

Содержание

Содержание	2
Введение	3
1 Постановка задачи и основные соотношения	5
1.1 Постановка задачи	5
1.2 Основные соотношения	7
2 Решение системы	14
2.1 Метод конечных разностей во временной области	14
2.2 Параметры системы. Обезразмеривание	16
2.3 Условия поглощения	20
2.4 Условие устойчивости разностной схемы	21
3 Эффективность энергетических преобразований	22
3.1 Энергия, запасенная в остаточном токе	22
3.2 Энергия излученная системой. Коэффициент полезного действия	25
4 Результаты расчетов	27
4.1 Энергетические зависимости. Оптимальный набор параметров	29
Заключение	34
Приложение	35
Список литературы	37

Введение

Изучение ионизированных структур, в том числе, плазмы, в отдельности, является одним из приоритетных направлений в области как теоретической, так и прикладной физики. Особенную роль играет способность подобных структур к генерации электромагнитных волн под внешним воздействием. С учетом того, что изучаемая в таких случаях плазма по факту представляет из себя сильно ионизированный газ, под внешним воздействием обычно понимают электромагнитное поле разной формы, структуры, и способа генерации, хотя чаще всего в прикладных исследованиях и экспериментах используют именно лазерную генерацию. Таким образом конструируются и моделируются лазерно-плазменные излучатели.

В данной работе численно исследуется группа однотипных частных случаев такой генерации, когда в некий определенный, далее называемый начальным моментом, бесконечно малый (узкий) промежуток времени в плазме заданной формы и структуры возбуждается ток, после чего задачей исследователя является изучение того, как данная система будет себя вести в дальнейшем во времени и пространстве. То есть одной из главных задач в подобных работах, в том числе и этой, является получение и изучение пространственно временной эволюции магнитных и электрических полей, а также аналогичного распределения (эволюции) тока. После этого с полученными данными уже можно работать производя дальнейшие известные и, впрочем, стандартные преобразования, такие как, получение спектральных характеристик, нахождение энергетических зависимостей и так далее. Впрочем, на точность и правдоподобность уже этих данных будет влиять качество и точность построенного пространственно временного распределения, что отчасти имеет отражение и в данной работе.

Данная работа фактически является продолжением и модификацией задачи о моделировании плазменного цилиндрического излучателя. Однако в данной задаче дополнительно добавляется и учитывается новое явление касательно распространения ионизации внутри самого излучателя. То есть мы фактически снимаем одну из идеализаций в постановке задачи и делаем последнюю более приближенной к реальным исследуемым моделям.

Для изучения поставленного вопроса – как и в предыдущий раз – требуется не столько вычислительная мощность, сколько корректно настроенный алгоритм, на входе которого «подаются» определенные параметры поставленной задачи, а на выводе получаются требуемые к нахождению данные, причем они должны быть согласованы с теорией и если отличаться от неё, то на очень малую величину. Основной задачей данной работы является создание такого алгоритма в виде вычислительного кода. Поставлена задача создания такого вычислительного кода для решения точных уравнений Максвелла применимо к заданной системе, описанной ниже.

1. Постановка задачи и основные соотношения

1.1. Постановка задачи

Пусть дан цилиндр радиуса R_2 , бесконечный вдоль своей оси (оси z), заполненный газом. Пусть вдоль оси z в начальный момент времени попадает ультракороткий лазерный импульс такой конфигурации, что данный газ мгновенно ионизируется в точке «попадания» импульса и эта ионизация начинает распространяться по z с заданной скоростью V , называемой «бегучестью плазмы». Ионизация порождает бегущий ионизационный фронт остаточного тока и заданной концентрации заряженных частиц в плазме. Причём эта концентрация равномерно распределена по сечению цилиндра и имеет заданное симметричное – не зависящее от полярного угла – пространственное распределение по радиусу цилиндра. От его оси при $r = 0$ до определенного радиуса $R_1 = \text{const}$ плазменная концентрация равна определенному заданному значению N_0 , далее от R_1 до R_2 плавно спадает до нуля, после чего, соответственно, переходит в вакуум.

Обозначим такой закон спадания концентрации в сечении цилиндра как некую заданную функцию $f(r)$:

$$f(r) = \begin{cases} 1, & r < R_1 \\ \cos^2 \left(\frac{\pi(r-R_1)}{2(R_2-R_1)} \right), & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Концентрация и плазменная частота равны соответственно:

$$N(r) = N_0 f(r) \quad (1.2)$$

$$\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 f(r) \quad (1.3)$$

Распределение плазменной концентрации (1.2) в таком случае имеет вид:

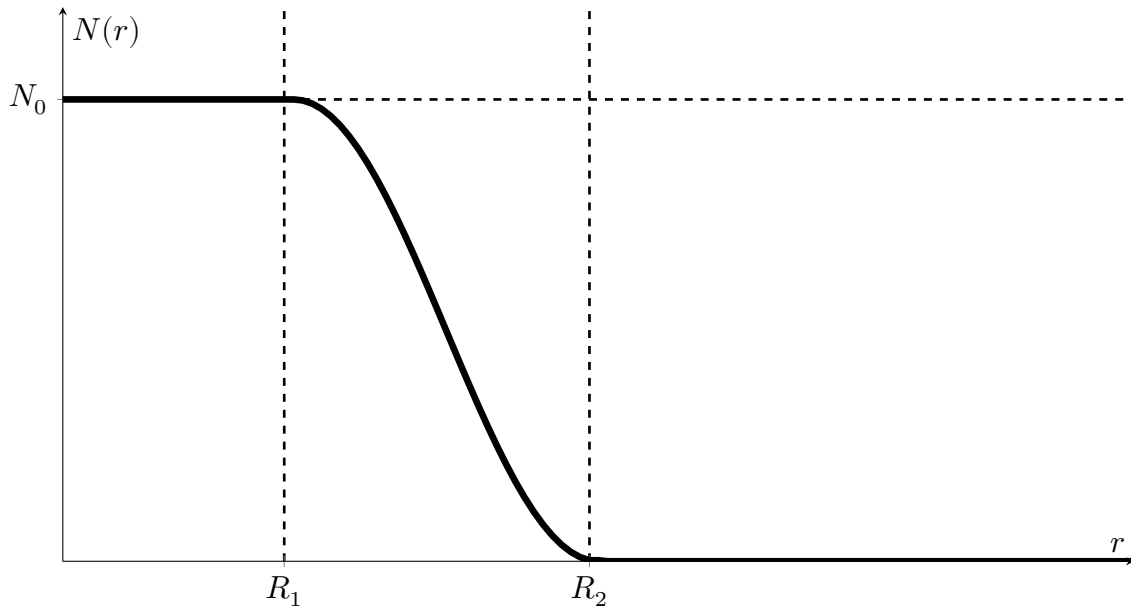


Рис. 1: Распределение плазменной концентрации в зависимости от r .

А сечение цилиндра схематично представлено на рис.2

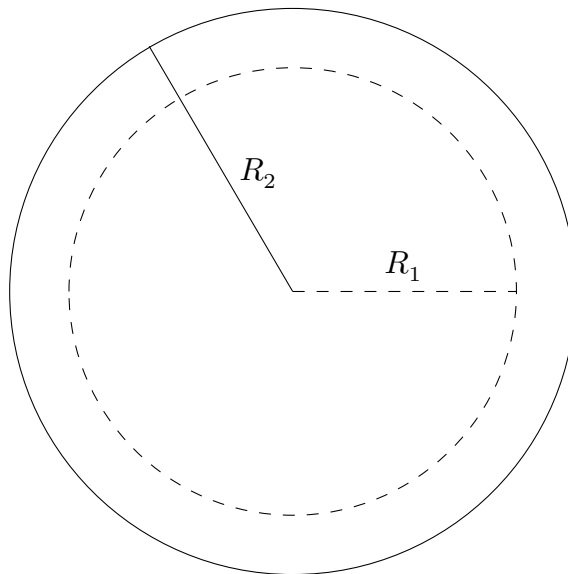


Рис. 2: Сечение цилиндра

Положим что в начальный момент времени одновременно во всем пространстве цилиндра возбуждается ток с заданной плотностью (1.4)

$$\vec{j}|_{t=0} = j_0 f(r) \cdot \vec{x}_0, \quad j_0 = const \quad (1.4)$$

При этом поля в начальный момент времени нулевые:

$$\vec{E}|_{t=0} = 0; \quad \vec{H}|_{t=0} = 0 \quad (1.5)$$

То есть ток возбуждается вдоль оси x , которая, в свою очередь, перпендикулярна оси цилиндра z . Данное распределение начального тока даёт нам возможность искать дальнейшее решение задачи в *дипольном* виде, с заданной зависимостью от полярного угла, при этом подобная зависимость компонент полей и токов позволит нам значительно упростить решение задачи, сведя его к одномерному радиальному распределению искомых функций.

