Лекция 11

Минимизация в классе ДНФ

Будем рассматривать булевы функции, не равные тождественно нулю. Любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ можно представить в СДНФ. Но формула в СДНФ часто очень громоздкая. Определим и построим более «компактную» ДНФ.

Минимизацию будем проводить по числу вхождений высказывательных переменных. Например, у ДНФ $(\neg x \& y) \vee (\neg y \& z)$ число переменных – 3, а число вхождений переменных – 4.

Определение 1. ***Минимальной ДНФ*** для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть ДНФ с наименьшим числом вхождений высказывательных переменных.

Минимальных ДНФ для одной функции может быть несколько.

Рассмотрим два способа нахождения min ДНФ.

1. Построение min ДНФ через сокращенную ДНФ.
2. Построение min ДНФ с помощью таблиц Карно (легко программировать).

Построение min ДНФ через сокращенную ДНФ

Сокращенная ДНФ – некоторое приближение к минимальной. Она представляется единственным образом также, как и СДНФ.

Пусть функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ выражает формула F, находящаяся в СДНФ относительно списка переменных $< x_1, \ldots, x_n >$.

Определение 2. Элементарную конъюнкцию C будем называть ***допустимой*** для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $C \vee F \equiv F$.

Определение 3. Допустимая конъюнкция называется ***простой***, если при удалении из нее какой-либо её переменной x_i или ее отрицания $\neg x_i$ конъюнкция перестаёт быть допустимой.

Определение 4. Дизъюнкция всех простых допустимых конъюнкций для $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **сокращенной ДНФ**.

Утверждение 1. Сокращенная ДНФ, выражающая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ определяется единственным образом с точностью до перестановки элементарных конъюнкций и переменных, в них входящих.

Алгоритм построения сокращенной ДНФ для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$

1. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ находим выражающую её формулу F в СДНФ относительно списка переменных $< x_1, \ldots, x_n >$.

2. Применяем к СДНФ F закон обобщенного расщепления до тех пор, пока это возможно:

$(A \& B) \vee (A \& \neg B) \equiv (A \& B) \vee (A \& \neg B) \vee A.$

Получаем формулу $F_1 \equiv F$.

3. Применяем закон поглощения:

$(A\&B) \lor A \equiv A$

Получаем формулу $F_2 \equiv F_1$.

$F_2 = C_1 \lor \ldots \lor C_k$ – сокращенная ДНФ с учетом, что надо оставить только одно вхождение каждой элементарной конъюнкции: $A \lor A \equiv A$.

Обоснование алгоритма.

1. Из определения допустимой конъюнкции следует, что по закону обобщенного расщепления к СДНФ F добавляются только допустимые конъюнкции.
2. Поскольку процесс расщепления продолжается до тех пор, пока это возможно, то в F_1 будут присутствовать ***все*** допустимые конъюнкции для данной булевой функции.
3. По закону поглощения из двух конъюнкций, одна из которых является частью другой, остаётся конъюнкция с минимальным числом переменных, т.е. простые конъюнкции.

Доказательство единственности сокращенной ДНФ следует из определения – **ВСЕ** простые, допустимые для данной функции конъюнкции входят в сокращенную ДНФ.

Следующий пример показывает, почему нельзя применить к СДНФ обычный закон расщепления $(A\&B) \lor (A\&\neg B) \equiv A$.

Пример 1. Пусть задана булева функция $f(x, y)$ следующим образом: функция принимает значение 0 только на оценке $< 0,\ 0 >$. В этом случае СДНФ имеет вид:

$(x\&\neg y) \lor (x\&y) \lor (\neg x\&y)$.

Возможны два случая применения закона расщепления, причем получим разные формулы:

1) $(x\&\neg y) \lor (x\&y) \lor (\neg x\&y) \equiv x \lor (\neg x\&y)$;
2) $(x\&\neg y) \lor (x\&y) \lor (\neg x\&y) \equiv (x\&\neg y) \lor y$.

