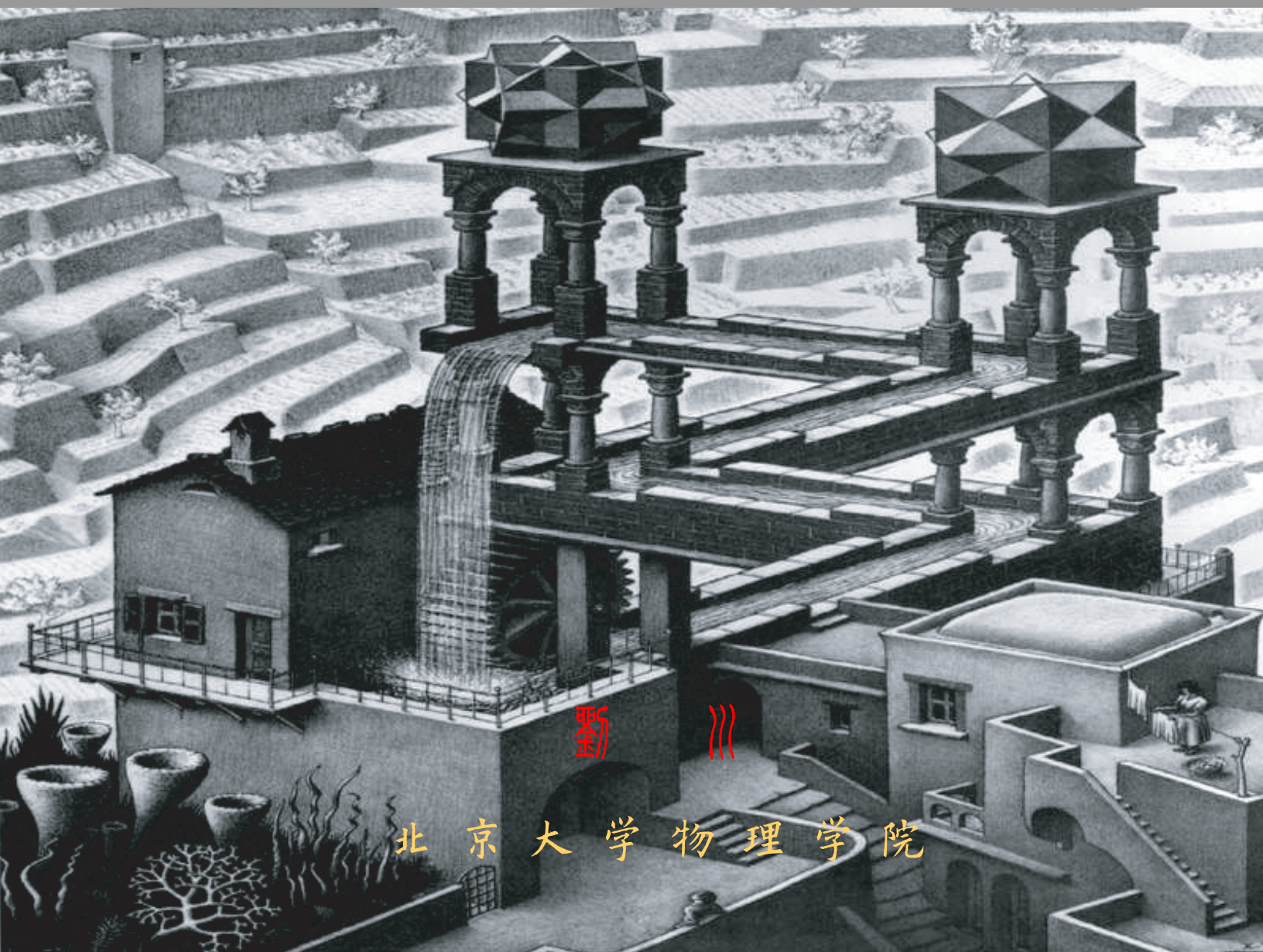


理论物理基础



劉 川

北京大学物理学院

VERSION 0.03

开篇说明

理论力学，特别是分析力学一向是我认为“最为优美”的理论物理课程。因此，我一直希望能够有机会欣赏一下。正是基于这种诱惑，我才愿意在 2005 年春尝试讲授《理论力学》课程。

但准备这个课程的过程中发现，诱惑有时是很害人的。具体的备课过程告诉我，这个课程实际上相当具有挑战性。挑战性之一是分析力学的许多原理、方法和术语实际上是为整个理论物理起到了奠基的作用（例如：最小作用量原理、哈密顿量等等）。分析力学中很多地方都蕴含着与理论物理其他分支的紧密联系。例如，最小作用量原理一直到量子场论中都是重要的原理；泊松括号对于经典力学的描述与对易括号对于量子力学的描述是十分类似的；哈密顿-雅可比方程与光学、波动力学（Schrödinger 方程）的内在联系；还有经典的连续场论（流体力学、弦与膜的振动）等等。挑战之二是经典动力学本身也有十分迅猛的发展，特别是在非线性、混沌等现象的研究中。这些内容本身就是相关领域的科研的前沿。挑战之三在于经典力学中的许多理论方法还与现代数学物理有着十分紧密的联系。例如，在分析力学中可以很直观地引入流形、tangent bundle、differential forms、symplectic geometry 等等。这些数学概念在现代的数学物理中起着重要的作用。以这样的一个观念来看待理论力学，我就发现它变为一个很庞大的体系。

在我看来理论力学的课程应当起到两方面的作用：第一，使同学们掌握理论力学—特别是分析力学—的基本原理和方法，并能够运用它们解决经典力学的具体问题；第二，将分析力学的原理和方法作为一个窗口和桥梁，使之能够联结和透视到以后其他课程的学习和研究中。这第一方面的作用仅仅局限在本课程，固然是重要的；但我觉得第二方面的作用似乎更加重要。为此，我的课程讲义采取了以下两个步骤。第一，我努力强调了从超出经典力学本身的最基本的原理出发来阐述分析力学的内容。为此，我们讨论分析力学的起点是狭义相对论的时空观和最小作用量原理。常见的一种讲述方法是从牛顿力学出发来讨论拉格朗日形式的分析力学。这样的方法固然符合人类的认识规律，但缺点是没有突出基本原理的崇高地位。我采用的讲述方法基本上与 Landau 书 [1] 中的逻辑类似，只不过我们是从相对论性的时空观出发的，而朗道是从非相对论时空观出发的。第二，在这个讲义中我尽量在一些可能的地方，将所学的分析力学的内容进行引申，点出它们与其他课程的联系。希望能够给大家一片更加广阔的天地。我希望多数同学在学过这个课程一段时间后，比如说一年以后，能够留下一些重要的印象：你可以忘了怎么解一个具体的力学问题（就像我现在一样），但希望你能够记住分析力学的基本思想。

¶ 如上所述，由于与分析力学有关联的物理分支实在是太广泛，显然要将所有的内容都一一尽述是不可能的，同时也无法与一个 3 学分的课程相容。因此，我必须对内容

有所取舍。在制备这个讲义的过程中,我主要参考了三本书:Landau 的 Mechanics [1]、Goldstein 的 Classical Mechanics [3] 和 José 的 Classical Dynamics [4]。本讲义的基本框架与 Landau 的书 [1] 类似。这样的选择有两个原因,一是 Landau 的书是经典著作。它从基本原理出发的讲述方式与我们课程的初衷比较吻合;二是 Landau 的书比较薄(167 页),这样我们可以基本上在一个学期讲完。当然,我也舍去了其中的一些内容,同时又补上了一些其他的内容。这些内容包括:从狭义相对论出发的讨论;非线性和混沌的讨论;连续介质力学的讨论等等。这些内容我们都只是给了简要的介绍。同学们有兴趣可以从 Goldstein 的书 [3] 和 José & Saletan 的书 [4] 中找到更为详尽和丰富的内容,尽管它们出现的顺序与我的讲义中不尽相同。Goldstein 的书也是经典力学的一部经典著作。但是所包含的内容太多(600 多页),很难在一个学期消化。José 的书是一部用现代观点描述经典力学的好书。它介绍了大量的非线性力学中的现象和理论(例如:混沌、KAM 定理等等)。同时,书中还讨论了大量与经典力学密切相关的数学概念的描述。有兴趣的同学可以读读。它的问题也是内容太多(也是 600 多页),同时恐怕并不是每一个同学都对相关的数学如此热衷。总之,上述两部书很难用来做真正的教材,只适合作为参考书。

我并没有忽视中文的教材。但是,在翻阅了所有我能够找到的中文理论力学教材之后发现,它们绝大多数的内容并不与本课程的初衷相吻合。我们这个课程的主旨是讲述分析力学的主要思想方法。绝大多数国内的理论力学教材都不是以分析力学为主体的。其原因在于理论力学课程的主要受众除了我们物理学专业的学生外,还有众多工程专业的学生。后者可能在人数上是绝大多数。因此,绝大多数国内的理论力学教材讲述的主要内容是大量力学(牛顿力学)。

¶ 这个讲义可以供本课程的同学、教师免费下载。作者本人(也就是刘川!)对于讲义中的所有内容保有版权。未经作者本人许可,不允许将本讲义的全部或部分翻印后以任何方式销售给任何人;原则上也不允许将其外传给非本课程的学生和教师;不允许将本讲义的部分或全部放在网络上。一经发现,我保留诉诸法律的权利。

显然,本讲义是一个很初步的草稿。其中不乏各种错误,有些错误已经在课程的授课过程中改正了,但还有一些没有改正,欢迎大家批判指正。另外,讲义中的别字更是数不胜数(感谢计算机,它不会写错字)。对于优美的祖国语言的这种摧残,我本人深表歉意,并力争在下次修改时尽量更正。所以,这个讲义的版本在不断地更新中,我无法在每次更改时都通知读者,对此我也深表歉意。