1.2. Основные соотношения

Найдём выражение для плотности тока в плазме, используя известные соотношения (1.6) – (1.10). Мы знаем определение плотности тока, как упорядоченного движения заряженных частиц. Пренебрегаем движением ионов в плазме по причине их много большей массы по сравнению с массой электронов. Будем считать что в изучаемой нами плазме движению подвержены только электроны.

$$\vec{j} = eN_e\vec{v} \quad (1.6)$$

где j – искомая плотность тока, e и $(N_e \equiv N)$ – заряд электрона и концентрация электронов в плазме соответственно. Продифференцируем (1.6) один раз по времени

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = eN \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (1.7)$$

а также запишем уравнение движения в электрическом поле плазменных частиц с учётом их соударений – в таком случае вводится аналог силы трения

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e\vec{E} - m\nu\vec{v} \quad (1.8)$$

где e – модуль заряда электрона, m – масса электрона, N – концентрация электронов в плазме, ν – частота соударений частиц. Подставим (1.8) в (1.7), предварительно разделив обе части уравнения (1.8) на m :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = eN \left(\frac{e}{m} \vec{E} - \nu \vec{v} \right) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{e^2 N}{m} \vec{E} - \nu e N \vec{v} \quad (1.10)$$

Используя (1.6) в (1.10), а также определение плазменной частоты (1.12) получаем окончательное уравнение для плотности тока в плазме:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} - \nu \vec{j} \quad (1.11)$$

где

$$\omega_p(r) = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N(r)}{m}} \quad (1.12)$$

Записав уравнения Максвелла в дифференциальной форме в системе СГС вместе с уравнением (1.12):

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} - \nu \vec{j} \end{cases} \quad (1.13)$$

мы получим основную фундаментальную систему уравнений, которую мы будем использовать для дальнейших расчетов в данной работе.

Используя (1.4), упростим систему (1.13): так как искомая система представляет собой бесконечный цилиндр, проще всего будет искать решение в цилиндрической системе координат. Разложим начальный импульс (1.4) по векторам не декартовой, а цилиндрической СК.

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \quad (1.14)$$

То есть:

$$\vec{x}_0 = \cos \varphi \cdot \vec{r}_0 - \sin \varphi \cdot \vec{\varphi}_0 \quad (1.15)$$

Также распишем систему (1.13) в цилиндрической СК:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial j_{(r,\varphi,z)}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{(r,\varphi,z)} - \nu j_{(r,\varphi,z)} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, представим все исследуемые компоненты как произведение функции, зависящей только от времени и координаты на функцию, зависящей только от полярного угла.

$$\left\{ \begin{array}{l} j_r = j_r(r,t) \cos \varphi; \quad j_\varphi = j_\varphi(r,t) \sin \varphi; \quad j_z = j_z(r,t) \cos \varphi; \\ E_r = E_r(r,t) \cos \varphi; \quad E_\varphi = E_\varphi(r,t) \sin \varphi; \quad E_z = E_z(r,t) \cos \varphi; \\ H_r = H_r(r,t) \sin \varphi; \quad H_\varphi = H_\varphi(r,t) \cos \varphi; \quad H_z = H_z(r,t) \sin \varphi; \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Получаем систему с так называемым *дипольным* решением, с заданной зависимостью от угла, при этом сами исследуемые в дальнейшем компоненты в (1.17) зависят только от времени, радиальной координаты, то есть от расстояния от оси цилиндра и координаты z . Учитывая то, что система уравнений (1.16) есть система уравнений в частных производных, подставив (1.17) в (1.16), получаем промежуточную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} E_z + \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{1}{r} H_z - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial j_{(r,\varphi,z)}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{(r,\varphi,z)} - \nu j_{(r,\varphi,z)} \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Для учета в системе уравнений бегучести плазмы введём новый параметр ξ – аналогичный времени t , и имеющий такую же размерность.

$$\xi = t - \frac{z}{V} \quad (1.19)$$

Где V – уже упомянутая бегучесть (скорость распространения ионизационного фронта). Производные по z и по t будут равны соответственно

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.21)$$

Подставляя новые производные в (1.18), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} E_z - \frac{1}{V} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{V} \frac{\partial E_r}{\partial \xi} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \\ \frac{1}{r} H_z + \frac{1}{V} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} = \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{V} \frac{\partial H_r}{\partial \xi} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial j_{(r,\varphi,z)}}{\partial \xi} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{(r,\varphi,z)} - \nu j_{(r,\varphi,z)} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Система (1.22) содержит зависимости производных $H_r = H_r(E_\varphi); H_\varphi = H_\varphi(E_r);$
 $E_r = E_r(H_\varphi); E_\varphi = E_\varphi(H_r)$, однако окончательная система уравнений должна содержать только прямые зависимости от r и ξ для устранения «перекрестных» зависимостей последовательно выразим одну производную через другую

и приведя подобные слагаемые, получаем окончательную систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left(\frac{1}{r} H_z + \frac{c}{V} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_r \right) = \frac{\partial E_r}{\partial \xi} \\ \left(\frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left(-\frac{c}{V r} E_z - \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} \\ \frac{c}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) - 4\pi j_z = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \\ \left(\frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left(\frac{1}{r} E_z + \frac{c}{V} \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) \right) = \frac{\partial H_r}{\partial \xi} \\ \left(\frac{V^2 c}{V^2 - c^2} \right) \left(\frac{c}{V} \left(\frac{1}{r} H_z - \frac{4\pi}{c} j_r \right) + \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} \\ -\frac{c}{r} \left(\frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) = \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial j_{r,\varphi,z}}{\partial \xi} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{r,\varphi,z} - \nu j_{r,\varphi,z} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Для более наглядного и локального объяснения существования конечной скорости распространения ионизационного фронта можно перейти от базиса волновых скоростей к базису волновых чисел. По определению, фазовая скорость распространяющейся волны $V_\Phi = \frac{\omega}{h}$, где h – продольное волновое число, волновое число $k = \frac{\omega}{c}$. Через соотношение $\frac{h}{k}$ мы приходим к описанию распространения волны с помощью угла θ относительно оси (направления) её распространения. То есть

$$\cos \theta = \frac{h}{k} = \frac{c}{V} \quad (1.24)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{V^2 - c^2}{V^2}} \quad (1.25)$$

– основные соотношения для данного описания.

Таким образом, коэффициенты в (1.23) могут быть преобразованы с учетом указанных выше соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_r}{\partial \xi} = \left(\frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{r} H_z + \cos \theta \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_r \right) \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial \xi} = \left(\frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left(-\cos \theta \frac{1}{r} E_z - \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = \frac{c}{r} \left(\frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - H_r \right) - 4\pi j_z \\ \frac{\partial H_r}{\partial \xi} = \left(\frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{r} E_z + \cos \theta \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{4\pi}{c} j_\varphi \right) \right) \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} = \left(\frac{c}{\sin^2 \theta} \right) \left(\cos \theta \left(\frac{1}{r} H_z - \frac{4\pi}{c} j_r \right) + \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial H_z}{\partial \xi} = -\frac{c}{r} \left(\frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} + E_r \right) \\ \frac{\partial j_{r,\varphi,z}}{\partial \xi} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{r,\varphi,z} - \nu j_{r,\varphi,z} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Стоит отметить, что аналогичная задача с мгновенным распространением ионизации (то есть при $V \rightarrow \infty$ и $\theta = \pi/2$) является частным случаем данной задачи, и при подставлении соответствующих соотношений в систему (1.26) мы получим соотношения, полученные в решении предыдущей задачи.

