Лекция 4

Транспортные сети

Определение 1. Транспортной сетью называется орграф $G =< V, X >$ с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ для которого выполняется:

1) $\exists$ единственная вершина v_1 (источник): $\Gamma^{-1}v_1 = \emptyset$;

2) $\exists$ единственная вершина v_n (сток): $\Gamma v_n = \emptyset$;

3) для каждой дуги $< v_i, v_j > \in \Gamma$ задана пропускная способность $c\left(v_i, v_j\right) = c_{ij} \geq 0$.

Определение 2. Функцией потока (потоком в транспортной сети G) называется функция $\varphi: X \to R^+ \cup \{0\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для каждой дуги $< v_i, v_j > \in \Gamma$ выполняется $0 \leq \varphi\left(v_i, v_j\right) \leq c_{ij}\ \ \forall i, j = 1, \dots, n$;

2) для любой промежуточной вершины u:

$$\sum_{v \in \Gamma^{-1}\mathrm{u}} \varphi(v, \mathrm{u}) = \sum_{v \in \Gamma \mathrm{u}} \varphi(\mathrm{u}, v)$$

Величина потока равна сумме потоков по всем дугам, входящим в сток:

$$\Phi = \sum_{v \in \Gamma^{-1} v_n} \varphi(v, v_n).$$

Эта величина также равна сумме потоков по всем дугам, исходящим из источника:

$$\Phi = \sum_{v \in \Gamma v_1} \varphi(v_1, v).$$

Дуга называется насыщенной, если значение функции потока по ней равно пропускной способности.

Пример 1. На рис.1 представлена транспортная сеть.

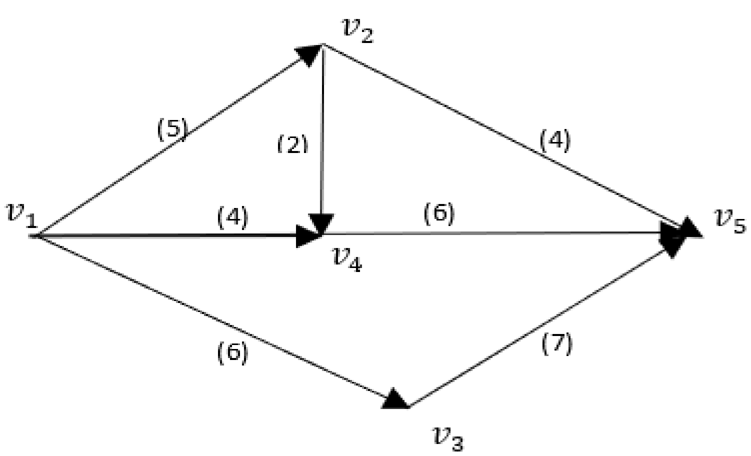

Рис.1

На рис.2 приведен пример функции потока по данной транспортной сети. Легко убедиться, что все условия определения 2 удовлетворяются.

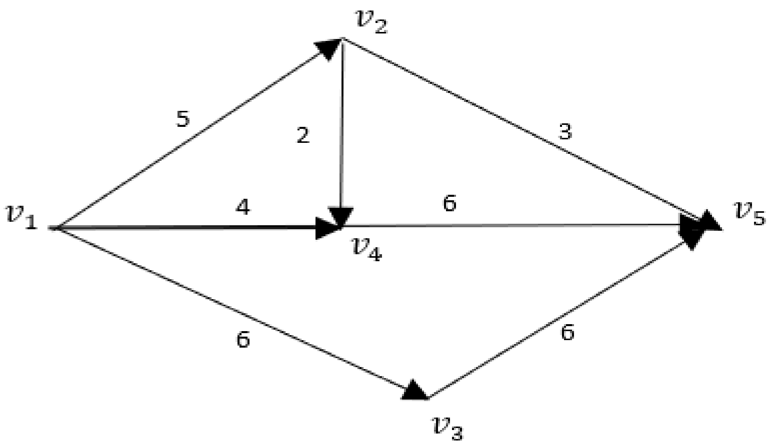

Рис.2

Дуги $< v_1, v_2 >, < v_1, v_4 >, < v_1, v_6 >, < v_2, v_4 >, < v_4, v_5 >$ – насыщенные.

