__Лемма__ Пусть $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $f(x) \in C(x_0)$,

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Тогда

$F(x) \in \mathcal{D}(x_0)$, $F'(x) = f(x)$

__Д-во__ Пусть $x_0 + h \in [a,b]$. Тогда

$$F(x_0+h) - F(x) = \int\limits_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = (*)$$

Так как $f(x) \in C(x_0)$, то при достаточно малом h $\forall\, t \in [x_0, x_0+h]$ (или $[x_0+h, x_0]$, если $h<0$): $f(t) = f(x_0) + \Delta(t)$, где $\Delta(t) \to 0$ при $t \to x_0$

Тогда $$(*) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + \Delta(t))\,dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt + \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \Delta(t)dt = f(x_0)\cdot h + \alpha(h)\cdot h,$$

где $\alpha(h)\cdot h = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \Delta(t)dt$.

Заметим, что при достаточно малых h $\Delta(t)$ - ограничена на $[x_0, x_0+h]$ (или $[x_0+h, x_0]$, если $h<0$). Пусть $\sup\limits_{t\in[x_0,x_0+h]} |\Delta(t)| = M(h) > 0$

Тогда $$\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \Delta(t)dt\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |\Delta(t)|dt\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} M(h)\,dt\right| = M(h)|h| \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\alpha(h)| \le M(h) \to 0$ при $h \to 0$

Таким образом,

$$F(x_0+h) - F(x) = f(x_0)h + \alpha(h)h, \text{ где } \alpha(h)\to 0 \text{ при } h\to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(f(x_0) + \alpha(h)) = f(x_0), \text{ т.е.}$$

$$\exists\ F'(x_0) = f(x_0)$$

Теорема Если $f \in C[a,b]$, то $\exists$ первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$, причём любая первообразная функции $f(x)$ имеет вид

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Д-во Т.к. $\forall x \in [a,b] : f \in C(x)$, то во всех точках отрезка $[a,b]$ $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ будет первообразной для $f(x)$ при любом C. Поскольку любые две первообразные могут отличаться только на константу, то других первообразных быть не может.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Если $f \in C[a,b]$ и $F(x)$ - любая первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Д-во Пусть $F(x)$ - произвольная первообразная функции $f(x)$.

Тогда
$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + C$$

Заметим, что $F(a) = C \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + F(a)$. Тогда при $x=b$:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + F(a), \text{ т.е. } \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Замечание Если $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ <u>конечное</u> число точек разрыва, то первообразной к ней можно назвать непрерывную функцию, производная которой во всех точках непрерывности функции $f(x)$ совпадает с $f(x)$. В этом случае формула Ньютона-Лейбница также остаётся справедливой.

Упражнение Постройте первообразную (в смысле <u>замечания</u>) к функции $y = f(x) = \mathrm{signum}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Интегрирование по частям в определённом интеграле

<u>Утв.</u>

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\, dx$$

(обозначение $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$).

(или кратко: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$)

<u>Д-во</u> $\left(u(x)\, v(x)\right)' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$

Все участвующие в этом равенстве функции — непрерывны. Поэтому, интегрируя и используя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

<u>Утв.</u> Если функция $f(t)$, определённая на отрезке $[a,x]$ (или $[x,a]$) непрерывные производные до порядка n включительно, то

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a,x),$$

где

$$r_{n-1}(a,x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$$

<u>Д-во</u>

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt =$$

$$= -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\left((x-t)^2\right)' dt =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2 \Big|_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_a^x f'''((x-t)^3)' dt = \ldots$$

<u>Замечание</u>

$$r_{n-1}(a,x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \int_a^x (x-t)^{n-1} dt =$$

{ Почему здесь применима первая теорема о среднем? }

$$= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi) \left(-\frac{1}{n}\right)(x-t)^n \Big|_a^x = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

Лагранж forever!

Замена переменной в интеграле

<u>Утв.</u> 1) $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

2) $f : [a, b]$, $f \in C[a, b]$.

$C^1(E)$ — функция непрерывно-дифференцируема, т.е. её производная в каждой точке множества E непрерывна

1) 2) $\Rightarrow$ $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

<u>Д-во</u> Если $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a, b]$, то $F(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$. В самом деле, во-первых, $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, т.к. f, φ, φ' непрерывны на соответствующих промежутках. Во-вторых, т.к. $\underbrace{F'(x) = f(x)}_{\forall x \in [a,b]}$, то $\underbrace{(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\forall t \in [\alpha, \beta]}$

Далее, $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \quad \text{и}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a).$$

Верно ли то же самое, если $f(x)\in R[a,b]$?

