Введение

1. Цели и задачи дисциплины. Место дисциплины в учебном процессе. Дисциплина **«Волны в нелинейных средах»** относится к вариативной части профессионального цикла магистерского образования на радиофизическом факультете ННГУ по направлению подготовки **03.04.03 – «Радиофизика»**. Она является частью **магистерской программы** кафедры электродинамики **«Электромагнитные волны в средах»**. В соответствии с идеологией обучение по **магистерской программе** дисциплина **«Волны в нелинейных средах»** обязательна для освоение в первом семестре образовательного цикла. Курс читается с целью познакомить выпускника с методами описания широкого круга нелинейных явлений в электродинамике (в диэлектриках, активных средах и плазме), газодинамике, гидродинамике и других областях физики. На основе колебательно-волновой аналогии и общности математического описания радиофизик - исследователь должен видеть общее в разнообразных явлениях, происходящих в различных средах.

Курс предполагает познакомить выпускника с современными методами отыскания точных решений достаточно широкого класса нелинейных уравнений в частных производных. С помощью метода обратной задачи теории рассеяния, преобразований Бэклунда, Миуры, Хопфа-Хироты описываются самые разнообразные физические процессы и явления. Отыскиваемые с помощью этих новых быстро развивающихся методов точные (т.н. многосолитонные) решения претендуют в настоящее время на такую же роль основных (или базисных) решений нелинейных уравнений в частных производных, какую играют экспоненциальные решения в теории линейных уравнений в частных производных.

Определение терминов

а) ***Волна*** По Дж. Уизему [3] “не существует единого строгого определения волн. Можно дать различные частные определения, но чтобы охватить весь диапазон волновых процессов, предпочтительнее пользоваться интуитивным представлением о волне, как о любом различимом сигнале, передающемся от одной части Среды к другой с некоторой определенной скоростью. Такой сигнал может быть возмущением любого вида ... при условии, что это возмущение четко видимо и что в любой заданный момент времени можно определить его местонахождение. Этот сигнал может искажаться, изменять свою величину и скорость, но при этом оставаться различимым".

Итак, ***волна - это убегающее (перемещающееся) различимое возмущение.***

б) ***Среда или распределенная система***

Распределенная система – система, состоящая из бесконечно большого числа связанных элементарных звеньев, ячеек или систем и обладающая поэтому бесконечно большим числом степеней свободы (собственных нормальных колебаний).

Распределенная система – это либо система с неограниченным объемом, либо система ограниченного объема с бесконечно большим числом степеней свободы. Еще один аспект распределенности состоит в том, что локально однородные участки составляют в совокупности неоднородные распределенные системы.

Волны в распределенной системе описываются дифференциальными уравнениями в частных производных типа

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + uC = 0, \qquad (1)$$

которые дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

б) ***Линейные среды***

Процессы в ***линейных средах*** описываются линейными по амплитуде поля u уравнениями (1), в которых и коэффициенты

$$A \equiv A(x,t); \quad B \equiv B(x,t); \quad C \equiv C(x,t); \qquad (2)$$

не зависят от амплитуды поля u. При возбуждении поля в линейной среде (распределенной системе) всегда проявляются два основных свойства.

1) Воздействие на частоте ω рождает возмущение (волну) только на частоте ω.

2) **Принцип суперпозиции,** который применительно к процессам в электродинамике имеет такую простую формулировку:
Если источники $\rho_{1,2}$ создают в среде поля $u_{1,2}$, то источники $\rho_1 + \rho_2$ создадут поля $u_1 + u_2$.

г) ***Нелинейные среды***

Волны (и другие процессы) в ***нелинейных средах*** описываются нелинейными уравнениями в частных производных. В большинстве случаев эти уравнения являются **квазилинейными уравнениями** типа (1), в которых производные $u_x^{'}$, $u_t^{'}$ входят линейно и коэффициенты

$$A \equiv A(x,t,u); \quad B \equiv B(x,t,u); \quad C \equiv C(x,t,u); \tag{3}$$

зависят только от поля u. Примером таких уравнений являются уравнения электродинамики нелинейной среды (нелинейного диэлектрика или нелинейного магнетика) без источников

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}; \\ rot\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{D}; \\ div\vec{D} = 0; \\ div\vec{B} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

с материальными уравнениями

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}^L + 4\pi\vec{P}^{NL} = \hat{\varepsilon}\vec{E} + 4\pi\vec{P}^{NL}(\vec{E},\vec{H}); \\ \vec{P}^L = \hat{\xi}\vec{E}; \\ \hat{\varepsilon} = 1 + 4\pi\hat{\chi}; \\ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}^L + 4\pi\vec{M}^{NL} = \hat{\mu}\vec{H} + 4\pi\vec{M}^{NL}(\vec{E},\vec{H}); \\ \vec{M}^L = \hat{\beta}\vec{H}; \qquad \hat{\mu} = 1 + 4\pi\hat{\beta}; \qquad \vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E} + \vec{j}^{NL}\left(\vec{E},\vec{H}\right), \end{cases} \tag{5}$$

в которых $\vec{M}^{NL}(\vec{E},\vec{H})$, $\vec{P}^{NL}(\vec{E},\vec{H})$, и $\vec{j}^{NL}\left(\vec{E},\vec{H}\right)$ определены в виде функций от переменных $\vec{H},\vec{E}$.

В качестве наиболее типичной нелинейной среды можно привести диэлектрик с так называемой *кубичной нелинейностью*. Для него материальные уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \vec{E}+4\pi\chi^{L}\cdot\vec{E}+4\pi\left(\hat{\chi}^{NL}\cdot\vec{E}\cdot\vec{E}\cdot\vec{E}\right)\equiv\left(\varepsilon+\alpha\left|\vec{E}\right|^{2}\right)\vec{E}=\varepsilon\vec{E}+4\pi\vec{P}^{NL} \quad (5')$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}(\mu=const),\vec{j}=0(\sigma\equiv 0)$$

где $\varepsilon = 1+4\pi\chi^{L}, \quad \alpha = 4\pi\chi^{NL}$.

Некоторые свойства нелинейных сред

При возбуждении поля в ***нелинейной среде*** нарушаются оба приведённые выше свойства ***линейной среды***.

Рассмотрим на примере среды с *кубичной нелинейностью* некоторые свойства нелинейных сред, которые проявляются при возбуждении полей

1. **Изменение спектрального состава действующего излучения (рождение новых гармоник частоты и пространственных гармоник)**

1.1 Пусть на входе в среду имеется поле

$$\vec{E}_1 = Re\left\{\vec{\tilde{E}}_1 exp\left[i\omega t\right]\right\} = \frac{1}{2}\vec{\tilde{E}}_1 exp\left[i\omega t\right]+\text{к.с.}$$

Тогда внутри *тонкого* слоя (рис.1В) на частоте 3ω появляется поляризация $\vec{P}^{NL}$, и поэтому на другом конце тонкого слоя (на выходе) будем иметь сильное поле $\vec{E}_1 = Re\left\{\vec{\tilde{E}}_1 exp\left[i\omega t\right]\right\}$ и слабенькое поле $\vec{E}_3 = Re\left\{\vec{\tilde{E}}_3 exp\left[3i\omega t\right]\right\}$, возбуждаемое слабым $\vec{j}(3\omega) = \left(\partial\vec{P}^{NL}/\partial t\right)$.

right text

Как этот интуитивно ощущающийся результат увидеть из уравнений электродинамики?

Преобразуем уравнения Максвелла к виду

$$rotrot\vec{E} + \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\mu\frac{\partial^2\vec{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{4'}$$

Рассмотрим одномерное приближение

$$rotrot\vec{E} = -\frac{d^2}{dz^2}\vec{E} \tag{4''}$$

(так как $div\vec{E} = 0, \quad \Delta = \frac{d^2}{dz^2}$) и подставим в (4”) поле $\tilde{\vec{E}}$ в виде

$$\vec{E} = Re\left\{\tilde{\vec{E}}_1 exp\left[i\omega t\right] + \tilde{E}_3 \overset{\rightarrow}{exp}\left[3i\omega t\right]\right\}.$$

Рассмотрим установившееся во времени решение внутри этого слоя. Тогда в силу ортогональности функций $\cos(\omega t)$ и $\cos(3\omega t)$ на больших временах из (4”) можно получить два уравнения

$$-\frac{d^2\tilde{\vec{E}}_1}{dz^2} - \frac{\mu\varepsilon(\omega)}{c^2}\omega^2\tilde{\vec{E}}_1 \cong 3\frac{4\pi}{4c^2}\omega^2\mu\left(\hat{\chi}^{NL}_{\omega}\cdot\tilde{\vec{E}}_1\cdot\tilde{\vec{E}}_1\cdot\tilde{\vec{E}}_1\right); \tag{6}$$

$$-\frac{d^2\tilde{\vec{E}}_3}{dz^2} - \frac{\mu\varepsilon(3\omega)}{c^2}9\omega^2\tilde{\vec{E}}_3 \cong \frac{4\pi}{4c^2}\left(3\omega\right)^2\mu\left(\hat{\chi}^{NL}_{3\omega}\cdot\tilde{\vec{E}}_1\cdot\tilde{\vec{E}}_1\cdot\tilde{\vec{E}}_1\right) \tag{7}$$

для каждой из монохроматических компонент.

Однородное нелинейное уравнение (6) для поля сильной волны имеет в своей правой части малый нелинейный член. Этим членом можно пренебречь, поскольку из-за его наличия $\tilde{\vec{E}}_1$ меняется слабо. В этом линейном приближении, позволяющем пренебречь малой правой частью, (6) приобретает вид однородного (линейного) уравнения без источников. Решение уравнения (6) в таком приближении заданного поля сильной волны имеет вид

$$\tilde{\vec{E}}_1 = \tilde{\vec{E}}_{10}\cdot exp\left(-ikz\right) \equiv \tilde{\varepsilon}_1 exp\left(-ikz\right)\vec{e}^{\,0}_1 \tag{8}$$

Оно описывает распространение волны постоянной амплитуды, величина которой определяется из условия на границе $z = 0$.

Поле слабой волны на частоте 3ω описывается уравнением (7), в правой части которого находится источник (сторонний ток) на частоте 3ω в виде наведённой сильным полем $\vec{\hat{E}}_1$ нелинейной поляризации

$$\vec{\hat{P}}_{3\omega}^{NL} = 4\pi\hat{\varepsilon}_1^3\left(\hat{\chi}_{3\omega}^{NL}\cdot\vec{e}_1^{\,0}\cdot\vec{e}_1^{\,0}\cdot\vec{e}_1^{\,0}\right)exp\left\{i\left(3\omega t-3kz\right)\right\}. \tag{9}$$

В результате возникает вынужденное решение на частоте 3ω в виде

$$\vec{\hat{E}}_3 = \vec{e}_3^{\,0}\hat{\varepsilon}_3(z)exp\left[i(3\omega t-k_3z)\right], \tag{10}$$

которое описывает поле, возникающее на границе $z=0$ и распространяющееся в $+z$-направлении с фазовой скоростью

$$v_f(3\omega)\equiv v_{f3}=(3\omega/k_3)\equiv\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3\mu}} \tag{11}$$

Отметим, что фазовый фронт волны тока (источника) перемещается также в $+z$–направлении с фазовой скоростью

$$v_f(3\omega)=(3\omega/3k)\equiv\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu}} \tag{12}$$

Правая часть уравнения (7) мала по сравнению с левой, поэтому решение уравнения (7) можно искать методом Ван дер Поля. Подставляя (10) в уравнение для поля $\vec{\hat{E}}_3$, получим уравнение первого порядка для амплитуды

$$2ik_3(d\hat{\varepsilon}_3/dz)exp(-ik_3z)=\frac{\alpha_3}{4\varepsilon_3}k_3^2\hat{\varepsilon}_1^{\,3}exp(-i3kz), \tag{B.13}$$

где $\alpha_3 = 3\cdot\left(\vec{e}_3^{\,0}\cdot\hat{\chi}_{3\omega}^{NL}\cdot\vec{e}_1^{\,0}\cdot\vec{e}_1^{\,0}\cdot\vec{e}_1^{\,0}\right)4\pi$. Источник в правой части (B.13) зависит от координаты как $exp\{i(k_3-3k)z\}\equiv exp\{i\Delta kz\}$. Решение (B.13) в виде

$$\hat{\varepsilon}_3(z)=\frac{\alpha_3\hat{\varepsilon}_1^{\,3}}{4\varepsilon_3\cdot 2i}k_3\int_0^z exp(i\Delta kz')dz'=\frac{\alpha_3\varepsilon_1^3k_3}{4i\Delta k\varepsilon_3}exp\left(i\frac{1}{2}\Delta kz\right)sin\frac{\Delta k}{2}z \tag{13}$$

описывает поле, периодически изменяющееся в направлении распространения. Интенсивность этого поля, пропорциональная $\sin^2\frac{1}{2}\Delta kz=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\Delta kz$, является периодическо функцией аргумента с периодом

$$z_\Pi=\frac{2\pi}{|\Delta k|}\equiv\frac{2\pi}{|k_3-3k_1|} \tag{14}$$

Амплитуда пространственных колебаний интенсивности поля

$$|\tilde{\varepsilon}_3(z)|^2_{max} = \left|\frac{\alpha_3 \tilde{\varepsilon}_1^3 k_3}{4\varepsilon_3 \Delta k}\right|^2 \tag{15}$$

сильно зависит от согласования фазовых скоростей (от дисперсии среды). Если $v_f(\omega)$ близко к $v_f(3\omega)$, то поле $\tilde{\varepsilon}_3$ будет быстро нарастать в $+z$–направлении. В пределе при точном синхронизме $\Delta k \to 0$ поле $\tilde{\varepsilon}_3(z)$ переходит в поле

$$\lim_{\Delta k \to 0} \tilde{\varepsilon}_3(z) = \frac{\alpha_3 \tilde{\varepsilon}_1^3 k_3}{8i\varepsilon_3} z \tag{16}$$

нарастающее в слое среды по линейному закону.

1.2. Пусть на входе в среду имеется поле

$$2\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_1 exp(i\omega_1 t) + \tilde{\vec{E}}_2 exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}$$

Тогда на выходе первого бесконечно тонкого слоя получим слабые поля на частотах $3\omega_1, 2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 - \omega_2$,$3\omega_2, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1$.
Так происходит рождение новых временных гармоник и, следовательно, рождение пространственных гармоник, т.е. изменение структуры распространяющегося излучения.

2. В ***нелинейной среде*** нарушается принцип суперпозиции. В качестве простого примера можно привести нелинейную интерференцию (Рис. 2B) двух распространяющихся под углом друг к другу плоских волн одной частоты

$$\tilde{\vec{E}}_{1,2} = \left(\tilde{\vec{E}}_{1,2}\right)_0 exp\left\{i(\mp k_x x - k_z z)\right\}.$$

В результате появления решётки диэлектрической проницаемости волны начинают взаимодействовать друг с другом, обмениваясь энергией. Это явление но-сит название нелинейного рассеяния. Если угол между направлениями распространения волн невелик, то явление носит название ***попутного двухволнового взаимодействия в кубичной среде***. При определённых условиях можно организовать перекачку энергии из одной волны в другую.

Природа нелинейности

Какова природа нелинейности? Она различна в разных средах. В электродинамике природа нелинейности заключена в нелинейном характере взаимодействия электромагнитного поля с веществом. Нелинейность проявляется только в сильном поле, когда напряженность поля становится сопоставимой с внутриатомной напряжённостью поля E_a. Поэтому все среды в электродинамике нелинейны, но все при полях, разных по своей величине. В то же самое время все среды линейны при слабых полях.

В качестве примера можно рассмотреть резонансную среду, в которой электромагнитные явления описываются системой уравнений (4) и материальными уравнениями

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H}; \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi(\vec{P}^L + \vec{P}^{NL}) \equiv \vec{E} + 4\pi N_0 < Sp\left[\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\rho}\right] >; \\ ih\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H} \cdot \hat{\rho}\right]; \qquad \hat{H} = \hat{H}_0 - \left(\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}\right); \\ \hat{\rho} = \begin{vmatrix} \tilde{\rho}_{11} & \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{21} & \tilde{\rho}_{22} \end{vmatrix}; \qquad \hat{H}_0 = \begin{vmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{vmatrix}; \qquad \hat{\vec{d}} = \begin{vmatrix} \tilde{\vec{d}}_{11} & \tilde{\vec{d}}_{12} \\ \tilde{\vec{d}}_{21} & \tilde{\vec{d}}_{22} \end{vmatrix}; \end{cases} \tag{5''}$$

В этой системе при больших полях нелинейны материальные уравнения, которые описывают связь индукции и поля.

В ферритах и в плазме также нелинейны материальные уравнения.

В газодинамике и гидродинамике нелинейность создаётся из-за нелинейной связи плотности, скорости, температуры и энтропии между собой. В гидродинамике все четыре основных уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{V} = 0;$$
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \left[\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V} + \frac{1}{\rho}\left(+\frac{\eta}{3}\right)\nabla div\vec{V}\right] + \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{f}_M;$$
$$\rho T\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla S\right)\right] = \left(\hat{\sigma}\cdot\nabla\right)\vec{V} + div\left(k\nabla T\right) + \rho Q;$$
$$p = p\left(\rho,S\right)$$

имеют нелинейные члены. Но во многих случаях (и всегда при малых воздействиях) эти уравнения оказываются практически линейными (пример – акустика).

От чего зависит эффективность процессов нелинейного взаимодействия гармоник, эффективность нелинейных преобразований волн? Обратимся к обсуждавшемуся примеру образования третьей гармоники.

Поле $\tilde{\vec{E}}_3$ будет эффективно расти, если $\varepsilon\left(3\omega\right) \cong \varepsilon(\omega)$. А если это условие не выполняется, то решение будет иметь вид функции, осциллирующей вдоль оси z. Амплитуда осцилляций будет зависеть от периода осцилляций z_Π . Чем меньше Δk (и чем больше $\alpha_3\tilde{\varepsilon}_1^3$), тем больше будет максимальное значение поля $\tilde{\vec{E}}_3$. Т.о., дисперсия противоборствует росту гармоники $\tilde{\vec{E}}_3$.

Дисперсия как название явления произошло от слова «расползание» (dispersion). «Расползание» чего? » Имеется в виду расползание гармоник. Дисперсия – свойство линейных сред (линейных систем, линейных процессов). В электродинамике – это зависимость $v_f = c/\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ от (ω). При наличии $\varepsilon(\omega)$ волновой пакет из набора гармоник по мере распространения расползается. Его отдельные части (куски спектра) перемещаются каждый со своей групповой скоростью $\mathbf{V}_{\textit{гр}} = (d\omega/dk)$ и постепенно его энергия размазывается во все большем и большем объеме. В этой связи удобно изменить определение дисперсии и считать, что среда является диспергирующей, если

$$(d\omega/dk) \neq const \qquad \text{или} \qquad (d^2\omega/dk^2) \neq 0. \tag{17}$$

Итак, нелинейность порождает гармоники, формирует резкие фронты и пр. Дисперсия расталкивает гармоники, заставляет их расползаться. В их противоборстве протекают нелинейные процессы. Параметр нелинейность/дисперсия может служить основой для классификации нелинейных процессов и эффектов. Этим же параметром определяется и выбор методов решения задач. Термины «сильная» или «слабая» нелинейность возникли в результате сопоставления действия нелинейности и дисперсии.

Природа дисперсии

В основе дисперсии находятся протекающие в среде периодические процессы, имеющие характерные временные масштабы, и периодические пространственные дислокации среды.

а) В электродинамике роль периодических процессов играют собственные колебания частиц среды в собственных (внутренних) полях или под действием каких-то постоянных внешних полей. Это могут быть 1) собственные колебания атомов, молекул, ядер и т.д. в собственных полях; 2) колебания свободных электронов в плазме с магнитным (внешним) полем с гирочастотой и пр.

б) Проницаемость среды (например, кристалла на рентгеновских длинах волн) может иметь периодическую зависимость от длины волны излучения, соизмеримой с периодом пространственной структуры вещества.

В случае а) говорят о временной дисперсии, а в случае б) – о пространственной дисперсии. Это разделение природы дисперсии несколько условно, если иметь в виду, например, переход в движущуюся систему координат.

В качестве простого примера, поясняющего природу временной дисперсии, получим материальные уравнения для среды, которая состоит из совокупности (N штук в единице объёма) одинаковых линейных осцилляторов, находящихся под воздействием монохроматического поля. Тогда каждый электрон-осциллятор движется согласно уравнению

$$m\left(\ddot{\tilde{\vec{r}}}_\omega + \omega_0^2\tilde{\vec{r}}_\omega + 2\Gamma\dot{\tilde{\vec{r}}}_\omega\right) \cong e\tilde{\vec{E}}_\omega exp(i\omega t) \tag{18}$$

(Пренебрегаем в силе Лоренца релятивистскими поправками типа (V/c), где V –скорость движения электрона.) Зная смещение отдельного электрона

$$\tilde{\vec{r}}^{\,0}_\omega = \frac{(e/m)\tilde{\vec{E}}_\omega}{(-\omega^2+\omega_0^2)+2i\Gamma\omega}, \tag{19}$$

нетрудно найти комплексную амплитуду $e\tilde{\vec{r}}_{\omega}^{0}$ переменного во времени дипольного момента и далее вычислить дипольный момент единицы объема среды

$$\tilde{\vec{P}}_{\omega} = Ne\tilde{\vec{r}}_{\omega}^{0} = \frac{(Ne^2/m)\,\tilde{\vec{E}}_{\omega}}{(-\omega^2+\omega_0^2)+2i\Gamma\omega} = \tilde{\chi}(\omega)\tilde{\vec{E}}_{\omega}. \tag{20}$$

Восприимчивость является комплексной функцией частоты

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi^{'}(\omega) + i\chi^{''}(\omega) = \frac{(\omega_{pe}^2/4\pi)}{(-\omega^2+\omega_0^2)+2i\Gamma\omega} \equiv \frac{k(4\Gamma\omega_0)}{(-\omega^2+\omega_0^2)+2i\Gamma\omega}. \tag{21}$$

Параметр $\omega_{pe}^2 = 4\pi Ne^2/m$ можно назвать плазменной частотой.

Действительные функции

$$\chi^{'}(\omega) = \frac{(-\omega^2+\omega_0^2)(\omega_{pe}^2/4\pi)}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+4\Gamma^2\omega^2} \tag{22'}$$

$$\chi^{''}(\omega) = \frac{-2\Gamma\omega(\omega_{pe}^2/4\pi)}{(-\omega^2+\omega_0^2)^2+4\Gamma^2\omega^2} \tag{22''}$$

представлены на **(??)**

Прежде всего, проанализируем зависимость $\chi^{'}(\omega)$, поскольку $\varepsilon^{'}(\omega) = 1 + 4\pi\chi^{'}(\omega)$. Из рисунка видно, что имеются две области нормальной дисперсии

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = 4\pi\frac{d\chi^{'}}{d\omega} > 0 \tag{22}$$

и область аномальной дисперсии в интервале

$$\omega_0 - \Gamma < \omega < \omega_0 + \Gamma. \tag{23}$$

В области аномальной дисперсии велико по абсолютной величине значение $\chi^{''}(\omega)$, т.е. в среде имеется большое поглощение энергии.

Кроме того, из предыдущего примера ясно, что дисперсия и диссипация всегда существуют совместно. Имеются, правда, области частот, где превалирует одно или другое.

Соотношения Крамерса-Кронига

Покажем, что по известному $\chi^{'}(\omega)$ можно найти $\chi^{''}(\omega)$, и наоборот. Проинтегрируем $\tilde{\chi}(\tilde{\omega})/(\tilde{\omega}-\Omega)$ в комплексной плоскости $\tilde{\omega}$ по контуру, указанному на рис. 4В. Из формулы (21) видно, что $\tilde{\chi}(\tilde{\omega})$ имеет два полюса в точках $(\tilde{\omega})_{1,2} = i\Gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ в верхней полуплоскости (ибо $\omega_0^2 >> \Gamma^2$). Кроме того, функция $\tilde{\chi}(\tilde{\omega})/(\tilde{\omega}-\Omega)$ имеет полюс в точке $\tilde{\omega} = \Omega$ на действительной оси. Поэтому в результате обхода по выбранному контуру получим

$$\oint \frac{\tilde{\chi}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\Omega} d\tilde{\omega} = \int\limits_{-R}^{\Omega-\nu} \frac{\chi(\tilde{\omega})d\omega}{\omega-\Omega} + \int\limits_{\Omega+\nu}^{R} \frac{\tilde{\chi}(\omega)d\omega}{-\Omega+\omega} + \int\limits_{L_\infty} \frac{\tilde{\chi}(\tilde{\omega})d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}-\Omega} + \int\limits_{L_\nu} \frac{\tilde{\chi}(\tilde{\omega})d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}-\Omega} = 0 \quad (24)$$

Исследуя эти четыре интеграла, учтем, что $\lim\limits_{R=L_\infty\to\infty} \int\limits_{L_\nu} \frac{\tilde{\chi}(\tilde{\omega})d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}-\Omega} = 0$ и что последний интеграл легко находится при $\nu \to 0$:

$$\lim_{\nu\to 0} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\tilde{\chi}(\Omega+\nu e^{i\theta})}{\nu e^{i\theta}} i\nu e^{i\theta} d\theta = i\pi\tilde{\chi}(\Omega)$$

содержимое...