Величина потока $\Phi = 15$.

Определение 3. Поток называется полным, если любой путь из источника в сток содержит хотя бы одну насыщенную дугу.

Определение 4. Поток называется максимальным, если значение величины потока наибольшее по сравнению со всеми потоками в данной транспортной сети.

Обычно полный поток ищут как приближение к максимальному, в частном случае они могут совпасть. Полный поток используется как начальный для построения максимального.

Алгоритм построения полного потока

0. Выбираем нулевой поток в качестве начального $\varphi_{ij} = 0 \quad \forall < v_i, v_j > \in \Gamma$.
1. Проверяем, является ли построенный поток полным, т.е. существует ли путь из v_1 в v_n, не содержащий насыщенных дуг. Если такого пути нет, полный поток построен, если есть, переходим к п.2.
2. Вдоль пути, не содержащего насыщенных дуг, увеличиваем поток на одну и ту же величину до тех пор, пока хотя бы одна дуга не станет насыщенной. Переходим к п.1.

Пример 2. Найти полный поток по транспортной сети, представленной на рис.3.

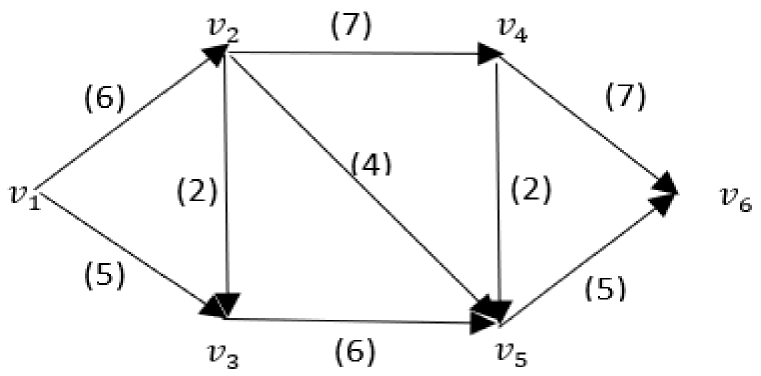

Рис.3

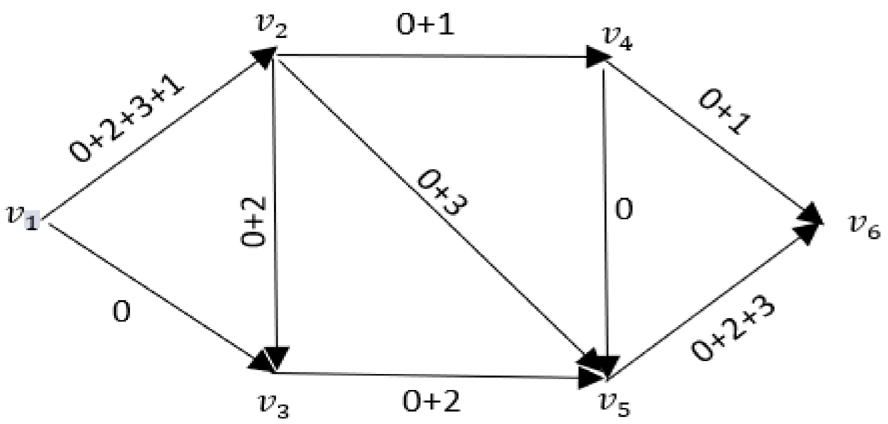

Рис.4

Построение полного потока

Ищем пути, не содержащие насыщенных дуг, и выбираем величину, на которую можно увеличить значения функции потока вдоль этих путей **(рис. 4).**

В качестве начального выбираем нулевой поток.

1. $v_1 - v_2 - v_3 - v_5 - v_6$

   min {6, 2, 6, 5} = 2;

2. $v_1 - v_2 - v_5 - v_6$

   min {(6-2), (4), (5-2)} = 3;

3. $v_1 - v_2 - v_4 - v_6$

   min {(6-5), (7), (7)} = 1.