¶ 在这个十分粗略的讲义出炉之际,我要感谢北大理论物理系的陈晓林、张大新、李定平等几位教授无私地与我分享他们多年来教授理论力学的经验。这些经验对于我这个理论力学课程的“新手”来说是十分宝贵的。特别要感谢的是陈晓林教授给了我他们授课的全部 Powerpoint 文件。这些课件的准备无疑需要大量的时间投入和精心的准备。陈晓林还给了我理论力学课程的习题。尽管这些题目我很多都已经不会做了,但仍然使我受益匪浅。我也感谢郑汉青、朱世琳、马中水等其他教授对我的一贯支持。最后,感谢我的家人(特别是我的妻子韦丹和儿子咪咪小同学)对我的鼓励和支持。

刘川，二零零四年十二月



¶ 第一次的版本是 Postscript 版本的。考虑到这类文件已经逐步淡出江湖，我对部分格式做了调整（包括部分的字体以及讲义的封面）并产生 PDF 版本讲义。目前版本号定为：1.0 ϵ 。

刘川，二零零九年九月



¶ 2013 年，我被调整为理论力学课程主持人。因此，讲述理论力学课程是迟早的事情了。这距离上一次讲述理论力学已经有近 10 年了，时间过得真是太快了。本次的改动还是蛮大的，主体结构没动的情况下几乎各章都有增删。例如，第三章中关于水外行星影响水星进动的讨论；第六章中关于 Liouville 定理的讨论等等。另外，原先讲义的最后一章是关于连续介质和场的经典力学。我发现无论如何都没有时间去涉及，因此干脆删掉了。同时，由于旧版 L^AT_EX 版本也逐渐不再使用，本讲义因此改用 X_YL^AT_EX 排版。目前暂定版本号：1.1。

刘川，二零一四年一月



¶ 2014 年春，我讲授了理论力学课程。根据具体讲述的过程中增加了一些内容：主要包括关于刚体的运动学的部分。这部分的增加是原先没有预期的。例如我原以为关于三维转动矩阵的知识多数同学在线性代数课程中已经涉及（事实上这个假设不正确）；我原以为同样是线性代数课程中多数同学已经有一些群论的知识，实际上并非如此。因此，我增加了关于群论基本知识的一个附录，供有兴趣的同学参考。另外在哈密顿-雅各比方程的部分增加了相当一部分例子。这些内容的增加使得讲义的页数陡增，对此我只能深表遗憾了。目前的版本号为 1.2。

刘川，二零一四年八月



¶ 2022 年春，我再次讲授理论力学 A 课程。根据具体讲述的过程中增加了连续介质经典动力学的内容。主要增加了一维连续分布的系统，即弦的经典动力学的处理。最后，对相对论性的弦做了一个简单的介绍。万一以后有同学喜欢弦论呢.... 目前的版本号为 1.6。

刘川，二零二二年二月



目 录

第一章	概论	1
1	广义的力学体系、约束与广义坐标	4
2	虚功原理和达朗伯原理	7
第一部 经典物理部分		
分析力学与经典电动力学		10
第二章	力学体系的作用量与运动方程	11
3	狭义相对论的时空观	12
4	最小作用量原理	16
4.1	最小作用量原理	16
4.2	力学体系的运动方程	18
5	相对论性自由粒子的作用量	20
6	粒子与外场的相互作用	23
7	非相对论极限	26
8	对称性与守恒律	28
8.1	时间平移与能量守恒	29
8.2	空间平移与动量守恒	29
8.3	空间转动与角动量守恒	30
8.4	尺度变换	31
8.5	分立对称性	32
9	哈密顿力学概要	33
9.1	哈密顿正则方程	33
9.2	刘维尔定理	36
9.3	泊松括号	37

第三章	分析力学的三类典型的应用	40
10	中心力场与开普勒问题	40
10.1	两体中心力场问题的简化	40
10.2	开普勒问题	42
10.3	有心势中的散射问题	44
11	刚体的运动规律	47
11.1	刚体的平动与转动	48
11.2	刚体的转动惯量与动能	52
11.3	刚体转动的动力学方程	54
12	多自由度系统的简谐振动	55
12.1	动能和势能的对角化与多自由度系统小振动的解	56
12.2	多自由度系统小振动的初值问题求解	57
12.3	具体的例子	60
12.4	非谐效应	62
第四章	连续介质力学	65
13	一维振动与波	65
13.1	一维弦上的波	66
13.2	弦上的波与能量守恒	68
13.3	边条件：波的反射与透射	69
13.4	驻波：伯努利解	72
14	晶格谐振与三维连续介质力学	73
14.1	晶格谐振理论简述	73
14.2	从晶格谐振理论到连续弹性理论	76
第五章	电磁场与麦克斯韦方程	79
15	协变形式和三维形式的麦克斯韦方程	80
15.1	协变形式的麦克斯韦方程	80
15.2	三维形式的麦克斯韦方程与电磁单位制	81
15.3	国际制中的真空麦克斯韦方程	85
16	麦克斯韦方程的对称性	86
17	介质中的麦克斯韦方程	88
17.1	线性介质中的麦克斯韦方程组	88

17.2	各种介质的简单介绍	90
17.3	介质边界处的边界条件	93
18	电磁规律中的守恒律	94
第六章	静态电场与磁场	98
19	静电势、静磁势与泊松方程	99
20	导体组与电流圈组的能量：电容与电感	100
21	唯一性定理与静电镜像法	103
22	泊松方程的分离变量解法	106
22.1	直角坐标中的拉普拉斯方程的解：指数函数或三角函数	106
22.2	柱坐标中的拉普拉斯方程的解：贝塞尔函数	107
22.3	球坐标中的拉普拉斯方程的解：球谐函数	108
22.4	球坐标中的例子	109
23	静电边值问题的数值解法	111
23.1	简单的网格法	112
23.2	有限元方法	114
24	静电与静磁多极展开	116
第七章	电磁波的传播	121
25	均匀平面电磁波的基本性质	121
26	电磁波在介质表面的折射与反射	124
27	电磁波在导电介质中的传播	128
28	介质色散的经典模型	130
29	波包在色散介质中的传播：群速度	133
30	波导与谐振腔	135
30.1	麦克斯韦方程按照横向和纵向的分离	135
30.2	金属波导	137
30.3	谐振腔	139
30.4	介质波导与光纤	139
第八章	电磁波的辐射	141
31	推迟格林函数与李纳-维谢尔势	141
32	谐振电荷和电流分布的电磁辐射	147

33	电偶极、磁偶极和电四极辐射	149
33.1	电偶极辐射	149
33.2	磁偶极辐射	151
33.3	电四极辐射	152
34	拉摩公式与汤姆孙散射	153
35	相对论性加速电荷的辐射	155
36	切伦可夫辐射	157
37	辐射阻尼	159

第二部 量子物理部分
统计物理与量子力学

161

第一章

概论

物

理学拥有非常悠久的历史，理论物理学因此也就拥有了几乎同等悠久的历史。如果说人们关于整个物质世界的构成及其相互作用规律的认识构成了物理学的全部，那么理论物理就是关于这些规律的理性认知的总结。作为一门实验科学，物理学的根本在于实证，但人类关于世界的理性思考从来就不曾缺席过。在历史上有两次非常明显的理论物理的“爆发时期”：一个是以牛顿为代表的科学的复兴时期或称为近代物理学时期；另一个就是二十世纪发展起来的、以相对论和量子论为代表的现代物理学时期；前者开创了以牛顿力学和麦克斯韦电磁理论为代表的经典物理，后者则建立了以量子论为代表的量子物理。

本讲义是介绍理论物理基础的概论性教程，大致覆盖了近现代一直到 20 世纪 20 年代的物理学理论的梗概。在开始正式的介绍之前，有必要对理论物理的整体框架——这大致包括其发展的时间线以及所研究的对象这两个方面——做一个更加明确和清晰的交待。

¶ 发展时间线

首先从时间线方面来看，本书中所指的近代时期，主要是指牛顿发展的作为自然科学基础的牛顿力学，拉格朗日、欧拉、哈密顿等人发展起来的分析力学以及电磁学方面的经典麦克斯韦理论的时期，其时间的跨度从 16,17 世纪一直持续到十九世纪中期左右。到十九世纪末左右，经典物理的理论框架已经基本成型，以至于汤姆逊志得意满地宣称，(经典) 物理的大厦已经基本建成，除了他认为的两朵乌云之外。虽然这仅代表他个人的观点，但基本上距离当时的事实也并不很远。本讲义中所谓的现代时期，则主要是指从十九世纪中叶已经逐步成型的热力学和统计物理方面的研究，这个既包含宏观 (热力学) 又包含微观 (统计物理) 的方法，恰恰是这些横跨宏观和微观的对比性研究，再加上其他的一系列重要的发现最终直接导致了二十世纪初量子理论的出现和量子力学理论框架的建立。理论物理的各主要理论框架的发展时间线见图 1.1。我们看到，近代和现代的理论物理的两个发展时期是有一个重叠的，即大约在十九世纪中期附近一直延伸到二十世纪。量子论突破的范围相当多地都源于热力学统计物理方面的研究。这也充分说明了人类对于理论物理体系的发展总体趋势上是连续的，突破性的理论并不是凭空产生的，而是基于原有的经典理论。本讲义也将理论物理的讲授分为两个大的部分或两大板块：经典物理板块和量子物理板块。

从现代的理论物理学的发展历史角度来看，它主要包括从十九世纪末到二十世纪时期内发展起来的相对论和量子论这两大理论框架。如前所述，现代的理论物理不可能凭空产生，它是从历史上经典的理论物理框架中逐渐生长出来的；是人们关于经典的理论物理理

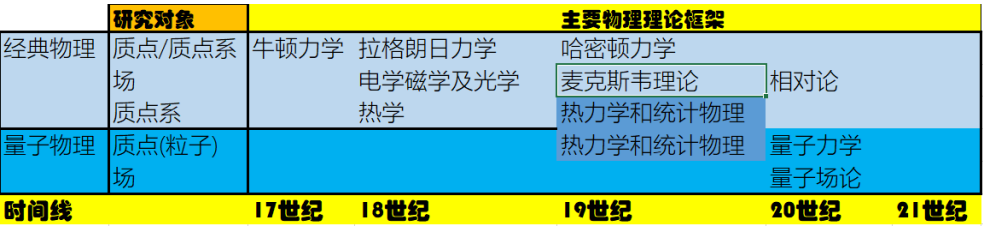


图 1.1: 理论物理中各理论框架发展的时间线。

论结合新的实验现象再升华的自然结果。仅仅讲述这两个板块中的任何一个而忽略另外一个都将是不完整的。当然，由于课时上的限制，这个课程的讲授顺序并不是完全按照真正的历史发展顺序进行的。事实上，在两个板块的讲述过程中，都存在大量的、并不按照时间顺序的“蒙太奇”情况。但是我们力求在整体的逻辑上是连续的，没有跳跃，以便于读者接受。