<u>Теорема</u> 1) $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, φ - строго монотонная, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ или $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$

2) $f(x)\in R[a,b]$

1), 2) $\Rightarrow$ $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\in R[\alpha,\beta]$, причём

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

<u>Примеры</u>

1. $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t \\ (\text{почему не } \pm ?) \end{array} \right\} =$$

$\left(f(x)=\sqrt{1-x^2},\ \varphi(t)=\sin t,\ \varphi'(t)=\cos t,\ \varphi(-\frac{\pi}{2})=-1,\ \varphi(\frac{\pi}{2})=1 \right)$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

<u>Вопросы</u> а) Стоило ли находить первообразную для $\sqrt{1-x^2}$?

б) Получается ли „площадь под графиком"?

$y=\sqrt{1-x^2}$.

2. $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m=n \\ 0, & \text{если } m\neq n \end{cases} \quad (m,n\in N)$$

символ Кронекера.

3. $f \in R[-a;a]$

α) Если f - <u>нечётная</u> функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

β) Если f - <u>чётная</u> функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

α) Если $\forall x \in [0;a]$: $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{-a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{a} f(-t)(-1)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{a} f(t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$(\varphi(t) = -t)$

$$= -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

β) - аналогично, проверьте самостоятельно.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists T > 0 : \forall x \in R : f(x+T) = f(x)$.

Если $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $f \in R[a,b]$, то $\forall h \in R$

$$\int\limits_{h}^{h+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx$$

<u>Д-во</u>

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dt + \int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(\underbrace{t+T}_{\varphi(t)=t+T}) \cdot 1\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{T} f(x)dx + \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx.$$

$\quad t \to x, \; t \to x$

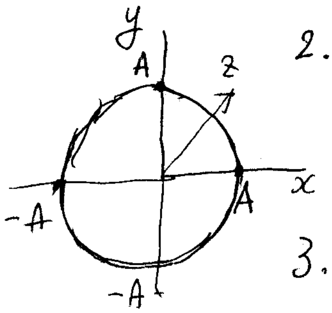
Приложение интеграла.

Длина кривой

Опр Пусть $\Phi: [a, b] \to \mathbb{R}^3$.
Область значений этого отображения называется кривой, если оно задается непрерывными функциями

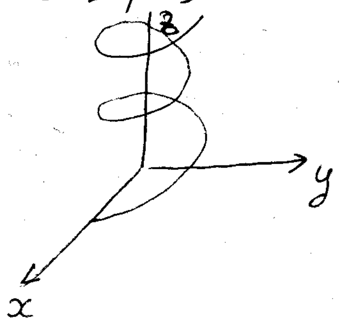
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Примеры 1. $\begin{cases} x = At \\ y = Bt \\ z = Ct \end{cases}, \quad t \in [a, b]$ – отрезок в пространстве

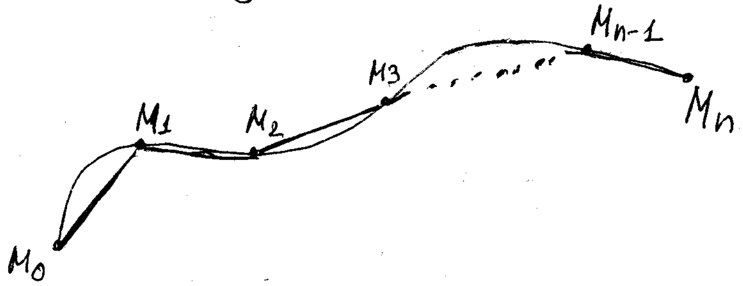


2. $\begin{cases} x = A\cos t \\ y = A\sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$ – окружность радиуса A в плоскости Oxy

3. $\begin{cases} x = A\cos t \\ y = A\sin t \\ z = Ct \end{cases} \quad t \in [0; T]$ – винтовая линия



Опр Пусть P – разбиение отрезка $[a, b]$, состоящее из точек $t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_n = b$ $(t_i < t_{i+1})$.
Пусть M_i – точка пространства с координатами $f(t_i), g(t_i), h(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$.
Ломаная, состоящая из отрезков, последовательно соединяющих $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется ломаной, вписанной в кривую.



