

## 第2章 静电场

### 2.1 静电场的基本规律

#### 2.1.1 静电场基本微分方程

静态电荷分布激发的场为静电场，此时麦克斯韦方程组退化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

若存在介质，则引入极化强度场  $\mathbf{P}$  及电位移  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ，相应麦克斯韦方程组形式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

其中  $\rho_f$  为自由电荷密度。本章主要考虑线性、各向同性的介质，即

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.1.3)$$

其中无量纲常量  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  被称为相对介电常量，而  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  被称为介质的介电常量。

引入标势  $\phi$ ，则  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ ，此时标势  $\phi$  被称为静电势，它满足泊松方程<sup>1</sup>

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_f(\mathbf{r})}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (2.1.4)$$

是为静电场基本微分方程。

对于无电荷区域，静电势满足 Laplace 方程

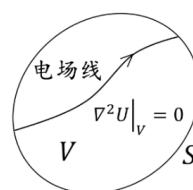
$$\nabla^2 \phi = 0$$

而拉普拉斯方程的解  $U = U(\mathbf{r})$  通常被称为三维空间的调和函数。

调和函数（看作为电势）具有如下重要性质：

**无电荷区域中的电势没有局域的极大或极小值，其极值仅可能出现在边界上。**

对于三维情形，我们可以依照右图的方式来论证调和函数的如上性质。图中无电荷区域  $V$  的边界为  $S$ ，设想区域内有电场，则场线不会在该区域内中断，所以电势从边界上一点开始单调变化，直至边界上另一点为止，而不会在区域内取极值，极值仅可能出现在边界上。若区域内无电场，则整个区域为等势体，也没有局域的极值点。因此，有两个明显的推论：



推论一 不能单纯靠静电力在无电荷区域构造稳定平衡位置，这一点也被称为恩绍（Earnshaw）定理。

推论二 若无电荷区域的边界面为等势面，则区域为与边界电势相同的等势体。

#### 2.1.2 场强及电势叠加定理

方程组(2.1.1)是线性的，导致静电场强满足叠加定理：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{R}}{R^3} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.1.5)$$

其中  $\mathbf{r}$  为场点位置矢量， $\mathbf{r}'$  为源点位置矢量， $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  为源点指向场点的相对位置矢量。

若源点荷为点电荷系  $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ，则

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^n q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

相应

<sup>1</sup> 对于非均匀介质， $\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{r})$ ，相应方程应为  $\epsilon_0 \epsilon_r \nabla^2 \phi + \epsilon_0 \nabla \epsilon_r \cdot \nabla \phi = -\rho_f$ 。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

☞ 例题 2-1: 电偶极子场强

如图, 电偶极子的偶极矩为  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ , 求远场场强 ( $r \gg l$ )

解答:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}/2|^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2)}{|\mathbf{r} + \mathbf{l}/2|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\mathbf{l} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \dots$$

其中

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\vec{\mathbf{l}} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3}$$

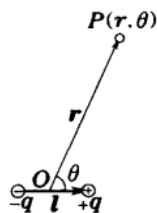
因此

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \quad (2.1.6)$$

取偶极矩方向为极轴 (北极) 方向, 建立球坐标, 则场强也可表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.1.7)$$

(2.1.6)、(2.1.7)中取了“=”号表示这里选取了“理想偶极子模型”。



☞ 例题 2-2: 场强在球形区域的 (体) 平均

考虑半径为  $R$  的球形区域, 以球心  $O$  为参考点, 引入位置矢量  $\mathbf{r}$ , 如图所示。

- 1) 在  $\mathbf{r}$  处放置电量为  $q$  的点电荷, 分  $r > R$  和  $r < R$  两种情况, 分别求该点电荷激发场强的球体平均值

$$\overline{\mathbf{E}_q} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} \iiint_{\text{球} R} \mathbf{E}_q dV$$

- 2) 球内设置电荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  ( $r < R$ ), 求该电荷分布激发场强的球体平均值  $\overline{\mathbf{E}}$ , 表达式中可以引入参量 (偶极矩)

$$\mathbf{p} = \iiint_{\text{球} R} \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}dV$$

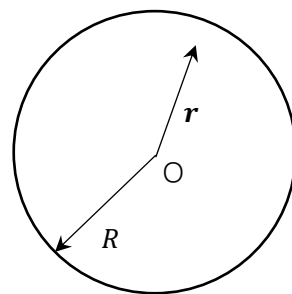
解答:

- 1) 在球体内设置均匀试探电荷  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ , 则其激发场强

$$\mathbf{E}_Q = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{r} & r < R \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$

由牛 III

$$-Q\overline{\mathbf{E}_q} = \begin{cases} \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{r} & r < R \\ \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$



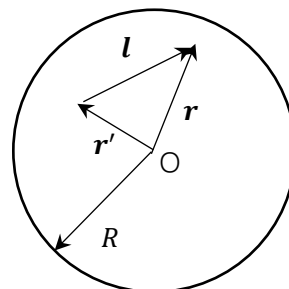
$$\therefore \overline{\mathbf{E}_q} = \begin{cases} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} & r < R \\ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$

2) 如图, 取  $\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , 由 1) 知, 球体平均

$$\overline{\left(\frac{\mathbf{l}}{l^3}\right)} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{r}'}{R^3} & r' < R \\ -\frac{\mathbf{r}'}{r'^3} & r' > R \end{cases} \quad (2.1.8)$$

因此,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} \iiint_{\text{球} R} \mathbf{E} dV \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} \iiint_{\text{球} R} d^3\mathbf{r} \iiint_{\text{球} R} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{l}}{4\pi\epsilon_0 l^3} \\ &= \iiint_{\text{球} R} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \overline{\left(\frac{\mathbf{l}}{l^3}\right)} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$



➤ 讨论: 考虑到(2.1.9)式, 为了给出正确的场强平均值, 我们把偶极子激发的场强改写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] - \frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (2.1.10)$$

思考: 试证明 (2.1.10) 的场强平均满足(2.1.9)式。

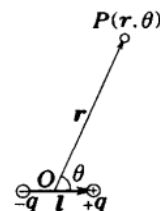
如果选取无穷远处为电势零点, 则有电势叠加定理

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2.1.11)$$

☞ 例题 2-3 电偶极子 (偶极矩  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ ) 电势分布。

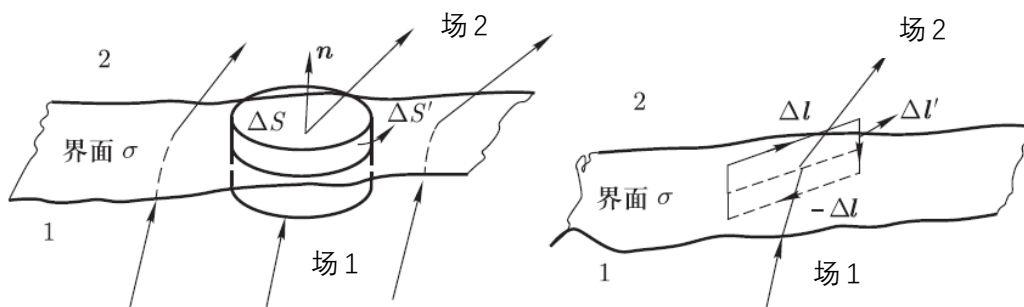
解答: 如图, 对于理想偶极子

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}\right|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}\right|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\mathbf{l} \cdot \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$