按图 1.1 中显示的框架，理论物理基础的课程自然地分为两个板块：一个是经典物理板块：它主要包括经典力学—特别是分析力学的理论框架和经典电动力学理论 (主要是麦克斯韦电磁理论)；另一个就是量子物理板块：它将包括从经典物理向量子物理过渡的热力学统计物理以及在二十世纪初发展起来的量子力学。这两个板块将分别安排在理论物理基础 I, II 两个部分之中相继讲授。读者应当注意到了，这样的两板块的划分方式实际上涵盖了原来的所谓“四大力学”课程的全部内容。也就是说，我们将原先的四大力学两两合并，分为了经典物理和量子物理两个板块；其中经典物理中不仅包括了对质点系统的处理的理论力学，也包括了对经典的电磁场处理的经典电动力学；而量子物理板块还包括了引发量子力学诞生的统计物理学 (这是可以从微观和宏观两个角度研究同一个系统的物理学理论)。现代理论物理的两个标志性理论—相对论和量子论—将分别放在经典物理板块和量子物理板块中介绍。从历史上看，狭义相对论的最直接导入因素恰恰就是经典的麦克斯韦电磁理论；它将光和电磁波统一在了一起，爱因斯坦对伽利略相对性原理的推广最终使得光的特殊传播媒介—以太的概念被彻底地扬弃。从这个角度来讲，在经典物理板块中包含狭义相对论是恰当的，这同时可以很好地兼顾经典的粒子和经典场的动力学。

显然，理论物理基础课程不可能涵盖理论物理课程的全部。作为一个基础概论性的课程，它对很多经典物理和量子物理的讨论都将是框架性的，并没有很多具体而鲜活的实例。更加细致和具体的讨论只能够仰仗更加专门的四大力学课程中进行讲述。另一方面，自 1920 年代以后发展的更深入和现代的物理学理论也完全没有涉及，其典型代表是图 1.1 中提及的非相对论性和相对论性的量子场论：比如固体物理理论、原子分子理论、核物理理论、以及粒子物理中的标准模型理论等等，这些内容将放在后续的其他本科或研究生的专门课程之中讨论。经典物理板块中的相对论也仅包含了狭义相对论，并没有涉及广义相对论的内容，这也将专门的课程中讲述。总之，本课程将只介绍理论物理中最基础性、框架性的内容。有志于从事相关方面研究—特别是理论性研究—的读者应当去参研相关的后续课程。

¶ 研究对象

上面的讨论更多地注重于经典物理和量子物理的时间线的发展。另一方面，图 1.1 中所列经典物理和量子物理的研究对象也是十分值得关注的。16-17 世纪时，以牛顿为代表的科学家是从天体的运行规律中领悟到的自然哲学的数学原理，而 18-19 世纪的物理学理论的发展则更多地与人类的第一次和第二次工业革命中的主要成就相关联：比如热机与热力学的研究对象相关，而电机则与电动力学的研究对象相关。以基础物理学的语言来说，无论是经典物理还是量子物理，其研究对象大致都可分为两类：一个是分立的质点 (或者称为粒子) 或质点系 (一系列粒子)，另一类则是连续分布的介质或者场——其中连续介质往往可被视为一系列分立粒子的连续极限，而场则被视为是按照时空 (如果它被认为是连续的) 的某种函数。这两类研究对象的划分在几百年来一直没有特别大的变化。经典物理和量子物理的区别仅仅在于如何看待这些力学的自由度——无论是粒子还是场——的动力学行为。这从某种意义上解释了，为什么这些内容有时候被称为四大力学。因为从原始的词义来说，力学 (mechanics) 这个词义不仅仅特指机械性的运动，同时还包含了影响运动的机制的含义。因此，对于各种自由度 (包括质点、质点系和场) 的动力学机制的研究都可以视为是一种广义的力学。事实上，从这种广义力学的意义上来理解，几乎所有的物理学都可以算是某种特殊的“力学”。

¶ 具体内容安排

下面简单说明一下这两门课程涉及内容的具体安排。对于经典物理的理论物理基础 I，将首先从分析力学的基本理论框架开始。然后，这个理论框架将首先被运用到少数自由度的经典力学体系：开普勒问题、刚体的运动、多自由度系统的小振动问题；随后，我们将介绍连续分布的经典自由度，典型的例子是一维弦的振动以及三维弹性体的运动；在这之后，我们将处理电磁场的动力学，这就是经典的麦克斯韦电磁理论。此外我们还会介绍电磁理论的重要应用：静态电场和磁场的情况，电磁波的传播与辐射以及带电粒子与电磁场的相互作用等。

在量子物理的理论物理基础 II 中，我们将首先介绍人们关于宏观物体热现象的理论——热力学理论，这也曾是研究这类现象的主流理论框架，随后我们将引入统计物理的基本概念——统计系综理论。将统计物理与宏观的热力学概念结合，就可以分别从宏观和微观两个角度来研究同一个系统。在引入了统计物理的基本假设之后，统计物理的系综理论可以用于讨论早期量子论中黑体辐射、固体热容量、原子谱线、康普顿散射等问题；正是这些物理现象的涌现以及对其机制的探索最终导致了 1925 年量子力学的诞生。在复习了导致量子力学的重要实验现象以及旧量子论之后，我们将主要介绍现代量子力学理论框架，并讨论其最为简单的应用，这将包括：一维谐振子、三维的有心力场以及氢原子的量子力学理论。最后，对多自由度体系的量子理论有一定的了解，我们将简单介绍一下多电子原子以及分子的量子理论。

1 广义的力学体系、约束与广义坐标

¶ 分析力学处理的力学体系可以是复杂且多样性的：它可以是由分立的多个质点所构成的质点系——它由 N 个具有质量的质点构成；也可以是由不可数的、连续分布的质点所构成的连续介质——例如一根具有质量和张力分布的弦；还可以是随时空中分布的一个经典场——例如流体力学中的速度场或经典的电磁场。前两类的体系与最后一类的区别在于：前两类广义力学体系的动力学自由度都是刻画具有质量的实物粒子的集合之某种坐标；而最后一类（经典场）的动力学变量则是按照时空坐标分布的场本身。这恰恰体现了这个宇宙之中物质存在的两种基本形态：实物粒子和场。场也是物质存在的一种常见的基本形态，这一点读者通过对电磁学的学习应当已经有了基本了解：就像实物粒子一样，场也具有能量、动量、角动量等等物质的基本属性。事实上，在后续量子化之后，场和实物粒子可以完全和谐地统一在量子场的框架之下。

为了描写上述纷繁复杂的广义的力学体系，人们引进了所谓的广义坐标的概念。广义坐标脱胎于人们对于复杂的机械系统的力学研究。考察一个有 N 个质点构成的机械力学系统。这 N 个质点的直角坐标 $\mathbf{x}_i(t), i = 1, \dots, N$ 总是可以用来描写该质点系。但由于其各个质点之间可能存在某种约束，因此使用普通的直角坐标往往并不恰当，也不方便。约束的存在使得原先各质点的直角坐标间必须满足一系列的约束条件。这些约束条件可以包含很多类别，但是最为简单和常见的类型称为完整约束。此时 $3N$ 个 $\mathbf{x}_i(t)$ 之间并不独立，而是需满足 k 个独立的等式——它们仅仅包含坐标而不包含速度——所确定的约束条件：

$$\begin{cases} \phi_1(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t); t) = 0, \\ \vdots \\ \phi_k(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t); t) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

这样一来，实际上只有 $f = 3N - k$ 个分量是独立的。因此，更为方便的选择是直接使用完全独立的、恰当选择的另一系列变量： q_1, q_2, \dots, q_f 来唯一地描述一个广义的力学系统。这就是该力学系统的广义坐标，其中的 f 被称为该力学体系的自由度数。广义坐标对于时间的微商被称为广义速度。为了简化记号，我们将用： $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ 来统一标记力学体系的所有广义坐标，相应的广义速度则简记为： $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f)$ 。力学体系的完整约束 (1.1) 也可以等价地表达为：

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_N(q_1, q_2, \dots, q_f, t), \end{cases} \quad (1.2)$$

需要注意的是，只有在完整约束下，我们可以选择广义坐标的数目就等于力学系统的自由度数。所有不满足完整约束条件的约束被统称为非完整约束。最典型的情形是在约束的等式之中除了包含各个质点的坐标之外，还包含不可消去的、对各个速度的依赖。此

时式 (1.1) 中的 k 个约束条件需要推广为:

$$\begin{cases} \phi_1(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t); \dot{\mathbf{x}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(t); t) = 0, \\ \vdots \\ \phi_k(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t); \dot{\mathbf{x}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_N(t); t) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

在这中情况下, 我们选取的广义坐标 $q = (q_1, \dots, q_{f+r})$ 的数目往往会大于力学体系的实际自由度数目 f 。也就是说, 此时选取的系统广义坐标中必定包含 $r > 0$ 个“冗余的自由度”。描写系统的力学性质必须由 q —它包含外 $f + r$ 个坐标再加上 r 个冗余的约束条件共同加以确定 (因此, 体系的真正自由度数目仍然是 f)。最小的冗余自由度数目 r 的取决于该力学体系非完整约束 (1.3) 的具体形式。 r 实际上等于约束 (1.3) 中独立的、无法化为完整约束的个数; 一般而言: $0 \leq r \leq k$, 其中 $r = 0$ 实际上对应于完整约束的情形。

在机械力学的范畴中, 典型的非完整约束的例子有在水平面纯滚的刚体问题。在这类问题中, 纯滚的约束条件往往会同时涉及坐标和速度; 并且其中的速度依赖并无法完全消去。也就是说, 这些约束条件具有式 (1.3) 的形式。

