

## Содержание

<b>Содержание</b>	<b>2</b>
<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачи и основные соотношения</b>	<b>5</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	5
1.2 Основные соотношения . . . . .	7
<b>2 Решение системы</b>	<b>14</b>
2.1 Метод конечных разностей во временной области . . . . .	14
2.2 Параметры системы. Обезразмеривание . . . . .	16
2.3 Условия поглощения . . . . .	20
2.4 Условие устойчивости разностной схемы . . . . .	21
<b>3 Эффективность энергетических преобразований</b>	<b>22</b>
3.1 Энергия, запасенная в остаточном токе . . . . .	22
3.2 Энергия излученная системой. Коэффициент полезного действия . . . . .	25
<b>4 Результаты расчетов</b>	<b>27</b>
4.1 Энергетические зависимости. Оптимальный набор параметров . . . . .	29
<b>Заключение</b>	<b>34</b>
<b>Приложение</b>	<b>35</b>
<b>Список литературы</b>	<b>36</b>

## Введение

Изучение ионизированных структур, в том числе, плазмы, в отдельности, является одним из приоритетных направлений в области как теоретической, так и прикладной физики. Особенную роль играет способность подобных структур к генерации электромагнитных волн под внешним воздействием. С учетом того, что изучаемая в таких случаях плазма по факту представляет из себя сильно ионизированный газ, под внешним воздействием обычно понимают электромагнитное поле разной формы, структуры, и способа генерации, хотя чаще всего в прикладных исследованиях и экспериментах используют именно лазерную генерацию. Таким образом конструируются и моделируются лазерно-плазменные излучатели.

В данной работе численно исследуется группа однотипных частных случаев такой генерации, когда в некий определенный, далее называемый начальным моментом, бесконечно малый (узкий) промежуток времени в плазме заданной формы и структуры возбуждается ток, после чего задачей исследователя является изучение того, как данная система будет себя вести в дальнейшем во времени и пространстве. То есть одной из главных задач в подобных работах, в том числе и этой, является получение и изучение пространственно временной эволюции магнитных и электрических полей, а также аналогичного распределения (эволюции) тока. После этого с полученными данными уже можно работать производя дальнейшие известные и, впрочем, стандартные преобразования, такие как, получение спектральных характеристик, нахождение энергетических зависимостей и так далее. Впрочем, на точность и правдоподобность уже этих данных будет влиять качество и точность построенного пространственно временного распределения, что отчасти имеет отражение и в данной работе.

Данная работа фактически является продолжением и модификацией задачи о моделировании плазменного цилиндрического излучателя. Однако в данной задаче дополнительно добавляется и учитывается новое явление касательно распространения ионизации внутри самого излучателя. То есть мы фактически снимаем одну из идеализаций в постановке задачи и делаем последнюю более приближенной к реальным исследуемым моделям.

Для изучения поставленного вопроса – как и в предыдущий раз – требуется

не столько вычислительная мощность, сколько корректно настроенный алгоритм, на входе которого «подаются» определенные параметры поставленной задачи, а на выводе получаются требуемые к нахождению данные, причем они должны быть согласованы с теорией и если отличаться от неё, то на очень малую величину. Основной задачей данной работы является создание такого алгоритма в виде вычислительного кода. Поставлена задача создания такого вычислительного кода для решения точных уравнений Максвелла применимо к заданной системе, описанной ниже.

## 1. Постановка задачи и основные соотношения

### 1.1. Постановка задачи

Пусть дан цилиндр радиуса  $R_2$ , бесконечный вдоль своей оси (оси  $z$ ), заполненный газом. Пусть вдоль оси  $z$  в начальный момент времени попадает ультракороткий лазерный импульс такой конфигурации, что данный газ мгновенно ионизируется в точке «попадания» импульса и эта ионизация начинает распространяться по  $z$  с заданной скоростью  $V$ , называемой «бегучестью плазмы». Ионизация порождает бегущий ионизационный фронт остаточного тока и заданной концентрации заряженных частиц в плазме. Причём эта концентрация равномерно распределена по сечению цилиндра и имеет заданное симметричное – не зависящее от полярного угла – пространственное распределение по радиусу цилиндра. От его оси при  $r = 0$  до определенного радиуса  $R_1 = \text{const}$  плазменная концентрация равна определенному заданному значению  $N_0$ , далее от  $R_1$  до  $R_2$  плавно спадает до нуля, после чего, соответственно, переходит в вакуум.

Обозначим такой закон спадания концентрации в сечении цилиндра как некую заданную функцию  $f(r)$ :

$$f(r) = \begin{cases} 1, & r < R_1 \\ \cos^2 \left( \frac{\pi(r-R_1)}{2(R_2-R_1)} \right), & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Концентрация и плазменная частота равны соответственно:

$$N(r) = N_0 f(r) \quad (1.2)$$

$$\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 f(r) \quad (1.3)$$

Распределение плазменной концентрации (1.2) в таком случае имеет вид:

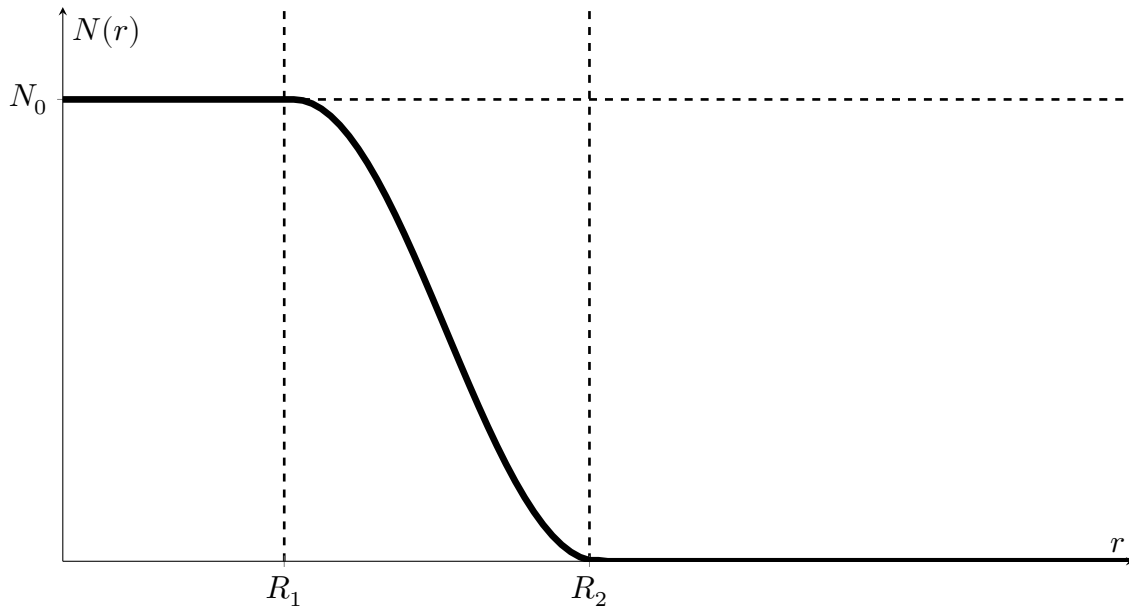


Рис. 1: Распределение плазменной концентрации в зависимости от  $r$ .

