单速一维均匀裸平板堆 S_N 模拟的 MATLAB 实现

sunxb10

主要参考了杜书华《输运问题的计算机模拟》(湖南科学技术出版社)及胡永明《反应堆物理数值计算方法》(国防科技大学出版社),修改了书中的下标表述法以适应 MATLAB 编程。

1 待解题目

单速一维均匀裸平板堆,堆半厚度 $a_0 = 66.0053\,\mathrm{cm}$,两侧为真空边界条件,$\Sigma_t = 0.050/\mathrm{cm}$,$\Sigma_s = 0.030/\mathrm{cm}$,$\nu\Sigma_f = 0.0225/\mathrm{cm}$。

2 算法原理

一维平板输运微分方程的守恒形式:

$$\mu\frac{\partial\Phi(x,\mu)}{\partial x} + \Sigma_t\Phi(x,\mu) = S(x) \tag{1}$$

其中角度 μ 按照 Gauss-Legendre 求积法离散为 μ_m $(m = 1, 2, \cdots, N)$,相应的权重为 ω_m。只需考虑右半侧平板,坐标 x 离散为 x_{2k} $(k = 1, 2, \cdots, K)$,其中 K 为所取的网格数,在坐标节点的两侧和中间插入中间节点 $x_{2k'+1}$ $(k' = 0, 1, 2 \cdots, K)$,其中 $x_1 = 0$,$x_{2K+1} = a_0$。相应节点处中子角注量率记为 $\Phi_{2k,m}$ 或 $\Phi_{2k'+1,m}$。

如上离散操作得到空间网格 $\Delta_{2k} = x_{2k+1} - x_{2k-1}$,在网格内积分得到差分格式的输运方程

$$\mu_m(\Phi_{2k+1} - \Phi_{2k-1}) + \Delta_{2k}\Sigma_t\Phi_{2k,m} = \Delta_{2k}S_{2k} \tag{2}$$

其中

$$\Phi_{2k,m} = \frac{1}{\Delta_{2k}}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} \Phi_m(x)\mathrm{d}x$$

$$S_{2k} = \frac{1}{\Delta_{2k}}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} S(x)\mathrm{d}x$$

边界条件:平板外侧真空,平板中央对称

$$\Phi_{2K+1,m} = 0 \quad (\mu_m < 0) \tag{3}$$

$$\Phi_{1,m} = \Phi_{1,N+1-m} \tag{4}$$

接下来即可考虑求解(2)式,首先在做空间离散时可以取等距节点,使 $\Delta_2 = \Delta_4 = \cdots = \Delta_{2k} = \Delta$。之后处理源项,由 Gauss-Legendre 求积法可得

$$S_{2k} = \frac{\Sigma_s + \nu\Sigma_f}{2}\sum_{m=1}^{N}(\Phi_{2k,m}\cdot\omega_m) \tag{5}$$

由步函数格式可得

$$\Phi_{2k,m} = \frac{1}{2}(\Phi_{2k+1,m} + \Phi_{2k-1,m}) \tag{6}$$

对于 $\mu_m < 0$ 的情况,先由外表面边界条件(3)式得到 $\Phi_{2K+1,m} = 0$,之后由(2)式可得

$$\Phi_{2k-1,m} = \frac{2+\mathscr{L}_m}{2-\mathscr{L}_m}\cdot\Phi_{2k+1,m} - \frac{2\mathscr{L}_m}{2-\mathscr{L}_m}\cdot\frac{S_{2k}}{\Sigma_t} \tag{7}$$

$$k = K, K-1, \cdots, 1$$

$$m = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2}$$

其中 $\mathscr{L}_m = \Sigma_t \cdot \Delta / \mu_m$，再加上(6)式可算出所有 $\mu_m < 0$ 的节点。

对于 $\mu_m > 0$ 的情况，先由中央边界条件(4)式得到 $\Phi_{1,m}$，之后由(2)式可得

$$\Phi_{2k+1,m} = \frac{2 - \mathscr{L}_m}{2 + \mathscr{L}_m} \cdot \Phi_{2k-1,m} - \frac{2\mathscr{L}_m}{2 + \mathscr{L}_m} \cdot \frac{S_{2k}}{\Sigma_t} \tag{8}$$
$$k = 1, 2, \cdots, K$$
$$m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \cdots, N$$