Величина полного потока $\Phi_{\text{пол}} = 1 + 5 = 6$

Построение максимального потока

Для построения максимального потока введем понятие увеличивающей цепи.

Определение 5. Увеличивающей цепью называется последовательность вершин транспортной сети из v_1 в v_n:

$$v_1 = \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_k = v_n \,, \qquad (*)$$

где $< \mathrm{u}_j, \mathrm{u}_{(j+1)} > \in \Gamma$, либо $< \mathrm{u}_{(j+1)}, \mathrm{u}_j > \in \Gamma$ $(< \mathrm{u}_j, \mathrm{u}_{(j+1)} > \in \Gamma^{-1})$, причем для каждой пары вершин цепи $< \mathrm{u}_j, \mathrm{u}_{(j+1)} >$ определена положительная величина

$$\triangle_{j(j+1)} = \begin{cases} c_{j(j+1)} - \varphi_{j(j+1)}, & \text{если } < \mathrm{u}_j, \mathrm{u}_{(j+1)} > \in \Gamma \\ \varphi_{(j+1)j}, & \text{если } < \mathrm{u}_{(j+1)}, \mathrm{u}_j > \in \Gamma \text{ и } \varphi_{(j+1)j} > 0 \end{cases}$$

Для увеличивающей цепи найдем величину

$$\triangle = \min_{j=1,\dots,k-1} \triangle_{j(j+1)}$$

Алгоритм поиска максимального потока в транспортной сети

0. Выбираем полный поток в качестве начального (можно любой, например нулевой).
1. Проверяем, является ли построенный поток максимальным, т.е. существует ли увеличивающая цепь из v_1 в v_n. Если такой цепи нет, максимальный поток построен, иначе переходим к п.2.
2. Вдоль увеличивающей цепи изменяем поток на величину $\triangle$, причем если идем по дуге, то увеличиваем на $\triangle$, если против направления дуги уменьшаем на $\triangle$. Переходим к п.1.

Пример 3. Найти максимальный поток по транспортной сети, представленной на рис.3.

Возьмём в качестве начального полный поток, построенный в примере 2 (рис. 5).

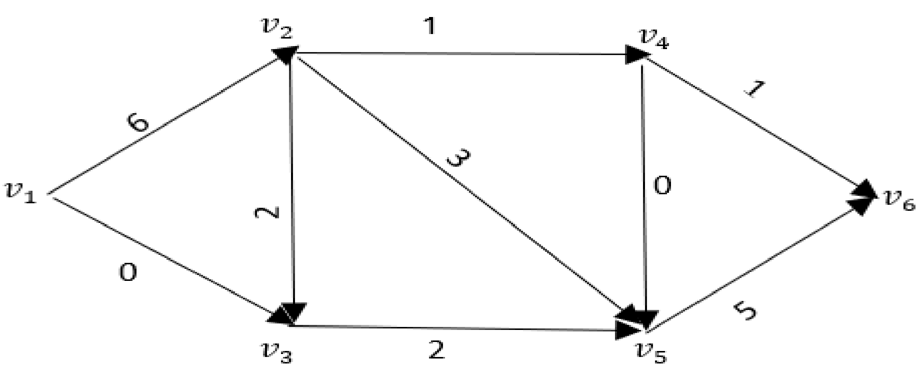

Рис. 5

Построение максимального потока

Найдем увеличивающие цепи и величины, на которые можно изменить значения функции потока вдоль этой цепи **(рис. 6).**

1. $v_1 - v_3 - v_2 - v_4 - v_6$

Δ_1 = min {5_+, 2_- , 6_+, 6_+} = 2;

(Индексы «+» и «-» показывают, увеличивается или уменьшается значение функции потока по соответствующей дуге)

2. $v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_4 - v_6$

Δ_2= min {$(5\text{-}2)_+$, $(6\text{-}2)_+$, 3_- , $(7\text{-}3)_+$, $(7\text{-}3)_+$} = 3;

