第 4 次作业：针对电动力学讲稿第一章及第二章 2.1-2.3 小节

题目 1：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 7.60

习题 7.60

（a）证明带有磁荷项的麦克斯韦方程组（式(7.43)）在二元变化下保持不变

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E}\cos\alpha + c\boldsymbol{B}\sin\alpha \\ c\boldsymbol{B}' &= c\boldsymbol{B}\cos\alpha - \boldsymbol{E}\sin\alpha \\ cq_e' &= cq_e\cos\alpha + q_m\sin\alpha \\ q_m' &= q_m\cos\alpha - cq_e\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7.68}$$

式中，$c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$；而 α 是在"$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{B}$ 空间"中的一个任意转动角。荷和流密度按照与 q_m 和 q_e 相同的方式变换。[特别地，这意味着如果你知道某个电荷分布产生的电场，你可以直接（利用 $\alpha = 90°$）写下相应分布的磁荷产生的磁场。]

（b）证明力定律（习题 7.35）

$$\boldsymbol{F} = q_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + q_m\left(\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right) \tag{7.69}$$

同样在二元变化下保持不变。

附注：该书所用的磁荷单位（量纲）与讲稿上略有不同。

题目 2：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 8.2（仅 a、b 两问）

习题 8.2 考虑习题 7.31 中的充电电容器。

（a）作为到轴线的距离 s 与时间 t 的函数，求间隙中的电场与磁场。（假设在 $t=0$ 时刻，电容器的电荷量为零）。

（b）求间隙中的能量密度 u_{em} 和坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$，特别要注意 $\boldsymbol{S}$ 的方向。并且验证是否满足式(8.14)。

题目 3：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 8.14

习题 8.14[⊖] 距离无限长螺线管（半径为 R，单位长度绕有 n 匝，电流为 I）轴线 $a>R$ 处有一个点电荷 q。求出电磁场中的动量和角动量（设 q 在 x 轴上，螺线管沿 z 轴。将螺线管视为一个绝缘体，这样就不用考虑螺线管表面的感生电荷）。[答案：$\boldsymbol{p}_{em} = (\mu_0 qnIR^2/2a)\hat{\boldsymbol{y}}$；$\boldsymbol{L}_{em} = 0$]

⊖ 相关问题和进一步讨论见 F. S. Johnson，B. L. Cragin，R. R. Hodges，Am. J. Phys. 62，33(1994)。

附注：

1） 本题并不考虑"隐藏动量"，相应角动量的参考点为螺线管轴线上的坐标原点。

2） 我们知道本例中电磁场的动量为 $\boldsymbol{P}_{em} = q\boldsymbol{A}$，这正是一个可以直接积分验证的例子，所以要完成对电磁动量密度的体积分。

积分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + C$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi\, d\phi}{(A+B\cos\phi)} = \frac{2\pi}{B}\left(1 - \frac{A}{\sqrt{A^2-B^2}}\right); \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(A+B\cos\phi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}.$$

题目 4：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 10.8

习题 10.8 证明推迟势满足洛伦兹规范条件。[提示：首先证明

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{\mathscr{r}}\right)=\frac{1}{\mathscr{r}}(\nabla\cdot\boldsymbol{J})+\frac{1}{\mathscr{r}}(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})-\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{\mathscr{r}}\right),$$

这里∇表示对 $\boldsymbol{r}$ 求导数，∇′表示对 $\boldsymbol{r}'$ 求导数。其次注意 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\ t-\mathscr{r}/c)$ 显含地依赖 $\boldsymbol{r}'$ 以及通过 $\mathscr{r}$ 隐含地依赖 $\boldsymbol{r}'$，而对 $\boldsymbol{r}$ 的依赖仅通过 $\mathscr{r}$，证明

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{J}}\cdot(\nabla\mathscr{r}),\quad \nabla'\cdot\boldsymbol{J}=-\dot{\rho}-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{J}}\cdot(\nabla'\mathscr{r})$$

利用它计算 $\boldsymbol{A}$ 的散度(式(10.19))。]

题目 5：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 2.46

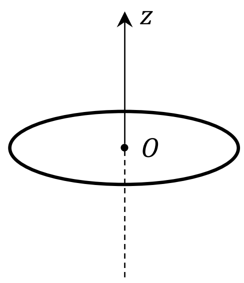
习题 2.46 某种电荷分布产生的电势为

$$V(\boldsymbol{r})=A\frac{\mathrm{e}^{-\lambda r}}{r}$$

式中，A 与 λ 为常数。求出电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、电荷密度 $\rho(r)$，以及总电荷 Q。[答案：$\rho=\varepsilon_0A(4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})-\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda r}/r)$]

题目 6：如图，半径为 R 、电荷线密度为 λ 的均匀带电圆环位于球坐标的赤道面上，取球坐标 $(r,\theta,,\varphi)$，则其电荷密度可记为

$$\rho(r,\theta,\varphi)=a\cdot\delta(r-R)\delta(\cos\theta)\qquad ①$$



(a) 试确定系数 a 。

【如下采用两种方法来确定球坐标分离变量的系数】

(b1) 利用轴线电势公式

$$U(z)=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\qquad ②$$

通过匹配系数的方式（类似于例题 2-6），确定球坐标分离变量法解得的电势分布。

(b2) 利用①式和(a)问中的结果，列出电势 $U(r,\theta)$ 满足的泊松方程，写出界面 $r=R$ 上的边值条件，并通过该边值条件匹配系数，从而确定球坐标分离变量法解得的电势分布。

题目 7：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 3.24

习题 3.24 一个半径为 R 的无限长金属管，置于均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，电场方向与金属管轴线成直角。求出管外的电势以及管表面上的诱导电荷面密度。[利用你在习题 3.23 得到的结果。]