А сечение цилиндра схематично представлено на рис.2

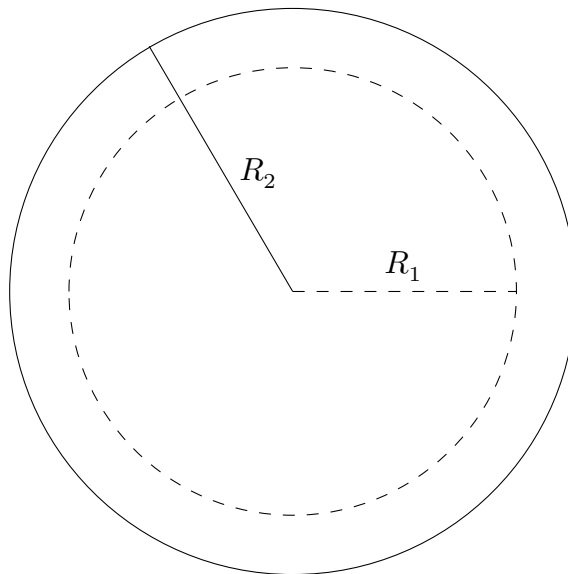


Рис. 2: Сечение цилиндра

Положим что в начальный момент времени одновременно во всем пространстве цилиндра возбуждается ток с заданной плотностью (1.4)

$$\vec{j}|_{t=0} = j_0 f(r) \cdot \vec{x}_0, \quad j_0 = const \quad (1.4)$$

При этом поля в начальный момент времени нулевые:

$$\vec{E}|_{t=0} = 0; \quad \vec{H}|_{t=0} = 0 \quad (1.5)$$

То есть ток возбуждается вдоль оси  $x$ , которая, в свою очередь, перпендикулярна оси цилиндра  $z$ . Данное распределение начального тока даёт нам возможность искать дальнейшее решение задачи в *дипольном* виде, с заданной зависимостью от полярного угла, при этом подобная зависимость компонент полей и токов позволит нам значительно упростить решение задачи, сведя его к одномерному радиальному распределению искомых функций.

## 1.2. Основные соотношения

Найдём выражение для плотности тока в плазме, используя известные соотношения (1.6) – (1.10). Мы знаем определение плотности тока, как упорядоченного движения заряженных частиц. Пренебрегаем движением ионов в плазме по причине их много большей массы по сравнению с массой электронов. Будем считать что в изучаемой нами плазме движению подвержены только электроны.

$$\vec{j} = eN_e\vec{v} \quad (1.6)$$

где  $j$  – искомая плотность тока,  $e$  и  $(N_e \equiv N)$  – заряд электрона и концентрация электронов в плазме соответственно. Продифференцируем (1.6) один раз по времени

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = eN \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (1.7)$$

а также запишем уравнение движения в электрическом поле плазменных частиц с учётом их соударений – в таком случае вводится аналог силы трения

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e\vec{E} - m\nu\vec{v} \quad (1.8)$$

где  $e$  – модуль заряда электрона,  $m$  – масса электрона,  $N$  – концентрация электронов в плазме,  $\nu$  – частота соударений частиц. Подставим (1.8) в (1.7), предварительно разделив обе части уравнения (1.8) на  $m$ :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = eN \left( \frac{e}{m} \vec{E} - \nu \vec{v} \right) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{e^2 N}{m} \vec{E} - \nu e N \vec{v} \quad (1.10)$$

Используя (1.6) в (1.10), а также определение плазменной частоты (1.12) получаем окончательное уравнение для плотности тока в плазме:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} - \nu \vec{j} \quad (1.11)$$

где

$$\omega_p(r) = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N(r)}{m}} \quad (1.12)$$

Записав уравнения Максвелла в дифференциальной форме в системе СГС вместе с уравнением (1.12):

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} - \nu \vec{j} \end{cases} \quad (1.13)$$

мы получим основную фундаментальную систему уравнений, которую мы будем использовать для дальнейших расчетов в данной работе.

Используя (1.4), упростим систему (1.13): так как искомая система представляет собой бесконечный цилиндр, проще всего будет искать решение в цилиндрической системе координат. Разложим начальный импульс (1.4) по векторам не декартовой, а цилиндрической СК.

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \quad (1.14)$$

То есть:

$$\vec{x}_0 = \cos \varphi \cdot \vec{r}_0 - \sin \varphi \cdot \vec{\varphi}_0 \quad (1.15)$$

Также распишем систему (1.13) в цилиндрической СК:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial j_{(r,\varphi,z)}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{(r,\varphi,z)} - \nu j_{(r,\varphi,z)} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, представим все исследуемые компоненты как произведение функции, зависящей только от времени и координаты на функцию, зависящей только от полярного угла.

$$\left\{ \begin{array}{l} j_r = j_r(r, t) \cos \varphi; \quad j_\varphi = j_\varphi(r, t) \sin \varphi; \quad j_z = j_z(r, t) \cos \varphi; \\ E_r = E_r(r, t) \cos \varphi; \quad E_\varphi = E_\varphi(r, t) \sin \varphi; \quad E_z = E_z(r, t) \cos \varphi; \\ H_r = H_r(r, t) \sin \varphi; \quad H_\varphi = H_\varphi(r, t) \cos \varphi; \quad H_z = H_z(r, t) \sin \varphi; \end{array} \right. \quad (1.17)$$



Получаем систему с так называемым *дипольным* решением, с заданной зависимостью от угла, при этом сами исследуемые в дальнейшем компоненты в (1.17) зависят только от времени, радиальной координаты, то есть от расстояния от оси цилиндра и координаты  $z$ . Учитывая то, что система уравнений (1.16) есть система уравнений в частных производных, подставив (1.17) в (1.16), получаем промежуточную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} E_z + \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{1}{r} H_z - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial j_{(r,\varphi,z)}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{(r,\varphi,z)} - \nu j_{(r,\varphi,z)} \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Для учета в системе уравнений бегучести плазмы введём новый параметр  $\xi$  – аналогичный времени  $t$ , и имеющий такую же размерность.

$$\xi = t - \frac{z}{V} \quad (1.19)$$

Где  $V$  – уже упомянутая бегучесть (скорость распространения ионизационного фронта). Производные по  $z$  и по  $t$  будут равны соответственно

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.21)$$

Подставляя новые производные в (1.18), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} E_z - \frac{1}{V} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{V} \frac{\partial E_r}{\partial \xi} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \\ \frac{1}{r} H_z + \frac{1}{V} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} = \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{V} \frac{\partial H_r}{\partial \xi} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial j_{(r,\varphi,z)}}{\partial \xi} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{(r,\varphi,z)} - \nu j_{(r,\varphi,z)} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Система (1.22) содержит зависимости производных  $H_r = H_r(E_\varphi); H_\varphi = H_\varphi(E_r);$   
 $E_r = E_r(H_\varphi); E_\varphi = E_\varphi(H_r)$ , однако окончательная система уравнений должна содержать только прямые зависимости от  $r$  и  $\xi$  для устранения «перекрестных» зависимостей последовательно выразим одну производную через другую и приведя

подобные слагаемые, получаем окончательную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left( \frac{1}{r} H_z + \frac{c}{V} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_r \right) = \frac{\partial E_r}{\partial \xi} \\ \left( \frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left( -\frac{c}{V} \frac{1}{r} E_z - \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} \\ \frac{c}{r} \left( \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) - 4\pi j_z = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \\ \left( \frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left( \frac{1}{r} E_z + \frac{c}{V} \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) \right) = \frac{\partial H_r}{\partial \xi} \\ \left( \frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left( \frac{c}{V} \left( \frac{1}{r} H_z - \frac{4\pi}{c} j_r \right) + \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} \\ -\frac{c}{r} \left( \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) = \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial j_{r,\varphi,z}}{\partial \xi} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{r,\varphi,z} - \nu j_{r,\varphi,z} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Для более наглядного и локального объяснения существования конечной скорости распространения ионизационного фронта можно перейти от базиса волновых скоростей к базису волновых чисел. По определению, фазовая скорость распространяющейся волны  $V_\phi = \frac{\omega}{h}$ , где  $h$  – продольное волновое число, волновое число  $k = \frac{\omega}{c}$ . Через соотношение  $\frac{h}{k}$  мы приходим к описанию распространения волны с помощью угла  $\theta$  относительно оси (направления) её распространения. То есть

$$\cos \theta = \frac{h}{k} = \frac{c}{V} \quad (1.24)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{V^2 - c^2}{V^2}} \quad (1.25)$$

– основные соотношения для данного описания.

