计算机图形学

计算机图形学三大模块

1光栅图形显示

2 几何造型技术

3 真实感图形显示

模型：

1线框模型

2曲面模型：只描述物体的表面，和表面的连接关系，不描述物体内部点的特性。

2实体模型：描述点的内部特性

曲面模型成为了主流。那就是线或者面，加面之间的关系

曲线的表示方式

显式或者隐式

对于一维曲线：显式描述：y=f(x),优点：清晰，一对一，缺点不能表示封闭曲线或者多值曲线

隐式描述：f(x,y)=0;优点：容易判断点在不在曲线上，缺点：不直观，作图不方便

特点：与坐标轴相关，隐式不直观，不好作图，显示处理不了多值，会出现斜率无穷大的场景。

解决方案：参数方程

p(t) = [x(t),y(t)]

参数方程的优势

1几何不变性：形状的数学表示及其所表达的形状，不随所取坐标系而改变。

2有更大的自由度来控制曲线曲面的形状

3可以直接队参数方程进行几何变换

一条用参数表示的三维曲线是一个有界点集，可以写成一个带参数的，连续的，单值的数学函数。

x = x(t).y =y(t),z = z(t),

p=p(t),t belong to【0，1】

插值

自由曲线，自由曲面，一般由点生成。给定一组有序这些点，要求构造一条曲线通过这些点

逼近：与插值的区别，得到的结果曲线不一定过给定的点。

光顺：　曲线的拐点不能太多（在数学领域指的是凸曲线与凹曲线的连接点

连续性：参数连续性与几何连续性

参数连续性：C0连续：指几何位置连接。

C1连续：不仅连接且导数相等，即相切