对(2.1.12)求负梯度, 便可得理想偶极子激发的场强公式。

### 2.1.3 静电场边值关系



跨越 1、2 介质分界面时, 电场切向分量依然连续, 即

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2.1.13)$$

若 1 和 2 均为绝缘介质，则界面上一般仅会有极化电荷面分布，而不存在自由电荷面分布。此情形跨越界面时电位移法向连续，即

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad (2.1.14)$$

若界面上既有极化电荷  $\sigma_b$  分布，又有自由电荷  $\sigma_f$  分布，则有如下法向边值关系：

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma_f \\ E_{2n} - E_{1n} &= (\sigma_f + \sigma_b)/\varepsilon_0 \end{aligned}$$

若介质分界面上  $\sigma_f = 0$ ，则电势的边值关系为

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \varepsilon_{r1} \partial_n \phi_1 = \varepsilon_{r2} \partial_n \phi_2 \quad (2.1.15)$$

其中  $\varepsilon_{r1,2}$  分别为 1, 2 介质的相对介电常量。

#### 2.1.4 静电场能量

线性介质中的静电场能量密度

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \quad (2.1.16)$$

相应，静电场能量为

$$W_e = \iiint \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (2.1.17)$$

代入  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ， $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ，对(2.1.17)分部积分得

$$W_e = - \iiint \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \nabla\phi dV = -\frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{2} \iiint \rho_f \phi dV$$

如果选取无穷远点为电势零点，则

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \rho_f \phi dV \quad (2.1.18)$$

➤ 导体系的静电能：（选取无穷远点为电势零点）

若自由电荷均由静电平衡的  $N$  个导体电极来提供，其中第  $i$  个导体电极电量为  $Q_i$ 、电势为  $\phi_i$ ，则体系静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \phi_i \quad (2.1.19)$$

根据电势叠加原理及唯一性定理，可以确定  $\phi_i$  对各个导体电极的电量是线性依赖的，即有

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j$$

其中  $P_{ij}$  被称为电势系数，如此可以反解电量为

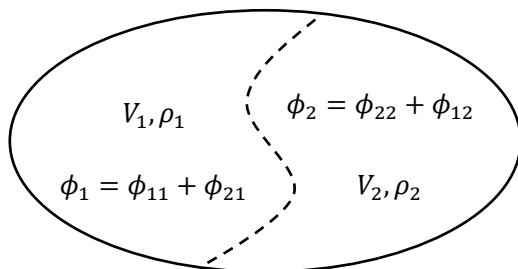
$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_j \quad (2.1.20)$$

其中  $C_{ij} = P_{ij}^{-1}$  被称为电容系数。利用电容系数，导体系的静电能可以表示为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \phi_i \phi_j \quad (2.1.21)$$

➤ 自能和互能划分的相对性

如图，将电荷分布的区域  $V$  形式上划分为两个区域，即  $V = V_1 + V_2$ ，其中  $V_{1,2}$  中的电荷分布分别为  $\rho_{1,2}$ ，即总的电荷分布  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ 。选无穷远点为电势零点，将  $V_1$  区域的电势看作为  $\rho_1$  激发的  $\phi_{11}$  和  $\rho_2$  激发的  $\phi_{21}$  的叠加， $V_2$  区域的电势看作为  $\rho_1$  激发的  $\phi_{12}$  和  $\rho_2$  激发的  $\phi_{22}$  的叠加，则整个带电系统的静电能（自能）



$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \iiint \rho \phi dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint \rho_1 \phi_{11} dV + \frac{1}{2} \iiint \rho_1 \phi_{21} dV + \frac{1}{2} \iiint \rho_2 \phi_{12} dV + \frac{1}{2} \iiint \rho_2 \phi_{22} dV \\ &= W_{e1} + W_{e2} + W_{\text{互}} \end{aligned}$$

其中  $W_{e1,2}$  分别为  $\rho_{1,2}$  分布单独存在时系统的静电能，自然可以分别称为 1、2 系统各自的自能，而利用格林互易定理的结论，

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \iiint \rho_1 \phi_{21} dV + \frac{1}{2} \iiint \rho_2 \phi_{12} dV = \iiint \rho_1 \phi_{21} dV = \iiint \rho_2 \phi_{12} dV$$

为 1、2 之间的互能，也可以看作为 1 在 2（或 2 在 1）外场中的外场能。这告诉我们如果形式上将一个带电体系看作是两部分的电荷分布的叠加，则体系的自能等于两部分各自自能和它们之间互能的叠加。

思考：试证明格林互易定理（选无穷远点为电势零点）

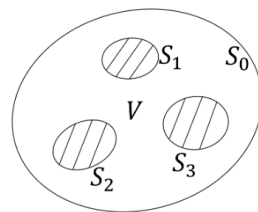
$$\iiint \rho_1 \phi_{21} dV = \iiint \rho_2 \phi_{12} dV$$

## 2.2 静电场唯一性定理

### 2.2.1 无介质情形

静电场泊松方程的唯一性定理如下：如图，考虑由边界  $S = \sum_i S_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ )<sup>2</sup> 所围成的解域  $V$ ，给定  $V$  内的电荷分布  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ ，即建立起解域内的泊松方程

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$



则唯一电场解对应的典型唯一性边界条件有如下两类：

- (1) 第一类 (Dirichlet 边界条件)：给定边界面上的电势分布  $\phi|_S = \varphi(\mathbf{r}|_S)$ ；
- (2) 第二类 (Neumann 边界条件)：给定边界面上的电势法向偏导数分布  $\partial_n \phi|_S = \psi(\mathbf{r}|_S)$ ，且满足<sup>3</sup>

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\oint_S \psi(\mathbf{r}|_S) da = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dV$$

在证明静电唯一性定理之前，我们先看一下它对于一维拉普拉斯方程的表现。一维拉普拉斯方程

<sup>2</sup> 可以设想  $S_0$  为无穷大的球面或是导体空腔内表面，而  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 为导体电极的表面，但这样的假设对此处的唯一性定理的证明并不是必要的。

<sup>3</sup> 下式面元法向约定为指向解域外部。可以设想有无穷小的圆柱形孔洞连接于原本不连通的曲面，而这些孔洞贡献的面积分和体积分是可以忽略不计的。

$$\phi''(x) = 0$$

的通解为线性函数

$$\phi = Ax + B$$

其中  $A$ 、 $B$  为待定常量，而电场强度  $E = -\phi'(x) = -A$ 。取解域  $V = \{x|x_1 < x < x_2\}$ ，则第一类边界条件对应于给定

$$\phi|_{x_1} = \phi_1, \quad \phi|_{x_2} = \phi_2$$

此时有唯一电场解

$$E = -A = \frac{\phi_2 - \phi_1}{x_1 - x_2}$$

而且这时也有唯一的电势解<sup>4</sup>，因为这时  $B$  也可以被确定。如果取第二类边界条件，可给定

$$\partial_n \phi|_{x_2} = \phi'(x)|_{x=x_2} = k$$

则有唯一电场解

$$E = -k$$

需要注意的是， $\partial_n \phi|_{x_1}$  可由区域内无电荷来确定，而不需单独给定，即

$$\partial_n \phi|_{x_1} = -\partial_n \phi|_{x_2} = -k$$

如下，我们考虑三维情形静电场唯一性定理的证明。为此，我们设解域内有两组解  $\phi_1(\mathbf{r})$  和  $\phi_2(\mathbf{r})$ ，均满足方程及边界条件  $\phi|_S = \varphi(\mathbf{r}|_S)$  或  $\partial_n \phi|_S = \psi(\mathbf{r}|_S)$ ，其对应的电场分别为  $\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1$  和  $\mathbf{E}_2 = -\nabla \phi_2$ 。引入差值分布  $\phi_0(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})$ ，其对应的场强为

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla \phi_0 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$$

