Bézier基函数的导出

北京航空学院　施法中　韩道康

摘　要

Bézier 教授在《数值控制》一书中，对 Bézier 曲线曲面作了优美而详尽的说明。Bézier 基函数的表达式表于本文（2）和（3）。

Bézier 曲线有着很多重要的和有趣的几何性质。这些性质是 Bézier 基函数性质的直接推论。到目前为止还没有见到关于导出这些基函数的文献。

本文证明了从 Bézier 曲线的三条简单的、合理的几何要求出发，用两种不同的计算方法可以完全确定并导出这些基函数。

一、引　言

在计算机辅助几何设计（简称CAGD）的领域内，法国的 P. Bézier 教授所提出的构造曲线和曲面的方法以及基于这个方法所建立起来的 UNISURF 系统，是国际上公认的最成功的方法之一。Bézier 在他的著作[1]中，全面地介绍了他的方法的理论基础和应用。常庚哲和吴骏恒[2]对这一方法的数学基础作了更深入和更严格的研究。

n 阶 Bézier 曲线的表达式为

$$\vec{P}(u)=\sum_{j=0}^{n}\vec{a}_j f_{n,j}(u) \qquad 0\leqslant u\leqslant 1 \tag{1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &f_0(u)\equiv 1\\ &f_j(u)=\frac{(-u)^j}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{du^{j-1}}\Phi_n(u)\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ &\Phi_n(u)=[(1-u)^n-1]/u \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

它们被称为 Bézier 曲线的基函数。

矢量 $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_n$ 顺序首尾相接，从 $\vec{a}_1$ 的起点到 $\vec{a}_n$ 的终点所构成的多边形称为 Bézier 曲线的特征多边形。

直接计算知，基函数还有另一种表示法（见文献[1]）

$$f_{n,j}(u)=\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i+j}C_n^iC_{i-1}^{j-1}u^i \tag{3}$$

基函数有一系列性质（见文献[2]或文献[3]），由此可以导出 Bézier 曲线的一系列重要而有趣的几何性质。这些性质中最基本的有三条：

1980年 4 月收到。

（1）如果把特征多边形的边按相反的顺序排列，同时反转各边矢量的方向，得出同一条 Bézier 曲线，但定向相反；

（2）曲线的起点（终点）是特征多边形的头一个顶点（最后一个顶点）；

（3）曲线在起点（终点）处的 k 阶导矢只与它的特征多边形中最靠近这个顶点的 k 条边有关，而与更远的边无关。

但是，从文献中我们没有看到过这些基函数是怎样导出的。

本文用两种不同的方法证明：从某种意义上来说，基函数 $\{f_{n,j}(u)\}$ 被对曲线的三条合理的基本要求（1）、（2）、（3）所唯一确定。

二、对基函数的三条基本要求

由于本文只讨论 n 阶 Bézier 曲线，为了记号简单起见，我们将 $f_{n,j}(u)$ 直接记为 $f_j(u)$。

前节所说的曲线的三条几何性质，显然被下列对于基函数 $\{f_j(u)\}$ 的三条要求所保证。

（1）对于 $u\in[0,\ 1]$ 有

$$f_j(u)\equiv 1-f_{n-j+1}(1-u) \tag{4}$$

这是因为反序反向的特征多边形所定义的 Bézier 曲线是

$$\sum_{j=0}^{n}\vec{a}_j+\sum_{j=1}^{n}f_j(u)(-\vec{a}_{n-j+1})=\sum_{j=0}^{n}\vec{a}_j+\sum_{j=1}^{n}[f_{n-j+1}(1-u)-1]\vec{a}_{n-j+1}$$

$$=\vec{a}_0+\sum_{j=1}^{n}f_j(1-u)\vec{a}_j$$

（2）$f_0(u)=1$

$$\left.\begin{aligned}f_1(0)=f_2(0)=\cdots=f_n(0)=0\\ f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_n(1)=1\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

