关于实数定义的介绍和讨论*

高等数学 A (一)

2024-2025 学年秋季学期

在 9 月 10 日周二的课上, 我们简单讨论了实数的定义和实数集的性质. 教材《高等数学》[1] 中将实数集理解为有理数集和无理数集的并集, 而无理数指的是那些小数表示为无穷不循环小数的数. 虽然小数表示符合我们日常对于数的认识, 但这并非实数的严格定义. 譬如小数表示存在唯一性的问题, 例如 $1 = 0.\dot{9}$ (无穷多个 9 循环) 是严格成立的, 这就表明一个实数的小数表示可能不是唯一的. 本讲义中, 我们将讨论一下实数严格定义的问题.

实数集有多种基于有理数集的等价定义方式. 某些定义方式在推导实数集的这些性质时更为方便, 而另一些在推导那些性质时更为方便, 它们各有不同的优势, 但都彼此等价. 参考书《数学分析》(第一册) [2] 中介绍了实数的一种严格定义, 被称为实数的戴德金分划 (Dedekind cut) 定义. 它基于对有理数集的分划 (也称为分割), 粗略地说, 它将有理数集合的所有 (满足书中所述条件的) 分划定义为实数集. 这一定义比较容易陈述, 但在构建实数上的四则运算 (尤其是乘除) 时较为麻烦. 对此我们不做展开介绍, 请感兴趣的同学们自行阅读.

本文将要介绍的是实数的另一种定义方式, 它直接针对希望将 $\mathbb{Q}$ 在取极限的意义下 "封闭起来" 的需求, 也更接近我们的日常对于无穷小数的理解——当我们讨论某个无穷小数时, 实际上想表达的 "数" 是这个无穷小数的有限位截断所构成的有理数列最终 "收敛" 到的对象. 以下内容参照陶哲轩撰写的 Analysis I 的第五章 [3], 有兴趣的同学可以直接阅读原文.

⋆ ⋆ ⋆

我们要介绍的定义的主旨思想是, "实数" 应该是那些可以用有理数序列 "逼近" 的对象, 为此我们首先讨论 "收敛" 的有理数序列. 通常我们谈论序列 "逼近" 和 "收敛" 等概念的时候[1], 都是将序列中的各项与预想中的 "极限值" 进行比较, 希望说明随着序列下指标的增加, 它们之间的距离会逐渐趋向于 0. 然而, 我们目前仅有有理数集 $\mathbb{Q}$, 还未定义出实数, 而预想中的 "极限值" 一般为实数, 所以无法衡量它与序列中各项的距离. 为了克服这一问题, 我们需要通过考察一个有理数序列中的各项之间的差来判断它是否具有 "收敛的趋势", 这就引出了有理柯西列 (Cauchy sequence) 的概念[2].

定义 0.1 (有理柯西列)**.** 假设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个有理数序列, 即对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都有 $a_n \in \mathbb{Q}$. 我们称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个有理柯西列 (下简称柯西列), 如果对于任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 都存在 (可能依赖于 ε 的) 正整数 $N_\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $n_1, n_2 \geq N_\varepsilon$, 都满足 $|a_{n_1} - a_{n_2}| \leq \varepsilon$.

注记. 由于目前还没有定义出实数, 这里的 ε 需要取有理值, 绝对值函数也只对有理数有定义, 用来衡量有理数之间的距离. 此外, 以上定义中的 $n_1, n_2 \geq N_\varepsilon$ 和 $|a_{n_1} - a_{n_2}| \leq \varepsilon$ 均可以改成严格不等号, 这不会改变此定义的意义. 另外需提醒的是, n_1, n_2 可以是任意两个不小于 N_ε 的指标, 不需要相邻.

---

*最后更新日期：2024 年 9 月 10 日

[1] 这将是 9 月 17 日周二的课程内容.

[2] 在一些中文教材中，柯西列也被称为基本列.