则  $\phi_0(\mathbf{r})$  满足：

$$V \text{ 内: } \nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (2.2.1)$$

$$S \text{ 上: } \phi_0|_S = 0 \text{ 或 } \partial_n \phi_0|_S = 0 \quad (2.2.2)$$

现在我们只需证明解域内  $\mathbf{E}_0 = 0$ ，便可得到电场解的唯一性。为此我们构造积分

$$\oint_S \phi_0 \nabla \phi_0 \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \phi_0 \partial_n \phi_0 \cdot dS = 0$$

其中第二个等式利用了(2.2.2)式。另一方面

$$\oint_S \phi_0 \nabla \phi_0 \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot (\phi_0 \nabla \phi_0) dV = \iiint_V (\nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_0 + \nabla^2 \phi_0) dV = \iiint_V (\nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_0) dV$$

最后一个等式利用了(2.2.1)式。因此有

$$\iiint_V \mathbf{E}_0^2 dV = 0$$

因为  $\mathbf{E}_0^2 \geq 0$ ，故上式表明解域内  $\mathbf{E}_0$  处处为零，故两类边界条件均可得到唯一电场解。

用类似的方法，可证明某些边界面上给定电势、其余边界面上给定电势的法向偏导数，也可以得到静电场的唯一解，这一类唯一性边界条件被称为混合类边界条件。

## 2.2.2 存在导体的情形

考虑导体电极体系的静电平衡时，我们可以设想上小节图中  $S_0$  为无穷大球面或导体空腔内表面，而  $S_i (i = 1, 2, \dots)$  为导体电极外表面，这时给定第一类边界条件  $\phi|_{S_i} =$

$\phi_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ <sup>5</sup>，电场（及电势）自然有唯一解。

导体体系静电平衡时的第一类边界条件可以由不同电源连接导体电极（但不构成通路）

<sup>4</sup> 这显然是因为此情形的电势零点已经被约定好了。

<sup>5</sup> 这里要求  $\phi_i$  分别为常量。

来建立，另一种方便建立的边界条件便是给定各个导体电极的电量<sup>6</sup>，可以证明这是导体系静电平衡的一类唯一性边界条件，被称为导体系第二类边界条件。静电平衡的导体表面面电荷密度为

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n|_S = -\varepsilon_0 \partial_n \phi|_S$$

故导体系第二类边界条件为

$$\text{给定 } Q_i = -\iint_{S_i} \varepsilon_0 \partial_n \phi da \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

此时，如 2.2.1 小节那样引入差值分布  $\phi_0(\mathbf{r})$ ，它不但在解域内满足 (2.2.1) 式，还要在边界上满足

$$\iint_{S_i} \partial_n \phi_0 da = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

如此，则积分

$$\iint_S \phi_0 \nabla \phi_0 \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=0}^n \iint_{S_i} \phi_0 \partial_n \phi_0 da = \sum_{i=0}^n \phi_{0i} \iint_{S_i} \partial_n \phi_0 da = 0$$

其中  $\phi_{0i}$  为等势面  $S_i$  上的电势。另一方面，由 (2.2.1) 式仍可得

$$\iint_S \phi_0 \nabla \phi_0 \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \mathbf{E}_0^2 dV$$

故解域内  $\mathbf{E}_0$  处处为零，即导体系第二类边界条件具有唯一电场解。

对于某些导体给定电势，其余导体给定电量的混合类边界条件，也可以证明它带来唯一的电场（及电势）解，故为导体系静电平衡的唯一性边界条件。

### 2.2.3 有介质存在时的唯一性定理

如图，考虑由闭合曲面  $S$  包围的、分区均匀的解域  $V = \sum_i V_i$ ，其中分区  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 中充满了介电常量为  $\varepsilon_i$  的均匀线性介质。如果给定解域中自由电荷分布，便可利用分区  $V_i$  中  $\mathbf{D} = \varepsilon_i \mathbf{E} = -\varepsilon_i \nabla U$  及电位移高斯定理建立各个分区的泊松方程

$$\varepsilon_i \nabla^2 \phi = -\rho_0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

进一步，若解域内介质分界面  $S_{ij}$  上满足静电场边值关系

$$\phi_i = \phi_j, \quad \varepsilon_{ri} \partial_n \phi_i = \varepsilon_{rj} \partial_n \phi_j$$

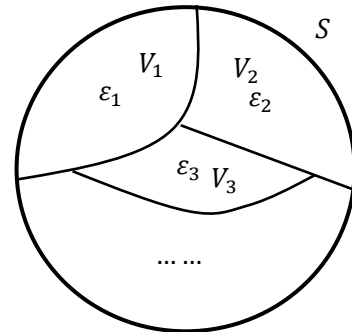
则唯一电场解对应的唯一性边界条件典型的有两类：

- (1) 第一类：给定边界面上的电势分布  $\phi|_S = \phi(\mathbf{r}|_S)$ ；
- (2) 第二类：给定边界面上的电势法向偏导数分布

$$\partial_n \phi|_S = \psi(\mathbf{r}|_S), \text{ 且满足}^7$$

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = -\iint_S \varepsilon \cdot \psi(\mathbf{r}|_S) da = \iiint_V \rho_0(\mathbf{r}) dV$$

思考：试证明有介质存在时的唯一性定理。



如上便是有介质存在时的静电场唯一性定理，当然，混合类边条件也具有唯一电场解。若有导体电极存在，则给定导体电极电量仍然可以唯一地确定电场，相应涉及导体和绝缘介质界面时上述定理中的边值关系要做相应的改写。

<sup>6</sup>若  $S_0$  为导体空腔内表面，则其上的电量由腔内总电量确定，不需额外指定。

<sup>7</sup>下式中介电常量  $\varepsilon$  要根据所在位置选取为合适的  $\varepsilon_i$ 。

## 2.3 分离变量法

Poisson 方程的通解可以由自身的特解叠加上它伴随的齐次方程（即 Laplace 方程）的通解来构造，而 Laplace 方程的解在规范的边界条件下可以由分离变量法来构造。

### 2.3.1 直角坐标分离变量

Laplace 方程直角坐标分离变量用到的本征函数为三角函数。

☞ **例题 2-4** (Griffiths, 例题 3.3)

求解二维 Laplace 方程

$$\partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi = 0$$

边界条件如图

$$\phi(0, y) = V_0(y)$$

$$\phi(\infty, y) \rightarrow 0$$

$$\phi(x, 0) = \phi(x, a) = 0$$

**解答：** 设特解  $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ ，代入 Laplace 方程得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2$$

如上方程两边不依赖于  $x$  或  $y$ ，故可引入常量<sup>8</sup>  $k^2$ 。这样 Laplace 方程化成两个常微分方程

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0$$

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0$$

分离变量解为

$$\phi(x, y) = (A e^{-kx} + B e^{kx})(C \sin ky + D \cos ky)$$

代入边界条件  $\phi(\infty, y) \rightarrow 0$  及  $\phi(x, 0) = \phi(x, a) = 0$ ，得

$$B = 0, \quad D = 0$$

$$k = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, \dots$$

由此构造一般解为

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin k_n y \cdot e^{-k_n x}$$

再由边界条件  $\phi(0, y) = V_0(y)$  确定  $A_n$ ，

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin k_n y \, dy$$

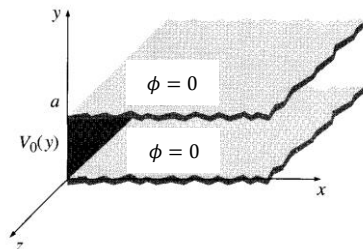
➤ 若  $V_0(y) = V_0$ （常量），则

$$A_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} y \, dy = \frac{2V_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{a} y \Big|_a^0 = \frac{2V_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

因此

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4V_0}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi}{a} y \cdot e^{-\frac{n\pi}{a} x}$$

☞ **思考：** 试证明上式等价于



<sup>8</sup> 事实上，每做一次分离变量，便可以引入一个常量。



$$\phi(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi x}{a}}$$

☞ 例题 2-5: 二维矩形区域  $x \in (0, a), y \in (0, b)$ , 求解二维 Poisson 方程

$$\partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi = -2$$

边界上处处  $\phi = 0$ .