Рис. 1

В этом предельном случае два других интеграла образуют один интеграл в смысле главного значения. В результате мы получим формулу

$$\tilde{\chi}(\Omega) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega)d\omega}{\omega-\Omega}. \quad (25)$$

Подставляя $\tilde{\chi}(\omega) = \chi^{'}(\omega) + i\chi^{''}(\omega)$, получим из равенства реальных и мнимых частей соотношения Крамерса-Кронига

$$\chi^{'}(\Omega) = \frac{-1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi^{''}(\omega)d\omega}{\omega-\Omega}, \qquad \chi^{''}(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi^{'}(\omega)d\omega}{\omega-\Omega} \quad (26)$$

Эти соотношения представляют собой мощный инструмент для исследования свойств различных сред.

Помимо дисперсии при распространении волн в нелинейной среде важную роль играет поглощение (диссипация) энергии. Диссипация, уменьшая интенсивность волны в среде, уменьшает тем самым воздействие нелинейности. Поэтому при достаточно сильной диссипации поле может затухнуть скорее, чем заметно изменится его спектральный состав или пространственная структура.

Типы волн в разных средах

Какие типы волны могут существовать в разных средах?

I. **Линейная среда без дисперсии**(в частности, вакуум).

   В ней все гармоники распространяются с одной скоростью c. Если все волны всех частот распространяются в $+z$-направлении, то поле имеет вид

$$\vec{E}(z,t) = \int\limits_{\infty}^{\infty} \vec{e}_0 \tilde{E}(\omega) exp\left\{ i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)\right\} d\omega = \vec{e}_0 E(z - ct),$$

   который называется простой стационарной волной.

II. В **линейной среде с дисперсией** ничего подобного не получится. Там никогда не будет решения в виде простой волны.

III. В **нелинейной среде без дисперсии** может быть решение в виде простой волны

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_0 E(z - V_{|E|} t).$$

   Но это решение не сохраняет по мере распространения свою форму, ибо $V = V_{|E|}$. Поэтому такое решение не является стационарной волной. Подобные волны постепенно превращаются в ударные и меняют свою форму очень сильно.

IV. В **нелинейной среде с дисперсией** при некоторых условиях возможны волны, имеющие постоянную форму и перемещающиеся с постоянной скоростью. Эти стационарные волны

$$E(z,t) = E(z - V \cdot t)$$

называются ***солитонами*** (уединенными волнами). У них всегда вполне определенная (для данной среды) форма и постоянная скорость V, величина которой определяется заключенной в волне энергией и некоторыми другими характеристиками среды. Эти волны – «продукт равновесия в борьбе нелинейности и дисперсии».

В **нелинейной среде с дисперсией** могут существовать многосолитонные решения (или волны). Эта терминология зависит от постановки задачи (математической или физической).

Конец введения.

Часть 1. Нелинейная оптика

Раздел 2. Трехчастотные взаимодействия в квадратичной среде

Введение

Решение всех задач в нелинейной оптике начинается с решения уравнений Максвелла, которые в наиболее распространённой форме для нелинейной среды без источников могут быть представлены в виде уравнения

$$rotrot\vec{E} + \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\mu\frac{\partial^2\vec{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{B.4'}$$

Если в квадратичной среде, т.е. среде с нелинейной поляризацией в виде

$$\vec{P}^{NL} = \left(\hat{\chi}^{NL}\cdot\vec{E}\vec{E}\right) \tag{1}$$

задано поле в виде двух бегущих волн разных частот

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\tilde{\vec{e}}_1^0\tilde{E}_1(\vec{r})exp\left\{i\left[\omega_1 t - \left(\vec{k}_1\cdot\vec{r}\right)\right]\right\} + \frac{1}{2}\tilde{\vec{e}}_2^0\tilde{E}_2(\vec{r})exp\left\{i\left[\omega_2 t - \left(\vec{k}_2\cdot\vec{r}\right)\right]\right\} + к.с., \tag{2}$$

то одна из нелинейных поляризаций возникает на частоте

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{3}$$

Её амплитуда определяется выражением

$$\vec{P}_{\omega_3}^{NL} = \left(\hat{\chi}^{NL}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cdot\hat{\vec{e}}_1^0\hat{\vec{e}}_2^0\right)\hat{E}_1\hat{E}_2 exp\left\{i(\omega_1+\omega_2)t - i\left(\left[\vec{k}_1+\vec{k}_2\right]\cdot\vec{r}\right)\right\}. \tag{4}$$

Пусть направления $\vec{k}_{1,2}$ выбраны так, что скорость перемещения фазового фронта волны поляризации

$$V_f = \left(\omega_3/\left|\vec{k}_1+\vec{k}_2\right|\right) \tag{5}$$

в направлении $\left\{\left(\vec{k}_1+\vec{k}_2\right)/\left|\vec{k}_1+\vec{k}_2\right|\right\} = \vec{k}_P^0$ близка к фазовой скорости волны на частоте ω_3 в направлении $\vec{k}_3$. Тогда под влиянием наведённой поляризации $\vec{P}_{\omega_3}^{NL}$ (плотности тока $i\omega_3\vec{P}_3^{NL}$ на частоте ω_3) в среде возникает поле

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{2}\tilde{\vec{e}}_3^0\tilde{E}_3(\vec{r})exp\left\{i\left[\omega_3 t - \left(\vec{k}_3\cdot\vec{r}\right)\right]\right\} + к.с. \tag{6}$$

Если

$$\left|\Delta\vec{k}\right| = \left|\vec{k}_3 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2\right| \to 0,$$

то оно будет расти, по крайней мере, на начальном участке (где поля $\vec{E}_{1,2}$ сильны, а оно слабо). Если считать, что направлением наилучшего синхронизма является z-направление, то амплитуда поля $\tilde{E}_3(z)$ будет изменяться по закону

$$\frac{d\tilde{E}_3}{dz} \cong \frac{1}{2ik_3} \cdot \frac{\alpha_3}{2\varepsilon_3} \cdot k_3^2 \tilde{E}_1(z)\tilde{E}_2(z) exp(i\Delta k_z z), \tag{7}$$

где

$$\Delta k_z = \left(\left[\vec{k}_3 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2\right] \cdot \vec{z}_0\right); \quad \alpha_3 = \left(\tilde{\vec{e}}_3^{\,0*} \cdot \hat{\chi}^{NL} \cdot \tilde{\vec{e}}_1^{\,0} \cdot \tilde{\vec{e}}_2^{\,0}\right) \cdot 4\pi; \quad k_3^2 = \frac{\varepsilon_3 \mu_3 \omega_3^2}{c^2}. \tag{8}$$

Уравнение (8) аналогично уравнению (В.13), описывающему изменение медленной амплитуды поля третьей гармоники в кубичной среде. Некоторые различия правых частей этих уравнений (в частности, на фактор $1/2$) обусловлены тем, что нелинейные поляризации определяются разными выражениями.

При точном синхронизме поле $\tilde{E}_3(z)$ описывается уравнением

$$\frac{d\tilde{E}_3}{dz} = \frac{\alpha_3 k_3}{4i\varepsilon_3} \tilde{E}_1(z)\tilde{E}_2(z). \tag{9}$$

В приближении заданных полей накачки $\tilde{E}_{1,2} \cong \tilde{E}_{1,2}(0)$ оно растет линейно с ростом расстояния от границы среды

$$\tilde{E}_3(z) \cong -i\frac{\alpha_3 k_3}{4\varepsilon_3} \tilde{E}_1(0)\tilde{E}_2(0) z. \tag{10}$$

Если поля $\tilde{E}_{1,2}(0)$ считать примерно равными $\left|\tilde{E}_2(0)\right| \cong \left|\tilde{E}_1(0)\right| \equiv \left|\tilde{E}(0)\right|$, то на длине

$$L_0 = \left(\frac{\alpha_3 k_3}{4\varepsilon_3}\left|\tilde{E}(0)\right|\right)^{-1} \tag{11}$$

поле $\tilde{E}_3(z)$ сравнивается по величине с полем $\tilde{E}(0)$. Это расстояние называется характерной длиной ***нелинейного взаимодействия*** в квадратичной среде.

В отсутствие синхронизма и в приближении ***не истощающейся*** накачки $\tilde{E}_{1,2}(z) \cong \tilde{E}_{1,2}(0)$ общее решение (7) в виде

$$\left|\tilde{E}_3(z)\right|^2 = \left|-\frac{\alpha_3 k_3 \tilde{E}_1 \tilde{E}_2}{2(\Delta k_z)\varepsilon_3} exp\left\{i\frac{1}{2}\Delta k_z z\right\} \sin\left\{\frac{1}{2}\Delta k_z z\right\}\right|^2 \tag{12}$$

осциллирует с периодом $z_\Pi = 2l_k = 2\pi/\Delta k_z$. Нарастание поля $|\tilde{E}_3(z)|$ происходит только на так называемой ***когерентной длине***

$$l_k = \pi/\Delta k_z = z_\Pi/2. \tag{13}$$

На таком же следующем расстоянии поле гармоники убывает до нуля. Если l_k существенно короче ***длины нелинейного взаимодействия***, то именно l_k определяет максимальное значение поля гармоники внутри слоя среды.

Воздействие нелинейности и дисперсии на процесс рождения q-той гармоники (на формирование искажений гармонической волны) в слабо поглощающей нелинейной среде всегда сопоставляется посредством сравнения ***длины нелинейного взаимодействия*** $(L_0)_q$ с соответствующей ***когерентной длиной*** $(l_k)_q$. В нелинейной оптике, как правило, для всех гармоник (кроме одной) выполняется соотношение $(L_0)_q >> (l_k)_q$ сильной дисперсии. В этих случаях слабо поглощающая нелинейная среда с дисперсией определяется как ***слабо нелинейная***.

В нелинейной оптике диссипативные и нелинейные члены всегда должны быть малыми, а сами волны мало отличающимися от волн в линейной среде. В типовых задачах нелинейной оптики решения уравнений Максвелла следует искать в виде суммы 2-х – 4-х волн, частоты которых заранее определяются из дисперсионных характеристик среды.

В случае взаимодействии трех волн в квадратичной среде (1) поле $\tilde{E}_3(z)$ будет расти достаточно эффективно при условии

$$l_k \equiv \frac{\pi}{\Delta k_z} >> L_0 \equiv \frac{4\varepsilon_3}{\alpha_3 k_3 \left|\tilde{E}(0)\right|}; \quad \left|\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3\right| << \pi/L_0. \tag{14}$$

Другими словами, в квадратичной среде три волны с частотами $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ будут взаимодействовать достаточно эффективно, если их волновые векторы удовлетворяют ***условию «синхронизма»*** (14).

Пункт 1. Условия осуществления синхронизма.

Всегда ли имеет место условие (14)? В каких случаях оно выполняется?

Пусть для простоты частоты $\omega_{1,2}$ будут равными $\omega_{1,2} = \omega$. Тогда из

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$$

найдём

$$\left|\vec{k}_3\right| = \frac{2\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(2\omega)\mu} < |\vec{k}_1|+|\vec{k}_2| = \frac{2\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}$$

или

$$\varepsilon(\omega) > \varepsilon(2\omega) \qquad (15)$$

Условие (15) выполнимо в средах с ***аномальной дисперсией***. В изотропной среде аномальная дисперсия имеет место только вблизи линий поглощения. Но в этих областях велика диссипация, которая подавляет нелинейные процессы. Поэтому для осуществления процесса необходима анизотропная среда. Условие (15) может выполняться вдали от линий поглощения (в области прозрачности) в кристаллах двух типов:

Содержимое

$$n_2^e < n_1^0 \quad \text{и} \quad n_2^0 < n_1^e \qquad (16)$$

Поверхности показателей преломления в кристаллах первого типа, к которому принадлежит кристалл KH_2PO_4 (KDP), представлены на Рис. 1.2.

(Типичным представителем кристаллов второго типа является кальцит $CaCO_3$.) В кристалле первого типа можно организовать накапливающееся взаимодействие двух видов, которые символически записываются как

$$1^o + 1^0 = 2^e \tag{17а}$$

$$1^0 + 1^e = 2^e. \tag{17б}$$

Какие когерентные взаимодействия осуществлены в квадратичной среде?

1) В KDP осуществлены режимы генерации суммарной и разностной частот $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ и, в частности, генерация второй гармоники $\omega_2 = \omega + \omega$ с помощью двух типов синхронного взаимодействия:

$$\text{а)} \vec{k}_1^o(\omega) + \vec{k}_2^o(\omega) = \vec{k}_3^o(2\omega) \quad \text{б)} \quad \vec{k}_1^{0e}(\omega) + \vec{2}_1^o(\omega) = \vec{k}_3^e(2\omega). \tag{17}$$

В случае а) фактически взаимодействуют две плоские волны. В случае б) взаимодействуют три плоские волны с разными направлениями волновых векторов.

б) В KDP получена также генерация третьей гармоники в результате двух последовательных трехчастотных взаимодействий:

$$\omega + \omega = 2\omega; \quad \omega + 2\omega = 3\omega$$

Это – промежуточный случай между двумя предельными: образованием второй гармоники в результате одного трёхчастотного взаимодействия и образованием ударной волны в результате бесконечно большого числа таких взаимодействий

Пункт 2. Описание трехчастотных (трёхволновых) взаимодействий.

В уравнения Максвелла в виде

$$rotrot\vec{E} + \frac{\mu\hat{\varepsilon}_0}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\hat{\sigma}\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}^{NL}}{\partial t^2} \tag{18}$$

подставляем поле в виде трех взаимодействующих волн

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{3}\tilde{\vec{e}}_q^{\,0}\tilde{\vec{E}}_q(\vec{r})exp\left\{i\left[\omega_q t - \left(\vec{k}_q\cdot\vec{r}\right)\right]\right\} + \text{к.с.} \tag{19}$$

с медленно меняющимися на длинах $\lambda_q = 2\pi/|\vec{k}_q|$ в направлениях $\vec{k}_q$ комплексными амплитудами. Считаем, что (19) описывает плоские волны, а не пучки, так что $\tilde{E}_q(\vec{r})$ слабо изменяются в направлениях, перпендикулярных $\vec{k}_q$.

Из (18) после упрощений и перехода к монохроматическим компонентам получим систему из трёх связанных дифференциальных комплексных уравнений

$$\begin{cases} \left(\left[\tilde{\vec{e}}_3^{0*} \times \left[\vec{k}_3 \times \tilde{\vec{e}}_3^{0}\right]\right] \cdot \nabla \tilde{E}_3\right) + \bar{\gamma}_3 \tilde{E}_3 + i\beta\omega_3^2 exp\left\{+i\left(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}\tilde{E}_1\tilde{E}_2 = 0; \\ \left(\left[\tilde{\vec{e}}_{1,2}^{0*} \times \left[\vec{k}_{1,2} \times \tilde{\vec{e}}_{1,2}^{0}\right]\right] \cdot \nabla \tilde{E}_{1,2}\right) + \bar{\gamma}_{1,2} \tilde{E}_{1,2} + i\beta\omega_{1,2}^2 exp\left\{-i\left(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}\tilde{E}_3\tilde{E}_{2,1}^* = 0; \end{cases} \tag{20}$$

в которой введены коэффициент нелинейного взаимодействия

$$\beta = \frac{\pi\mu}{c^2}(\tilde{\vec{e}}_{1,2}^{0*} \cdot \hat{\chi}^{NL} \cdot \tilde{\vec{e}}_3^{0} \cdot \tilde{\vec{e}}_{2,1}^{0*}) = \frac{\pi\mu}{c^2}(\vec{e}_3^{0*} \cdot \hat{\chi}^{NL} \cdot \tilde{\vec{e}}_1^{0} \cdot \tilde{\vec{e}}_2^{0}) \tag{20'}$$

и коэффициенты линейного поглощения

$$\bar{\gamma}_q = \left\{\left(\tilde{\vec{e}}_q^{0*} \cdot \hat{\varepsilon}''(\omega_q) \cdot \tilde{\vec{e}}_q^{0*}\right) \equiv \left(\tilde{\vec{e}}_q^{0*} \cdot \frac{4\pi\hat{\sigma}}{\omega_q} \cdot \tilde{\vec{e}}_q^{0*}\right)\right\} \cdot \frac{\mu\omega_q^2}{2c^2} \tag{20''}$$

В анизотропной среде в общем случае $\vec{E}_q$ и $\vec{k}_q$ не полностью ортогональны друг другу (Рис. 1.3.).

Если вектор

$$\left(\vec{k}_q/\left|\vec{k}_q\right|\right)=\vec{z}_0\cos\theta_q+\vec{x}_0\sin\theta_q$$

необыкновенной волны направлен под углом θ_q к оси Oz и тензор $\hat{\varepsilon}_0$ в собственных кристаллографических осях x, y, z имеет вид

$$\hat{\varepsilon}_0=\begin{vmatrix}\varepsilon_\perp & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\perp & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_\Uparrow\end{vmatrix},$$ то величина

содержимое...

$$k_q=\frac{(\omega_q/c)\sqrt{\mu}\varepsilon_\perp\varepsilon_\Uparrow}{\sqrt{\varepsilon_\Uparrow\cos^2\theta_q+\varepsilon_\perp\sin^2\theta_q}}$$

и орт электрического поля

$$\vec{e}_q^{\,0}=\frac{-\vec{x}_0\varepsilon_\Uparrow\cos\theta_q+\vec{z}_0\varepsilon_\perp\sin\theta_q}{\sqrt{\varepsilon_\Uparrow^2\cos^2\theta_q+\varepsilon_\perp^2\sin^2\theta_q}}$$

зависят от его направления.

Вектора $\tilde{\vec{e}}_q^{\,0},\vec{k}_q,\tilde{\vec{D}}_q,\tilde{\vec{h}}_q^{\,0}=(\tilde{\vec{H}}_q/\tilde{H}_q)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left(\vec{k}_q\cdot\tilde{\vec{h}}_q^{\,0}\right)=0,\quad\left(\vec{k}_q\cdot\tilde{\vec{D}}_q\right)=0;\quad\left(\tilde{\vec{h}}_q^{\,0}\cdot\tilde{\vec{D}}_q\right)=0;$$

$$\left[\vec{k}_q\times\tilde{\vec{e}}_q^{\,0}\right]\tilde{E}_q=\frac{\omega_q}{c}\mu\tilde{H}_q\tilde{\vec{h}}_q^{\,0}=\tilde{y}^0\cdot\frac{\varepsilon_\Uparrow\cdot\cos^2\theta_q+\varepsilon_\perp\cdot\sin^2\theta_q}{\sqrt{\varepsilon_\Uparrow^2\cos^2\theta_q+\varepsilon_\perp^2\sin^2\theta_q}}k_q\tilde{E}_q,$$

$$\left[\vec{k}_q^{\,0}\times\tilde{\vec{e}}_q^{\,0}\right]=-\vec{y}^{\,0}\cdot\frac{\varepsilon_\Uparrow\cdot\cos^2\theta_q+\varepsilon_\perp\cdot\sin^2\theta_q}{\sqrt{\varepsilon_\Uparrow^2\cos^2\theta_q+\varepsilon_\perp^2\sin^2\theta_q}};$$

$$\vec{s}_q^{\,0}\overline{S_q}^T\equiv\overline{\vec{S}_q}^T=\frac{c}{8\pi}\mathbf{Re}\left[\tilde{\vec{E}}_q\times\tilde{\vec{H}}_q^*\right]=\frac{c\tilde{E}_q\tilde{H}_q^*}{8\pi}\left[\tilde{\vec{e}}_q^{\,0}\times\tilde{\vec{h}}_q^{\,0*}\right].$$

В приближении плоской волны $(\partial\tilde{E}/\partial x_q)=(\partial\tilde{E}_q/\partial y_q)=0$ которое не учитывает изменений $\nabla\tilde{E}_q$ в направлениях, перпендикулярных $\vec{k}_q$, получаем

$$\left(\left[\tilde{\vec{e}}_q^{\,0*}\times\left[\vec{k}_q\times\tilde{\vec{e}}_q^{\,0}\right]\right]\cdot\nabla\tilde{E}_q\right)=k_q\cos\alpha_q\cdot\left(\vec{s}_q^{\,0}\cdot\nabla\tilde{E}_q\right)\equiv\frac{\omega_q}{c}n_q\cos^2\alpha_q\left(\frac{\partial\tilde{E}_q}{\partial z_q}\right),$$

где оси Oz_q выбраны по направлениям $\vec{k}_q\left(\vec{k}_q \uparrow\uparrow \vec{z}_q^0\right)$

Если справедливо условие $z_1 = z_2 = z_3 \equiv z$, то (20) преобразуется в систему уравнений в обыкновенных производных

$$\begin{aligned} &\frac{\omega_{1,2}}{c}\hat{n}_{1,2}\frac{d\tilde{E}_{1,2}}{dz} + \bar{\gamma}_{1,2}\tilde{E}_{1,2} + i\beta\omega_{1,2}^2 exp\left\{-i\psi - i\left(\Delta k_z \cdot z\right)\right\}\tilde{E}_3\tilde{E}_{2,1}^* = 0; \\ &\frac{\omega_3}{c}\hat{n}_3\frac{d\tilde{E}_3}{dz} + \bar{\gamma}_3\tilde{E}_3 + i\beta\omega_3^2 exp\left\{i\psi + i\left(\Delta k_z \cdot z\right)\right\}\tilde{E}_1\tilde{E}_2 = 0, \end{aligned} \qquad (20''')$$

где $\hat{n}_q = \sqrt{\varepsilon_q\mu_q}\cos\alpha_q\left(\vec{s}_q^0 \cdot \vec{z}_q^0\right) = n_q\cos^2\alpha_q, \quad \psi \equiv \psi(x,y) = x \cdot \Delta k_x + y \cdot \Delta k_y$.

Введём $+Z$–составляющую вектора Пойнтинга всех трех волн

$$S_z = S_{1z} + S - 2z + S_{3z} = \frac{c}{8\pi\mu} \cdot \left\{\hat{n}_1\left|\hat{E}_1\right|^2 + \hat{n}_2\left|\hat{E}_2\right|^2 + \hat{n}_3\left|\hat{E}_3\right|^2\right\}.$$

Введем безразмерную интенсивность и число m_q^2 фотонов q-той волны

$$\omega_q m_q^2 = \frac{c}{8\pi\mu}(\hat{n}_q\left|\hat{E}_q\right|^2/S_z) \qquad (21)$$

имеющее размерность времени, а также координату

$$\zeta = (z/L_0) = z\beta\sqrt{8\pi\mu S_z c\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\hat{n}_1\hat{n}_2\hat{n}_3}} \qquad (21')$$

нормированную на длину ***нелинейного взаимодействия*** L_0. Тогда уравнения преобразуются в систему из 4-х (а не 6-ти) действительных связанных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dm_{1,2}}{d\zeta} + \gamma_{1,2}m_{1,2} &= -m_{2,1}m_3\sin\Phi; \\ \frac{dm_3}{d\zeta} + \gamma_3 m_3 &= -m_2 m_1\sin\Phi; \\ \frac{d\Phi}{d\zeta} &= \delta + (ctg\Phi)\frac{d}{d\zeta}ln(m_1m_2m_3) \end{aligned} \qquad (22)$$

где

$$\Phi = arg\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 - arg\tilde{E}_3 + \xi(x,y) + \Delta k_z \cdot z,$$
$$\delta = (\Delta k_z \cdot L_0), \qquad \gamma_q = \frac{\overline{\gamma}_q L_0}{\omega_q\hat{n}_q}.$$

Пункт 3. Законы сохранения в непоглощающей среде

Проанализируем систему (22) и ее решения в приближении

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \qquad (23)$$

отсутствия поглощения. Умножим каждое уравнение для m_q на $2m_q$ и заметим, что справедливы соотношения

$$\frac{d}{d\zeta}(m_1^2 + m_3^2) = \frac{d}{d\zeta}(m_2^2 + m_3^2) = \frac{d}{d\zeta}(m_1^2 - m_2^2),$$

которые позволяют получить законы Мэнли- Роу сохранения чисел квантов:

$$m_1^2 + m_3^2 = N_1; \quad m_2^2 + m_3^2 = N_2; \quad m_1^2 - m_2^2 = N_1 - N_2. \tag{24}$$

Видно, что из трех законов (24) независимы только два. Интерпретация такова: система (22) описывает процессы слияния и распада квантов.