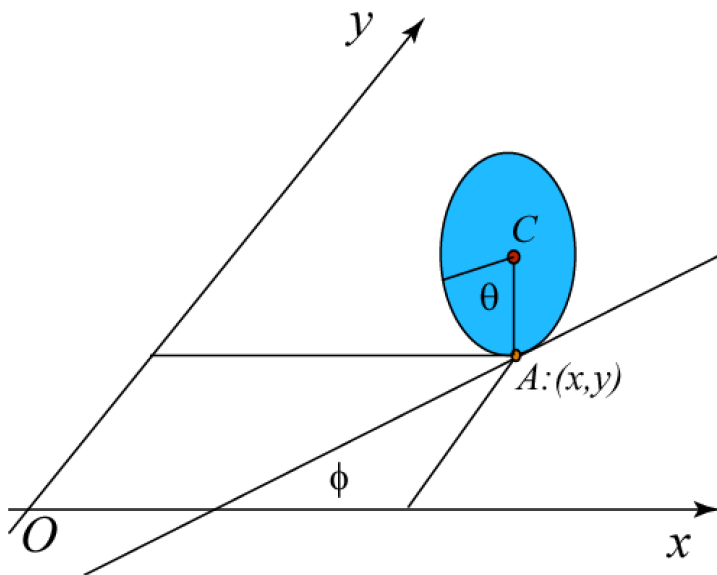


图 1.2: 一个在二维平面上纯滚动 (无滑动的滚动) 的圆盘。这是一个非完整约束的典型例子。

例题 1.1 二维平面上垂直纯滚的均匀圆盘 考虑一个半径为 a 的均匀圆盘, 它在二维平面 (取为 $x-y$ 平面) 上无滑动地纯滚。为了简单起见, 假定圆盘中心 (质心) C 点与圆盘和平面的接触点 A 之间的连线永远垂至于 $x-y$ 平面, 参见图 1.2。下面来分析它的力学自由度和约束的情况。

解: 我们可以取 A 点的坐标 (x, y) 为两个广义坐标来描写圆盘质心的位置。但是这还不足以完全确定圆盘的位置。另外一个需要知道的物理量是圆盘平面在 $x-y$ 平面的

投影与 x 轴之间的夹角 ϕ 。除此以外, 我们如果选定圆盘上面一个固定的点 B , 圆盘中心与 B 的连线 (CB) 与圆盘中心到 $x-y$ 平面的垂线 (也就是 CA) 之间的夹角 θ 。如果圆盘永远与 $x-y$ 平面垂直运动, 那么显然给定了 x, y, ϕ, θ 之后, 圆盘的位置就唯一地确定了。我们可以选取这 4 个参数为圆盘的 4 个广义坐标。

但是, 上面的讨论还没有考虑到纯滚的条件。如果圆盘不能够在平面上滑动, 那么显然上述几个广义坐标所对应的广义速度之间有联系。这个条件可以表述为:

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \cos \phi, \quad \dot{y} = a\dot{\theta} \sin \phi,$$

或者等价地写为:

$$dx = a d\theta \cos \phi, \quad dy = a d\theta \sin \phi, \quad (1.4)$$

也就是说, 广义坐标 x 和 y 的微分完全由广义坐标 θ 的微分以及另外一个广义坐标 ϕ 确定。它们不是独立的。于是, 这个力学系统中, 尽管我们可以选取 4 个广义坐标, 它的独立的自由度数目只是 $4 - 2 = 2$ 个。最为糟糕的是, 公式 (1.4) 所体现的约束无法积分出来。也就是说, 它无法转换成仅仅包含坐标的一个约束。这个约束中势必包含广义速度。这也就是我们前面提到的非完整约束。因此, 对于这个系统, 尽管系统的自由度数目是 2, 我们没有办法仅仅取两个广义坐标, 而必须选取 4 个广义坐标, 因为两个约束条件 (1.4) 中含有速度 (非完整约束)。应当说, 这个例子中讨论的仍然是非完整约束中比较好处理的一类。事实上, 这个问题是可以利用拉格朗日方程和推广的最小作用量原理来处理的 (参见第 ?? 节的讨论, 那里我们会给出这个力学问题的完全解)。实际的应用中可能还会出现更加复杂的约束, 例如由不等式描写的约束。

如果我们令 ϕ 永远只能取常数, 这时约束条件 (1.4) 可以积分出来, 使之变为完整约束。这时, 圆盘实际上只是在一条一维的直线上纯滚, 它的自由度数目是 1。这时, 实际上我们也可以只取一个广义坐标。在另一个极端下, 如果圆盘可以发生滑动, 那么上面讨论的约束条件根本不存在, 系统变成完全没有约束的力学体系, 其自由度数目是 4。而真正的纯滚, 只好为自由度数为 2 的圆盘取 4 个广义坐标 x, y, ϕ, θ 。

搞定

通过上述机械力学的例子, 我们说明了一个力学体系的广义坐标、自由度、完整约束、非完整约束等概念。对于经典场作为广义力学体系的情形, 非完整约束的例子也是会出现的。最典型的例子是具有规范对称性的矢量场 (比如电磁场)——其中的规范对称性实际上就体现为一种冗余性; 换句话说, 我们选择的描写电磁场的四矢势 $A_\mu(x)$ 并不都是物理上可直接观测到的, 在经典层面, 真正能够测量的是其对应的电磁场。

通过本节介绍性讨论我们看到, 当一个机械力学系统包含约束时, 虽然系统真实的自由度数目往往会减少, 但是由于有未知的“约束力”的出现, 该力学问题反而变得更加棘手了。对于前面讨论过的完整约束的力学体系, 或者是上面例子中这类非完整约束的力学体系, 历史上, 人们基于牛顿定律, 提出了虚功原理 (或其推广达朗伯原理) 专门来处理这类具有约束的机械力学问题; 基于虚功原理或达朗伯原理, 在选取恰当的广义坐标后, 可直接导出一个含约束的机械力学体系的广义坐标所满足的经典运动方程——这就给出著名的欧拉-拉格朗日方程, 参见第 2 节的介绍。这实际上也是分析力学中拉格朗日力学的

历史源起。但以更加现代的观点来看，正如我们前面曾指出的那样，一个广义的力学问题所涉及的自由度往往不只是机械的自由度；它们还有可能还包含其他非机械的自由度，比如热力学的或电磁的自由度等；抑或是虽然仍是机械的力学自由度，但是它却涉及了高速的相对论性粒子的自由度等等。总之，如果我们希望将原有的、非相对论性的机械力学规律推广到上述这些更广泛的物理学自由度，我们就需要一个比原有机机械牛顿定律更加宽泛和基本的原理。这个原理将可以帮助我们导出一个更为一般的广义力学体系的经典运动方程。这其实就是我们下一章即将讨论的变分原理——最小作用量原理。

2 虚功原理和达朗伯原理

前一节对于有约束的力学系统及广义坐标的引入作了简要的介绍。本节中我们介绍适用于机械力学系统的虚功原理和达朗伯原理，并由其出发导出完整约束体系的拉格朗日方程。

首先考虑一个处于力学平衡的、有约束的机械力学体系。考虑某个时刻 t 系统坐标的一个微小的、与运动方程和约束条件都兼容的虚拟位移： $\delta \mathbf{x}_i$ 。这称为该力学系统的一个虚位移。如果作用在质点 i 上的力为 \mathbf{F}_i ，由于每一个质点都处于力学平衡，显然 $\mathbf{F}_i = 0$ 。因此我们有：

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (1.5)$$

我们现在将作用于粒子 i 上的力 \mathbf{F}_i 分为两个部分： $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(c)}$ ，其中 $\mathbf{F}_i^{(a)}$ 是所谓的主动力，也就是除去约束引起的力之外的所有的力； $\mathbf{F}_i^{(c)}$ 称为约束力，它完全是由于约束条件引起的力。于是我们有：

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{x}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0,$$

现在我们假设我们的约束永远满足：

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (1.6)$$

也就是说约束力的虚功之和为零。这包含了相当多的一类完整约束。例如，如果粒子只能在一个曲面上运动，那么约束力一定沿曲面法线方向（假定没有滑动摩擦力），而虚位移一定沿切向，因而其虚功为零。在此条件下我们得到：

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (1.7)$$

即所有主动力的虚功之和也为零。这个结论被称为静力学中的虚功原理。由于所有的虚位移 $\delta \mathbf{x}_i$ 并不独立（有约束），因此我们并不能由此得出所有的主动力都为零。虚功原理的好

处在于，它仅仅涉及到主动力（已知的）的虚功，而不涉及未知的约束力。因此可以方便地运用到有约束的静力学问题中。

如果我们考察的力学系统并不处于力学平衡，那么我们可以将力学的系统的运动方程 $\mathbf{F}_i = 0$ 替换为牛顿方程 $\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$ 。于是虚功原理推广为：

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0. \quad (1.8)$$

这个公式通常被称为达朗伯原理 (d'Alembert's principle)。这个原理首先由法国学者达朗伯 (d'Alembert, Jean le Rond, 1717-1783) 发现，它也可以看成是分析力学的一个基本原理，在物理上它与无耗散的牛顿定律等价。

现在假定我们仅仅考虑完整约束的力学体系。对这类力学体系我们可以选取独立的广义坐标 q_i ，其数目恰好等于体系的自由度数，即公式 (??) 成立。从上述达朗伯原理出发，利用公式 (??) 进行换元，我们可以将达朗伯原理中的虚位移用广义坐标 q 的变分写出：

$$\delta \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.9)$$

其中我们引用了爱因斯坦求和规则，即重复的指标意味着求和。于是主动力的虚功为：

$$\mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j \delta q_j, \quad (1.10)$$

其中我们定义了广义力：

$$Q_j = \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}. \quad (1.11)$$

达朗伯原理中的另外一项涉及动量的时间导数。我们也将它换为广义坐标及其时间导数表达：

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.12)$$

现在注意到：

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \right). \quad (1.13)$$

另一方面：

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad (1.14)$$

从而我们有：

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}. \quad (1.15)$$

这些关系带入到公式 (1.13) 中，我们得到发现达朗伯原理可以写为：

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (1.16)$$

对于完整约束，由于我们取的各个 q_j 是完全独立的变量，因此达朗伯原理要求：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j . \quad (1.17)$$