2阶连续，二阶连续，切向量的变化率在交接处相等。

在图形中完全连续是十分苛刻的，他要求相等，所以我们引入了几何连续性

与参数连续性不同的是：我只需要曲线段在相交处的导数成比例即可

0阶连续：G0连续，与参数连续性0阶要求相同，交点位置值相同

G1连续：满足G0连续的前提下，有公共的切矢量；f'0 = af'1,a>0

G2连续: 在结合处满足G1连续的前提下，并有公共的曲率

导数相等意味着切向量不仅大小相等，方向也相等，几何连续只是要求切向量一样， 方向一样，长度可以不同，条件减弱了。

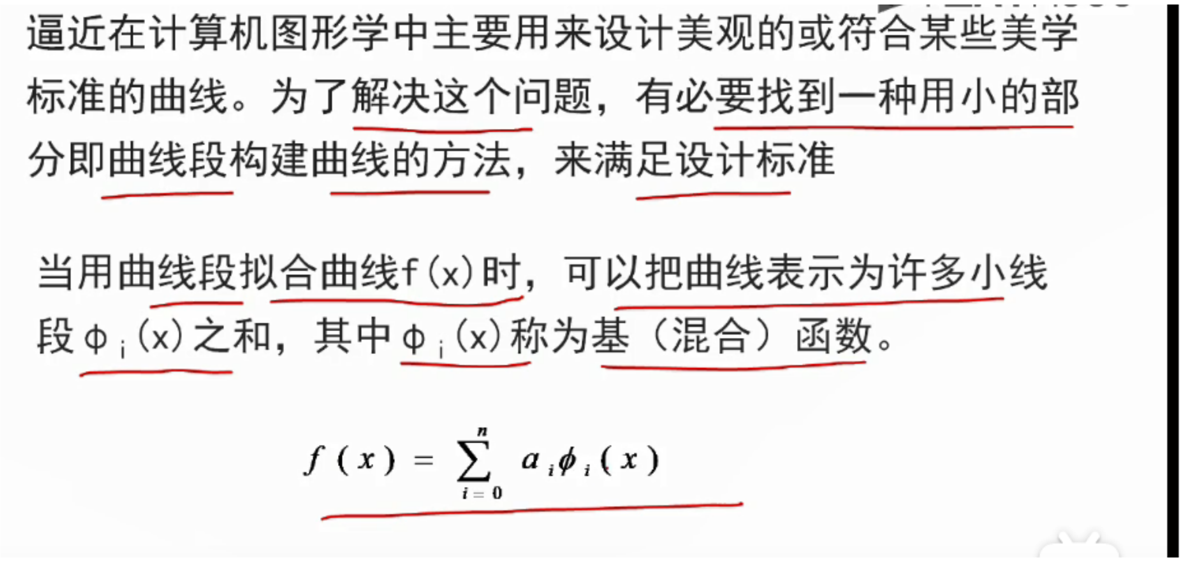
几何图形的参数形式，几何形式

参数形式：直方程式，x,y,z等于关于t的参数，直观的求值

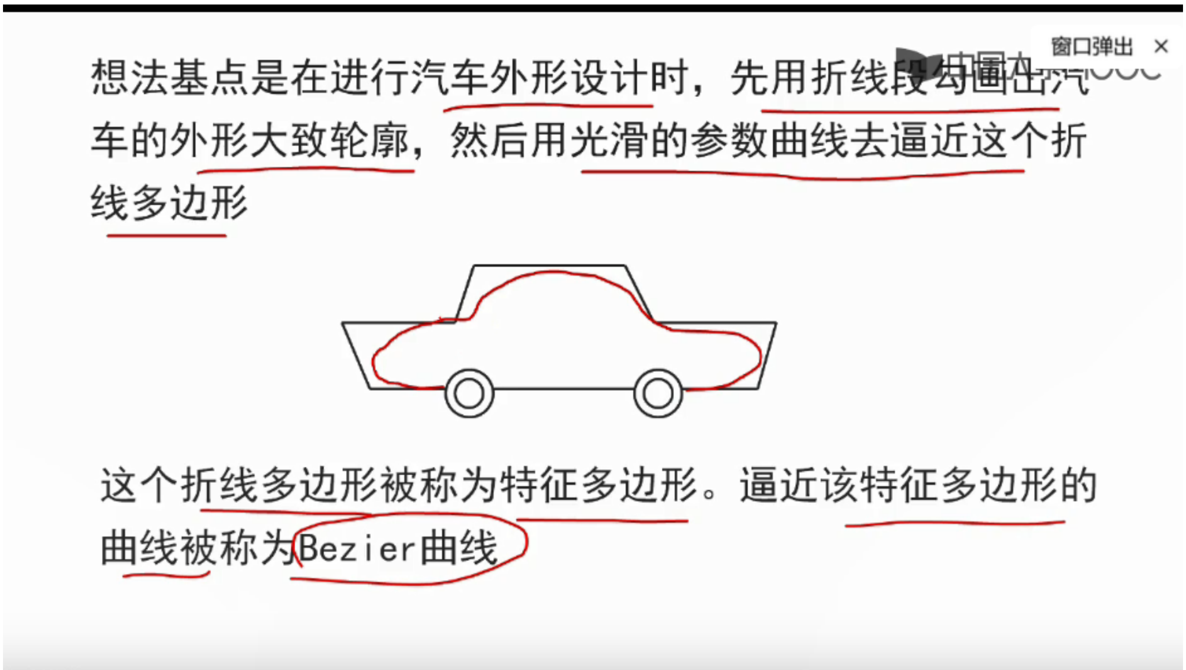
bezier曲线

用曲线拟合fx的时候，可以把曲线表示为许多小线段fai x之和,fai x就称为基函数

在汽车设计的时候，先用折线段画出大致的轮廓，再用光滑的参数曲线逼近这个折线多边形。



基函数是用来计算和显示的，因此经常选择用多项式来表达。



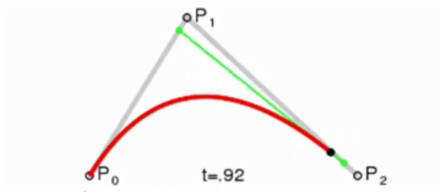
bezier曲线的二次形式，三次形式

$$p(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$= (P_2 - 2P_1 + P_0)t^2 + 2(P_1 - P_0)t + P_0$$