Таким образом, коэффициенты в (1.23) могут быть преобразованы с учетом указанных выше соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_r}{\partial \xi} = \left( \frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left( \frac{1}{r} H_z + \cos \theta \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_r \right) \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} = \left( \frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left( -\cos \theta \frac{1}{r} E_z - \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = \frac{c}{r} \left( \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) - 4\pi j_z \\ \frac{\partial H_r}{\partial \xi} = \left( \frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left( \frac{1}{r} E_z + \cos \theta \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) \right) \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} = \left( \frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left( \cos \theta \left( \frac{1}{r} H_z - \frac{4\pi}{c} j_r \right) + \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial \xi} = -\frac{c}{r} \left( \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) \\ \frac{\partial j_{r,\varphi,z}}{\partial \xi} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{r,\varphi,z} - \nu j_{r,\varphi,z} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Стоит отметить, что аналогичная задача с мгновенным распространением ионизации (то есть при  $V \rightarrow \infty$  и  $\theta = \pi/2$ ) является частным случаем данной задачи, и при подставлении соответствующих соотношений в систему (1.26) мы получим соотношения, полученные в решении предыдущей задачи.

Для полноценной постановки задачи с использованием дифференциальных уравнений, необходимо ввести не только начальные условия, но и граничные. Исходя из (1.18) мы ставим следующие граничные условия на границу  $r = 0$ :

$$H_z|_{r=0} = 0 \quad (1.27)$$

$$\left. \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1.28)$$

Также ставим граничные условия на излучение на бесконечности (так называемые условия Зоммерфельда):

$$\vec{E}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.29)$$

$$\vec{H}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.30)$$

## 2. Решение системы

Начнём с того, что решение поставленной задачи аналитическим методом если и представляется возможным, то крайне затратным в плане подбора и нахождения конкретной – может даже приближенной – функции от: времени, радиуса, начальных условий, и заданных параметров самой системы. Для решения задач, как подобных этой, так и многих других, когда каждая из переменных зависит от другой по определенному закону, используется численное моделирование дифференциальных уравнений. Способов, методов и схем такого моделирования современная наука знает очень много. Однако ввиду простоты реализации, достаточно интуитивно понятной схеме и вариативности, основным методом решения уравнений электродинамики является метод конечных разностей во временной области (КРВО). Хотя в научной литературе вне зависимости от основного языка статьи, исследования или научной работы чаще всего используется оригинальная англоязычная аббревиатура FDTD (англ. - Finite Difference Time Domain).

### 2.1. Метод конечных разностей во временной области

Данный метод, изначально описанный в работе [4], основан на дискретизации уравнений Максвелла и предназначен для решения точных задач электродинамики. Разностная схема основана на численном решении дифференциальных уравнений, когда вводится сетка по дифференцируемой переменной, и производная первого порядка представляется в геометрическом (пространственном) виде как разница значений дифференцируемой функции в соседних точках сетки, называемых *узлами*, деленная на разность значений переменной, по которой идёт дифференцирование, называемой шагом дискретизации. Обычно для упрощения расчетов и в угоду интуитивности сетка делается одномерной, то есть шаг дискретизации – это определенная фиксированная константа, данная условность используется и в данной работе.

Если мы применим разностную схему к уравнениям Максвелла одинаково для всех компонент полей и токов, мы столкнёмся с тем, что каждая отдельная компонента полей, исходя из (1.13), является соответствующей компонентой ротора другого поля, при этом эти зависимости взаимны друг с другом, то есть

электрическое поле это пространственный вихрь (проще – ротор) поля магнитного, и наоборот. Чтобы рассчитать одно поле в одной точке пространства, необходимо найти изменение другого поля в этой же точке, а изменение другого поля – это с точностью до шага по пространству разность значений поля в двух соседних точках. При этом расчеты придется вести не в каждом узле, а через один, что в конечном итоге приводит нас к тому, что само пространство легче и интуитивнее разбить на сетку не с одинарным шагом, а с половиной этого шага, просто определенные компоненты нужно сдвинуть по сетке на полшага, а другие оставить на основных узлах, и производить расчеты независимо по методике из предыдущего абзаца.

Для декартовой системы координат такое разбиение выглядит следующим образом:

Как и было сказано ранее, все компоненты полей разнесены в пространстве друг относительно друга. Для цилиндрической системы координат разбиение по сетке будет строиться по аналогичному принципу, рассмотренному в [3].

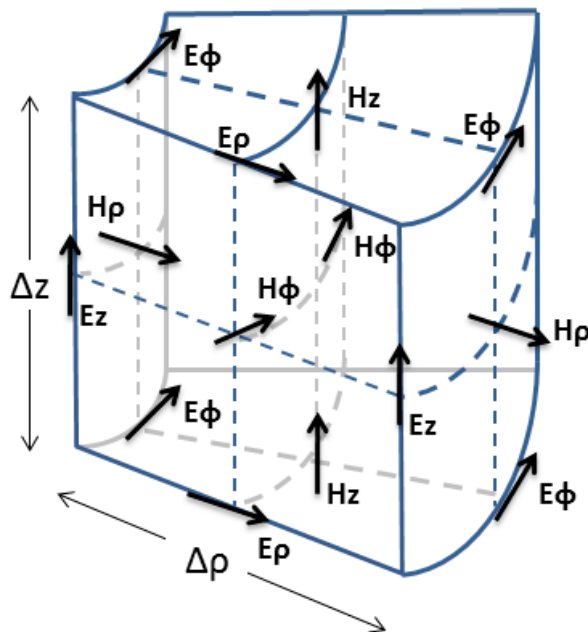


Рис. 3: Трехмерная сетка для цилиндрической СК.

Для приведения численной схемы к требуемой в данной задаче, необходимо убрать зависимость от  $z$ , и представить зависимость от  $\varphi$  как (1.17). То есть сетка визуально будет выглядеть одномерно, в расчетах будет использоваться

одномерная зависимость поля и токов от  $r$ , однако на самом деле сетка будет являться двумерной, но с заданной зависимостью от одной из переменных. Это объясняет наличие в точках с половинчатым шагом  $r = r(N + 1/2)$ , сразу двух компонент  $H_z$  и  $E_r$  с учетом того, что для разделения переменных и написании разностной схемы необходимо «разнести» в пространстве все исследуемые компоненты. Стоит отметить, что по причине разделения компонент в пространстве необходимо аналогичным образом разделить и временную сетку, то есть расчет фактически ведётся по половине шага, с чередованием рассчитываемых полей, аналогично расчетам по пространству.

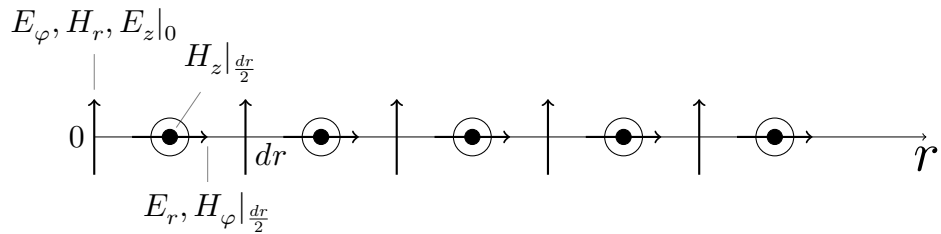


Рис. 4: Одномерная сетка (проекция трёхмерной сетки на ось  $Or$ ) для цилиндрической СК.

## 2.2. Параметры системы. Обезразмеривание

Решения одинаковых точных уравнений, аналогичных тем, что рассматриваются в данной работе, могут кардинально различаться в зависимости от заданных в постановке задачи параметров. Причем речь идёт не об ошибках в решении, возникающих при несоблюдении различных условий устойчивости. Под разницей в решениях понимается разница корректных, точных аналитических решений, аналогично достижимых численными методами. Изменяются энергетические, частотные, мощностные и другие характеристики системы.