Кроме (24), имеются еще 2 независимых закона сохранения. Один из них – закон сохранения энергии (вектора Пойнтинга S_z). Для его определения умножим каждое уравнение на $\omega_q 2m_q$ и сложим их. Тогда получим

$$\frac{d}{d\zeta}(\omega_1 m_1^2 + \omega_2 m_2^2 + \omega_3 m_3^2)$$

и с учетом (21)

$$\omega_1 m_1^2 + \omega_2 m_2^2 + \omega_3 m_3^2 = const = 1. \tag{25}$$

Последнее уравнение (22) можно проинтегрировать в два этапа. Вначале находится первый интеграл для частного случая $\delta = 0$ в виде

$$m_1 m_2 m_3 \cos\Phi = \Gamma(0) \equiv \Gamma_0. \qquad (26')$$

Затем методом вариации произвольной постоянной

$$m_1 m_2 m_3 \cos\Phi + f(\zeta) = \Gamma$$

находится первый интеграл в виде

$$m_1 m_2 m_3 \cos\Phi + \frac{1}{2}\delta m_3^2 = \Gamma. \tag{26}$$

Пункт 4. Генерация второй гармоники по схеме $1^o + 1^o = 2^e$

В этом частном случае

$$m_1 = m_2 \equiv m, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad \omega_3 = 2\omega \tag{27}$$

уравнения (22) превращаются в систему

$$\begin{aligned} &\frac{dm}{d\zeta} + \gamma m = -mv\sin\Phi; \\ &\frac{dv}{d\zeta} + \gamma_3 v = m^2 \sin\Phi; \\ &\frac{d\Phi}{d\zeta} = \delta + ctg\Phi\frac{d}{d\zeta}ln(m^2 v), \end{aligned} \tag{28}$$

в которой для удобства введено $m_3 \equiv v$. В случае отсутствия диссипации

$$\gamma = \gamma_3 = 0 \tag{23'}$$

система (28) имеет первые интегралы

$$m^2 + v^2 = N; \tag{29a}$$

$$m^2 v \cos\Phi + \frac{1}{2}\delta v^2 = \overline{\Gamma} + \frac{1}{2}\delta v_0^2 \equiv \Gamma; \tag{29b}$$

$$2\omega(m^2 + v^2) = 1. \tag{29c}$$

Рассмотрим различные решения этих уравнений.

4.1. Случай точного синхронизма

$$\delta = 0 \tag{30}$$

4.1.1. Вторая гармоника отсутствует на входе слоя

Вначале найдём решение, которое учитывает влияние истощения первой гармоники[1], ***при условии отсутствия второй гармоники на входе слоя***

$$v(0) \equiv v_0 = 0 \tag{31}$$

Из (29b) в этом случае находим $\Gamma = 0$ и далее из физического смысла задачи (роста второй гармоники) получаем

$$\cos\Phi = 0; \qquad \sin\Phi = 1 \tag{32}$$

[1]В приближении заданного поля первой гармоники $m \equiv m_0 = const$ решение (28) которое описывает рост второй гармоники на начальном участке среды, находим в виде $v(\zeta) = m_0^2 \cdot \zeta = (m_0^2/z_0)z \equiv m_0(z/L_0)$, где использована оценочная длина нелинейного взаимодействия $L_0 = (z_0/m_0) = (\hat{n}_1/\sqrt{2}\beta c\omega \left|\tilde{E}_1(0)\right|)$.

Затем используем первый интеграл (29a), и второе уравнение (28) приобретает вид

$$\frac{d}{d(\zeta\sqrt{N})}\left(\frac{v}{\sqrt{N}}\right)^{-1} = 1 - \left(\frac{v}{\sqrt{N}}\right)^{2} \equiv 1 - U. \tag{33}$$

С граничным условием (31) его решение

$$(v/\sqrt{N})^2 \equiv U(\zeta) = th^2(\zeta\sqrt{N}) \equiv th^2(\xi), \tag{34v}$$

а также полученное из (29a) решение

$$\left[m(\zeta)/\sqrt{N}\right]^2 = 1 - th^2(\xi) = 1/ch^2(\xi) \tag{34m}$$

для квадрата амплитуды первой гармоники изображены на Рис. 1.4.

Решение (34v) свидетельствует о возможности полной перекачки энергии во вторую гармонику на бесконечно большой длине слоя среды.

4.1.2. Вторая гармоника на границе присутствует

Уравнения (28) при условиях(23') и (30) можно проинтегрировать и в случае ***наличия на границе*** $\zeta = 0$ ***второй гармоники***

$$v(0) = v_0, \qquad m(0) = m_0. \tag{35}$$

Результат интегрирования зависит от величины первого интеграла (29b), т.е. от решения третьего уравнения (28).

Если $\bar{\Gamma} = 0$ (и соответственно $\cos\Phi = 0$, а $\sin\Phi = \pm 1$), то для $v_0 < 1$ возможны два решения (28), одно из которых описывает нарастание v по изображённому на рис. 1.4 закону, а второе – уменьшение v. Координата ζ_0 определяется из условия

$$v_0 = \sqrt{N} th(\zeta_0\sqrt{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{U_0} = th(\xi_0).$$

Решение (28) в произвольном случае $m_0^2 v_0 \cos\Phi_0 \equiv \Gamma(\delta = 0) \equiv \Gamma$ также существует. В этом случае из первых интегралов (29a)-(29c) находятся

$$m = \sqrt{N - v^2} \qquad \text{и} \qquad \sin\Phi = \pm\sqrt{1 - \Gamma^2/(N - v^2)v^2},$$

и получается уравнение для второй гармоники

$$\frac{dU}{d\xi} = \pm 2\sqrt{(1-U)^2 U - \alpha} \tag{36}$$

где величина $U = v^2/N$ положительна и меньше единицы и где положительна величина $\alpha = (\Gamma^2/N^3)$. Знак указывает на направление, в котором идет процесс. Если знак положительный, то вторая гармоника растёт.

Дифференциальное уравнение (36) можно представить в интегральной форме в виде эллиптического интеграла

$$2\xi = \int\limits_{U(0)}^{U} \frac{dU}{\sqrt{(1-U)^2 U - \alpha}}, \tag{37}$$

Если $\alpha < ({}^4/{}_{27})$, то кубическое уравнение

$$(1-U)^2 U - \alpha = 0 \tag{38}$$

может иметь три положительных корня $0 < U_a < U_b < U_c$. В этом случае решение (37) может меняться между двумя наименьшими положительными корнями $U_a < U_b$. Оно колеблется между ними с периодом

$$\xi_\Pi = \frac{\sqrt{N} L_\Pi}{L_0} = \int\limits_{U_a}^{U_B} \frac{dU}{\sqrt{(1-U)^2 U - \alpha}}. \tag{39}$$

Эллиптический интеграл (37) с помощью замены переменной

$$t^2 = \{(U - U_a) \,/\, (U_b - U_a)\} \tag{40}$$

и введение модуля

$$k^2 = \frac{U_b^2 - U_a^2}{U_c^2 - U_a^2} \equiv \{(U_b - U_a) \,/\, (U_c - U_a)\} \tag{41}$$

приводится к явному виду эллиптического интеграла

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{U_c - U_a}} \cdot \int\limits_{t(0)}^{t(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{42}$$

Решением интегрального уравнения (42) является ***эллиптический синус***

$$t(\xi,k) = sn\left\{(\xi+\xi_0)\cdot\sqrt{U_c - U_a},k\right\} \equiv sn(\theta+\theta_0,k) \tag{43}$$

Нормированные интенсивности первой и второй гармоник (числа фотонов) можно выразить через эту ***эллиптическую функцию Якоби***

$$\begin{cases} U = U_a + (U_b - U_a)sn^2\left[\sqrt{U_c - U_a}(\xi+\xi_0),k\right]; \\ (m^2/N) = 1 - U, \end{cases} \tag{44}$$

Результаты проведенного анализа представлены на Рис. 1.5. и Рис.1.6

Площадь, ограниченная кривыми U_{max} и U_{min} на Рис. 1.6, определяет интервалы изменения этих величин. Величина α не может быть более ${}^4\!/_{27} \cong 0{,}148$. При $\alpha_{CR} = {}^4\!/_{27}$ величина U перестаёт изменяться и становится равной $U = \overline{U} = {}^1\!/_3$, значения чисел фотонов $\overline{m}^2$, $\overline{v}^2$ оказываются неизменными.

Таким образом, **из-за наличия второй гармоники на границе среды уменьшается коэффициент преобразования во вторую гармонику**. Процесс становится периодическим, и максимального значения вторая гармоника достигает на конечной длине, равной половине пространственного периода (39).

4.2. Отсутствие синхронизма

В отсутствие синхронизма (при рассогласовании фазовых скоростей) при наличии расстройки волновых векторов

$$\delta \neq 0 \tag{45}$$

справедлив первый интеграл (26) в своем наиболее общем виде[2]. Обобщением уравнения (37) в этом случае является уравнение

$$2\xi = \int\limits_{U(0)}^{U} \frac{dU}{\sqrt{(1-U)^2 U - \left[\sqrt{\alpha} - (\delta/2)\cdot(U-U_0)\right]^2}}. \tag{37*}$$

По прежнему уравнение

$$(1-U)^2 U - \left[\sqrt{\alpha} - (\delta/2)\cdot(U-U_0)\right]^2 = 0 \tag{38*}$$

определяющее особенности подынтегрального выражения (37*), имеет три положительных корня $0 < U_a < U_b < U_c$ в области малых значений параметров α,δ,U_0. Заменой (40) интеграл (37*) приводится к виду (42). Все выводы о характере изменения m^2, v^2, полученные в отсутствие отстройки, будут справедливы и при её наличии в случае $\delta \neq 0$.

4.2.1. Отсутствие второй гармоники на границе слоя

В важном частном случае отсутствия второй гармоники на границе слоя

$$v^2(0) \equiv U_0 \cdot N = 0 \tag{46}$$

когда первый интеграл (29b) будет равен нулю

$$\Gamma = 0; \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0; U_0 = 0.$$

корни уравнения (37*) (для параметра $\delta > 0$) имеют вид

$$U_a = 0; \quad U_b = ({}^1/_{U_c}) = \left(\sqrt{1+\frac{\delta^2}{16}} - \frac{\delta}{4}\right)^2 \tag{47}$$

Из (47) видно, что при наличии отстройки волновых векторов не может быть полной перекачки энергии во вторую гармонику даже при прочих идеальных условиях. Перекачка будет происходить по закону (44), в котором

$$U_a = 0; \quad \zeta_0 = 0; \quad k = U_b; \quad U = U_b sn^2({}^{\xi}/_{\sqrt{U_b}}, U_b). \tag{44'}$$

[2]Решение последнего уравнения (22) ищем в виде $m^2 v\cos\Phi + f = \Gamma$. Находим $\cos\Phi\frac{d}{d\zeta}(u^2\nu) - (m^2 v\sin\Phi)({}^{d\Phi}/_{d\zeta}) + ({}^{df}/_{d\zeta}) = 0$ и $({}^{df}/_{d\zeta}) = \delta(m^2 v)\sin\Phi$. Отсюда получаем $f(\zeta) = \delta\int\limits_0^\zeta m^2 v\sin\Phi d\zeta = \delta\int\limits_0^\zeta v({}^{dv}/_{d\zeta})d\zeta = \frac{\delta}{2}(v^2 - v_0^2)$

В параметрическом приближении решение может выглядеть ещё проще[3].

4.3. Влияние линейных потерь на генерацию второй гармоники

Это влияние можно оценить из уравнений (28) в приближении

$$\delta = 0; \qquad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma. \tag{48}$$

В этом случае аналитическое решение (28) следует искать в виде (28)

$$\{m(\zeta), v(\zeta)\} = \{a_1(y), a_2(y)\}\, exp(-\gamma\zeta), \tag{49}$$

где роль новой координаты играет функция

$$y = (1/\gamma)\{1 - exp(-\gamma\zeta)\}\,. \tag{50}$$

Подставив (49) в (28), мы получим уравнения

$$\frac{da_1}{dy} = -a_1 a_2 \sin\Phi; \qquad \frac{da_2}{dy} = a_1^2 \sin\Phi; \qquad \frac{d\Phi}{dy} = ctg\Phi \frac{d}{dy}\mathbf{ln} a_1^2 a_2, \tag{51}$$

которые совпадают по форме с уравнениями (28) при условии $\gamma = \gamma_3 = 0$. Важное отличие (51) от (28) в том, что y меняется в конечных пределах

$$0 \equiv y(0) < y < y(\zeta = \infty) \equiv (1/\gamma).$$

Пределы применимости (51) свидетельствуют о том, что характер нелинейного процесса в квадратичной среде определяется не абсолютной величиной длины затухания $({}^1/_{\bar\gamma})$, а её относительным значением

$$(\gamma)^{-1} = (\bar\gamma L_0)^{-1} \tag{52}$$

нормированным на длину нелинейного взаимодействия. В случае «малого затухания» $\gamma << 1$ расстояние $y_\infty = ({}^1/_\gamma)$ может принимать достаточно большие значения. При этом картина изменения амплитуд $a_{1,2}$ волн первой и второй гармоник похожа на ту, которую имели изменения величин m и v в случае $\delta = 0$.

[3] 4.2.2. Рассмотрим ***параметрическое приближение роста второй гармоники*** для случая $\delta \neq 0$. Воспользуемся условием $m^2 = \overline{m}^2 = const$ и представим второе уравнение (28) с учетом интеграла (29b) в виде

$$\frac{dv^2}{d\zeta} = 2\overline{m}^2 v \sin\Phi \equiv \sqrt{4\overline{m}^4 v^2 - \left(2\Gamma - \delta\{N - \overline{m}^2\}\right)^2} \equiv 2\overline{m}^2\sqrt{v^2 - a^2}.$$

Решение можно получить в виде $\sqrt{v^2 - a^2} = \sqrt{v_0^2 - a^2} + \overline{m}^2(\zeta - \zeta_0)$ (*), где v_0^2 обозначает величину v^2 в точке ζ_0 . Из выражения (*) находим, что поле второй гармоники растет неограниченно. **Интерпретация проста: резервуар фотонов m^2 безграничен, поэтому и v^2 растет безгранично независимо от начальных условий.**

Истинные значения v или m находятся по формуле (49) и при $\zeta \to \infty$ равны нулю. Поэтому $v(\zeta)$ всегда имеет экстремум в некоторой точке ζ_{op} . На рис. 1.7. приведены зависимости нормированной амплитуды второй гармоники от нормированной координаты ζ для трёх значений постоянной затухания, нормированной на длину нелинейного взаимодействия. В случае отсутствия второй гармоники на границе слоя среды $(a_2^2(0) = 0)$ точное аналитическое решение уравнений (51) (представлено на Рис. 1.7) имеет вид

$$a_2(y) = th(y) \Rightarrow \qquad v(\zeta) = th(y) \cdot \exp(-\gamma\zeta)$$

В этом случае величину

$$v^2(\zeta) = \exp(-2\gamma\zeta) th^2 \left\{ (^1/_\gamma)[1 - \exp(-\gamma\zeta)] \right\} \equiv \eta \tag{53}$$

можно назвать КПД преобразования первой гармоники во вторую гармонику. Используя (53), можно оценить максимальное значение КПД по мощности волноводного удвоителя с потерями и его оптимальную длину.

В приближении малого затухания $\gamma = L_0\bar{\gamma} << 1$ и при условии

$$(\gamma\zeta_{\text{op}}) << 1 \tag{54}$$

получим $y_{\text{op}} \cong \zeta_{\text{op}}$ и

$$(\gamma\zeta_{\text{op}}) \cong \{y/(2+\gamma)\}\, ln(4/\gamma) \cong (\gamma/2) lln(4\gamma) \tag{55}$$

что позволяет оценить $th^2\zeta_{\text{op}} \cong 1$ и максимальный КПД преобразования по формуле

$$\eta_{max} \cong \exp(-2\gamma\zeta_{\text{op}}) th^2\zeta_{\text{op}} \cong (\gamma/4)^\gamma \tag{56}$$

Выводы:

1. Результаты преобразования во вторую гармонику ухудшаются по трём причинам:

   а) из-за рассогласования (расстройки) фазовых скоростей $\delta \neq 0$;

б) из-за присутствия второй гармоники на границе слоя среды (при $z = 0$);

в) из-за линейного поглощения.

2. Наличие любой из этих трёх причин исключает возможность стопроцентного преобразования во вторую гармонику.

5. Трехволновые взаимодействия

В этот раздел попадают такие процессы, как

1. образование второй гармоники по схеме $1^o + 1^e = 2^e$;
2. образование суммарной частоты $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$;
3. образование разностной частоты $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$;

5.1.

В приближении ***отсутствия поглощения*** (23) общее решение уравнений (22) с учетом первых интегралов (24)-(26) представляется как

$$2\zeta = \int\limits_{W_a}^{W} \frac{dW}{\sqrt{(N_1 - W)\cdot(N_2 - W)\cdot W - (\Gamma - \frac{\delta}{2}W)^2}}, \tag{57}$$

где $W \equiv W(\zeta) = m_3^2(\zeta)$ см.(37*) для сравнения. Решение уравнения (57) находится точно по такой же схеме, как и решение уравнения (37*). Вначале находятся три положительных корня $0 < W_a < W_b < W_c$ уравнения

$$(N_1 - W)\cdot(N_2 - W)\cdot W - \left(\Gamma - \frac{\delta}{2}W\right)^2 = 0, \tag{58}$$

определяющего все существенные свойства решения интегрального уравнения (57). Заменой (40) и введением модуля эллиптического интеграла (41) интегральное уравнение (57) приводится к виду (42). Это позволяет записать решение (57) в виде

$$\begin{gathered} m_3^2(\zeta) = W_a + [W_b - W_a]\, sn^2\left\{\sqrt{W_c - W_a}(\zeta + \zeta_0), k\right\}, \\ m_2^2(\zeta) = N_2 - m_3^2(\zeta), \qquad m_1^2(\zeta) = N_1 - m_3^2(\zeta), \end{gathered} \tag{59}$$

где значение аргумента на границе слоя среды определяется из соотношения

$$m_2^2(0) = W_a + [W_b - W_a]\, sn^2 \left\{ \sqrt{W_c - W_a}\zeta_0, k \right\}, \tag{60}$$

Процесс перекачки энергии из одной волны в другую является периодическим. Период процесса определяется (см. также (39)) как

$$(L_\Pi / L_0) = \left[2/\sqrt{W_c - W_a} \right] K(k), \tag{61}$$

где

$$K(k) = \int\limits_0^1 \left\{ dt/\sqrt{(1 - t^2(1 - k^2 t^2))} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}} \tag{62}$$

полный эллиптический интеграл 1-го рода.

5.1.1. Отсутствие гармоники на границе + точный синхронизм.

В частном случае отсутствия гармоники на границе и наличия точного синхронизма

$$m_3^2(0) = 0; \qquad \delta = 0 \tag{63}$$

из (24) – (26) находим $\Gamma = 0, W_a = 0, W_b = N_2, W_c = N_1, k^2 = (N_2/N_1)$. В результате решение (59) приобретает форму

$$\begin{gathered} m_3^2(\zeta) = N_1 sn^2, \\ m_1^2(\zeta) = N_1 - m_3^2(\zeta). \end{gathered} \tag{59'}$$

Процесс имеет период

$$(L_\Pi / L_0) = [2/\sqrt{N_1}] K(k) \tag{61'}$$

5.2. Параметрические процессы при трёхволновом взаимодействии.

При 3-волновом взаимодействии понятие параметрического приближения становится более широким, чем при 2-волновом. Новая особенность взаимодействия появляется из-за того, что теперь одна волна может быть существенно больше двух других (а не одной, как это было в пункте 4.2.2.).

5.2.1. Преобразовании частоты вверх.

Рассмотрим типичный случай параметрического приближения при так называемом преобразовании частоты вверх

$$m_1^2(0) >> m_2^2(0), \tag{64}$$

предполагая для простоты отсутствие гармоники на границе (63) и наличие точного синхронизма $\delta = 0$ (см. условие (30)). Тогда из (58) и (24) – (26) найдём

$$W_c \equiv (m_3^2)_c = N_1 >> W_b \equiv (m_3^2)_b = N_2 > W_a \equiv (m_3^2)_a = 0, \tag{65}$$

и решение (59) интегрального уравнения (57) преобразуется к виду

$$m_3^2(\zeta) = N_2 sn^2 \left\{ \sqrt{N_1}\zeta, k = \sqrt{\frac{N_2}{N_1}} \right\} \cong N_2 sin^2(\sqrt{N_1}\zeta). \tag{66b}$$

Число фотонов на частоте ω_3 не превосходит число фотонов на частоте ω_2, поскольку большего числа фотонов ω_3 образоваться не может из-за отсутствия "материала". Число фотонов на частоте ω_2 меняется по закону

$$m_2^2(\zeta) = N_2 cos^2(\sqrt{N_1}\zeta), \tag{66a}$$

а резервуар фотонов ω_1 бесконечен ($m_1^2 = N_1 = m_1^2(0)$).

5.2.2. Параметрическое преобразование частоты вниз при высокочастотной накачке

Рассмотрим типичный случай образования низкочастотной гармоники при высокочастотной накачке

$$m_3^2(0) >> m_1^2(0), \tag{67}$$

предполагая для простоты её полное ***отсутствие на границе***

$$m_2^2(0) = 0 \tag{68}$$

и наличие ***точного синхронизма*** $\delta = 0$ (см. условие (30)). Тогда из (24)-(26) находим

$$\begin{gathered} \Gamma = 0, \quad m_1^2(0) = N_1 - N_2, \quad m_3^2(0) = N_2 >> N_1 - N_2, \\ m_1^2(0) + m_3^2(0) = N_1 > N_2 = m_3^2(0) >> m_1^2(0) = N_1 - N_2. \end{gathered} \tag{69}$$

Параметры решения (59) интегрального уравнения (57) (являющиеся решениями кубичного уравнения (58)), будут иметь значения

$$W_c \equiv (m_3^2)_c = N_1 \geq W_b \equiv (m_3^2)_b = N_2 >> W_a \equiv (m_3^2)_a = 0. \tag{70}$$

Это позволяет представить решение (59) в виде эллиптических функций

$$\begin{aligned} m_2^2(\zeta) = N_2 sn^2(\sqrt{N_1}\zeta, k); \quad m_3^2(\zeta) = N_2 cn^2(\sqrt{N_1}\zeta, k), \\ m_1^2(\zeta) = N_1 - N_2 cn^2(\sqrt{N_1}\zeta, k), \end{aligned} \tag{71}$$

модуль (второй аргумент) которых близок к единице:

$$k_2 = \frac{N_2}{N_1} = 1 - (k^{'})^2 \cong 1 - \frac{m_1^2(0)}{m_3^2(0)} \to 1$$

В этом случае (в отличие от предыдущего) полный эллиптический интеграл первого рода (62) представляет собой достаточно большую величину

$$K(k) \cong ln\frac{4}{k^{'}} + \frac{1}{4}\left[\left(ln\frac{4}{k^{'}} - 1\right)\right] + \cdots \cong ln\frac{4m_3(0)}{m_1(0)}$$

Максимальное значение мощности m_2 достигается на длине нелинейной среды $(L_{\Pi}/2)$, которая равна половине пространственного периода изменения решения (71), определяемого в соответствии с (61') по упрощённой формуле

$$\begin{aligned} L_{\Pi} = L_0 \frac{2}{\sqrt{N_1}} ln\left(\sqrt{\frac{16N_2}{N_1 - N_2}}\right) = \\ = \frac{\sqrt{\hat{n}_1\hat{n}_2\hat{n}_3}}{\beta c\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}} \cdot \frac{ln[16N_2/(N_1N_2)]}{\sqrt{\frac{\hat{n}_1}{\omega_1}|\tilde{E}_1(0)|^2 + \frac{\hat{n}_3}{\omega_3}|\tilde{E}_3(0)|^2}} \cong \\ \cong \frac{1}{\beta c|\tilde{E}_3(0)|}\sqrt{\frac{\hat{n}_1\hat{n}_2}{\omega_1\omega_2}} ln\frac{16N_2}{N_1 - N_2}. \end{aligned} \tag{72}$$

Интересно сравнить расстояние $L_{\Pi}/2$ и длину нелинейного взаимодействия L_0 в процессе удвоения частоты в предположении, что в результате обоих процессов рождается одна и та же частота $\overline{\omega}$. При этом необходимо считать, что в формуле (**??**) для L_0 основная частота накачки

$$\omega = \frac{\overline{\omega}}{2},$$

а в формуле (72) рождающиеся в процессе преобразования вниз частоты

$$\omega_1 = \omega_2 = \overline{\omega}$$

вдвое меньше частоты накачки. Кроме того, будем считать, что значения параметров в обеих формулах совпадают

$$(|\tilde{E}_3(0)|) \equiv (|\tilde{E}(0)| \equiv (|\tilde{E}_1(0)|)), \quad \hat{n}_{1S} = \hat{n}_{2S} = \hat{n}, \quad \beta_S = \beta$$

и что задана (типичная) величина отношения чисел фотонов на входе слоя

$$16\frac{N_2}{N_1 - N_2} = 16\frac{m_3^2(0)}{m_1^2(0)}10^6.$$

Тогда отношение длин нелинейного преобразования частоты (взаимодействия)

$$\frac{L_{\Pi}}{2 \cdot L_0} \cong \frac{6ln10}{2 \times 4\sqrt{2}} \cong 1.22$$

свидетельствует о достаточно высокой эффективности процесса преобразования частоты вниз.