（3）当 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ j-1$ 时

$$f_j^{(k)}(0)=0 \tag{6}$$

当 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-j$ 时

$$f_j^{(k)}(1)=0 \tag{7}$$

下面我们分别说明导出基函数的两种方法。

三、第一种方法

由于 $f_1(u)$，$f_2(u)$，$\cdots f_n(u)$ 都是 n 次多项式，并且由性质（2）可知，它们的常数项都是零，因此可以设 $\{f_j(u)\}$ 为

$$[f_1(u),\ f_2(u),\cdots,f_n(u)]=[u\quad u^2\quad\cdots\quad u^n]M \tag{8}$$

其中 M 是一个 n 阶常系数方阵。所谓定出基函数，也就是定出（8）式右边的系数方阵 M。

用 $u=1$ 代入（8）式双方，仍由条件（2）可知

$$[1\quad 1\quad\cdots\quad 1]=[1\quad 1\quad\cdots\quad 1]M \tag{9}$$

这表明，M 的各列的元素之和均等于 1。

由性质（3）不难看出：M是一个下三角方阵。

定义如下的函数方阵

$$W(u)=\begin{bmatrix} f_1'(u) & f_2'(u) & \cdots & f_n'(u) \\ f_1''(u) & f_2''(u) & \cdots & f_n''(u) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n)}(u) & f_2^{(n)}(u) & \cdots & f_n^{(n)}(u) \end{bmatrix}$$

在（8）式双方分别取 1 阶，2 阶，…，n 阶导数后可得

$$W(u)=\begin{bmatrix} 1 & 2u & 3u^2 & \cdots & nu^{n-1} \\ 0 & 2! & 6u & \cdots & n(n-1)u^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{bmatrix} M$$

于是

$$W(0)=\begin{bmatrix} 1! & & & \\ & 2! & & \\ & & \ddots & \\ & & & n! \end{bmatrix} M \tag{10}$$

$$W(1)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2! & 6 & \cdots & n(n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n! \end{bmatrix} M \tag{11}$$

另一方面，在（4）式双方对 u 求 i 阶导数，得

$$f_j^{(i)}(u)=(-1)^{i+1}f_{n-j+1}^{(i)}(1-u)$$

上式可以表为矩阵形式

$$W(u)=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} W(1-u)K \tag{12}$$

式中K是把 n 阶单位方阵的各列按相反顺序排成的方阵，即

$$K=\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

特别地，用 $u=0$ 代入式（12），有

$$W(0)=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} W(1)K$$

将（10）式与（11）式代入上式双方，得到

$$M=\begin{bmatrix}1/1! & & & \\ & 1/2! & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n!\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 2 & 6 & \cdots & n(n-1) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & n!\end{pmatrix}MK$$

$$=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/1! & & & \\ & 1/2! & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n!\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 2 & 6 & \cdots & n(n-1) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & n!\end{pmatrix}MK$$

$$=\begin{pmatrix}C_1^1 & C_2^1 & \cdots\cdots & C_n^1 \\ & -C_2^2 & \cdots\cdots & -C_n^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (-1)^{n-1}C_n^n\end{pmatrix}MK$$

若令

$$A=\begin{pmatrix}C_1^1 & C_2^1 & \cdots\cdots & C_n^1 \\ & -C_2^2 & \cdots\cdots & -C_n^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (-1)^{n-1}C_n^n\end{pmatrix}$$

于是M应当适合矩阵方程

$$M=AMK \tag{13}$$

我们的任务是：求出适合方程（13）的各列和为1的下三角形方阵M。

设$M=[m_{ij}]$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$。今比较（13）式双方i行j列的元素。注意方阵MK的第j列正好是方阵M的第$n+1-j$列，因此

$$m_{ij}=(-1)^{i+1}[\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{i-1\text{个}},\ C_i^i,\ \cdots,\ ]\begin{bmatrix}m_{1,n+1-j}\\ m_{2,n+1-j}\\ \vdots\\ m_{n,n+1-j}\end{bmatrix}=(-1)^{i+1}\sum_{k=i}^{n}C_k^i m_{k,n+1-j}$$

当M为下三角形方阵时，若$j>i$则有$m_{ij}=0$，由上式可知

$$\sum_{k=i}^{n}C_k^i m_{k,n+1-j}=0$$

亦即

$$\sum_{k=n+1-j}^{n}C_k^i m_{k,n+1-j}=0$$

这里包含的未知量$m_{k,n+1-j}$（$k=n+1-j$，$\cdots$，n）共有$n-(n-j)=j$个。由于

$i=1, 2, \cdots, j-1$，即方程的个数为 $j-1$，比未知量的数目少一个。另一个方程由条件（9）补充。因此，我们有方程组

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=n+1-j}^{n} m_{k,n+1-j} &= 1\\ \sum_{k=n+1-j}^{n} C_k^i m_{k,n+1-j} &= 0\end{aligned}\right\}$$

