

# 计算机图形学

---

## 计算机图形学三大模块

---

1 光栅图形显示

2 几何造型技术

3 真实感图形显示

模型：

1 线框模型

2 曲面模型：只描述物体的表面，和表面的连接关系，不描述物体内部点的特性。

2 实体模型：描述点的内部特性

曲面模型成为了主流。那就是线或者面，加面之间的关系

## 曲线的表示方式

---

显式或者隐式

对于一维曲线：显式描述： $y=f(x)$ , 优点：清晰，一对一，缺点不能表示封闭曲线或者多值曲线

隐式描述： $f(x,y)=0$ ; 优点：容易判断点是否在曲线上，缺点：不直观，作图不方便

特点：与坐标轴相关，隐式不直观，不好作图，显示处理不了多值，会出现斜率无穷大的场景。

解决方案：参数方程

$$p(t) = [x(t), y(t)]$$

## 参数方程的优势

1 几何不变性：形状的数学表示及其所表达的形状，不随所取坐标系而改变。

2 有更大的自由度来控制曲线曲面的形状

3 可以直接对参数方程进行几何变换

一条用参数表示的三维曲线是一个有界点集，可以写成一个带参数的，连续的，单值的数学函数。

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

$p=p(t)$ ,  $t$  belong to  $[0, 1]$

## 插值

---

自由曲线，自由曲面，一般由点生成。给定一组有序这些点，要求构造一条曲线通过这些点

逼近：与插值的区别，得到的结果曲线不一定过给定的点。

光顺： 曲线的拐点不能太多（在数学领域指的是凸曲线与凹曲线的连接点

连续性：参数连续性与几何连续性

参数连续性：C0连续：指几何位置连接。

C1连续：不仅连接且导数相等，即相切

2阶连续，二阶连续，切向量的变化率在交接处相等。

在图形中完全连续是十分苛刻的，他要求相等，所以我们引入了几何连续性

与参数连续性不同的是：我只需要曲线段在相交处的导数成比例即可

0阶连续：G0连续，与参数连续性0阶要求相同，交点位置值相同

G1连续：满足G0连续的前提下，有公共的切矢量； $f'_0 = af'_1, a>0$

G2连续：在结合处满足G1连续的前提下，并有公共的曲率

导数相等意味着切向量不仅大小相等，方向也相等，几何连续只是要求切向量一样，方向一样，长度可以不同，条件减弱了。

## 几何图形的参数形式，几何形式

---

参数形式：直方程式， $x, y, z$ 等于关于 $t$ 的参数，直观的求值

## bezier曲线

---

用曲线拟合 $f(x)$ 的时候，可以把曲线表示为许多小线段 $f_i(x)$ 之和， $f_i(x)$ 就称为基函数

在汽车设计的时候，先用折线段画出大致的轮廓，再用光滑的参数曲线逼近这个折线多边形。

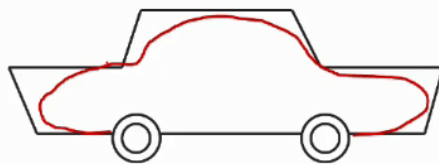
逼近在计算机图形学中主要用来设计美观的或符合某些美学标准的曲线。为了解决这个问题，有必要找到一种用小的部分即曲线段构建曲线的方法，来满足设计标准

当用曲线段拟合曲线 $f(x)$ 时，可以把曲线表示为许多小线段 $\phi_i(x)$ 之和，其中 $\phi_i(x)$ 称为基（混合）函数。

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x)$$

基函数是用来计算和显示的，因此经常选择用多项式来表达。

想法基点是在进行汽车外形设计时，先用折线段去画出汽车的外形大致轮廓，然后用光滑的参数曲线去逼近这个折线多边形



这个折线多边形被称为特征多边形。逼近该特征多边形的曲线被称为Bezier曲线

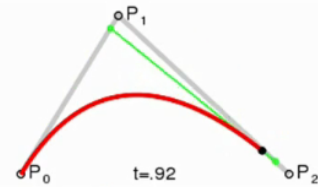
bezier曲线的二次形式，三次形式

$$p(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$= \underline{(P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + 2(P_1 - P_0)t + P_0}$$

二次Bezier曲线为抛物线，其矩阵形式为：

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$



### (3) 三次Bezier曲线

三次Bezier曲线由4个控制点生成，这时n=3，有4个控制点p<sub>0</sub>、p<sub>1</sub>、p<sub>2</sub>和p<sub>3</sub>，Bezier多项式是三次多项式：

$$p(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t) = P_0 B_{0,3}(t) + P_1 B_{1,3}(t) + P_2 B_{2,3}(t) + P_3 B_{3,3}(t)$$

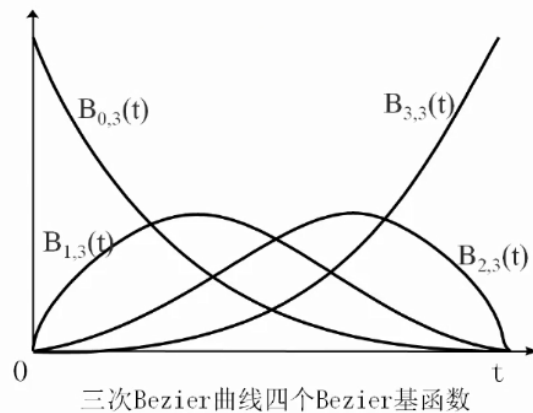
$$B_{0,3}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{3!}{0!(3-0)!} t^0 (1-t)^{3-0} = \underline{(1-t)^3}$$

$$B_{1,3}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{3!}{1!(3-1)!} t^1 (1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$$