二次Bezier曲线为抛物线，其矩阵形式为：

$$p(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$



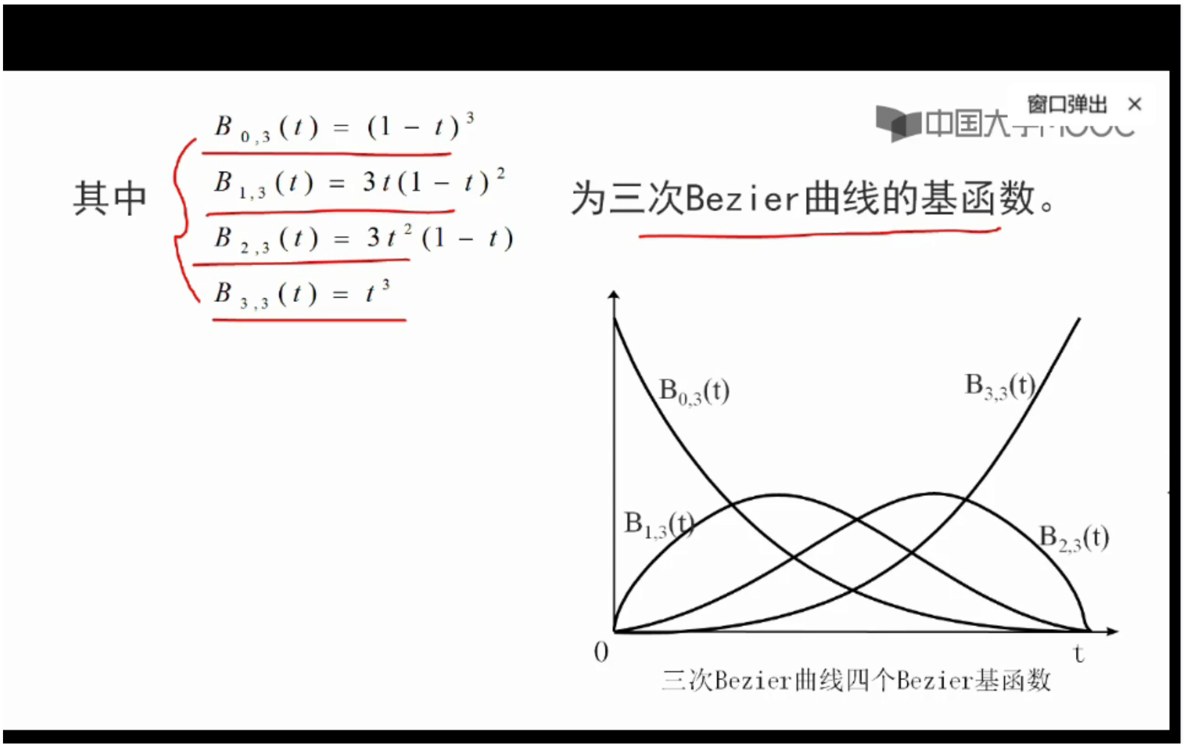
（3）三次Bezier曲线

三次Bezier曲线由4个控制点生成，这时n=3，有4个控制点p_0、p_1、p_2和p_3，Bezier多项式是三次多项式：

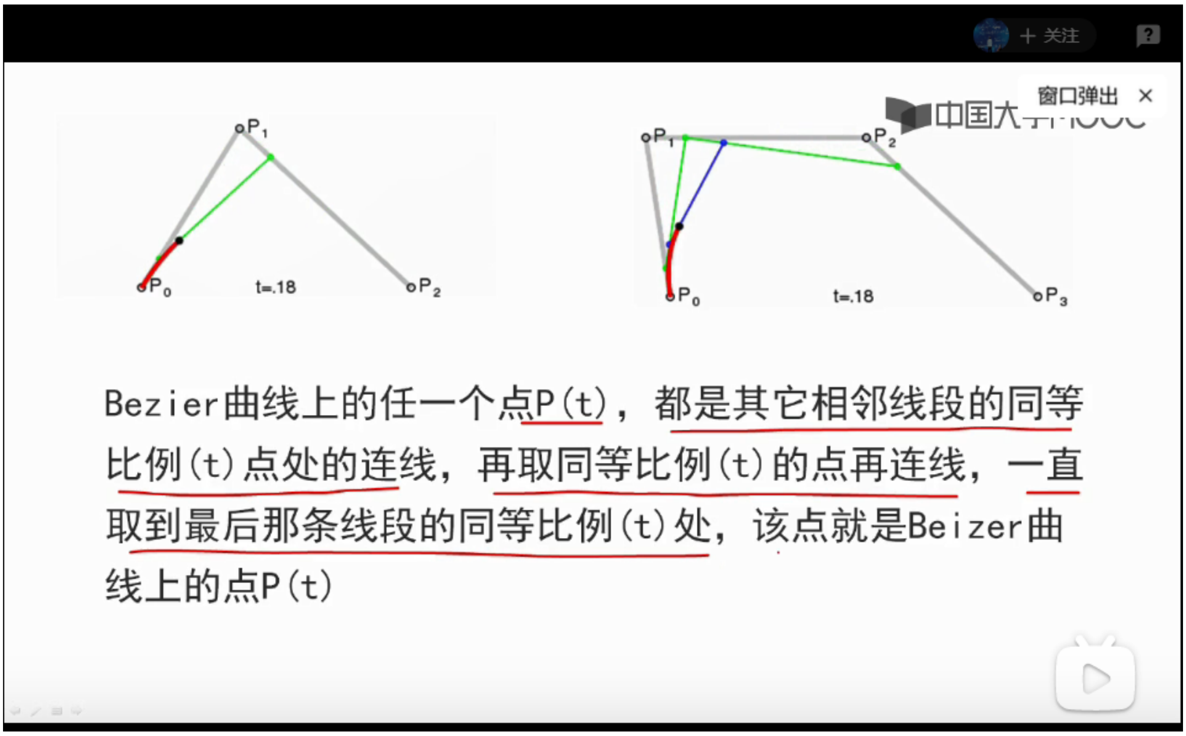
$$p(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,3}(t) = P_0 B_{0,3}(t) + P_1 B_{1,3}(t) + P_2 B_{2,3}(t) + P_3 B_{3,3}(t)$$

$$B_{0,3}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{3!}{0!(3-0)!} t^0 (1-t)^{3-0} = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{3!