Делаем по алгоритму построения сокращенной ДНФ:

$$(x\&\neg y) \lor (x\&y) \lor (\neg x\&y) \equiv (x\&\neg y) \lor (x\&y) \lor (\neg x\&y) \lor \underset{\substack{1,2\\ \textit{скобки}}}{x} \lor \underset{\substack{2,3\\ \textit{скобки}}}{y} \equiv x \lor y.$$

$x \lor y -$ сокращенная ДНФ.

Утверждение 2. Минимальная ДНФ, выражающая данную функцию, состоит из элементарных конъюнкций, входящих в сокращенную ДНФ.

Для построения минимальной ДНФ из сокращенной надо выписать все возможные ДНФ из конъюнкций сокращенной, а затем определить ДНФ с минимальным числом простых конъюнкций, выражающие данную функцию. Так, если сокращенная ДНФ состоит из k конъюнкций, то получим $(2^k - 1)$ ДНФ (хотя бы одна конъюнкция входит).

Как сократить перебор?

Определение 5. Назовем элементарную конъюнкцию сокращенной ДНФ C_i ***несократимой***, если $\exists$ оценка $< s_1, \dots, s_n >$ на которой $C_i|_{<s_1,\dots,s_n>} = 1$ $(i \in \{1, \dots, k\})$, а остальные конъюнкции $C_j|_{<s_1,\dots,s_n>} = 0,\ j = \{1, \dots, k\} \backslash \{i\}$.

Очевидно, что все несократимые конъюнкции должны входить в минимальную ДНФ, иначе ДНФ не будет выражать заданную функцию. Если дизъюнкция всех несократимых конъюнкций не будет выражать функцию, то остальные конъюнкции добавляем перебором, но уже с меньшим числом вариантов.

Пример 2. Рассмотрим следующую функцию, заданную таблицей.

x	y	z	$f(x,y,z)$	СДНФ	$x\&y$	$\neg z$	Простые конъюнк.
1	1	1	1*	$x\&y\&z$	1	0	1- несокр
1	1	0	1*	$x\&y\&\neg z$	1	1	2
1	0	1	0		0	0	
1	0	0	1*	$x\&\neg y\&\neg z$	0	1	1- несокр
0	1	1	0		0	0	
0	1	0	1*	$\neg x\&y\&\neg z$	0	1	1- несокр
0	0	1	0		0	0	
0	0	0	1*	$\neg x\&\neg y\&\neg z$	0	1	1- несокр

СДНФ: $(x\&y\&z) \vee (x\&y\&\neg z) \vee (x\&\neg y\&\neg z) \vee (\neg x\&y\&\neg z) \vee (\neg x\&\neg y\&\neg z) \vee$

$$\vee \underset{1,2}{(x\&y)} \vee \underset{2,3}{(x\&\neg z)} \vee \underset{2,4}{(y\&\neg z)} \vee \underset{3,5}{(\neg y\&\neg z)} \vee \underset{4,5}{(\neg x\&\neg z)} \vee \neg z \equiv$$

$$\equiv (\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{y}) \vee \neg \boldsymbol{z} - \text{сокращенная и минимальная ДНФ.}$$

Применим алгоритм нахождения сокращенной ДНФ. По закону обобщенного расщепления добавлены выделенные желтым конъюнкции, конъюнкции, содержащие, как часть $\neg z$ и $(x\&y)$ сократятся по закону поглощения.

Выделены строки таблицы, указывающие на то, что обе конъюнкции сокращенной ДНФ несократимые – $\neg z$ и $(x\&y)$ (одна 1 среди всех конъюнкций сокращенной ДНФ). И сокращенная ДНФ является минимальной.

Минимальная ДНФ – дизъюнкция всех или несколько простых конъюнкций функции $f(x_1, \dots, x_n)$, т.е. конъюнкций из сокращенной ДНФ $F_2 = C_1 \vee \dots \vee C_k$. В минимальную ДНФ обязательно входят несократимые конъюнкции.

Пример 3.

