

Ex 3: HPT $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

C/m: $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Bài toán 1: Cho $\tan \alpha = m$ hoặc $\cot \alpha = m$. Tính $f(\alpha)$

B₁ Ta có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + m^2}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \end{cases}$$

B₂ KHAK và KL $\rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$

Câu 69. Cho $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. Tính $A = \sin \alpha$ và $B = \cos \alpha$.

(A) $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và $B = -\frac{1}{3}$.

(B) $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(C) $A = \frac{\sqrt{2}}{3}$ và $B = \frac{1}{3}$.

(D) $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và $B = \frac{2}{3}$.

Bài toán 2 Cho $\tan \alpha = m$. Tính $S = \frac{f(\sin \alpha, \cos \alpha)}{g(\sin \alpha, \cos \alpha)}$

Câu 71. Cho $\tan x = 2$. Tính $P = \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}$

(A) $P = 4$.

(B) $P = 0$.

(C) $P = 1$.

(D) $P = 2$.

$$P = \frac{\frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x - 2 \tan x}{1 + 3 \tan^2 x} = \frac{0}{13} = 0 \rightarrow (B)$$

Câu 72. Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $Q = \frac{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$

(A) $Q = \frac{7}{9}$.

(B) $Q = -\frac{7}{9}$.

(C) $Q = \frac{6}{7}$.

(D) $Q = -\frac{9}{7}$.

$$Q = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 3}{4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 5} = \frac{\tan \alpha + 3}{4 \tan \alpha - 5} = \frac{6}{7}$$

Câu 73. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}$

(A) $P = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{6}$.

(B) $P = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

(C) $P = \frac{-4 + 5\sqrt{2}}{6}$.

(D) $P = \frac{2}{3}$.

Câu 74. Biết $\tan \alpha = -2$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{5 \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$.

(A) $\frac{3}{7}$.

(B) $-\frac{7}{3}$.

(C) $\frac{2}{9}$.

(D) $-\frac{2}{9}$.

Câu 75. Cho $\cot \alpha = -2$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ là

(A) $\frac{14}{5}$.

(B) $\frac{6}{5}$.

(C) $-\frac{14}{5}$.

(D) $-\frac{6}{5}$.

3 Mối liên hệ giữa các góc

3.1 Phụ chéo

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

3.2 Sin bù

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

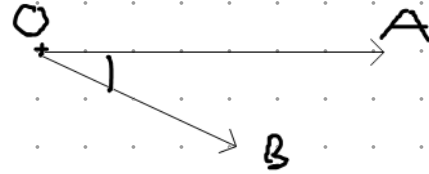
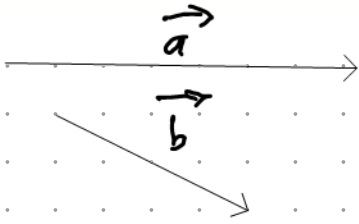
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

§2: TÍCH VÔ HƯỚNG

1 Góc giữa hai vectơ



* B₁: chọn O bđk

* B₂: Dùng $\vec{OA} = \vec{a}$; $\vec{OB} = \vec{b}$

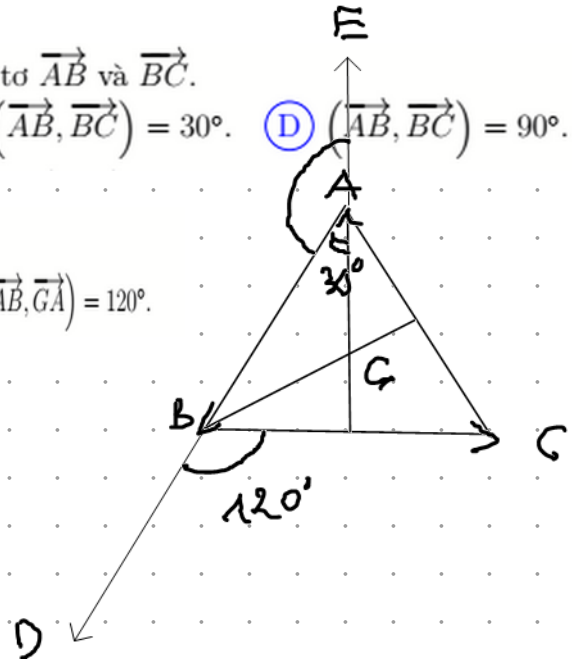
B₃: Góc giữa \vec{a} và $\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$

Câu 1. Cho tam giác đều ABC . Tính góc giữa hai véc-tơ \vec{AB} và \vec{BC} .