为了记号简洁，用 j 来代替上述方程组中的 $n+1-j$，那么，这个方程组可以表为

$$\left.\begin{aligned}&m_{j,j}+m_{j+1,j}+\cdots+m_{n,j}=1\\ &C_j^1 m_{j,j}+C_{j+1}^1 m_{j+1,j}+\cdots+C_n^1 m_{n,j}=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &C_j^{n-j}m_{j,j}+C_{j+1}^{n-j}m_{j+1,j}+\cdots+C_n^{n-j}m_{n,j}=0\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

注意，在这些组合数中，若上标大于下标，则这一组合数应看成是数 0 。

用 Cramer 法则来解这个线方程组．为此，要计算两个某一类型的行列式。为了得出一种统一的算法，我们证明：

命题：设 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为任意非负整数，则

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ C_{k_1}^1 & C_{k_2}^1 & \cdots & C_{k_s}^1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ C_{k_1}^{s-1} & C_{k_2}^{s-1} & \cdots & C_{k_s}^{s-1}\end{vmatrix}=\frac{1}{1!\ 2!\ \cdots\ (s-1)!}\prod_{l<m}(k_m-k_l)$$

证：由于对任何非负整数 p，q，均有

$$C_p^q=\frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q!}$$

因此从行列式的第二行提取公因子 $1/1!$、从第三行提取公因子 $1/2!$，…、从最后一行提取公因子 $1/(s-1)!$ 后，把第二行加到第三行上，再把第二行的（-2）倍及第三行的 3 倍加到第四行上……，最后得到原行列式即为

$$\frac{1}{1!\ 2!\cdots(s-1)!}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_s\\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_s^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k_1^{s-1} & k_2^{s-1} & \cdots & k_s^{s-1}\end{vmatrix}$$

这里出现了有名的 Vandermonde 行列式，由此立知命题的结论正确。

把命题应用于计算方程组（14）的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ C_j^1 & C_{j+1}^1 & \cdots & C_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ C_j^{n-j} & C_{j+1}^{n-j} & \cdots & C_n^{n-j}\end{vmatrix}=\frac{1}{1!\ 2!\cdots(n-j)!}\times 1!\ 2!\cdots(n-j)!=1$$

当 i 适合 $j\leqslant i\leqslant n$ 时，依 Cramer 法则有

$$m_{i,j}=\begin{vmatrix}1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ C_j^1 & \vdots & C_{i-1}^1 & 0 & C_{i+1}^1 & \vdots & C_n^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_j^{n-j} & \vdots & C_{i-1}^{n-j} & 0 & C_{i+1}^{n-j} & \vdots & C_n^{n-j}\end{vmatrix}=(-1)^{i-j}\begin{vmatrix}C_j^1 & \vdots & C_{i-1}^1 & C_{i+1}^1 & \vdots & C_n^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_j^{n-j} & \vdots & C_{i-1}^{n-j} & C_{i+1}^{n-j} & \vdots & C_n^{n-j}\end{vmatrix}$$

但因

$$C_p^q=\frac{p!}{q!(p-q)!}=\frac{p}{q}C_{p-1}^{q-1}$$

故从上述行列式的每行每列提出适当的因子后，可得

$$m_{i,j}=(-1)^{i-j}\frac{j(j+1)\cdots(i-1)(i+1)\cdots n}{1\times 2\times 3\cdots\times(n-j)}\begin{vmatrix}1 & \vdots & 1 & 1 & \vdots & 1\\ C_{j-1}^1 & \vdots & C_{i-2}^1 & C_i^1 & \vdots & C_{n-1}^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_{j-1}^{n-j-1} & \vdots & C_{i-2}^{n-j-1} & C_i^{n-j-1} & \vdots & C_{n-1}^{n-j-1}\end{vmatrix}$$

