高等数学 A（一）习题课习题集*

2024-2025 学年秋季学期

习题课基本信息:

- **时间地点:** 第 3-16 周每周周二 10-11 节

  教学班号 1 / 虞家伟 / 三教 308 / 83886002 at qq.com

  教学班号 2 / 陈轶钊 / 二教 314 / 2401110005 at stu.pku.edu.cn

  教学班号 3 / 龚致宾 / 二教 315 / 981260630 at qq.com

- **分班:** 学号尾号是 0、1、2、9 的同学们请去习题课 1 班, 学号尾号是 4、5、6 的同学们请去 2 班, 学号尾号是 3、7、8 的同学们请去 3 班.

本文档将收录本课程在各周习题课中推荐讨论的问题和其他拓展问题, 每周周一中午之前更新. 助教会视时间讲解全部或部分习题. 如时间充裕, 各班助教可能补充其他自选题 (但它们不会在此收录).

发布这些题是为了给有兴趣的同学们一些额外的练习机会, 我们对此不做任何强制要求, 同学们可以按照自己的学习节奏自行安排. 我们鼓励大家对这些题进行讨论, 随时提问.

请注意：它们不是作业，无需提交答案.

1　2024 年 9 月 24 日第 3 周习题课

本次习题课需上交的作业:

- 9 月 10 日作业: 教材《高等数学》习题 1.1 (第 16 页起) 习题 2, 7, 8, 参考书《数学分析》(伍胜健编著, 第一册) 习题一 (第 26 页) 习题 5, 6(3), 7;
- 9 月 12 日作业: 教材《高等数学》习题 1.2 (第 27 页起) 习题 1(5), 4, 6, 11, 14, 参考书《数学分析》(第一册) 习题一 (第 26 页起) 习题 12, 14, 19(1);
- 9 月 19 日作业: 教材《高等数学》习题 1.3 (第 46 页起) 习题 2, 4(2)(6), 5, 6, 7(6), 8(3), 9, 参考书《数学分析》(第一册) 习题二 (第 77 页起) 习题 7, 11.

以下为本阶段推荐思考的问题, 部分可能会在习题课上讨论. 请按照自己的学习程度和时间安排, 自主选做.

习题 1.1. 《高等数学》习题 1.1 第 3 题.

习题 1.2. 《高等数学》习题 1.1 第 6 题.

*最后更新日期：2024 年 10 月 31 日

习题 1.3. 《高等数学》习题 1.2 第 1 题 (3).

习题 1.4. 《高等数学》习题 1.2 第 2 题 (2), (4).

习题 1.5. 《高等数学》习题 1.2 第 9 题.

习题 1.6. 《高等数学》习题 1.2 第 10 题.

习题 1.7. 《高等数学》习题 1.2 第 16 题.

习题 1.8. 《数学分析》(第一册) 习题一第 3 题与第 4 题.

习题 1.9. 《数学分析》(第一册) 习题一第 6 题 (1), (2).

习题 1.10. 《数学分析》(第一册) 习题一第 13 题.

习题 1.11. 《数学分析》(第一册) 习题一第 21 题.

提示. 试将 $f(x)$ 用分段函数表示.

习题 1.12. 《数学分析》(第一册) 习题一第 23 题.

习题 1.13. 《数学分析》(第一册) 习题一第 28 题.

提示. 本题需证 $f(x)$ 不动点的存在性和唯一性, 这两方面可以分开证. 关于存在性, 可以尝试这样切入: 假设 $f(f(x))$ 在 $\mathbb{R}$ 中的唯一的不动点为 p, 想一想 $f(x)$ 假如要有不动点的话应该是哪个点, 然后证明你的想法.

习题 1.14. 《数学分析》(第一册) 习题一第 30 题.

习题 1.15. 基本初等函数 (见教材 1.2 节的列表), 做出它们的图像, 讨论它们的奇偶性和单调性. 对于幂函数和指数函数等含有参数的函数, 尝试取多个有代表性的参数值然后作图.

注记. 许多常用的数学软件都可以帮助我们快速画出函数图像, 例如商业软件 Matlab, Mathematica 等, 可能对学习研究有所助益. 此外, 数学网站 Wolfram Alpha为简单的数学问题提供了一种易上手且无需安装的解决方案, 也是较为常用的工具. 本题中如果手画图有困难, 可以尝试用它来作图. 例如, 点击上面链接后输入 `plot cos(x)` 即可得到 $\cos x$ 的函数图像. 如需指定定义域范围, 则可以输入比如 `plot x*e^x on [-4,2]`, 这样就可以得到 xe^x 在 $[-4,2]$ 上的图像.

我们会在本课程靠后的位置系统地讨论函数作图问题. 此处留这一练习题, 是希望大家对这些较为常见的函数形成直观的印象, 方便后续的学习和解题. 为实现最佳的训练目的, 平时请酌情使用以上数学工具, 勿过度依赖.

习题 1.16. 回答以下问题并说明理由:

(i) 有理数的有理数次幂一定是有理数吗?

(ii) 无理数的无理数次幂一定是无理数吗?

提示. 考察 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 和 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ 来支持你的结论.

习题 1.17. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个序列, $l \in \mathbb{R}$. 证明以下陈述等价:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 即 (依照书本标准定义) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$, s.t. $|a_n - l| < \varepsilon$ 对任意的 $n > N_\varepsilon$ 都成立;

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$, s.t. $|a_n - l| \le \varepsilon$ 对任意的 $n \ge N_\varepsilon$ 都成立;

(c) 对于某个固定的常数 $C > 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$, s.t. $|a_n - l| < C\varepsilon$ 对任意的 $n > N_\varepsilon$ 都成立;

(d) $\forall k > 0$, $\exists N_k > 0$, s.t. $|a_n - l| < \frac{1}{k}$ 对任意的 $n > N_k$ 都成立.

注记. 我们在 9 月 19 日的课上提到过 (b) 和 (c) 与原始定义 (a) 等价. 以上等价定义会给我们使用 ε-N 语言提供更大的灵活度.

