Лекция 13

Логика предикатов

Приведенная нормальная форма (ПНФ) формул логики предикатов

Определение 1. Формула логики предикатов находится в приведенной форме если:

1) в ней только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания;
2) все отрицания стоят перед предикатными символами (с тесными отрицаниями).

Определение 2. Формула логики предикатов находится в приведенной нормальной форме если:

1) она находится в приведенной форме;
2) кванторы либо отсутствуют, либо вынесены перед формулой так, что каждая переменная находится под действием всех кванторов.

Например, $\rceil(\forall\, x)\ A(x) \supset B$ – не в приведенной форме;

$(\forall\, x)\ \rceil A(x)\ \&\ B$ – в приведенной, но не в нормальной форме;

$(\forall\, x)\ (\exists\, y)\ (A(x,y) \vee \rceil B(x,y))$ – в ПНФ.

Алгоритм построения ПНФ

(следует из определения)

1. Избавляемся от $\supset$, $\sim$, $+$ по формулам:

   $A \supset B = \rceil A \vee B,$

   $A \sim B = (A\ \&\ B) \vee (\rceil A\ \&\ \rceil B),$

   $A + B = (\rceil A \vee \rceil B)\ \&\ (A \vee B).$

2. Приводим к формуле с тесными отрицаниями, используя:

   Законы де Моргана

   $\rceil(A \vee B) = \rceil A\ \&\ \rceil B,$ $\qquad$ $\rceil(A\ \&\ B) = \rceil A \vee \rceil B$

   И тождества 1 – Перенос $\rceil$ через квантор.

3. Выносим кванторы за скобку тождества 2,3,4 (из основных тождеств ЛП).

Замечания.

1. Если кванторов в формуле несколько, то выносим крайний левый с учетом тождеств 4.

2. Если тождества 3 применить нельзя, то делаем замену по правилу 5, а затем применим тождества 2.

Обоснование алгоритма.

Теорема 1. Для любой формулы логики предикатов существует равносильная ей формула, находящаяся в ПНФ.

Доказательство:

I часть. Найдем приведенную форму $\widetilde{F}$ формулы F: $\widetilde{F} \equiv F$.

1. Найдем равносильную формулу, содержащую только операции $\{\&, \vee, \rceil\}$
   $A \supset B = \rceil A \vee B$,
   $A \sim B = (A \,\&\, B) \vee (\rceil A \,\&\, \rceil B)$,
   $A + B = (\rceil A \vee \rceil B) \,\&\, (A \vee B)$
2. Приведем полученную формулу к виду с тесными отрицаниями: $\rceil$ перед предикатными символами.

Докажем, что это возможно, при этом свободные и связанные переменные F не изменятся.

Докажем индукцией по k (число логических символов формулы F: $\&, \vee, \rceil \forall, \exists$)

1) $n = 0$ – атомарная формула $\rightarrow A(x_1, \dots, x_n)$ не содержит логических символов $\Rightarrow$ верно

2) Предположим, что для числа логических символов $< k -$ верно.

3) Доказательство для k логических символов.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\boldsymbol{F \doteqdot A \vee B}$

2. $\boldsymbol{F \doteqdot A \,\&\, B}$

3. $\boldsymbol{F \doteqdot \rceil A}$

4. $\boldsymbol{F \doteqdot (\forall x)(A(x))}$

5. $\boldsymbol{F \doteqdot (\exists x)(A(x))}$

По предположению индукции, можно привести формулы в пунктах 1, 2, 4, 5 к формулам с тесными отрицаниями (у формул A и B логических символов $< k$).

Рассмотрим случай 3. $\boldsymbol{F \doteqdot \rceil A}$

3.1. $A \doteqdot B \vee C$. $F \doteqdot \rceil A = \rceil(B \vee C) = \rceil B \,\&\, \rceil C = \tilde{B} \& \tilde{C}$ – с тесными отрицаниями по предположению индукции.

3.2. $A \doteqdot B \,\&\, C$. $F \doteqdot \rceil A = \rceil(B \,\&\, C) = \rceil B \vee \rceil C = \tilde{B} \vee \tilde{C}$ – аналогично.