Основные уравнения представляют собой компоненты  $E$ ,  $H$ ,  $J$  как размерные величины, т.е. полученные точные решения будут являться значениями полей и токов в системе СГС ввиду того, что сами точные уравнения изначально написаны в этой системе. Для упрощения анализа полученных данных данные уравнения требуется «обезразмерить», т.е. сделать такую замену  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{r}$  и  $\tilde{t}$ , чтобы эти величины являлись безразмерными, но при этом также связанными между собой.

Последовательно обезразмериваем:

- Плотность тока  $\vec{\tilde{j}} = \vec{j}/j_0$ ;
- Напряженность магнитного и электрического полей соответственно  $\vec{\tilde{H}} = \vec{H} (\omega_{p0}/4\pi j_0)$  и  $\vec{\tilde{E}} = \vec{E} (\omega_{p0}/4\pi j_0)$ ;
- Радиальную координату  $\tilde{r} = r\omega_{p0}/c$  (все параметры, связанные с радиусом цилиндра обезразмерены аналогично);
- Частоту соударений электронов с тяжелыми частицами  $\tilde{\nu} = \nu/\omega_{p0}$ ;
- Время  $\tilde{t} = \omega_{p0}t$ .
- Скорость распространения ионизационного фронта  $V = \tilde{V} \cdot c$

В качестве основных параметров системы задавались: частота соударений нормированная на максимальную плазменную частоту  $\tilde{\nu} = \nu/\omega_{p0}$ , внешний обезразмеренный радиус цилиндра  $\tilde{R}_2$  и безразмерное выражение  $\delta = (R_2 - R_1) / R_2$  характеризующее размер области спадания плазменной концентрации и частоты  $\omega_{p0}$  относительно размеров самого цилиндра (рис. 1 и рис. 2).

Используя описанную выше схему решения задачи, а также сетку на рис. 4, получаем окончательную систему уравнений:



$$E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} = E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{r} + \frac{\cos\theta}{\Delta r} \left( E_z|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right)$$

$$E_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} = E_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[ -\frac{\cos\theta}{r} E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta r} \left( H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right) - \frac{4\pi}{c} j_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right]$$

$$E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} = E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta\xi}{r} \left( \frac{rH_\varphi|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - rH_\varphi|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} - H_r|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) - 4\pi\Delta\xi j_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}$$

$$H_r|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = H_r|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[ \frac{E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{r} + \cos\theta \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta r} + \frac{4\pi}{c} j_r|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]$$

$$H_\varphi|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = H_\varphi|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[ \cos\theta \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{r} - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) + \frac{E_z|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right]$$

$$H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \frac{c\Delta\xi}{r} \left( \frac{rE_\varphi|_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - rE_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta r} + E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right)$$

$$\begin{cases} j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} = (1 - \nu\Delta t)j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ j_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} = (1 - \nu\Delta t)j_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ j_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} = (1 - \nu\Delta t)j_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r|_{i+\frac{1}{2}} = E_r|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\cos\theta}{\Delta r} (E_z|_{i+1} - E_z|_i) - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ E_\varphi|_i = E_\varphi|_i + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[ -\frac{\cos\theta}{r} E_z|_i - \frac{1}{\Delta r} (H_z|_{i+\frac{1}{2}} - H_z|_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{4\pi}{c} j_\varphi|_i \right] \\ E_z|_i = E_z|_i + \frac{c\Delta\xi}{r} \left( \frac{rH_\varphi|_{i+\frac{1}{2}} - rH_\varphi|_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} - H_r|_i \right) - 4\pi\Delta\xi j_z|_i \\ H_r|_i = H_r|_i + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[ \frac{E_z|_i}{r} + \cos\theta \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}} - H_z|_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{4\pi}{c} j_r|_i \right) \right] \\ H_\varphi|_{i+\frac{1}{2}} = H_\varphi|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[ \cos\theta \left( \frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}}{r} - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2}} \right) + \frac{E_z|_{i+1} - E_z|_i}{\Delta r} \right] \\ H_z|_{i+\frac{1}{2}} = H_z|_{i+\frac{1}{2}} - \frac{c\Delta\xi}{r} \left( \frac{rE_\varphi|_{i+1} - rE_\varphi|_i}{\Delta r} + E_r|_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ j_r|_{i+\frac{1}{2}} = (1 - \nu\Delta t)j_r|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi} f(r)E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ j_\varphi|_i = (1 - \nu\Delta t)j_\varphi|_i + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi} f(r)E_\varphi|_i \\ j_z|_i = (1 - \nu\Delta t)j_z|_i + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi} f(r)E_z|_i \end{array} \right.$$

где по  $n$  откладываются шаги по времени, а по  $i$  – шаги по  $r$ .

### 2.3. Условия поглощения

Для предотвращения «загрязнения» сигнала отражениями с другого конца оси  $r$ , то есть аналитически при  $r \rightarrow \infty$  недостаточно только обнулить производную саму функцию на конце границы расчета. В зависимости от поставленной задачи и моделируемой области могут использоваться различные граничные условия. Чаще всего используются условие идеально согласованных слоев (*perfectly matched layers – PML*), периодические условия для расчета периодических структур и условия идеального проводника на границе, когда в граничных точках поле берется всегда равным нулю. Последнее имеет очень серьезный недостаток, так как от такой границы идет полное отражение волны, и если требуется длительное наблюдение электромагнитного поля, отраженные от границ счетной области волны могут «загрязнять» сигнал и делать невозможным его дальнейший анализ. Для исключения отражения от границ области и был придуман способ идеально-согласованных слоев, описанный в [1]. В данной работе используются только условия идеально согласованных слоев, когда в определенной области расчетной сетки вводятся слои, поглощающие попадающее в него поле (расчет поглощения для токов существенно усложнил бы задачу, поэтому поглощение происходит в расчетном вакууме), причем относительно каждого отдельного слоя среда и её свойства изменяются несущественно, однако усиление поглощающих свойств происходит при продвижении от начала данных слоёв до их конца (обычно это происходит на границе расчетной области), где поглощение усиливается до максимума и дальнейшего прохода энергии через последний слой невозможно.

В частности, для PML, предназначенного для поглощения волн, распространяющихся в направлении  $r$ , как в данной работе, в волновое уравнение включено следующее преобразование. Всякая производная  $\partial/\partial r$  заменяется на:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{i\sigma(r)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.1)$$

где  $\omega$  – угловая частота поглощаемой волны и  $\sigma$  – некоторая функция от  $r$ , отвечающая за поглощение слоя в точке  $r$ . То есть  $dr \rightarrow dr(1 + i\sigma(r)/\omega)$ .

## 2.4. Условие устойчивости разностной схемы

При составлении пространственно-временных реализаций пространство и время, соответственно, поддаются дискретизации, и уже если и воспроизводят реальную картину исследуемого объекта, поля и.т.д., то с определенной неточностью. Можно также упомянуть тот факт, что все расчеты в численных методах производятся с помощью вычислительных машин (компьютеров), то есть к неточности дискретизации также добавляется машинная неточность самого компьютера.

В случае, рассматриваемом в данной работе, условием устойчивости метода конечных разностей является так называемое условие (критерий) Куранта – Фридрихса – Леви, или просто условие Куранта [7].

В текущей задаче и в цилиндрической СК это условие (2.2) будет выглядеть так:

$$\Delta\xi \leq \frac{\Delta r}{c\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

В свою очередь условие устойчивости для  $\Delta r$  будет следующим:

$$\Delta r \ll \frac{\nu}{\omega_{p0}} (R_2 - R_1) \quad (2.3)$$

### 3. Эффективность энергетических преобразований

Основной задачей, поставленной в данной работе, является определение оптимальных параметров (размеров) системы, при которых достигается максимально эффективное преобразование энергии, запасенной в образованном в момент мгновенной ионизации остаточном токе, в электромагнитную энергию излучения. Дальнейшие исследования полученных решений можно свести к изучению излучения волны, возбуждаемой данной системой (данным цилиндром) в вакуум. С учетом того, что цилиндр, представленный в данной задаче, является бесконечным, с бесконечно быстро распространяющимся фронтом ионизации, расчёт коэффициента полезного действия по определению сводится к нахождению отношения суммарной энергии, излученной системой за всё время к суммарной энергии, запасенной в цилиндре во всем пространстве. При этом обе энергии в виду бесконечности цилиндра, будут рассчитываться на единицу его длины.