Для полноценной постановки задачи с использованием дифференциальных уравнений, необходимо ввести не только начальные условия, но и граничные. Исходя из (1.18) мы ставим следующие граничные условия на границу $r = 0$:

$$H_z|_{r=0} = 0 \quad (1.27)$$

$$\left. \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1.28)$$

Также ставим граничные условия на излучение на бесконечности (так называемые условия Зоммерфельда):

$$\vec{E}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.29)$$

$$\vec{H}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.30)$$

2. Решение системы

Начнём с того, что решение поставленной задачи аналитическим методом если и представляется возможным, то крайне затратным в плане подбора и нахождения конкретной – может даже приближенной – функции от: времени, радиуса, начальных условий, и заданных параметров самой системы. Для решения задач, как подобных этой, так и многих других, когда каждая из переменных зависит от другой по определенному закону, используется численное моделирование дифференциальных уравнений. Способов, методов и схем такого моделирования современная наука знает очень много. Однако ввиду простоты реализации, достаточно интуитивно понятной схеме и вариативности, основным методом решения уравнений электродинамики является метод конечных разностей во временной области (КРВО). Хотя в научной литературе вне зависимости от основного языка статьи, исследования или научной работы чаще всего используется оригинальная англоязычная аббревиатура FDTD (англ. - Finite Difference Time Domain).

2.1. Метод конечных разностей во временной области

Данный метод, изначально описанный в работе [4], основан на дискретизации уравнений Максвелла и предназначен для решения точных задач электродинамики. Разностная схема основана на численном решении дифференциальных уравнений, когда вводится сетка по дифференцируемой переменной, и производная первого порядка представляется в геометрическом (пространственном) виде как разница значений дифференцируемой функции в соседних точках сетки, называемых *узлами*, деленная на разность значений переменной, по которой идёт дифференцирование, называемой шагом дискретизации. Обычно для упрощения расчетов и в угоду интуитивности сетка делается одномерной, то есть шаг дискретизации – это определенная фиксированная константа, данная условность используется и в данной работе.

Если мы применим разностную схему к уравнениям Максвелла одинаково для всех компонент полей и токов, мы столкнёмся с тем, что каждая отдельная компонента полей, исходя из (1.13), является соответствующей компонен-

той ротора другого поля, при этом эти зависимости взаимны друг с другом, то есть электрическое поле это пространственный вихрь (проще – ротор) поля магнитного, и наоборот. Чтобы рассчитать одно поле в одной точке пространства, необходимо найти изменение другого поля в этой же точке, а изменение другого поля – это с точностью до шага по пространству разность значений поля в двух соседних точках. При этом расчеты придется вести не в каждом узле, а через один, что в конечном итоге приводит нас к тому, что само пространство легче и интуитивнее разбить на сетку не с одинарным шагом, а с половиной этого шага, просто определенные компоненты нужно сдвинуть по сетке на полшага, а другие оставить на основных узлах, и производить расчеты независимо по методике из предыдущего абзаца.

Для декартовой системы координат такое разбиение выглядит следующим образом:

Как и было сказано ранее, все компоненты полей разнесены в пространстве друг относительно друга. Для цилиндрической системы координат разбиение по сетке будет строиться по аналогичному принципу, рассмотренному в [3].

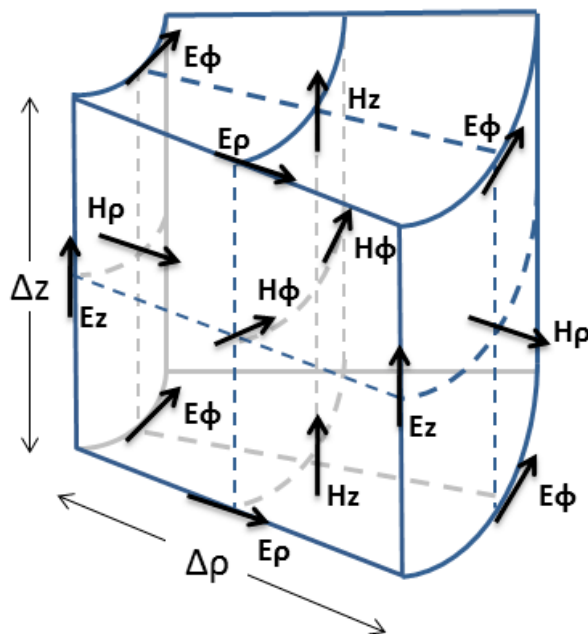
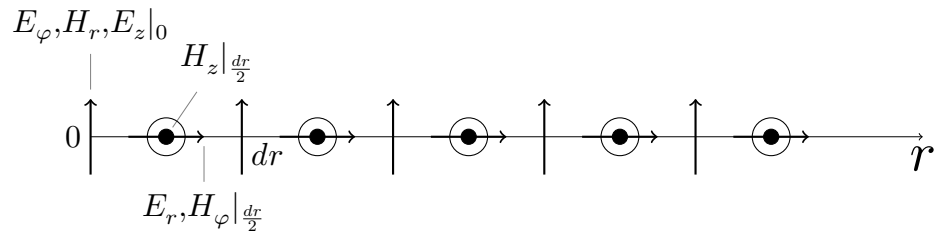


Рис. 3: Трехмерная сетка для цилиндрической СК.

Для приведения численной схемы к требуемой в данной задаче, необходимо убрать зависимость от z , и представить зависимость от φ как (1.17). То есть

сетка визуально будет выглядеть одномерной, в расчетах будет использоваться одномерная зависимость поля и токов от r , однако на самом деле сетка будет являться двумерной, но с заданной зависимостью от одной из переменных. Это объясняет наличие в точках с половинчатым шагом $r = r(N + 1/2)$, сразу двух компонент H_z и E_r с учетом того, что для разделения переменных и написании разностной схемы необходимо «разнести» в пространстве все исследуемые компоненты. Стоит отметить, что по причине разделения компонент в пространстве необходимо аналогичным образом разделить и временную сетку, то есть расчет фактически ведётся по половине шага, с чередованием рассчитываемых полей, аналогично расчетам по пространству.



2.2. Параметры системы. Обезразмеривание

Решения одинаковых точных уравнений, аналогичных тем, что рассматриваются в данной работе, могут кардинально различаться в зависимости от заданных в постановке задачи параметров. Причем речь идёт не об ошибках в решении, возникающих при несоблюдении различных условий устойчивости. Под разницей в решениях понимается разница корректных, точных аналитических решений, аналогично достижимых численными методами. Изменяются энергетические, частотные, мощностные и другие характеристики системы.

Основные уравнения представляют собой компоненты E , H , J как размерные величины, т.е. полученные точные решения будут являться значениями полей и токов в системе СГС ввиду того, что сами точные уравнения изначально написаны в этой системе. Для упрощения анализа полученных данных данные уравнения требуется «обезразмерить», т.е. сделать такую замену \tilde{E} , \tilde{H} , \tilde{v} , \tilde{r} и \tilde{t} , чтобы эти величины являлись безразмерными, но при этом также связанными между собой.

Последовательно обезразмериваем:

- Плотность тока $\vec{\tilde{j}} = \vec{j}/j_0$;
- Напряженность магнитного и электрического полей соответственно $\vec{\tilde{H}} = \vec{H}(\omega_{p0}/4\pi j_0)$ и $\vec{\tilde{E}} = \vec{E}(\omega_{p0}/4\pi j_0)$;
- Радиальную координату $\tilde{r} = r\omega_{p0}/c$ (все параметры, связанные с радиусом цилиндра обезразмерены аналогично);
- Частоту соударений электронов с тяжелыми частицами $\tilde{\nu} = \nu/\omega_{p0}$;
- Время $\tilde{t} = \omega_{p0}t$.
- Скорость распространения ионизационного фронта $V = \tilde{V} \cdot c$

В качестве основных параметров системы задавались: частота соударений нормированная на максимальную плазменную частоту $\tilde{\nu} = \nu/\omega_{p0}$, внешний обезразмеренный радиус цилиндра \tilde{R}_2 и безразмерное выражение $\delta = (R_2 - R_1) / R_2$ характеризующее размер области спадания плазменной концентрации и частоты ω_{p0} относительно размеров самого цилиндра (рис. 1 и рис. 2).