Больше цепей нет. $\boldsymbol{\Phi}_{\text{макс}} = \mathbf{6 + 5 = 6 + 5 = 11}$

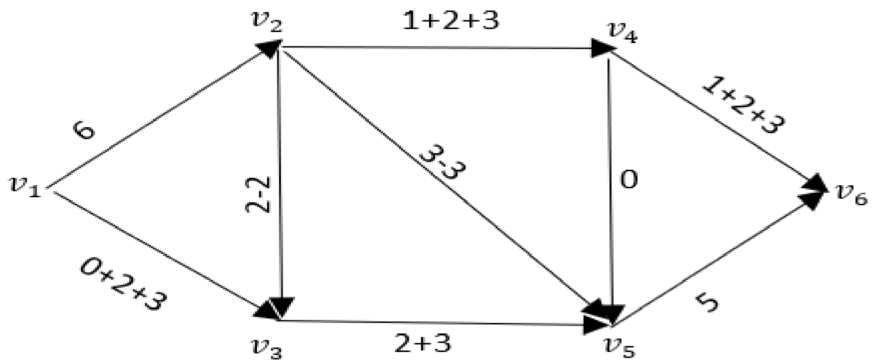

Рис. 6

Величина полного потока может совпадать с величиной максимального потока.

Пример 3. Построим полный поток по транспортной сети, представленной на рис. 3, так, чтобы его величина совпала с величиной максимального потока.

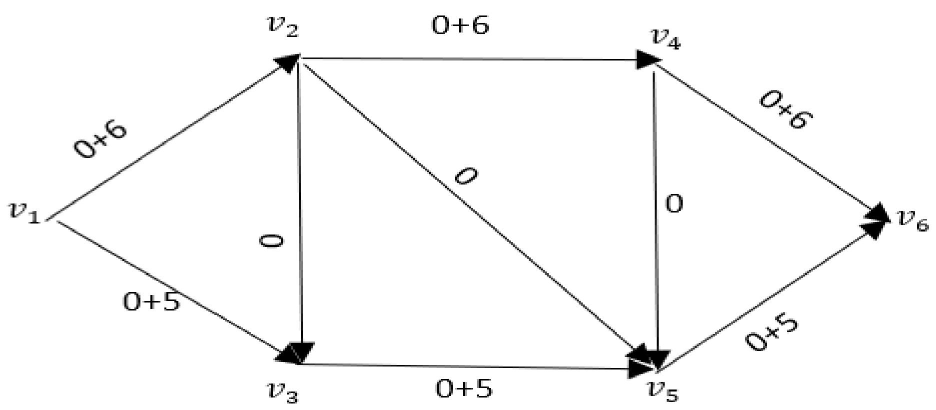

Рис. 7

Ищем пути из источника в сток, не содержащие насыщенных дуг (рис. 7).

1. $v_1 - v_2 - v_4 - v_6$

   min {6, 7, 7} = 6;

2. $v_1 - v_3 - v_5 - v_6$

   min {5, 6, 5} = 5;

$$\boldsymbol{\Phi}\text{полн} = \boldsymbol{\Phi}\text{макс} = \mathbf{11}$$

Задача о портовых перевозках

Классическая задача транспортной сети

Имеются портовые города $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с запасом некоторого товара $d_1, d_2, \ldots, d_k$, и города $b_1, b_2, \ldots, b_m$ с потребностью в этом товаре $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Из города a_i в b_j можно провести не более c_{ij} товара $(i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m)$.

Как максимально обеспечить товаром города b_1, …, b_m ?

Для решения логистической задачи построим транспортную сеть с вершинами $\{a_1, a, \ldots, a_k, b_1, b, \ldots, b_m, v_1, \ v_2\}$, где v_1 – источник, v_2 – сток. Найдем максимальный поток по транспортной сети. Его значения по дугам соответствуют количеству перевозимого товара (рис. 8).