3.3. $A \doteqdot \rceil B \quad \Rightarrow \quad F \doteqdot \rceil A = \rceil(\rceil B) = B$

3.4. $A \doteqdot (\forall x) B(x) \quad \Rightarrow \quad F \doteqdot \rceil A = \rceil(\forall x) B(x) = (\exists x) \rceil B(x) = (\exists x) \tilde{B}(x)$ – с тесными $\rceil$

3.5. $A \doteqdot (\exists x) B(x) \quad \Rightarrow \quad F \doteqdot \rceil A = \rceil(\exists x) B(x) = (\forall x) \rceil B(x) = (\forall x) \tilde{B}(x)$ – с тесными $\rceil$

II часть. Для приведенной формулы $\widetilde{F}$, существует формула $\widetilde{\widetilde{F}}$ в ПНФ (все кванторы, если они есть, впереди формулы) $\widetilde{\widetilde{F}} \equiv \widetilde{F}$.

Докажем индукцией по числу логических символов k:

1) $k = 0$. $A(x_1, \ldots, x_n)$ – атомарная формула, кванторов нет.

2) Предположим, что для числа логических символов $< k -$ верно.

3) Докажем для k логических символов.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\widetilde{F} \eqcirc A \vee B$

2. $\widetilde{F} \eqcirc A \,\&\, B$

3. $\widetilde{F} \eqcirc \urcorner A$

4. $\widetilde{F} \eqcirc (\forall\, x)(A(x))$

5. $\widetilde{F} \eqcirc (\exists\, x)(A(x))$

1. Пусть $\widetilde{F} \eqcirc A \vee B$

1.1. $A \eqcirc (\forall\, x)C(x)$, B не зависит от x

$\tilde{F} \eqcirc A \vee B = (\forall\, x)C(x) \vee B = (\forall\, x)(C(x) \vee B)$ – тождество (2.1).

1.2. $A \eqcirc (\exists\, x)C(x)$, B не зависит от x – аналогично 1.1.

1.3. $B \eqcirc (\forall\, x)D(x)$, A не зависит от x – аналогично 1.1.

1.4. $B \eqcirc (\exists\, x)D(x)$, A не зависит от x – аналогично 1.1.

1.5. $A \eqcirc (\forall\, x)C(x)$, $B \eqcirc (\forall\, x)D(x)$

$\tilde{F} \eqcirc A \vee B = (\forall\, x)C(x) \vee (\forall\, x)D(x) \equiv (\forall\, x)C(x) \vee (\forall\, y)D(y) \equiv$

Применили правило замены связной переменной под знаком квантора, тождество (5.1), и вынесли кванторы согласно тождеству (2.1).

$\equiv (\forall\, x)(C(x) \vee (\forall\, y)D(y)) \equiv (\forall\, x)(\forall\, y)(C(x) \vee D(y))$

1.6. $A \eqcirc (\exists\, x)\; C(x)$, $B \eqcirc (\exists\, x)\; D(x)$

$F \eqcirc A{\vee}B = (\exists\, x)\; C(x) \vee (\exists\, x)\; D(x) \equiv (\exists\, x)\; (\underbrace{C(x) \vee (Dx)}_{<k})$ – тождество (3.2).

1.7. $A \eqcirc (\exists\, x)\; C(x)$, $B \eqcirc (\forall\, x)\; D(x)$

$F \eqcirc A \vee B = (\exists\, x)\; C(x) \vee (\forall\, x)\; D(x) \equiv (\exists\, x)\; C(x) \vee (\forall\, y)\; D(y) \equiv$

$(\exists\, x)(\forall\, y)\big(C(x){\vee}D(y)\big)$ – аналогично 1.5.

1.8. $A \eqcirc (\forall\, x)\; C(x)$, $B \eqcirc (\exists\, x)\; D(x) -$ аналогично 1.5.

2. Пусть $\widetilde{F} = A \,\&\, B$

Аналогично п. 1, но, когда $A \risingdotseq (\forall\, x)\, C(x)$, $B \risingdotseq (\forall\, x)\, D(x)$, имеем

$F \risingdotseq A \,\&\, B = (\forall\, x)\, C(x) \& (\forall\, x)\, D(x) \equiv (\forall\, x)\, (C(x) \&\, D(x))$ по тождеству из 3.

$A \,\&\, B = (\exists\, x)\, C(x) \& (\exists\, x)\, D(x) \equiv (\exists\, x)\, C(x) \&\, (\exists y)\, D(y) \equiv$
$(\exists\, x)\, (\exists\, y)(C(x) \& D(y))$ – замена переменной, затем тождество (2.4).