Используя описанную выше схему решения задачи, а также сетку на рис. 3, получаем окончательную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
E_r|_{n+1}^{i+\frac{1}{2}} &= E_r|_n^{i+\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left(\frac{1}{r} H_z|_{n-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \frac{\cos\theta}{\Delta r} \left(E_z|_n^{i+1} - E_z|_n^{i-\frac{1}{2}} \right) - \frac{4\pi}{c} j_r|_n^i \right) \\
E_\varphi|_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} &= E_\varphi|_{n-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left(-\cos\theta \frac{1}{r} E_z|_{n-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} - \frac{H_z|_{n-\frac{1}{2}}^i - H_z|_{n-\frac{1}{2}}^{i-1}}{\Delta r} - \frac{4\pi}{c} j_\varphi|_{n-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \right) \\
E_z|_{n+1}^{i-\frac{1}{2}} &= E_z|_n^{i-\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta\xi}{r} \left(\frac{(rH_\varphi)|_n^i - (rH_\varphi)|_n^{i-1}}{\Delta r} - H_r|_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \right) - 4\pi\Delta\xi j_z|_n^{i-\frac{1}{2}} \\
H_r|_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} &= H_r|_{n-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left(\frac{1}{r} E_z|_n^{i-\frac{1}{2}} + \cos\theta \left(\frac{H_z|_n^i - H_z|_n^{i-1}}{\Delta r} + \frac{4\pi}{c} j_\varphi|_n^{i-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
H_\varphi|_{n+1}^i &= H_\varphi|_n^i + \frac{c\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left(\cos\theta \left(\frac{1}{r} H_z|_n^i - \frac{4\pi}{c} j_r|_n^i \right) + \frac{E_z|_{n+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - E_z|_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right) \\
H_z|_{n+\frac{1}{2}}^i &= H_z|_{n-\frac{1}{2}}^i + \frac{c\Delta\xi}{r} \left(-E_r|_n^i - \frac{(rE_\varphi)|_{n+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - (rE_\varphi)|_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right) \\
j_r|_{n+1}^i &= (1 - \nu\Delta\xi) j_r|_n^i + \frac{\Delta\xi\omega_{p0}^2}{4\pi} f(r) E_r|_n^i \\
j_\varphi|_{n+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} &= (1 - \nu\Delta\xi) j_\varphi|_{n-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi\omega_{p0}^2}{4\pi} f(r) E_\varphi|_{n-\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} \\
j_z|_{n+1}^{i-\frac{1}{2}} &= (1 - \nu\Delta\xi) j_z|_n^{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi\omega_{p0}^2}{4\pi} f(r) E_z|_n^{i-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} &= E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \\
&+ \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left(\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{r} + \frac{\cos\theta}{\Delta r} \left(E_z|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} &= E_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \\
&+ \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[-\frac{\cos\theta}{r} E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta r} \left(H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\pi}{c} j_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} &= E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{c\Delta\xi}{r} \left(\frac{rH_\varphi|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - rH_\varphi|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} - H_r|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) - 4\pi\Delta\xi j_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$H_r|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = H_r|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \\ + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[\frac{E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{r} + \cos\theta \left(\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{\Delta r} + \frac{4\pi}{c} j_r|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]$$

$$H_\varphi|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = H_\varphi|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \\ + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[\cos\theta \left(\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{r} - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) + \frac{E_z|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right]$$

$$H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = H_z|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \\ - \frac{c\Delta\xi}{r} \left(\frac{rE_\varphi|_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - rE_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k}}{\Delta r} + E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right)$$

$$\begin{cases} j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} = (1 - \nu\Delta t)j_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ j_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} = (1 - \nu\Delta t)j_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_\varphi|_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ j_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} = (1 - \nu\Delta t)j_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_\varphi|_{i+\frac{1}{2}} = H_\varphi|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi}{\sin^2\theta} \left[\cos\theta \left(\frac{H_z|_{i+\frac{1}{2}}}{r} - \frac{4\pi}{c} j_r|_{i+\frac{1}{2}} \right) + \frac{E_z|_{i+1} - E_z|_i}{\Delta r} \right] \\ H_z|_{i+\frac{1}{2}} = H_z|_{i+\frac{1}{2}} - \frac{c\Delta\xi}{r} \left(\frac{rE_\varphi|_{i+1} - rE_\varphi|_i}{\Delta r} + E_r|_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ j_r|_{i+\frac{1}{2}} = (1 - \nu\Delta t)j_r|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_r|_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ j_\varphi|_i = (1 - \nu\Delta t)j_\varphi|_i + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_\varphi|_i \\ j_z|_i = (1 - \nu\Delta t)j_z|_i + \frac{\Delta t\omega_{p0}^2}{4\pi}f(r)E_z|_i \end{cases}$$

где по n откладываются шаги по времени, а по i – шаги по r .

2.3. Условия поглощения

Для предотвращения «загрязнения» сигнала отражениями с другого конца оси r , то есть аналитически при $r \rightarrow \infty$ недостаточно только обнулить производную саму функцию на конце границы расчета. В зависимости от поставленной задачи и моделируемой области могут использоваться различные граничные условия. Чаще всего используются условие идеально согласованных слоев (*perfectly matched layers – PML*), периодические условия для расчета периодических структур и условия идеального проводника на границе, когда в граничных точках поле берется всегда равным нулю. Последнее имеет очень серьезный недостаток, так как от такой границы идет полное отражение волны, и если требуется длительное наблюдение электромагнитного поля, отраженные от границ счетной области волны могут «загрязнять» сигнал и делать невозможным его дальнейший анализ. Для исключения отражения от границ области и был придуман способ идеально-согласованных слоев, описанный в [1]. В данной работе используются только условия идеально согласованных слоев, когда в определенной области расчетной сетки вводятся слои, поглощающие попадающее в него поле (расчет поглощения для токов существенно усложнил бы задачу, поэтому поглощение происходит в расчетном вакууме), причем относительно каждого отдельного слоя среда и её свойства изменяются существенно, однако усиление поглощающих свойств происходит при продвижении от начала данных слоёв до их конца (обычно это происходит на границе расчетной области), где поглощение усиливается до максимума и дальнейшего прохода энергии через последний слой невозможно.

В частности, для PML, предназначенного для поглощения волн, распространяющихся в направлении r , как в данной работе, в волновое уравнение включено следующее преобразование. Всякая производная $\partial/\partial r$ заменяется на:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{i\sigma(r)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.2)$$

где ω – угловая частота поглощаемой волны и σ – некоторая функция от r , отвечающая за поглощение слоя в точке r . То есть $dr \rightarrow dr(1 + i\sigma(r)/\omega)$.

2.4. Условие устойчивости разностной схемы

При составлении пространственно-временных реализаций пространство и время, соответственно, поддаются дискретизации, и уже если и воспроизводят реальную картину исследуемого объекта, поля и.т.д., то с определенной неточностью. Можно также упомянуть тот факт, что все расчеты в численных методах производятся с помощью вычислительных машин (компьютеров), то есть к неточности дискретизации также добавляется машинная неточность самого компьютера.

В случае, рассматриваемом в данной работе, условием устойчивости метода конечных разностей является так называемое условие (критерий) Куранта – Фридрихса – Леви, или просто условие Куранта [7].

