Liste der Fragen

Обыкновенные вопросы, ответы на которые нужно знать

(1) Что такое линейная система?
(2) Что такое решение линейной системы?
(3) Как понимать геометрически решение линейной системы?
(4) Сколько решений может иметь линейная система?
(5) Что такое матричное обозначение линейной системы?
(6) Что такое элементарные преобразования?
(7) Что такое расширенная матрица линейной системы?
(8) Что такое матрица коэффициентов линейной системы?
(9) Что значит фраза "матрицы эквиваленты"?
(10) Что такое ведущий элементы строки матрицы?
(11) Что такое ступенчатый вид матрицы?
(12) Что такое приведённый (улучшенный) ступенчатый вид матрицы?
(13) Что такое метод Гаусса для решения линейных систем?
(14) Что такое векторное пространство над $\mathbb{R}$?
(15) Что такое векторное подпространство векторного пространства $\mathbb{V}$?
(16) Что такое линейная комбинация векторов?
(17) Что такое линейная оболочка?
(18) Что такое линейно независимое подмножество в векторном пространстве?
(19) Что такое базис векторного пространства?
(20) Что такое координаты вектора?
(21) Что такое $\mathbb{R}^n$?
(22) Что такое иньекция, сюръекция и биекция?
(23) Что такое изоморфизм векторных пространств?
(24) Что такое линейное отображение векторных пространств?
(25) Что такое матрица линейного отображения? О чём говорят её столбцы?
(26) Как описывается композиция линейных оторбражений на матричном языке?
(27) Что такое обратная матрица?
(28) Опишите линейные оператора в малых размерностях?
(29) Что такое элементарная матрица? Как это связано с элементарными преобразованиями?
(30) Что такое перестановка? Что такое её знак? Как умножаются перестановки и что такое обратная перестановка? Что такое циклическая записсь перестановки?
(31) Что такое бивектор? И как появвляется детерминант матрицы 2×2? И что происходит дальше? Объясните как появляется детерминант матрицы произвольного размера.

Теоремы и прочие интересные результаты, которые нужно знать

(1) Если расширенные матрицы двух линейных систем эквивалентны, то эти системы имеют одно и то же множество решений. Докажите.

(2) Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду, а также к редуцированному ступенчатому виду. Докажите.

(3) Множество всех решений какой-то однородной линейной системы от n переменных есть подпространство в $\mathbb{R}^n$. Докажите.

(4) Линейная оболочка является векторным пространством. Докажите.

(5) В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим следующие n векторов

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1,0,\dots,0),\\
\mathbf{e}_2 &= (0,1,\dots,0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{e}_n &= (0,0,\dots,1).
\end{aligned}$$

Эти векторы образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$ который принято называть *стандартным базисом*. Докажите.

(6) Если $\mathbf{V}$ – векторное пространство размерности n, то оно изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$. Докажите.

(7) Любое линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ достаточно задать на базисных векторах, то есть если знать чему равны $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ то этого достаточно чтобы узнать чему равно $f(\mathbf{v})$ для любого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Докажите и объясните.

(8) Пусть есть три конечномерных векторных пространства $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m$ и два линейных отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

и пусть g записывается матрицей A, а f матрицей B тогда $g\circ f$ записывается матрицей AB. Докажите.

(9) Если квадратная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ обратима, тогда для каждого вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ уравнение $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное решение $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Докажите.

(10) Матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ обратима тогда и только тогда, когда она эквивалентна по строкам единичной матрице E. Докажите.

(11) Чтобы найти обратную матрицу к матрице A (или установить, что её не существует), нужно:
   (a) Составить расширенную матрицу $(A \mid E)$.
   (b) С помощью элементарных преобразований **строк** привести левый блок (A) к единичной матрице E.
   (c) Если это удалось, то правый блок автоматически станет матрицей A^{-1}.
   (d) Если левый блок привести к E невозможно (например, получится нулевая строка), то матрица A необратима.

   Докажите.

(12) Объясните геометрический смысл равенств

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{c}},$$
$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{c}} = 0,$$
$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \wedge (\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}}) = \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{d}},$$
$$(\alpha\vec{\mathbf{a}}) \wedge (\beta\vec{\mathbf{b}}) \wedge (\gamma\vec{\mathbf{c}}) = \alpha\beta\gamma(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}).$$

(13) Объясните геометрический смысл равенства

$$\vec{\mathbf{a}}_1 \wedge \vec{\mathbf{a}}_2 \wedge \vec{\mathbf{a}}_3 = \left(\sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\right)(\vec{\mathbf{e}}_1 \wedge \vec{\mathbf{e}}_2 \wedge \vec{\mathbf{e}}_3)$$

(14) Докажите следующие свойства детерминанта
  (a) Если произвольную строку матрицы умножить на число, то детерминант матрицы умножится на это число.
  (b) Если строку матрицы умножить на число и прибавить к любой строке, то детерминант матрицы не изменится.
  (c) Если в матрице есть две одинаковые строки, то её детерминант равен нулю.
  (d) Если поменять местами две строки матрицы, то определитель меняет знак.

(15) Детерминант произведения двух квадратных матриц равен произведению их детерминантов: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Докажите.