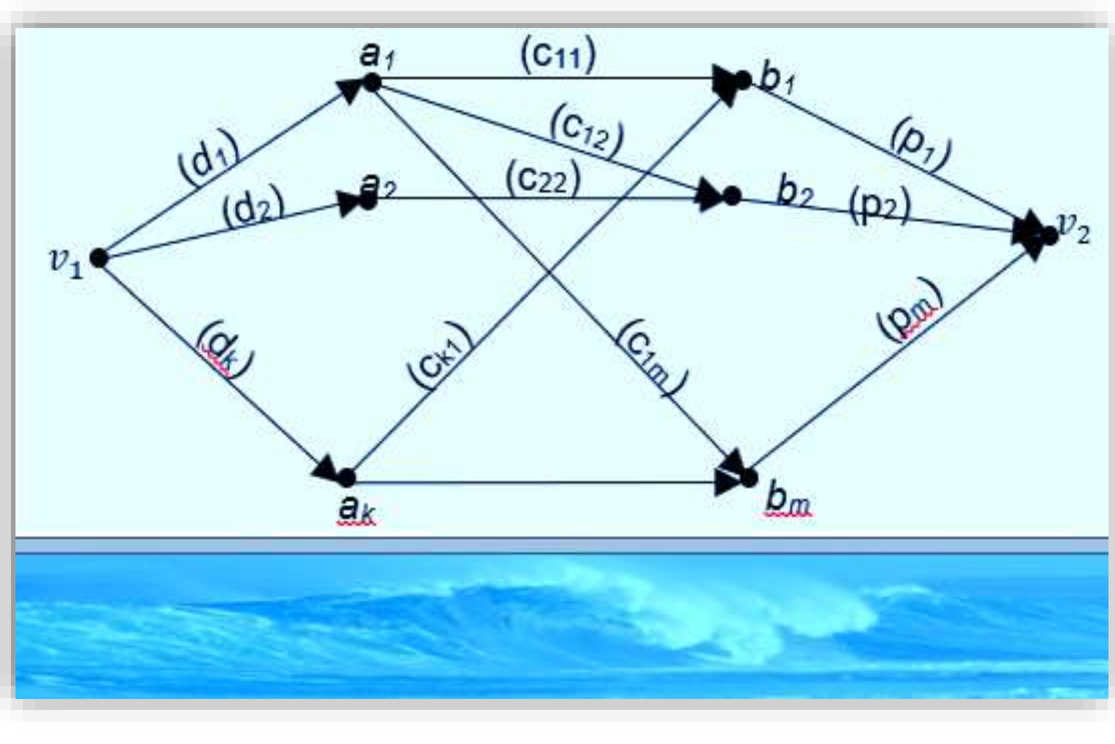

Рис. 8

Двудольный граф. Паросочетания.

Определение 6. Двудольным графом называется неориентированный граф

$G =< U \cup W, Q >$ с множеством вершин $U \cup W$ и множеством ребер Q, причем ребро $(u, w) \in Q \Leftrightarrow \ u \in U, w \in W$.

На рис. 9 приведен пример двудольного графа.

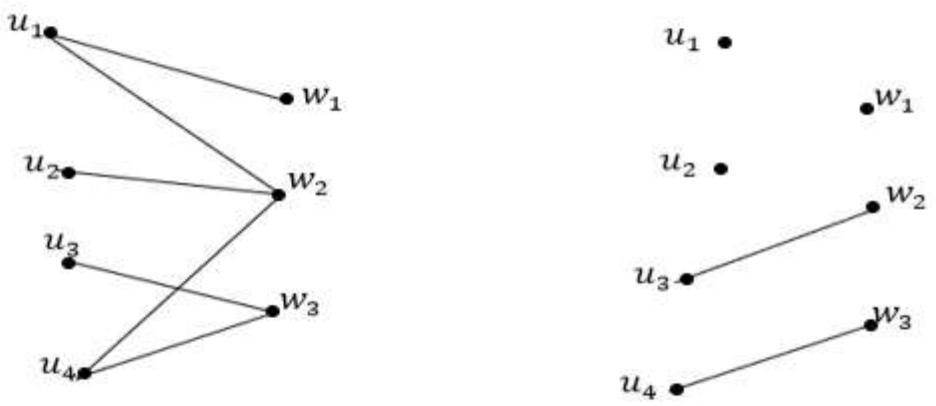

Рис. 9

Определение 7. Паросочетание – подмножество рёбер двудольного графа такое, что никакие два ребра не инцидентны одной вершине графа.