В текущей задаче и в цилиндрической СК это условие (2.3) будет выглядеть так:

$$\Delta\xi \leq \frac{\Delta r}{c\sqrt{2}} \quad (2.3)$$

В свою очередь условие устойчивости для Δr будет следующим:

$$\Delta r \ll \frac{\nu}{\omega_{p0}} (R_2 - R_1) \quad (2.4)$$

3. Эффективность энергетических преобразований

Основной задачей, поставленной в данной работе, является определение оптимальных параметров (размеров) системы, при которых достигается максимально эффективное преобразование энергии, запасенной в образованном в момент мгновенной ионизации остаточном токе, в электромагнитную энергию излучения. Дальнейшие исследования полученных решений можно свести к изучению излучения волны, возбуждаемой данной системой (данным цилиндром) в вакуум. С учетом того, что цилиндр, представленный в данной задаче, является бесконечным, с бесконечно быстро распространяющимся фронтом ионизации, расчёт коэффициента полезного действия по определению сводится к нахождению отношения суммарной энергии, излученной системой за всё время к суммарной энергии, запасенной в цилиндре во всем пространстве. При этом обе энергии в виду бесконечности цилиндра, будут рассчитываться на единицу его длины.

3.1. Энергия, запасенная в остаточном токе

Для дальнейших выводов воспользуемся соотношением:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.1)$$

а также воспользуемся соотношениями (1.6) и (1.12). Уравнение (1.12) есть определение зависимости плазменной частоты ω_p от $N(r)$. Уравнение (1.6) – определение плотности тока в проводнике как упорядоченного движения электронов в нём. Уравнение (3.1) – кинетической энергии электрона, где m – его масса, v – его скорость.

Для нахождения запасенной энергии в токе (или же кинетической энергии электронов на единицу длины, а не на единицу объёма)

$$W_{\text{запасенная}} = W_{\text{кин ед дл}} = \iint W_{\text{кин ед об}} dS \quad (3.2)$$

— интеграл по поперечному сечению цилиндра dS от $r = 0$ до $r = R_2$.

Кинетическая энергия системы является функцией от r и находится как произведение плазменной концентрации $N(r)$ и кинетической энергии одного электрона (3.1).

$$W_{\text{кин ед об}} = N(r) \frac{mv^2}{2} \quad (3.3)$$

Таким образом выражение для энергии запасенной в системе на единицу длины цилиндра приобретает следующий вид:

$$W_{\text{запасенная}} = W_{\text{зап}} = \iint N(r) \frac{mv^2}{2} dS = \frac{m}{2} \iint Nv^2 dS \quad (3.4)$$

Из (1.6) мы можем получить $Nv = j/e$, а также $v = j/Ne$. Получим:

$$W_{\text{зап}} = \frac{m}{2} \iint \frac{j}{e} \cdot \frac{j}{eN} dS = \frac{m}{2e^2} \iint \frac{j^2}{N} dS \quad (3.5)$$

Из (3.1) мы можем получить выражение для $N(r)$.

$$N(r) = \frac{\omega_p^2(r)m_e}{4\pi e^2} = [\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 \cdot f(r)] = \frac{\omega_{p0}^2 m_e}{4\pi e^2} \cdot f(r) \quad (3.6)$$

Учитывая, что энергия «запасается» в начальный момент времени, значит и выражение для плотности тока мы должны искать по начальному распределению, то есть по начальному условию:

$$j(r)|_{t=0} = j_0 f(r) \quad (3.7)$$

$$W_{\text{зап}} = \frac{m}{2e^2} \iint \frac{j^2}{N} dS = \frac{m_e}{2e^2} \cdot \frac{4\pi e^2}{\omega_{p0}^2 m_e} \cdot j_0^2 \iint \frac{f(r)^2}{f(r)} dS \quad (3.8)$$

После сокращений и преобразований получаем:

$$W_{\text{зап}} = 2\pi \left(\frac{j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \iint f(r) dS \quad (3.9)$$

В интеграле по области S в цилиндрической системе координат элемент $dS = r dr d\varphi$

$$W_{\text{зап}} = 2\pi \left(\frac{j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_2} r f(r) dr = \left(\frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \int_0^{R_2} r f(r) dr \quad (3.10)$$

$$\int_0^{R_2} r f(r) dr = \int_0^{R_1} r dr + \int_{R_1}^{R_2} r f(r) dr \quad (3.11)$$

$$\int_0^{R_2} r f(r) dr = \frac{R_1^2}{2} + \int_{R_1}^{R_2} r f(r) dr = \frac{R_1^2}{2} + \mathbf{I} \quad (3.12)$$

$$\text{Где } \mathbf{I} = \int_{R_1}^{R_2} r \cos^2 \left(\frac{\pi(r-R_1)}{2(R_2-R_1)} \right) dr = (R_2^2 - R_1^2) / 4$$

$$\begin{aligned} W_{\text{зап}} &= \left(\frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \int_0^{R_2} r f(r) dr = \\ &= \left(\frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{4} \right) = \\ &= \left(\frac{2\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Получаем окончательное уравнение (3.14) для запасенной энергии:

$$W_{\text{зап}} = \left(\frac{\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 (R_1^2 + R_2^2) \quad (3.14)$$

3.2. Энергия излученная системой.

Коэффициент полезного действия

Энергия, преобразованная в излученную, по определению есть циркуляция продольной компоненты (в нашем случае, это компонента, направленная вдоль вектора распространения волны, то есть по координате r) вектора Пойнтинга по замкнутому контуру, охватывающего сечение цилиндра.

Для получения конечного выражения для излученной энергии это выражение мы должны проинтегрировать по всему времени от 0 до ∞ , чтобы получить значение излученной энергии на всем промежутке времени, то есть:

$$\begin{aligned} W_{\text{излученная на единицу длины}} &= W_{\text{изл}} = \int_0^{\infty} \left[\oint S_r dl \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} S_r r d\varphi \right] dt = \\ &\left[\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{\varphi}_0 & \vec{z}_0 \\ E_r & E_\varphi & E_z \\ H_r & H_\varphi & H_z \end{vmatrix}; \quad S_r = (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) \right] \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) r d\varphi \right] dt \quad (3.15) \end{aligned}$$

Используя ранее созданную зависимость компонент E и H от угла φ (1.17), избавимся от соответствующего интеграла и получим окончательное выражение для $W_{\text{изл}}$:

$$W_{\text{изл}} = \frac{cr}{4\pi} \int_0^{\infty} \pi [E_\varphi H_z - E_z H_\varphi] dt = \frac{cr}{4} \int_0^{\infty} (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) dt \quad (3.16)$$

Запишем общее выражение для КПД в таком виде:

$$\eta = \frac{W_{\text{излученная на единицу длины}}}{W_{\text{запасенная на единицу длины}}} = \frac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{зап}}} \quad (3.17)$$

Коэффициент полезного действия считается используя (3.15) и (3.14):

$$\eta = \frac{\frac{cR_0}{4} \int_0^{\infty} (E_{\varphi} H_z - E_z H_{\varphi}) dt}{\left(\frac{\pi j_0}{\omega_{p0}} \right)^2 (R_1^2 + R_2^2)} \quad (3.18)$$

где интеграл в числителе легко находится с помощью численных методов нахождения интегралов заданной функции. Остальные параметры являются константными параметрами задачи.

4. Результаты расчетов

Согласно введению, требуется разработать вычислительный код для решения всех, полученных выше, выражений. Ввиду нецелесообразности демонстрации кода в данной работе, само «тело» программы мы опустим и будем работать уже с конечными результатами действия этого кода.

В ходе расчетов были выявлены и получены пространственно-временные распределения электрического и магнитного полей, токов, а также спектральные характеристики излучаемой волны для каждого отдельного набора параметров. Пример получаемой кодом картины представлен на рисунке 4.

