

高数 A

一、

(1) 有理数的有理数次幂是否一定是有理数?

(2) 无理数的无理数次幂是否一定是无理数?

二、

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x^3-1} - \frac{4}{x^4-1})$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2021\sqrt{x+2021} + 2023\sqrt{x+2023} - 2 \cdot 2022\sqrt{x+2022})$

三、

(1) $f'(x) = 1 + e^{-x}$, 求 $f(x)$

(2) $g'(x) + g(x) = 1 + e^{-x}$, 求 $g(x)$

四、

是否存在实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = 1.001$?

五、

(1) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$, 求 $y^{(n)}$

(2) $y = \int_{\cot x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2} dt$, 求 y'

六、

已知 $f(x), x \in [a, b]$

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 证明 $f(x)$ 在其一个小邻域内连续

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 证明 $f(x)$ 在其一个小邻域内连续

七、

$f(x) \in C[a, b], f(x) \in R[a, b], F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 证明:

(1) $F(x) \in C[a, b]$

(2) $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\forall x \in (a, b), F'(x) = f(x)$

八、

$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$, 判断 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 是否存在, 若存在求出其值, 若不存在说明理由

九、

求一个 $\{\xi_n\}$ 使得 (i), (ii) 成立

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi_n - e^n) = 0$; (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(\xi_n) - f(e^n)) \neq 0$; 其中 $f(x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$