

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский
государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В.И. Ульянова (Ленина)»
кафедра физики

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 2

«Исследование динамики свободных гармонических
колебаний в поле силы тяжести»

Автор: Стукен В.А.

Группа: 2307

Факультет: ФКТИ

Преподаватель: Харитонский П.В.

Санкт-Петербург, 2022

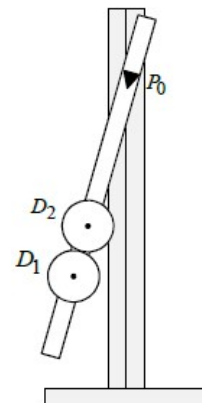
Л^AT_EX

Работа №2 "Исследование динамики свободных гармонических колебаний в поле силы тяжести"

Цель работы: изучение закономерностей колебательного движения тела в однородном поле силы тяжести; исследование процессов превращения энергии в консервативных системах; определение момента инерции физического маятника.

Приборы и принадлежности: физический маятник; секундомер; масштабная линейка, чертежный треугольник.

Конструкция обратного маятника представлена на рис.1. На стержне 1 закреплены два диска - $D1$ и $D2$. Маятник может быть подвешен на кронштейне к легкой призме, трение в которой пренебрежимо мало.



Исследуемые закономерности

Физический маятник - это тело с распределенной массой или система тел, ось вращения которого расположена выше центра масс маятника. Относительно этой оси маятник колеблется с периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx_c}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad (1)$$

где для составного маятника $m = \sum m_i$ - масса маятника, $x_c = \frac{1}{m}\sum m_i x_{ci}$ - положение его центра масс относительно оси вращения, $I = \sum I_i$ - полный момент инерции маятника, $I_i = I_{oi} + m_i x_{ci}^2$ - момент инерции i -го тела, рассчитанный относительно оси вращения по теореме Штейнера, I_{oi} - момент инерции этого тела относительно его центра масс. Длина математического маятника, период которого совпадает с периодом колебаний физического маятника называется приведенной длиной физического маятника. Её можно найти как $l_0 = \frac{I}{mx_c} = \frac{gT_0^2}{4\pi^2}$. Её можно определить экспериментально, если найти новую ось O' , называемую осью качания, относительно которой маятник колеблется с тем же периодом T_0 , что и относительно оси вращения O . Расстояние между осями вращения и качания $OO' = l_0$ и будет приведенной длиной физического маятника.

Полный момент инерции маятника может быть представлен в виде:

$$I = I_0 + m\overline{x_c^2} \quad (2)$$

где $I_0 = \sum I_{0i}$, $\overline{x_c^2} = \frac{1}{m} \sum m_i x_{ci}^2$ - средний квадрат положений центров масс системы тел, составляющих маятник.

Если период колебаний маятника определен экспериментально, то из (1) можно найти момент инерции маятника:

$$I = mgx_c T_0^2 / 4\pi^2. \quad (3)$$

Сохранение энергии гармонических колебаний. Поскольку физический маятник, качающийся под действием силы тяжести, является консервативной системой, можно проанализировать процесс перехода потенциальной энергии маятника в кинетическую и обратно.

Потенциальная энергия при достижении амплитудного значения угла отклонения равна:

$$W_{pm} = mgh_c = mgx_c(1 - \cos \varphi_m) = 2mgx_c \sin^2 \frac{\varphi_m}{2} \approx \frac{1}{2} mgx_c \varphi_m^2 \quad (4)$$

где h_c - высота поднятия центра масс маятника при его максимальном отклонении от положения равновесия, x_c - положение центра масс маятника относительно его точки подвеса, φ_m - максимальный угол отклонения маятника от положения равновесия.

При малых углах отклонения маятника (до 20°) максимальная потенциальная энергия равна:

$$W_{pm} \approx \frac{1}{2} mgx_c \varphi_m^2$$

Максимальная кинетическая энергия физического маятника:

$$W_{km} = \frac{I\omega_m^2}{2} = \frac{mgx_c T_0^2 \omega_m^2}{8\pi^2} \quad (5)$$

где момент инерции маятника выражен по формуле (3) через период его колебаний. Из закона сохранения полной механической энергии:

$$W = W_k + W_p = W_{km} = W_{pm} = const$$

можно найти максимальную угловую скорость маятника при прохождении им положения равновесия $\omega_m = 2\pi\varphi_m/T_0$.

Протокол измерений

| | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | θ |
| t, c | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----------|-----------|-----|--------|-------|-------|-------|-------|
| l | d | $D1 = D2$ | $h1 = h2$ | m | ρ | x_c | x_1 | x_2 | x_3 |
| | | | | | | | | | |

Ответы на вопросы

- **Вопрос №9:** *"Напишите уравнение для кинетической и потенциальной энергии физического маятника. Найдите полную энергию. Какой характер сил, действующих на качающееся тело, консервативный или диссипативный?"*

– Потенциальная энергия физического маятника равна:

$$E_p = mgh_c = mgx_c(1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2}mgx_c\varphi^2$$

– Кинетическая энергия физического маятника равна:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

– Полная механическая энергия физического маятника равна:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}mgx_c\varphi^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

– Характер сил, действующих на тело консервативный, так как на него действует только сила тяжести, являющаяся консервативной силойю.