В предельном случае $k \to 1, [m_1^2(0)]m_3^2(0) \to 0$ решение (71) имеет вид

$$m_3^2(\zeta) = N_2/ch^2(\sqrt{N_2}\zeta), \quad m_2^2(\zeta) = N_2 th^2(\sqrt{N_2}\zeta), m_1^2(\zeta) = N_2 th^2(\sqrt{N_2}\zeta). \tag{73}$$

Это – решение уравнений (22), в которых $\Phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \cos\Phi = 0, \quad \sin\Phi = -1.$ В этом случае уравнения имеют вид уравнений ***трехмерного трехволнового резонансного взаимодействия***

$$m_1^{'} = m_2 m_3; \quad m_2^{'} = m_1 m_3; \quad m_3^{'} = -m_1 m_2 \tag{74}$$

Решение (73) называется солитонным.

Итак, **запомните главное**:

В основе трехчастотных взаимодействий в квадратичной среде находится процесс слияния-распада квантов. Он происходит по схеме, которая изображена на Рис.1.8.

Эта схема отражает законы сохранения энергии

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$$

и импульса

$$\hbar\vec{k}_3 = \hbar\vec{k}_1\hbar\vec{k}_2$$

в каждом отдельном акте.

содержимое...

Наличие расстройки $|\vec{k}_3 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2| \neq 0$ **не означает нарушения законов сохранения. Оно означает, что часть импульса забирается или создается через посредство границ кристалла, закрепленного на оптической скамье.**

ГЛАВА II. ЧЕТЫРЕХЧАСТОТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КУБИЧНОЙ СРЕДЕ

Пункт 1. *Условия четырехчастотного взаимодействия*

$$\vec{P}^{NL} = (\hat{\chi} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}), \tag{1}$$

аналогом соотношений (1.3) и (1.14) будут условие синхронизма и закон преобразования частот либо в виде

$$\vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \Delta\vec{k}; \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \tag{2а}$$

либо в виде (см. Рис. 2.1)

$$\vec{k}_4 + \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \Delta\vec{k}; \omega_4 + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \tag{2б}$$

В такой среде при выполнении условий (2) осуществляется *четырехчастотное* (**четырехволновое**) взаимодействие.

Пункт 2. *Основные уравнения четырехволнового взаимодействия*

Подставляя выражения типа (1.19) в уравнения Максвелла типа (1.18) с нелинейной поляризацией (1) в правой части и оставляя после усреднения по частоте и по длине волны уравнения первого порядка ($\Delta_\perp \tilde{E}_S = 0$), получим для случая (б) $\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_S + \omega_f$, $\vec{k}_\alpha + \vec{k}_\beta = \vec{k}_S + \vec{k}_f + \Delta\vec{k}$ систему уравнений, аналогичную (1.20). Она будет иметь вид

$$\frac{\omega_{1,4}}{c}\widehat{n}_{1,4}\frac{d\tilde{E}_{1,4}}{dz_{1,4}} + \overline{\gamma}_{1,4}\tilde{E}_{1,4} + i\omega_{1,4}^2 \left\{ \beta\tilde{E}_3\tilde{E}_2\tilde{E}_{4,1}^* \exp\left[i\left(\Delta\vec{k}\vec{r}\right)\right] + \tilde{E}_{1,4}\sum_{j=1}^{4}(\overline{\beta}_{1,4})\tilde{E}_j\tilde{E}_j^* \right\} = 0$$

$$\frac{\omega_{2,3}}{c}\widehat{n}_{2,3}\frac{d\tilde{E}_{2,3}}{dz_{2,3}} + \overline{\gamma}_{2,3}\tilde{E}_{2,3} + i\omega_{2,3}^2 \left\{ \beta\tilde{E}_1\tilde{E}_4\tilde{E}_{3,2}^* \exp\left[-i\left(\Delta\vec{k}\vec{r}\right)\right] + \tilde{E}_{2,3}\sum_{j=1}^{4}(\overline{\beta}_{1,4})\tilde{E}_j\tilde{E}_j^* \right\} = 0 \tag{3}$$

где

$$\beta = \frac{2\pi}{4c^2}\mu\left(\tilde{\vec{e}}_1^{0*}\cdot\hat{\chi}\cdot\tilde{\vec{e}}_2^{0}\cdot\tilde{\vec{e}}_3^{0}\cdot\tilde{\vec{e}}_4^{0*}\right),\quad \overline{\beta}_{KS} = \frac{2\pi}{4c^2}\mu\left(\tilde{\vec{e}}_k^{0*}\cdot\hat{\chi}\tilde{\vec{e}}_k^{0}\cdot\cdot\tilde{\vec{e}}_S^{0}\cdot\tilde{\vec{e}}_S^{0*}\right)$$

Наиболее существенное отличие укороченных уравнений (3) от соответствующих уравнений квадратичной среды (1.20) состоит в том, что каждое из уравнений (3) содержит не по одному, а по пять нелинейных членов. Характер нелинейных взаимодействий, описываемых разными членами, различен. Имеется ”когерентное взаимодействие как в квадратичной среде. Оно зависит от отстройки $(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r})$ и растёт при уменьшении $|\Delta\vec{k}|$. Имеется ”некогерентное”взаимодействие (а также самовоздействие), которое связано с поправками к диэлектрической проницаемости из-за эффекта Керра.

Вначале введем $\tilde{E}_s = E_s exp(i\varphi_s)$ и получим уравнения для интенсивностей

$$\frac{\omega_s}{c}\hat{n}_s\frac{dE_s^2}{dz_s} + 2\overline{\gamma}_s E_s^2 \mp 2\beta\omega_s^2 E_1E_2E_3E_4 sin\theta = 0, \tag{4}$$

где знак плюс справедлив для волн 2, 3 и

$$\theta = (\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}) + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_4. \tag{4'}$$

Введем безразмерные переменные

$$\omega_s m_s^2 = \hat{n}_s E_s^2 \Bigg/ \left[\sum_{q=1}^{4}\left(\hat{n}_q E_q^2\right)\right],\quad \zeta_s = \frac{z_s}{L_0} \equiv z_s\beta c\left[\sum_{q=1}^{4}\left(\hat{n}_q E_q^2\right)\right]\sqrt{\frac{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}{\hat{n}_1\hat{n}_2\hat{n}_2\hat{n}_3\hat{n}_4}},$$

$$\gamma_s = \overline{\gamma}_s\sqrt{\frac{\hat{n}_1\hat{n}_2\hat{n}_2\hat{n}_3\hat{n}_4}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}}\left\{\beta\omega_s\hat{n}_s\left[\sum_{q=1}^{4}\left(\hat{n}_q E_q^2\right)\right]\right\}^{-1} \equiv \overline{\gamma}_s\cdot L_0 \tag{5}$$

в которых длина нелинейного взаимодействия L_0 обратно пропорциональна интенсивности (а не корню из этой величины, как и L_0 в (1.21)), и представим уравнения ((4)) в безразмерной форме

$$\frac{d}{d\zeta_s}m_s^2 + 2\gamma_s m_s^2 \mp 2m_1m_2m_3m_4 sin\theta = 0. \tag{4''}$$

В частном случае совпадения направлений распространения всех волн

$$\zeta_s = \zeta \tag{6}$$

уравнения (4”) преобразуются в систему

$$\frac{d}{d\zeta}m_s^2 + 2\gamma_s m_s^2 \mp 2m_1m_2m_3m_4 sin\theta = 0. \tag{7}$$

Если считать, что диссипация отсутствует

$$\overline{\gamma}_1 = \overline{\gamma}_2 = \overline{\gamma}_3 = \overline{\gamma}_4 = 0, \tag{8}$$

то в этом случае можно написать уравнение для величины θ(см. также (1.23))

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \delta + \frac{cos\theta}{sin\theta}\cdot\frac{d}{d\zeta}[ln(m_1m_4m_2m_3)] + \sum_{q=1}^{4}(\beta_{1q} + \beta_{4q} - \beta_{2q} - \beta_{3q}). \tag{9}$$

в котором

$$\delta = \Delta k_z \cdot L_0, \quad (\beta_{sq})\frac{c\omega_s}{\hat{n}_s}L_0.$$

Пункт 3. ***Первые интегралы уравнений в отсутствие диссипации***

Рассмотрим решения уравнений (7) в приближении отсутствия поглощения (8). Тогда для чисел квантов всех четырех частот получим ***законы сохранения***, которые называются ***соотношениями Мэнли-Роу***. Эти соотношения имеют вид

$$m_1^2 + m_2^2 = N_1, \quad m_1^2 + m_3^2 = N_2, \quad m_1^2 - m_4^2 = N_3, \tag{10}$$

аналогичный (1.24). Законы сохранения (10) имеют достаточно ясный физический смысл, который можно сформулировать одним предложением. ***Если число квантов в волне с частотой ω_1, проходящих через 1 см^2 волнового фронта за 1 сек, увеличивается на некоторое количество, то число квантов в волне с частотой ω_4 также увеличивается на то же количество, а в волнах с частотами ω_2 и ω_3 уменьшается на такую же величину.***

Умножив первое соотношение (10) на $\hbar\omega_2$, второе на $\hbar\omega_3$,третье на $(-\hbar\omega_4)$ и сложив все, получим закон сохранения энергии

$$\hbar\left[(m_1^2 + m_2^2)\omega_2 + (m_1^2 + m_3^2)\omega_3 + (m_4^2 - m_1^2)\omega_4\right] = \hbar\left(m_1^2\omega_1 + m_2^2\omega_2 + m_3^2\omega_3 + m_4^2\omega_4\right)$$

$$\equiv \sum_{q=1}^{4}\overline{S_{qz}^T} \equiv \overline{S_z} = \hbar(N_1\omega_2 + N_2\omega_3 - N_3\omega_4) = const \tag{11}$$

Пункт 4. ***Генерация третьей гармоники в отсутствие поглощения.***

Модифицируем уравнения ((3)) для взаимодействия типа (а), заменив в них $\omega_1 \to -\omega_1$; $\tilde{E}_1^* \to \tilde{E}_1$;$\varphi_1 \to -\varphi_1$. Применим модифицированные уравнения для изучения генерации третьей гармоники. Рассмотрим взаимодействие

$$1^o + 1^o + 1^o = 3^e. \tag{12}$$

В этом случае в соотношениях (2) и уравнениях (4) нужно заменить

$$\omega_1 \to -\omega, \quad \omega_2 = \omega_3 \to \omega, \quad \omega_4 \to 3\omega, \quad ,\vec{k}_1 \to -\vec{k}, \quad \vec{k}_2 = \vec{k}_3 \to \vec{k},\vec{k}_4 \to \vec{k}_3,$$
$$\tilde{E}_1^* \to \tilde{E}_1; \quad \varphi_1 \to -\varphi; \quad \tilde{E}_2 = \tilde{E}_3 \to \tilde{E}_1; \quad \tilde{E}_4 \to \tilde{E}_3, \tag{13}$$

а в уравнениях (7) и (9) сделать замены:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m; \qquad m_4 = v. \tag{14}$$

Как и в случае удвоения в квадратичной среде, амплитуда поля $\tilde{E}_1$ есть амплитуда, в $\sqrt{3}$ раз меньшая амплитуды действующего в среде поля на частоте $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$.

Из (11) находим в нашем случае закон сохранения энергии в виде

$$\overline{S_z} = 3\overline{S_{1z}}^T + \overline{S_{3z}}^T = \frac{c}{8\pi\mu}\left(3\hat{n}_1 E_1^2 + \hat{n}_3 E_3^2\right) = const =$$
$$= \hbar(m_2^2\omega_2 + m_3^2\omega_3 + m_4^2\omega_4 + m_1^2\omega_1) = (3\hbar m^2\omega + \hbar v^2 \cdot 3\omega). \tag{15}$$

Уравнения (7) преобразуются к виду

$$\frac{dm}{d\zeta} = -m^2 v \sin\theta; \tag{16а}$$

$$\frac{dv}{d\zeta} = m^3 sin\theta, \tag{16б}$$

а уравнение для разности фаз (9) примет вид

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \delta + ctg\theta\frac{d}{d\zeta}ln(m^3 v) + am^2 + bv^2, \tag{16в}$$

где

$$\begin{aligned} a &= (9\omega c)\left(\frac{\beta_{31}}{\hat{n}_3} - \frac{\beta_{11}}{\hat{n}_1}\right) L_0 \frac{8\pi\mu\overline{S_z}}{3c\hat{n}_1}, \\ b &= (3\omega c)\left(\frac{\beta_{33}}{\hat{n}_3} - \frac{\beta_{13}}{\hat{n}_1}\right) L_0 \frac{8\pi\mu\overline{S_z}}{3c\hat{n}_3}. \end{aligned} \tag{17}$$

По сравнению с аналогичными (по физическому смыслу) уравнениями (1.28), описывающими генерацию второй гармоники в квадратичной среде, в уравнениях (16) имеется кое-что новое. Новое состоит в том, что изменилась нелинейность в правых частях первых двух уравнений (16), и в особенности в том, что из-за высокочастотного эффекта Керра появилась нелинейная добавка к ε и соответственно к постоянной распространения, которая дала свой вклад в уравнение (16б).

Закон Менли-Роу сохранения чисел квантов (энергии) в переменных m и v имеет вид

$$m^2 + v^2 = 1 \tag{18}$$

Уравнение (16б) можно проинтегрировать методом вариации произвольной постоянной и получить первый интеграл в виде

$$m^3 v\cos\theta = \hat{\Gamma}_\delta - \left[\frac{\delta}{2}v^2 - \frac{a}{4}m^4 + \frac{b}{4}v^4\right] \equiv \Gamma_\delta - \left[\frac{\delta+b}{2}v^2 + \frac{-a+b}{4}m^4\right]. \tag{19}$$

Оценим влияние эффекта Керра на коэффициент преобразования в третью гармонику.

Разрешая (19) относительно $\cos\theta$ и выражая $\sin\theta = \pm\sqrt{1-cos^2\theta}$, можно с учетом (18) получить уравнение относительно v (или m) в виде

$$\frac{dv^2}{d\zeta} = \pm 2\cdot\sqrt{v^2(1-v^2)^3 - \left\{\hat{\Gamma}_\delta - \left[\frac{\delta}{2}v^2 + \frac{b}{4}v^4 - \frac{a}{4}(1-v^2)^2\right]\right\}^2}. \tag{20}$$

Если заданы начальные условия в виде

$$m(0) = 1, \qquad v(0) = 0, \tag{21}$$

то

$$\hat{\Gamma}_\delta = -\frac{a}{4}, \tag{22}$$

и уравнение (20) преобразуется к виду

$$2\zeta = \pm\int\limits_0^{v^2} \frac{dv^2}{\sqrt{v^2\left\{(1-v^2)^3 - \frac{v^2}{4}\left[(a+\delta) + \frac{1}{2}(b-a)v^2\right]\right\}}} \tag{23}$$

Подкоренное выражение в этом случае в отличие от аналогичного выражения (1.38*) для квадратичной среды есть полином 4-го порядка по v^2. Один из корней полинома –

$$v_a^2 = 0, \tag{24}$$

а следующий корень –

$$v_b^2 < 1, \tag{25}$$

если только не выполняется условие

$$a = b = -\delta \tag{26}$$

Это означает, что правая часть (23) может быть преобразована к эллиптическому интегралу и, следовательно, решение уравнения (23) представимо в виде эллиптической функции, изменяющейся в пределах $v_a^2 < v^2 < v_b^2 < 1$. Физически это означает, что нельзя осуществить полную перекачку мощности волне $\tilde{E}_3$ от волны $\tilde{E}_1$ без точного согласования фазовых скоростей, когда

$$\theta = const = \frac{\pi}{2} \tag{27}$$

Для полной перекачки необходимо осуществить точное согласование фазовых скоростей волн с учетом изменения ε из-за эффекта Керра. Именно этот факт и отражают условия (26).

Поскольку в кубичной среде условия (26) практически невыполнимы, то нельзя добиться полной перекачки энергии в третью гармонику. ***Такой же эффект имеет место в любой среде***, где участвуют в процессе более трех волн.

Если же $\delta = 0$, то расчеты показывают, что КПД волноводного утроителя частоты без потерь не превышает 60%.

Заключение.

Главным отличием нелинейного взаимодействия волн в кубичной среде от аналогичных процессов в квадратичной среде является не когерентное взаимодействие волн, обусловленное дополнительной нелинейной диэлектрической проницаемостью ε из-за эффекта Керра. Наличие нелинейной добавки к ε изменяет условия согласования фазовых скоростей взаимодействующих волн, усложняет схемы оптимальных преобразователей частоты. В частности, иногда не оптимальными оказываются преобразователи частоты, в которых все волны (пучки) распространяются в одном направлении. В этих случаях приближение плоских волн оказывается весьма грубым приближением, малопригодным для оценок[4]. Но прежде, чем перейти к пучкам, познакомимся ещё с некоторыми нелинейными явлениями в оптике в приближении плоских волн.

[4] Реально всегда имеем дело с пучком. Если $a_\perp$- его характерный поперечный размер, то $|\vec{k}_\perp|$ $(2\pi/a_\perp)$ есть характерное поперечное отклонение вектора $\vec{k}$ от направления синхронизма и соответственно $2\Delta\theta = 2|k_\perp/k|$ есть характерный раствор конуса угла, в котором сосредоточено излучение. Далеко не для всех плоских волн внутри этого конуса выполняется соотношение синхронизма. Поэтому в целом взаимодействие волн оказывается менее эффективным.

Глава III. Взаимодействие волн при вынужденном комбинационном (или *Рамановском*) рассеянии (ВКР) лазерного излучения

1. Физическая природа комбинационного рассеяния (КР)

1.1. Феноменологическое описание КР. Стоксово излучение.

Комбинационное рассеяние (КР) давно используется для изучения колебательных спектров молекул. Суть КР в том, что от вещества, облучённого светом частоты ω_L , отражается свет на частотах $\omega_{S,a} = \omega_L \mp \omega_V$, смещённых относительно несущей частоты ω_L на постоянную величину ω_V . Это следствие **двухквантовых** процессов (Рис. 3.1). Интенсивность **стоксова рассеяния**

$$\hbar\omega_S = \hbar\omega_L - \hbar\omega_V \tag{1}$$

на несколько порядков больше интенсивности **антистоксова рассеяния**

$$\hbar\omega_a = \hbar\omega_L + \hbar\omega_\Gamma \tag{1'}$$

Различие интенсивностей этих процессов объясняется тем, что молекул на уровне 2 находится в $exp(+\hbar\omega_V/kT)$ раз меньше, чем на нижнем уровне [1].

Уровни 2 и 1 относятся к колебательному спектру молекулы и не обладают дипольным моментом

$$\vec{d}_{1,2} = \iiint \tilde{\xi}_2^* \left(\vec{r}\right) \cdot \vec{r} e \tilde{xi}_1 \left(\vec{r}\right) dV = 0$$

. Поэтому они не взаимодействуют с полем частоты $\omega_{1,2} \equiv \omega_V$ и не проявляют себя в спектрах поглощения. Говорят, что переход $2 \rightarrow 1$ *запрещен*, что обе функции $\tilde{xi}_{1,2}$ имеют **<u>одинаковую четность</u>**.

Какому же механическому колебанию зарядов в молекуле может отвечать этот энергетический уровень? Оказывается, что он отвечает, например, продольному колебанию навстречу друг другу двух одинаково заряженных ядер (Рис. 3.2). Это колебание с наибольшей простотой объясняет полуфеноменологическую интерпретацию явления ВКР, которую дал Плачек. Её суть в том, что электронное облако, обволакивающее ядра и ответственное за поляризуемость молекулы, зависит от расстояния между ядрами (от ядерной координаты Q). От

[1]Если $\omega_V = 3 \cdot 10^{13} c^{-1}, \quad t = 300K$, то $(h\omega_V/kT) \cong 0{,}76$ и $e^{0{,}76} = 2{,}14$. Для $\omega_V >> 3 \cdot 10^{13} c_{-1}$ это различие много больше 2.

координаты Q зависит тензор электронной поляризуемости молекулы $\bar{\alpha}(Q)$ и, как следствие, дипольный момент

$$\vec{d} = \left(\bar{\alpha}(Q) \cdot \vec{E}\right), \tag{2}$$

который наводится под воздействием внешнего поля. Зависимость $\bar{\alpha}(Q)$ от параметра Q должна быть достаточно слабой. Поэтому тензор $\bar{\alpha}(Q)$ можно представить в виде ряда

$$\bar{\alpha}(Q) = \bar{\alpha}(0) + \left(\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 Q + \ldots; \tag{3}$$

по степеням малого параметра Q , меняющегося во времени по гармоническому закону $Q = Q_0 \cos\omega_V t$, и затем найти дипольный момент молекулы

$$\vec{d} = \left(\bar{\alpha}(0) \cdot \vec{E}\right) + \left(\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \vec{E}\right) Q_0 \cos\omega_V t. \tag{4}$$

Частота ω_V механического колебания определяется свойствами молекулы. Амплитуда и фаза колебания связаны с фазой и амплитудой внешней силы, которая действует со стороны поля. Некоторая часть энергии вследствие движения электронного облака передается ядрам, и амплитуда механического колебания от этого растет.

1.2. Квантово-механический расчет поляризации на стоксовой частоте.

В основе расчёта находятся уравнения для матрицы плотности трехуровневой системы и заданное электрическое поле в виде

$$\vec{E} = \mathbf{Re}\left\{\vec{\tilde{E}}_L exp(i\omega_L t) + \vec{\tilde{E}}_S exp(i\omega_S t)\right\}.$$

1. В гамильтониане системы

   $$\bar{H}_0 + \bar{H} = \bar{H}_0 - \left(v\bar{e}cd_{31} \cdot \vec{E}_L\right) - \left(v\bar{e}cd_{32} \cdot \vec{E}_S\right)$$

   имеются малые члены $\left(|\bar{H}| << |\bar{H}_0|\right)$, ответственные за взаимодействие молекулы с полем.