提示. 一般来说, 如果要证明命题 P 与命题 Q 等价, 即 $P \Leftrightarrow Q$, 则需证明 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$. 如果需要证明多个命题 $P_1, \cdots, P_n$ 等价, 我们可以依次证明它们两两等价, 但这样就要证 $n(n-1)$ 个 “$\Rightarrow$”, 工作量很大. 由于命题的推出关系是一个所谓的 “偏序关系” (在存在推出关系的命题之间, “ $\Rightarrow$” 类似于实数之间的 $\ge$ 关系. 不过并不是任意两个命题之间都存在一个能推出另一个的关系, 所以被称为 “偏” 序关系), 且等价关系有传递性, 通常我们会采用如下的策略:

(i) 选定一个命题, 然后证明其他的命题都与它等价. 这样需要证明 $2(n-1)$ 个 “$\Rightarrow$”.

(ii) 将这些命题排成一个合适的顺序, 比如就排成 $P_1, \cdots, P_n$, 然后证明 $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$ 等等, 最后证明 $P_n \Rightarrow P_1$. 这样总共需要证明 n 个 “$\Rightarrow$”.

(iii) 也可以采取以上两种策略的混合或者其他变体.

习题 1.18. 《高等数学》习题 1.3 第 4 题 (4).

习题 1.19. 《高等数学》习题 1.3 第 10 题.

习题 1.20. 《数学分析》(第一册) 习题二第 10 题 (4), (6).

习题 1.21. 《数学分析》(第一册) 习题二第 14 题 (1), (2).

提示. 这两个小题都可以通过不等式放缩并使用夹逼定理来解决. 第 (1) 小题中可以考虑如下的不等式

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \quad \cdots$$

习题 1.22. 《数学分析》(第一册) 习题二第 18 题 (2).

提示. 可以将本题中的序列 $\{x_n\}$ 写成形如 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的递推关系式, 并证明它单调有界. 有界性可以用数学归纳法证明. 极限的求法可参考《数学分析》例 2.2.4 和例 2.3.1.

习题 1.23. 《数学分析》(第一册) 习题二第 19 题.

提示. 证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都单调有界. 本题亦可参考《数学分析》例 2.2.4 和例 2.3.1.

习题 1.24. 假设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个单调递增序列, 收敛到 $l \in \mathbb{R}$. 定义

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

证明 $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

注记. 事实上, 如果将条件中的单调性假设去掉, 本题结论也成立. 感兴趣的同学可以自行尝试证明.

习题 1.25. 承认 $\mathbb{R}$ 中的确界原理 (见《数学分析》第 7 页) 成立, 试证明 $\mathbb{R}$ 中单调有界序列必然收敛. 反过来, 如果承认 $\mathbb{R}$ 中单调有界序列必然收敛, 请证明 $\mathbb{R}$ 中的确界原理成立.

提示. 对于前者, 给定一个单调有界序列 (不妨假设是单调增的), 思考一下什么量会是它自然的极限, 并证明之. 对于后者, 当给定一个上有界的集合, 想一想如何能通过构造出一个单调有界序列来找出一个它的上确界.

注记. 本题结论说明了 $\mathbb{R}$ 的两个不同的完备性刻画是等价的. 在严格定义了 $\mathbb{R}$ 的情况下, 这两个完备性刻画本应该都可以由 $\mathbb{R}$ 的定义推出来, 不过现在我们的做做法是承认其中一个完备性刻画成立, 试图证明另一个.

习题 1.26. 证明: 如果序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 那么它是一个柯西列. 这里柯西列的定义如下.

定义. 对于序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 (可能依赖于 ε 的) 正整数 $N_\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $n_1, n_2 \geq N_\varepsilon$, 都满足 $|a_{n_1} - a_{n_2}| \leq \varepsilon$, 那么我们称 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个柯西列 (Cauchy sequence).

注记. 关于柯西列概念的一些解释, 请参见 9 月 10 日发布的《关于实数定义的介绍和讨论》, 尽管那里主要讨论的是有理柯西列, 而这里我们讨论的是实数柯西列, 但直观是相同的.

$\mathbb{R}$ 的完备性保证了柯西列一定收敛 (亦参见《关于实数定义的介绍和讨论》). 所以通过证明此题中的结论, 我们实际上证明了 $\mathbb{R}$ 中的收敛序列等价于柯西列.

2　2024 年 10 月 8 日第 5 周习题课

本次习题课需上交的作业:

- 9 月 24 日作业: 教材《高等数学》习题 1.4 (第 61 页) 习题 1(1)(3), 3(2)(3)(10)(14), 参考书《数学分析》(第一册) 习题三 (第 128 页起) 习题 7(1), 8(2), 9(5), 14;
- 9 月 26 日作业: 教材《高等数学》习题 1.5 (第 69 页) 习题 3, 4, 5(3)(5), 6, 7(1), 8, 参考书《数学分析》(第一册) 习题三 (第 130 页) 习题 21, 25.

以下为本阶段推荐思考的问题, 部分可能会在习题课上讨论. 请按照自己的学习程度和时间安排, 自主选做.

习题 2.1. 回忆 Riemann 函数:

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{如果 } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z}_+,\, (p,q) = 1. \end{cases}$$

证明：对于任意 $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} R(x) = 0$.

注记. 这里对于任意的正整数 q, 约定 $(0,q) = q$, 所以 $R(0) = 1$.

习题 2.2. 《高等数学》习题 1.4 第 3 题 (8), (12), (13), (15), (16).

习题 2.3. 《高等数学》习题 1.5 第 1 题.

习题 2.4. 《高等数学》习题 1.5 第 5 题 (2), (4).

习题 2.5. 《高等数学》习题 1.5 第 7 题 (4).

习题 2.6. 《高等数学》第一章总练习题第 6 题.

习题 2.7. 《高等数学》第一章总练习题第 7 题和第 8 题.

习题 2.8. 《高等数学》第一章总练习题第 9 题.

习题 2.9. 《高等数学》第一章总练习题第 15 题.

习题 2.10. 《高等数学》第一章总练习题第 18 题.

习题 2.11. 《数学分析》(第一册) 习题三第 8 题 (3), (5), (10).

提示. 在做这道题和下一题之前阅读《数学分析》(第一册) 的第 3.4 节可能会有帮助，尤其是例 3.4.6.

习题 2.12. 《数学分析》(第一册) 习题三第 9 题 (4), (6).

习题 2.13. 《数学分析》(第一册) 习题三第 16 题.