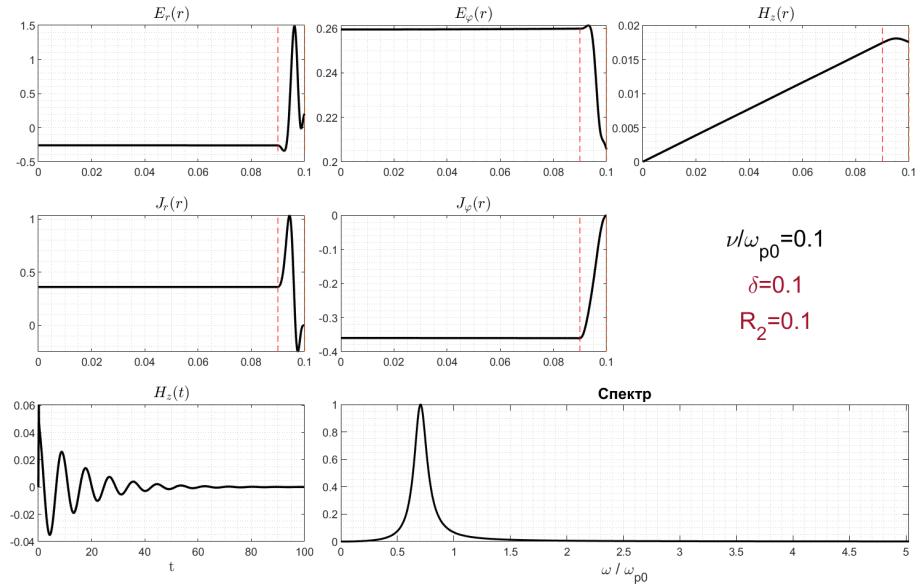


Рис. 4: Пространственно временная эволюция системы, а также спектр излученной волны при $\nu/\omega_{p0} = 0.1$, $\delta = 0.1$, $R_2 = 0.1$

На нём видно, что описанная нами система излучает волну определенной формы во внешнюю среду. При рассмотрении задач с другим набором параметров системы получается волна аналогичного вида, однако разница начинает проявляться при дальнейшей обработке полученных данных.

Рассмотрим рис. 4 более детально. Обратим внимание на распределение компонент полей и токов от координаты $(E_r(r), E_\varphi(r), H_z(r), J_r(r), J_\varphi(r))$. В зоне $0.09 \leq r \leq 0.1$ или же $R_1 \leq r \leq R_2$ отмечается резкое усиление полей и токов вокруг точки $r = (R_1 + R_2) / 2$. Подобный эффект называется *плазменным*

резонансом. В точке $r = (R_1 + R_2)/2$ согласно (1.3) и (1.1) локальная плазменная частота равна резонансной частоте, которую можно увидеть на спектре излучения, изображенном на рис. 4. При подобных параметрах системы резонансная частота равна $\omega_{\text{рез}} = \omega_{p0}/\sqrt{2}$ и называется частотой *геометрического резонанса*.

При расширении зоны неоднородности плазмы (при увеличении δ) зона геометрического резонанса всё также остается в её середине, спектр расширяется, а сам резонанс более широко распределяется по области неоднородности.

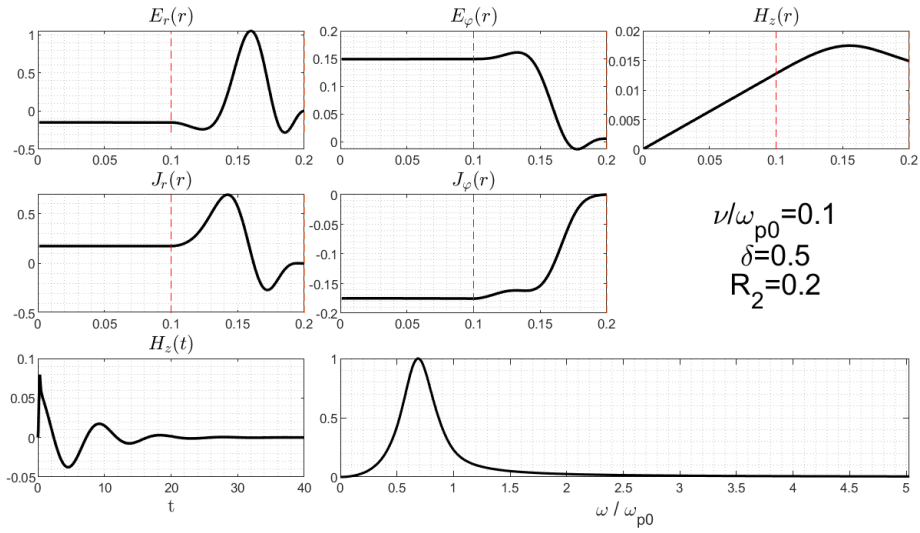


Рис. 5: Пространственно временная эволюция системы, а также спектр излученной волны при $\nu/\omega_{p0} = 0.1$, $\delta = 0.5$, $R_2 = 0.2$

Изображенные на рис. 4 и рис. 5 картины являются для данной работы показательными – с одной стороны – ввиду того, что они полностью согласуются с упомянутыми во введении исследованиями [2; 6], а с другой – при численном решении данной задачи необходимо накладывать существенные условия на точность расчетов: временные и пространственные шаги должны быть критически малы, а количество расчетов с ними должно происходить существенно больше. То есть численные ошибки и неточности вычислительной разностной схемы в случае задачи с малыми параметрами показали бы существенное отклонение и максимальное расхождение с теорией. То есть точность последующих расчетов является приемлемой, так как при численных расчетах критической задачи отклонений не обнаружено.

4.1. Энергетические зависимости. Оптимальный набор параметров

Для дальнейшего изучения системы с прикладной точки зрения имеет смысл поиск так называемого оптимума системы – в нашем случае оптимального набора параметров и условий, при которых обеспечивается наилучшее (самое эффективное) излучение – то есть мы должны стремиться к максимально эффективному преобразованию энергии, запасенной в остаточном токе, в энергию электромагнитного излучения заданной системы.

Стоит также объяснить прикладной смысл и соответствующие выкладки данной работы. В реальных исследуемых моделях (конструкциях) подобный тип излучения достигается с помощью мощного короткого ионизирующего лазерного импульса, когда за несколько фемтосекунд ($\sim 10^{-15}$ сек) система из газа трансформируется в плазму (то есть происходит ионизация), при этом длительность этого импульса настолько мала, что электроны, ионы и нейтральные частицы не успевают существенно изменить свои положения в системе. То есть ионизированная система приобретает начальный импульс, который мы в уравнениях записываем как начальные условия, а уже после этого «удара» система начинает определенным образом эволюционировать и эту эволюцию мы и изучаем в данной работе. Ввиду таких коротких по времени возбуждений системы, а также ввиду того, что размер системы много больше дебаевского радиуса, мы пренебрегаем температурным воздействием системы на саму себя. В данной работе это выражается в том, что уравнение для плотности тока в (1.13) не содержит в себе прямую зависимость от температуры.

Конструкция полученной системы зависит как от типа, характера «заряжающего» импульса, так и от идеализации самой модели и выводов из неё, и прочих возможных допущениях, которые могут приниматься в зависимости от поставленной задачи. С изменением структуры системы, при изменении относительных размеров области спадающей границей по сравнению с участком плато наблюдается изменение колебательных свойств системы [6]. Как уже говорилось выше, когда $\delta, \nu \rightarrow 0$, то есть область неоднородности плазмы очень мала, система имеет только одну резонансную частоту $\omega_{\text{рез}} = \omega_{p0}/\sqrt{2}$, так называе-

мую «частоту геометрического резонанса» [5], которую можно обнаружить и с помощью данного вычислительного кода (рис. 6). С уменьшением частоты соударений спектр должен сужаться в пределе до дельта-функции в точке геометрического резонанса, а с увеличением, соответственно, расширяться.