2. Предполагается, что в нулевом приближении $\left(\bar{H} = 0\right)$ справедливы начальные условия

   $$\rho_{11}(0) = 1, \quad \rho_{22}(0) = \rho_{33}(0) = 0.$$

3. В первом приближении в силу $\bar{H}_{13} = -\left(ve\bar{c}d_{31} \cdot \vec{E}_L\right) \neq 0$ определяется

$$\tilde{\rho}_{13}^{(1)} exp\,(i\omega_L t)\ \tilde{\vec{d}}_{13} T_{13} \tilde{\vec{E}}_L exp(i\omega_L t).$$

4. Во втором приближении находится

$$\rho_{33}^{(2)} \sim \tilde{\vec{d}}_{13} * T_{33} \tilde{\vec{E}} *_L exp(-i\omega_L t) \rho_{13}^{1} exp(i\omega_L t) = T_{33} T_{13} \left|\left(\tilde{\vec{d}}_{13} \cdot \tilde{\vec{E}}_L *\right)\right|^2.$$

5. В третьем приближении теории возмущений определяется

$$\rho_{32}^{(3)} \sim \tilde{\vec{d}}_{32} T_{32} \tilde{\vec{E}}_S exp(i\omega_S t) \rho_{33}^{(2)} = T_{33} T_{31} T_{32} \left|\tilde{\vec{d}}_{13}\right|^2 \left|\tilde{\vec{E}}_L\right|^2 \tilde{\vec{d}}_{32} \tilde{\vec{E}}_S exp(i\omega_S t).$$

6. Компонент поляризации на стоксовой частоте найдётся как

$$\vec{P}_S = N\left(\tilde{\rho}_{32}\tilde{\vec{d}}_{32} + \tilde{\rho}_{23}\tilde{\vec{d}}_{23}\right) \cong N\left|\tilde{\vec{d}}_{13}\right|^2 \left|\tilde{\vec{d}}_{23}\right|^2 T_{32} T_{31} T_{33} \left|\tilde{\vec{E}}_L\right|^2 \tilde{\vec{E}}_S exp(i\omega_S t) + \text{к.с.}$$

Из квантово-механического расчёта следует, что амплитуда поляризации на стоксовой частоте, которая ответственна за изменение поля на ω_S, пропорциональна интенсивности излучения на основной частоте ω_L.

2. Основные уравнения процесса ВКР

Процесс ВКР описывается уравнениями Максвелла в виде

$$\left[\nabla \times \left[\nabla \times \vec{E}\right]\right] + \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \left(\hat{\varepsilon}_0 \cdot \vec{E}\right)}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma_0}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$\vec{P}^{NL} = N\left(\left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q}\right) \cdot Q\vec{E}\right), \tag{6}$$

где $Q = Q_0 cos\omega_V t$ – ядерное колебание. Система (5), (6) должна быть замкнутой. Для этого необходимо написать уравнение для Q, что можно сделать на основе феноменологической теории.

Феноменологический подход обусловлен тем, что уравнением для осцилляторного колебания Q должно быть уравнение осциллятора с затуханием и силой в правой части. Чтобы получить выражение для силы, нужно воспользоваться **стандартным методом**, основанным на свойствах **свободной энергии** нелинейного диэлектрика в присутствии электрического поля.

Свободная энергия среды в электрическом поле определяется как функция

$$F = \overline{W} - \left(\vec{P}^L \cdot \vec{E}\right) - \left(\vec{P}^{NL} \cdot \vec{E}\right) - \dots \equiv \overline{W} - F^L - F^{NL} - \dots, \qquad (7')$$

которая связана со средней энергией $\overline{W}$ и **работой** $F^L + F^{NL}$ по созданию поля в среде. При изменении поля **работа** имеет полный дифференциал

$$d(F^L + F^{NL}) = -\left(\vec{P} \cdot d\vec{E}\right) \equiv -\left(\vec{P}^L \cdot d\vec{E}\right) - \left(\vec{P}^{NL} \cdot d\vec{E}\right) \qquad (7)$$

и поэтому справедливо определение нелинейного дипольного момента

$$\vec{P}^{NL} = -\frac{\partial F^{NL}}{\partial \vec{E}}. \qquad (6^*)$$

Из (6) и (6*) получаются выражения для нелинейной части свободной энергии[2]

$$F^{NL} = -\frac{N}{2}\left(\left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot Q\vec{E} \cdot \vec{E}\right), \qquad (7^*)$$

обусловленной дипольным моментом единицы объёма среды $\vec{P}^{NL}$, а также силы

$$\frac{1}{N} f_q = -\frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q}\right) \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}\right) \qquad (8)$$

в правой части уравнения для одиночного осциллятора Q. С учетом (8) уравнение для Q имеет вид

$$\ddot{Q} + \omega_{21}^2 Q + 2\gamma_Q \dot{Q} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q}\right) \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}\right) \qquad (9)$$

Система уравнений (5), (6), (9) – полная и замкнутая. В случае, когда учитывается образование лишь стоксовой частоты, её решение следует искать в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\tilde{e}_L^0 \tilde{\tilde{E}} exp\left\{i\left[\omega_L t - \left(\vec{k}_L \cdot \vec{r}\right)\right]\right\} + \frac{1}{2}\tilde{\vec{e}}_S^0 \tilde{E}_S exp\left\{i\left[\omega_S t - \left(\vec{k}_S \cdot \vec{r}\right)\right]\right\} + к.с.$$

$$Q = \frac{1}{2}\tilde{Q}_r exp(i\omega_V t) + к.с. \qquad (10)$$

Для медленно меняющихся амплитуд $\tilde{E}_L(\vec{r})$, $\tilde{E}_S(\vec{r})$ получаются уравнения

$$\begin{cases} \left(\left[\tilde{e}_L^0 \times \left[\vec{k}_L \times \tilde{e}_L^0\right]\right] \cdot \nabla \tilde{E}_L\right) + \bar{\gamma}_L \tilde{E}_L + i\beta\omega_L^2 \tilde{Q}_V \tilde{E}_S exp(i\Phi) = 0, \\ \left(\left[\tilde{e}_S^0 \times \left[\vec{k}_S \times \tilde{e}_S^0\right]\right] \cdot \nabla \tilde{E}_S\right) + \bar{\gamma}_S \tilde{E}_S + i\beta\omega_S^2 \tilde{Q}_V \tilde{E}_L exp(i\Phi) = 0, \end{cases} \qquad (11)$$

[2]См. также приложение к главе 3

где $\quad \beta = \dfrac{\pi}{c^2}\mu N \left(\tilde{\vec{e}}^{\,0}_L \cdot \left(\dfrac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{\vec{e}}^{\,0*}_S \right), \quad \Phi = \left(\vec{k}_L \cdot \vec{r}\right) - \left(\vec{k}_S \cdot \vec{r}\right).$

Амплитуда $\tilde{Q}_r$ колебания ядерной координаты Q находится в виде вынужденного решения уравнения (9) на частоте ω_V

$$\tilde{Q}_V(-\omega_V^2 + \omega_{21}^2 + 2i\gamma_Q\omega_V) = \frac{1}{4}\left(\tilde{\vec{e}}^{\,0}_L \cdot \left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{\vec{e}}^{\,0}_S \right) \tilde{E}_L \tilde{E}_S^* \tag{11*}$$

Поскольку $\tilde{Q}_V$ из (11*) можно выразить через $\tilde{E}_L$ и $\tilde{E}_S^*$, то (11) представляет собой два связанных уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{E}_L}{dz_L}\left(\frac{\omega_L}{c}\hat{n}_L\right) + \bar{\gamma}_L \tilde{E}_L + \omega_L^2 \tilde{g}\left|\tilde{E}_S\right|^2 \tilde{E}_L \\ &\frac{d\tilde{E}_S}{dz_L}\left(\frac{\omega_S}{c}\hat{n}_S\right) + \bar{\gamma}_S \tilde{E}_S + \omega_S^2 \tilde{g}\left|\tilde{E}_L\right|^2 \tilde{E}_S \end{aligned} \tag{12}$$

в которых $z_{L,S}$ направления распространения волн $\tilde{E}_{L,S}$, а коэффициент

$$\tilde{g} = \frac{i(\beta^2c^2/4\pi\mu N)}{(\omega_{21}^2 - \omega_V^2) + 2i\gamma_Q\omega_V} \equiv \frac{i(\beta^2c^2/4\pi\mu N)}{(\omega_{21}^2 - \omega_V^2)^2 + 4(\gamma_Q\omega_V)^2}\left\{(\omega_{21}^2 - \omega_V^2) - 2i\gamma_Q\omega_V\right\} \tag{13}$$

определяет величину нелинейности среды.

Уравнения (12) отличаются от уравнений (1.20) в двух аспектах.

1. В (12) отсутствует когерентное взаимодействие, и потому отсутствует условие синхронного взаимодействия. Что это значит? Прежде всего, условие синхронного взаимодействия – это проявление закона сохранения импульса в каждом от-дельном акте рождения или распада фотонов:

   $$\hbar\vec{k}_3 = \hbar\vec{k}_2 + \hbar\vec{k}_1.$$

   При взаимодействии полей в квадратичной среде возможность некоторого рассинхронизма (или неполного синхронизма) означала, что некоторый избыток или недостаток импульса в каждом отдельном акте (”покрывался”) компенсировался за счет среды в целом, за счет, быть может, импульса от границ среды и т.д. **В случае ВКР импульс сохраняется за счет той части среды, которая не взаимодействует с э.-м. полем**. Необходимый импульс поставляется средой подобно тому, как это имеет место в кристаллах, где импульс сохраняется с точностью до волнового вектора решетки.

2. Первая особенность порождает вторую, которая проявляется в законах сохранения. В отсутствие поглощения

$$\bar{\gamma}_S = \bar{\gamma}_L = 0$$

из (12) можно получить уравнения для чисел фотонов

$$m_L^2 = \hat{n}_L \left|\tilde{E}_L\right|^2 / \omega_L \quad \text{и} \quad (\hat{n}_S \left|\tilde{E}_S\right|^2 / \omega_S) = m_S^2$$

в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dz_L} m_L^2 + \frac{\omega_L \omega_S}{\hat{n}_L \hat{n}_S} c(\tilde{g} + \tilde{g}^*) m_L^2 m_S^2 = 0, \\ \frac{d}{dz_s} m_s^2 + \frac{\omega_L \omega_S}{\hat{n}_L \hat{n}_S} c(\tilde{g} + \tilde{g}^*) m_L^2 m_S^2 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

Из (14) легко получается закон сохранения числа квантов для любого элементарного объема (энергия сохраняется только интегрально с учётом тепловых потерь)

$$\frac{d}{dz_L} m_L^2 + \frac{d}{dz_S} m_S^2 = 0. \tag{15}$$

Его символически можно представить в виде

$$div\vec{M} = 0, \tag{15'}$$

если ввести $\vec{M} = m_L^2 \vec{z}_L^0 + m_S^2 \vec{z}_S^0$ вектор потока фотонов взаимодействующих волн.

Особенность (14) в том, что **для развития поля $\vec{\tilde{E}}_S$ синхронизм с полем $\vec{\tilde{E}}_L$ не нужен: по всем направлениям условия будут одинаковы.**

3. Порог генерации стоксовой частоты

Будем считать, что на границе $z = 0$ задано лазерное поле $\vec{\tilde{E}}_L$ и отсутствует стоксово поле $\vec{E}_S$:

$$\tilde{E}_L(0) = \tilde{E}_0, \quad \tilde{E}_S(0) = \tilde{E}_0. \tag{16}$$

Найдем решение уравнения (12) для $\tilde{E}_S$ в приближении заданного поля $\tilde{E}_0$. Из (12) следует, что $\tilde{E}_S$ будет расти, если

$$Re(\omega_S^2 E_0^2 \tilde{g}^*) = \frac{(\beta/4) 2\gamma_Q \omega_V \omega_S^2}{(\omega_{21}^2 - \omega_V^2)^2 + 4(\gamma_Q \omega_V)^2} \left(\vec{\tilde{e}}_L^0 \cdot \left(\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial Q} \right)_0 \cdot \vec{\tilde{e}}_S^0 \right) E_0^2 > \bar{\gamma}. \tag{17}$$

Соотношение (17) указывает минимальную величину накачки $(E_0^2)_{\text{пор}}$, при превышении которой начинается усиление стоксовой компоненты $\vec{\tilde{E}}_S$.

1. Особенность инкремента усиления поля $\vec{E}_S$ в том, что он одинаков по всем направлениям.

2. Вторая особенность инкремента усиления в том, что он имеет экстремум на частоте $(\omega_S)_{max}$, которая смещена относительно частоты $(\omega_L - \omega_{21})$. Другими словами, частота ядерного колебания ω_V, которая устанавливается, тоже не равна ω_{21}. Расчеты показывают, что
$$(\omega_S)_{max} \cong (\omega_L - \omega_{21}) + \left\{ \gamma_Q^2 / (\omega_L - \omega_{21}) \right\} \tag{18}$$
и поэтому именно на этой частоте быстрее всего начинает расти поле $\tilde{E}_S$.

3. Третья особенность инкремента в том, что он пропорционален E_0^2 и поэтому длина L_0 развития $\tilde{E}_S$ подобна длине утроения в кубичной среде и короче L_0 длины удвоения, которая пропорциональна $|E_0|$.

4. Вынужденное комбинационное рассеяние

Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) наступает, когда $\left|\tilde{E}_S\right|^2$ становится сопоставимым с $\left|\tilde{E}_L\right|^2$. В этом случае нужно совместно решать уравнения (12). Будем это делать, вводя очень существенное ограничение.

Поскольку с ростом $\left|\tilde{E}_S\right|^2$ растет Q и увеличивается число возбужденных молекул на уровне 2, то $\rho_{22} \neq 0$. Обычно структура верхнего уровня 3 такова, что возможны переходы $\omega_{32} \sim \omega_L$ и $\omega_{31} \sim \omega_S$. В результате появляются поля на частотах
$$\omega_a = \omega_L + \omega_V \quad (\omega_a)_2 = \omega_L + 2\omega_V$$
и в общем случае на частотах $(\omega_S)_q = \omega_L - q\omega_V; \quad (\omega_a)_q = \omega_L + q\omega_V$

1. Будем считать, что эти процессы запрещены и что, кроме поля на частоте ω_S, никаких полей на других частотах не образуется.

2. Будем считать, что обе волны направлены в одну сторону (в $+z$–направлении). Воспользуемся уравнениями (14), в которых положим
$$z_S = z_L = z \tag{19}$$

и учтём (15) форме

$$m_L^2 + m_S^2 = m^2(0) \equiv m^2(0) \equiv m_0^2 = const. \qquad (15")$$

Введем

$$u^2 = (m_L^2/m_0^2); v^2 = (m_S^2/m_0^2), \zeta = (z/L_0) = z \cdot (\omega_L \omega_S / \hat{n}_L \hat{n}_S) 2c(Re\tilde{g}) m_0^2. \quad (20)$$

Тогда уравнения (14) примут вид

$$\frac{du^2}{d\zeta} + u^2v^2 = 0; \quad \frac{dv^2}{d\zeta} - u^2v^2 = 0 \qquad (21)$$

Решение (21) в виде

$$\frac{dv^2}{v^2(1-v^2)} = d\zeta = \frac{dv^2}{v^2} + \frac{dv^2}{1-v^2} \Rightarrow \left(\frac{v^2}{v_0^2}\right) \frac{1-v_0^2}{1-v^2} = e^{\zeta} \Rightarrow \left[\frac{v_0^2 e^{\zeta}}{1 - v_0^2 + v_0^2 e^{\zeta}}\right] = v^2 \qquad (22)$$

позволяет сделать вывод о полной (асимптотической) перекачке ω_L в стоксову частоту ω_S на бесконечно большой длине z при сколь угодно малом начальном значении $v_0^@$ (например, шумовом поле на ω_S). *Этот процесс очень похож на удвоение при полном синхронизме в квадратичной среде.*

5. ВКР в направлении назад

ВКР в направлении назад описывается уравнениями (12), в которых

$$z_S = -z_L = -z. \qquad (23)$$

Из этих уравнений с помощью нормировок

$$m_L^2 - m_S^2 = m^2(0) \equiv m_0^2 = const = m_L^2(0) - m_S^2(0) \equiv [1 - \eta(0)]\, m_L^2(0) \quad (15"')$$

и (20) получаются уравнения

$$\frac{du^2}{d\zeta} + u^2v^2 = 0, \quad \frac{dv^2}{d\zeta} + u^2v^2 = 0 \qquad (24)$$

имеющие первый интеграл

$$u^2 - v^2 = 1 \qquad (25)$$

Координата $\zeta = \left({}^{z}/_{L_0}\right)$ в этом случае нормирована на число фотонов m_0^2 в сечении $z = 0$, которое является разностью чисел фотонов на частотах ω_S и

ω_L. В отсутствие иных источников числа фотонов $m_S^2(0)$ и $m_L^2(0)$ определяют коэффициент преобразования лазерного излучения в излучение на сток-совой частоте как

$$\eta(0) = \left\{m_S^2(0)/m_L^2(0)\right\} \equiv \left\{v^2(0)/\left[1 + v^2(0)\right]\right\}. \tag{26}$$

Для корректного расчёта процесса преобразования частоты с помощью уравнений (24) следует задать условия для интенсивности стоксова поля на ка-кой-то границе $z = L$ (или где-то внутри слоя) в виде $m_S^2(z = L) = m_S^2(L)$. Решение уравнений (24) для v^2 в этом случае имеет вид

$$ln\left\{v^2/\left(1 + v^2\right)\right\} = (1 - \zeta) + ln\left\{v_l^2/\left(1 + v_l^2\right)\right\}, \tag{27}$$

где v_l^2 – значение v^2 на границе $\zeta = l$. Решение (27) можно представить как

$$v^2 = \left\{v_l^2 exp(1 - \zeta)/\left[1 + v_l^2 - v_l^2 exp(1 - \zeta)\right]\right\}. \tag{27'}$$

Поскольку величина $\left\{v^2/(1 + v^2)\right\} = \left\{v^2/u^2\right\}\eta(\zeta)$ есть отношение чисел фотонов с энергиями $\omega_S\hbar$ и $\omega_L\hbar$ в каждом сечении слоя, то в отсутствие дополнительного источника стоксова излучения в сечении $z = L$ для заданного значения интенсивности стоксова поля v_l^2 решение (27) внутри слоя имеет физический смысл, если выполняется очевидное условие

$$\eta(\zeta) \le \eta(0) \le 1 \tag{*}$$

Условие (*) ограничивает область существования решения (27). Оно справедливо только в том случае, если сечение $\zeta = l$, где задаётся v_l^2 , находится внутри некоторой области слоя среды

$$0 \le \zeta \equiv l \le l_{bn}(v_l^2) \tag{28}$$

граница l_{bn} которой определяется правой частью (*) и находится из

$$ln\eta(0) \equiv l + ln\left\{v_l^2/(1 + v_l^2)\right\} \le l_{bn} + ln\left\{v_l^2/(1 + v_l^2)\right\} = 0. \tag{28*}$$

Используя нормировку (20), преобразуем (28*) в соотношение

$$L\frac{\omega_L\omega_S}{\hat{n}_L\hat{n}_S}2c(Re\tilde{g})\left\{m_L^2(0) - m_S^2(0)\right\} + ln\frac{m_S^2(L)}{m_S^2(L) + \left\{m_L^2(0) - m_S^2(0)\right\}} \le 0. \tag{28**}$$

При $m_L^2(0) - m_S^2(0) \to 0$ оно позволяет найти границу L_{bn} области, в которой можно получить физически обоснованное (реализуемое) решение (27) для заданных значений интенсивности $m_S^2(L)$ и всех прочих величин. В результате преобразования (28**) путём разложения его в ряд по малому параметру $m_L^2(0) - m_S^2(0)$ получится соотношение

$$(L_{bn})\frac{\omega_L\omega_S}{\hat{n}_L\hat{n}_S}2c(Re\tilde{g}) \cong \frac{1}{m_S^2(L)} \tag{29}$$

для определения границы области существования решения (27). Размеры этой области растут при уменьшении $m_S^2(L)$. Если под $m_S^2(L) = \overline{m}^2$ понимать шумовой фон фотонов ω_S внутри среды, то размеры области определения решения (27) достигнут максимального значения

$$(L_{bn})_{max} \equiv \overline{L}_{cr} = \left\{\hat{n}_L\hat{n}_S/2\omega_L\omega_S c(Re\tilde{g}) \cdot \overline{m}^2\right\}. \tag{29*}$$

Соотношение (29*) нужно понимать так. Если на вход среды с ВКР–процессами падает лазерное излучение и для стоксова излучения образуется инкремент $Re\tilde{g} \sim E_L^2$, то при толщине слоя, большей или равной $\overline{L}_{cr}$, возможна генерация (из шумов) стоксова излучения назад с коэффициентом преобразования (полезного действия), достигающим даже предельного значения (равного единице)[3].

6. Антистоксово излучение

При более полном теоретическом исследовании ВКР следует рассматривать систему связанных уравнений для волн, имеющих частоты $\omega_{Sq} = \omega_L - q\omega_V; \omega_{aq} = \omega_L + q\omega_V$. Это – практически неразрешимая задача.

Поэтому вначале рассмотрим систему из трех связанных уравнений для $\tilde{E}_{a,L,S}$, используя (для простоты) практически нереализуемое условие. Будем считать, что **на частотах $\omega_L \pm q\omega_V$ (где $q > 1$) существует большое поглощение и соответствующие поля не возникают (не нарастают с уровня шумов)**. В при-

[3] В этом случае приближённое явное выражение для интенсивности стоксова поля имеет вид $m_S^2(z) \cong \overline{m}^2(\overline{L}_{cr}/z) = \left\{\overline{m}^2/\left[\overline{m}^2\frac{\omega_L\omega_S}{\hat{n}_L\hat{n}_S}2c(Re\tilde{g})(z - L_{cr}) + 1\right]\right\}$.

ближении плоских волн получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\omega_L}{c}\hat{n}_L\frac{d\tilde{E}_L}{dz_L} + \overline{\gamma}_L\tilde{E}_L + i\omega_L^2\tilde{Q}_V\tilde{E}_S exp(-i\Phi_S) = 0; \\ \frac{\omega_S}{c}\hat{n}_S\frac{d\tilde{E}_S}{dz_S} + \overline{\gamma}_S\tilde{E}_S + i\omega_S^2\tilde{Q}_V\tilde{E}_L exp(+i\Phi_S) = 0; \\ \frac{\omega_a}{c}\hat{n}_a\frac{d\tilde{E}_a}{dz_a} + \overline{\gamma}_a\tilde{E}_a + i\omega_a^2\tilde{Q}_V\tilde{E}_L exp(-i\Phi_a) = 0, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$\tilde{Q}_V = (k_S/\tilde{D})\cdot\left\{\tilde{E}_L\tilde{E}_S^* exp(i\Phi_S)R\tilde{E}_a\tilde{E}_L^* exp(-\Phi_a)\right\};$$

$$\begin{cases} k_{S,a} = \frac{1}{4}\left(\vec{\tilde{e}}_L^{\,0}\cdot\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0\cdot\vec{e}_{S,a}^{\,0*}\right); \quad \tilde{D} = \omega_{21}^2 - \omega_V^2 + 2i\gamma_Q\omega_V, \quad R = k_a/k_s; \\ \Phi_{S,a} = \left(\vec{k}_{S,a}\cdot\vec{r}\right) - \left(\vec{k}_L\cdot\vec{r}\right). \end{cases} \tag{30'}$$

В традиционном случае $z_L = z_S = z_a = z$ уравнения (30) имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{E}_L}{dz} + \gamma_L\tilde{E}_L + c\dfrac{i\beta\omega_L}{\hat{n}_L\tilde{D}}\left\{E_S^2\tilde{E}_L + R\tilde{E}_a\tilde{E}_S\tilde{E}_L^* exp(i\theta)\right\} = 0; \\ \dfrac{d\tilde{E}_a}{dz} + \gamma_a\tilde{E}_a + c\dfrac{i\beta\omega_a}{\hat{n}_a\tilde{D}}\left\{R^2E_L^2\tilde{E}_a + R\tilde{E}_L^2\tilde{E}_S^* exp(-i\theta)\right\} = 0; \\ \dfrac{d\tilde{E}_S}{dz} + \gamma_S\tilde{E}_S + c\dfrac{i\beta\omega_S}{\hat{n}_S\tilde{D}^*}\left\{E_L^2\tilde{E}_S + R\tilde{E}_L^2\tilde{E}_a^* exp(-i\theta)\right\} = 0, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$\theta = \left(\left[-2\vec{k}_L + \vec{k}_a + \vec{k}_S\right]\cdot\vec{r}\right), \gamma_{L,S,a} = \bar{\gamma}_{L,S,a}(c/\omega_{L,S,a}\hat{n}_{L,S,a}).$$

Система (31) также весьма сложна, поэтому рассмотрим только инкременты роста полей $\tilde{E}_{a,S}$ в приближении фиксированного поля накачки

$$E_L^2 = const = E_0^2. \tag{32}$$

В этом случае (31) превращается в систему двух связанных линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестных комплексных амплитуд $\tilde{E}_a$ и $\tilde{E}_S^*$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{E}_a}{dz}\gamma_a\tilde{E}_a + i\dfrac{\beta c\omega_a}{\hat{n}\tilde{D}}E_0^2\left\{R^2\tilde{E}_a + \tilde{R}exp(-i\Delta kz)\tilde{E}_S^*\right\} = 0, \\ \dfrac{d\tilde{E}_S^*}{dz}\gamma_S\tilde{E}_S^* - i\dfrac{\beta c\omega_S}{\hat{n}_S\tilde{D}}E_0^2\left\{\tilde{E}_S^* + \tilde{R}^* exp(-i\Delta kz)\tilde{E}_a\right\} = 0, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$\Delta k = \left(\left[\vec{k}_a + \vec{k}_S - 2\vec{k}_L \right] \cdot \vec{z}_0 \right), \quad arg\tilde{R} = arg \left\{ \tilde{E}_L^2 \cdot exp(-i\theta + i\Delta kz) \right\} = \varphi_R.$$

Практически на границе в сечении $z = 0$ на частотах $\omega_{a,S}$ существуют только шумовые поля $\tilde{E}_{a,S}$.