这就是著名的欧拉-拉格朗日方程 (的一种形式)。如果主动力是由一个不依赖于速度的势能 V 给出的：

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} , \quad (1.18)$$

其中 V 只是各个坐标的函数，那么上面定义的广义力可以写为：

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} , \quad (1.19)$$

于是前面给出的欧拉-拉格朗日方程可以写为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (1.20)$$

其中我们定义的系统的拉格朗日量 L 为系统的动能与势能的差：

$$L = T - V , \quad (1.21)$$

这部分回答了前面提及的事情，对一个保守的机械力学体系，它的拉格朗日量可以取为动能减去势能。于是我们看到，只要得到了系统的拉格朗日量，我们就可以直接写出系统的含有真实自由度的运动方程 (1.20)。

第一部

经典物理部分 分析力学与经典电动力学

第二章

力学体系的作用量与运动方程

本章提要

- 狭义相对论的时空观: 标量、四矢量、张量、张量场
- 最小作用量原理及其含义
- 粒子的作用量: 相对论性自由粒子的作用量
- 粒子与外场的相互作用
- 非相对论近似
- 对称性: 空间平移、时间平移、空间转动与分立对称性
- 哈密顿力学概要: 正则方程、刘维尔定理与泊松括号

前

一章我们简介了近现代理论物理发展的大致脉络及分类。我们还简要介绍了广义的力学体系的概念以及约束对力学的影响。如果需要给出一个广义力学的运动规律，我们需要一个更加广义的原理。本章中我们将开始介绍经典物理中分析力学的理论框架，这个理论框架可以将我们熟悉的、狭义的牛顿机械力学的理论框架推广到所有经典的粒子或者经典的场，正是这种推广使得分析力学的理论框架构成了串联现代理论物理各个分支的一个总框架：在此框架下，我们将首先介绍狭义相对论的时空观，随后将介绍与此相适应的最小作用量原理以及由此导出的一般的广义力学体系之经典运动方程。有趣的是，经典分析力学大致包含两个完全等价的理论框架：一个是拉格朗日力学，另一个是哈密顿力学。本章将主要讨论前者，后者的简要介绍将在本章的最后一节给出。这两个理论框架在经过适当的量子化后都可以导致量子理论。

3 狭义相对论的时空观

无论是粒子 (质点) 还是场, 其动力学总是在一个特定的时空背景之上发生的, 这个时空背景就被称为参照系。从大的时空尺度来看, 我们所处的宇宙是均匀和各向同性的。相互做匀速直线运动的一系列参照系被称为惯性参照系, 或简称惯性系。按照定义, 惯性系实际上是牛顿力学定律在其中严格成立的参照系。物理的规律虽然是基于某个特定的参照系来描述的, 但物理规律本身并不依赖于匀速的惯性参照系的选取, 这就是伽利略提出的相对性原理。

以读者所熟知的牛顿力学为例, 其力学规律是建立在伽利略时空观基础上的; 而相对论力学则是以狭义相对论的时空观为基础的。不同的惯性参照系中, 物理量的数值并不一定相同, 但体现物理量相互关系的基本物理规律是共同的。这一原理在伽利略时空观和狭义相对论时空观中同样成立。本节中, 我们简要讲述狭义相对论时空观的基本要点, 特别是不同的物理量在各个惯性系之间的变换关系, 这些将为后面引入相对论性的分析力学理论框架奠定基础。

爱因斯坦的狭义相对论是建立在相对性原理和光速不变原理基础上的时空观。在这种时空观中, 时间和空间不可分割地统一在了一起, 它们构成了所谓的闵可夫斯基时空, 或闵氏时空 (Minkowski spacetime)。不同参照系之间时空坐标的变换——即著名的洛伦兹变换——可以看成是闵氏时空中不同坐标系 (参照系) 之间的变换 (或者说“转动”)。

在洛伦兹变换下具有“确定”变换规则的物理量统称为张量。张量可以按照其独立指标个数的多少 (这又被称为张量的阶) 分为不同阶数的张量。最简单的张量——也就是零阶张量——在洛伦兹变换下不变, 它们又被称为洛伦兹标量。最为典型的标量是两点 (或者说两个事件) 之间的不变间隔的平方, Δs^2 :

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (2.1)$$

这实际上是不同参照系下光速不变原理的直接要求。

在闵氏时空中, 空间和时间坐标一起构成了洛伦兹四矢量, 也就是一阶张量, 它们具有一个张量指标。与通常三维欧几里德空间不同的是, 为了能够更好地体现四维时空中的不变性, 我们将区别两种不同变换规则的洛伦兹四矢量。¹ 我们将闵氏空间中的时空坐标用一个四维空间的矢量来标记。具体地说, 我们令:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (2.2)$$

我们将使用 x^μ 来统一标记列矢量 $(x^0, x^1, x^2, x^3)^T$, 并称它为逆变四矢量 (或逆变矢量)。

¹从原则上讲, 在狭义相对论中也可以在所有四矢量的零 (时间) 分量中引入纯虚数单位 i 。这样一来可以不必区分协变四矢量和逆变四矢量, 也可以不必引入度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 。不过, 虽然对于狭义相对论来说这也许比较方便, 但对于广义相对论来说, 引入度规是不可避免的。所以我们采用了引入度规和两种四矢量的讲述方法。

用它的时间分量与空间分量表达，一个逆变四矢量可以写成：

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) . \quad (2.3)$$

我们约定：逆变四矢量的指标出现在其相应符号的右上角。张量右上角的指标因此也被称为逆变指标或上标。与逆变四矢量相对应，我们称

$$x_\mu = (x^0, -\mathbf{x}) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) . \quad (2.4)$$

为一个协变四矢量。一个协变四矢量的指标是在其符号的右下角。它和相应的逆变四矢量的时间分量相同，空间分量相差一个负号。这些处于物理量符号的右下角的张量指标因此被称为协变指标或者下标。

从形式上讲，一个协变四矢量 x_μ 和与其相应的逆变四矢量 x^μ 之间可以通过升高或降低指标的操作来相互转换。启用爱因斯坦求和规则，即对于重复的指标隐含求和：

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu , \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu . \quad (2.5)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 称为闵氏空间的度规张量，而 $\eta^{\mu\nu}$ 为度规张量的逆，也就是说它们满足：

$$\eta_{\mu\beta} \eta^{\beta\nu} = \delta_\mu^\nu , \quad (2.6)$$

其中 δ_μ^ν 为 Kronecher 符号，它在两个指标 μ, ν 相同时为 1，不同时则为零。在狭义相对论的闵氏时空中，度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 和它的逆 $\eta^{\mu\nu}$ 的每个分量其实都相等，也就是说这时 $\eta_{\mu\nu}$ 自己就是自己的逆。它们的表达式为：²

$$\eta_{00} = \eta^{00} = 1 ; \quad \eta_{ii} = \eta^{ii} = -1 , \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

它们的其余非对角分量皆为零。大家不难验证，公式 (2.5) 其实与我们前面给出的逆变、协变四矢量的定义是完全一致的，只不过换了一种更为“文明”的写法而已。

¶ 在公式 (2.5) 中，我们将度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 中的一个协变指标与逆变四矢量 x^ν 的逆变指标取为相同并按照爱因斯坦求和规则对其求和，这样的操作称为指标的缩并 (contraction)。在引入了协变矢量和逆变矢量后，所有的缩并一定是在一个协变指标和一个逆变指标之间进行。也就是说，总是一个上标和一个下标缩并，而绝不会有二个上标或二个下标的缩并。同时，被缩并掉的一对指标由于已被求和掉了，因此它们已经不再具有矢量指标的含义了。正因如此，它们也被称为傀标。一对傀标原则上可以替换成任意的字母，只要仍然是重复的指标 (即保持被求和的状态) 就可以了。

² 闵氏时空中的度规的定义并不统一，有的书中采用的 $\eta_{\mu\nu}$ 的定义与我们这里的定义正好相差一个负号。

指标的缩并的一大优势是可以用来构造洛伦兹标量。例如，利用度规张量、逆变四矢量以及它相应的协变四矢量，闵氏空间中的两个无限接近的点（事件）之间的不变间隔平方 ds^2 可以写成下列等价形式中的任何一种：

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu . \quad (2.8)$$

它在任意的洛伦兹变换下是不变的标量。它可以看成是闵氏空间中无穷接近的两点（两个事件）之间的“距离”的平方，只不过这种距离是以 $\eta_{\mu\nu}$ 为度规计算的，因此距离的平方并不一定总是正的。具体来说，如果 $ds^2 > 0$ ，这两个事件的间隔被称为类时的；如果 $ds^2 < 0$ ，这两个事件的间隔被称为类空的；而如果 $ds^2 = 0$ ，这两个事件的间隔被称为类光的。

将任何一个协变四矢量 A_μ 与任意一个逆变四矢量 B^μ 相乘并且缩并它们的指标，我们也得到一个洛伦兹标量，它被称为这两个四矢量的内积：

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu . \quad (2.9)$$

我们前面提到的不变间隔的平方 (2.8) 就是坐标间隔四矢量 dx 与它自己的内积。因此从数学上讲，逆变四矢量的矢量空间与协变四矢量的矢量空间实际上构成了相互对偶的矢量空间。用逆变指标和协变指标的语言来说，只要我们将一个逆变指标和一个协变指标缩并，假定我们的物理量中再没有其他的矢量指标，我们就一定得到一个洛伦兹标量。一般来说，将一个任意多个指标的张量的一个上标与一个下标缩并，我们就得到了一个阶数减少 2 的张量。

¶ 前面已经提到，狭义相对论中的四矢量具有明确的变换规则。以 x^μ 为例，在不同参照系之间的洛伦兹变换下我们有：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu , \quad (2.10)$$