Опр <u>Длиной ломаной</u> $M_0 M_1 \dots M_n$ называется сумма длин отрезков, её образующих:

$$l(M_0 M_1 \dots M_n) = |M_0 M_1| + |M_1 M_2| + \dots + |M_{n-1} M_n|$$

Опр <u>Длиной кривой</u> называется <u>точная верхняя грань</u> длин вписанных в неё ломаных.

$$l_{curve} = \sup_P l(M_0 M_1 \dots M_n)$$

<u>Вопрос</u> Любая ли кривая имеет длину??

<u>Замечание</u> Если считать, что t - это время, то кривую можно рассматривать как траекторию движения точки в пространстве. При этом систему

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

следует называть <u>законом движения</u> точки, а саму кривую - <u>траекторией</u> точки.

Опр Кривая называется <u>гладкой</u>, если функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$

Опр Кривая называется <u>кусочно-гладкой</u>, если отрезок $[a, b]$ можно разбить на <u>конечное</u> число отрезков, на каждом из которых кривая задаётся непрерывно дифференцируемыми функциями.

Пусть $x_i = f(t_i)$, $y_i = g(t_i)$, $z_i = h(t_i)$. Тогда

$$|M_{i-1} M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}$$

Если f, g, h непрерывно дифференцируемы на $[t_{i-1}, t_i]$, то, согласно теореме Лагранжа о конечном приращении, найдутся числа $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, такие что

$$|M_{i-1} M_i| = \sqrt{(f'(\xi_i))^2 + (g'(\eta_i))^2 + (h'(\zeta_i))^2} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Тогда, если кривая является гладкой, то длину любой ломаной, вписанной в кривую, можно представить, как

$$l(M_0 M_1 M_2 \dots M_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(\xi_i))^2 + (g'(\eta_i))^2 + (h'(\varphi_i))^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

Заметим, что

$$\inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2+(h'(t))^2} \le \sqrt{(f'(\xi_i))^2+(g'(\eta_i))^2+(h'(\varphi_i))^2} \le$$

$$\le \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2+(h'(t))^2}$$

но тогда

$$\overline{\overline{S}}(P) \le l(M_0 M_1 M_2 \dots M_n) \le \underline{\underline{S}}(P), \text{ где}$$

$\overline{\overline{S}}(P)$ и $\underline{\underline{S}}(P)$ нижняя и верхняя суммы Дарбу соответственно непрерывной функции $\sqrt{(f')^2+(g')^2+(h')^2}$.

Следовательно,

$$\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} l(M_0 M_1 M_2 \dots M_n) = \int_a^b \sqrt{(f')^2+(g')^2+(h')^2}\,dt$$

Этот интеграл, очевидно, не может быть больше длины кривой. С другой стороны, если P' является продолжением P, то длина вписанной ломаной, соответствующей P' не может быть меньше длины вписанной ломаной, соответствующей P. Из этого, очевидно, следует, что интеграл не может быть меньше длины кривой.

<u>Утв.</u> Гладкая кривая имеет длину, вычисляемую по формуле

$$l_{curve} = \int_a^b \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt, \text{ где} \quad (W)$$

функции $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ задают кривую.

Замечание Длина кусочно гладкой кривой равна сумме длин её гладких участков.

Длина плоской кривой Если систему координат можно выбрать так, что $z = h(t) \equiv 0$, то кривая называется **плоской**. В этом случае длину этой кривой можно вычислить по формуле

$$l_{curve} = \int_a^b \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

Замечание Длина кривой не зависит от того, как именно параметризована кривая.

Упражнение Пусть одна и та же кривая задана двумя способами:
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = f_1(s) \\ y = g_1(s) \\ z = h_1(s) \end{cases}$$

Докажите, что применение формулы (VV) в обоих случаях приводит к одному и тому же результату.

Длина графика функции

Опр Пусть $f: [a,b] \to R$. **Графиком** функции f на отрезке $[a,b]$ называется множество точек координатной плоскости $\Gamma_f = \{(x; f(x)), x \in [a,b]\}$

Замечание График функции в случае, когда $f \in C[a,b]$ можно рассматривать как плоскую кривую, заданную равенствами:
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

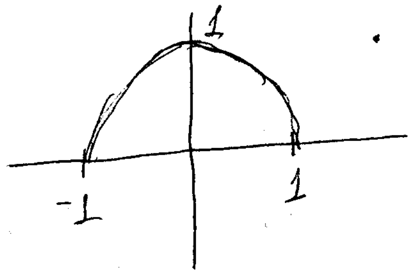
Утв. Если $f \in C^1[a,b]$, то длина её графика равна

$$l_{curve} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Д-во Применим формулу (VV) с учётом $z=0$ и $x=t$.