其中

$$\begin{cases} B_{0,3}(t) = (1-t)^3 \\ B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t) \\ B_{3,3}(t) = t^3 \end{cases}$$

为三次Bezier曲线的基函数。



bezier曲线的重要性质，同等比例处取值，再进行连线，非常直观的表述出来曲线上点的由来以及变化的过程，也又一次证明了曲线上各点，只和控制点的位置有关系。是控制多边形的近似曲线。

Bezier曲线上的任一个点 $P(t)$ ，都是其它相邻线段的同等比例 $(t)$ 点处的连线，再取同等比例 $(t)$ 的点再连线，一直取到最后那条线段的同等比例 $(t)$ 处，该点就是Bezier曲线上的点 $P(t)$

## 实际描述

在实际的几何设计过程中，一条bezier曲线往往难以表达复杂的曲线，这是因为由于特征多项式顶点数的增加，会导致bezier曲线的次数越来越高，而高阶多项式会带来计算上的困难。因此一般采用分段设计，再把得到了一段一段的bezier曲线连起来。

要求：保证G0连续，点是连接在一块的， $p(n) = Q(0)$

G1连续，导数项连续，末端点的导数，起始点的导数与临近点的连线方向相等，所以就是保证 $P(n-1), p(n)$  same to  $Q(0), Q(1)$  on the same line

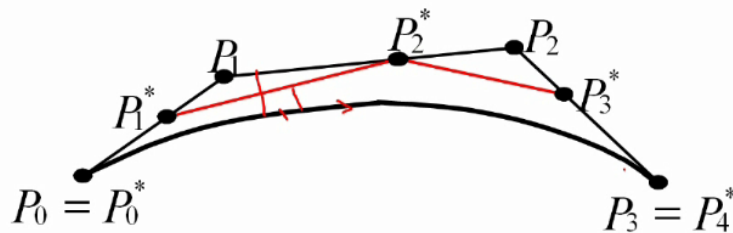
## bezier曲线的升阶与降阶

升阶:保证曲线的形状和方向保持不变,但是要增加顶点个数。

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 = 0$$

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + 0 * t^3 = 0$$

三次Bezier曲线的升阶实例如下图所示:



新的多边形更加靠近曲线。在80年代初,有人证明如果一直升阶升下去的话,控制多边形收敛于这条曲线

升阶与降阶的重要性

- 1 他是CAD系统之间数据传递与交换的需要
- 2 他是系统中分段线性逼近的需要,通过逐次降阶,把曲面转换为直线平面,便于求交和曲面绘制。
- 3 T他是外形信息压缩的需要,降阶处理之后可以减少存储的信息量。

## B样条

bezier曲线有很多优点,交互性特别强,设计人员用鼠标拖动顶点就可以改变曲线的形状,给了设计人员很大的自由。

不足: 1一旦确定了特征多边形的顶点的个数 $n+1$ 个,也就确定了曲线的阶数 $n$ 。

2 拼接复杂,多条曲线一起存在的情况下

3 bezier曲线或者曲面不能做局部的修改。改变一个顶点,整个曲线都会改变,为什么?

先想一下一个三次普通曲线的的基函数

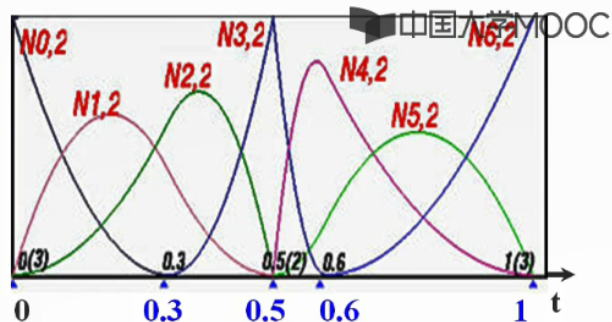
首先一个定义,函数值不为零的区间我们称它为支撑区间,因为bezier多项式在整个区间0-1上都有支撑,且曲线是这些函数的混合,所以每个控制顶点,对于0到1之间的 $t$ 值都是有影响的。

为了克服这些不足,我们看下面的图

图中显示了7个混合函数

$$\begin{array}{cccc} \underline{N_{0,2}} & \underline{N_{1,2}} & \underline{N_{2,2}} & \underline{N_{3,2}} \\ \underline{N_{4,2}} & \underline{N_{5,2}} & \underline{N_{6,2}} & \end{array}$$

每个函数只在区间 $[0, 1]$ 上的一部分有支撑，如：



样条：分段连续多项式。整条曲线是一个完整的表达形式，但内在的量是一段一段的，比如一堆三次曲线拼过去，两条之间满足二次连续。这样既克服了波动现象，曲线又是低次的，既有统一的表达式，又有统一的算法。

如何进行分段呢？现在假设有 $n+1$ 个点，每两个点之间构造一条多项式， $n+1$ 个点有 $n$ 个小区间；每个小区间构造一条三次多项式，变成了 $n$ 段的三次多项式拼接在一起，段与段之间要两次连续，这就是三次样条。

## 二、B样条的递推定义和性质

B样条曲线的数学表达式为：

$$\underline{P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,k}(u) \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]}$$

$P_i (i = 0, 1, \dots, n)$  是控制多边形的顶点

Bezier曲线

$$\underline{p(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(u) \quad u \in [0, 1]}$$

#### 4、凸包性：

B样条曲线落在 $P_i$ 构成的凸包之中。其凸包区域小于或等于同一组控制顶点定义的Bezier曲线凸包区域

凸包就是包含右边这6个顶点的最小凸多边形。凸多边形是把多边形的每条边延长，其它边都在它的同一侧