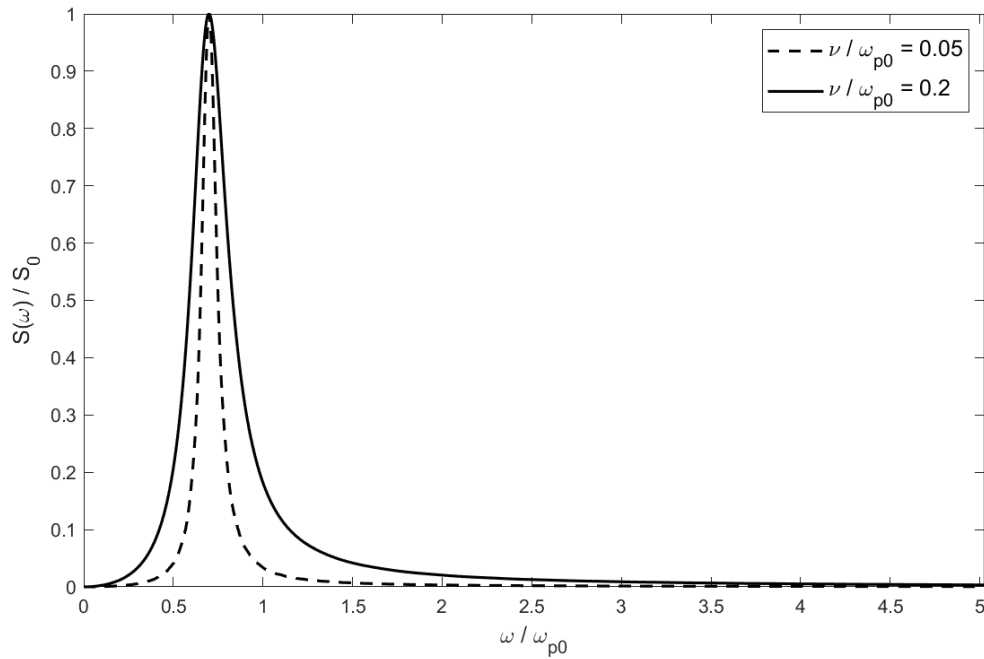


Рис. 6: Наблюдение геометрического резонанса при $\delta = 0.1$, $R_2 = 0.2$, и различных значениях ν / ω_{p0} (0.05 и 0.2).

Когда же область спадания приобретает определенный – отличный от бесконечно малого – размер, так как плазменная частота спадает от своего максимального значения до нуля, в этой области мы можем «дойти» до частоты, совпадающей с $\omega_{p0}/\sqrt{2}$. Ввиду того, что распределение плазменной концентрации, а значит и ω_p , не изменяется от времени, а их распределение от r задано по (1.2), $\omega_{рез} = \omega_{p0}/\sqrt{2}$ ровно посередине области переменной концентрации (то есть, при $r = \frac{R_1+R_2}{2}$). Возникающий в данном случае эффект, когда плазменная частота совпадает с резонансной частотой, называется *плазменный резонанс*.

Возникновение плазменного резонанса порождает соответствующие энергетические потери в исследуемом объекте, причем если некоторые из возможных в данной задаче потерь всё же можно назвать полезными (например, потери радиационные – то есть энергия теряется на излучении системы – в их

нахождении и эффективности основная суть данной работы) которые увеличивают эффективность моделируемого плазменного излучателя, а потери на соударении электронов с тяжелыми частицами можно сравнить с потерями энергии колебательных систем на затухании, то потери на резонансе – естественно, являются потерями негативными – однако, они напрямую зависят от ширины области неоднородной плотности плазмы, то есть от параметра δ . Потери на соударении присутствуют в любой системе, где частота соударений ν ненулевая. Потери на излучении зависят от размеров системы, то есть от параметра R_2 , и скорее связаны с её внутренними свойствами и способностями эффективно отдавать энергию, запасенную в остаточном токе. Подбор оптимальных параметров системы, когда энергия запасена в достаточном количестве, чтобы не поглотиться на резонансе и/или соударении, но при этом излученная энергия составляла бы большую часть от запасенной, является основной задачей данной работы. Чем больше δ , тем больше потери на резонансе преобладают над остальными потерями, что показывают расчеты на рисунке 9.

Полученные расчеты поставленной задачи с множеством параметров, а также последующий расчет коэффициента полезного действия по формуле (3.18) изображены на рисунке 7 (а, б).

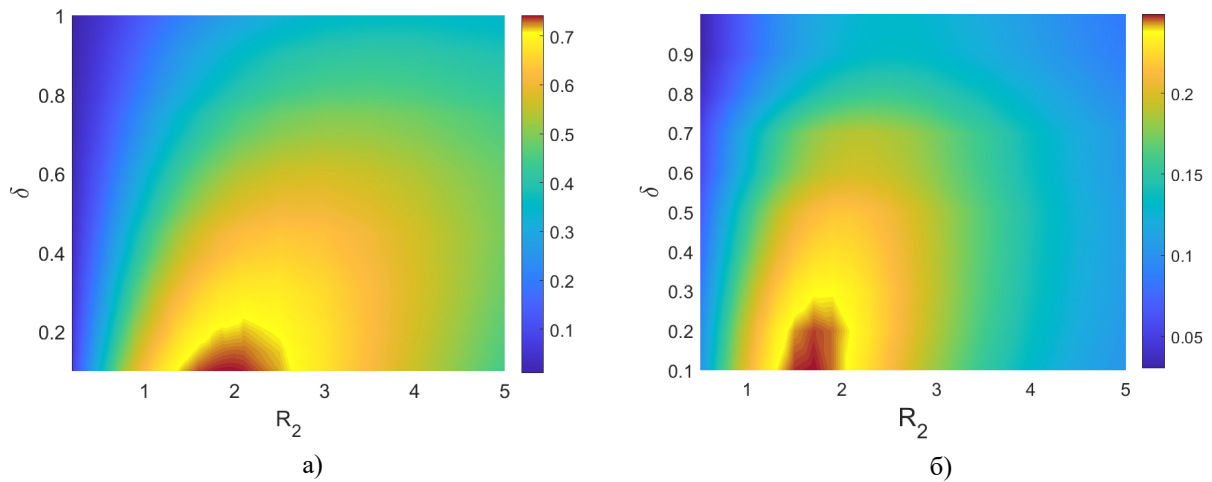


Рис. 7: Эффективность преобразования энергии, запасенной в остаточном токе в электромагнитную энергию излучения в зависимости от радиуса цилиндра R_2 и размера неоднородной области δ при $\nu/\omega_{p0} = 0.1$ (а) и $\nu/\omega_{p0} = 0.7$.

Из полученных данных можно определить зону оптимальных значений R_2 и δ – при которых КПД максимальный, то есть бóльшая часть энергии не переходит в негативные для нас потери, а излучается, то есть радиационные потери больше прочих. Также имеет смысл построить в оптимуме системы графики КПД от значений одного параметра при фиксированном значении другого и наоборот (рисунки 8 и 9).

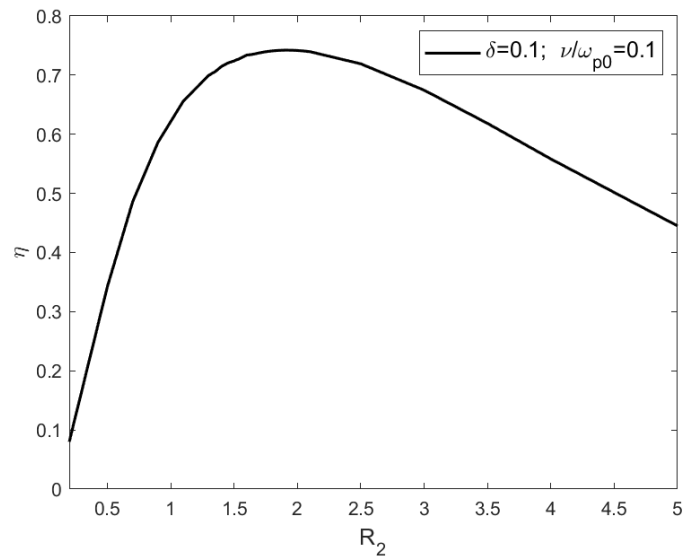


Рис. 8: Эффективность излучения при оптимальном размере неоднородной области $\delta = 0.1$ в зависимости от радиуса цилиндра R_2 ($\nu/\omega_{p0} = 0.1$).