3. $\quad \widetilde{F} = \rceil A$ **– с тесными отрицаниями (кванторов нет).**

4. $\quad \widetilde{F} = (\forall\, x)\, A(x)$

5. $\quad \widetilde{F} = (\exists\, x)\, A(x)$

В 4 и 5 квантор находится в начале формулы, а в $A(x)$ вынесем кванторы по предположению индукции.

Примеры приведения формулы к ПНФ

Пример 1.

$$(\forall\, x)\, (\forall\, y)\, A_1(x,y) \supset (\exists\, x)(\forall\, y)\, A_2(x,y) \equiv \rceil(\forall\, x)\, (\forall\, y)\, A_1(x,y) \vee (\exists\, x)(\forall\, y)\, A_2(x,y) \equiv$$

Вносим отрицание по тождеству (1.1).

$$\equiv (\exists\, x)(\exists\, y)\rceil\, A_1(x,y) \vee (\exists\, x)(\forall\, y)\, A_2(x,y) \equiv (\exists\, x)\big((\exists\, y)\rceil\, A_1(x,y) \vee (\forall\, y)\, A_2(x,y)\big) \equiv$$

Выносим $(\exists\, x)$ по тождеству (3.2). Затем замена переменной по тождеству (5.1).

$$\equiv (\exists\, x)\big((\exists\, y)\rceil\, A_1(x,y) \vee (\forall\, z)\, A_2(x,z)\big) \equiv (\exists\, x)(\exists\, y)(\forall\, z)(\rceil\, A_1(x,y) \vee A_2(x,z))$$

Применили тождества (2.2) и (2.1).

Пример 2.

$$(\exists\, x)\, (\exists\, y)\, A_1(x,y) \vee (\forall\, y)(\exists\, x)\, A_2(x,y) \equiv$$

Выносить можно, только крайние левые кванторы и разноименные кванторы переставлять нельзя, одноименные можно. Переставили одноименные кванторы и

$$\equiv (\exists\, y)(\exists\, x)\;\, A_1(x,y) \vee (\forall\, y)(\exists\, x)\, A_2(x,y) \equiv$$

Сделали замену переменной по тождеству (5.1)

$$\equiv (\exists\, y)(\exists\, x)\;\, A_1(x,y) \vee (\forall\, z)(\exists\, x)\, A_2(x,z) \equiv$$

Выносим $(\forall\, z)$ по тождеству (2.1).

$$\equiv (\forall\, z)\, ((\exists\, y)(\exists\, x)\;\, A_1(x,y) \vee (\exists\, x)\, A_2(x,z)) \equiv$$

Выносим $(\exists\, y)$ по тождеству (2.2).

$$\equiv (\forall\, z)\, (\exists\, y)\big((\exists\, x)\, A_1(x,y) \vee (\exists\, x) A_2(x,z)\big) \equiv$$

Выносим $(\exists\, x)$ по тождеству (3.2).

$$\equiv (\forall\, z)(\exists\, y)\, (\exists\, x)\;\, (A_1(x,y) \vee A_2(x,z))$$

Пример 3.

$(\forall\, x)\ (\exists\, y)\ A_1(x,y)\ \&\ (\exists\, x)(\forall\, y)\ A_2(x,y) \equiv (\forall\, x)\ (\exists\, y)\ \ A_1(x,y)\ \&\ (\exists\, z)(\forall\, y)\ A_2(z,y) \equiv$

Сделали замену переменной по тождеству (5.2). Затем выносим $(\exists z\,)$ по тождеству (2.4).

$\equiv\ (\exists\, z)\ ((\forall\, x)\ (\exists\, y)\ A_1(x,y)\ \&\ (\forall\, x)\ A_2(z,x)) \equiv (\exists\, z)\ (\forall\, x)\ ((\exists\, y)\ A_1(x,y)\ \&\ \ A_2(z,x)) \equiv$

Выносим $(\forall\ \ x)$ по тождеству (3.1). Затем выносим $(\exists y\,)$ по тождеству (2.4).

$\equiv (\exists\, z)\ (\forall\, x)\ (\exists\, y)\ (A_1(x,y)\ \&\ \ A_2(z,x))$.

Двойная замена переменных проводится, чтобы оставить минимальное число переменных.

ПНФ формул логики предикатов используется для нахождения СКОЛЕМОВСКОЙ нормальной формы, которая вместе с правилами вывода в логическом программировании позволяет доказывать теоремы.

Общезначимость формул логики предикатов.