В соответствии с имеющимся опытом решения таких уравнений наибольшего роста $\tilde{E}_{a,S}$ можно ожидать (казалось бы) при наличии полного синхронизма ($\Delta k = 0$). "Физическое объяснение"такого ожидания в том, что энергообмен между волнами ω_L, ω_a и ω_S происходит через посредство одних и тех же колебаний Q_V , имеющих частоту ω_V . Оба взаимодействия будут приводить к накапливающимся эффектам при оптимальной фазе молекулярных колебаний, и при этой фазе должен быть синхронизм фазовых скоростей по направлению z .

Однако в самом простом частном случае

$$\gamma_S = \gamma_a = \gamma; \quad \left| \tilde{R} \right| \equiv R = 1; \quad \hat{n}_a = \hat{n}_S = n; \quad \Delta k = 0 \tag{34}$$

нетрудно убедиться, что волны $\tilde{E}_{a,S}$ будут затухать в направлении z . В самом деле, подставляя в этом случае в уравнения (33) решения в виде

$$\left(\tilde{E}_a, \tilde{E}_S^* \right) = \left(\tilde{E}_a, \tilde{E}_S^* \right)_0 \cdot exp\tilde{\lambda}z \tag{35}$$

из условия нетривиального решения (33) получим дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} \left(\tilde{\lambda} + \gamma\right) + i\omega_a\tilde{g} & i\omega_a\tilde{g}(-i\varphi_R) \\ -i\omega_s\tilde{g}exp(i\omega_R) & \left(\tilde{\lambda} + \gamma\right) - i\omega_s\tilde{g} \end{vmatrix} = 0 = \left(\tilde{\lambda} + \gamma\right)^2 + \left(\tilde{\lambda} + \gamma\right)(i\tilde{g})(\omega_a - \omega_s) = 0 \tag{36}$$

корни которого

$$\tilde{\lambda}_1 = -\gamma; \tilde{\lambda}_2 = -\gamma - i\tilde{g}(\omega_a - \omega_s) = -\gamma - (\omega_a - \omega_s) \left\{ \frac{\beta c E_0^2}{\hat{n}_s \left| \tilde{D} \right|^2 \left[i \left(\omega_{21}^{2-\omega_V^2} \right) + 2\gamma_Q \omega_V \right]} \right\} \tag{37}$$

имеют отрицательные реальные части. Это значит, что в принятых «оптимальных» условиях поля $\tilde{E}_{a,s}$ не будут нарастать.

В чем причина такого неожиданного результата? В том, что не учли изменений дисперсионных свойств среды, которые происходят из-за наличия накачки.

Не учли изменения ε, которое возникает при наличии $E_L^2 = E_0^2$. Дело в том, что из-за нелинейности среды на частотах ω_a и ω_s возникают добавки к ε типа керровской. Поэтому почти так же, как в кубичной среде, где лучшие условия для образования третьей гармоники могут быть созданы при наличии расстройки, для возникновения стоксова и антистоксова излучения в среде должна быть введена *некоторая рассинхронизация* $\left(\left[2\vec{k}_L - \vec{k}_S - \vec{k}_a\right] \cdot \vec{z}_0\right)$ *волновых векторов*. При наличии сильного поля ε среды изменится, и возникнет необходимое для усиления $\tilde{E}_{a,S}$ согласование фазовых скоростей.

В результате оказывается, что антистоксова часть излучения хорошо усиливается (и, следовательно, становится заметной и регистрируется), если волновой вектор $\vec{k}_a$ лежит на поверхности некоторого конуса. Точнее говоря, хорошее усиление для частоты ω_a имеет место, если $\vec{k}_a$ находится внутри телесного угла, ограниченного двумя коническими поверхностями[4].

Приложение

Полезно получить среднее значение дифференциала свободной энергии (*)

$$\overline{dF}^{\Delta t} =$$

$$= -\sum_{s,k}^{N} \overline{\left[\frac{1}{2}\vec{\tilde{P}}(\omega_s)e^{i\omega_s t} + \text{к.с.}\right]\left[\frac{1}{2}d\vec{\tilde{E}}(\omega_k)e^{i\omega_k t} + \text{к.с.}\right]}^{\Delta t} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{S=1}^{N} \vec{\tilde{P}}(\omega_s)d\vec{\tilde{E}}^*(\omega_s) + \text{к.с.} \quad (*)$$

за промежуток времени $\Delta t >> 2\pi/\omega_s$, а также некоторые другие выражения.

Из (*) тривиальным образом определяется комплексная амплитуда поляризации на стоксовой частоте

$$\vec{\tilde{P}}(\omega_s) = -4\langle\partial\bar{F}/\partial\vec{\tilde{E}}^*(\omega_s)\rangle \quad (**)$$

[4]Поскольку ВКР зависит от направления, то ясно, что реально речь идет о распространении пучков, а не плоских волн. А это, в свою очередь, означает, что в такой среде, где имеется почти керровская добавка к ε (пропорциональная E_S^2) на частоте поля накачки ω_L, накачка начинает самофокусироваться. Из-за самофокусировки поле на оси растет, и ВКР начинается при меньшем пороге, чем ожидалось по теории, основанной на приближении плоских волн.

С учетом (8) далее находим выражение (***) для средней энергии в виде суммы трёх членов

$$\bar{F} =$$

$$= \frac{-N}{16}\left\{\left(\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{Q}_0 \tilde{\vec{E}}_s \cdot \tilde{\vec{E}}_L^*\right) + \right.$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{Q}_0^* \tilde{\vec{E}}_L \cdot \tilde{\vec{E}}_s^*\right) +$$

$$\left. + \left(\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{\vec{E}}_L \cdot \tilde{\vec{E}}_s^* \tilde{Q}_0^*\right)\right\} + к.с., \quad (***)$$

каждый из которых представляет собой часть свободной энергии на одной из трёх частот $\omega_{L,S,V}$. Выражение для свободной энергии (***) позволяет найти комплексные амплитуды нелинейной поляризации на лазерной и стоксовой частотах

$$\tilde{\vec{P}}_L^{NL} = \frac{N}{4}\left(\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{Q}_0 \tilde{\vec{E}}_S\right); \quad \tilde{\vec{P}}_S^{NL} = \frac{N}{4}\left(\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{Q}_0^* \tilde{\vec{E}}_L\right)$$

и комплексную амплитуду силы

$$\frac{1}{N}\tilde{f}_Q = -\frac{4}{N}\frac{\partial\bar{F}}{\partial\tilde{Q}_0^*} = -\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial Q}\right)_0 \cdot \tilde{\vec{E}}_L \cdot \tilde{\vec{E}}_S^*\right),$$

находящейся в правой части уравнения для осциллятора $Q = Q_0 \cos\omega_V t$.

Глава IV. Взаимодействие волн лазерного излучения и звука при вынужденном рассеянии Мандельштама – Бриллюэна (ВРМБ)

1. Физическая природа рассеяния Мандельштама-Бриллюэна (РМБ)

РМБ - это рассеяние света на акустических волнах. Волна плотности среды создает решетку диэлектрической проницаемости, на которой может дифрагировать световая волна. Поскольку решётка диэлектрической проницаемости (Рис. 4.1.) перемещается со скоростью a в направлении распространения акустической волны плотности среды, то угол отражения и частота ω_S отражённой волны из-за эффекта Допплера зависят от угла падения лазерной волны ω_L. Законы сохранения энергии и импульса в каждом отдельном акте требуют выполнения соотношений

$$\begin{aligned} \omega_L &= \omega_S + \omega_P, \\ \vec{k}_L &= \vec{k}_S + \vec{k}_p. \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку волновое число волны давления

$$\left|\vec{k}_p = (\omega_p/a)\right| \tag{2}$$

по порядку величины равно волновому числу k_L волны лазерного излуче-ния, а отношение скорости звука к скорости света мало $(a/c) \cong 10^{-5}$, то мало и отношение частоты звуковой волны к частоте лазерного излучения

$$(\omega_p/\omega_L) \cong 10^{-5}, \quad (\omega_L/\omega_S) \cong 1.$$

Поэтому при РМБ геометрия волновых векторов $\vec{k}_{L,S,P}$ взаимодействующих волн света и звука может быть совершенно произвольной и, в частности, такой, какая изображена на Рис. 4.2. Если ввести угол θ между $\vec{k}_L$ и $\vec{k}_S$, то получаются формулы

$$k_P \cong 2k_L \sin\frac{\theta}{2}; \omega_p \cong \frac{2a\omega_L}{c} n_L \sin\frac{\theta}{2}; \omega_S \cong \omega_L\left(1 - \frac{2a}{c} n_L \sin\frac{\theta}{2}\right), \tag{3}$$

подтверждающие возможность трактовки сдвига частоты ω_L относительно ω_S как следствия эффекта Допплера.

Акустическая энергия появляется в результате работы, производимой излучением над акустической волной. Акустическая волна ω_p под воздействием световой волны ω_L будет усиливаться, и при этом создадутся условия для усиления волны ω_S.

В целом ситуация при каждом отдельном акте взаимодействия двух фотонов и фонона точно такая же, какая была в нелинейной квадратичной среде, где во взаимодействии принимали участие три фотона. А это значит, что в основе описания всех процессов в такой нелинейной среде должно находиться описание трехчастотного трехволнового взаимодействия двух электромагнитных волн и одной акустической волны.

2. Описание ВРМБ

Электромагнитное поле в среде описывается уравнениями Максвелла

$$\left[\nabla \times \left[\nabla \times \vec{E}\right]\right] + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma_0}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c^2}\mu\frac{\partial \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}, \tag{4}$$

где

$$\vec{P}^{NL} = \left(\hat{\chi}^{\text{Б}} \cdot \vec{E} : \overleftrightarrow{p}^{0}_{\alpha\beta} p\right) \tag{5}$$

в общем виде представляет собой нелинейную поляризацию среды, возникающую вследствие зависимости ее поляризованности от давления p (или что то же самое от плотности). Поскольку в общем случае в анизотропных твердых средах упругие волны могут иметь разную природу (продольные, поперечные, сдвиговые и т.д.), то каждой из них можно поставить в соответствие орт $\overleftrightarrow{p}^{0}_{\alpha\beta}$ с двойным содержанием (тип волны и направление ее распространения). Тогда $\hat{\chi}^{\text{Б}}$ можно рассматривать как тензор четвертого ранга. Если же иметь в виду только изотропную среду и только продольные волны, то $\hat{\chi}^{\text{Б}}$ можно считать тензором второго ранга. Буквой p в (5) обозначен избыток давления в среде над его равновесной (атмосферной) величиной (далее – давление).

Чтобы сделать систему уравнений (4)-(5) замкнутой, нужно написать уравнения для давления p в среде с силой в правой части, зависящей от электромагнитного поля. Левая часть уравнения для p должна зависеть от свойств среды и типа распространяющейся волны давления. Правую же часть можно найти практически аналогично тому, как это было сделано для ВКР.

Свободная энергия F при изменении $\vec{E}$ имеет полный дифференциал

$$d(\Delta F^{NL}) = -(\vec{P}^{NL} \cdot d\vec{E}) \tag{*}$$

и находится как

$$\Delta F^{NL} = -0.50 \cdot (\hat{\chi}^{Б} : \vec{\vec{p}}^{0}_{\alpha\beta} p \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}). \tag{**}$$

Далее определяется сила

$$f_p = -\frac{\partial(\Delta F^{NL})}{\partial p} = \frac{1}{2}(\vec{\vec{p}}^{0}_{\alpha\beta} : \hat{\chi}^{Б} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}) \tag{6}$$

в правой части уравнения для p.

Для более глубокого понимания природы **ВРМБ** напишем уравнение для p в изотропной газообразной (или жидкой) среде, где имеется электрострик-ция.

Полная система уравнений гидродинамики в такой среде имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\breve{\rho}}{\partial t} + div\breve{\rho}\breve{\vec{v}} = 0;\\
&\frac{\partial\breve{\vec{v}}}{\partial t} + \left(\breve{\vec{v}} \cdot \nabla\right)\breve{\vec{v}} = -\frac{1}{\breve{\rho}}\nabla\breve{p} + \frac{1}{\breve{\rho}}\nabla\left\{\frac{1}{8\pi}\left(\breve{\rho}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\breve{\rho}}\right)_S\left|\vec{E}\right|^2\right\} + \frac{1}{\breve{\rho}}div\hat{\sigma} + \vec{g};\\
&\breve{\rho}\breve{T}\left[\frac{\partial\breve{S}}{\partial t} + \left(\breve{\vec{v}} \cdot \nabla\breve{S}\right)\right] = (\hat{\sigma} \cdot \nabla)\breve{\vec{v}} + div(k\nabla\breve{T}) + \breve{\rho}Q,
\end{aligned} \tag{1'}$$

где использованы плотность (ρ), скорость частиц $(\breve{\vec{v}})$, температура (T), энтропия (S), тензор вязкости $\hat{\sigma}$ среды $(div(\hat{\sigma}) = \eta\Delta\breve{\vec{v}} + [(\eta/3) + \zeta]\nabla div\breve{\vec{v}})$; $Q \Rightarrow \sigma_0\left|\vec{E}\right|^2$ – источник тепла. Система (1') должна быть дополнена уравнением состояния. В качестве последнего для простоты возьмём уравнение состояния идеального газа в виде

$$\breve{p} = f_1(\breve{\rho},\breve{T}) = (R\breve{T}/\breve{V}^0) = R\breve{\rho}\breve{T} \quad \text{или} \quad \breve{p} = f_2(\breve{\rho},\breve{S}) \equiv (\gamma-1)\breve{\rho}^{\gamma} exp\left[(\breve{S} - S_0)/C_V\right],$$

$\gamma = (C_p/C_V)$ – отношение теплоемкостей, $\breve{V}^0 \equiv (1/\breve{\rho})$ – объём, занимаемый единицей плотности вещества.

Система (1') должна быть линеаризована вблизи состояния равновесия

$$\breve{p} = p_0 + p; \quad \breve{\rho} = \rho_0 + \rho; \quad \breve{T} = T_0 + T; \quad \breve{S} = S_0 + S; \breve{\vec{v}} = 0 + \vec{v}. \tag{2'}$$

В этом случае для возмущений ρ, p, S и $\vec{v}$ получим уравнения

$$(\partial\rho/\partial t) + \rho_0 div\vec{v} = 0; \tag{3'}$$

$$\rho_0 \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \left\{ \frac{1}{8\pi} \left(\rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_{S_0} \right\} \nabla |E|^2 + \eta\Delta\vec{v} + ({}^1\!/_3\eta + \zeta)\nabla div\vec{v} \tag{4'}$$

Из линеаризованного уравнения $\breve{p} = f_1(\breve{\rho}, \breve{T}) = R\breve{\rho}\breve{T}$ состояния идеального газа

$$R\breve{T} \equiv R(T_0 + T) = \breve{p}\breve{V}^0 = (\breve{p}/\breve{\rho}) \equiv [(p_0 + p)/(\rho_0 + \rho)] \cong \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{p}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0^2}\rho \tag{5'}$$

с учётом $RT_0 = (p_0/\rho_0)$ находим

$$RT = (p/\rho_0) - (p_0/\rho_0^2)\rho \tag{5''}$$

Линеаризуя второе уравнение $\breve{p} = f_2(\breve{\rho}, \breve{S})$ состояния идеального газа, найдём также

$$p = \rho(\partial p/\partial\rho)_{S_0} + S(\partial p/\partial S)_{\rho_0} = a^2\rho + (p_0/C_V)S. \tag{6'}$$

Далее из последнего уравнения гидродинамики в приближении отсутствия источника тепла $(Q \cong 0)$ и с учётом (6’) получим[1]

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{R} k\Delta \left(\frac{p}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0^2}\rho \right) + (\hat{\sigma} \cdot \nabla)\vec{v} \tag{7'}$$

В простейшем одномерном случае, вводя линейное смещение q , найдем

$$\vec{v} = \frac{\partial q}{\partial t}\vec{z}_0; \tag{8'}$$

$$\rho = -\rho_0 \frac{\partial q}{\partial z}. \tag{9'}$$

В адиабатическом приближении $(S = 0)$ из (6’) получим

$$p \cong a^2\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho} \right)_{S_0} \cdot \rho \equiv -a^2\rho_0 \frac{\partial q}{\partial z}. \tag{10'}$$

Если применить операцию div к уравнению (4’), то из преобразованного (4’) с учётом (10’) и (3’) получится уравнение

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{1}{a^2\rho_0} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial z^2} = \frac{1}{8\pi} \left(\rho \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_{S_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left| \vec{E} \right|^2, \tag{11'}$$

[1]В уравнениях для ВРМБ (для простоты) пренебрегается теплом $(Q \cong 0)$, которое играет основную роль в уравнениях для описания взаимодействий полей с участием тепловой нелинейности.

которое является наиболее простым уравнением-примером.

Установим связь между правыми частями (4) и (11’) с помощью следующего соотношения

$$4\pi\vec{P}^{NL} \equiv 4\pi\chi^{Б}p\vec{E} \equiv \varepsilon^{NL}(p)\cdot\vec{E} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{S_0} p\vec{E} \equiv Y\cdot\beta_S\cdot p\cdot\vec{E}, \qquad (12’)$$

в котором введены адиабатическая сжимаемость

$$\beta_S = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{S_0} = \left(-\frac{1}{V^0}\frac{\partial V^0}{\partial p}\right)_{S_0} \equiv (1/T_{y,n,p}) \qquad (7^*)$$

и коэффициент электрострикции

$$Y = \left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{S_0} \qquad (7^{**})$$

связанные с ε^{NL} тождеством

$$\frac{1}{p}\cdot\varepsilon^{NL} \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{S_0} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{S_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial V^0}\right)_{S_0}\left(\frac{\partial V^0}{\partial p}\right)_{S_0} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{S_0}\left(-\frac{1}{V^0V^0}\right)_{S_0}\left(\frac{\partial V^0}{\partial p}\right)_{S_0} \equiv$$

$$\equiv \left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_{S_0}\left(-\frac{1}{V^0}\frac{\partial V^0}{\partial p}\right)_{S_0} \equiv Y\cdot\beta_S \equiv (\chi^{Б}/4\pi) \quad (8)$$

В результате уравнение (11’) с использованием $\chi^{Б}$ и $\Gamma = \frac{1}{a^2\rho_0}\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)$ примет вид

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z} + \Gamma\frac{\partial^3 p}{\partial t\partial z^2} = \frac{\chi^{Б}}{2\beta_S}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left|\vec{E}\right|^2. \qquad (9)$$

Коэффициент Γ в уравнении (9) получен в адиабатическом приближении. Если же учесть изменение S , то Γ получит добавку из-за теплопроводности

$$\Gamma = \frac{1}{a^2\rho_0}\left[\frac{4}{3}\eta+\zeta+\frac{\kappa}{C_p}(\gamma-1)\right]. \qquad (*)$$

В общем случае в уравнении (9) следует трансформировать ещё два члена, представив их в наиболее общем виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \to \nabla^2 p \equiv \Delta p; \qquad \chi^{Б}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left|\vec{E}\right|^2 \to \Delta(\overleftrightarrow{p}^0_{\alpha\beta} : \hat{\chi}^{Б}\cdot\vec{E}\cdot\vec{E}). \qquad (**)$$

и, в конечном счёте, получить уравнение

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\Delta p+\Gamma\frac{\partial}{\partial t}\Delta p=\frac{1}{2\beta_S}\Delta(\vec{\vec{p}}^{\,0}_{\alpha\beta}:\hat{\chi}^{\text{Б}}\cdot\vec{E}\cdot\vec{E}). \tag{10}$$

Уравнения (4), (5) и (10) образуют замкнутую систему.

3. Трехчастотное взаимодействие

Рассмотрим в рамках уравнений (4), (5) и (10) описание взаимодействия одной звуковой и двух электромагнитных волн

$$\begin{aligned}&\vec{E}=Re\left\{\tilde{\vec{e}}^{\,0}_L\tilde{E}_L exp\left[i\omega_L t-i(\vec{k}_L\cdot\vec{r})\right]+\tilde{\vec{e}}^{\,0}_s\tilde{E}_s exp\left[i\omega_s t-i(\vec{k}_s\cdot\vec{r})\right]\right\}\\&p=Re\left\{\tilde{p}exp\left[i\omega_p t-i(\vec{k}_p\cdot\vec{r})\right]\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

Подставим (11) в систему (4), (10) и получим систему

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_L}{c}\hat{n}_L\frac{d\tilde{E}_L}{dz_L}+\bar{\gamma}_L\tilde{E}_L+i\beta\omega_L^2\tilde{p}\tilde{E}_s exp(-i\theta)=0;\\&\frac{\omega_s}{c}\hat{n}_s\frac{d\tilde{E}_s}{dz_s}+\bar{\gamma}_s\tilde{E}_s+i\beta\omega_s^2\tilde{p}\tilde{E}_L exp(i\theta)=0;\\&\frac{\omega_p}{a}\frac{d\tilde{p}}{dz_p}+\bar{\gamma}_p\tilde{p}+i\frac{\chi^{\text{Б}}\kappa_p^2}{4\beta_s}\tilde{E}_S^*\tilde{E}_L exp(i\theta)=0;\end{aligned} \tag{12'}$$

в которой

$$\beta=\frac{\pi}{c^2}\mu\left(\vec{\vec{p}}^{\,0}_{\alpha\beta}:\hat{\chi}^{\text{Б}}\cdot\tilde{\vec{e}}^{\,0}_s\cdot\tilde{\vec{e}}^{\,0*}_L\right)\equiv\frac{\pi\mu}{c^2}\chi^{\text{Б}};\qquad\bar{\gamma}_p=\frac{\Gamma}{2}\omega_p l_p^2; \tag{12''}$$

$$\frac{\chi^{\text{Б}}k_p^2}{4\beta_s}=\beta\omega_p^2\left(\frac{c^2/a^2}{4\pi\mu\beta_s}\right);\qquad\theta=\left(\left[\vec{k}_p+\vec{k}_s-\vec{k}_L\right]\cdot\vec{r}\right). \tag{12'''}$$

Эти уравнения по форме почти совпадают с уравнениями (20) и (20) трехчастотного трехволнового взаимодействия в квадратичной среде. Главное отличие в том, что в (12’) все волны распространяются в разных направлениях.