#### 3.1. Энергия, запасенная в остаточном токе

Для дальнейших выводов воспользуемся соотношением:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.1)$$

а также воспользуемся соотношениями (1.6) и (1.12). Уравнение (1.12) есть определение зависимости плазменной частоты  $\omega_p$  от  $N(r)$ . Уравнение (1.6) – определение плотности тока в проводнике как упорядоченного движения электронов в нём. Уравнение (3.1) – кинетической энергии электрона, где  $m$  – его масса,  $v$  – его скорость.

Для нахождения запасенной энергии в токе (или же кинетической энергии электронов на единицу длины, а не на единицу объёма)

$$W_{\text{запасенная}} = W_{\text{кин ед дл}} = \iint W_{\text{кин ед об}} dS \quad (3.2)$$

– интеграл по поперечному сечению цилиндра  $dS$  от  $r = 0$  до  $r = R_2$ .

Кинетическая энергия системы является функцией от  $r$  и находится как произведение плазменной концентрации  $N(r)$  и кинетической энергии одного электрона (3.1).

$$W_{\text{кин ед об}} = N(r) \frac{mv^2}{2} \quad (3.3)$$

Таким образом выражение для энергии запасенной в системе на единицу длины цилиндра приобретает следующий вид:

$$W_{\text{запасенная}} = W_{\text{зап}} = \iint N(r) \frac{mv^2}{2} dS = \frac{m}{2} \iint Nv^2 dS \quad (3.4)$$

Из (1.6) мы можем получить  $Nv = j/e$ , а также  $v = j/Ne$ . Получим:

$$W_{\text{зап}} = \frac{m}{2} \iint \frac{j}{e} \cdot \frac{j}{eN} dS = \frac{m}{2e^2} \iint \frac{j^2}{N} dS \quad (3.5)$$

Из (3.1) мы можем получить выражение для  $N(r)$ .

$$N(r) = \frac{\omega_p^2(r)m_e}{4\pi e^2} = [\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 \cdot f(r)] = \frac{\omega_{p0}^2 m_e}{4\pi e^2} \cdot f(r) \quad (3.6)$$

Учитывая, что энергия «запасается» в начальный момент времени, значит и выражение для плотности тока мы должны искать по начальному распределению, то есть по начальному условию:

$$j(r)|_{t=0} = j_0 f(r) \quad (3.7)$$

$$W_{\text{зап}} = \frac{m}{2e^2} \iint \frac{j^2}{N} dS = \frac{m_e}{2e^2} \cdot \frac{4\pi e^2}{\omega_{p0}^2 m_e} \cdot j_0^2 \iint \frac{f(r)^2}{f(r)} dS \quad (3.8)$$

После сокращений и преобразований получаем:

$$W_{\text{зап}} = 2\pi \left( \frac{j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \iint f(r) dS \quad (3.9)$$

В интеграле по области  $S$  в цилиндрической системе координат элемент  $dS = r dr d\varphi$

$$W_{\text{зап}} = 2\pi \left( \frac{j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_2} r f(r) dr = \left( \frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \int_0^{R_2} r f(r) dr \quad (3.10)$$

$$\int_0^{R_2} r f(r) dr = \int_0^{R_1} r dr + \int_{R_1}^{R_2} r f(r) dr \quad (3.11)$$

$$\int_0^{R_2} r f(r) dr = \frac{R_1^2}{2} + \int_{R_1}^{R_2} r f(r) dr = \frac{R_1^2}{2} + \mathbf{I} \quad (3.12)$$

$$\text{Где } \mathbf{I} = \int_{R_1}^{R_2} r \cos^2 \left( \frac{\pi(r-R_1)}{2(R_2-R_1)} \right) dr = (R_2^2 - R_1^2) / 4$$

$$\begin{aligned} W_{\text{зап}} &= \left( \frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \int_0^{R_2} r f(r) dr = \\ &= \left( \frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \left( \frac{R_1^2}{2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{4} \right) = \\ &= \left( \frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \left( \frac{R_1^2 + R_2^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Получаем окончательное уравнение (3.14) для запасенной энергии:

$$W_{\text{зап}} = \left( \frac{\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 (R_1^2 + R_2^2) \quad (3.14)$$

### 3.2. Энергия излученная системой.

#### Коэффициент полезного действия

Энергия, преобразованная в излученную, по определению есть циркуляция продольной компоненты (в нашем случае, это компонента, направленная вдоль вектора распространения волны, то есть по координате  $r$ ) вектора Пойнтинга по замкнутому контуру, охватывающего сечение цилиндра.

Для получения конечного выражения для излученной энергии это выражение мы должны проинтегрировать по всему времени от 0 до  $\infty$ , чтобы получить значение излученной энергии на всем промежутке времени, то есть:

$$\begin{aligned} W_{\text{излученная на единицу длины}} &= W_{\text{изл}} = \int_0^{\infty} \left[ \oint S_r dl \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{2\pi} S_r r d\varphi \right] dt = \\ &\left[ \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{\varphi}_0 & \vec{z}_0 \\ E_r & E_\varphi & E_z \\ H_r & H_\varphi & H_z \end{vmatrix}; \quad S_r = (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) \right] \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{2\pi} (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) r d\varphi \right] dt \quad (3.15) \end{aligned}$$

Используя ранее созданную зависимость компонент  $E$  и  $H$  от угла  $\varphi$  (1.17), избавимся от соответствующего интеграла и получим окончательное выражение для  $W_{\text{изл}}$ :

$$W_{\text{изл}} = \frac{cr}{4\pi} \int_0^{\infty} \pi [E_\varphi H_z - E_z H_\varphi] dt = \frac{cr}{4} \int_0^{\infty} (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) dt \quad (3.16)$$

Запишем общее выражение для КПД в таком виде:

$$\eta = \frac{W_{\text{излученная на единицу длины}}}{W_{\text{запасенная на единицу длины}}} = \frac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{зап}}} \quad (3.17)$$



Коэффициент полезного действия считается используя (3.15) и (3.14):

$$\eta = \frac{\frac{cR_0}{4} \int_0^{\infty} (E_{\varphi} H_z - E_z H_{\varphi}) dt}{\left( \frac{\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 (R_1^2 + R_2^2)} \quad (3.18)$$

где интеграл в числителе легко находится с помощью численных методов нахождения интегралов заданной функции. Остальные параметры являются константными параметрами задачи.

#### 4. Результаты расчетов

Согласно введению, требуется разработать вычислительный код для решения всех, полученных выше, выражений. Ввиду нецелесообразности демонстрации кода в данной работе, само «тело» программы мы опустим и будем работать уже с конечными результатами действия этого кода.

В ходе расчетов были выявлены и получены пространственно-временные распределения электрического и магнитного полей, токов, а также спектральные характеристики излучаемой волны для каждого отдельного набора параметров. Пример получаемой кодом картины представлен на рисунке 5.