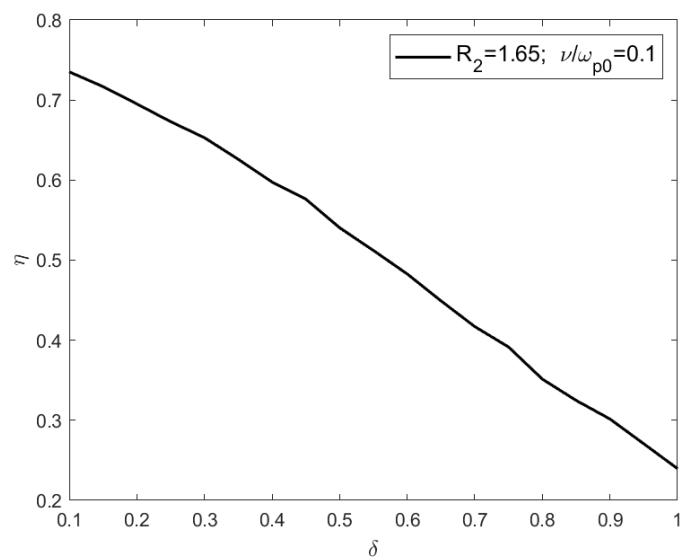


Рис. 9: Эффективность излучения при оптимальном радиусе цилиндра $R_2 = 1.64$ в зависимости от размера неоднородной области δ . ($\nu/\omega_{p0} = 0.1$).

Графики зависимостей КПД от нормированной частоты соударений при двух фиксированных δ , что объясняет две различные ситуации, когда зона спада плазменной плотности либо мала по сравнению с общими размерами цилиндра ($\delta = 0.1$), либо составляет основную часть ($\delta = 1$), расположены на рисунке 10. Полученный рисунок объясняет, что эффективная излучаемая энергия системы падает при увеличении количества соударений в ней, то есть вместо резонансных потерь доминировать начинают уже потери на соударениях.

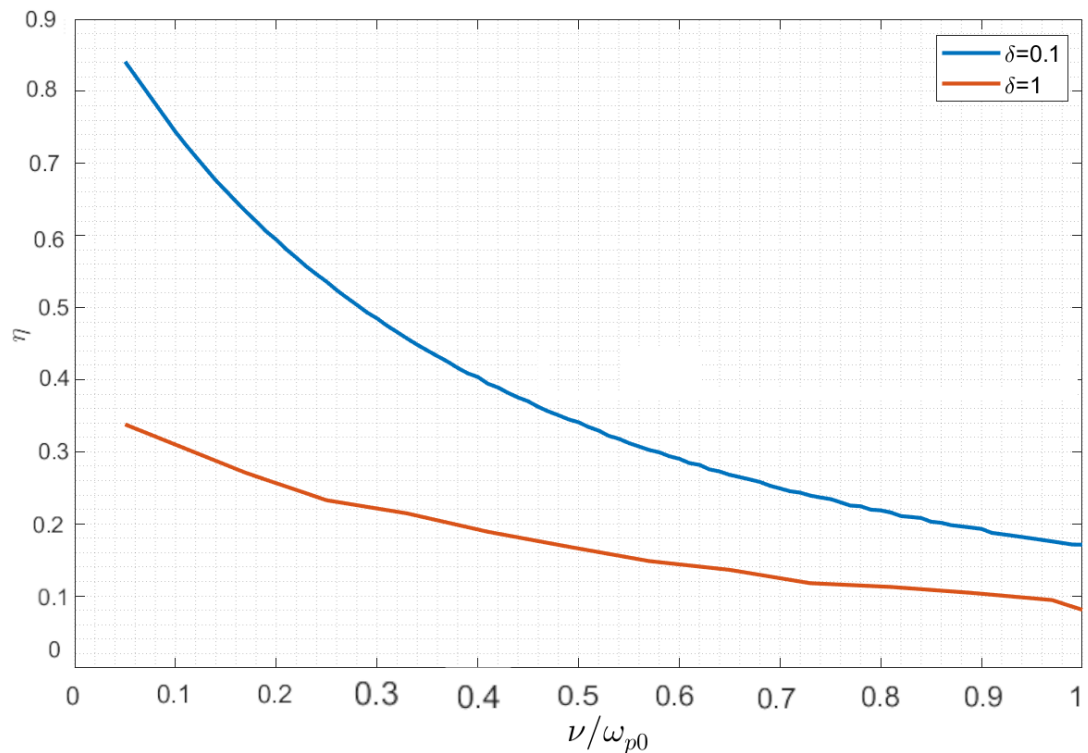


Рис. 10: Эффективность излучения в зависимости от частоты соударений ν/ω_{p0} при разных размерах неоднородной области δ .

Заключение

Разработана вычислительная программа на основе решения системы уравнений Максвелла в цилиндрической геометрии для расчета токов в плазме с быстро меняющейся плотностью и порождаемого ими электромагнитного излучения в плазме и окружающем пространстве.

На основе разработанной программы выполнены расчеты цилиндрического лазерно-плазменного излучателя электромагнитных (терагерцовых) волн и определена эффективность преобразования энергии, запасенной в остаточных токах, в излученную энергию. Показано, что эффективность сильно падает с увеличением степени неоднородности плазмы. Найдены оптимальные значения радиуса плазменного цилиндра, отвечающие наибольшей эффективности преобразования энергии остаточных токов в электромагнитное излучение.

Приложение

В ходе исполнения учебной практики также была проведена работа в преподавательской её части. Педагогическая (преподавательская) практика заключалась в принятии лабораторных работ на кафедре *электродинамики* по теме **«Исследование отражательного клистрона»** у трёх пар студентов 3-го курса по направлению «Специальные радиотехнические системы».

В ходе прохождения преподавательской практики требовалось:

1. Раздать студентам *методические пособия* по работе;
2. Принять *допуск* у каждого студента отдельно;
3. Проконсультировать студентов по вопросам выполнения *практической части* работы;
4. Принять отчеты о проделанной работе.

Допуск к лабораторной работе принимался в виде личной беседы. Основные вопросы, на которые отвечали студенты, следующие:

- Как устроен, из каких основных компонентов (составляющих) состоит отражательный клистрон?
- Каков принцип работы отражательного клистрона? В чем его основная функция?
- Каким образом происходит генерация СВЧ излучения?
- Что такое зоны генерации клистрона? Каков принцип их возникновения?
- Можно ли для возвращения электронного потока в резонатор клистрона использовать не постоянное электрическое, а постоянное магнитное поле?

После сдачи допуска группа(-ы) студентов выполняют экспериментальную практическую часть в соответствии с методическим пособием. При выполнении составляется протокол о проделанной работе, используя данные с которого, составляется итоговый отчет. Сдача отчета подразумевает личную беседу с вопросами, основанными на составленном отчете: проверяется подлинность

измерений, точность и корректность их изображения в виде графиков/диаграмм/и т.д., а также оцениваются знания студентов по уже изученной работе.

Список литературы

1. Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics / W. C. Chew [и др.]. — Boston : Artech House., 2001. — С. 300—330.
2. *Gildenburg V. B., Vvedenskii N. V.* Optical-to-THz wave conversion via excitation of plasma oscillations in the tunneling-ionization process // *Physical Review Letters*. — 2007. — Т. 98, № 24. — С. 1—4. — ISSN 00319007.
3. *Ribeiro L., Novo M.* Computational Modeling of Geoelectrical Soundings using PML-FDTD // *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*. — 2017. — Март. — Т. 16. — С. 120—131.
4. *Yee K. S.* Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. — 1966. — DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
5. *Б. Г. В.* Плазменный резонанс в лаборатории и в верхней атмосфере // *Соровский образовательный журнал*. — 2000. — Т. 6, № 12. — С. 86—92.
6. *Быстров А., Введенский Н., Гильденбург В.* Генерация терагерцового излучения при оптическом пробое газа // *Письма в "журнал экспериментальной и теоретической физики"*. — 2005. — Т. 82, № 11/12. — С. 852—857.
7. *Курант Р., Фридрихс К. О., Леви Г.* О разностных уравнениях математической физики // *Успехи математических наук*. — 1941. — № 8. — С. 125—160.