把命题的结论运用于上述行列式有

$$m_{i,j}=(-1)^{i-j}\frac{n!}{i(n-j)!(j-1)!}\cdot\frac{1}{1!\,2!\cdots(n-j-1)!}1!\cdots(i-j-1)!$$

$$\times\frac{(i-j+1)!(i-j+2)!\cdots(n-j)!}{1\times 2\times\cdots\times(n-i)}$$

$$=(-1)^{i-j}\frac{n!}{i(j-1)!(i-j)!(n-i)!}=(-1)^{i-j}\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$\times\frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!}=(-1)^{i+j}C_n^iC_{i-1}^{j-1}$$

于是

$$f_j(u)=\sum_{i=1}^n m_{i,j}u^i=\sum_{i=j}^n m_{i,j}u^i=\sum_{i=j}^n(-1)^{i+j}C_n^iC_{i-1}^{j-1}u^i$$

这与（3）式的结果完全一致。

四、第二种方法

由（6）式可知，0是$f_j'(u)$的零点，且至少是$j-1$重；同理，由（7）式可知，1是$f_j'(u)$的零点，且至少是$n-j$重。由于

$$j-1+(n-j)=n-1$$

而$f_j'(u)$是一个$n-1$次多项式，所以0恰是它的$j-1$重零点，而1恰是它的$n-j$重零点。这样，我们可令

$$f_j'(u)=a_ju^{j-1}(1-u)^{n-j}$$

式中a_j是一个待定的常数，以下来定出这个常数。由于

$$1=f_j(1)-f_j(0)=\int_0^1 f_j'(u)du=a_j\int_0^1u^{j-1}(1-u)^{n-j}du$$

$$=a_jB(j,\ n-j+1)=a_j\frac{\Gamma(j)\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+1)}$$

$$=a_j\frac{(j-1)!(n-j)!}{n!}$$

这里$\Gamma(x)$与$B(x,\ y)$分别表示熟知的Gamma函数和Beta函数，于是

$$a_j = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} = nC_{n-1}^{j-1}$$

这样一来

$$f_j(u) = f_j(u) - f_j(0) = \int_0^u f'_j(t)\,dt = nC_{n-1}^{j-1}\int_0^u t^{j-1}(1-t)^{n-j}dt$$

$$= nC_{n-1}^{j-1}\int_0^u t^{j-1}\left(\sum_{p=0}^{n-j}(-1)^p C_{n-j}^p t^p\right)dt = nC_{n-1}^{j-1}\sum_{p=0}^{n-j}(-1)^p C_{n-j}^p\int_0^u t^{p+j-1}dt$$

$$= nC_{n-1}^{j-1}\sum_{p=0}^{n-j}(-1)^p C_{n-j}^p \frac{1}{p+j} u^{p+j}$$

令 $i = p + j$，于是

$$f_j(u) = nC_{n-1}^{j-1}\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i-j}C_{n-j}^{i-j}\frac{1}{i}u^i$$

$$= \sum_{i=j}^{n}(-1)^{i-j}\frac{n}{i}\cdot\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!}\cdot\frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!}u^i$$

$$= \sum_{i=j}^{n}(-1)^{i-j}\frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!}u^i$$

即

$$f_j(u) = \sum_{i=j}^{n}(-1)^{i+j}C_n^i C_{i-1}^{j-1}u^i$$

这与（3）式的结果完全一致。

本文是在吴骏恒导师的具体指导下完成的，中国科技大学常庚哲老师详细审阅了全文，从计算方法上给予全面的指导，在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

〔1〕 P. Bézier, "Numerical Control-Mathematics and Applications", John Wiley and Sons, London(1972).
〔2〕 常庚哲，吴骏恒："贝齐尔曲线和曲面的数学基础及其计算"，《国外航空》1979年，第1～6期。
〔3〕 常庚哲，吴骏恒："关于 Bézier 方法的数学基础"，《计算数学》1980年，第1期。

ON THE DERIVATION OF BÉZIER'S BASIC FUNCTIONS

Shi Fazhong Han Daokang

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In his book "Numerical Control" Professor P. Bézier gives an excellent exposition of his technique in CAGD. Bézier's Basic functions $f_{n,i}(u)$ are shown in (2) and (3). Bézier's curves have a number of important and interesting geometric properties of the basic functions. As there has been no literature on the derivation of these basic functions sofar, this paper attempts to prove in two different ways that the expressions of basic functions can be determined completely by three simple and reasonable geometric properties of the Bézier's curves.