4. ВРМБ вблизи порога возбуждения

Вблизи порога возбуждения интенсивности волн звука p^2 и стоксовой частоты E_s^2 малы по сравнению с E_L^2, и можно считать $E_L^2=E_0^2=const$. Тогда в системе (12') останутся два уравнения. Если предпоследнее уравнение (12') записать для $\tilde{E}_s^*$, то получим систему из двух связанных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\tilde{p}}{dz_p} + \gamma_p\tilde{p} + i\frac{\chi^{Б}k_p^2}{4\beta_s}\tilde{E}_0\tilde{E}_s^* exp(i\theta) = 0;\\
&\frac{d\tilde{E}_s^*}{dz_s} + \gamma_s\tilde{E}_s^* - i\beta\frac{\omega_s}{\hat{n}_s}c\tilde{E}_0^*\tilde{p}exp(-i\theta) = 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

в которой введены коэффициенты $\gamma_s = \bar{\gamma}_s(c/\hat{n}_s\omega_s)$; $\gamma_p = \bar{\gamma}_p(a/\omega_p)$, а направления изменения комплексных амплитуд $\tilde{E}_s^*$ и $\tilde{p}$ образуют угол ψ (Рис. 4.3)

Полагая, что по каждому направлению волны нарастают с одинаковым инкрементом

$$(\tilde{p}) = (\tilde{p}^0)exp(\tilde{\lambda}z_p); \quad (\tilde{E}_s^*) = (\tilde{E}_s^{*0})exp(\tilde{\lambda}z_s), \tag{14}$$

из условия нетривиальности решения (13) найдём дисперсионное уравнение[2]

$$\begin{vmatrix} \tilde{\lambda} + \gamma_p & i\frac{\chi^{Б}k_p}{4\beta_s}\tilde{E}_0 e^{i\theta} \\ -i\beta\frac{\omega_s}{\hat{n}_s}c\tilde{E}_0^* e^{-i\theta} & \tilde{\lambda} + \gamma_s \end{vmatrix} = 0 = \left(\lambda \tilde{+} \gamma_p\right)\left(\lambda \tilde{+} \gamma_s\right) - \beta\frac{\omega_s}{\hat{n}_s}c\frac{\chi^{Б}k_p}{4\beta_s}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = 0. \tag{15}$$

Из анализа корней

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = -\frac{1}{2}(\gamma_p + \gamma_s) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_p + \gamma_s)^2 - \gamma_p\gamma_s + \beta\frac{\chi^{Б}k_p\omega_s c}{4\beta_s\hat{n}_s}E_0^2} \tag{16}$$

уравнения (15) находим, что $Re\tilde{\lambda}_1 > 0$ в случае

$$E_0^2 > \frac{\gamma_s\gamma_p(4\beta_s)\hat{n}_s}{\beta\chi^{Б}k_p\omega_s c} = \frac{\gamma_s\gamma_p(4\beta_s)\hat{n}_s^2}{\pi\mu(\chi^{Б})^2 k_s k_p} = (E_0^2)_{cr}. \tag{17}$$

Вторая особенность ВРМБ. Из (17) видна вторая особенность ВРМБ: пороговое значение $\left|E_0^2\right|_{cr}$ убывает с ростом k_p . Если считать, что величина k_L задана (и, следовательно, $k_s \approx k_L$ с точностью до 10^{-5}), то $\left|E_0^2\right|_{cr}$ минимально для $\vec{k}_s$, направленного точно навстречу $\vec{k}_L$ (ибо в этом случае k_p максимально велико).

Формулой (17) можно пользоваться для оценок ВРМБ во всех средах, включая твердые и кристаллические тела. Воспользуемся (8) и свяжем $\chi^{Б}$ с модулем

[2]Формально на Рис. 4.3 можно выбрать направление по биссектрисе угла ψ и назвать его, например, y . Тогда в уравнениях (13) можно перейти к этой новой координате и заменить $z_{s,p}$ на y по правилам $z_{s,p} = y \cdot \cos(\psi/2)$. Если $z_{s,p}$ можно одинаковым образом выразить через y , то их можно заменить на $\tilde{z} = y \cdot \cos(\psi/2)$ и вместо (13) получить два уравнения, в которых производные берутся по одной координате $\tilde{z}$. Решения этой пары уравнений следует искать в виде $(\tilde{p}, \tilde{E}_s^*) = (\tilde{p}^0, \tilde{E}_s^{*0})\exp(\tilde{\lambda}\tilde{z})$.

упругости $\chi^{Б} = (Y\beta_s/4\pi) = (Y/4\pi T_{упр})$. Используя эту связь, например, для сапфира и полагая $\lambda_L = 1\mu м = 10^{-4}cm \approx \lambda_s$, где $T_{упр} = 5 \cdot 10^{11} г \cdot cm^{-1} \cdot$ сек$^{-2}$;$\gamma_p = 10cm^{-1}$; $\gamma_s \approx \gamma_L = 10^{-2}cm^{-1}$; $Y \approx 0{,}30 \div 0{,}10$, получим пороговую мощность вектора Пойнтинга $\overline{\vec{S}}^{T}_{L_{cr}} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_L}{\mu}}\left|E_0^2\right|_{cr} = (10^7 \div 10^8)\frac{Вт}{см^2}$.

5. Свойства уравнений ВРМБ. Законы сохранения

Вначале преобразуем уравнения (12') в уравнения для чисел квантов. Первые два уравнения нужно умножить на $(c^2/8\pi\mu\hbar\omega_{L,s}^2)\tilde{E}^*_{L,s}$ и сложить с комплексно сопряженными выражениями. Тогда получим уравнения для чисел квантов $m_{L,s}^2 = \left\{\left(\vec{S}_{L,s} \cdot \vec{z}^0_{L,s}\right)\hbar\omega_{L,s}\right\}$, где $\vec{S}_{L,s}$ – векторы Пойнтинга и $\vec{z}^0_{L,s}$ указывают направления распространения волновых фронтов этих двух электромагнитных волн.

Чтобы преобразовать к такому же виду третье уравнение (12'), нужно ввести вектор Умова-Пойнтинга для звуковой волны. Такой величиной является интенсивность звука

$$\overline{S_p}2\pi/\omega_p = \overline{pv}^{2\pi/\omega_p} = (1/2)\tilde{p}\tilde{v}^*, \tag{18}$$

где $\tilde{v}$ – амплитуда скорости частиц среды в звуковой волне. Размерность вектора Умова $\left[\overline{S_p}\right] = MT^{-3} = \left[\left|\vec{S}_{L,S}\right|\right]$ совпадает с размерностью *(г/см^3)* век-тора Пойнтинга.

Обращаясь к формулам (8')–(10'), найдем

$$\tilde{p} = ik_p a^2\rho_0\tilde{q} = i\omega_p a\rho_0\tilde{q}, \quad \tilde{v} = i\omega_p\tilde{q} = (\tilde{p}/a\rho_0) \tag{19}$$

и далее получим

$$\overline{S_p} = [(\tilde{p}\tilde{p}^*)/2a\rho_0] \tag{20}$$

Таким образом, третье уравнение (12') нужно умножить на $(\tilde{p}^*/2a\rho_0\omega_p\hbar)$ и сложить с комплексно сопряженным. Преобразуя коэффициенты в этих уравнениях, нужно учесть соотношение

$$\beta_s \cdot a^2 \cdot \rho_0 \equiv \left(\frac{\partial\rho}{\rho\partial p}\right)_{S_0} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{S_0} \cdot \rho_0 \equiv 1, \tag{21}$$

которое является следствием очевидных термодинамических связей.

В результате преобразований получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&(dm_L^2/dz_L) + 2\gamma_L m_L^2 + 2g m_L m_s m_p \sin\overline{\theta} = 0;\\
&(dm_s^2/dz_s) + 2\gamma_s m_s^2 + 2g m_L m_s m_p \sin\overline{\theta} = 0;\\
&(dm_p^2/dz_p) + 2\gamma_p m_p^2 + 2g m_L m_s m_p \sin\overline{\theta} = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\bar{\theta} = \theta + \varphi_L - \varphi_s - \varphi_p, \qquad g = \beta\sqrt{\left(2\rho_0 \hbar\omega_L\omega_s\omega_p c^2 a/\hat{n}_L\hat{n}_s\right)}$$

Система (22) напоминает одновременно систему (22) для трехволновых процессов в квадратичной среде и систему (13) для взаимодействующих стоксовой (ω_S) и лазерной (ω_L) волн в среде с ВКР. Как и в случае ВКР, здесь волны распространяются по разным направлениям.

В отсутствие потерь

$$\gamma_L = \gamma_s = \gamma_p = 0 \tag{23}$$

уравнения (22) имеют законы сохранения чисел квантов в дифференциальной форме, как в случае ВКР, и с такой физической интерпретацией, как в случае квадратичной среды:

$$\frac{dm_L^2}{dz_L} + \frac{dm_s^2}{dz_s} = 0; \quad \frac{dm_L^2}{dz_L} + \frac{dm_p^2}{dz_p} = 0; \quad , \frac{dm_s^2}{dz_s} - \frac{dm_p^2}{dz_p} = 0. \tag{24}$$

Если каждое из уравнений (22) умножить на $\overline{\theta}$ и сложить, то с учетом (1) получим закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dz_L}(\hbar\omega_L m_L^2) + \frac{d}{dz_s}(\hbar\omega_s m_s^2) + \frac{d}{dz_p}(\hbar\omega_p m_p^2) = 0. \tag{24'}$$

В отличие от случая квадратичной среды система (22) не совсем полная. Отсутствует уравнение для $\overline{\theta}$. Система будет полной и похожей на (22) в некоторых частных случаях.

6. Стоксово рассеяние вперед

В некоторых анизотропных кристаллических средах из-за разницы показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн возможно ВРМБ при геометрии, представленной на Рис. 4.4. При этом возможен предельный случай, когда волновые векторы $\vec{k}_{L,s,p}$ всех волн параллельны:

$$z_L = z_s = z_p = z = (\zeta/g). \tag{25}$$

В этом предельном случае уравнения (22) просто полностью переходят в три первых уравнения (21). При отсутствии поглощения к ним добавляется четвертое для $\overline{\theta}$ в виде

$$\frac{d\overline{\theta}}{d\zeta} = \frac{1}{g}\Delta k_z + \operatorname{ctg}\overline{\theta}\cdot\frac{d}{d\zeta}ln(m_L m_s m_p), \tag{26}$$

где

$$\Delta k_z = (\left[\vec{k}_p + \vec{k}_s - \vec{k}_L\right]\cdot\vec{z}_0).$$

Очевидно, что оказываются справедливыми все законы сохранения (24)–(26) для квадратичной среды и, конечно, все решения главы I.[3]

7. Стоксово рассеяние назад

Наиболее важным в практическом использовании и экспериментально наиболее просто осуществимым является рассеяние назад

$$z_L = z_p = -z_s = z = (\zeta/g) \tag{27}$$

При условии (23) уравнения (22) и (26) переходят в систему

$$\begin{aligned} &(dm_L/d\zeta) = -m_s m_p \sin\bar{\theta}; \quad (dm_s/d\zeta) = -m_L m_p \sin\bar{\theta};\\ &(dm_p/d\zeta) = -m_L m_s \sin\bar{\theta}; \frac{d\bar{\theta}}{d\zeta} = \delta + \operatorname{ctg}\bar{\theta}\cdot\frac{d}{d\zeta}(\mathbf{ln} m_L m_s m_p) \end{aligned} \tag{28}$$

которая имеет первые интегралы

$$m_L^2 - m_s^2 = N_1, \quad m_s^2 + m_p^2 = N_2, \quad m_L^2 + m_p^2 = N_3, \quad m_L m_p m_s \cos\bar{\theta} + \frac{\delta}{2} m_L^2 = \Gamma$$

$$\hbar\left(\omega_L m_L^2 + \omega_p m_p^2 - \omega_s m_s^2\right) = \bar{\Pi}_z = \left(\left[\bar{\vec{S}}_L + \bar{\vec{S}}_s + \bar{\vec{S}}_p\right]\cdot\vec{z}_0\right) \equiv \omega_L N_1 = \omega_p N_2. \tag{29}$$

В наиболее простой и реальной ситуации, когда на границу слоя нелинейной среды $\zeta = 0$ падает излучение ω_L с заданной интенсивностью $E_L^2(0)$, а источни-

[3] Если ввести относительное число фотонов с помощью нормировки $c\hat{n}_L E_L^2/8\pi\mu\omega_L\bar{\Pi}_z$, где $\bar{\Pi}_z$ – общий вектор Пойнтинга-Умова, то в (22) вместо g появится $L_0^{-1} = \beta\sqrt{(2\rho_0\bar{\Pi}_z\omega_L\omega_s\omega_p c^2 a/\hat{n}_L\hat{n}_s)}$ и после перехода к безразмерному переменному $\zeta = (z/L_0)$ они будут полностью совпадать с (21) как по форме, так и по смыслу.

ки звука и стоксова излучения отсутствуют, вполне определенное значение может иметь лишь одна постоянная $N_3 = m_L^2(0)$ из всех трёх независимых постоянных первых интегралов (29). Две оставшиеся постоянные определяются, как и в случае ВКР, заданным коэффициентом преобразования $\eta = m_s^2(0)/m_L^2(0)$ излучения ω_L в излучение ω_s , а также тем, что на границе $\zeta = 1$ задано значение $m_s^2(l)$ (даже если оно равно нулю).

В общем случае решение зависит от граничных условий и, в частности, от наличия $m_p^2(0)$, от расстройки δ и, конечно, от η,$m_s^2(l)$.

7.1. Точный синхронизм

$$\delta = 0$$

Рассмотрим решения (28) при точном синхронизме ($\delta = 0$), считая, что в сечении $\zeta = l$ поле стоксова излучения отсутствует:

$$m_s^2(l) = 0 \tag{30}$$

В этом случае получаем $\Gamma = 0$, и поэтому $\cos\bar{\theta} = 0$ или

$$\bar{\theta} = (\pi/2) + 2q\pi. \tag{31}$$

Выражая $m_p = \sqrt{N_2 - m_s^2}, m_L = \sqrt{N_2 + m_s^2}$ и учитывая (31), получим уравнение

$$(dm_s/d\zeta) = -\sqrt{(N_2 + m_s^2)(N_2 - m_s^2)}, \tag{32'}$$

которое с помощью замены переменного $V^2 = (m_s^2/N_2)$ и введения новых обозначений $k_2 = [N_2/(N_1 + N_2)]$ и $k^{'2} = [N_1/(N_1 + N_2)]$ приводится к стандартному виду

$$\int\limits_{V^2(l)}^{V^2} \frac{dV}{\sqrt{(1 - V^2)\cdot(k^{'2} + k^2 v^2)}} = -\int\limits_{l}^{\zeta} \sqrt{N_1 + N_2} d\zeta^{'}. \tag{32}$$

Решение (32) для $V^2(l) = 0$ находится в виде

$$V^2(\zeta) = \frac{m_s^2(\zeta)}{N_2} = cn^2\left\{K(k) + \sqrt{N_1 + N_2}(l - \zeta),k\right\}, \tag{33}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода в нормальной форме (62). В этом случае величина $m_s^2(0)$ определена полностью, если определено l.

Если же задать $m_s^2(0)$ (или η), то при прочих фиксированных условиях нужно будет определить l. По полученному решению для m_s^2 и по первым интегралам (29) можно найти аналитические выражения для m_p^2 и m_L^2.

7.2. Параметрическое приближение

Приближение заданного поля $m_L^2 = \bar{m}_0^2$, пожалуй, является наиболее важным с практической точки зрения. Исключая из рассмотрения первое уравнение (28) и подставляя $m_L = \bar{m}_0$ во все остальные, можно получить корректную систему уравнений для этого частного случая. Преобразуя эти уравнения, можно использовать первые интегралы (29) в форме

$$m_s^2 + m_p^2 = N_2; \quad \bar{m}_0 m_p m_s \cos\bar{\theta} + \frac{\delta}{2} m_s^2 = \Gamma - \frac{\delta}{2} N_1 \equiv \Gamma_1 \tag{34}$$

или

$$\bar{m}_0 m_p m_s \cos\bar{\theta} - \frac{\delta}{2} m_p^2 = \Gamma - \frac{\delta}{2} N_3 \equiv \Gamma_2. \tag{34'}$$

Два первых интеграла (34) обычно дополняются граничными условиями в виде

а) $m_s^2(l) = 0$ в плоскости $\zeta = l$

б) $m_p^2(0) = 0$ в плоскости $\zeta = 0$

В случае а) находим

$$\Gamma_1 = 0; \quad \cos\bar{\theta} = -(\delta/2\bar{m}_0)\cdot(m_s/m_p) \equiv -\bar{\delta}\cdot(m_s/m_p) \tag{35а}$$

и далее получаем из второго уравнения (28) уравнение для стоксова поля

$$-(dm_s/d\zeta) = \bar{m}_0 m_p \sin\bar{\theta} = \sqrt{\bar{m}_0^2 m_p^2 - (\delta^2/4) m_s^2} = \bar{m}_0 \sqrt{N_2 - m_s^2(1+\bar{\delta}^2)}. \tag{36а}$$

Если ввести $V^2 = (m_s^2/N_2)\cdot(1+\bar{\delta}^2)$, то (36а) преобразуется в

$$\int_0^V \frac{dV}{\sqrt{1-V^2}} = -\int_l^\zeta \bar{m}_0 d\zeta' \sqrt{1+\bar{\delta}^2}$$

что в конечном итоге дает решение $V = \sin\left\{\bar{m}_0\sqrt{1+\bar{\delta}^2}(l-\zeta)\right\} \Rightarrow$

$$m_s^2 = \left\{N_2/(1+\bar{\delta}^2)\right\} \sin^2\left\{\bar{m}_0\sqrt{1+\bar{\delta}^2}(l-\zeta)\right\}. \tag{37а}$$

Заметим, что (37а) совместно с (34) полностью определяет и решение для

$$m_p^2 = N_2 - m_s^2 \equiv N_2 \frac{\bar{\delta}^2 + \cos^2\left\{\bar{m}_0\sqrt{1+\bar{\delta}^2}(l-\zeta)\right\}}{1+\bar{\delta}^2} \tag{38а}$$

При этом m_p^2 нигде не обращается в нуль, если $\delta \neq 0$, и поэтому $m_p(0) \neq 0$. Если в случае $\bar{\delta} = 0$ внутри слоя на расстоянии

$$\bar{m}_0 l_{cr} = \beta c \sqrt{\frac{ca\omega_s\omega_p}{4\pi\mu\hat{n}_s}}\bar{\rho}_0 L_{cr} = \frac{\pi}{2} \tag{39}$$

стоксова компонента поля обращается в нуль, то при этом в нуль обращается звуковое поле на границе $z = 0$. Такое решение говорит о возможности описания реально происходящего процесса образования ВМБР назад от бесконечно длинного (т.е. без второй резкой границы) слоя нелинейной среды при нулевых граничных условиях для звука и стоксова поля и при одном непременном условии строгого резонанса

$$\vec{k}_p + \vec{k}_s - \vec{k}_L = 0. \tag{40}$$

Оно играет такую же роль, как положительная обратная связь в любом генераторе электромагнитного поля. Для случая б) в случае граничных условий $m_p(0) = 0$ находим

$$\Gamma_2 = 0; \qquad \cos\bar{\theta} = \bar{\delta}(m_p/m_s) \tag{35б}$$

и далее

$$(dm_p/d\zeta) = \sqrt{\bar{m}_0^2 m_s^2 - (\delta^2/4)m_p^2} = \bar{m}_0\sqrt{N_2 - m_p^2(1+\bar{\delta}^2)} \tag{36б}$$

Отсюда по аналогии находим решение

$$m_p^2 = \left\{N_2/(1+\bar{\delta}^2)\right\}\sin^2\left\{\bar{m}_0\sqrt{1+\bar{\delta}^2}\zeta\right\}. \tag{37б}$$

При этом

$$m_p^2 = N_2 - m_s^2 = N_2 \frac{\bar{\delta}^2 + \cos^2\left\{\bar{m}_0\sqrt{1+\bar{\delta}^2}(l-\zeta)\right\}}{1+\bar{\delta}^2} \tag{38б}$$

нигде не обращается в нуль, если $\delta \neq 0$, и максимально при $\zeta = 0$,
где $m_s^2(0) = N_2$.

Глава V. ПУЧКИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ОПТИКЕ

Введение

Параметрические процессы в электродинамике – электромагнитные процессы в средах, параметры которых меняются во времени. *Параметрические явления* в нелинейной среде – все явления, которые могут быть описаны в приближении *фиксированной накачки*.

В нелинейной оптике реально все процессы преобразования частот происходят в условиях, когда излучение имеет вид распространяющегося пучка. Рассмотрим взаимодействие пучков трех частот в квадратичной среде

$$\vec{E} = Re\left\{\sum_{q=1}^{3} \vec{e}^0{}_q \tilde{E}(\vec{r},t) exp\left[i\omega_q t - i\left(\vec{k}_q \cdot \vec{r}\right)\right]\right\}.$$

Практически часто реализуются случаи, когда пучок излучения на одной из частот существенно превышает по мощности излучение на других частотах. В этих случаях оправдано применение приближения заданного поля (фиксированной накачки).

1. Преобразование частот в волновых пучках в квадратичной среде

1.1. Основные уравнения

В уравнениях, которые описывают взаимодействие пучков, нужно учесть зависимость полей $\tilde{E}_q$ от $\vec{r}_\perp$ и от времени t. Проведём обобщение системы (20) на этот случай и с этой целью преобразуем первый член каждого уравнения

$$\left(\left[\vec{\tilde{e}}^0{}_q \times \left[\vec{k}_q \times \vec{\tilde{e}}^0{}_q\right]\right] \cdot \nabla \tilde{E}_q\right) = k_q \cos\alpha_q \left(\vec{s}_q^0 \cdot \nabla \tilde{E}_q\right) \qquad (1)$$

где $\vec{s}_q^0$ – орта в направлении групповой скорости $\vec{\mathbf{v}}_q$, которая определяется из соотношения

$$\overline{\vec{S}_q}^T = Re\frac{c}{8\pi}\left[\vec{\tilde{E}}_q \times \vec{\tilde{H}}^*{}_q\right] = \left(\overline{w_{em}}^T\right)_q \vec{v}_q \qquad (2)$$

где $\left(\overline{w_{em}}^T\right)_q$ – плотность энергии э.-м. поля. Нужно учитывать также связи

$$\left[\vec{k}_q \times \tilde{\vec{e}}^0{}_q \tilde{E}_q\right] = \frac{\omega_q}{c}\mu \tilde{H}_q \vec{\tilde{h}}^0{}_q; \vec{k}_q = \frac{\omega_q}{c}\vec{n}_q$$

$$\overrightarrow{\vec{S}}_q^{T} = \frac{c/\mu}{8\pi}\left\{\vec{n}_q\left(\vec{\tilde{E}}_q \cdot \vec{\tilde{E}^*}_q\right) - \tilde{\vec{e}}^{0\,*}_{q}\tilde{E}_q\left(\vec{n}_q\tilde{\vec{e}}^{0}_{q}\right)\tilde{E}^*_q\right\}$$

Из Рис. 5.1 видно, что

$\vec{n}_q \parallel \vec{k}_q \Uparrow \vec{z}_{q0} \Uparrow \vec{z}_0, \quad \vec{\tilde{D}}_q \parallel \vec{x}_0; \quad \left(\vec{n}_q \cdot \vec{e}^{\,0}_q\right) = -n_q \sin\alpha_q, \quad \vec{e}^{\,0}_q = \vec{x}_0\cos\alpha_q - \vec{z}_0\sin\alpha_q;$

$\vec{s}^{\,0}_q = \left(\vec{z}_0\cos\alpha_q + \vec{x}_0\sin\alpha_q\right)$ и $\overline{\vec{S}}_q^{T} = \left(c/8\pi\mu\right) E_q^2 n_q \cos\alpha_q \vec{s}^{\,0}_q.$

(2’)

С другой стороны, воспользовавшись связями

$$\vec{\tilde{D}}_q = -\left[\vec{n}_q \times \vec{\tilde{H}}_q\right], \qquad \mu\vec{\tilde{H}}_q = \left[\vec{n}_q \times \vec{\tilde{E}}_q\right]$$

и получив

$$\vec{\tilde{D}}_q = -\left(1/\mu\right)\left[\vec{n}_q \times \left[\vec{n}_q \times \vec{\tilde{E}}_q\right]\right] = \left(1/\mu\right)\left\{n_q^2\vec{\tilde{E}} - \vec{n}_q\left(\vec{n}_q \cdot \vec{\tilde{E}}_q\right)\right\},$$

можно найти

$$\left(\overline{w_{em}}\right)_q = \left(1/8\pi\right)\left(\vec{\tilde{E}}_q \cdot \vec{\tilde{D}^*}_q\right) = \left(1/8\pi\mu\right) n_q^2 E_q^2 \cdot \cos^2\alpha_q. \tag{3}$$

Из (2) и (3) найдем

$$\mathbf{v}_q = \left(c/n_q\cos\alpha_q\right)\left(\vec{z}_0\cos\alpha_q + \vec{x}_0\sin\alpha_q\right) \equiv \left(c/n_q\cos\alpha_q\right)\vec{s}^{\,0}_q \tag{4}$$

и представим операторы уравнений (20) в виде

$$k_q\cos\alpha_q \cdot \left(\vec{s}^{\,0}_q \cdot \nabla\tilde{E}_q\right) = \left(\omega_q/c^2\right) n_q^2\cos^2\alpha_q \cdot \left(\vec{v}_q \cdot \nabla\tilde{E}_q\right). \tag{5}$$

Вначале обобщим (5) на нестационарные процессы в приближении, которое позволяет пренебречь второй производной по времени

$$\left(\omega_q/c^2\right) n_q^2\cos^2\alpha_q \cdot \left(\vec{v}_q \cdot \nabla\tilde{E}_q\right) \to \left(\omega_q/c^2\right) n_q^2\cos^2\alpha_q \cdot \left(\vec{v}_q \cdot \nabla\tilde{E}_q\right) \cdot \left\{\left(\partial/\partial t\right) + \left(\vec{v}_q \cdot \nabla\right)\right\}\tilde{E}_q \tag{6}$$

Переходя от приближения плоских волн (амплитуды волн предполагаются зависящими от $\vec{r}_\perp$ как от параметра), в котором были получены уравнения (20), к ”диффузионному”приближению, которое описывает распространение пучков, вместо оператора (6) получим оператор

$$\left(\omega_q/c^2\right) n_q^2\cos^2\alpha_q \cdot \hat{L}_q\tilde{E}_q = \left(\omega_q/c^2\right) n_q^2\cos^2\alpha_q \times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\vec{v}_q \cdot \nabla\right) + \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\frac{\partial^2\omega_q}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} - \frac{i}{2}\left(\frac{d^2k_q}{d\omega_q^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\tilde{E}_q \tag{7}$$

в каждом уравнении типа (20). В этом случае система уравнений примет вид

$$\left(\omega_{1,2}/c^2\right) n_{1,2}^2 \cos^2\alpha_{1,2}\hat{L}_{1,2}\tilde{E}_{1,2}+\bar{\gamma}_{1,2}\tilde{E}_{1,2}+i\beta\omega_{1,2}^2\tilde{E}_3\tilde{E}_{2,1}^*\exp\left\{-i\left(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}=0;$$
$$\left(\omega_3/c^2\right) n_3^2 \cos^2\alpha_3\hat{L}_3\tilde{E}_3+\bar{\gamma}_3\tilde{E}_3+i\beta\omega_3^2\tilde{E}_2\tilde{E}_1\exp\left\{+i\left(\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}=0. \tag{8}$$

Уравнения (8) трудно решить даже в параметрическом случае.