Рассмотрим функцию, заданную таблицей.

x	y	z	$f(x,y,z)$	СДНФ	$x\&y$	$y\&z$	$x\&\neg z$	$\neg x\&z$	Простые конъюнк.
1	1	1	1*	$x\&y\&z$	1	1	0	0	2
1	1	0	1*	$x\&y\&\neg z$	1	0	1	0	2
1	0	1	0		0	0	0	0	
1	0	0	1*	$x\&\neg y\&\neg z$	0	0	1	0	1-несокр
0	1	1	1*	$\neg x\&y\&z$	0	1	0	1	
0	1	0	0		0	0	0	0	
0	0	1	1*	$\neg x\&\neg y\&z$	0	0	0	1	1-несокр
0	0	0	0		0	0	0	0	

СДНФ: $(x\&y\&z) \vee (x\&y\&\neg z) \vee (x\&\neg y\&\neg z) \vee (\neg x\&y\&z) \vee (\neg x\&\neg y\&z) \vee \underset{1,2}{(x\&y)} \vee$
$\vee \underset{1,4}{(y\&z)} \vee \underset{2,3}{(x\&\neg z)} \vee \underset{4,5}{(\neg x\&z)} \equiv (x\&y) \vee (y\&z) \vee (x\&\neg z) \vee (\neg x\&z)$ – сокращенная ДНФ.

Применим алгоритм нахождения сокращенной ДНФ. По закону обобщенного расщепления добавлены выделенные желтым конъюнкции, конъюнкции СДНФ сократятся по закону поглощения.

Выделены строки таблицы, указывающие на несократимые конъюнкции $(x\&\neg z)$ и $(\neg x\&z)$ (одна 1 среди всех конъюнкций сокращенной ДНФ).

Для того, чтобы получить min ДНФ, добавим к несократимым конъюнкциям перебором еще конъюнкцию. min ДНФ должна выражать функцию. Получим две минимальных ДНФ.

min ДНФ: $(x\&\neg z) \vee (\neg x\&z) \vee (x\&y)$ и

$(x\&\neg z) \vee (\neg x\&z) \vee (y\&z)$.

Нахождение min ДНФ через таблицу Карно

Приведем алгоритм построения минимальной ДНФ с помощью таблицы Карно и продемонстрируем работу алгоритма на примере (пример 3).

1. Строим всевозможные элементарные конъюнкции переменных, входящих в функцию и их отрицаний в виде таблицы. В последнем столбце – значения функции.

							$f(x,y,z)$
x	y	z	xy	xz	yz	xyz	1
x	y	$\bar{z}$	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	1
x	$\bar{y}$	z	$x\bar{y}$	xz	$\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	0
x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	1
$\bar{x}$	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$	1
$\bar{x}$	y	$\bar{z}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	0
$\bar{x}$	$\bar{y}$	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	1
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0

2. Вычеркиваем строки, которые соответствуют нулевым значениям функции.

							$f(x,y,z)$
x	y	z	xy	xz	yz	xyz	1
x	y	$\bar{z}$	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	1
x	$\bar{y}$	z	$x\bar{y}$	xz	$\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	0
x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	1
$\bar{x}$	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$	1
$\bar{x}$	y	$\bar{z}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	0
$\bar{x}$	$\bar{y}$	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	1
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0

3. В каждом столбце вычеркиваем те конъюнкции, которые были вычеркнуты в предыдущем пункте.

							$f(x,y,z)$
x	y	z	xy	xz	yz	xyz	1
x	y	$\bar{z}$	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	1
x	$\bar{y}$	z	$x\bar{y}$	xz	$\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	0
x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	1
$\bar{x}$	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$	1
$\bar{x}$	y	$\bar{z}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	0
$\bar{x}$	$\bar{y}$	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	1
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0

4. В каждой строке оставляем конъюнкции наименьшей длины, остальные вычеркиваем.

							$f(x,y,z)$
x	y	z	xy	xz	yz	xyz	1
x	y	$\bar{z}$	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$	1
x	$\bar{y}$	z	$x\bar{y}$	xz	$\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	0
x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	1
$\bar{x}$	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$	1
$\bar{x}$	y	$\bar{z}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	0
$\bar{x}$	$\bar{y}$	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	1
$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	0

5. Выписываем ДНФ следующим образом: из каждой не вычеркнутой полностью строки берем хотя бы одну конъюнкцию. Из построенных ДНФ выбираем минимальные.