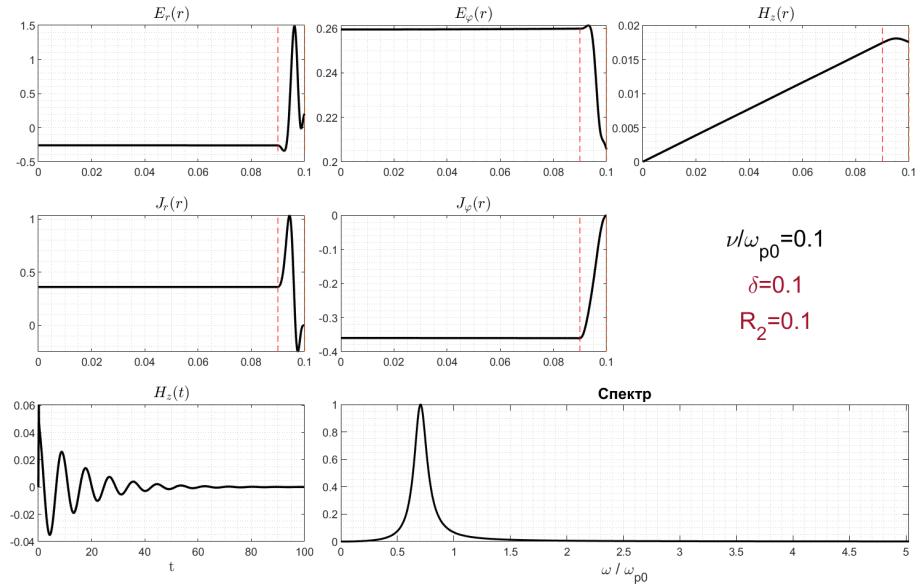


Рис. 5: Пространственно временная эволюция системы, а также спектр излученной волны при  $\nu/\omega_{p0} = 0.1$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $R_2 = 0.1$

На нём видно, что описанная нами система излучает волну определенной формы во внешнюю среду. При рассмотрении задач с другим набором параметров системы получается волна аналогичного вида, однако разница начинает проявляться при дальнейшей обработке полученных данных.

Рассмотрим рис. 5 более детально. Обратим внимание на распределение компонент полей и токов от координаты  $(E_r(r), E_\varphi(r), H_z(r), J_r(r), J_\varphi(r))$ . В зоне  $0.09 \leq r \leq 0.1$  или же  $R_1 \leq r \leq R_2$  отмечается резкое усиление полей и токов вокруг точки  $r = (R_1 + R_2) / 2$ . Подобный эффект называется *плазменным*

резонансом. В точке  $r = (R_1 + R_2) / 2$  согласно (1.3) и (1.1) локальная плазменная частота равна резонансной частоте, которую можно увидеть на спектре излучения, изображенном на рис. 5. При подобных параметрах системы резонансная частота равна  $\omega_{\text{рез}} = \omega_{p0} / \sqrt{2}$  и называется частотой *геометрического резонанса*.

При расширении зоны неоднородности плазмы (при увеличении  $\delta$ ) зона геометрического резонанса всё также остается в её середине, спектр расширяется, а сам резонанс более широко распределяется по области неоднородности.

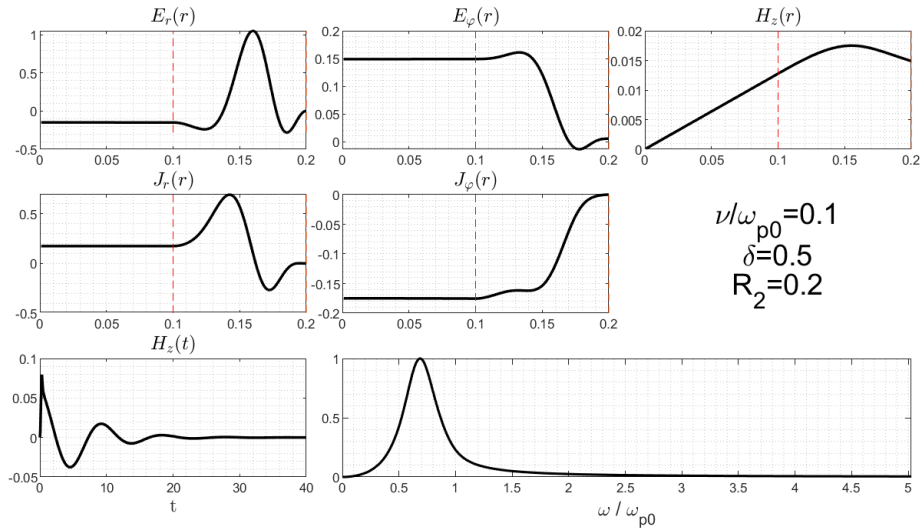


Рис. 6: Пространственно временная эволюция системы, а также спектр излученной волны при  $\nu/\omega_{p0} = 0.1$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $R_2 = 0.2$

Изображенные на рис. 5 и рис. 6 картины являются для данной работы показательными – с одной стороны – ввиду того, что они полностью согласуются с упомянутыми во введении исследованиями [2; 6], а с другой – при численном решении данной задачи необходимо накладывать существенные условия на точность расчетов: временные и пространственные шаги должны быть критически малы, а количество расчетов с ними должно происходить существенно больше. То есть численные ошибки и неточности вычислительной разностной схемы в случае задачи с малыми параметрами показали бы существенное отклонение и максимальное расхождение с теорией. То есть точность последующих расчетов является приемлемой, так как при численных расчетах критической задачи отклонений не обнаружено.

#### **4.1. Энергетические зависимости. Оптимальный набор параметров**

Для дальнейшего изучения системы с прикладной точки зрения имеет смысл поиск так называемого оптимума системы – в нашем случае оптимального набора параметров и условий, при которых обеспечивается наилучшее (самое эффективное) излучение – то есть мы должны стремиться к максимально эффективному преобразованию энергии, запасенной в остаточном токе, в энергию электромагнитного излучения заданной системы.

Стоит также объяснить прикладной смысл и соответствующие выкладки данной работы. В реальных исследуемых моделях (конструкциях) подобный тип излучения достигается с помощью мощного короткого ионизирующего лазерного импульса, когда за несколько фемтосекунд ( $\sim 10^{-15}$  сек) система из газа трансформируется в плазму (то есть происходит ионизация), при этом длительность этого импульса настолько мала, что электроны, ионы и нейтральные частицы не успевают существенно изменить свои положения в системе. То есть ионизированная система приобретает начальный импульс, который мы в уравнениях записываем как начальные условия, а уже после этого «удара» система начинает определенным образом эволюционировать и эту эволюцию мы и изучаем в данной работе. Ввиду таких коротких по времени возбуждений системы, а также ввиду того, что размер системы много больше дебаевского радиуса, мы пренебрегаем температурным воздействием системы на саму себя. В данной работе это выражается в том, что уравнение для плотности тока в (1.13) не содержит в себе прямую зависимость от температуры.

Конструкция полученной системы зависит как от типа, характера «заряжающего» импульса, так и от идеализации самой модели и выводов из неё, и прочих возможных допущениях, которые могут приниматься в зависимости от поставленной задачи. С изменением структуры системы, при изменении относительных размеров области спадающей границей по сравнению с участком плато наблюдается изменение колебательных свойств системы [6]. Как уже говорилось выше, когда  $\delta, \nu \rightarrow 0$ , то есть область неоднородности плазмы очень мала, система имеет только одну резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}} = \omega_{p0}/\sqrt{2}$ , так называемую «частоту геометрического резонанса» [5], которую можно обнаружить и с помощью данного вычислительного

кода (рис. 7). С уменьшением частоты соударений спектр должен сужаться в пределе до дельта-функции в точке геометрического резонанса, а с увеличением, соответственно, расширяться.