1.2. Уравнения одноволнового приближения при параметрическом преобразовании частот в условиях высокочастотной накачки

Сделаем некоторые упрощения в постановке задачи.

1. Рассмотрим стационарный трехчастотный случай, исключив зависимость амплитуд полей от времени t.
2. Будем считать, что все волны распространяются в одном направлении: $z_1 = z_2 = z_3 = z$.
3. Будем считать, что поле $\tilde{E}_3$ неизменно и не зависит от $\vec{r}_\perp$ и от z (т.е. $\tilde{E}_3 = const$). Это значит, что (8) превратится в систему из двух линейных уравнений, которые будут иметь постоянные коэффициенты. Такая система будет описывать параметрическое преобразование волновых пучков $\tilde{E}_{1,2}\left(\vec{r}_\perp,z\right)$, имеющих частоты $\omega_{1,2}$, с помощью высокочастотной накачки $\tilde{E}_3$ на частоте $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.
4. Для простоты рассмотрим двухмерную задачу $\left(\partial\tilde{E}_q/\partial y\right) = 0$.
5. Допустим, что имеет место полный синхронизм ($\Delta\vec{k} = 0$).
6. В качестве граничных зададим условия

   $$\tilde{E}_1\left(\vec{r}_\perp,z=0\right)=\tilde{E}_1\left(\vec{r}_\perp,0\right), \qquad \tilde{E}_2\left(\vec{r}_\perp,z=0\right), \tag{9}$$

   которые означают, что на границе отсутствует волновой пучок на частоте ω_2.

   При этих предположениях параметрическое усиление частот ω_1 и ω_2 будет описываться системой из двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{i}{2}a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\gamma_1\right)\tilde{E}_1+i\sigma_1\tilde{E}_3\tilde{E}_2^*=0 \\ -i\sigma_2\tilde{E}_3^*\tilde{E}_1+\left(\frac{\partial}{\partial z}+b_2\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2}a_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\gamma_2\right)\tilde{E}_2^*=0 \end{aligned} \tag{10}$$

относительно полей $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2^*$. В этих уравнениях использованы следующие обозначения: $b_j=\left(v_{jx}/v_{jz}\right)$ – отношение компонент групповой скорости $\vec{v}_j$,

$$\begin{aligned} &\sigma_j=\left(\beta\omega_j c^2/v_j n_j^2\cos^2\alpha_j\right); \quad \gamma_j=\left(\bar{\gamma}_j c^2/v_j\omega_j n_j^2\cos^2\alpha_j\right); \\ &a_j=\left(1/v_{jz}\right)\cdot\left(\partial^2\omega_j/\partial k_x^2\right)=\left(1/v_{jz}\right)\cdot\left(\partial v_{jx}/\partial k_x\right)\cong\left(v_j/v_{jz}k_j\right)\cong\left(1/k_j\right). \end{aligned} \tag{10'}$$

7. Для простоты положим, что линейные поглощения на $\omega_{1,2}$ одинаковы:

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma. \tag{11}$$

Линейная система уравнений (10) с постоянными коэффициентами допускает решение в виде суперпозиции плоских волн с амплитудами

$$\tilde{E}_1(x,z)=\int\tilde{E}_1(k,z)\exp(-ikx)dk, \qquad \tilde{E}_2^*(x,z)=\int\tilde{E}_2^*(k,z)\exp(-ikx)dk. \tag{12}$$

Используя преобразование (12), нетрудно получить из уравнений (10) систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z}-ib_1k-\frac{i}{2}a_1k^2+\gamma\right)\tilde{E}_1(k,z)+i\sigma_1\tilde{E}_3\tilde{E}_2^*(k,z)=0; \\ -i\sigma_2\tilde{E}_3^*\tilde{E}_1(k,z)+\left(\frac{\partial}{\partial z}-ib_2k+\frac{i}{2}a_2k^2+\gamma\right)\tilde{E}_2^*(k,z)=0 \end{aligned} \tag{13}$$

относительно комплексных амплитуд двух связанных друг с другом плоских волн, имеющих разные частоты $\omega_{1,2}$. Решение уравнений (13) нужно искать в виде

$$\tilde{E}_1(k,z)=\tilde{E}_{10}(k)\exp\left(\tilde{\Lambda}z\right), \qquad \tilde{E}_2^*=\tilde{E}_{20}^*(k)\exp\left(\tilde{\Lambda}z\right). \tag{14}$$

В каждом частном решении (14) амплитуды $\tilde{E}_{10}(k)$, $\tilde{E}_{20}^*(k)$ и комплексная постоянная $\tilde{\Lambda}$ изменения (вдоль оси z) медленной амплитуды $\tilde{E}_{1,2}(k,z)$ каждой плоской волны зависят от проекции κ каждого комплексного волнового числа

$$\vec{\tilde{k}}_{1,2} = (k_{1,2}) \cdot \vec{z}_0 \pm k\vec{x}_0 \mp Im\tilde{\Lambda} \cdot \vec{z}_0 + iRe\tilde{\Lambda} \cdot \vec{z}_0$$

на ось x , а также от всех иных параметров среды и поля.

Вначале найдём это частное решение уравнений (13). С этой целью подставим (14) в (13) и из условия нетривиальности решения (13) получим дисперсионное уравнение относительно $\tilde{\Lambda}$ в виде

$$\left(\tilde{\Lambda} + \gamma\right)^2 - i\left(\tilde{\Lambda} + \gamma\right)\left[(b_1 + b_2)k + \frac{k^2}{2}(a_1 - a_2)\right] - \\ - \sigma_1\sigma_2 E_3^2 - k^2\left(b_1 + \frac{a_1}{2}k\right)\left(b_2 - \frac{a_2}{2}k\right) = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) выглядит громоздким, но если ввести

$$\tilde{\Gamma} = \frac{i}{2}\left[(b_1 + b_2)k + \frac{k^2}{2}(a_1 - a_2)\right],$$

$$\tilde{D} = \frac{i}{2}k(b_1 - b_2) + \frac{i}{4}k^2(a_1 + a_2), \quad g^2 = \sigma_1\sigma_2 E_3^2, \quad (16)$$

то корни дисперсионного уравнения (15) можно представить в компактном виде

$$\left(\tilde{\Lambda} + \gamma\right)_{1,2} = \tilde{\Gamma} \pm \sqrt{g^2 - \tilde{D}^2}. \quad (17)$$

8. Упростим (17) считая, что поля $\tilde{E}_{1,2}(\vec{r},z)$ медленно изменяются по поперечной координате и потому $k_x \equiv \kappa << \left|\tilde{k}_z\right| \cong \left|\tilde{k}_{1,2}\right|_z$. Тогда при **достаточно сильной анизотропии** (определяющей направления групповых скоростей) могут быть справедливы условия $(\kappa/k_{1,2}) \cong (\kappa a_{1,2}) << b_{1,2}$.

9. Предположим также, что усиление достаточно велико: $g^2 >> \left|\tilde{D}\right|^2$.

При этих предположениях корни характеристического уравнения (15) можно представить в виде

$$\left(\tilde{\lambda} + \gamma\right)_{1,2} \cong \frac{i}{2}\kappa(b_1 + b_2) + \frac{i}{4}\kappa^2(a_1 - a_2) \pm g \mp \frac{(b_1 - b_2)^2}{8g}\kappa^2 + 0\left\{\kappa^3\right\}. \quad (17^*)$$

Каждому из корней (17*) отвечает линейно независимое решение. Эти два линейно независимых решения описывают два процесса **(происходящих в**

параметрическом приближении при трехчастотном взаимодействии): процесс ***усиления*** из-за распада фотонов ω_3 и процесс ***ослабления*** из-за слияния фотонов ω_1 и ω_2 в фотоны ω_3. Основную роль играет нарастающее решение, описывающее процесс распада фотонов накачки ω_3. Отдельные спектральные компоненты этих полей

$$\begin{aligned}\vec{E}_{11} = \vec{e}_1^{\,0} Re\left\{\left(\tilde{E}_{10}(\kappa)\right)_1 exp\left[i\omega_1 t - i\left(\vec{k}_1\cdot\vec{r}\right) - i\kappa x + \tilde{\Lambda}_1(\kappa)z\right]\right\};\\ \vec{E}_{21} = \vec{e}_2^{\,0} Re\left\{\left(\tilde{E}^*_{20}(\kappa)\right)_1 exp\left[-i\omega_2 t - +i\left(\vec{k}_2\cdot\vec{r}\right) - i\kappa x + \tilde{\Lambda}_1(\kappa)z\right]\right\};\end{aligned} \quad (18)$$

при условии

$$g > \gamma + \{(b_1 - b_2)^2\kappa^2/8g\} \quad (19)$$

являются нарастающими в $+z$–направлении плоскими волнами. В конечном счёте, соответствующее этому решению двухчастотное поле на достаточно большом расстоянии z от границы $z = 0$ будет определять пространственные структуры обоих пучков $\left\{\tilde{E}_{1,2}\left(\vec{r}_\perp, z\right)\right\}_1$.

Второе линейно независимое решение ($\vec{E}_{12}$ и $\vec{E}_{22}$ соответственно) при достаточно большом значении g быстро затухает и на практически интересных расстояниях z оказывается пренебрежимо малым по сравнению с (18), так что им можно пренебречь. Такое приближение называется ***одноволновым***.

В этом приближении, игнорирующем $\tilde{\Lambda}_2$, изменение каждого из двух полей (18) будет описываться одним единственным параболическим уравнением

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma - g \pm \frac{i}{4}\cdot(a_1 - a_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(b_1 - b_2)^2}{8g}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\tilde{E}_{1,2}(x,z) = 0. \quad (20)$$

Это уже два несвязанных друг с другом параболических уравнения относительно $\tilde{E}_{1,2}(x,z)$. В них в отличие от обычных уравнений квазиоптики для линейной среды есть вторые производные с мнимыми и реальными коэффициентами. Вторые производные с мнимыми коэффициентами описывают процессы, связанные с дифракцией усиливаемых волн. Вторые производные с действительными коэффициентами ответственны за процессы расплывания пучков, которые носят название параметрического расплывания или параметрической диффузии

Учитывая роль линейного усиления и ослабления с помощью решений

$$\tilde{E}_{1,2}(x,z) = \tilde{\tilde{E}}_{1,2}(x,z)\exp\{(g-\gamma)z\}, \quad (21)$$

получим из (20) **консервативный** вариант уравнений ***одноволнового*** приближения

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2}(b_1+b_2)\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{i}{4}\cdot(a_1-a_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{(b_1-b_2)^2}{8g}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\tilde{\bar{E}}_{1,2}(x,z)=0. \tag{22}$$

1.3. Дифракция усиливаемых волн и эффект аномальной фокусировки

Рассмотрим случай распространения волн вдоль направления так называемого "касательного синхронизма когда их групповые скорости колинеарны

$$b_1=b_2=\bar{b}\equiv b, \qquad b_1-b_2=0. \tag{23}$$

Тогда в уравнениях (22) остаются только члены $\pm(i/4)(a_1-a_2)$, ответственные за дифракцию. Особенность этих дифракционных явлений заключается в том, что эффективное волновое число

$$\bar{\bar{k}}=\frac{2}{a_1-a_2}\cong\frac{2k_1k_2}{k_2-k_1}=\frac{4\pi}{\lambda_1-\lambda_2}\equiv\bar{k}_1=-\bar{k}_2 \tag{24}$$

может быть как положительно, если $\lambda_1>\lambda_2$, так и отрицательно, если $\lambda_1<\lambda_2$.

Будем считать, что $\bar{\bar{k}}>0$. Тогда в уравнении для поля ***длинноволнового излучения*** знак коэффициента $\left(i/2\bar{k}_1\right)$ при члене $\left(i/2\bar{k}_1\right)\cdot\left(\partial^2\tilde{\bar{E}}_1/\partial x^2\right)$, учитывающем дифракционные эффекты, совпадает с тем, который имеет место в обычном диффузионном уравнении

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}+\frac{i}{2k_q}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\tilde{E}_q(x,z)=0$$

Особенность уравнения состоит только в том, что при $\lambda_1\to\lambda_2$ «дифракционный член» становится исчезающе малым. Это означает, что **при $\lambda_1\to\lambda_2$ поперечная структура поля не меняется вдоль** направления распространения пучка.

Вспомним решения параболического уравнения диффузии лучевой амплитуды поля. Если на входе в среду задано поле в виде пучка с комплексной амплитудой

$$\tilde{E}_q=\tilde{E}^0{}_q\exp\left\{i\frac{\bar{k}_qx^2}{2R_q(0)}-\frac{x^2}{2\rho_q^2(0)}\right\}\otimes\exp\left[+i\left(\omega_qt-\bar{k}_qz\right)\right]. \tag{25}$$

и при этом определен знак отношения, например, в виде

$$\left[\bar{k}_q / R_q(0)\right] < 0, \tag{26}$$

то в соответствии с общей теорией решения уравнений параболического типа с заданными граничными условиями комплексная амплитуда поля в произвольном сечении (плоскости $z = const > 0$) находится по формуле Френеля

$$\tilde{\bar{E}}_q(x,z) = \sqrt{\frac{i\bar{k}_q}{2\pi z}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\bar{E}}_q(\xi,0) \exp\left\{-i\frac{\bar{k}_q(\xi - x)^2}{2z}\right\} d\xi. \tag{27}$$

Такое поле в области $z > 0$ в среде с $\bar{k}_1 > 0$ (и соответственно $R_1(0) < 0$) будет расходящимся пучком: его радиус $\rho_1(z)$ будет монотонно расти в направлении $z > 0$ в соответствии с известной квазиоптической формулой

$$\rho_1(z) = \rho_1(0)\sqrt{\left\{1 - \frac{z}{2R_1(0)}\right\}^2 + \left\{\frac{z}{\bar{k}_1 \rho_1^2(0)}\right\}^2}. \tag{28$_1$}$$

В области $z < 0$ радиус этого пучка $\rho_1(z)$ будет меньше $\rho_1(0)$ внутри некоторого интервала с центром в «перетяжке» $z_{min} < 0$.

В уравнении, описывающем распространение коротковолнового излучения $\tilde{\bar{E}}_2$, коэффициент при члене, учитывающем дифракционные эффекты, имеет противоположный знак. Диффузионный член этого уравнения имеет такой вид

$$-\left(i/2\bar{\bar{k}}\right)(\partial^2\tilde{\bar{E}}_2/\partial x^2) \equiv (i/2\bar{k}_2)(\partial^2\tilde{\bar{E}}_2/\partial x^2),$$

как будто поле $\tilde{E}_2$ распространяется в «среде с отрицательным волновым числом»

$$\bar{k}_2 \equiv \bar{k}_{2\text{ эфф}} = -\bar{\bar{k}} \tag{24$_1$}$$

или в среде с положительным волновым числом в направлении

$$z' \equiv -z. \tag{24$_2$}$$

В среде с $\bar{k}_2 < 0$ условие (26) справедливо, если $R_2(0) > 0$. При этом комплексная амплитуда поля $\tilde{\bar{E}}_2(x,z)$ в $+Z$-направлении трансформируется точно так же, как в среде с $\bar{k}_1 > 0$ поле $\tilde{\bar{E}}_1(x,z)$ изменяется в $-Z$-направлении. Поэтому фактически получается, что при распространения поля $\tilde{\tilde{\bar{E}}}_2(x,z)$ в $+Z$-направлении ширина пучка $\rho_2(z)$ будет изменяться по закону $\rho_2(z^{'})$ или

$$\rho_2(z) = \rho_2(0)\sqrt{\left\{1 - \frac{-z}{2R_2(0)}\right\}^2 + \left\{\frac{-z}{\bar{k}_2\rho_2^2(0)}\right\}^2} \qquad (28_2)$$

и при $R_2(0) > 0$ ширина пучка $\rho_2(z)$ будет монотонно расти. Поле $\tilde{\tilde{\bar{E}}}_2(x,z)$ в виде (25) в случае $R_2(0) < 0$ (т.е. со сферически выпуклой поверхностью волнового фронта) будет фокусироваться и иметь минимальный поперечный размер (перетяжку) на расстоянии $z_{min} \cong |R_2(0)|$ от границы.

Физическая причина такой аномальной фокусировки состоит в следующем. Поле $\tilde{\mathbf{E}}_1(x,z)$ при взаимодействии с накачкой $\tilde{E}_3$ возбуждает такое коротковолновое излучение $\tilde{E}_2(x,z)$, что у комплексно сопряженной амплитуды $\tilde{E}_2^*$ зависимость фазы от поперечных координат будет точно такой же, как у амплитуды $\tilde{E}_1$. Если пучок усиливаемого длинноволнового излучения $\tilde{E}_1$ имеет выпуклый фазовый фронт (и должен расплываться в $+Z$–направлении), то у поля $\tilde{E}_2(x,z)$ exp $\left\{i\omega_2 t - \left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}\right)\right\}$ фазовый фронт оказывается уже вогнутым.

При параметрическом взаимодействии в квадратичной среде характер изменения поперечной структуры пучков определяется длинноволновым излучением, дифракционные эффекты для которого играют более существенную роль, развиваясь на более коротких дифракционных длинах $l_{d1} = k_1\rho_1^2$. Другими словами, если поле $\tilde{E}_1(x,z)$ exp $\left\{i\omega_1 t - \left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right)\right\}$ расплывается в направлении распространения, то расплывается в этом направлении и поле
$\tilde{E}_2^*(x,z)$ exp $\left\{-i\omega_2 t + \left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}\right)\right\}$.

1.4. Параметрическая диффузия

При распространении пучков с разными направлениями групповых скоростей становится существенной ***параметрическая диффузия*** (ПД). Для оценки влияния ПД рассмотрим важный частный случай

$$b_1 = -b_2 = b, \qquad b_1 + b_2 = 0. \qquad (28)$$

Кроме того, пренебрежем эффектом дифракции, считая

$$k_2 = k_1 \Rightarrow\Rightarrow (\bar{k}^{-1}) = 0. \qquad (29)$$

В этом случае уравнения (22) преобразуются к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{b^2}{2g}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{\bar{\bar{E}}}_{1,2}=0. \tag{30}$$

Следовательно, расчет поля в сечении z по известному полю $\tilde{\bar{\bar{E}}}(\xi,0)$ можно осуществить с помощью известного преобразования (27) в виде

$$\tilde{\bar{\bar{E}}}(x,z)=\sqrt{\frac{g/b^2}{2\pi z}}\int\limits_{-\infty}^{-\infty}\tilde{\bar{\bar{E}}}(\xi,0)\exp\left\{-\frac{(g/b^2)(\xi-x)^2}{2z}\right\}d\xi, \tag{31}$$

в котором функция Грина (или оператор Грина $\hat{G}$) содержит комплексное волновое число

$$\bar{k}_q\equiv\tilde{k}=-i(g/b^2) \tag{32}$$

Если на входе слоя $z=0$ имеется двухмерный Гауссов пучок с цилиндрическим волновым фронтом

$$\tilde{\bar{\bar{E}}}(x,0)=\tilde{\bar{\bar{E}}}_0\exp\left\{-(x^2/2\rho_0^2)-i(kx^2/2R_0)\right\}, \tag{33}$$

где ρ_0 и R_0 – ширина и радиус кривизны волнового фронта пучка, то в процессе распространения этот пучок из-за ПД будет деформироваться. В произвольном сечении $z=const$ ширина пучка будет определяться по формуле

$$\rho^2(z)\equiv\rho_0^2\frac{(1+\zeta)^2+\Lambda\zeta^2}{1+\zeta+\Lambda\zeta}, \tag{34}$$

в которой используется безразмерная координата $\zeta=(zb^2/g\rho_0^2)$ и безразмерный параметр $\Lambda=(k\rho_0^2/R_0)^2$. Цилиндрический фазовый фронт поля пучка будет иметь радиус кривизны

$$R(z)=R_0\left\{(1+\zeta)^2+\Lambda\zeta^2\right\} \tag{35}$$

Из (34) следует, что изменения $\rho^2(z)$ не зависят от знака радиуса кривизны R_0 фазового фронта поля пучка. В случае плоского фазового фронта $(R_0=\infty)$ ширина пучка $\rho^2(z)$ монотонно растет и на расстояниях $z\gg(g\rho_0^2/b^2)$ приближается к ***диффузионной ширине*** $\rho_\infty^2=z\cdot b^2/g$. Если $\Lambda=(k\rho_0^2/R_0)^2\gg 1$, то вначале на малых расстояниях ζ происходит уменьшение $\rho^2(z)$ до размера

$$\rho_{min}^2=\rho_0^2\frac{2\sqrt{\Lambda}}{\Lambda+1}\cong\rho_0^2\frac{2}{\sqrt{\Lambda}}\equiv 2\left(|R_0|/k\right)$$

при $\zeta_m = \frac{\sqrt{\Lambda}-1}{\Lambda+1} \cong \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$. На этом расстоянии радиус кривизны фазового фронта пучка увеличивается примерно вдвое

$$|R(\zeta_m)| \cong |R_0| \left\{ \left[1 + \left(1/\sqrt{\Lambda}\right)\right]^2 + \Lambda(1/\Lambda) \right\} \approx 2\,|R_0|\,,$$

так что почти сравнивается с дифракционной длиной $k\rho_{min}^2 \cong 2\,|R_0|$. Затем ширина пучка $\rho^2(z)$ начинает монотонно увеличиваться и стремится к $\rho_{0\infty}$.

Начальное уменьшение $\rho^2(z)$ при малых значениях величины $|R_0|$ объясняется тем, что из-за сильной фокусировки поля заметно увеличивается локальное отклонение волнового вектора усиливаемого излучения от направления синхронизма. Именно из-за этого поле на краях пучка усиливается слабее, чем в центре. После того, как эта причина будет устранена, пучок при своём дальнейшем распространении в $+z$-направлении будет монотонно увеличиваться (по ширине) из-за ПД.

Радиус кривизны фазового фронта согласно (35) монотонно и неограниченно растёт по абсолютной величине $\left(\lim\limits_{z\to} |R(z)| \to \infty\right)$, и при этом знак кривизны остаётся неизменным.