \vee \neg x_2}$ **и** $\boldsymbol{x_1 \circ x_2 = \neg x_1 \& \neg x_2}$

Выпишем для этих операций таблицу истинности.

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \circ x_2$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Пример 2.

Докажем, что система, состоящая из одной булевой функции {|} будет полной.
Возьмем систему $\{\neg, \&\}$ в качестве известной полной. Тогда

$\neg x \equiv x|x$
$x_1 \& x_2 \equiv \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2) \equiv \neg(x_1|x_2) \equiv (x_1|x_2)\,|\,(x_1|x_2)$.

$x_1 \vee x_2 \equiv \neg x_1|\neg x_2 \equiv (x_1|x_1)\,|\,(x_2|x_2)$.

Докажите, что система $\{\circ\}$ *так же полная.*

Многочлен Жегалкина

Рассмотрим систему булевых функций $\{\&, +, 1\}$. Легко убедиться, что она полная. Выпишем булевы функции системы:

x_1	x_2	$x_1 \,\&\, x_2$	$x_1 + x_2$	**1**
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Для доказательства полноты системы $\{\&, +, 1\}$ через полную систему $\{\neg, \&, \vee\}$ покажем:

$\neg x = x + 1$;
$x \& y$ – так и остается;
$x \vee y \equiv \neg(\neg x \& \neg y) \equiv ((x+1)\&(y+1)) + 1$.

Для схожести многочлена Жегалкина с обычным алгебраическим многочленом будем обозначать конъюнкцию точкой (как умножение): $\{\cdot, +, 1\}$.

Для данной системы булевых функций справедливы тождества:

1. Коммутативность
   $A + B \equiv B + A$
   $A \cdot B \equiv B \cdot A$
2. Ассоциативность
   $(A + B) + C \equiv A + (B + C)$
   $(A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot (B \cdot C)$
3. Дистрибутивность
   $A \cdot (B + C) \equiv A \cdot B + A \cdot C$
4. $A + A \equiv 0$
5. $A \cdot A \equiv A$

Первые три тождества совпадают с соответствующими алгебраическими тождествами.

Определение 2. ***Многочленом Жегалкина*** называется многочлен вида

$$\sum_{\text{по всем слагаемым}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + a_i,$$

в котором все переменные имеют степень не выше первой и нет двух одинаковых слагаемых. Номера переменных идут в порядке возрастания. $a_i = const \in \{0,1\}$.

Номера переменных идут в порядке возрастания – для единственности представления.

Утверждение 2. Любую формулу логики высказывания можно представить многочленом Жегалкина однозначно с точностью до перестановки слагаемых.

Доказательство.

Для доказательства достаточно пересчитать количество различных многочленов Жегалкина и убедиться, что оно совпадает с числом всех булевых функций.

Известно, что число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Покажем, что число различных многочленов Жегалкина также 2^{2^n}. Количество различных слагаемых в многочлене Жегалкина от n переменных равно 2^n:

$x_1, x_2, \ldots x_n$

$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ (каждую переменную либо берем, либо нет в слагаемое многочлена).

И каждое слагаемое либо берем в многочлен, либо нет. Получаем: всего различных многочленов Жегалкина от n переменных 2^{2^n}. Ч.т.д.

Алгоритм приведения формулы F к виду многочлена Жегалкина

1. Выражаем все логические операции формулы F через $\{\&, +, 1\}$ (это сделать можно, так как система полная).
   $\neg x = x + 1$
   $x \vee y \equiv \neg(\neg x \& \neg y) \equiv (x+1)(y+1) + 1$
   $x \supset y \equiv \neg x \vee y \equiv \neg(x \& \neg y) \equiv x(y+1) + 1$
   $x \sim y \equiv \neg(x + y) \equiv x + y + 1$
   Получаем формулу $F_1 \equiv F$
2. Используя тождества (1) – (5), приводим формулу F_1 к виду многочлена.
   Получаем формулу $F_2 \equiv F_1$. F_2 – многочлен Жегалкина.

Запишем итоговые значения многочленов Жегалкина для основных операций, с учетом особенностей операций сложения по модулю 2 и конъюнкции ($x + x = 0; x \cdot x = x$).

$\neg x = x + 1;$
$x \& y \equiv x \cdot y;$
$x \vee y \equiv xy + x + y;$
$x \supset y \equiv xy + x + 1;$
$x \sim y \equiv x + y + 1;$
$x + y$ – в системе.

Пример 3. Найти многочлен Жегалкина формулы A.

1. $A = (\neg x \& y) \sim (y \supset z) \equiv (\neg x \& y) \sim (\neg y \vee z) \equiv (\neg x \& y) \sim \neg(y \& \neg z) \equiv$

$$\equiv \big((x+1)y\big) \sim \big(y(z+1) + 1\big) \equiv (xy + y) + (yz + y + 1) + 1 \equiv$$

$$\equiv xy + yz + y + y + 1 + 1 \equiv xy + yz.$$

2. $F \equiv \neg(y \supset \neg x) \sim (\neg x \supset \neg z)$

1) $A = \neg(y \supset \neg x) = y(x+1) + y + 1 + 1 = xy + y + y = xy$; (1+1=0!)

2) $B = (\neg x \supset \neg z) = (x+1)(z+1) + (x+1) + 1 =$

$$= xz + x + z + 1 + x + 1 + 1 = xz + z + 1$$

3) $F \equiv \neg(y \supset \neg x) \sim (\neg x \supset \neg z) = A + B + 1 = xy + xz + z + 1 + 1 = xy + xz + z$

Ответ: $xy + xz + z$

Приведем табличный алгоритм построения многочлена Жегалкина, который легко запрограммировать.