Пример (длина полуокружности).

$y=\sqrt{1-x^2}$ (верхняя полуокружность для $x^2+y^2=1$)



$$\ell=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Заметим, что подынтегральная функция неограничена, т.е. строго говоря, интеграл не существует. Но, рассмотрим следующее выражение:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\delta\to 0}\arcsin\Big|_{-1+\delta}^{1-\delta}=\lim_{\delta\to 0}\left(\arcsin(1-\delta)-\arcsin(-1+\delta)\right)=$$

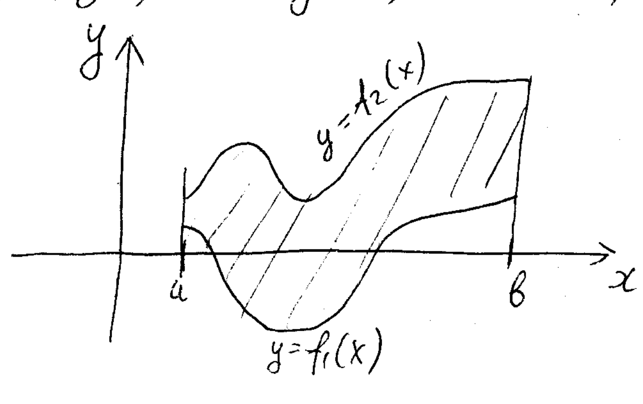
$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$ Т.е. можно считать, что $\ell=\pi$.

Вопрос А нет ли во всех этих рассуждениях какого-то тонко замаскированного логического круга?

Площадь криволинейной трапеции

Опр Пусть $f_1(x), f_2(x):[a;b]\to\mathbb{R}$, $\forall x\in[a,b]: f_1(x)\le f_2(x)$. Криволинейной трапецией называется мн-во точек в $\mathbb{R}^2$, ограниченное прямыми $x=a$, $x=b$ и графиками функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, т.е. множество точек

$$\{(x,y),\ x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ a\le x\le b,\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$$



Утв. Если $f_1(x), f_2(x) \in C[a, b]$, то криволинейная трапеция имеет площадь, определённую равенством:

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \quad (VVV)$$

Д-во Рассмотрим ситуацию, когда $f_1(x) \equiv 0$, $f_2(x) \geq 0$.

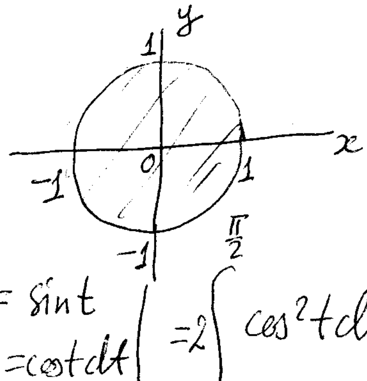
$\forall P, \xi$ - разбиений отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками,

$$\overline{\overline{S}}(f, P) < \sigma(f_2, P, \xi) < \underline{\underline{S}}(f, P)$$

Каждую из сумм Дарбу и интегральную сумму можно интерпретировать, как сумму площадей некоторых прямоугольников, учитывая, что в рассматриваемом случае при $\lambda(P) \to 0$ $\overline{\overline{S}}$ и $\underline{\underline{S}}$ стремятся к одному и тому же пределу, равному интегралу в правой части (VVV), утв. можно считать доказанным.

Замечание Строгим это „доказательство" не назовёшь. Для полного доказательства необходимо рассматривать площадь как меру мн-ва точек в $\mathbb{R}^2$. Если этого не делать, приходится ограничиваться интуитивно ясными соображениями.

Пример (площадь круга) $y^2 + x^2 = 1$



$y = f_2(x) = +\sqrt{1 - x^2}$

$y = f_1(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

$$S = \int\limits_{-1}^{1} (f_2(x) - f_1(x))\,dx = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix} \right| = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 0 - 0 = \pi.$$