习题 2.14. 函数 f 的连续性仅要求 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 这仅仅是一个定性的性质. 我们还可以进一步探究 f 是 "以何种方式连续的", 并给出定量的刻画. 在本题中我们将解释一些相关的想法和概念.

(1) 画出

$$f_1(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{if } x\neq 0\\ 0, & \text{if } x=0,\end{cases}\qquad f_2(x)=|x|,\qquad f_3(x)=x^{\frac{1}{3}}$$

在 $[-1,1]$ 上的大致图形并用 ε-δ 语言证明它们在 $x=0$ 处连续 (实际上它们在 $[-1,1]$ 上连续).

不难发现, 在用 ε-δ 语言证明 $x=0$ 处的连续性时, 对取定的 $\varepsilon>0$, 如果希望满足 $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, 对于以上三个函数, 我们需要提的条件 $|x-0|<\delta$ 中的 δ 的选取可能是各不相同的. (我们这里讨论的是比较精确的 δ 的取法, 即考虑 "δ 小到什么程度就够了" 这样的问题. 实际证明连续性的过程中, 选取比实际需要的值小得多的 δ 是完全没有问题的.) 具体来说, 对于 f_1, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ 似乎就可以满足要求, 对于 f_2, 需要取 $\delta=\varepsilon$, 而对于 f_3 则需要取 $\delta=\varepsilon^3$. 所以, 虽然连续性意味着自变量的 "小变化" 对应于因变量 (即函数值) 的 "小变化", 但对于不同的函数 (和不同的点) 来说, 为了满足 "因变量变化小于 ε" 的条件, 具体所需的自变量变化的小的程度是不同的. 这也就是我们所说的不同函数和不同点处的 "连续的方式" 是不同的. 这从这些函数的图像上也容易看出: f_1 在 $x=0$ 附近比较 "平", 被 $y=\pm x^2$ 的图像从上下夹住, 所以函数值对自变量变化不敏感, f_2 在 $x=0$ 附近以斜率 ± 1 变化, 所以应变量和自变量的变化差不多是同一个数量级, 而 f_3 在 $x=0$ 附近则非常 "陡峭", 自变量很小的变化就可以导致应变量较大的变动.

为了更精确地刻画所谓 "连续的方式", 我们介绍以下一些概念.

在课堂上我们跳过了《高等数学》第 1.5 节第 63 页上的例 2. 那是一个简单但有启发性的例子, 我们将题干抄录如下.

例. 若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内满足下列条件*:*

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|,\quad \forall\, x_1,x_2\in(a,b), \tag{1}$$

其中 L 为正的常数 *(*与 x_1 和 x_2 的选取无关*)*, 则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

该题中的条件 (1) 说明, 在定义域 (a,b) 上的任意处, 如果自变量有了一些变化, 那么应变量的变化至多是自变量变化的 L 倍. 这一条件被称为李普希茨 (Lipschitz) 条件，满足这样的条件的 f 被称为是李普希茨连续 (Lipschitz continuous) 的. 常数 L 被称为函数 f 的李普希茨常数. 此例中开区间的条件不是本质的, 可以自行换为其他类型的区间.

(2) 证明: 以上定义的 f_2 在 $[-1,1]$ 上李普希茨连续, 李普希茨常数可以取 1.

提示. 请注意, 需要对任意的 x_1,x_2 验证不等式, 而不是仅仅对 0 和任意 x 来验证.

(3) 证明: 以上定义的 f_3 在 $[-1,1]$ 上不是李普希茨连续的.

我们当然希望能有另一个概念来描述像 $f_3=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 点处这样类型的连续. 作为对李普希茨连续性概念的推广, 我们可以定义出赫尔德连续性 (Hölder continuity).

定义. 取定 $\alpha \in (0,1)$. 若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内满足下列条件: 对于某个正的常数 C (由 f 和 (a,b) 确定, 与下面 x_1 和 x_2 的选取无关), 使得

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le C|x_1-x_2|^\alpha, \quad \forall\, x_1, x_2 \in (a,b), \tag{2}$$

则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是 α-赫尔德连续 (Hölder continuous) 的, α 被称为 f 的赫尔德连续指标.

同样地, 此定义中的开区间不是本质的, 可以自行更换. 可以证明 α-赫尔德连续的函数自然是连续的. 直观上说, α-赫尔德连续表明函数在任意点附近的变化行为最剧烈也就是类似于 $|x|^\alpha$ 在 $x=0$ 点附近的样子. 由于 $\alpha \in (0,1)$, 这允许函数在局部上可以有更 “陡峭” 的图像. 如果形式上在 (2) 中取 $\alpha=1$, 那么这就变成了李普希茨连续的条件.

以下结论大概是很容易猜到的.

(4) 证明: 以上定义的 f_3 在 $[-1,1]$ 上是 $\frac{1}{3}$-赫尔德连续的. 事实上, 对于任意的 $\alpha \in (0,\frac{1}{3}]$, f_3 在 $[-1,1]$ 上是 α-赫尔德连续的.

提示. 请注意, 需要对任意的 x_1, x_2 验证不等式, 而不能仅仅对 0 和任意 x 来验证.

可能有同学会问, 如果 $\alpha > 1$, 有没有相应的概念. 事实上我们可以证明如下有趣的结论.

(5) 取定 $\alpha > 1$. 若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内满足: 对于某个正的常数 C, (2) 成立, 那么 f 在 (a,b) 上为常数.

提示. 只需证明, 对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $|f(x_1)-f(x_2)|=0$ 即可. 为此, 任取 $N \in \mathbb{Z}_+$ 并在 $[x_1,x_2]$ 上等距地取 $(N+1)$ 个点 $x_1=y_0<y_1<\cdots<y_N=x_2$, 则有

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |f(y_0)-f(y_N)| \le \sum_{k=1}^{N} |f(y_{k-1})-f(y_k)|.$$

利用条件控制右边和式中的每一项从而推得 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的一个上界, 然后令 $N \to +\infty$, 证明上界趋于 0.

习题 2.15. 本题可以等到 10 月 8 日讲授了介值定理的证明后再加以思考.

在 9 月 26 日的课上, 我们陈述了如下有关闭区间 $[a,b]$ 的紧性的结论, 但未给出证明.

定理. 给定闭区间 $[a,b]$. 对其中的任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 即 $x_n \in [a,b]$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$, 都可以从中抽出在 $[a,b]$ 中收敛的子列, 即 $\exists\, x_* \in [a,b]$, $\exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*$.

本题中我们尝试证明这个结论, 所用的想法类似于证明介值定理时采用的二分法:

(1) 记 $[a_1,b_1] := [a,b]$. 将 $[a_1,b_1]$ 二等分得到 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$, 对于至少其中一个子区间, $\{x_n\}$ 中有无穷多项落在了该子区间中 (下标不同的即视为不同的项). 将那个子区间记作 $[a_2,b_2]$.

(2) 对 $[a_2,b_2]$ 做二分操作并且依照上面的方法选出它的一个含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项的子区间, 记作 $[a_3,b_3]$. 依此法重复, 可以得到一系列区间 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^\infty$.

(3) 注意到 $\{a_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的单调增序列, $\{b_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的单调减序列, 且 $0 \le b_n - a_n \le 2^{-(n-1)}(b-a)$. 故可以证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且存在 $x_* \in [a,b]$ 使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_*$. 进一步地, $x_* \in [a_n,b_n]$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 均成立.

(4) 利用 "在每个 $[a_n, b_n]$ 中均含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项" 这一性质, 选出 $\{x_n\}$ 的一个子序列使之收敛到 x_*.

请顺着这个思路写出完整证明.

注记. 在以上证明思路的前两步中, 我们构造了一系列嵌套的闭区间 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$, 而且满足 $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$. 这样的情形实际上对应于一个被称为 "闭区间套" 的概念, 而以上思路的第三步就类似于证明 "闭区间套定理". 感兴趣的同学们请阅读参考书《数学分析》(第一册) 第 2.4.1 节. 闭区间套定理是 $\mathbb{R}$ 的完备性的多个等价刻画之一, 与我们已经见过的 "$\mathbb{R}$ 中单调有界序列必收敛", "$\mathbb{R}$ 中柯西列必收敛", 以及确界原理 (参考书第 1.1.3 节) 均等价.

习题 2.16. 在 9 月 26 日的课上, 我们介绍了 $\mathbb{R}$ 中 (列) 紧集的概念, 如下.

定义. 设 $X \subset \mathbb{R}$. 如果对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 即 $x_n \in X$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)$, 都可以从中抽出在 X 中收敛的子列, 即 $\exists x_* \in X$, $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*$, 那么称 X 是 $\mathbb{R}$ 中的一个(列) 紧集.

本题中我们将介绍一些相关的概念并给出 $\mathbb{R}$ 上紧集的一个等价刻画.

定义. 设 $X \subset \mathbb{R}$. 如果对于 X 中的任意点 x, 都存在 $\delta > 0$ 使得 $(x-\delta, x+\delta) \subset X$, 则称 X 为 $\mathbb{R}$ 中的开集.

不难证明所有开区间都是开集. 直观地说, 开集是那些所有点都被包裹在其内部的集合. 如果 X 是一个开集, 那么任意指定其中的一个点 x, 它都不能被 X 之外的点无限接近.

(1) 证明任意开集的并依然是开集.

    提示. 如果觉得困难, 可以只考虑有限多个开集的并, 尽管此结论对于开集的无穷并 (包括不可数无穷) 也是成立的. 而如果想证有限多开集的情况, 只需证明两个开集的并的情况即可.

定义. 设 $X \subset \mathbb{R}$. 如果 X^c 是开集, 则称 X 为 $\mathbb{R}$ 中的闭集. 这里 X^c 表示 X 的余集 $\mathbb{R} \setminus X$.

请注意, 开集和闭集只是两类具有特殊性质的 $\mathbb{R}$ 的子集, 它们并没有穷尽 $\mathbb{R}$ 中所有集合——存在很多集合既不是开集也不是闭集.

(2) 证明任意闭区间都是闭集.

(3) 设 $X \subset \mathbb{R}$ 为一个闭集. 证明: 如果序列 $\{x_n\} \subset X$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛, 极限为 x_*, 那么 $x_* \in X$.

    提示. 反证. 假设 $x_* \in X^c$, X^c 为开集, 然后用开集定义推出矛盾.

(4) 证明上述结论反过来亦成立, 即如果任意 X 中的收敛序列 $\{x_n\} \subset X$ 的极限都在 X 中, 那么 X 是一个闭集.

    提示. 证明 X^c 是开集, 即对于任意 $\tilde{x} \notin X$, 证明存在 $\delta > 0$ 使得 $X \cap (\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta) = \varnothing$. 对于最后的这个陈述, 可以用反证.

(5) 证明 $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的开集也不是闭集.

(6) 假设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一个紧集, 证明 X 是一个有界闭集.

    提示. 我们在课堂上简单提到了有界性可以用反证: 如果 X 无界，就可以证明必然能取出一列趋向无穷的序列, 而从这个序列中不能抽出收敛子列. 证明闭性可以利用前面的结论.

注记. 事实上可以进一步证明这个结论反过来也成立: 如果 $X \subset \mathbb{R}$ 是一个有界闭集, 那么它必然是一个紧集. 这样我们给出了 $\mathbb{R}$ 上紧集的一个更便于使用的等价刻画, 即 $\mathbb{R}$ 上的紧集概念等价于有界闭集.

3　2024 年 10 月 15 日第 6 周习题课

本次习题课需上交的作业:

- 10 月 8 日作业: 教材《高等数学》习题 1.6 (第 73 页) 习题 2, 4, 习题 2.1 (第 88 页起) 习题 2(2), 7, 10, 13, 参考书《数学分析》(第一册) 习题三 (第 131 页起) 习题 34, 36 (第 36 题中的记号 $C[a,b]$ 表示的是 $[a,b]$ 上的连续函数构成的集合, f 属于它即表示 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数);
- 10 月 10 日作业: 教材《高等数学》习题 2.2 (第 98 页起) 习题 3(7)(9), 4(8)(12)(13)(16), 习题 2.5 (第 112 页起) 习题 1(2), 2, 参考书《数学分析》(第一册) 习题三 (第 132 页起) 习题 43(4), 46(1)(3).

以下为本阶段推荐思考的问题, 部分可能会在习题课上讨论. 请按照自己的学习程度和时间安排, 自主选做.

习题 3.1. 《高等数学》习题 1.6 第 5 题.

习题 3.2. 《数学分析》(第一册) 习题三第 33 题. 并进一步证明本题 (2) 中满足条件的 c 是唯一的.

注记. 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足存在一个常数 $k\in(0,1)$ 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 都有 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$, 那么称 f 为一个 $\mathbb{R}$ 上的压缩映射 (contraction mapping). 起这个名字是因为在 f 的作用下，像点之间的距离总比原象点之间的距离小，相当于 f 把空间压缩了. 这一概念可以推广到一般的度量空间 (即具有距离概念的空间) 上去. 关于压缩映射有一个著名的压缩映像原理, 也称为巴拿赫定理 (Banach theorem), 比如在 $\mathbb{R}$ 上, 它说的是: 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个压缩映射, 那么 f 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的不动点 (fixed-point). 这里的不动点指的是满足 $f(c)=c$ 的点. 所以本题第 (2) 部分就对应着压缩映像原理中的存在性部分, 而上面补充的证明题则对应于唯一性.

像压缩映像原理这样的有关不动点的理论在数学的理论研究和应用中都十分重要. 1994 年, 著名数学家约翰 · 纳什与两位经济学家因对于博弈论的贡献获得诺贝尔经济学奖, 他们的工作中核心的数学工具便是不动点理论.

习题 3.3. 《高等数学》习题 2.1 第 9 题.

习题 3.4. 《高等数学》习题 2.1 第 11 题. 亦可见《数学分析》(第一册) 习题四第 2 题.

注记. 在对数值计算方法的讨论中, 有一类问题是对一个函数求数值微分: 给定一个可以数值求值的函数 $f(x)$ (只能对于任意一个给定的 x 求出 $f(x)$ 的数值, 但可能不知道 f 的解析表达式), 如何求出它的导数的近似值? 一个非常自然的想法来源于导数的定义: 取一个较小的 $\Delta x>0$, 然后计算 $\frac{1}{\Delta x}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))$, 当 f 充分光滑且 Δx 很小时, 有理由相信这会给出 $f'(x_0)$ 的一个比较好的近似. 同理, 也可以用 $\frac{1}{\Delta x}(f(x_0)-f(x_0-\Delta x))$ 来近似 $f'(x_0)$.

而此题给出了另一种求 $f'(x_0)$ 近似值的方式, 即计算 $\frac{1}{2\Delta x}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x))$. 事实上, 在 f 较为光滑且 Δx 充分小的情况下, 这种算法比上面两种近似方法都更为优越, 与真实值 $f'(x_0)$ 的偏差更小. 想要理解这一点, 需要等到讨论完泰勒公式之后.

习题 3.5. 《高等数学》习题 2.2 第 2 题.

习题 3.6. 《高等数学》习题 2.2 第 6 题.

习题 3.7. 《高等数学》习题 2.5 第 3 题.

习题 3.8. 《数学分析》(第一册) 习题四第 4 题.

习题 3.9. 《数学分析》(第一册) 习题四第 6 题和第 7 题.

提示. 这些式子中的项数和 n 有关, 不能直接使用和的极限的性质. 可以从导数的定义来考虑.

习题 3.10. 《数学分析》(第一册) 习题四第 10 题.

习题 3.11. 《数学分析》(第一册) 习题四第 14 题 (4), (8).

习题 3.12. 《数学分析》(第一册) 习题四第 16 题 (3), (9), (10), (12).

习题 3.13. 《数学分析》(第一册) 习题四第 20 题 (4), (5), (6).

4　2024 年 10 月 22 日第 7 周习题课

本次习题课需上交的作业:

- 10 月 15 日作业: 教材《高等数学》习题 2.5 (第 112 页起) 习题 5, 8(3), 10(2), 习题 2.6 (第 118 页) 习题 3, 4, 9, 参考书《数学分析》(第一册) 习题四 (第 175 页起) 习题 33(5), 41(1);
- 10 月 17 日作业: 教材《高等数学》习题 2.7 (第 123 页起) 习题 4, 5, 15, 18, 习题 2.8 (第 131 页起) 习题 1(2), 2, 5(2), 7 (第 7 题请直接从定义出发, 勿使用课上介绍的数分书上的可积性结论), 参考书《数学分析》(第一册) 习题六 (第 270 页) 习题 2(8).

以下为本阶段推荐思考的问题, 部分可能会在习题课上讨论. 请按照自己的学习程度和时间安排, 自主选做.

习题 4.1. 《高等数学》习题 2.6 第 5 题.

习题 4.2. 《高等数学》习题 2.6 第 10 题.

习题 4.3. (i) 设 $P(z)$ 是一个多项式. 证明

$$\lim_{x\to 0^+} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

(ii) 令

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x > 0, \\ 0, & \text{如果 } x \leq 0. \end{cases}$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导.

(iii) 证明 f', f'', f''', ... 在 $\mathbb{R}$ 上均可导, 而且 $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = 0$.

提示. 先证明 f' 在 $\mathbb{R}$ 上可导且 $f'(0) = 0$. 对于一般情形, 可以用数学归纳法.

注记. 可以在 $\mathbb{R}$ 上无穷次求导的函数被称为 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数, 全体光滑函数构成的集合被记为 $C^\infty(\mathbb{R})$ 或者 C^∞.

注记. 本题中定义的函数 f 是分析中一个重要的例子, 它说明了存在一个 C^∞ 函数, 其各阶导数在 $x = 0$ 处均为 0, 但它在 $x = 0$ 的任何邻域中均非零. 这说明, 单点处的各阶导数值这样只和函数局部有关的信息可能无法决定哪怕是函数在一个小邻域中的样貌. 我们在之后讲到泰勒展开时会再次提到并重新理解这个例子.

习题 4.4. 《数学分析》(第一册) 习题四第 22 题.

习题 4.5. 《数学分析》(第一册) 习题四第 29 题.

习题 4.6. 《数学分析》(第一册) 习题四第 31 题 (4).

习题 4.7. 《数学分析》(第一册) 习题四第 35 题.

习题 4.8. 《数学分析》(第一册) 习题四第 36 题 (2), (4), (7).

提示. 可以在求导前想一想如何将这些函数表示成更简单、更便于求高阶导数的形式. 比较方便求高阶导数的函数有 $\sin nx$, $\cos nx$, $\frac{1}{x+a}$, $\ln|x+a|$, a^x, 以及多项式等等.