}{1!(3-1)!} t^1 (1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$$



bezier曲线的重要性质，同等比例处取值，再进行连线，非常直观的表述出来曲线上点的由来以及变化的过程，也又一次证明了曲线上各点，只和控制点的位置有关系。是控制多边形的近似曲线。



实际描述

在实际的几何设计过程中，一条bezier曲线往往难以表达复杂的曲线，这是因为由于特征多项式顶点数的增加，会导致bezier曲线的次数越来越高，而高阶多项式会带来计算上的困难。因此一般采用分段设计，再把得到了一段一段的bezier曲线连起来。

要求：保证G0连续，点是连接在一块的，p(n) = Q(0)

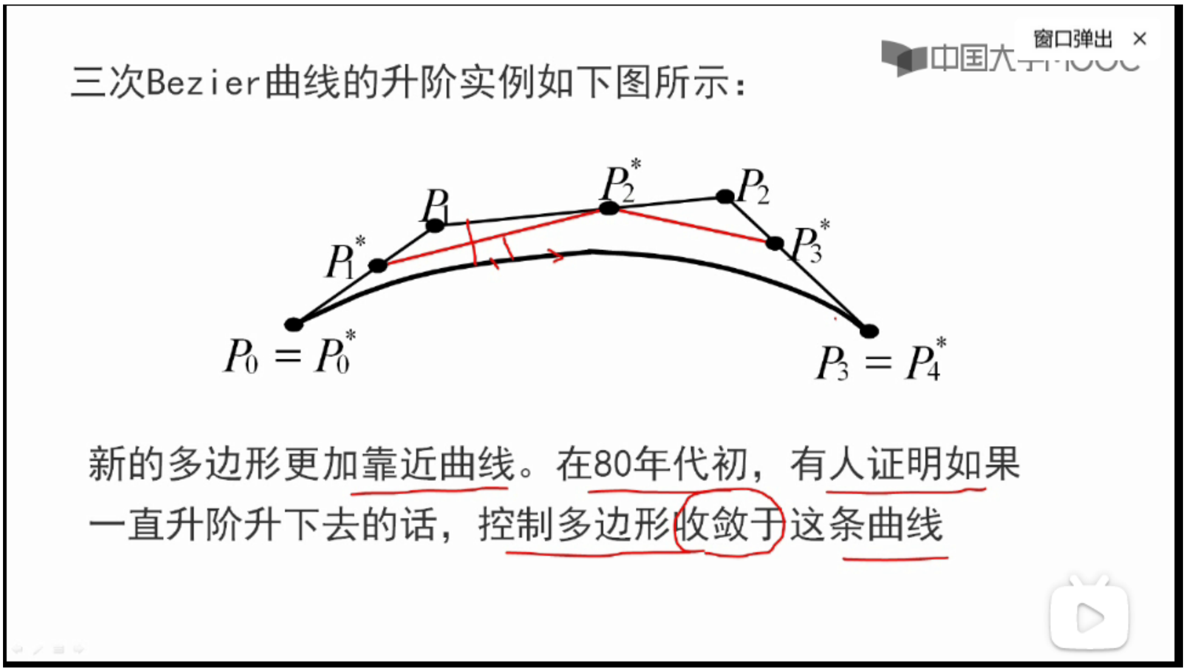
G1连续，导数项连续，末端点的导数，起始点的导数与临近点的连线方向相等，所以就是保证P(n-1),p(n)same to Q(0),Q(1)on the same line

bezier曲线的升阶与降阶

升阶:保证曲线的形状和方向保持不变，但是要增加顶点个数。

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 0$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + 0 * t^3 = 0$$



升阶与降阶的重要性

1 他是CAD系统之间数据传递与交换的需要

2 他是系统中分段线性逼近的需要，通过逐次降阶，把曲面转换为直线平面，便于求交和曲面绘制。

3 T他是外形信息压缩的需要，降阶处理之后可以减少存储的信息量。

B样条

bezier曲线有很多优点，交互性特别强，设计人员用鼠标拖动顶点就可以改变曲线的形状，给了设计人员很大的自由。

不足：1一旦确定了特征多边形的顶点的个数n+1个，也就确定了曲线的阶数n。

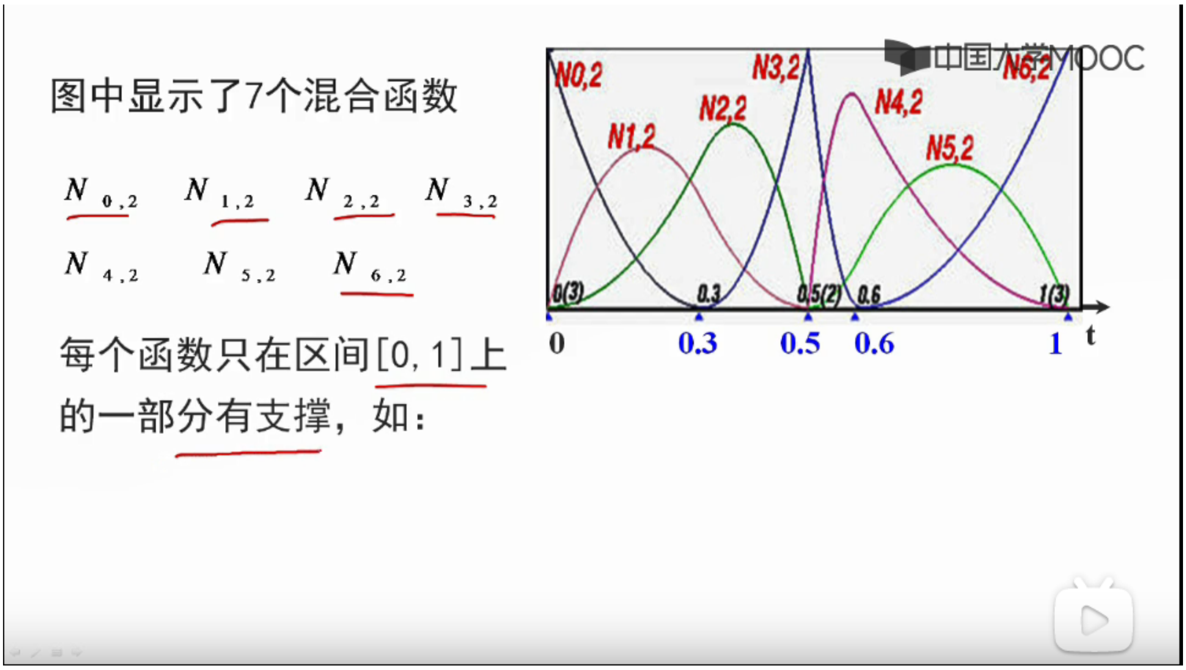
2 拼接复杂，多条曲线一起存在的情况下

3 bezier曲线或者曲面不能做局部的修改。改变一个顶点，整个曲线都会改变，为什么？

先想一下一个三次普通曲线的的基函数