Определение 1. Формула F выполнима в интерпретации $I =< M,f >$, если существует оценка свободных переменных $< s_1 \dots s_n >$, на которой она принимает значение И.

$F|_{<s_1,\dots,s_n>} = И,\ s_i \in M\ ,\ i = \overline{1,n}$

Определение 2. Формула F выполнима в ЛП, если $\exists$ интерпретация и $\exists$ оценка свободных переменных $< s_1 \dots s_n >$, на которой она принимает значение И.

Определение 3. Формула F общезначима в ЛП, если в $\forall\, I =< M,f >$, на $\forall$ оценке свободных переменных $< s_1 \dots s_n >$ она принимает значение И.

Пример 1. Общезначимая формула (получена из тождества):

$$\neg(\forall\, x)A(x) \sim (\exists x)\ \neg A(x).$$

Не общезначимая формула:

$$A(y)\ \supset (\forall x)A(x)$$

Покажем это. Возьмем $I =< N,f >, f : A(x) =\ И\ \Leftrightarrow x -$ четное.

При $y = 4$ имеем:

$$A(4) \supset (\forall x)\ A(x)$$

$$И\ \supset Л = Л$$

Утверждение 1. Формула $(\forall x)\ A(x) \supset\ A(y)$ – общезначима.

Доказательство.

Свободные переменные формулы $(\forall x)\ A(x) \supset\ A(y)$: $< y, x_1 \dots x_n >$.

Предположим, что существуют интерпретация $I =< M, f >$ и оценка свободных переменных $< b, s_1, \dots, s_n >$, на которой формула принимает значение Ложь

$$(\forall x)\ A(x) \supset A(y)|_{<b,s_1,\dots,s_n>} = Л.$$

Тогда

$$\begin{cases}(\forall x)\ A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И \\ A(y)|_{<b,s_1,\dots,s_n>} = Л\end{cases}.$$

$(\forall x)\ A(x)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И \Longrightarrow \forall\ a \in M\colon\ A(a)|_{<s_1,\dots,s_n>} = И\ \Longrightarrow\ A(y)|_{<b,s_1,\dots,s_n>} = И, b \in M.$

Противоречие.

Утверждение 2. Формула_ $A(y) \supset\ (\exists x)\ A(x)$ – общезначима.

Докажем, что формула $A(y) \supset (\exists x)\ A(x)$ – общезначима, используя общезначимость формулы $(\forall x)\ A(x) \supset\ A(y)$. Подставим вместо $A(x) \rightarrow\ \neg A(x)$

$$(\forall x)\neg A(x) \supset \neg A(y) \equiv \neg(\forall x)\ \neg A(x) \vee \neg A(y) \equiv (\exists x)\ A(x) \vee \neg A(y) \equiv\ \underbrace{A(y) \supset (\exists x) A(x)}_{\text{общезначима}}.$$

Покажем, что формула $(\exists x) A(x) \supset A(y)$ не является общезначимой.

Возьмем $I =< N, f >, f\ \colon A(x) =\ И\ \Leftrightarrow x -$ четное.

При $x = 3$ имеем:

$$(\exists x) A(x) \supset A(3) =\ Л$$

$$И\ \supset Л = Л$$

Утверждение 3._Формула $(\exists x)(\forall y)\ A(x,y) \supset (\forall y)(\exists x) A(x,y)$ – общезначима.

Докажем общезначимость данной формулы. Предположим, что существуют интерпретация $I =< M, f >$ и оценка свободных переменных $< s_1 \dots s_n >$, на которой формула принимает значение Ложь.

$$\underbrace{\underbrace{(\exists x)(\forall y)\ A(x,y)}_{И}\ \supset \underbrace{(\forall y)(\exists x) A(x,y)}_{Л}}_{Л}$$

Запишем системой

$$\begin{cases}(\exists x)(\forall y)\ A(x,y)|_{<s_1 \dots s_n>} = И \\ (\forall y)(\exists x) A(x,y)|_{<s_1 \dots s_n>} = Л\end{cases}$$

Возьмем отрицание от второго выражения, получим

$$\begin{cases} (\exists x)(\forall y)\,A(x,y)|_{<s_1 \dots s_n>} = \text{И} \\ (\exists y)(\forall x)\neg A(x,y)|_{<s_1 \dots s_n>} = \text{И}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x = a \in M: (\forall y)\,A(a,y)|_{<s_1 \dots s_n>} = \text{И} \\ \exists y = b \in M: (\forall x)\neg A(x,b)|_{<s_1 \dots s_n>} = \text{И}. \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \begin{cases} (\forall y) \Rightarrow \text{и для } y = b:\ A(a,b)|_{<s_1 \dots s_n>} = \text{И} \\ (\forall x) \Rightarrow \text{и для } x = a:\ \neg A(a,b)|_{<s_1 \dots s_n>} = \text{И} \end{cases} \Rightarrow \text{противоречие.}$$

Следовательно, не существует интерпретации и оценки свободных переменных, на которой формула принимает значение Ложь. Формула общезначима.