Например, из 1-й возьмем xy, из 2-й – $x\bar{z}$, из 4-й – $x\bar{z}$ (уже брали), из 5-й – yz, из 7-й – $\bar{x}z$. Получается ДНФ

$$xy \vee x\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}z -$$

очевидно, не минимальная. Перебираем далее все возможные варианты…

Замечание. Для уменьшения перебора, аналогично первому способу, выбираем из строк в первую очередь несократимые конъюнкции (которые остались только по одной в строке).

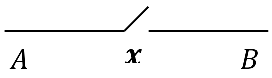
min ДНФ: $(\boldsymbol{x}\&\neg\boldsymbol{z}) \vee (\neg\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{z}) \vee (\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{y})$ и

$$(\boldsymbol{x}\&\neg\boldsymbol{z}) \vee (\neg\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{z}) \vee (\boldsymbol{y}\&\boldsymbol{z}).$$

(Результат совпал с примером 3.)

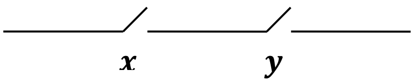
Контактные (переключательные) схемы

Рассмотрим проводник, снабженный ключом. Состояние проводника описывает булева переменная $\boldsymbol{x}$. Если ключ замкнут, то по проводнику идет ток, и в этом случае $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$. Если ключ разомкнут, то ток не идет и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

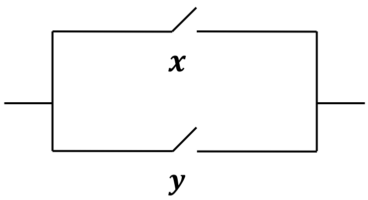


$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} 1, \textit{ток идёт} \\ 0, \textit{ток не идет} \end{cases}$$

Функции конъюнкция и дизъюнкция реализуют следующие схемы:



$x\&y$

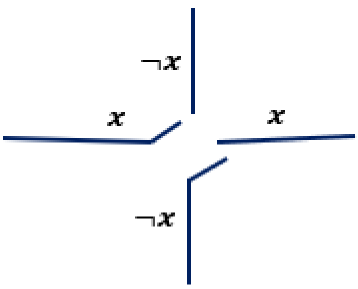


$x \vee y$

Операции конъюнкция соответствует последовательное соединение проводников; операции дизъюнкция – параллельное.

Для того чтобы реализовать любую булеву функцию система должна быть полной. Например, $\{\neg, \&, \vee\}$.

При реализации схемы операция отрицание определяется наличием переключателя: два проводника x и $\neg x$ должны располагаться так, чтобы если по одному из них идет ток, то по другому проводнику ток не идет.



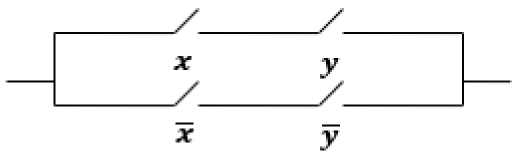
Реализация переключателя (функция ¬)

Рассмотрим булеву функцию $f(x, y) = x \sim y = (x \& y) \vee (\neg x \& \neg y)$

x	y	$x \sim y$	СДНФ
1	1	1	$x \& y$
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	$\neg x \& \neg y$