其中 Λ^μ_ν 是洛伦兹变换的矩阵。³ 一个一般的洛伦兹“转动”变换十分类似于一个“四维空间”中的广义转动。它可以分解为六种基本“转动”的合成。这六种“转动”分别对应于在 0-1, 0-2, 0-3 平面内的转动（它们又被称为在相应空间方向的推促）和在 1-2, 1-3, 2-3 平面内的转动。这后三种转动就是普通三维空间内的转动。对于同学们熟悉的 S' 参照系（坐标为 x'^μ ）相对于 S 参照系（坐标为 x^μ ）沿 x 轴方向以匀速 v 运动的情况，我们称之为沿着 x 轴的一个推促，其洛伦兹变换矩阵 Λ^μ_ν 具有如下的形式：

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} , \quad (2.11)$$

³请注意洛伦兹变换矩阵 Λ^μ_ν 的两个指标的排列。我特别注意将上下两个指标错开，避免排在一列上（如 Λ^μ_μ ）。这样我们可以利用 $\eta_{\mu\nu}$ 或 $\eta^{\mu\nu}$ 将第一或第二个指标进行升降（例如： $\Lambda_{\mu\nu}$ ，或 $\Lambda^{\mu\nu}$ ），由于一般 $\Lambda^{\mu\nu} \neq \Lambda^{\nu\mu}$ ，因此两个指标的前后顺序是不可调换的。

其中 $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 。这也就是大家在普通物理中见到的形式。

事实上, 我们可以将变换规则 (2.10) 视为逆变四矢量的定义。换句话说, 凡是在两个参考系中按照洛伦兹变换 (2.10) 的形式变换的四个量就定义了一个逆变四矢量。利用度规张量降低指标, 我们可以得到其相应的协变四矢量 (x_μ) 的变换规则。类似地, 一个具有任意个上标或下标的张量在洛伦兹变换下的变换规则就是它的每一个上标 (下标) 都按照相应的逆变 (协变) 四矢量的变换规则来变。例如, 一个张量 $A^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma\kappa}$ 具有两个上标和三个下标, 那么它在洛伦兹变换下的规则应当是:

$$A'^{\mu'\nu'}{}_{\rho'\sigma'\kappa'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda_{\rho'}{}^{\rho} \Lambda_{\sigma'}{}^{\sigma} \Lambda_{\kappa'}{}^{\kappa} A^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma\kappa}. \quad (2.12)$$

请大家特别注意上式中的上下标安排。它符合我们前面所说的, 一定是一个上标和一个下标缩并。同样的, 这个式子实际上可以看成是型如 $A^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma\kappa}$ 的张量的定义。

前面提到的任意两个四矢量的内积都是在洛伦兹变换下不变的事实对于洛伦兹变换矩阵 Λ 有所限制。这个限制的数学描述就是:

$$\Lambda_{\mu\alpha} \Lambda^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.13)$$

事实上, 所有满足这个条件的变换矩阵构成一个群, 它被称为洛伦兹群。

¶ 为了后续运用方便, 我们有时候会缩写四矢量的指标而用一个简单的 x 来替代完整的四矢量 x^μ 。如果一个物理量是时空点 $x \equiv x^\mu$ 的函数, 我们称之为场。场按照其在洛伦兹变换下的变换性质又可以分为标量场 $\Phi(x)$ 、矢量场 $A^\mu(x)$ 、张量场 $F^{\mu\nu}(x)$ 等。一个重要的性质就是对于时空的偏微商算符可以作用在场上, 从而构成多一个指标 (协变或逆变) 的场。利用偏微商的锁链法则和洛伦兹变换所满足的性质 (2.13) 可以证明:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right), \quad (2.14)$$

实际上是一个具有协变指标 (下标) 的微分算符。因此, 如果我们有一个标量场 $\Phi(x)$, 那么对它的时空梯度 $\partial_\mu \Phi(x)$ 就是一个协变四矢量场。当然, 我们可以利用度规张量升高指标得到具有逆变指标的微分算符: $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \partial/\partial x_\mu$, 它与矢量场可以进行点乘缩并、叉乘和并矢的运算。时空梯度算符本身也可以与自身缩并成一个二阶微分算符, 这一般称为达朗伯算符:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.15)$$

更多场的时空微分的讨论我们会在后面涉及到电磁场时再进行。

¶ 由于真空中的光速总是出现在与相对论相关的各种物理之中, 因此我们从本节往后我们将选取速度的单位使得

$$c = 1, \quad x^0 = ct = t. \quad (2.16)$$

这样的好处是不言而喻的, 同时这也与国际计量委员会 (CIPM) 所倡导的趋势相符。

4 最小作用量原理

前一节讨论了狭义相对论时空 (或闵氏时空) 的几何学, 本节我们来开始讨论在此时空背景上一个广义的力学体系的动力学。正如第 1 节末提到的, 我们需要一个适用性更加广泛的原理以导出一个广义的力学体系的经典运动方程。

一个广义的力学体系的所有广义坐标 q 构成了一个“空间”, 称为该力学体系的位型空间。如果仅仅考虑完整约束的情形, 该“空间”的维数就等于系统的自由度数, 即独立的广义坐标的数目。力学体系的位型空间一般不是平直的线性矢量空间, 并且其拓扑结构也往往不是平庸的。简单的例子就是约束在一个二维球面上运动的质点, 那么其位型空间是一个二维球面。此时质点的广义坐标可以取为该质点所在的经度和纬度。在数学上, 这类“空间”被称为微分流形 (differentiable manifold)。因此一个在二维球面上运动的质点的位型空间是一个具有二维球面拓扑的二维微分流形。更精确和现代的称谓应当将位型空间改称为位型流形 (configuration manifold), 不过在本讲义中我们仍将沿用位型空间这一比较传统的称呼。

相应的一个力学体系的广义速度 \dot{q} 实际上也构成一个“空间”。并且这个空间原则上是与该力学体系的位型空间不同的空间。例如, 对于上面提到的在一个二维球面上运动的质点, 其位型空间是一个二维球面; 但其广义速度对应的空间则是在球面上每一点的一个切平面。这两种东西捆绑在一起就构成的一个新的数学结构, 称为力学体系位型空间 (流形) 的切丛 (tangent bundle)。当然, 如果我们仅仅考虑一个在三维平直空间的质点, 其广义坐标 (取为直角坐标) 所在位型空间和其广义速度的空间完全一样, 都是三维平直的欧几里德空间。

4.1 最小作用量原理

¶ 现在我们将叙述经典分析力学中最为重要的原理。经典力学体系的运动规律可以完全概括在这个原理中, 这就是最小作用量原理 (least action principle), 又称为哈密顿原理。最小作用量原理在经典力学乃至整个物理学中的重要地位怎么强调都不为过。

定理 2.1 力学体系具有一个与其运动相关的物理量称为作用量 S , 它是一个洛伦兹标量。如果一个力学体系在给定的时刻 t_1 和 t_2 分别由给定的广义坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 描写; 那么该力学体系的作用量 S 可以表达为联结初末态两个位型之间的各种可能轨道的泛函:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad q(t_1) = q^{(1)}, \quad q(t_2) = q^{(2)}, \quad (2.17)$$

这里的函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 称为体系的拉格朗日量 (或拉格朗日函数), 该力学体系在时刻 t_1 和 t_2 之间联结广义坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 的真实运动轨道——即其经典运动方程所给出的轨道——是使得体系的作用量 S 取极小值的那个轨道。⁴

⁴ 仅就导出运动方程而言, 我们只需要它是一个极值点。但是为了保证至少在自由粒子情形下的质量为正

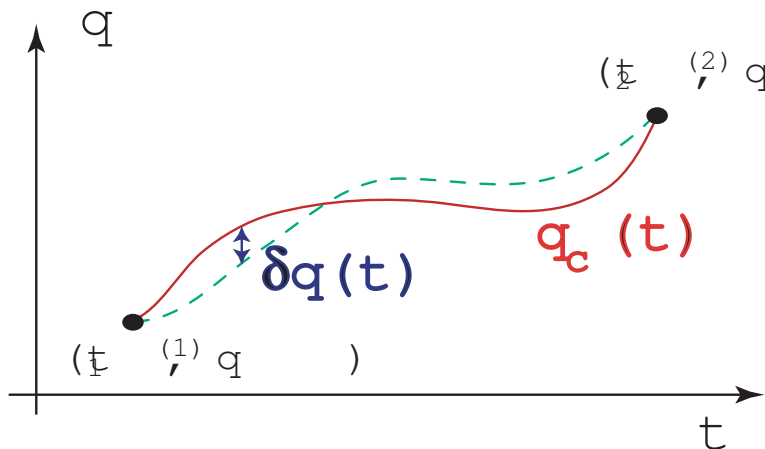


图 2.1: 最小作用量原理示意图。对于给定系统在位型空间的起始点和终止点, 系统真实的 (也就是运动方程所描述的) 轨道 $q_c(t)$ (图中红色轨道) 一定使得作用量取极小值。也就是说, 如果我们考虑真实轨道 $q_c(t)$ 附近的一个无穷小变分 $\delta q(t)$, 作用量对于轨道的一级变分为零。

最小作用量原理是分析力学 (乃至整个理论物理) 最重要的原理之一。因此, 我们有必要将其含义更为详细地阐述一下, 参考图 2.1。这个原理实际包含了以下三重含义:

- ☞ 第一, 对于任何一个力学体系都可以写出它的一个作用量 S , 它是一个洛伦兹标量。这个条件实际上是与后面提到的力学体系的真实运动一定使得作用量取极小相一致的。经典力学中, 力学体系的真实运动是唯一的 (决定论)。因此, 在一个参照系中得到的力学体系的运动轨道, 变换到另一个参照系中应当也是真实的运动轨道。要保证这一点的最简单的选择就是作用量在洛伦兹变换下是一个不变的标量。这个假设使得由最小作用量原理推出的经典力学方程自动地与狭义相对论兼容。
- ☞ 第二, 在初始和终止时刻 t_1, t_2 和位型空间中的位置 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 给定的情形下, 体系的作用量是系统各种可能轨道 $q(t)$ 的泛函, 它是系统的拉格朗日量对时间的积分。由于时间在狭义相对论中并不是洛伦兹标量, 因此一个力学体系的拉格朗日量本身也不是洛伦兹标量。但是, 在非相对论极限下, 时间与空间分离, 这时系统的作用量和拉格朗日量都是 (三维意义下的) 标量。值得指出的是, 系统的拉格朗日量只依赖于广义坐标和广义速度, 不依赖于广义坐标的更高阶的时间微商, 这一点实际上是沿袭了牛顿力学的思想: 即给定力学体系的初始位置、初始速度就足以确定一个力学体系以后的运动。
- ☞ 第三, 在起始点和终止点都固定的情况下, 系统真实的运动轨道 $q_c(t)$, 如果我们将与其他所有可能的轨道相比, 一定是使得系统的作用量 S 取极小值的轨道 (参考