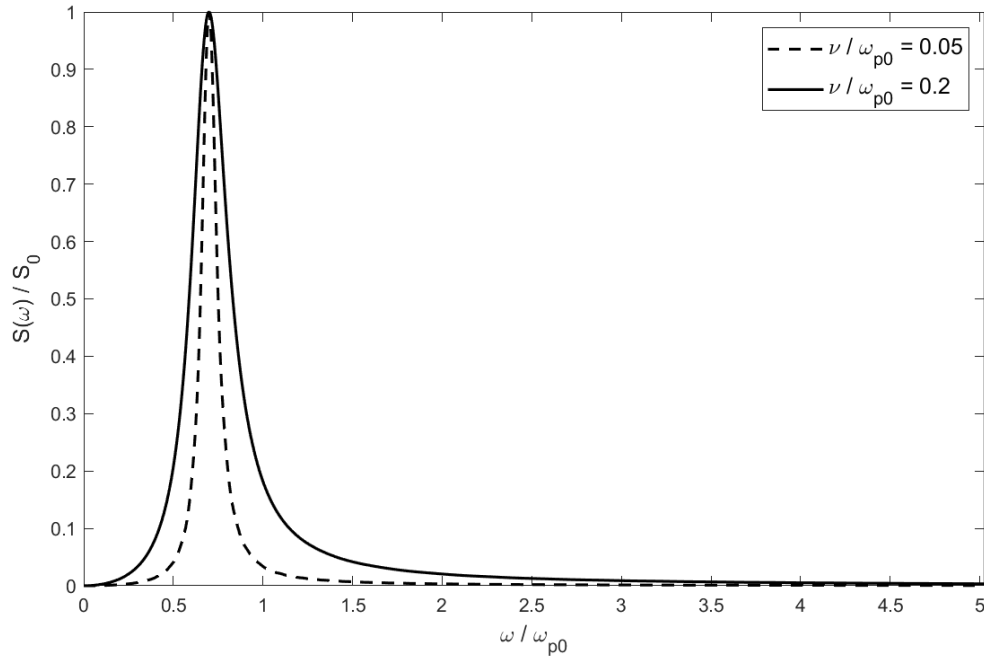


Рис. 7: Наблюдение геометрического резонанса при  $\delta = 0.1$ ,  $R_2 = 0.2$ , и различных значениях  $\nu/\omega_{p0}$  (0.05 и 0.2).

Когда же область спада приобретает определенный – отличный от бесконечно малого – размер, так как плазменная частота спадает от своего максимального значения до нуля, в этой области мы можем «дойти» до частоты, совпадающей с  $\omega_{p0}/\sqrt{2}$ . Ввиду того, что распределение плазменной концентрации, а значит и  $\omega_p$ , не изменяется от времени, а их распределение от  $r$  задано по (1.2),  $\omega_{рез} = \omega_{p0}/\sqrt{2}$  ровно посередине области переменной концентрации (то есть, при  $r = \frac{R_1+R_2}{2}$ ). Возникающий в данном случае эффект, когда плазменная частота совпадает с резонансной частотой, называется *плазменный резонансом*.

Возникновение плазменного резонанса порождает соответствующие энергетические потери в исследуемом объекте, причем если некоторые из возможных в данной задаче потерь всё же можно назвать полезными (например, потери радиационные – то есть энергия теряется на излучении системы – в их нахождении и эффективности основная суть данной работы) которые увеличивают эффективность моделируемого

плазменного излучателя, а потери на соударении электронов с тяжелыми частицами можно сравнить с потерями энергии колебательных систем на затухании, то потери на резонансе – естественно, являются потерями негативными – однако, они напрямую зависят от ширины области неоднородной плотности плазмы, то есть от параметра  $\delta$ . Потери на соударении присутствуют в любой системе, где частота соударений  $\nu$  ненулевая. Потери на излучении зависят от размеров системы, то есть от параметра  $R_2$ , и скорее связаны с её внутренними свойствами и способностями эффективно отдавать энергию, запасенную в остаточном токе. Подбор оптимальных параметров системы, когда энергия запасена в достаточном количестве, чтобы не поглотиться на резонансе и/или соударении, но при этом излученная энергия составляла бы бóльшую часть от запасенной, является основной задачей данной работы. Чем больше  $\delta$ , тем больше потери на резонансе преобладают над остальными потерями, что показывают расчеты на рисунке 10.

Полученные расчеты поставленной задачи с множеством параметров, а также последующий расчет коэффициента полезного действия по формуле (3.18) изображены на рисунке 8 (а, б).

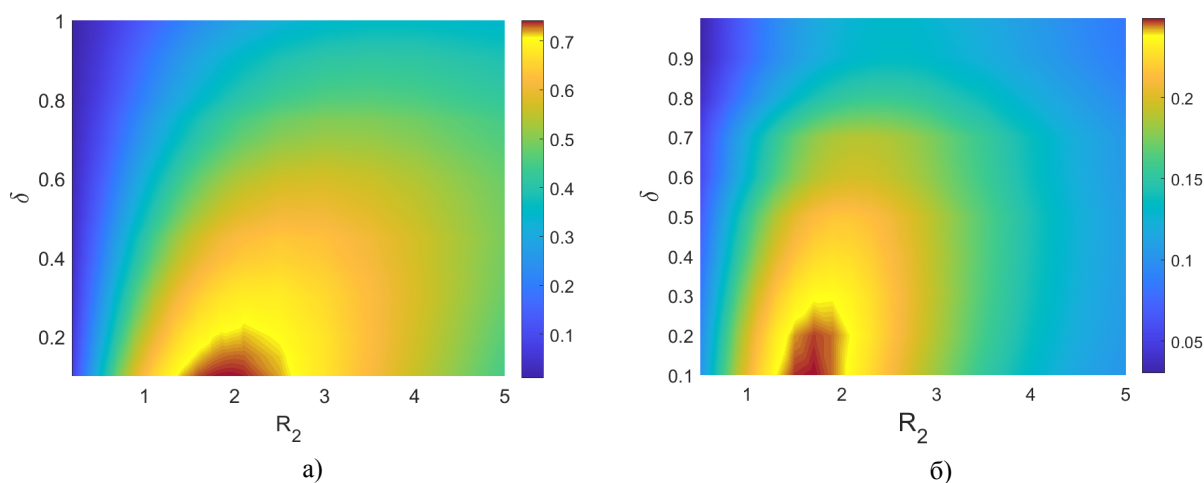


Рис. 8: Эффективность преобразования энергии, запасенной в остаточном токе в электромагнитную энергию излучения в зависимости от радиуса цилиндра  $R_2$  и размера неоднородной области  $\delta$  при  $\nu/\omega_{p0} = 0.1$  (а) и  $\nu/\omega_{p0} = 0.7$ .

Из полученных данных можно определить зону оптимальных значений  $R_2$  и  $\delta$  – при которых КПД максимальный, то есть бо́льшая часть энергии не переходит в негативные для нас потери, а излучается, то есть радиационные потери больше прочих. Также имеет смысл построить в оптимуме системы графики КПД от значений одного параметра при фиксированном значении другого и наоборот (рисунки 9 и 10).

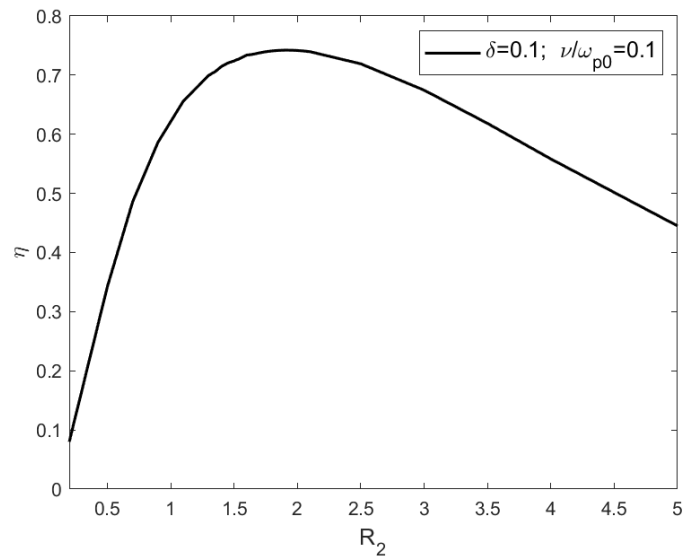


Рис. 9: Эффективность излучения при оптимальном размере неоднородной области  $\delta = 0.1$  в зависимости от радиуса цилиндра  $R_2$  ( $\nu/\omega_{p0} = 0.1$ ).