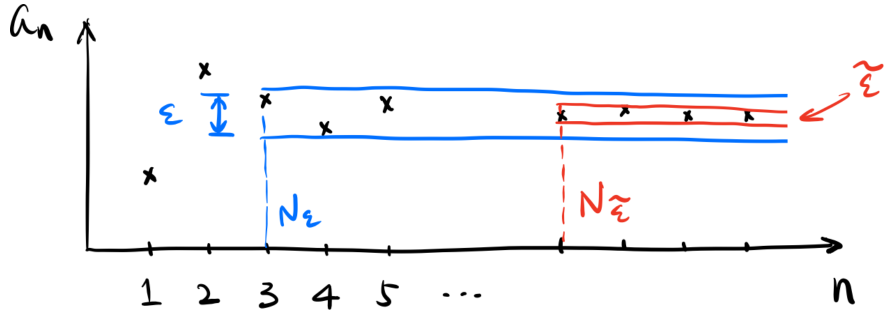

图 1: 一个典型的柯西列的图示, 我们用 $\times$ 标示出 $\{a_n\}$ 中各项的值. 在这个例子中, 如果取定某个 $\varepsilon > 0$, 我们发现只要下标大于等于 $N_\varepsilon = 3$ 即可保证序列尾部的振荡不超过 ε (尾部的所有项均位于高度为 ε 的蓝色条带中). 而如果取一个更小的 $\tilde{\varepsilon} > 0$, 则需要要求下标大于等于一个更大的指标 $N_{\tilde{\varepsilon}}$ 才能保证序列尾部的振荡不超过 $\tilde{\varepsilon}$ (尾部的所有项均位于高度为 $\tilde{\varepsilon}$ 的红色条带中).

用通俗的语言讲, 柯西列这个概念定义了那些直观上 "有收敛趋势" 的序列: 如果 $\{a_n\}$ 是一个柯西列, 那么无论指定多小的 $\varepsilon > 0$, 我们总可以找到一个大数 $N_\varepsilon > 0$, 使得如果仅考虑该序列中下标超过 N_ε 的那些项所构成的尾部, 其上下振荡的幅度不大于 ε. 换句话说, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\{a_n\}$ "最终的" 振荡幅度总会小于 ε. 在图 1 中, 我们展示了一个典型的柯西列, 以及两个不同的 ε 的取值和它们对应的 N_ε.

例 0.1. 令

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n, \quad c_n = (-1)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

则 $\{a_n\}$ 是有界序列, 且它是柯西列. $\{b_n\}$ 是无界序列, 它不是柯西列. $\{c_n\}$ 是有界序列, 但它也不是柯西列.

可以用定义证明:

命题 0.1. 柯西列一定是有界序列.

从直观上我们可以相信, 有理柯西列应该要 "收敛" 到某个有意义的对象 (但不一定是有理数). 反之如果一个有理序列要 "收敛", 那它必然是一个柯西列. 所以我们自然会想, 能否将有理柯西列的形式极限定义为实数, 而把所有形式极限构成的集合定义为实数集呢? 可以, 但需要先回答下面这一个问题. 举个例子, 我们不难判断出 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots$$

和 $\{q_n\}_{n=1}^\infty$

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143,\ \cdots$$

都是有理柯西列, 都应该具有形式上的极限, 那么它们的形式极限应当被视为相同的元素还是不同的元素呢? 换句话说, 它们定义出了同一个实数吗? 我们当然希望答案是肯定的, 毕竟将它们各项平方后得到的有理序列 $\{p_n^2\}$ 和 $\{q_n^2\}$ 分别从下方和上方 (在有理数域内) 趋近于同一个数 2.

为此我们引入等价序列的概念.

定义 0.2 (等价序列)**.** 假设 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是两个有理数序列. 如果对于任意正有理数 $\varepsilon > 0$, 都存在 (可能依赖于 ε 的) 正整数 $N_\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $n \geq N_\varepsilon$, 都满足 $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$, 则称序列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是等价的.

用通俗的语言讲, 两个序列等价是指, 如果比较它们指标相同的项, 那随着指标的增大, 它们最终会越靠越拢. 对于非柯西列的有理序列, 我们也可以讨论等价性.

例 0.2. 令

$$a_n = 1, \quad b_n = 1 - 10^{-n}, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

则序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 等价, $\{c_n\}$ 与 $\{d_n\}$ 等价, 但 $\{a_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 不等价. 这里 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是柯西列, 而 $\{c_n\}$ 与 $\{d_n\}$ 不是.

现在我们可以正式引入实数和实数集的定义了.

定义 0.3 (实数和实数集)**.** 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个有理柯西列, 那么一个实数被定义为是形如 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$ 这样的对象. 我们称实数 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$ 和 $\mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n$ 相等, 当且仅当有理柯西列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价. 所有实数构成的集合被称为实数集, 记作 $\mathbb{R}$.

注记. 这里的 LIM 仅仅是一个记号, 可以被称为 (有理柯西列的) 形式极限. 如果用通俗的语言, 以上定义就是在说, 实数是用有理柯西列逼近出来的那个对象.