- **Вопрос №23:** *"Найдите отношение длин двух математических маятников, если отношение периодов их колебаний равно 1,5."*

По формуле периода математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Тогда:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 1,5$$

Отсюда:

$$\frac{l_1}{l_2} = 2,25$$

Ход работы:

Рассчитаем $t = \bar{t} \pm \Delta\bar{t}$:

$$P = 95\%; N = 5$$

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^N = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = \frac{11,99 + 12,22 + 12,24 + 12,31 + 12,12}{5} = 12,176 \text{ s}$$

$$R = t_{\max} - t_{\min} = 12,31 - 11,99 = 0,32 \text{ s}$$

$$\Delta t = \beta_{P,N} \cdot R = 0,51 \cdot 0,32 = 0,1632 \text{ s}$$

$$\Delta\bar{t} = \sqrt{\Delta t^2 + \theta^2} = 0,1635 \text{ s}$$

$$t = 12,18 \pm 0,16 \text{ s}$$

Рассчитаем период колебаний маятника:

$$P = 95\%; n = 10$$

$$\bar{T}_0 = \frac{\bar{t}}{n} = \frac{12,176}{10} = 1,2176 \text{ s}$$

$$a_t = \left. \frac{dT_0}{dt} \right|_t = 0,1$$

$$\Delta\bar{T}_0 = \sqrt{(a_t \cdot \Delta\bar{t})^2} = 0,01635 \text{ s}$$

$$T = 1,218 \pm 0,016 \text{ s}$$

Рассчитаем момент инерции маятника:

$$I = \bar{I} \pm \Delta\bar{I}$$

По формуле (3):

$$\bar{I} = \frac{mgx_c\bar{T}_0^2}{4\pi^2} = \frac{1,8 \cdot 9,8 \cdot 0,35 \cdot 1,2176^2}{4 \cdot 3,14^2} = 0,232 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$a_{T_0} = \left. \frac{dI}{dT_0} \right|_{T_0} = \frac{2mgx_c\bar{T}_0}{4\pi^2} = 0,3812$$

$$\Delta\bar{I} = \sqrt{(a_{T_0} \cdot \Delta\bar{T}_0)^2} = 6,23 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I = (232 \pm 6,23) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Рассчитаем полную механическую энергию маятника

$$E = E_{pm} = \frac{mgx_c\varphi_m^2}{2} = 0,5 \cdot 1,8 \cdot 0,35 \cdot (0,087)^2 = 0,0238 J$$

Рассчитаем приведенную длину маятника:

$$l_0 = \frac{\bar{I}}{mx_c} = \frac{0,232}{1,8 \cdot 0,35} = 0,368 m$$

$$l_0 = \frac{g\bar{T}_0^2}{4\pi^2} = 0,368 m$$

Рассчитаем массы дисков m_1 и m_2 и стержня m_3 :

$$m = \rho V = \rho sh = \rho \frac{\pi D^2}{4} h = \frac{8,7 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (65,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 25,7 \cdot 10^{-3}}{4} = 0,753 kg$$

Т.к $m_1 = m_2, D_1 = D_2 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0,753 kg$

$$m_3 = \rho V = \rho sl = \rho \frac{\pi D^2}{4} l = \frac{8,7 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (10 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,61}{4} = 0,42 kg$$

$$m_{all} = \sum m_i = 0,753 \cdot 2 + 0,42 = 1,925 kg$$

Из таблицы $m_{all} = 1,8 kg$

Рассчитаем положение центра масс маятника x_c :

$$x_c = \frac{1}{m} \sum m_i x_i = \frac{0,753 \cdot 0,365 + 0,753 \cdot 0,435 + 0,42 \cdot 0,245}{1,925} = 0,366 m$$

Рассчитаем по теореме Штейнера момент инерции всех тел а также полный момент инерции маятника:

$$I_0 = \frac{mgR^2}{2} = \frac{mgD^2}{8} = \frac{0,753 \cdot 9,8 \cdot (65,5 \cdot 10^{-3})^2}{8} = 3,957 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

$$I = \frac{m_1 g R^2}{2} + m_1 x_1^2 + \frac{m_2 D^2}{8} + m_2 x_2^2 + \frac{1}{3} m_3 l^2 = 3,957 \cdot 10^{-3} + 0,1 + 3,957 \cdot 10^{-3} + 0,14 + 8,4 \cdot 10^{-3} = 0,20$$

Сравнивая данное значение со значением полученным экспериментально ($I = (232 \pm 6,23) \cdot 10^{-3}$) видим, что значения очень близки.

Вывод:

В ходе лабораторной работы я изучил закономерности колебательного движения тела в однородном поле силы тяжести, исследовал процессы превращения энергии в консервативных системах, вычислил полную механическую энергию системы тел, а также определил момент инерции физического маятника.