解答: 取特解

$$\phi_0(x, y) = -x^2 + C_1 x + C_2$$

令其满足

$$\phi_0(0, y) = \phi_0(a, y) = 0$$

则可确定  $C_1 = a, C_2 = 0$ , 即

$$\phi_0(x, y) = -x^2 + ax$$

设原方程伴随的 Laplace 方程的解为  $\phi' = \phi'(x, y)$ , 则

$$\partial_x^2 \phi' + \partial_y^2 \phi' = 0, \quad \phi'|_{y=0, b} = x(x-a)$$

分离变量法解得

$$\begin{aligned} \phi' &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \frac{\cosh \left[ \frac{n\pi}{a} \left( y - \frac{a}{2} \right) \right]}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \\ C_n &= \frac{2}{a} \int_0^a x(x-a) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx = \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

➤ 小结:  $x \in (0, a)$  上正弦函数的正交及完备性关系

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \, dx = \frac{a}{2} \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} x' = \frac{a}{2} \delta(x - x'), \quad \text{for } 0 < x, x' < a \quad (2.3.2)$$

对于  $x \in (0, a)$  上的本征问题:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -k^2 f(x), \quad f(0) = f(a) = 0 \quad (2.3.3)$$

$f_n(x) = \sin k_n x$  为对应于本征值  $-k_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$  的本征函数。

### 2.3.2 球坐标分离变量

为了与角坐标  $\varphi$  加以区分, 本小节将静电势表示为  $U = U(r, \theta, \varphi)$

一、径向函数

Laplace 方程

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r U) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta U) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r U) - \frac{\hat{L}^2}{r^2} U = 0$$

令  $U(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ , 则

$$\hat{L}^2 Y(\theta, \varphi) = l(l+1)Y(\theta, \varphi) \quad (2.3.4)$$

$$\partial_r (r^2 \partial_r R) = r^2 R''(r) + 2rR'(r) = l(l+1)R$$

其中  $l(l+1)$  为分离变量常量 (也是算符  $\hat{L}^2$  的本征值)。

对于径向方程 (Euler 型方程), 解得径向函数

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (2.3.5)$$

## 二、角向分离变量

$$-\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta}(\sin \theta \partial_{\theta} Y) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi}^2 Y = l(l+1)Y(\theta, \varphi) \quad (2.3.6)$$

令  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ，则

$$\Phi''(\varphi) = -m^2\Phi(\varphi) \quad (2.3.7)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta}(\sin \theta \partial_{\theta} \Theta(\theta)) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

➤ 对于  $\Phi(\varphi)$ ，有周期性边条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ ，因此

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi} + C^*e^{-im\varphi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.9)$$

本征函数  $e^{im\varphi}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的正交、完备性关系分别为

$$\int_0^{2\pi} (e^{in\varphi})^* e^{im\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mn} \quad (2.3.8)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{im\varphi})^* e^{im\varphi'} = 2\pi\delta(\varphi - \varphi') \quad (2.3.9)$$

## 三、轴对称情形 ( $m = 0$ )

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta}(\sin \theta \partial_{\theta} \Theta(\theta)) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0$$

令  $x = \cos \theta, y(x) = \Theta(\theta)$ ，则得到  $l$  阶 Legendre 方程

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right] = -l(l+1)y(x) \quad \text{或}$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y(x) = 0 \quad (2.3.10)$$

其满足自然边条件

$y(\pm 1)$  有限

的本征函数为 Legendre 多项式 (Rodrigues 公式)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.3.11)$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad \dots$$

➤ Legendre 多项式的性质

- 1)  $P_l(x)$  为  $x$  的  $l$  阶多项式
- 2)  $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$
- 3)  $P_l(1) = 1$
- 4) 级数表示

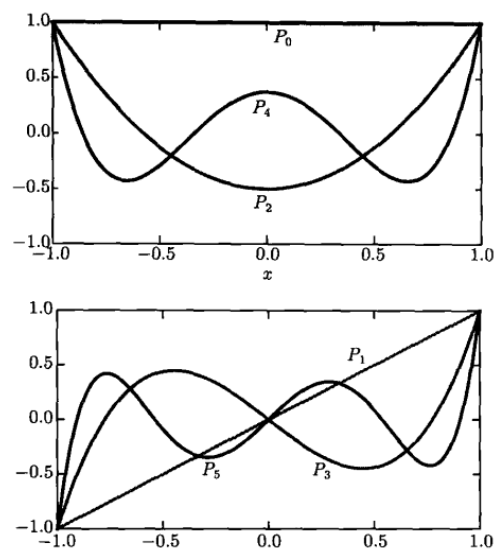
$$P_l(x) = \sum_{n=0}^l \frac{1}{2^n (n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} (x-1)^n$$

5) 正交及完备性关系

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_k(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \quad (2.3.12)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x'), \quad \text{for } -1 < x, x' < 1 \quad (2.3.13)$$

➤ 轴对称情形的一般解



图：前几阶 Legendre 多项式

$$U = U(r, \theta, \varphi) = U(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

☞ 例题 2-6: 试证明

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l & r < 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{-(l+1)} & r > 1 \end{cases} \quad (2.3.14)$$

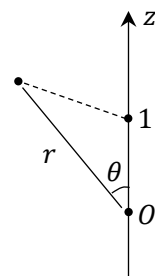
其中  $\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}$  被称为 Legendre 多项式的生成函数。

证明: 取  $z$  轴上  $z=1$  处单位正电荷  $q=1$ , 如图所示. 选  $U_{\infty} \rightarrow 0$ , 则

$$U(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}, \quad x = \cos \theta$$

采用分离变量法, 对于  $r \neq 1$ ,

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(x) & r < 1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(x) & r > 1 \end{cases}$$



对于  $\theta=0$  ( $x=1$ ),  $r < 1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1-r} \Rightarrow A_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

对于  $\theta=0$  ( $x=1$ ),  $r > 1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r-1} \Rightarrow B_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

故得证。

☞ 例题 2-7: 半径为  $R$  的带电球面上, 电势为  $U_0(\theta)$ , 其余空间无电荷分布, 求出球内外的电势。

解答:

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) & r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & r > R \end{cases}$$

代入  $U(R, \theta) = U_0(\theta)$  的边界条件得,

$$A_l = \frac{1}{R^l} \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi U_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$B_l = R^{l+1} \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi U_0(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

例如, 取

$$U_0(\theta) = \frac{k}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{k}{2} (P_0 - P_1)$$

则

$$A_0 = \frac{B_0}{R} = k, \quad A_1 R = \frac{B_1}{R^2} = -k$$

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{k}{2} - \frac{kr}{2R} \cos \theta & r < R \\ \frac{kR}{2r} - \frac{kR^2}{2r^2} \cos \theta & r > R \end{cases}$$

相应场强分布

$$\mathbf{E}_{\text{内}} = -\nabla U_{\text{内}} = \frac{k}{2R} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{k}{2R} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{外}} = -\nabla U_{\text{外}} = \frac{kR}{2r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{kR^2}{2r^2} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