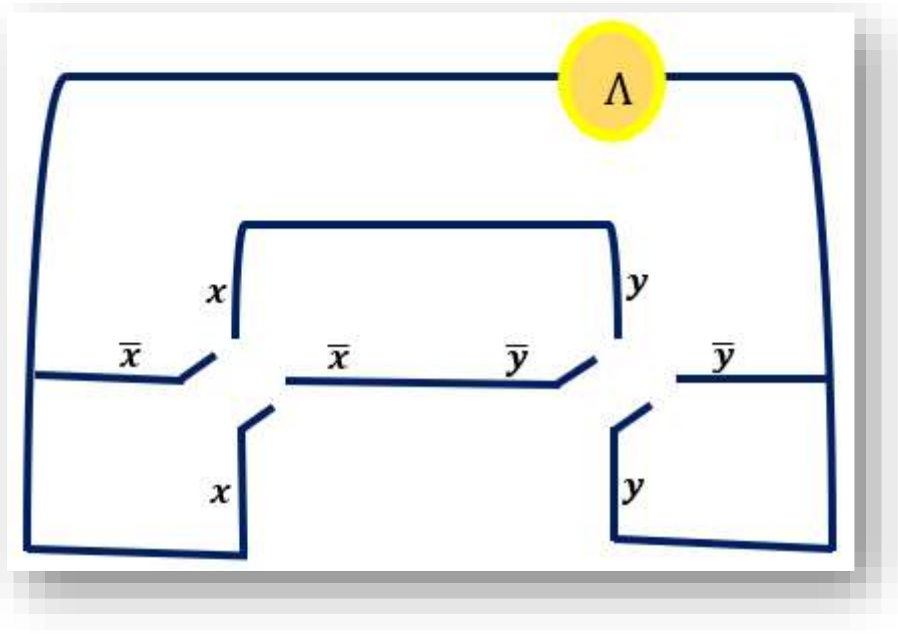
По функции находим СДНФ, а затем min ДНФ. В данном случае СДНФ является и минимальной ДНФ.

Контактная схема, соответствующая данной функции, имеет вид:



Необходимо различать контактную схему и её реализацию. Реализация данной схемы выглядит следующим образом.

Лампочка зажигается, если замкнуть два ключа по проводникам x и y или два ключа по проводникам $\neg x$ и $\neg y$.



https://xn--c1akah3c.xn--p1acf/uploads/posts/2018-04/1522741294_51-gifka-lampochka-migaet.gif

Пример 4. Изобразить контактную схему, реализующую голосование по правилу большинства для трёх выборщиков. Составим таблицу функции.

x	y	z	$f(x,y,z)$	СДНФ
1	1	1	1*	$x\&y\&z$
1	1	0	1*	$x\&y\&\neg z$
1	0	1	1*	$x\&\neg y\&z$
1	0	0	0	
0	1	1	1*	$\neg x\&y\&z$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

СДНФ:$(x\&y\&z) \vee (x\&y\&\neg z) \vee (x\&\neg y\&z) \vee (\neg x\&y\&z) \vee \underset{1,2}{(x\&y)} \vee \underset{1,3}{(x\&z)} \vee \underset{1,4}{(y\&z)} \equiv$

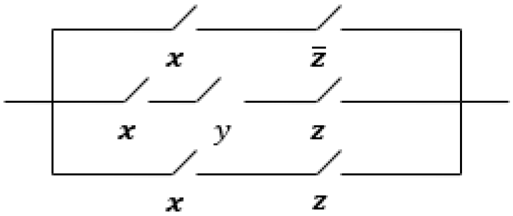
$\equiv (x\&y) \vee (x\&z) \vee (y\&z)$ −сокращенная ДНФ

x	y	z	$f(x,y,z)$	$x\&y$	$x\&z$	$y\&z$
1	1	1	1*	1	1	1
1	1	0	1*	1	0	0
1	0	1	1*	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1*	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

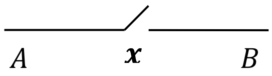
Все дизъюнкции несократимые и, следовательно, сокращенная ДНФ является *min ДНФ:*

$F \equiv (x\&y) \vee (x\&z) \vee (y\&z)$ −минимальная ДНФ.

Пример 5. Упростить контактную схему.



$$(x\&\bar{z}) \vee (x\&y\&z) \vee (x\&z) \equiv x \vee (x\&y\&z) \equiv x$$



Пример 6 (для примера 3).

Контактная схема, соответствующая *min ДНФ:* $(\boldsymbol{x}\&\neg\boldsymbol{z}) \vee (\neg\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{z}) \vee (\boldsymbol{x}\&\boldsymbol{y})$ из примера 3 имеет вид: