Mathematik - Zusammenfassung fürs Abitur

Maximilian Penke

January 2024

Abstract

Dies ist eine Zusammenfassung für die Inhalte des Berliner Abiturs von 2024 im Fach Mathematik. Dabei ist des in die drei Hauptthemen unterteilt, wobei es jeweils Differenzierungen gibt. Dafür werden die Inhalte der Einzelthemen erklärt, mit der allgemeinen Umsetzungsweise versehen und darauf folgend mit unterschiedlichen Beispielen.

Gliederung

1 Analysis

1.1 Gleichungen und Gleichungssysteme

Gleichung Eine Gleichung beschreibt das Verhältnis von zwei Termen mit einem sog. Gleichungsoperator (=,<,>,<=,>=,≠). Eine Gleichung kann nur aus Zahlen bestehen (1=1; $1 < 2$; $4 \neq 5$; usw.), aber auch aus Variablen (a=b; x=5; $z^2 = 25$).

Gleichungssysteme Eine Reihe von Gleichungen, die im selben Kontext stimmen, nennt man Gleichungssystem. Die Gleichungen eines Gleichungssystems werden meist mit römischen Ziffern (I; II; III) denotiert. Beispiel:

$$I \quad 5a + 2b + c = 0$$

$$II \quad -2a + b = 5$$

$$III \quad c - 10 = 0$$

Mit einem solchen Gleichungssystem sind wir in der Lage, die Werte der Variablen herauszufinden. An unserem Beispiel würde das wie folgt aussehen:

$$III \quad c - 10 = 0 \quad | + 10$$

$$c = 10$$

c=10 in I einsetzen:

$$I \quad 5a + 2b + 10 = 0 \quad | - 2b \quad - 10$$

$$5a = -2b - 10 \quad | \div 5$$

$$a = -\frac{2}{5}b - 10$$

$a = -\frac{2}{5}b - 10$ in II einsetzen:

$$II \quad -2(-\frac{2}{5}b - 10) + b = 5$$

$$\frac{4}{5}b + 20 = 5 \quad | - 20$$

$$\frac{4}{5}b = -15 \quad | \cdot \frac{5}{4}$$

$$b = -18.75$$

b=-18.75 und c=10 in I einsetzen:

$$I \quad 5a + 2(-18.75) + 10 = 0 \quad | - 10$$

$$5a - 37.5 = -10 \quad | + 37.5$$

$$5a = 27.5 \quad | \div 5$$

$$a = 5.5$$

Also ist $a = 5.5$, $b = -18.75$, $c = 10$
Gleichungsysteme können auch zur Rekonstruktion von Funktionen verwendet werden (siehe 1.7).

1.2 Differenzialrechnung

Was ist Differenzialrechnung? Um lokale Änderungen/Steigungen von Funktionen zu bestimmen kann man die Differenzialrechnung verwenden. Man kann mit ihr ebenfalls Steigungsänderungen bestimmen.

Steigerungsbestimmung von Funktionen über Intervalle Um die Steigung von Funktionen über Intervalle zu betrachten sind typische Steigungsdreiecke praktisch, da man sie visuell gut darstellen kann und sie ein Werkzeug sind welches in der Mittelstuffe bereits Verwendung gefunden hat.

Differenzenquotient:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Differenzialquotient:

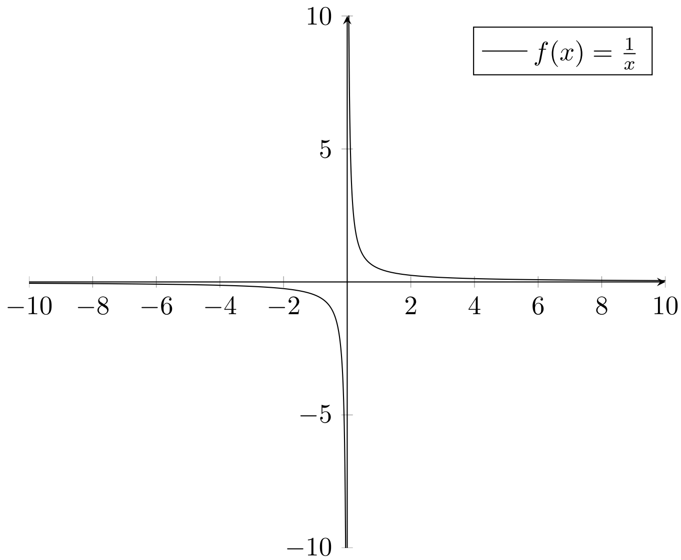
$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

1.3 Ableitungsregeln und Ableitungsbegriff

1.4 Integralrechnung

1.5 Grenzwerte

Was sind Grenzwerte? Eine Funktion kann unterschiedliche Grenzwerte besitzen, wenn überhaupt. Grenzwerte sind Annäherungen einer Funktion wo diese sich in der Umgebung dessen ein bestimmtes verhalten einnehmen. Diese Grenzwerte können konktete Werte einnehmen oder auch Symbolische werte, wie ∞.
Beispiel: Die Funktion $\frac{1}{x}$ kann beispielsweise nicht für den x-Wert 0 keinen Wert haben. Die Funktion verhält sich jedoch mit einem Annähern an 0 mit höheren Werten jeh näher man an sie heran kommt. Ebenfalls nähert sie sich für immer größere x-Werte immer näher Null.



Verhalten nahe Null:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Verhalten nahe x = 0 Das Verhalten einer Funktion nahe des Koordinatenursprunges ist von Funktion zu Funktion unterschiedlich. Funktionstypen wie Polynomfunktionen sind Durchgängig definiert und haben nahe Null nur die eigenschaft das ihre Funktionsglieder mit geringeren Exponenten Deutlicher zum Vorschein kommen. Bei Gebrochenrationalen Funktionen ist es Jedoch der Fall das sie für $x = 0$ nicht definiert sind.

Funktionstyp	$\lim_{x \nearrow 0}$	$\lim_{x \searrow 0}$
Polynomfunktionen		
Exponentialfunktionen		
Logarithmusfunktionen		
Gebrochenrationalefunktionen		
Wurzelfunktionen		

Zu beachten ist das sich das verhalten jeweils abhängig vom Vorzeichen anpasst.

Verhalten im Unendlichen Foo

Funktionstyp	$\lim_{x \to +\infty}$	$\lim_{x \to -\infty}$

1.6 Definitionslücken

1.7 Rekonstruktion

Was ist Rekonstruktion? Zur Rekonstruktion einer Funktion werden gewisse Bedingungen vorausgesetzt, die in ein Gleichungssystem (siehe 1.1) umgewandelt werden können. Häufig werden Funktionsstrukturen vorgegeben welche man verwenden muss, bspw. Polynom-, Exponential- oder Gebrochenrationalefunktione.
Beispiel: Ein Helikopterflug kann annähernd durch eine Parabel beschrieben werden (Zeit auf der x-Achse in Minuten,

Höhe auf der Y-Achse in Kilometer).
Der Helikopter erreicht seine maximale Flughöhe von 10 nach 20 Minuten. ($\rightarrow f(20) = 10 \rightarrow f'(20) = 0$)
Der Helikopter hebt bei t=0 ab. ($\rightarrow f(0) = 0$)

$$I \quad 10 = 400a + 20b + c$$
$$II \quad 0 = 40a + b$$
$$III \quad c = 0$$

c=0 in I einsetzen:

$$I \quad 10 = 400a + 20b \quad | - 400a$$
$$10 - 400a = 20b \quad | \div 20$$
$$0.5 - 20a = b$$

$b = 0.5 - 20a$ in II einsetzen:

$$0 = 40a + (0.5 - 20a)$$
$$0 = 20a + 0.5 \quad | - 0.5 \quad \div 20$$
$$a = -\frac{1}{40}$$

$a = -\frac{1}{40}$ in I einsetzen:

$$I \quad 400(\frac{1}{40}) + 20b = 10$$
$$\frac{1}{10} + 20b = 10 \quad | - 0.1 \quad \div 20$$
$$b = 0.495$$

Mit $a = -\frac{1}{40}$, $b = 0.495$ und $c = 0$, ergibt sich:

$$f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 0.495x$$

Das Aufstellen der Bedingungen kann auf verschiedenem Wege erfolgen. Auch Integrale und zweite Ableitungen können dabei eine Rolle spielen. Lies dazu am Besten 1.4 und 1.3.

2 Analytische Geometrie

2.1 Zwei- bzw.dreidimensionales Koordinatensystem

2.2 Vektoren im Anschauungsraum

2.3 Affine Geometrie

2.4 Metrische Geometrie

3 Stochastik

3.1 Einführung in die Stochastik

3.2 Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung

3.3 Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung als spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

3.4 Normalverteilung als spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung

3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

3.6 Methoden der beurteilenden Statistik

1. Polynomfunktionen

2. Gebrochenrationalefunktionen
3. Wurzelfunktionen
4. Exponentialfunktionen
5. Logarithmusfunktionen
6. Test