即球内为匀强场，球外为均匀球面电荷场与偶极场的叠加。相应球面电荷面密度为

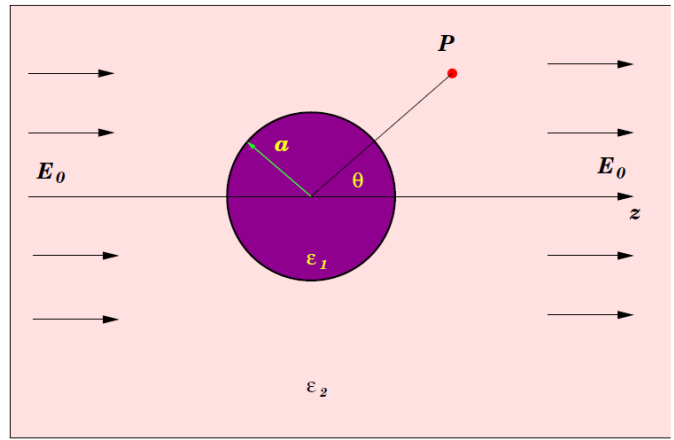
$$\sigma = \varepsilon_0 (E_r^{R+} - E_r^{R-}) = \frac{\varepsilon_0 k}{2R} - \frac{3\varepsilon_0 k}{2R} \cos \theta$$

☞ **例题2-8:** 均匀场中的介质球。

考虑一个均匀、线性、各向同性的电介质构成的球体，其半径为  $a$ ，介电常量为  $\varepsilon_1$ ，它处在填满无穷空间的另一种均匀、线性、各向同性的电介质中，其介电常量为  $\varepsilon_2$ 。在第二种介质中有均匀的、沿  $z$  方向的电场，电场强度为  $E_0$ 。我们要求解当介电球体放入后空间各点的静电势。

**解答:**

**方法一** 猜测为余弦型球面电荷



$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$$

则

$$\mathbf{E}_{\text{内}} = \left( E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{外}} = E_0 \hat{\mathbf{z}} + \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

相应电位移法向连续边值关系为

$$\varepsilon_2 \left( E_0 + \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0} \right) \cos \theta = \varepsilon_1 \left( E_0 - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} \right) \cos \theta$$

解得

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} 3\varepsilon_0 E_0$$

唯一性定理保证如上猜测解为物理解，且有

$$\mathbf{E}_{\text{内}} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{外}} = E_0 \hat{\mathbf{z}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

相应电势分布

$$U_{\text{内}} = -\mathbf{E}_{\text{内}} \cdot \mathbf{r} = -\frac{3\varepsilon_2 E_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} r \cos \theta$$

$$U_{\text{外}} = -E_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

上式中引入了偶极矩

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0 \hat{\mathbf{z}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} a^3 E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

**方法二** 分离变量法

考虑到边界条件

$$U(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

设

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) & r < a \\ -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & r > a \end{cases}$$

边界条件

$$U^{a+} = U^{a-}, \quad \epsilon_2 \partial_r U^{a+} = \epsilon_1 \partial_r U^{a-}$$

得到

$$\begin{aligned} A_l a^{2l+1} &= B_l (l \neq 1), & (A_1 + E_0) a^3 &= B_1 \\ l \epsilon_1 A_l a^{2l+1} &= -(l+1) \epsilon_2 B_l (l \neq 1), & \epsilon_1 A_1 a^3 &= -\epsilon_2 E_0 a^3 - 2\epsilon_2 B_1 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} A_{l \neq 1} &= 0, & B_{l \neq 1} &= 0 \\ A_1 &= -\frac{3\epsilon_2 E_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}, & B_1 &= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 a^3 \end{aligned}$$

#### 四、球谐函数

➤ 连带 Legendre 函数

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta(\theta)) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

令  $x = \cos \theta$ ,  $y(x) = \Theta(\theta)$ , 则得到  $l$  阶  $m$  次连带 Legendre 方程

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] y(x) = 0 \quad (2.3.15)$$

其满足自然边条件

$y(\pm 1)$  有限

的本征函数为连带 Legendre 函数

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2-1)^2, \quad \begin{cases} l = 1, 2, \dots \\ m = 0, \pm 1, \dots, \pm l \end{cases} \quad (2.3.16)$$

$$l = 0: P_0^0(\cos \theta) = 1$$

$$L = 1: P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta, \quad P_1^{-1}(\cos \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$L = 2: P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta + 1), \quad P_2^1(\cos \theta) = -3 \sin \theta \cos \theta$$

$$P_2^{-1} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta, \quad P_2^2 = 3 \sin^2 \theta, \quad P_2^{-2} = \frac{1}{8} \sin^2 \theta$$

➤ 连带 Legendre 函数的性质:

1)  $P_l^m$  与  $P_l^{-m}$  线性相关, 满足

$$\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)} = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

2) 正交性及完备性关系

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \quad (2.3.17)$$

$$\sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{2} P_l^m(x) P_l^m(x') = \delta(x-x'), \quad \text{for } -1 < x, x' < 1 \quad (2.3.18)$$

➤ 球谐函数:

球谐函数是算符  $\hat{L}^2$  和  $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$  的共同本征函数:

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.3.19)$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad m = -l, -(l-1), \dots, l \quad (2.3.20)$$

对应的自然边条件为

$$\begin{cases} Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi + 2\pi) \\ Y_{lm}(0, \varphi) \text{ 及 } Y_{lm}(\pi, \varphi) \text{ 有界} \end{cases}$$

其归一化的形式为

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.3.21)$$

前几阶球谐函数举例:

$$\begin{aligned} l=0: \quad m=0: \quad Y_{0,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ l=1: \quad m=0: \quad Y_{1,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ m=\pm 1: \quad Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \\ l=2: \quad m=0: \quad Y_{2,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ m=\pm 1: \quad Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\varphi} \\ m=\pm 2: \quad Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} \end{aligned}$$

球面上一对角坐标  $(\theta, \varphi)$  与轴向  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  是一一对应的, 故可以记

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \sin \theta d\theta d\varphi = d\Omega_{\mathbf{n}}$$

由(2.3.17)(2.3.8)式可得球谐函数的正交化关系

$$\int d\Omega_{\mathbf{n}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.3.22)$$

而其完备性关系为

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi') \quad (2.3.23)$$

如此, 则球坐标系拉普拉斯方程的一般解可以写做

$$U(r, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (2.3.24)$$

☞ 例题2-9: 试证明球谐函数的加法公式

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (2.3.25)$$

其中,  $\mathbf{r} = r\mathbf{n}, \mathbf{r}' = r'\mathbf{n}'$ , 而  $r_{<}$  和  $r_{>}$  分别为  $r$  和  $r'$  中较小和较大的一个。

解答: 考虑无界空间的拉普拉斯方程的格林函数

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.3.26)$$

它满足

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -\frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi - \varphi') \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

显然,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  关于  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  具有交换对称性, 故可设

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (2.3.28)$$

代入到方程(2.3.27), 并考虑到完备性关系(2.3.23)式, 可得

$$\frac{d^2}{dr^2}(rg_l) - \frac{l(l+1)}{r} g_l = -\frac{1}{r} \delta(r - r')$$

设

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A_l r^l & r < r' \\ \frac{B_l}{r^{l+1}} & r > r' \end{cases}$$

边界条件

$$\begin{aligned} g_l^{r'+} &= g_l^{r'-} \Rightarrow A_l r'^l = \frac{B_l}{r'^{l+1}} \\ \frac{d}{dr}(rg_l) \Big|_{r=r'^+} - \frac{d}{dr}(rg_l) \Big|_{r=r'^-} &= -\frac{1}{r'} \Rightarrow \\ -(l+1)A_l r'^l - \frac{lB_l}{r'^{l+1}} &= -\frac{1}{r'} \end{aligned}$$