Определение 8. Максимальное паросочетание – паросочетание с наибольшим числом ребер среди всех паросочетаний в данном графе.

Алгоритм нахождения максимального паросочетания

Для нахождения максимального паросочетания построим максимальный поток в следующей транспортной сети.

Транспортная сеть: $G_{\text{тр}} =< V, \Gamma >$, где $V = \{v_1, v_2\} \cup U \cup W$, $\Gamma = \{< u_i, w_j >$, если $(u_i, w_j) \in Q\} \cup \{< v_1, u_i >\} \cup \{< w_j, v_2 >\}$ для всех $u_i \in U, w_j \in W$. Пропускные способности всех дуг положим равными единице (Рис. 10).

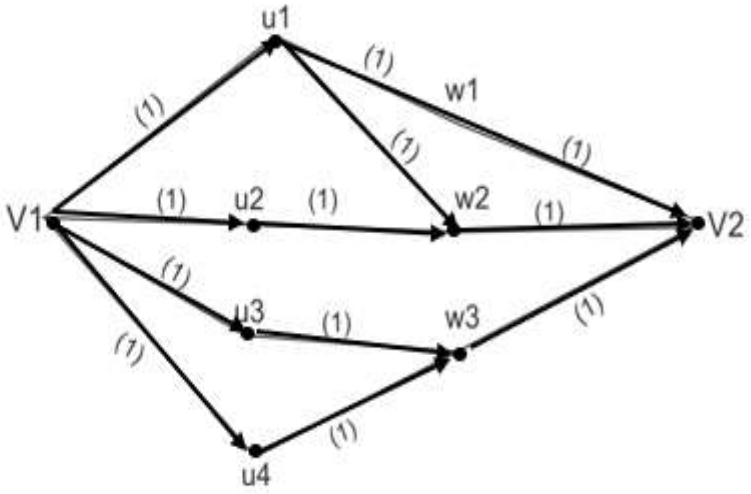

Рис. 10

Построим максимальный поток. Рёбра графа $G =< U \cup W, Q >$, соответствующие дугам с функцией потока равной единицам, входят в максимальное паросочетание.

Число ребер в максимальном паросочетании равно трем и равно величине максимального потока, но находится оно неоднозначно, например для графа, представленного на рисунках 9 и 10, получим два варианта максимального паросочетания.

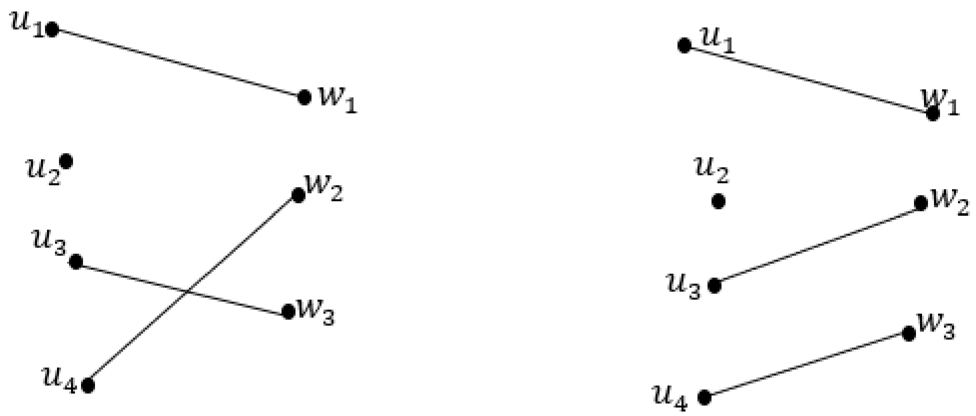

Рис. 11