高数 期末复习随想

微分中值定理与泰勒公式

值得注意的知识点

- 要求函数在闭区间上连续，开区间上可导，中间选取的参量在开区间上；
- 洛必达法则，感觉除了处理最简单的问题没有什么用；

> “最简单的处理”，大概率指的是直接一步导数就能解决好的问题，大概就是变上限积分之类，可以较快的实现化简。

- 泰勒公式，注意小o记号表示的是小于...量级的数；

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty),\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty),\\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1],\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, x \in (-1, 1).
\end{aligned}
$$

> 感觉比较不熟悉的就是arctan x 的展开，相对用的少，注意arctan x 和ln x都衰减的比较慢。

> 利用“套娃”式的泰勒展开计算高阶导数，在阶数较低时可以很好的简化运算，但是结束较高时不能起到很好的作用。

- 极值问题与函数凹凸性，感觉没有什么内容，就是处理一下一阶导数与二阶导数之间的关系就行。

关于题目与可能的技巧

熟悉的代数观察

- 根式减去根式——==分子有理化==
- 底数指数上同时存在未知数的情形：$(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$直接代换，不用思考别的处理方式
- 看见函数连续乘直接==取对数==，应该期中考试就直接涉及到了这一点
- 反证法：∀x，满足... 假设∃x，由连续函数的性质，常常可以直接找到最大最小（极大极小）值
- ==数学归纳法==，能够由对应的思维，但是书写很重要

有趣的题目和他们的评注

- 关于函数“无界”的问题

8. 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，但无界，证明：$f'(x)$在(a,b)内也无界. 逆命题是否成立？试举例说明.

函数无界，但是开区间上的每一个点都是可以有界定义的，可以借助有界的函数值构建导数的定义；或正难则反，假设有界导出矛盾。

> 12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，证明：
> $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

注意到题目给出的条件本质上是双重极限，如果直接处理两重极限显然比较麻烦，将外面一重极限由定义化开，相对来说更加明确。

- 关于数学归纳法

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 n 个根（一个 k 重根算作 k 个根），且 $f^{(n-1)}(x)$ 存在，证明：$f^{(n-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个根. [注意：若 $f(x)$ 可表示成 $f(x)=(x-x_0)^k g(x)$，且 $g(x_0)\neq 0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的 k 重根].

10. 证明：勒让德(Legendre)多项式
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$
在区间 $(-1,1)$ 内有 n 个根.

对于上面的题目，直接分类讨论根的重数将函数求一阶导数即可转化成(n-1)个根的情形，对于后边的情况直接对求导数的情况做数学归纳即可，改变原来的函数终究是麻烦的。

- 构造函数？正难则反？（∀形式的命题）

> 29. 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且对于每一点 $x\in[a,b]$，$f''(x)$ 与 $f(x)$ 同号，证明：若有两点 $c,d\in[a,b]$，使得 $f(c)=f(d)=0$，则
> $$f(x)\equiv 0,\quad \forall x\in[c,d].$$

> 想法1：反证法，如果存在不等于0的点，则存在区间内的点取到最大最小值，一定为极大极小值，发现于题目条件矛盾；
>
> 想法2：构造函数出现函数于其二阶导数的关系：
>
> $$(f(x)f(x)')'=[f(x)']^2+f(x)f(x)''$$
>
> 利用题干条件也能快速搞定。

另外，还有函数凹凸性的构造：

> 27. 设 $0<a<b$，证明：
> $$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b).$$

> 想法1：注意到a与b的对称性，可以直接利用导数的性质刻画（移项后利用$f(a=0)=0$进行思考）；
>
> 想法2：注意到函数的凹凸性与$f(x)=(1+x)\ln(1+x), f(0)=0$处理。

- 寻找原函数、一阶导数、二阶导数之间的关系：构造函数、泰勒公式。

> 32. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有二阶导数，又知对于一切 $x>0$，有
> $$|f(x)|\leqslant A,\quad |f''(x)|\leqslant B,$$
> 其中 A,B 为常数，证明：$|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}$，$x\in(0,+\infty)$.