习题 4.9. 《数学分析》(第一册) 习题四第 37 题.

习题 4.10. 《数学分析》(第一册) 习题四第 41 题 (3).

提示. 数学归纳法.

习题 4.11. 《高等数学》习题 2.7 第 9, 14, 16 题.

习题 4.12. 《数学分析》(第一册) 习题六第 1 题.

习题 4.13. 《数学分析》(第一册) 习题六第 2 题 (4), (7).

习题 4.14. 求解常微分方程

$$f' = f \ln f, \quad f(0) = 2.$$

你可以假设 f 的解存在唯一, 且恒大于 1.

习题 4.15. 《高等数学》第二章总练习题第 10 题.

注记. 此不等式被称为柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式, 它在分析中极为常用.

习题 4.16. 《数学分析》(第二册) 习题七第 2 题.

习题 4.17. 构造定义在 $[0,1]$ 上的一系列黎曼可积函数 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 满足对于任意 $x \in [0,1]$ 和任意的 $n \in \mathbb{Z}_+$ 有 $|f_n(x)| \leq 1$, 而且它们逐点收敛到一个函数 $f(x)$, 但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上黎曼不可积. 这里逐点收敛是指，对于任意 $x \in [0,1]$ 有 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

提示. 回忆黎曼不可积函数的经典例子.

注记. 在分析中, 取极限是一种非常基本的操作. 本题说明, 我们并不能在黎曼可积函数类中安全地取逐点收敛的意义下的函数极限——因为极限函数可能并不在黎曼可积函数类中. 这是黎曼积分理论的一个缺陷, 也是为什么人们需要更复杂的勒贝格积分理论的原因. 不过, 如果仅仅需要计算积分, 那么黎曼积分理论对解决现实中能遇到的绝大多数积分问题已经足够了.

习题 4.18. 本题中的讨论均可在《数学分析》(第二册) 第 7.2 节中找到.

在讨论函数可积性时会引入的一个关键的概念是达布上下和 (Darboux upper/lower sum, 也被称为达布大小和). 其定义如下.

定义. 给定 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 以及 $[a,b]$ 的一个分割 $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 定义

$$M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1, \cdots, n.$$

那么达布上和 (也称为达布大和) 定义为

$$\bar{S}(T) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

而达布下和 (也称为达布小和) 定义为

$$\underline{S}(T) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

(i) 证明: 在给定函数 f 和分割 T 的情况下, 达布上下和给出了所有可能的黎曼和取值的上下确界.

提示. 用确界以及 M_i 和 m_i 的定义即可.

注记. 回忆定积分的定义. 如果要证明函数 f 可积且积分为 I, 就需要验证对任意尺寸充分小的分割 T, 以及任意分割 T 上的选点 ξ_i $(i=1,\cdots,n)$, 这样生成的黎曼和都与 I 十分接近. 上述两个"任意"让此定义显得十分复杂. 而引入达布上下和的概念意在抛掉第二个"任意". 这是因为在给定了分割 T 的情况下, 根据我们本题证明的结论, 所有可能的黎曼和都会落在区间 $[\underline{S}(T),\bar{S}(T)]$ 中, 而且这个范围是最优的. 换句话说, 达布上下和表征了黎曼和的极端情形. 因此如果想证明可积性, 我们只需验证对任意尺寸充分小的分割 T, 它的达布上下和都十分接近 I 即可, 无需再考虑选点 ξ_i 的任意性. 这体现了达布上下和概念的价值. 《高等数学》习题 2.8 的第 7 题与此有关.

下面引入分割的加细 (refinement, 也称为细分) 的概念.

定义. T 和 T' 是 $[a,b]$ 的两个分割 (即它们是 $[a,b]$ 中的有限点集且需包含 a 与 b), 如果满足 $T\subset T'$, 则称 T' 为 T 的一个加细 (或者细分).

(ii) 设分割 T' 为分割 T 的一个加细. 证明：$\bar{S}(T')\le\bar{S}(T)$ 以及 $\underline{S}(T')\ge\underline{S}(T)$, 即在加细的操作下, 上和不增, 下和不减.

提示. T' 可以理解为是在 T 的基础上多加入了几个分点得到的新的分割. 可以画图观察加入分点后上下和的变化. 如果可以先考虑 T' 是在 T 的基础上加入一个新的分点的简单情形, 一般情况可以用归纳法同理证明.

习题 4.19. 利用 10 月 17 日课堂上补充的可积性定理 (见《数学分析》(第二册) 定理 7.2.6) 证明: 如果 $f,g\in R[a,b]$, 那么 $fg\in R[a,b]$.

提示. 利用可积性定理可以证明, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 T_*, 使得 f 和 g 关于这个分割的振幅的加权和同时小于 ε——想一想为什么, 可以利用上一题的结论, 并注意对于任意分割 T, $\bar{S}(T)-\underline{S}(T)$ 就是它的振幅的加权和. 然后尝试控制 fg 关于分割 T 的振幅加权和.

5 2024 年 10 月 29 日第 8 周习题课

本次习题课需上交的作业:

- 10 月 22 日作业: 教材《高等数学》习题 2.9 (第 138 页) 习题 1(2)(4), 5, 6, 习题 2.10 (第 144 页起) 习题 1(6), 3(2), 4(3), 第二章总练习题 (第 146 页) 习题 14, 习题 3.1 (第 129 页) 习题 3, 5, 9, 15;
- 10 月 24 日作业: 教材《高等数学》习题 3.1 (第 155 页) 习题 18, 26, 27, 29, 31, 习题 3.2 (第 162 页) 习题 11, 12, 17, 参考书《数学分析》(第一册) 习题六 (第 272 页) 习题 5(4).

以下为本阶段推荐思考的问题, 部分可能会在习题课上讨论. 请按照自己的学习程度和时间安排, 自主选做.

习题 5.1. 《数学分析》(第二册) 习题七第 3 题 (2).

习题 5.2. 《数学分析》(第二册) 习题七第 7 题.

注记. 本题可以利用课本上介绍的定积分的性质证明, 也可以通过课堂上补充的可积性定理证明.

习题 5.3. 《数学分析》(第二册) 习题七第 17 题.

习题 5.4. 《数学分析》(第二册) 习题七第 20 题.

习题 5.5. 《数学分析》(第二册) 习题七第 21 题.