下面我们简单讨论一下如何在 $\mathbb{R}$ 上定义四则运算和序关系, 基本的想法是将 $\mathbb{Q}$ 上的四则运算和序关系平推到 $\mathbb{R}$ 上——我们假设有理数域的四则运算和序关系已经被定义清楚了.

定义 0.4 (实数加法)**.** 假设 $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$ 和 $y = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n$ 是两个实数, 我们定义

$$x + y := \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n + b_n.$$

这里 $a_n + b_n$ 中的加法是 $\mathbb{Q}$ 上的加法.

注记. 我们需确认这一实数加法的概念是良好定义的 (well-defined, 简称良定的), 这需要我们验证两件事:

- 给定有理柯西列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 需证明 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是有理柯西列.
- 假设 $x' = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} c_n$ 和 $y' = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} d_n$ 是两个实数. 需要证明, 如果 $x' = x$ 且 $y' = y$, 那么如上定义的加法满足 $x' + y' = x + y$. 具体来说就是, 已知有理柯西列 $\{a_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 等价且 $\{b_n\}$ 与 $\{d_n\}$ 等价, 需证明 $\{a_n + b_n\}$ 与 $\{c_n + d_n\}$ 等价.

前者是对 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 取形式极限的前提. 而需证后者是因为, 由于我们将实数定义为有理柯西列的形式极限, 而以上的加法定义使用了具体的有理柯西列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 然而同一个实数可以是多个不同 (但等价的) 有理柯西列的形式极限, 所以我们需说明不同的逼近方式事实上给出了同一个形式极限. 这两个命题的证明供感兴趣的同学们自行思考, 或查阅陶哲轩的教材的第 5.3 节 [3].

其他三种四则运算可以类似地定义, 也同样需要证明其良定性. 在定义除法的时候须要求分母不为 0, 用来逼近的有理柯西列也需要满足这一点, 所以定义除法时就有关于这一点的额外讨论. 详见陶哲轩的教材的第 5.3 节.

为了定义实数集上的序关系, 本质上只要定义正实数和负实数的概念即可.

定义 0.5 (正实数与负实数)**.** 称 $x \in \mathbb{R}$ 是一个正实数, 如果存在一个有理柯西列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

(i) $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$.

(ii) 存在正有理数 $c > 0$, 使得 $a_n \geq c$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$.

称 $x \in \mathbb{R}$ 是一个负实数, 如果存在一个有理柯西列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

(i) $x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$.

(ii) 存在负有理数 $c < 0$, 使得 $a_n \le c$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)$.

定义 0.6 (实数集上的序关系 $<$)**.** 设 $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. 我们称 $x < y$ 当且仅当 $x - y$ 是负实数.

注记. 可以证明, 这样定义的 $<$ 确实是一个序关系, 即满足教材中所列的有序数域的各个条件 (见 [1] 第 12 页). 我们也将 $x < y$ 写作 $y > x$.

这样我们介绍完了实数的这一个严格定义. 以下是一些相关的讨论.

$\star \qquad \star \qquad \star$

某些教科书会采用更形式化的等价关系和等价类等概念去表述以上 $\mathbb{R}$ 的定义, 这里简要介绍如下.

定义 0.7 (二元关系)**.** 一个集合 S 上的一个二元关系 R 被定义为 $S \times S = \{(a, b) : a, b \in S\}$ 的一个子集. $(a, b) \in R$ 即表明元素 a 与元素 b 具有这个二元关系 R, 也可写作 aRb.

注记. 当 $a \neq b$ 时, (a, b) 和 (b, a) 是 $S \times S$ 中的不同元素, 所以 aRb 和 bRa 的含义不同.

例 0.3. 数集上的 $<$, $>$, $\le$, $\ge$, $=$ 等都是二元关系. 考虑一个集合的所有子集构成的集合, 其上的 $\subseteq$, $\supseteq$, $\subsetneqq$, $\supsetneqq$, $=$ 等都是二元关系.

定义 0.8 (等价关系)**.** 一个集合 S 上的等价关系, 通常记作 $\sim$, 是指 S 上的一个具有如下性质的二元关系:

(i) (自反性) $\forall x \in S$, $x \sim x$.

(ii) (对称性) $\forall x, y \in S$, 如果 $x \sim y$, 那么 $y \sim x$.

(iii) (传递性) $\forall x, y, z \in S$, 如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 那么 $x \sim z$.

如果 $x, y \in S$ 满足 $x \sim y$, 则称 x 与 y 等价.

例 0.4. 数集上的等于关系 $=$ 是一个等价关系. 考虑一个集合的所有子集构成的集合, 其上的等于关系 $=$ 是一个等价关系.