Алгоритм построения многочлена Жегалкина по булевой функции
Метод треугольника

1. Строится таблица, в которой строки идут в порядке возрастания двоичных кодов от 00…00 до 11…11.
2. Строится вспомогательная треугольная таблица, в которой первый столбец совпадает со столбцом значений функции в таблице. Ячейка в каждом последующем столбце получается путём сложения по модулю 2 двух ячеек предыдущего столбца — стоящей в той же строке и строкой ниже.
3. Столбцы вспомогательной таблицы нумеруются двоичными кодами в том же порядке, что и строки таблицы истинности. Каждому двоичному коду ставится в соответствие один из членов полинома Жегалкина в зависимости от позиций кода, в которых стоят единицы.
4. Если в верхней строке какого-либо столбца стоит единица, то соответствующий член присутствует в полиноме Жегалкина.

Многочлен Жегалкина имеет вид: $1 + z + xy$.

						000	001	010	011	100	101	110	111
№	x	y	z	$f(x,y,z)$		1	z	y	yz	x	xz	xy	xyz
0	0	0	0	1		1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0		0	1	0	0	0	1	1	
2	0	1	0	1		1	1	0	0	1	0		
3	0	1	1	0		0	1	0	1	1			
4	1	0	0	1		1	1	1	0				
5	1	0	1	0		0	0	1					
6	1	1	0	0		0	1						
7	1	1	1	1		1							

Проверим результат, построив многочлен Жегалкина через СДНФ. В этом случае дизъюнкцию можно просто заменить операцией +, т. к. при любых значениях входных переменных в единицу обращается не более одной элементарной конъюнкции. Получим:

$$(\neg x\&\neg y\&\neg z) \vee (\neg x\&y\&\neg z) \vee (x\&\neg y\&\neg z) \vee (x\&y\&z) \equiv$$
$$\equiv (\neg x\&\neg y\&\neg z) + (\neg x\&y\&\neg z) + (x\&\neg y\&\neg z) + (x\&y\&z) \equiv$$
$$\equiv (x+1)(y+1)(z+1) + (x+1)y(z+1) + x(y+1)(z+1) + xyz \equiv$$
$$\equiv (z+1)[(x+1)(y+1) + (x+1)y + x(y+1)] + xyz \equiv$$
$$\equiv (z+1)[xy + x + y + 1 + xy + y + xy + x] + xyz \equiv (z+1)[xy+1] + xyz \equiv$$
$$\equiv xyz + z + xy + 1 + xyz \equiv xy + z + 1$$

Функционально замкнутые классы

Определение 3. Класс булевой функции называется ***функционально замкнутым (ФЗ)***, если любая суперпозиция функций из этого класса также принадлежит этому классу.

Если класс Т – ФЗ. Следовательно, любая суперпозиция функций из Т принадлежит классу Т.

Пример 4.

1. P_1 – класс функций одной переменной является функционально замкнутым.

   Возьмем функции из этого класса $f_i(x_1)$ и $f_j(x_2)$. Очевидно, что суперпозиция этих функций также содержит одну переменную: $f_i\big(f_j(x_2)\big)$.

2. P_2 – класс функций двух переменных не является функционально замкнутым. Возьмем функции из этого класса $f(x_1, x_2)$, $g(x_2, x_3)$. Суперпозиция $f(x_1, g(x_2, x_3))$ содержит три переменные.
3. К – класс всех булевых функций – функционально замкнутый.

Для формулировки критерия Поста о полноте системы булевых функций необходимо рассмотреть пять ФЗ классов: $T_0,\ T_1,\ S,\ L,\ M$.

T_0 – класс функций, сохраняющих 0.
T_1 – класс функций, сохраняющих 1.
S – класс самодвойственных функций.
L – класс линейных функций.
M – класс монотонных функций.

1. ***T_0 – класс функций, сохраняющих 0***, то есть функций, удовлетворяющих условию $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$.

   Пример 5.

   $x_1\&x_2|_{<0,0>} = 0 \in T_0$
   $x_1 \vee x_2|_{<0,0>} = 0 \in T_0$
   $x_1 \supset x_2|_{<0,0>} = 1 \Rightarrow (x_1 \supset x_2) \notin T_0$

   Докажем, что класс функций, сохраняющих 0, функционально замкнут.

   Пусть $f_1(x_1, \dots, x_n) \in T_0$, $f_2(x_1, \dots, x_m) \in T_0$. Рассмотрим их суперпозицию на оценке $< 0, \dots, 0 >$.

$$f_1\left(x_1,\ldots,\underbrace{f_2(x_1,\ldots,x_n)}_{x_i},\ldots x_n\right)\Bigg|_{\langle 0,\ldots,0\rangle}$$

$$f_1(0,\ldots,\underbrace{f_2(0,\ldots,0)}_{=0},\ldots,0)=0$$

Количество булевых функций, принадлежащих T_0, равно $2^{2^n-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2^n}$.

(На оценке $<0,\ldots,0>$ значение функции определено – 0.)

2. $\boldsymbol{T_1}$ *– **класс функций, сохраняющих 1***, то есть функций, удовлетворяющих условию $f(1,1,\ldots,1)=1$.

   Пример 6.

$$\left.\begin{array}{r} x_1\&x_2|_{\langle 1,1\rangle}=1 \\ x_1\vee x_2|_{\langle 1,1\rangle}=1 \\ x_1\supset x_2|_{\langle 1,1\rangle}=1 \end{array}\right\}\in T_1$$

$$x_1+x_2|_{\langle 1,1\rangle}=0\Rightarrow x_1+x_2\notin T_1$$

Доказательство функциональной замкнутости класса T_1 аналогично T_0 (вместо “0” подставить “1”).

Число функций, сохраняющих 1 тоже совпадает: $2^{2^n-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2^n}$.