Правильные рассуждения в логике предикатов

Напомню, что рассуждение называется правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. всякий раз, когда все посылки истинны, заключение тоже истинно.

$$\frac{P_1,\ P_2, \dots, P_k}{D}.$$

Для проверки правильности рассуждений проверяем тождественную истинность (общезначимость) формулы

$$(P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k) \supset D$$

Заметим, что, если рассуждение правильное и все посылки истинны, то тогда можно сделать вывод: заключение тоже истинно.

Алгоритм проверки текста на правильность рассуждения в ЛП

1. Разбиваем текст на элементарные высказывания. Выбираем интерпретацию, в которой записываем элементарные высказывания.
2. Из каждого предложения составляем формулу-посылку.
3. Составляем формулу – конъюнкция посылок влечет заключение.
4. Проверяем формулу на общезначимость. Если формула общезначима, то рассуждение правильное.

Пример 2. Проверить правильность рассуждения.

В частично упорядоченном множестве любой наименьший элемент является минимальным.

1. Выбираем интерпретацию $I =< M, f >$, где $M -$ частично упорядоченное множество; $f: Q(x,y) \to x \preccurlyeq y$ (отношение частичного порядка).
2. Составляем формулы посылок и заключения

Наименьший элемент x: $(\forall y)\ Q(x,y)$

Минимальный элемент x: $(\exists y)(Q(y,x) \supset (Q(x,y) \& Q(y,x)))$.

$Q(x,y) \& Q(y,x)$ из антисимметричности $x = y$

Запишем рассуждение формулой ЛП.

$$(\forall \boldsymbol{x})\left[(\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \supset (\exists \boldsymbol{y})\left(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \supset \left(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right)\right)\right]$$

Проверим формулу на общезначимость. Предположим, что существует интерпретация $I =< M, f >$, в которой формула принимает значение Л.

Тогда $\exists x = s_0 \in M$:

$$\underbrace{\underbrace{(\forall \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{s_0},\boldsymbol{y})}_{\text{И}} \supset \underbrace{(\exists \boldsymbol{y})\left(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s_0}) \supset \left(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{s_0},\boldsymbol{y})\&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s_0})\right)\right)}_{\text{Л}}}_{\text{Л}}$$

Выпишем систему

$$\begin{cases} (\forall y)\, Q(s_0,y) = \text{И} \\ (\exists y)(Q(y,s_0) \supset \left(Q(s_0,y)\&Q(y,s_0)\right)) = \text{Л} \end{cases}$$

Для любого $\boldsymbol{y}$ истина и существует $\boldsymbol{y}$ ложь означает, что для любого элемента множества M, а значит и для $y = s_0 \in M$: справедливо

$$\begin{cases} Q(s_0,s_0) = \text{И} \\ Q(s_0,s_0) \supset \left(Q(s_0,s_0)\&Q(s_0,s_0)\right) = \text{Л} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(s_0,s_0) = \text{И} \\ \left(Q(s_0,s_0)\&Q(s_0,s_0)\right) = \text{Л} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(s_0,s_0) = \text{И} \\ Q(s_0,s_0) = \text{Л} \end{cases}$$

– противоречие. Следовательно, формула общезначима и рассуждение правильное.

Пример 3. Проверить правильность рассуждения.

В частично упорядоченном множестве любой минимальный элемент является наименьшим.