其中 $\mathscr{L}_m = \Sigma_t \cdot \Delta / \mu_m$，再加上(6)式可算出所有 $\mu_m > 0$ 的节点。

作为简单的示例，$N = 4$、$K = 4$ 时的网格节点迭代求解顺序如图1所示。

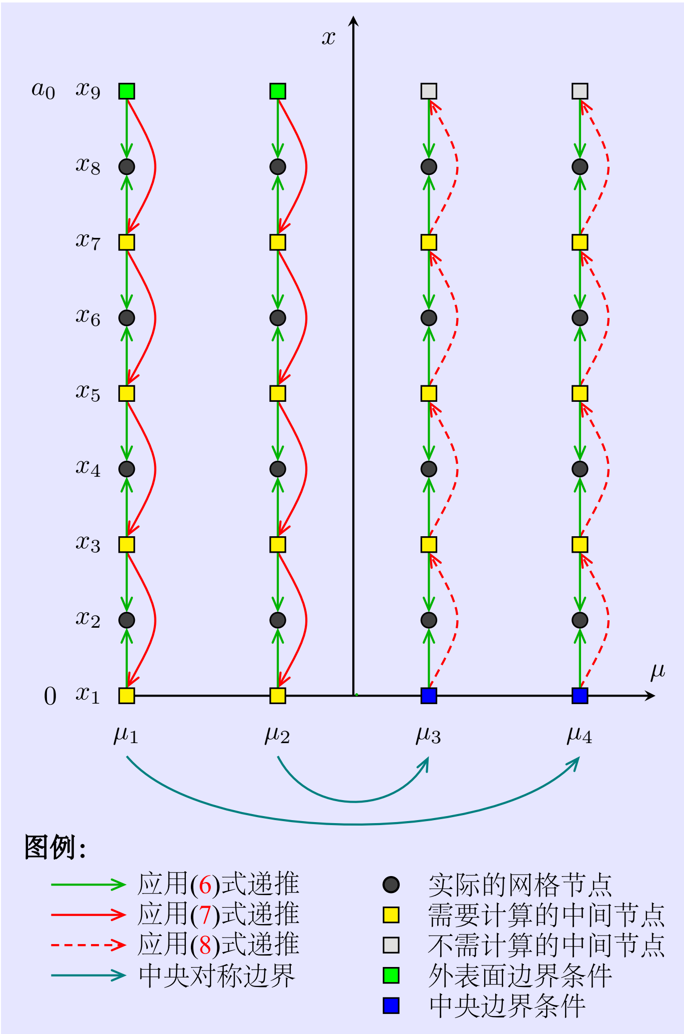

图 1　迭代求解顺序（$N = 4$，$K = 4$）

程序算出中子角通量后即可根据 Gauss-Legendre 求积法得到中子通量密度

$$\varphi_{2k} = \sum_{m=1}^{N} \left(\Phi_{2k,m} \cdot \omega_m \right) \tag{9}$$

为避免负通量的出现和扩散，本程序使用了最简单的置零修正，即在迭代计算过程中反复检查，只要出现某点通量为负则立即将其置零。

由于采用了特殊的下标表述，因而程序的内存开销大于实际需要，比如 S、k_{eff} 等矩阵有一半以上的元素为空，这也是将来程序优化时必须改进的一点。

3 求解结果

程序及报告已同步至GitHub网站。

程序取 $N=8$，$K=400$，迭代中有效增值系数 k_{eff} 相对误差上限为 10^{-8}。程序共进行 57 轮循环，耗时 1.70 s，编程测试平台：Intel® Core™ i5-2410M CPU @ 2.30GHz (Sandy Bridge)、8GB RAM (DDR3-1333MHz)、Windows 7 Enterprise (64-bit)、MATLAB R2012b (64-bit)。

计算得到所有节点的平均有效增殖系数为 0.99991145，其中最大有效增殖系数为 0.99991147，最小有效增殖系数为 0.99991143。

按照杜书华《输运问题的计算机模拟》一书中的理论，本题的截面数据相当于 $C=(\Sigma_s+\nu\Sigma_f)/\Sigma_t=1.05$，本题的半厚度相当于 $a_0=3.3002650\lambda$（其中 $\lambda=1/\Sigma_t$ 为中子自由程），查阅《输运问题的计算机模拟》第 148 页表 4.5.1 给出的 $C=1.05$ 时的临界半厚度值，可知本题所给的条件与临界条件（$a_0=3.3002638\lambda$）非常接近，因此算出有效增殖系数非常接近于 1 是合理的。

以《输运问题的计算机模拟》第 149 页表 4.5.3 给出的 $C=1.05$ 时的中子通量分布为标准值，对程序计算结果做校验，结果如表1所示。

表 1　中子通量分布校验结果（球心通量归一）

	校验点 x/a_0			
	0.25	0.50	0.75	1.00
计算值	0.94756412	0.79436289	0.55409599	0.21662752
标准值	0.94714400	0.79372641	0.55329025	0.21419206

计算得到的中子注量率分布如图2所示。

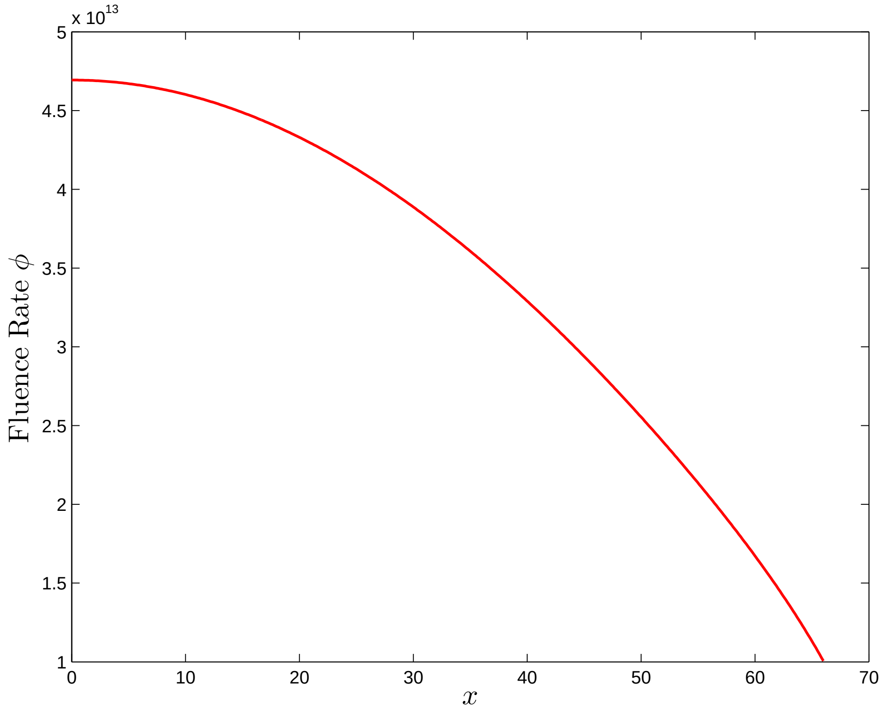

图 2　中子注量率分布（$N=8$，$K=400$）