习题 5.6. 《数学分析》(第二册) 习题七第 24 题.

注记. (b) 部分中的不等式被称为一维中的测不准原理不等式 (uncertainty principle inequality) 或者 Heisenberg-Pauli-Weyl 不等式, 它给出了量子力学中著名的 Heisenberg 测不准原理的定量陈述. 其证明仅需用到上一周习题 4.15 中证明的 Cauchy-Schwarz 不等式.

习题 5.7. 《数学分析》(第二册) 习题七第 28 题.

习题 5.8. 《高等数学》习题 3.1 第 12, 17, 20, 25, 28, 33 题.

习题 5.9. 《高等数学》习题 3.2 第 3, 4, 14, 15 题.

习题 5.10. 《数学分析》(第一册) 习题六第 5 题 (1), (3).

习题 5.11. 《数学分析》(第二册) 习题七第 31 题.

提示. 通过函数 e^{x^2} 的单调性和增长性，猜测一下 ξ_x 大致在什么位置.

习题 5.12. 《数学分析》(第二册) 习题七第 35 题.

习题 5.13. 在本题中, 我们将解释部分分式分解 (partial fraction decomposition) 的形式为什么成立 (详见教材第 3.3 章或 10 月 24 日和 10 月 29 日的课程).

首先从多项式的带余除法说起.

(i) 给定实系数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$, 满足 $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, 请证明存在实系数多项式 $g(x)$ 和 $R(x)$, 使得

$$P(x) = g(x)Q(x) + R(x), \quad \deg R(x) < \deg Q(x). \tag{3}$$

提示. 设

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0,$$

$a_n, b_m \neq 0$, 由假设 $n \geq m$. 本题的主要想法是遵循多项式长除法的操作过程对 P 进行反复降次, 可以对 n 使用归纳法来说清楚 (准确地说是归纳法的一种扩展形式), 具体分为两步:

- 如果 $n = m$, 请选取常函数 $g(x)$ 使得 (3) 成立.

- 假设已经证明所有 $n \le m+k$ 的情形都成立 (k 为自然数), 想要证明 $n = m+k+1$ 的情况也成立. 当 $n = m+k+1$ 时, 请选取单项式 $\tilde{g}(x)$, 使得
$$\tilde{P}(x) := P(x) - \tilde{g}(x)Q(x)$$
为一个次数不高于 $(m+k)$ 的多项式——这样就化归为归纳假设能处理的情形了.

下一步, 我们来证明两个互素的实系数多项式所满足的一个关系.

(ii) 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个实系数多项式. 如果它们没有次数高于零次的公因式 (此时称 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 互素), 则存在实系数多项式 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 使得
$$f_1(x)P(x) + f_2(x)Q(x) = 1. \tag{4}$$
提示. 此命题是对互素整数的一个类似结论的推广, 可以使用辗转相除法来证明. 假设 $\deg P(x) = n, \deg Q(x) = m$. 我们可以以 $n+m$ 为参数进行归纳, 分为以下两步:

- 当 $n+m=0$ 时, 结论 (4) 显然成立.
- 假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$, 以上结论 (4) 在 $n+m \le k$ 时成立, 我们想要证明它在 $n+m = k+1$ 时也成立. 不妨假设 $n \ge m$, 利用上一问的结论知, 存在实系数多项式 $g(x)$ 和 $R(x)$ 使得
$$R(x) = P(x) - g(x)Q(x).$$
请验证 $R(x)$ 与 $Q(x)$ 互素, 并且 $\deg R + \deg Q \le k$. 这样可以利用归纳假设对 $R(x)$ 和 $Q(x)$ 使用 (4) 并进一步完成证明.

注记. 实际上以上命题的逆命题也成立, 证明并不困难, 想一想为什么.

下面我们回到部分分式的问题, 考虑真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的分解, 即我们有 $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

(iii) 假设 $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ 满足 $\deg Q_1(x), \deg Q_2(x) \ge 1$ 且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 互素. 证明存在实系数多项式 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 满足 $\deg P_1(x) < \deg Q_1(x), \deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$, 使得
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$
提示. 利用上一小题的结论知, 存在实系数多项式 $f_1(x), f_2(x)$ 使得
$$f_1(x)Q_1(x) + f_2(x)Q_2(x) = 1.$$
于是,
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)(f_1(x)Q_1(x) + f_2(x)Q_2(x))}{Q_1(x)Q_2(x)} = \frac{P(x)f_2(x)}{Q_1(x)} + \frac{P(x)f_1(x)}{Q_2(x)}.$$
但是这样得到的分解并不一定满足 $\deg Pf_2 < \deg Q_1$ 和 $\deg Pf_1 < \deg Q_2$, 即上式最右的两个有理式可能是假分式. 请证明可以通过进一步的修正使得最终得到两个真分式.

假设 $Q(x)$ 具有如下的实数域内的因式分解 (参见 10 月 24 日的课程)
$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdots (x-a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$
那么利用上一小题的结论, 我们知道真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分拆成
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{f_1(x)}{(x-a_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{f_k(x)}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{g_1(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{g_l(x)}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}},$$
其中 $\deg f_i < n_i$ $(i = 1, \cdots, k)$, 且 $\deg g_j < 2m_j$ $(j = 1, \cdots, l)$. 所以为了证明部分分式分解的形式, 我们只需证明其中的每一项能拆成想要的形式即可. 作为一个典型例子, 我们来证明以下结论.

(iv) 设 $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. 设 $f(x)$ 为一个实系数多项式, $\deg f(x) < n$. 证明存在实数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 使得

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

提示. 这等价于证明存在实数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 使得

$$f(x) = \Big[\cdots\Big[\big[(A_1(x-a) + A_2)(x-a) + A_3\big](x-a) + A_4\Big]\cdots\Big](x-a) + A_n. \tag{5}$$

而这可以通过将 f 关于 $(x-a)$ 反复做带余除法得到. 见第 (i) 小题.

注记. 在使用计算机进行数值计算的时候, 如果需要反复对某个多项式 $h(x)$ 求值, 就可以考虑在编程时使用形如 (5) 的表达式, 即

$$h(x) = \Big[\cdots\Big[\big[(B_n x + B_{n-1})x + B_{n-2}\big]x + B_{n-3}\Big]\cdots\Big]x + B_0.$$

相比于 $h(x)$ 的通常表示 $h(x) = B_n x^n + \cdots + B_0$, 利用上式来求值所需的乘法操作更少, 因而能节省计算时间. 这被称为秦九昭算法或者 Horner 算法.