值, 这才要求该极值是极小值而不是极大值。同时, 对于最一般的力学运动而言, 也并不能保证真实的运动方程总是给出极小值, 但可以保证它是一个极值点, 尽管对于多数情况而言, 它的确是极小值。

图 2.1)。下面变分法的计算和讨论告诉我们，这个轨道一般是唯一的，这正是经典力学决定论的体现。

¶ 最后我们指出，上述对于最小作用量原理的讨论是对于一系列分立的广义坐标 $q_i, i = 1, \dots, f$ 来进行的。如果我们考虑的是按照时空分布的连续多的动力学自由度——这包括连续介质的力学和经典场论系统——那么随着体系的动力学自由度由 q_i 扩展为 $q(\mathbf{x})$ ，其中 \mathbf{x} 相当于原先的指标 i ，只不过它可以遍及三维连续空间的某个区域 Ω 。 $q(\mathbf{x})$ 则代表位于空间点 \mathbf{x} 处的某个动力学自由度 q 。此时该力学体系的拉格朗日函数 L 也相应地化为一个空间体积积分：

$$q_i \Rightarrow q(\mathbf{x}), \quad \dot{q}_i \Rightarrow \dot{q}(\mathbf{x}),$$

$$L(q, \dot{q}, t) = \int_{\Omega} d^3\mathbf{x} \mathcal{L}[q(\mathbf{x}), \dot{q}(\mathbf{x}), t], \quad (2.18)$$

其中的 $q(\mathbf{x})$ 是按照空间 \mathbf{x} 连续分布的体系动力学自由度； $\mathcal{L}[q(\mathbf{x}), \dot{q}(\mathbf{x}), t]$ 则代表了 \mathbf{x} 处单位体积的拉格朗日量，它称为拉格朗日密度。这方面的例子包括随空间分布的各种场：温度场、速度场、电磁场等等。此时上述的最小作用量原理仍然适用。具体来说，图 2.1 仍然可以适用，只是我们需要将相应的广义坐标 q 理解为具有相应自由度的多维坐标而已。具体来说，此时我们需要将初始和终止时刻的给定动力学坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 也拓展为 $q^{(1)}(\mathbf{x})$ 和 $q^{(2)}(\mathbf{x})$ 。此时体系的作用量则由下式给出：

$$S[q(\mathbf{x}, t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d^3\mathbf{x} \mathcal{L}[q(\mathbf{x}), \dot{q}(\mathbf{x}), t], \quad q(\mathbf{x}, t_1) = q^{(1)}(\mathbf{x}), \quad q(\mathbf{x}, t_2) = q^{(2)}(\mathbf{x}),$$

(2.19)

特别值得注意的是，由于作用量 S 和四维积分的体积元 $dt d^3\mathbf{x} = d^4x$ 都是洛伦兹标量，这说明连续场系统的拉格朗日密度 \mathcal{L} 一定也是一个洛伦兹标量。概括来说，在场系统的分析力学描述中，场 $q(\mathbf{x})$ 本身才是这个体系的动力学自由度，而空间位置 \mathbf{x} 更像是一个指标，实际上它就是从分立情形的 q_i 中的 i 拓展而来的。理解这一点对于我们后面统一地处理分立系统和连续系统会很有帮助。

4.2 力学体系的运动方程

¶ 从上述最小作用量原理出发，利用变分法就可以求出力学体系的运动方程，此即欧拉-拉格朗日方程。由于推导的过程非常雷同，为了符号简单一些，我们下面仅仅就一系列分立的广义坐标的情形进行论证。

为此我们将力学体系的真实运动轨道记为 $q_c(t)$ ， $q_c(t_1) = q^{(1)}$ ， $q_c(t_2) = q^{(2)}$ 。我们考虑力学体系的一个对于其真实轨道的假想的微小偏离： $q(t) = q_c(t) + \delta q(t)$ 。由于该力学体系的初始和终止位型已经确定，我们考虑的微小偏离必定满足： $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ 。力学体系的轨道对于给定的真实轨道的微小偏离 $\delta q(t)$ 在数学上称为对真实轨道的变分。它不同于微分之处在于它本身仍是时间的任意无穷小函数。

如果系统对于其真实轨道的变分 $\delta q(t)$ 是一个 (一阶) 无穷小; 那么最小作用量原理要求, 这种变分所带来的系统的作用量的一阶变化必定为零, 即真实轨道对于系统的轨道的一阶变分来说是一极值点 (extremum):

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_c + \delta q, \dot{q}_c + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_c, \dot{q}_c, t) dt = 0. \quad (2.20)$$

当 δq 为无穷小量, 我们有:⁵

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right),$$

这里拉格朗日量被看成是 q 和 \dot{q} 的函数, 因此上式中的偏微分也应当在此意义下来理解。同时, 由于我们考虑的是系统在其真实轨道附近的变分, 因此上面公式中的偏微商应当取其真实轨道 $q_c(t)$ 处的值。现在注意到:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i.$$

带入后第一项的完全微分变为在边界点的函数值之差:

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (2.21)$$

在端点处由于我们要求: $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, 因此上式中第一项的贡献为零。由于第二项必须对于任意的 $\delta q_i(t)$ 都等于零, 又由于各 $\delta q_i(t)$ 是完全独立的变分, 唯一的可能是上式括号中的量 (对每一个 i) 都恒等于零,⁶ 于是我们就得到了力学体系的真实运动的轨道所满足的方程:

欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange Equation)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, f. \quad (2.22)$$

这就是著名的欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange equation)。它是一个经典力学体系的广义坐标所满足的二阶常微分方程。

最小作用量原理和变分法告诉我们, 一旦给定了一个力学体系的拉格朗日量 (作用量), 体系的运动就由欧拉-拉格朗日方程决定。所以, 我们可以说经典力学体系的性质完全由其拉格朗日量 (作用量) 所确定。正是在此意义下我们说一个经典力学体系的拉格朗日量 (作用量) 集成了该力学体系的所有重要力学信息。

⁵这里我们运用了爱因斯坦求和规则: 即所有重复的指标隐含着求和。所以, 下面这个公式中的指标 i 要对系统所有自由度数求和。

⁶这个事实在数学上被称为变分学基本引理。

现在我们定义该力学体系中与某个广义坐标 q_i 共轭的广义动量，它又称为正则动量：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (2.23)$$

注意，与一个广义坐标 q_i 共轭的广义动量 p_i 恰好就是在变分计算时边界项中 δq_i 前面的系数，参见公式 (2.21)。利用广义动量，力学体系的运动方程也可以写成：

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} . \quad (2.24)$$

由于这个式子与通常的牛顿力学方程的类似性，方程的右边，即 $\partial L / \partial q_i$ ，又被称为相应的广义力。

¶ 在经典力学中，所有的物理都体现在力学体系的经典运动方程中。换句话说，即使系统的拉格朗日量或作用量改变了，只要体系的经典运动方程仍然保持不变，该系统的物理就没有改变。这个事实意味着一个经典力学体系的拉格朗日量本身的数值并没有什么绝对的意义，只是由它导出的经典运动方程——即欧拉-拉格朗日方程 (2.22)——才有绝对的意义。例如，我们完全可以在拉格朗日量上加上一个任意给定函数对于时间的全微分：

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt} , \quad (2.25)$$

显然，对于 L' 来说，其作用量比 L 的作用量多出 $f(q, t)$ 在终止和初始时刻的差。但由于我们考虑的变分 $\delta q(t)$ 在端点处为零，因此加入 df/dt 并不改变最小作用量原理所确定的力学体系的经典运动方程。即 L' 与 L 所确定的运动方程是完全一样的，因此两者在经典力学范畴内是完全等价的。这个事实我们在后面还会多次用到。

5 相对论性自由粒子的作用量

¶ 前两节我们讨论了狭义相对论的时空观以及经典力学中具有普遍性的最小作用量原理。本节中，我们将这两者结合起来讨论相对论性的力学问题。从最小作用量原理出发讨论广义力学体系的优势在于，从最小作用量原理所蕴含的洛伦兹不变性出发，再加上一些对称性考虑，我们几乎可以唯一地确定出一个相对论性自由粒子的作用量或拉格朗日量。

在相对论时空观中，一个粒子运动的轨道被称为世界线。一个世界线可以用 (四个) 参数方程： $x^\mu = x^\mu(\tau)$ 来给出。⁷ 这里 x^μ 是点粒子的坐标四矢量； τ 是描写世界线上的参数 (一个洛伦兹标量)。⁸ 作为洛伦兹标量，自由粒子的作用量只可能具有下列形式：

$$S = -mc \int ds = -m \int ds = -m \int d\tau \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} \right)^{1/2} . \quad (2.26)$$

⁷如果你愿意，你可以从 $x^0 = ct = x^0(\tau)$ 中将 τ 反解出来代入到 $x^i(\tau)$ 中，就给出粒子的三维坐标作为时间的轨道方程。但是在相对论中，实际上运用四维参数形式的世界线方程更为方便，因为在相对论的情形下时间并不是洛伦兹标量。

⁸这里 τ 可以取为粒子的“原时”： $d\tau = ds/c = ds$ ，但也可以是任何其他的世界线参量。

其中 $ds = (dx_\mu dx^\mu)^{1/2}$ 为该粒子的不变间隔。它也可以写成对世界线参数 τ 的微分形式。另外一种说法是，自由粒子的作用量正比于它的世界线的“长度”。⁹ 一个自由粒子的作用量必定具有这种形式的原因是，时空平移不变性（自由粒子）要求拉格朗日量不能依赖于时空坐标；洛伦兹标量表明几乎我们必须选择 ds ，因为这是一个自由粒子唯一具有的标量。前面的因子 m 完全是为了使得作用量具有大家约定俗成的量纲。¹⁰ 这里 $c = 1$ 是真空中光速（洛伦兹标量）；参数 m 必须也是一个洛伦兹标量，它是一个与所考虑的粒子的惯性性质有关，且具有质量量纲的物理量。我们称之为粒子的静止质量。我们随后会说明它一定是大于零的。