- (A) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 60^\circ$. (B) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 120^\circ$. (C) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 30^\circ$. (D) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 90^\circ$.

Câu 2. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G . Tính (\vec{AB}, \vec{GA}) .

- (A) $(\vec{AB}, \vec{GA}) = 30^\circ$. (B) $(\vec{AB}, \vec{GA}) = 60^\circ$. (C) $(\vec{AB}, \vec{GA}) = 150^\circ$. (D) $(\vec{AB}, \vec{GA}) = 120^\circ$.



2 Tích vô hướng

2.1 Tính tích vô hướng bằng định nghĩa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = \\ |\vec{b}| = \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \rightarrow \text{Thay vào (1)}$$

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

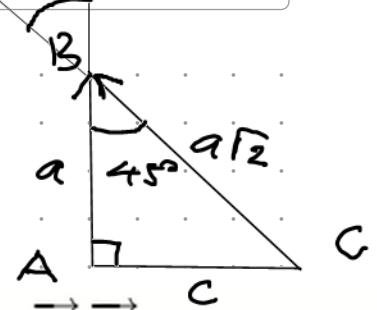
(A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

(B) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a$.

(C) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$.

(D) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a}{2}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$



Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{CB}$.

(A) $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = a$.

(B) $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 0$.

(C) $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = \frac{a}{2}$.

(D) $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = a^2$.

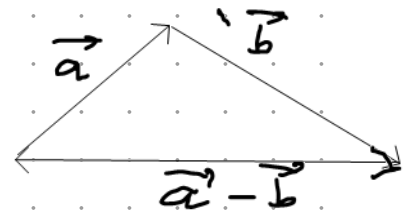
$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CB} &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{CB}| \cos(\angle ABC) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \end{aligned}$$

2.2 Tính tích vô hướng bằng công thức

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b})^2 &= \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} [\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2] \end{aligned}$$

Lưu ý: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ (bình phương vô hướng)

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$



4 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

4.1 Biểu thức: $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$

$$\oplus \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\oplus |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\oplus \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\ast A(x_A: y_A), B(x_B: y_B)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (x_B - x_A: y_B - y_A)$$

$$\Rightarrow AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;2), B(-1;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB .

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $-\sqrt{5}$.

~~C. $\sqrt{5}$.~~

D. 5.

$$\vec{AB} = (-2; -1)$$

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$\rightarrow \textcircled{C}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $M(1;2), N(5;-1)$. Độ dài đoạn thẳng MN .

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $-\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. 5.

$$\vec{MN} = (4; -3)$$

$$\rightarrow MN = |\vec{MN}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$\rightarrow \textcircled{D}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $P(2;1), Q(-1;5)$. Độ dài đoạn thẳng PQ .

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $-\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. 5.

$$\vec{PQ} = (-3; 4)$$

$$PQ = |\vec{PQ}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$\rightarrow \textcircled{D}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $E(1;3), F(2;-5)$. Độ dài đoạn thẳng EF .

A. $\sqrt{65}$.

B. $-\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. 5.

$$\vec{EF} = (1; -8)$$

$$EF = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65} \rightarrow \textcircled{A}$$

Cho các vector $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6)$. Khi đó góc giữa chúng là :

~~X~~ A. 45° . $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 + 12}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \frac{10}{\sqrt{5} \sqrt{5} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 B. 60° .
 C. 30° .
 D. 135° . $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$

Góc giữa hai véctor $\vec{u} = (3; -4)$ và $\vec{v} = (-8; -6)$ là

- A. 30° .
- B. 60° .
- C. 90° .
- D. 45° .