完全类似地, 可以通过带余除法证明: 如果 $f(x)$ 是一个实系数多项式, $\deg f(x) < 2m$, 那么存在实数 $B_1, \cdots, B_m, C_1, \cdots, C_m$, 使得

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

这样我们就证明了部分分式分解的形式.

6　2024 年 11 月 5 日第 9 周习题课

本次习题课需上交的作业:

- 10 月 29 日作业: 教材《高等数学》习题 3.3 (第 174 页) 习题 2, 4, 7, 11, 17, 29, 32, 习题 3.4 (第 185 页) 习题 9, 16, 参考书《数学分析》(第二册) 习题七 (第 87 页) 习题 29;
- 10 月 31 日作业: 教材《高等数学》习题 3.4 (第 185 页) 习题 21, 24, 25, 习题 3.5 (第 197 页起) 习题 4, 8, 9(1), 10(1), 21, 23.

以下为本阶段推荐思考的问题, 部分可能会在习题课上讨论. 请按照自己的学习程度和时间安排, 自主选做.

习题 6.1. 《高等数学》习题 3.3 第 5, 12, 21, 24, 27, 28 题.

习题 6.2. 《高等数学》习题 3.4 第 3, 6, 11 题.

习题 6.3. 《高等数学》习题 3.4 第 26 题.

习题 6.4. 《高等数学》习题 3.5 第 6, 13, 15, 16, 17, 25 题.

注记. 第 15 题中半径为 a, 高为 $h \in [0, 2a]$ 的球缺, 简单来说指的是将半径为 a 的三维球体用一个水平面截之后的下方的立体部分, 其中水平面和球的最低点之间的高度差为 h. 在一般的定义中, 这个平面也可以是任意方向的, 不过经过一个空间旋转后即可得到我们这里描述的情形.

习题 6.5. 《高等数学》第三章总练习题第 5 题.

习题 6.6. 《高等数学》第三章总练习题第 7 题.

习题 6.7. 《高等数学》第三章总练习题第 11 题.

习题 6.8. 《数学分析》(第二册) 习题七第 26 题 (3), (10), (13).

习题 6.9. 《数学分析》(第二册) 习题七第 32 题. 原题干中要求用积分第一中值定理, 但我们这里要求用仅简单的不等式放缩证明这些结论.

习题 6.10. 《数学分析》(第二册) 习题七第 48 题. 这里的极轴是指极坐标中对应于 $\theta = 0$ 的那条射线.

习题 6.11. (i) 设 $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是严格单调增的连续函数, 且 $\varphi(0) = 0$. 利用定积分的几何意义证明 Young 不等式: 对任意的 $a, b \geq 0$,

$$ab \leq \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^b \varphi^{-1}(y)\,dy,$$

并且等号取到当且仅当 $b = \varphi(a)$.

(ii) 设 $p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明: 对任意 $a, b \geq 0$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

且等号取到当且仅当 $b = a^{p-1}$. 此不等式也被称为 Young 不等式, $p = q = 2$ 的情形就对应于常见的平均值不等式.

(iii) 设 $p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 对任意定义在有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f = f(x)$ 和 $g = g(x)$, 利用上面第二个 Young 不等式证明赫尔德不等式 (Hölder's inequality):

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

提示. 可以先证明如下特殊情形: 如果上面的 f 和 g 还满足

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx = \int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1,$$

那么就有

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx \leq 1.$$

然后说明此特殊情形可以推出原赫尔德不等式.

注记. 在分析中, 赫尔德不等式的用途极为广泛, $p = q = 2$ 的情形就对应于习题 4.15 中证明的柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式. 对于 $p \in [1, +\infty)$, 可以引入如下记号:

$$\|f\|_{L^p([a,b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

这个量被称为函数 f 在 $[a, b]$ 上的 L^p 范数, 它是衡量 f 的 "大小" 的一个量, 在上下文意义明确的情况下可简记为 $\|f\|_{L^p}$ 或者 $\|f\|_p$. 使用这个记号, 赫尔德不等式可以写为

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

这里满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的指标 $p, q \in (1, +\infty)$ 被称为共轭指标.

习题 6.12. 假设一个平面图形 $S \subset \mathbb{R}^2$ 的边界为一条闭曲线 γ, 由参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

给出, 其中 $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$, 即 γ 起始点等于终点. 假设这条曲线为 C^1 正则曲线, 除了端点之外没有自交点. 另外假设当 t 从 α 增加到 β 的过程中, $(x(t), y(t))$ 沿着 γ 移动时, 图形 S 总在移动方向左侧 (换句话说, 就是沿着边界逆时针绕行).

请利用微元法证明 S 的面积 A 有如下的三个表达式:

$$A = \int_a^b x(t)y'(t) \, dt = -\int_a^b x'(t)y(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - x'(t)y(t) \, dt,$$

或者等价地可以写成

$$A = \int_\gamma x \, dy = -\int_\gamma y \, dx = \frac{1}{2} \int_\gamma x \, dy - y \, dx.$$

提示. 考虑 $(x(t), y(t))$ 在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 内的运动, 记它划过的这一小段曲线为 $\gamma_{\Delta t}$. 请考察如下三个量:

- 由 $\gamma_{\Delta t}$, $y = y(t)$, $y = y(t + \Delta t)$ 以及 y 轴围成的曲边梯形的 (有向) 面积;
- 由 $\gamma_{\Delta t}$, $x = x(t)$, $x = x(t + \Delta t)$ 以及 x 轴围成的曲边梯形的 (有向) 面积;
- 由 $\gamma_{\Delta t}$, 连结原点和 $(x(t), y(t))$ 的线段, 以及连结原点和 $(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ 的线段围成的曲边三角形的 (有向) 面积.

用以上三种不同的计算方法应该可以推出题目中的三种面积表示.

注记. 由于微元法是一个半严格的方法, 在思考此题时应侧重于赋予这些积分式合乎直观的解释, 而非追求严格的论证. 关于如何计算参数曲线围成图形的面积, 详细的讲解可参见《数学分析》(第二册) 第 7.6.2 节.