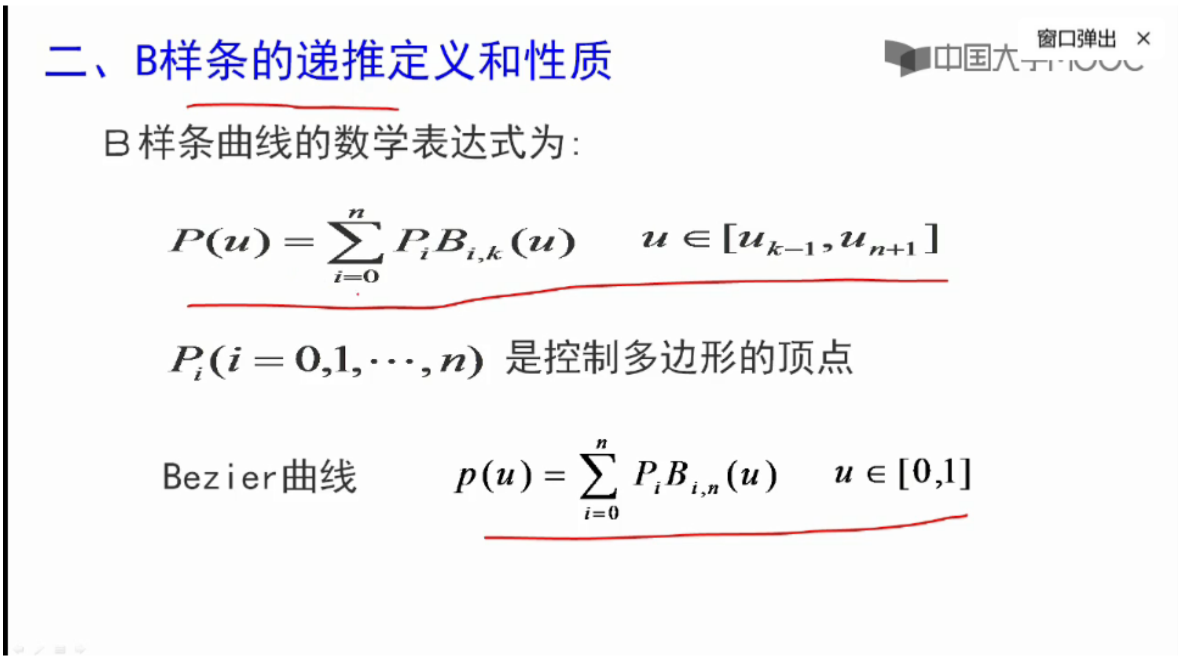
首先一个定义，函数值不为零的区间我们称它为支撑区间，因为bezier多项式在整个区间0-1上都有支撑，且曲线是这些函数的混合，所以每个控制顶点，对于0到1之间的t值都是有影响的。

为了克服这些不足，我们看下面的图



样条：分段连续多项式。整条曲线是一个完整的表达形式，但内在的量是一段一段的，比如一堆三次曲线拼过去，两条之间满足二次连续。这样既克服了波动现象，曲线又是低次的，既有统一的表达式，又有统一的算法。

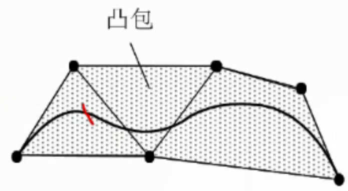
如何进行分段呢？现在假设有n+1个点，每两个点之间构造一条多项式，n+1个点有n个小区间；每个小区间构造一条三次多项式，变成了n段的三次多项式拼接在一起，段与段之间要两次连续，这就是三次样条。



4、凸包性：

B样条曲线落在P_i构成的凸包之中。其凸包区域小于或等于同一组控制顶点定义的Bezier曲线凸包区域

凸包就是包含右边这6个顶点的最小凸多边形。凸多边形是把多边形的每条边延长，其它边都在它的同一侧



Bezier曲线的凸包性