解得

$$A_l = \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r'^{l+1}}, \quad B_l = \frac{1}{2l+1} r'^l$$

因此

$$g_l(r, r') = \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}$$

代入(2.3.28)式, 便有加法公式。

### 2.3.3 柱坐标分离变量

一、柱坐标分离变量的一般形式

柱坐标下的拉普拉斯方程

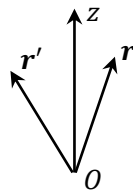
$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r U) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 U + \partial_z^2 U = 0 \quad (2.3.29)$$

令  $U(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ , 取

$$Z''(z) - k^2 Z(z) = 0 \Rightarrow Z(z) = E e^{kz} + F e^{-kz} \quad (2.3.30)$$

再取

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (2.3.31)$$



$$\Phi(\varphi) = C \cos m\varphi + D \sin m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

则径向方程为

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 - m^2) R(r) = 0 \quad (2.3.32)$$

做变量代换  $x = kr$ ，及函数代换  $y(x) = R(r)$ ，则得  $m$  阶 Bessel 方程

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - m^2) y(x) = 0 \quad (2.3.33)$$

二、若  $z$  方向具有平移不变性：即  $k = 0$

径向方程为 Euler 型方程

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - m^2 R(r) = 0$$

相应，拉普拉斯方程的通解为

$$U(r, \varphi) = (a_0 + b_0 \ln r) + \sum_{m=1}^{\infty} [r^m (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) + r^{-m} (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi)] \quad (2.3.34)$$

三、一般情形： $k \neq 0$ （如下内容考试不要求）

1. 整数  $m$  阶 Bessel 方程通解

$$y(x) = a_m J_m(x) + b_m N_m(x) \quad (2.3.35)$$

其中  $m$  阶 Bessel 函数（如下表达式可适用于  $m$  不为整数）

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \quad (2.3.36)$$

$m$  阶 Neumann 函数

$$N_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.3.37)$$

它们在  $x \rightarrow 0$  的渐近行为

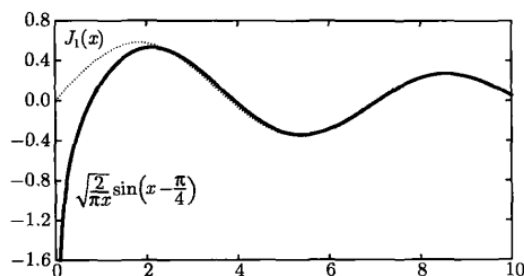
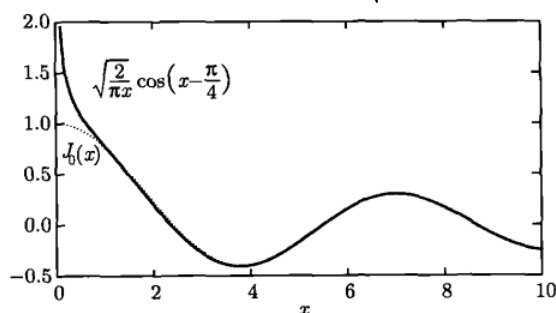
$$J_0(0) = 1, \quad J_m(0) = 0 \quad (m \neq 0) \quad (2.3.38)$$

$$N_m(x \rightarrow 0) \rightarrow \infty \quad (2.3.39)$$

它们在  $x \rightarrow \infty$  的渐近行为（如下表达式可适用于  $m$  不为整数）

$$J_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.3.40)$$

$$N_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.3.41)$$



因此，Bessel 函数和 Neumann 函数也被称为柱面（驻）波函数。

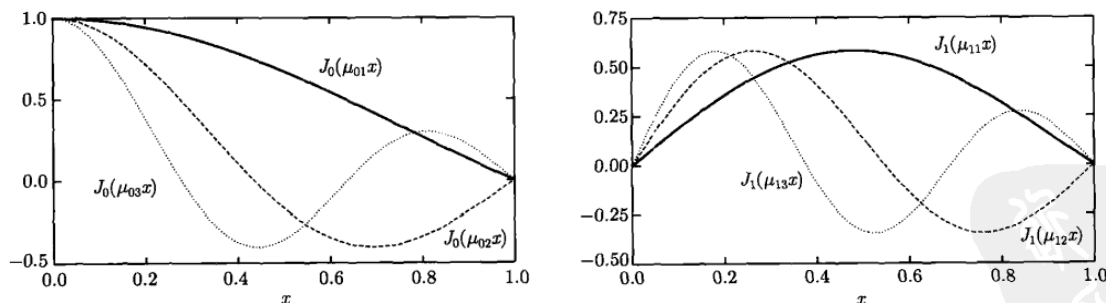
2. 本征问题

1) 首先，贝塞尔方程在如下边界条件构成的本征问题：



$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (k^2 r^2 - m^2)R(r) = 0 & \text{或} \\ x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x) = 0 \\ y(0) \text{ 有界, } y(kr)|_{r=a} = 0 \end{cases} \quad (2.3.34)$$

本征函数为  $m$  阶贝塞尔函数，且要保证  $x = ka$  为其零点。



记  $\mu_{mi}$  为  $J_m(x)$  的第  $i$  个零点，即  $J_m(\mu_{mi}) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ )，则本征值

$$k_i = \frac{\mu_{mi}}{a} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

本征函数  $R_i(r) = J_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 构成  $r \in [0, a]$  区间上的正交完备函数集合，相应正交、完备关系分别为

$$\begin{aligned} \int_0^a J_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right) J_m\left(\frac{\mu_{mj}}{a}r\right) r dr &= \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(\mu_{mi}) \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})} J_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r\right) J_m\left(\frac{\mu_{mi}}{a}r'\right) &= \frac{1}{r} \delta(r - r') \end{aligned}$$

表 2-1: 贝塞尔函数  $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$ 、 $J_2(x)$  的前五个零点

$i$	1	2	3	4	5
$\mu_{0i}$	2.404 83	5.520 08	8.653 73	11.791 5	14.930 9
$\mu_{1i}$	3.831 71	7.015 59	10.173 5	13.323 7	16.470 6
$\mu_{2i}$	5.135 62	8.417 24	11.619 8	14.796 0	18.980 1

☞ 例题2-10: 求解如下圆柱形区域拉普拉斯方程的边值问题。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (\rho < a, 0 < z < h) \\ u|_{\rho=a} = 0 & (0 \leq z \leq h) \\ u|_{z=0} = 0 & (\rho \leq a) \\ u|_{z=h} = H & (\rho \leq a) \end{cases}$$

解答: 分离变量  $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ ，选择

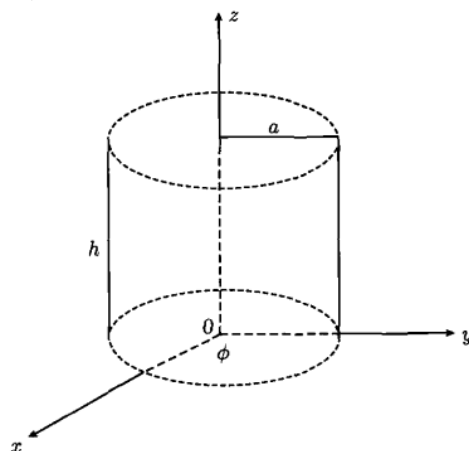
$$Z(z) \sim \sinh kz$$

则  $k$  由径向本征方程来确定

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + k^2 \rho^2 R(\rho) = 0 \\ R(0) \text{ 有界, } R(a) = 0 \end{cases}$$