Формулы посылки и заключения возьмем из примера 2. Запишем рассуждение формулой ЛП.

$$(\forall \boldsymbol{x})\left[(\exists \boldsymbol{y})\ \left(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \supset \left(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\&\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\right)\right) \supset (\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]$$

Упростим формулу:

$$(\forall x)\left[(\exists y)\left(Q(y,x) \supset \left(Q(x,y)\&Q(y,x)\right)\right) \supset (\forall y)Q(x,y)\right] \equiv$$

$$\equiv (\forall x)\left[(\exists y)\left(\neg Q(y,x) \vee \left(Q(x,y)\&Q(y,x)\right)\right) \supset (\forall y)Q(x,y)\right] \equiv$$

$$\equiv (\forall x)\left[(\exists y)\left(\left(\neg Q(y,x) \vee Q(x,y)\right)\&\left(\underbrace{\neg Q(y,x) \vee Q(y,x)}_{\text{И}}\right)\right) \supset (\forall y)Q(x,y)\right] \equiv$$

$$\equiv (\forall x)[(\exists y)(\neg Q(y,x) \vee Q(x,y)) \supset (\forall y)Q(x,y)]$$

Покажем, что эта формула не общезначима. От противного. Предположим, что формула общезначима. Тогда для $\forall x$, а, следовательно, и для $x = y$ имеем

$$(\exists \boldsymbol{y})\big(\neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \mathrm{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\big) \supset (\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \equiv \text{И} \qquad (*)$$

Следовательно, $\text{И} \supset (\forall y)Q(y, y) \equiv \text{И} \Longrightarrow (\forall y)Q(y, y) \equiv \text{И}$

Возьмем интерпретацию $I =< \mathbb{R}, f >$, где $\mathbb{R}$ множество действительных чисел; $f: Q(x, y) \to x < y$.

Тогда $(\forall y)Q(y, y) = \text{Л}$ – противоречие с $(\forall y)Q(y, y) \equiv \text{И}$. А это выражение мы получили из предположения о тождественной истинности формулы $(*)$.

Вывод: формула не общезначима, рассуждение не является правильным.

Проблема разрешимости
в логике высказываний и в логике предикатов

Суть проблемы. Существует ли алгоритм, который для любой формулы ЛВ (ЛП) может определить, является ли формула тождественно истинной (общезначимой).

(ЛВ – тавтология, ЛП – общезначимость).

В логике высказываний – проблема разрешима. Алгоритм проверки тождественной истинности формулы существует. По таблице истинности всегда можно определить, является ли формула тавтологией.

Критерий тождественной истинности в Л.В.

Формула F – тождественно истинна, тогда и только тогда, когда существует $\tilde{F} \equiv F$, $\tilde{F}$ – в КНФ, в каждой элементарной дизъюнкции которой содержится какая-либо переменная и её отрицание одновременно.

Доказательство.

Достаточность. Пусть в каждой элементарной дизъюнкции $\tilde{F}$ содержится одновременно какая-нибудь переменная и её отрицание.

$$\tilde{F} = \&(\dots \vee x_i \dots \vee \neg x_i)$$

$x_i \vee \neg x_i = \text{И}$ (по коммутативности $\vee$ можно поставить вместе: $x_i \vee \neg x_i$).

Следовательно, $C \vee \text{И} = \text{И} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{F} = \text{И} \,\&\, \dots . \,\&\, \text{И} = \text{И}$

Необходимость. Пусть в $\tilde{F}$ существует элементарная дизъюнкция, которая ни одной переменной вместе с её отрицанием не содержит. В этом случае всегда можно найти оценку переменных формулы, на которой эта дизъюнкция принимает значение Л, а следовательно, и вся КНФ $\tilde{F}$ примет значение Л.

Если входит переменная: $x_i = \text{Л}$; Если отрицание переменной: $\neg x_i$, то $x_i = \text{И} \to \neg x_i = \text{Л}$. Например, дизъюнкция $x_1 \vee x_2 \dots \vee \neg x_3$ на оценке <*Л, Л, И*> примет значение Л.

Тогда и вся формула $\tilde{F}$ примет значение Л: $\tilde{F} = \dots . \,\&\, \text{И} \,\&\, \dots . \,\&\, \text{Л} \dots = \text{Л}$

Тезис Чёрча.

В логике предикатов проблема неразрешима. Не существует эффективного алгоритма, позволяющего определить общезначима формула ЛП или нет.

В частности, из этого следует, что и проверить правильность рассуждений в логике предикатов мы сможем не всегда.

Замечание. Если в $I =< M, f >$, M – конечное множество $M = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$, то проверить на общезначимость можно, заменив следующие формулы ЛП формулами ЛВ

$$(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_1}) \& \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_2}) \& \dots \& \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_n}) = \&_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_i})$$

$$(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_1}) \vee \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_2}) \vee \dots \vee \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_n}) = \bigvee_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a_i})$$