显然构造函数时非常困难的一件事情，但是直接使用Taylor公式很直截了当。

例题 1.16：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且有

$$|f(x)| \le M_0, \quad |f''(x)| \le M_2, \quad \forall x \in (-\infty,+\infty), \tag{7}$$

证明 $|f'(x)| \le 2\sqrt{M_1M_2}$。

这两个题目还是比较类似的。（考虑两个直接相减）

- 不得不使用洛必达的题目

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{x}}$$

> 感觉就是不是很好展开，其实先求一次导数化简一下就比较好。

向量代数与空间解析几何

值得注意的知识点

- 向量外积（叉乘）：不满足交换律、结合律
- 平面方程的形式和他们的名字
  - 一般方程:=$Ax + by + Cz + D = 0$ 与平面法向的关系
  - 点法式方程:=$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
- 直线方程和他们的名字
  - 一般方程：两个平面联立
  - 参数方程
  - 标准方程$\triangleq \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$，注意$abc = 0$是合法的表示
- 曲面方程和他们的名字：双曲抛物面≡马鞍面
- 曲线的切线与法平面：法平面≜以切线为法线的平面，那个“曲面”的法向定义的是曲面的切平面

关于题目和他们的技巧

暂时还没有发现，等待补充。

多元函数微分学

值得注意的知识点

- 关于多元函数的种种定义
  - 多元函数的邻域（开球）
  - 给定一个集合判断上面的点是内点：开球在集合内；外点：开球在集合外；边界点：开球一部分在集合内，一部分在集合外。
  - 开集与闭集：每一点都是内点；包含所有的边界点。（不是开集的集合不一定是闭集，这一点在一维情形就不成立）
  - 区域：连通（任意两点都能通过区域内的曲线连起来）的 非空 开集，包含边界的区域是闭区域。
  - 有界：是否有界与是否是闭区域无关。
- 多元函数的极限

    - 常见的不存在的案例是零次齐次函数，但也仍然存在其他情形。（我个人的想法是。看看是否是“正定”的）
- 闭区域上连续函数的性质
- 多元函数的偏导、连续、可微
    - 二阶偏导数可以交换：二阶偏导数连续
    - 函数可微：可以直接从定义判断
        - 函数可微→连续且偏导数存在
        - 偏导数存在且连续→函数可微
- 偏导数的计算
    - 注意到和导数计算时候相同，要讨论有些地方是否是分段定义的，专门用定义求导数。
- 方向导数存在的充分条件：函数在某点可微。

> 证明方向导数存在，需要证明所有方向的方向导数存在，不能直接利用x, y偏导数存在说明。

- 隐函数存在定理
    - 核心要求：偏导数在某点处连续，某方向偏导数不为0
    - 隐函数求导公式：$f(x)'=\frac{F_x'}{F_y'}$

关于题目和他们的技巧

熟悉的观察

- 二次齐次函数构造反例
- 关于反例的构造
    - 函数连续，但是不可偏导 ->直接构造一元函数的例子即可，$f(x,\ y)=|x|+|y|$
    - 各个方向方向导数均存在且相等，但是不连续->

$$f(x,\ y)=\begin{cases}1,\ y=x^2\\0,\ \text{else}\end{cases}$$

    - 函数可微，但是偏导数不一定连续->先想函数可导但是导数不连续的例子$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，然后变成二维的就可以了。注意严谨性：

$$f(x,\ y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\ x\neq 0\text{ or }y\neq 0\\0,\ x=y=0\end{cases}$$

- 闭区间上连续函数的性质：联系一维情形，注意到微分中值定理可以联系函数与他的导数之间的关系
- 偏导数与方向导数之间的关系：$xf_x+yf_y=0$，$yf_x-xf_y=0$

题目

4. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y}, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

讨论当$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)$是否有极限.

这个问题应该比较明显的体现了正定的作用，这一点也可以通过构造的反例发现，就是抓住了分母的减号做文章。

22. 设函数 $z=f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，又设两个方向 l_1 与 l_2 的方向余弦分别为 $\cos\alpha_1,\cos\beta_1$ 与 $\cos\alpha_2,\cos\beta_2$，且 l_1 与 l_2 互相垂直，证明：

(1) $\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$；

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial l_2^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

这一题目确实不难，而且可以从几何上很快说清楚，但是代数推导稍微麻烦。