本征值为  $k_{0i} = \frac{\mu_{0i}}{a}$ ，本征解

$$u_i(\rho, z) = A_i \sinh\left(\frac{\mu_{0i}}{a}z\right) J_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a}\rho\right)$$



一般解构造为

$$u(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sinh\left(\frac{\mu_{0i}}{a} z\right) J_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a} \rho\right)$$

•  $A_i$  的确定

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sinh\left(\frac{\mu_{0i}}{a} h\right) J_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a} \rho\right)$$

$$\therefore A_i \sinh\left(\frac{\mu_{0i}}{a} h\right) = \frac{2H}{a^2 J_1^2(\mu_{0i})} \int_0^a \rho J_0\left(\frac{\mu_{0i}}{a} \rho\right) d\rho = \frac{2H}{a^2 J_1^2(\mu_{0i})} \frac{a}{\mu_{0i}} \rho J_1\left(\frac{\mu_{0i}}{a} \rho\right) \Big|_0^a = \frac{2H}{\mu_{0i} J_1(\mu_{0i})}$$

• 附注： $\nu$  阶 Bessel 函数的递推公式

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

2) 若  $z$  方向构成本征问题

$$\begin{cases} Z''(z) - k^2 Z(z) = 0 & (0 < z < h) \\ Z(0) = 0, & Z(h) = 0 \end{cases}$$

则本征值和 (归一化) 本征函数为

$$\begin{cases} k_n^2 = -\kappa_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, & n = 1, 2, \dots \\ Z_n(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{n\pi}{h} z \end{cases}$$

相应, 径向分离变量的方程为

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + ((i\kappa)^2 r^2 - m^2) R(r) = 0$$

这是虚宗量贝塞尔方程, 相应可以引入虚宗量贝塞尔函数。

## 2.4 电像法

### 2.4.1 平面电像

➤ 问题: 如图, 点电荷  $q$  位于无限大接地导体平板上方  $d$  处, 求上方 ( $z > 0$ ) 电势分布。

➤ 构造解: 取平面电像 (位于  $(0, 0, -d)$  处的  $-q$ )

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (2.4.1)$$

满足:

① 上半空间的 Poisson 方程

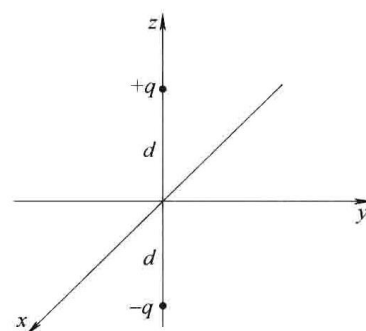
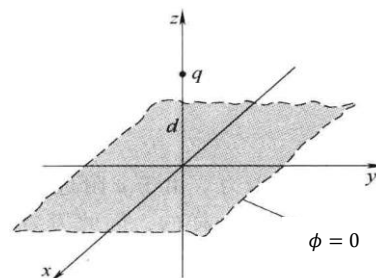
② 边界条件:  $\phi|_{z=0} = 0$ ,  $\phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

由唯一性定理: 如上构造解便是唯一解。

➤ 感应面电荷

$$\sigma_{\text{ind}} = -\epsilon_0 \partial_z U|_{z=0} = -\frac{qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4.2)$$

$$Q_{\text{ind}} = -\int_0^\infty \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} r dr = -q \quad (2.4.3)$$



- 点电荷  $q$  受力

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2}\hat{\mathbf{z}}$$

- 电场能（不含点电荷自能）  
考虑半空间场能

$$W = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d} \quad (2.4.4)$$

或由作用力做功

$$W = \int_{\infty}^d \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2z)^2} dz = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d}$$

## 2.4.2 球面电像

- 问题：如图，点电荷  $q$  位于半径为  $R$  的接地导体球外部（距离球心  $a$ ），求球外（ $r > R$ ）电势分布。

- 构造解：取右图，取像电荷  $q'$  位于距离球心  $b$  处。  
任意点  $B$  的电势为零，要求

$$\frac{b}{R} = \frac{R}{a} = \frac{-q'}{q}$$

$$\therefore b = \frac{R^2}{a}, \quad q' = -\frac{R}{a}q$$

场点  $P$  的电势分布为

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{l} + \frac{q'}{l'} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{ar}{R}\right)^2 - 2ra \cos \theta}} \right] \end{aligned}$$

- 感应电荷

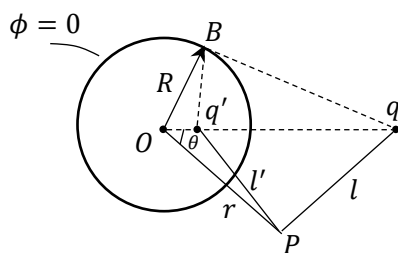
$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ind}} &= -\epsilon_0 \partial_r \phi|_{r=R} = \frac{q}{4\pi R} \frac{(R^2 - a^2)}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \\ Q_{\text{ind}} &= \frac{qR}{2} (R^2 - a^2) \int_0^\pi \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta = -\frac{R}{a}q \end{aligned}$$

- 点电荷  $q$  受力

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a-b)^2}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{q^2Ra}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2}\hat{\mathbf{r}}$$

- 电场能

$$W = \int_{\infty}^a \frac{q^2 Rr}{4\pi\epsilon_0(r^2 - R^2)^2} dr = -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)} = \frac{1}{2} \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}$$



## 2.5 格林函数法

在方程(1.3.19)中我们给出了 Poisson 方程在无界空间中的格林函数

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.5.1)$$

这样在无界空间中，静电势的解为

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2.5.2)$$

其实引入带有特殊边界条件的格林函数，还可以帮助求解静电场的边值问题。

### 2.5.1 格林公式与静电势

设区域  $V$  ( $\partial V = S$ ) 上存在两个标量场  $\varphi(\mathbf{r})$  和  $\psi(\mathbf{r})$ ，且  $\varphi, \psi \in C^2$ ，

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) = \varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi$$

对如上公式两边做体积分，便有格林公式

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oiint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.5.3)$$

静电势  $\phi(\mathbf{r})$  满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.5.4)$$

引入格林函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，则

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.5.5)$$

注意到

$$\begin{aligned} \iiint_V (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) dV &= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} - \phi(\mathbf{r}') \\ \oiint_S (\phi \nabla G - G \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_S (\phi \partial_n G - G \partial_n \phi) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

利用格林公式，并互换  $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$ （但积分区域仍为  $V$ ），使得

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \oiint_S (G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \partial_{n'} \phi(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \partial_{n'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S}' \quad (2.5.6)$$

### 2.5.2 Dirichlet 边值问题

对于 Dirichlet 边值条件

$$\phi(\mathbf{r}'|_S) = g(\mathbf{r}') \quad (2.5.7)$$

我们取 Dirichlet 格林函数  $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  满足边界条件

$$G_D(\mathbf{r}'|_S, \mathbf{r}) = 0 \quad (2.5.8)$$

代入(2.5.6)式得

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' - \oiint_S g(\mathbf{r}') \partial_{n'} G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}' \quad (2.5.9)$$

可以证明 Dirichlet 格林函数满足  $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$  交换对称性，即

$$G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.5.10)$$

它的含义是在满足边界上电势为零的条件下， $\mathbf{r}'$  处点电荷在  $\mathbf{r}$  处产生的电势与  $\mathbf{r}$  处点电荷在  $\mathbf{r}'$  处产生的电势相同。

如下是几种典型区域的 Dirichlet 格林函数：

1. 半无限空间：上半空间 ( $z > 0$ ) 区域的 Dirichlet 格林函数可以由电像法构造

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

2. 半径为  $R$  的球外空间 Dirichlet 格林函数可以由电像法构造，以球心为参考点

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{R}{r'} \right) \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}' \right|}$$

