高等数学A（一）

函数与极限

实数

正文：注意上下确界的表述

正文：绝对值不等式的基本形式及应用

关注绝对值的定义的等价表述

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

进而得到其常见形式（绝对值不等式）：

$$|x| + |y| \geq |x + y|$$

习题：关于$(1+x)^n$的讨论

结论：$(1+x)^n > 1 + x, n > 1, x > -1$

证明：

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} = x(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-1} = \ldots = x((1+x)^{n-1} + \ldots + 1) + 1$$

之后分类讨论即可。

习题：关于有理数、无理数的"稠密"分布

构造一个特殊的有理数（无理数）的逼近方式能够达到即可。

变量与函数

习题：函数是否有界

证明一个函数是否有界：从定义出发。例如证明下面的函数是有界？

$$f(x) = \frac{x^6 + x^4 + x^2}{1 + x^6}$$

先猜后证，注意有界的定义并不要求有确界，直接大胆放缩即可。可能取1，3是比较容易的上下界。

助教老师的方法是，对分子上的三个表达式进行分解，每个应用均值不等式就可以搞定。举例如下：

$$\frac{x^4}{1 + x^6} = \frac{1}{\frac{1}{x^4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}}$$

顺便解决一下均值不等式的问题：

算术–几何平均不等式 对任意 n 个非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

证明 我们同样采用数学归纳法来证明这一不等式．当 $n=1$ 时，上述不等式显然成立．假设我们已经证明了，对任意 $n-1$ 个非负实数，算术–几何平均不等式成立．下面我们来考虑任意 n 个非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的情形．不妨假定 x_n 是这 n 个数中最大的一个，并且令

$$y=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1},$$

则有

$$x_n \geqslant y=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

从而有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n &= \left(y+\frac{x_n-y}{n}\right)^n \\
&= y^n+n y^{n-1} \frac{x_n-y}{n}+\cdots+\left(\frac{x_n-y}{n}\right)^n \\
&\geqslant y^n+n y^{n-1} \frac{x_n-y}{n} \\
&= y^{n-1} x_n \\
&\geqslant x_1 x_2 \cdots x_n,
\end{aligned}$$

序列极限

正文：单调收敛定理

在实数域的完备性讨论中，我们引入了单调收敛定理，即：单调有界数列必手里拿，故可以直接使用。

正文：关于自然对数的底

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$$

主要是上面表达式的另一形式：

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

然后剩下的形式全部向二者靠拢即可。

总结

各个量之间的收敛快慢之间的关系：

$$n^k<a^n<n!<n^k$$

具体的证明均可以通过放缩得到。以第一个等号为例子，注意一遍是多项式，另一边是指数函数，所以要用二项展开，得到n之间的关系，具体可以参考高数书上的例题。后面几个都是多项式比较，都是找到“有限项”放缩。

习题：裂项放缩或等比数列放缩

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

习题：序列极限的夹逼原理

课本习题1.3 10

10. 设序列$\{x_n\}$满足下列条件：

$$|x_{n+1}| \leqslant k|x_n|, \quad n = 1,2,\cdots,$$

其中 k 是小于 1 的正数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

注意可以直接连续放缩直接干到第一项，然后夹逼一下就行，注意极限的四则运算。

淑芬习题二 4（6）

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}$ $(a>0)$; 运用a^n-1的因式分解就直接搞定了

题目不难，注意原题中仅仅说明了a是正数，但是a是可能小于1的。所以注意分类讨论。

递推数列的极限证明

如果直接求解数列的极限是困难的，不妨假设有，先计算出数列极限的要求，然后进行证明数列存在极限，具体方法就是单调收敛原理。注意这一方法虽然简单，但是是容易被忽略的。

习题：$(1+\frac{1}{n})^n$形式的放缩问题

高数第一章总练习题，8

8. 对 $n=1,2,\cdots$令

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

证明：序列$\{a_n\}$单调递增，而序列$\{b_n\}$单调递减，并且 $a_n < \mathrm{e} < b_n$.

注意到由于指数不同难以进行比较，除了逐项展开以外有没有其他的方案？其实可以先按照相同指数展开得到不等式进一步化简。

积分的计算

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x^n}{nx^n}$$

注意加绝对值（三角换元、对数），对数加绝对值不用想，三角一定要判断定义域！