例 0.5. 给定正整数 n. 如果两个整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ 满足 $(b - a)$ 可被 n 整除, 则称 a 和 b 关于模 n 同余, 记作 $a \equiv b \pmod{n}$. 这样定义的同余关系是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系.

定义 0.9 (等价类)**.** 给定一个集合 S 以及其上的一个等价关系 $\sim$. 对任意给定的 $x \in S$, $\{y \in S : y \sim x\}$ 被称为 S 的一个 (在等价关系 $\sim$ 下元素 x 所在的) 等价类, 可记作 $[x]$. S 的两个等价类要么相同, 要么交集为空. S (在等价关系 $\sim$ 下) 的所有等价类构成的集合被记作 $S/\sim$, 可以读作集合 S 商掉等价关系 $\sim$.

等价类 $[x]$ 的想法就是把所有等价于 x 的元素归成一类, 仅取其中的代表元素 $[x]$ 来指代这个类. 而 $S/\sim$ 和 S 的关系则类似于前者删去了 S 中在等价关系 $\sim$ 的意义下“重复”了的元素, 仅保留其中彼此不同的元素.

例 0.6. 给定正整数 n. 上面的例子定义了 $\mathbb{Z}$ 上关于模 n 的同余关系 $\sim$. 在这一关系下, 我们可以将整数集分为 n 个互斥的等价类, 每一个都被称为同余类. 这些等价类构成的集合通常记作 $\mathbb{Z}_n$, 即

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\sim = \big\{[0], [1], \cdots, [n-1]\big\}.$$

我们记 $X = \{$所有有理柯西列$\}$, 记 $\sim$ 为定义 0.2 中的有理柯西列的等价关系 (可以验证这是 X 上的等价关系, 感兴趣的同学请自行证明), 那么定义 0.3 本质上就是在说 $\mathbb{R} = X/\sim$.

⋆ ⋆ ⋆

在这样定义了实数后, 我们可以将柯西列的概念推广到实数集上, 即将定义 0.1 中要求为有理数的地方改为仅要求是实数. 利用实值柯西列, 我们可以给出另一个关于 $\mathbb{R}$ 完备性的刻画.

定理 0.1 ($\mathbb{R}$ 的完备性的另一个刻画)**.** 任意实值柯西列均在 $\mathbb{R}$ 中存在极限.

如果将 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{Q}$, 这一命题显然不成立. 这一刻画可以由实数的定义出发证明. 它也可以和教材中的单调收敛定理、参考书中的戴德金分割定理和确界原理 (见 [2] 第 1.1 节) 互推, 也就是说, 承认其中任何一个成立, 都可以推出其他所有结论.

如果仔细考察这些完备性刻画, 就会发现以上使用柯西列概念的刻画仅仅用到了实数集和其上的距离概念, 而其他几个刻画均需依赖于 $\mathbb{R}$ 上的序关系. 对于一般的集合, 其上定义有一个自然的距离概念 (数学上称为度量) 是较为常见的, 但其上定义有一个自然的序关系则不那么常见——只需要去想想 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上是否有自然的距离概念和序关系就可以理解这一点[3]. 具有适当的距离概念的集合被称为度量空间 (metric space, 也称为距离空间), 这是一个比 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{R}^n$ 广泛得多的概念, 此处不做展开. 对于度量空间而言, 其中的柯西列是否总是收敛就成为它是否完备的定义.

定义 0.10. 设 (X, d) 是一个度量空间. 如果其中的任意柯西列都在 X 中存在极限, 则我们称 (X, d) 是一个完备度量空间.

通俗地来说, 在完备度量空间中, 我们总可以安全地取极限. 而一个不完备的度量空间总是可以通过类似于上述由 $\mathbb{Q}$ 得到 $\mathbb{R}$ 的过程 (即定义 $\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{Q}$ 上柯西列的等价类的集合) 来进行完备化——这也是我们在这里解释 $\mathbb{R}$ 的这个定义的一个动机.

参考文献

[1] 李忠, 周建莹. 高等数学（第二版）上册. 北京大学出版社, 2004.

[2] 伍胜健. 数学分析（第一册）. 北京大学出版社, 2009.

[3] Terence Tao. *Analysis*, volume 185. Springer, 2009. `https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-10-1789-6`

[3] 这里不是说 $\mathbb{R}^n$ 上不可能定义出一个序关系, 只是说强行定义出来的序关系都不自然, 会和 $\mathbb{R}^n$ 上的其他结构不相容.