### 2.5.3 Neumann 边值问题（不要求）

注意到方程(2.5.5)导致

$$\oint_S \partial_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} = -1$$

故通常选取与 Neumann 边界条件对应的 Neumann 格林函数满足

$$\partial_{n'} G_N(\mathbf{r}'|_S, \mathbf{r}) = -\frac{1}{A} \quad (2.5.10)$$

其中,  $A$  为边界面的总面积。将(2.5.10)代入(2.5.6)得

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' + \oint_S G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \partial_{n'} \phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' + \langle \phi \rangle_S$$

其中

$$\langle \phi \rangle_S = \frac{1}{A} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'$$

为电势在边界面上的平均值。

对于一个有限大曲面和一个无限大曲面围成的区域 (也被称为有限曲面的外域问题),  $A \rightarrow \infty$ , 相应  $\langle \phi \rangle_S = 0$ 。

## 2.6 静电场多级展开

### 2.6.1 静电势的多极展开

如果激发电场的源电荷集中分布在很小的区域, 其典型的分布尺度记为  $l$ 。但尺度的大小是相对而言, 此时我们关心的是远场的电势及电场的分布 ( $r \gg l$ ), 如右图所示。如此, 便可对远场电势的积分式

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} d^3 \mathbf{r}', \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (2.6.1)$$

做展开, 相应

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \mathbf{r}' \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \vec{I}}{r^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

将(2.6.2)代入(2.6.1), 可得到远场电势的展开, 不同的阶次探测电荷分布的不同的细节, 这种展开被称为静电势的多极展开。

#### 一、单极项

如上展开的零阶项探测的是电荷分布的单极矩——电量

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (2.6.3)$$

其远场电势贡献为

$$\phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.6.4)$$

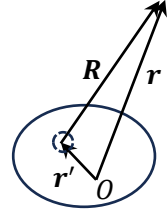
电场贡献

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

显然, 领头阶近似便是把整体的源电荷分布近似为点电荷。

#### 二、偶极项

如上展开的一阶项探测的是电荷分布的偶极矩



$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}' \quad (2.6.5)$$

其远场电势贡献为

$$\phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.6.6)$$

电场贡献

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \quad (2.6.7)$$

可以证明, 若系统的总电量  $Q = 0$ , 则系统的电偶极矩  $\mathbf{p}$  不依赖于参考点。此时, 系统在领头阶近似下相当于一个偶极子。

### 三、四极项

电势展开的二阶项来自于电荷分布的四极矩。考虑到 ( $r \neq 0$  时)

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}': \frac{3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{I}}}{r^3} = \frac{1}{2} (3\mathbf{r}' \mathbf{r}' - r'^2 \vec{\mathbf{I}}): \frac{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{r^3}$$

通常定义带电体系的电四极矩为

$$\vec{\mathbf{D}} = \int \rho(\mathbf{r}') (3\mathbf{r}' \mathbf{r}' - r'^2 \vec{\mathbf{I}}) d^3 \mathbf{r}' \quad (2.6.8)$$

他是一个对称、无迹的二阶张量, 即

$$D_{ij} = D_{ji}, \quad D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$$

因此, 电四极矩有 5 个独立的分量。电四极矩贡献的远场电势为

$$\phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\vec{\mathbf{D}}: \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.6.9)$$

二阶对称张量存在三个两两正交的主轴, 故在主轴系中电四极矩只有两个独立的非零分量, 若进一步  $z$  轴为电荷分布系统的  $n(\geq 3)$  阶旋转对称轴, 则系统在含  $z$  轴的主轴坐标系中仅有一个独立的电四极矩的分量, 此时

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}$$

**例题 2-11:** 如图, 均匀带电旋转对称椭球, 电量为  $Q$ , 椭球面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

求: 准确到电四极项的远场电势  $\phi(r, \theta)$

解答: 椭球的电荷密度

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi a^2 b}$$

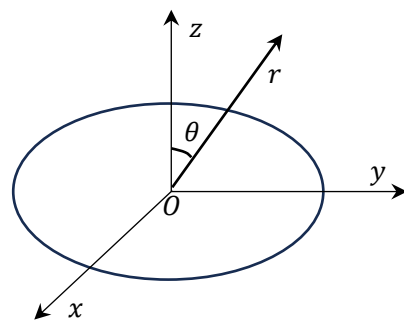
在图中坐标框架下, 因为电荷关于  $O$  点中心对称, 故偶极矩  $\mathbf{p} = 0$ 。电四极矩其实只需要计算一个独立分量

$$D_{zz} = \int \rho (2z^2 - (x^2 + y^2)) dV$$

引入 (虚拟) 球坐标  $\tilde{r} \in [0, 1], \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}$ , 则

$$x^2 + y^2 = a^2 \tilde{r}^2 \cos^2 \tilde{\theta}, \quad z^2 = b^2 \tilde{r}^2 \sin^2 \tilde{\theta}, \quad dV = a^2 b \tilde{r}^2 d\tilde{r} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}$$

$$D_{zz} = 2\pi a^2 b \rho \int_0^1 \tilde{r}^4 d\tilde{r} \int_0^\pi (2b^2 \cos^2 \tilde{\theta} - a^2 \sin^2 \tilde{\theta}) \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = \frac{2}{5} Q (b^2 - a^2)$$



相应

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz} = \frac{2}{5}Q(a^2 - b^2)$$

远场电势的单极项为

$$\phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

四极项为

$$\phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{\vec{D} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{D_{zz}}{8\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

### 2.6.2 球多极矩

加法公式(2.3.25)可以用来展开(2.6.1)中的  $R^{-1}$ ，这里  $r_> = r, r_< = r'$ ，即

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (2.6.10)$$

这样电势多极展开可以写为

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{4\pi\epsilon_0 r^{l+1}} \quad (2.6.11)$$

其中球多极矩

$$Q_{lm} = \int \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r'^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.6.12)$$

，相对于直角坐标的多极展开，球多极展开是更为系统。作为对照，球多极矩与直角坐标多极矩的分量对比如下

$$\begin{aligned} Q_{00} &= Q \\ Q_{10} &= p_z, \quad Q_{1,\pm 1} = \mp \frac{p_x \mp i p_y}{\sqrt{2}} \\ Q_{20} &= \frac{1}{2} D_{zz}, \quad Q_{2,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{6}} (D_{xz} \mp i D_{yz}), \quad Q_{2,\pm 2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} (D_{xx} - D_{yy} \mp 2i D_{xy}) \end{aligned}$$

### 2.6.3 外场能量的多极展开

考虑集中于坐标原点附近的一小团电荷在外场  $\phi_e$  中的能量

$$W = \int \rho(\mathbf{r}) \phi_e(\mathbf{r}) dV \quad (2.6.13)$$

对外场的分布函数做展开

$$\begin{aligned} \phi_e(\mathbf{r}) &= \phi_e(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_e(0) + \frac{1}{2} \mathbf{r} \mathbf{r} : \nabla \nabla \phi_e(0) + \cdots \\ &= \phi_e(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_e(0) - \frac{1}{2} \mathbf{r} \mathbf{r} : \nabla \mathbf{E}_e(0) + \cdots \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{E}_e = -\nabla \phi_e$  为外电场。将如上展开式代入(2.3.28)得

$$W = Q \phi_e(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0) - \frac{1}{6} \vec{D} : \nabla \mathbf{E}_e(0) + \cdots \quad (2.6.14)$$

这便是小团电荷体系外场能量的多级展开。