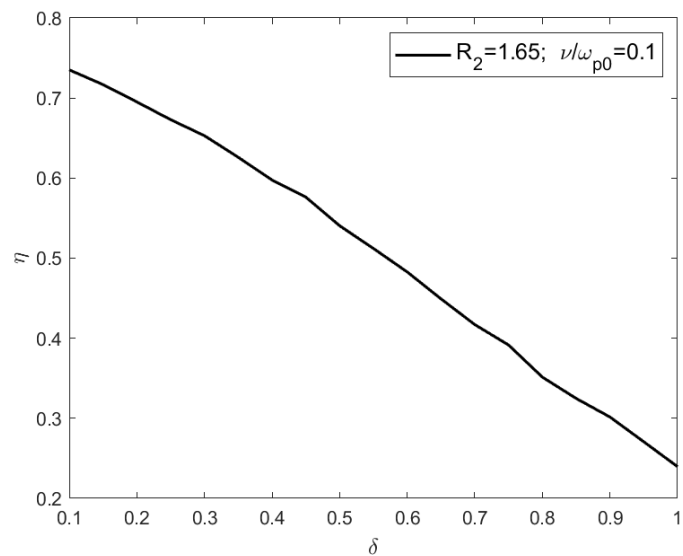


Рис. 10: Эффективность излучения при оптимальном радиусе цилиндра  $R_2 = 1.64$  в зависимости от размера неоднородной области  $\delta$ . ( $\nu/\omega_{p0} = 0.1$ ).

Графики зависимостей КПД от нормированной частоты соударений при двух фиксированных  $\delta$ , что объясняет две различные ситуации, когда зона спада плазменной плотности либо мала по сравнению с общими размерами цилиндра ( $\delta = 0.1$ ), либо составляет основную часть ( $\delta = 1$ ), расположены на рисунке 11. Полученный рисунок объясняет, что эффективная излучаемая энергия системы падает при увеличении количества соударений в ней, то есть вместо резонансных потерь доминировать начинают уже потери на соударениях.

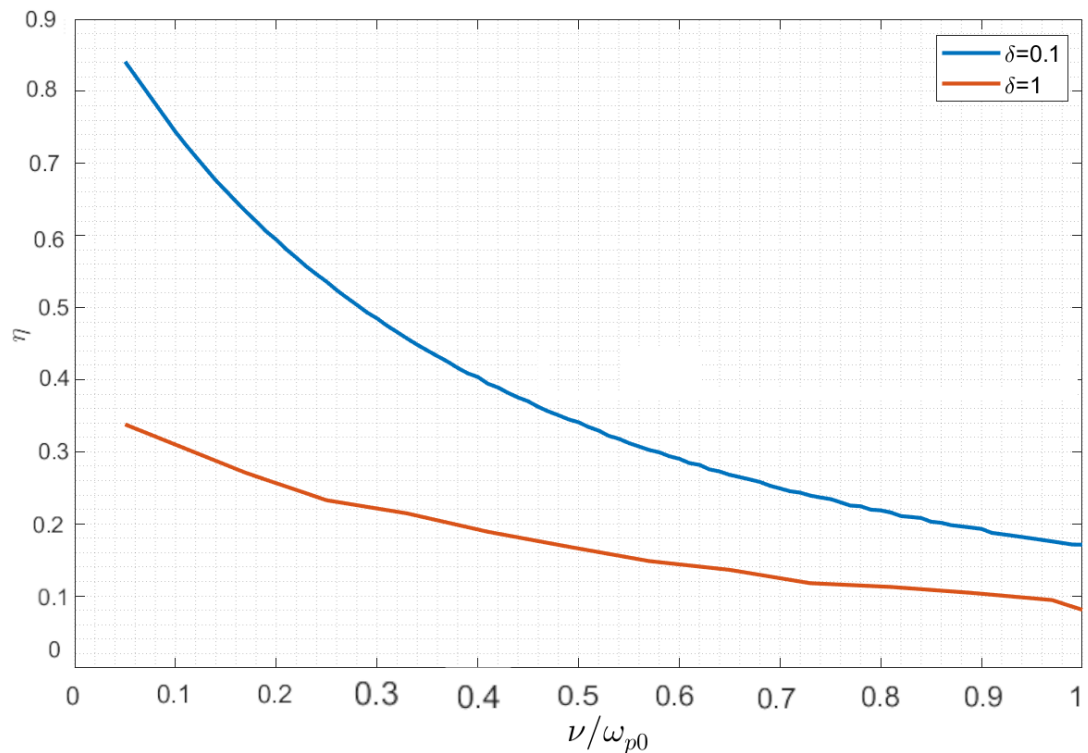


Рис. 11: Эффективность излучения в зависимости от частоты соударений  $\nu/\omega_{p0}$  при разных размерах неоднородной области  $\delta$ .



## **Заключение**

Разработана вычислительная программа на основе решения системы уравнений Максвелла в цилиндрической геометрии для расчета токов в плазме с быстро меняющейся плотностью и порождаемого ими электромагнитного излучение в плазме и окружающем пространстве.

На основе разработанной программы выполнены расчеты цилиндрического лазерно-плазменного излучателя электромагнитных (терагерцовых) волн и определена эффективность преобразования энергии, запасенной в остаточных токах, в излученную энергию. Показано, что эффективность сильно падает с увеличением степени неоднородности плазмы. Найдены оптимальные значения радиуса плазменного цилиндра, отвечающие наибольшей эффективности преобразования энергии остаточных токов в электромагнитное излучение.

## Приложение

В ходе исполнения учебной практики также была проведена работа в преподавательской части. Педагогическая (преподавательская) практика заключалась в принятии лабораторных работ на кафедре *электродинамики* по теме «**Исследование отражательного клистрона**» у трёх пар студентов 3-го курса по направлению «Специальные радиотехнические системы».

В ходе прохождения преподавательской практики требовалось:

1. Раздать студентам *методические пособия* по работе;
2. Принять *допуск* у каждого студента отдельно;
3. Проконсультировать студентов по вопросам выполнения *практической части* работы;
4. Принять отчеты о проделанной работе.

Допуск к лабораторной работе принимался в виде личной беседы. Основные вопросы, на которые отвечали студенты, следующие:

- Как устроен, из каких основных компонентов (составляющих) состоит отражательный клистрон?
- Каков принцип работы отражательного клистрона? В чем его основная функция?
- Каким образом происходит генерация СВЧ излучения?
- Что такое зоны генерации клистрона? Каков принцип их возникновения?
- Можно ли для возвращения электронного потока в резонатор клистрона использовать не постоянное электрическое, а постоянное магнитное поле?

После сдачи допуска группа(-ы) студентов выполняют экспериментальную практическую часть в соответствии с методическим пособием. При выполнении составляется протокол о проделанной работе, используя данные с которого, составляется итоговый отчет. Сдача отчета подразумевает личную беседу с вопросами, основанными на составленном отчете: проверяется подлинность измерений, точность и корректность их изображения в виде графиков/диаграмм/и т.д., а также оцениваются знания студентов по уже изученной работе.

## Список литературы

1. Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics / W. C. Chew [и др.]. — Boston : Artech House., 2001. — С. 300—330.
2. *Gildenburg V. B., Vvedenskii N. V.* Optical-to-THz wave conversion via excitation of plasma oscillations in the tunneling-ionization process // *Physical Review Letters*. — 2007. — Т. 98, № 24. — С. 1—4. — ISSN 00319007.
3. *Ribeiro L., Novo M.* Computational Modeling of Geoelectrical Soundings using PML-FDTD // *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*. — 2017. — Март. — Т. 16. — С. 120—131.
4. *Yee K. S.* Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. — 1966. — DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
5. *Б. Г. В.* Плазменный резонанс в лаборатории и в верхней атмосфере // *Соровский образовательный журнал*. — 2000. — Т. 6, № 12. — С. 86—92.
6. *Быстров А., Введенский Н., Гильденбург В.* Генерация терагерцового излучения при оптическом пробое газа // *Письма в "журнал экспериментальной и теоретической физики"*. — 2005. — Т. 82, № 11/12. — С. 852—857.
7. *Курант Р., Фридрихс К. О., Леви Г.* О разностных уравнениях математической физики // *Успехи математических наук*. — 1941. — № 8. — С. 125—160.