¶ 粒子的世界线可以用粒子的固有时 τ 来描写，也可以用其他的标量参数来描述。例如，我们可以引入另一个参数 $\tilde{\tau}(\tau)$ ，来重新参数化粒子的世界线：

$$x^\mu = x^\mu(\tau) = x^\mu[\tau(\tilde{\tau})], \quad \tau = \tau(\tilde{\tau}), \quad (2.27)$$

这个变换称为粒子世界线的重参数化变换。在重参数化变换下，我们发现上面的自由粒子的作用量 (2.26) 是不变的，即它也可以写为：

$$S = -mc \int d\tilde{\tau} \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}}\right) \left(\frac{dx_\mu}{d\tilde{\tau}}\right)}. \quad (2.28)$$

因此描写粒子世界线的参数 τ 可以是粒子的固有时，也可以是固有时的任意单调增函数，而自由粒子的作用量 (2.26) 在其世界线的重新参数化变换 (2.27) 下不变。这就是所谓的重参数化不变性 (reparametrization invariance)。

¶ 下面我们来考察作用量 (2.26) 所导出的运动方程——即相对论性自由粒子的欧拉-拉格朗日方程。这个运动方程可以由两种方式来获得。一种是采用三维形式，即首先写出拉格朗日量，然后利用普遍的欧拉-拉格朗日方程 (2.22) 得出；另一种方法则是采用四维协变的形式，对作用量 (2.26) 取变分。下面我们将分别利用这两种方法来导出自由粒子的运动方程。

首先利用三维形式的拉格朗日量来讨论。为此我们注意到： $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2} = c dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$ ，因此我们得到一个相对论性自由粒子的拉格朗日量为：

$$L(\mathbf{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = -m\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}. \quad (2.29)$$

我们立刻得到粒子的广义动量为：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (2.30)$$

这正是大家已有所了解的一个相对论性粒子的动量。粒子的运动方程为：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (2.31)$$

⁹这里的长度是在闵氏空间中以 $\eta_{\mu\nu}$ 为度规的长度。

¹⁰具体来说，作用量具有能量乘以时间的量纲；因此拉格朗日量具有能量的量纲。

它的解实际上是匀速直线运动。这里我们顺便可以证明，匀速直线运动的轨道的确使得系统的作用量取极小值，只要质量参数满足 $m > 0$ 。¹¹ 这意味着粒子的静止质量一定是非负的实数。¹²

下面我们利用四维协变形式的变分法来导出运动方程：

$$\delta S = -m \int \delta \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = -m \int \frac{(d\delta x_\mu dx^\mu)}{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} = m \int ds \delta x_\mu \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) = 0, \quad (2.32)$$

其中我们在分部积分时已经扔掉了边界项。由于 δx_μ 是任意的变分，因此我们得到粒子的运动方程的四维协变形式为：

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0. \quad (2.33)$$

容易验证这个形式实际上与 (2.31) 是完全一致的。利用四维协变形式的变分法，我们还可以获得相对论性粒子的四动量，它是与四维广义坐标 x_μ 所对应的四维广义动量 p^μ 。正如第 20 页提到的，这可以从分部积分的边界项中 δx^μ 前面的系数获得：

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (E, \mathbf{p}), \quad (2.34)$$

其中的空间分量就是前面得到的粒子的相对论性动量 \mathbf{p} (2.30)；其零分量则是该粒子的相对论性能量 E ：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (2.35)$$

正因为如此，粒子的四动量又被称为能量-动量四矢量。显然，它们构成了具有确定变换规则的四矢量。¹³ 一个静止质量是 m 的粒子的四动量 p^μ 与自身的内积是一个洛伦兹标量。简单的计算告诉我们，这个标量就是爱因斯坦给出的能动量关系：

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad \Rightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (2.36)$$

¶ 以上的讨论限于一个自由粒子的情形。下面我们考虑多个自由粒子组成的系统的作用量。所谓多个自由粒子，乃是指这些粒子之间的运动完全是独立的。也就是说，每一个粒子的运动方程中应当完全不包含其他粒子的广义坐标或广义速度。要实现这一点最简单的选择就是假定无相互作用的粒子体系的作用量是各个粒子作用量的简单相加：

$$S = - \sum_i m_i \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx_i^\mu dx_i^\nu}, \quad (2.37)$$

其中 m_i 表示粒子 i 的静止质量。每个粒子的运动方程仍满足自由粒子运动方程。

¹¹ 如果 $m < 0$ ，那么运动方程给出的轨道则变成极大值了。

¹² 零质量的粒子原则上是允许的。它们永远以光速运动。当然，要利用最小作用量原理讨论零质量粒子，我们不能直接利用公式 (2.26)。

¹³ 由于也是四矢量，因此能量动量四矢量的变换规则与时间坐标四矢量的变换规则完全相同，也是按照我们所熟悉的洛伦兹变换 (2.10) 来变。

6 粒子与外场的相互作用

¶ 现在我们来考虑一个相对论性的粒子与外场的相互作用。此时我们需要区分外场在洛伦兹变换下的性质。如果外场本身是一个洛伦兹标量 (这样的外场被称为标量场), 那么一个相对论性的粒子与它的相互作用可以写成:

$$S = -m \int ds e^{\Phi(x)}, \quad (2.38)$$

这里积分是沿着粒子的世界线 $x^\mu(s)$, $\Phi(x) = \Phi(t, \mathbf{x})$ 是一个外加的、无量纲的标量场¹⁴。运用变分法, 就可以得到粒子的运动方程:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\mu}. \quad (2.39)$$

如果外场 $\Phi(x) = 0$, 我们就回到自由粒子的情况 [式 2.33]。在一般的标量场情形下, 我们得到的系统的拉格朗日量为:

$$L = -m\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} e^{\Phi(t, \mathbf{x})}. \quad (2.40)$$

从这个拉格朗日量出发, 也可以得到和四维形式的粒子运动方程 [式 2.39] 等价的三维形式的粒子运动方程。

¶ 如果我们加上的外场不是标量场, 而是一个四矢量场, 那么为了得到洛伦兹标量, 我们可以写下如下形式的作用量:

$$S = -m \int ds - e \int A_\mu(x) dx^\mu, \quad (2.41)$$

这里 e 代表了粒子与矢量场的耦合强度, $A_\mu(x)$ 是外加的一个矢量场。最著名的矢量场的实例就是电磁场, 带电粒子在电磁场中的作用量就具有这种形式 (2.41)。¹⁵ 因此, 耦合常数 e 称为该粒子所带的电量, 我们要求它是一个洛伦兹标量, 但是对它的符号则没有限制。

¹⁶ 代表矢量场 (电磁场) 的四矢量 $A_\mu(x)$ 被称为电磁场的四矢量势。

由于四矢量势是一个四矢量, 因此它可以用时空分量的形式写成:

$$A^\mu(x) = (\Phi(x), \mathbf{A}(x)), \quad (2.42)$$

其中的时间分量 $\Phi(x) = \Phi(t, \mathbf{x})$ 被称为电磁场的标量势 (标势), 而其空间分量 $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ 则被称为电磁场的矢量势 (矢势)。

¹⁴ 具体的标量场的实例如高能物理中的 Higgs 场。

¹⁵ 很不幸的是, 电磁相互作用的作用量的具体形式依赖于单位制的选取。这里给出的单位制是所谓的高斯单位制。关于不同电磁单位制之间的转换规则, 可以参考 [?] 的附录。

¹⁶ 相应于参数 e 的符号, 我们称该粒子带正电或带负电。

如果把作用量表达式 (2.41) 中的积分用对时间的积分表达, 我们就可以写出电磁场中一个相对论性粒子的拉格朗日量:

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\Phi . \quad (2.43)$$

它与自由粒子拉格朗日量的区别就在于加上了与外电磁场的相互作用项。得到了带电粒子的拉格朗日量, 我们立刻可以写出粒子的广义动量 (又被称为正则动量) \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} . \quad (2.44)$$

需要注意的是, 系统的正则动量 \mathbf{P} 并不是粒子的相对论性动量 \mathbf{p} , 又称为机械动量。两者之间差一个与矢势成正比的项。

在外电磁场中, 一个相对论性粒子的运动方程可以写成三维形式或者四维协变形式。它的推导与推导自由粒子的方法没有本质区别, 只不过更为复杂一些。我们这里直接给出结果。四维协变形式的运动方程具有如下的形式:

$$m \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = e F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} . \quad (2.45)$$

其中我们引入了电磁场场强的二阶 (反对称) 张量 $F_{\mu\nu}$, 它的定义为:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (2.46)$$

这个四维协变形式的运动方程很容易表达成三维的形式。另外一种得到三维形式的运动方程的方法是直接从粒子的拉格朗日量 (2.43) 出发写出其欧拉-拉格朗日方程。经过一些矢量微分的演算, 得到的结果为:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (2.47)$$

公式 (5.30) 就是一个 (相对论性的) 带电粒子在电磁场中所受到的洛伦兹力的公式。这里 \mathbf{p} 是粒子的相对论性动量, 而 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 分别称为电磁场的电场强度和磁感应强度, 它们与电磁势的具体关系是:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (2.48)$$

这个电磁场与电磁势之间的关系实际上就是四维形式 (2.46) 的三维对应物。更为直观的写法是将四维二阶张量 $F_{\mu\nu}$ 排成一个矩阵 (第一个指标为行指标, 第二个指标为列指标, 都是从 0 到 3),

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ -\mathbf{E}_1 & 0 & -\mathbf{B}_3 & +\mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & +\mathbf{B}_3 & 0 & -\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{E}_3 & -\mathbf{B}_2 & +\mathbf{B}_1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.49)$$

¶ 方程 (2.45) 和 (5.30) 告诉我们, 影响粒子运动方程的并不是电磁势 A_μ 本身, 而是由此派生出来的电磁场场强张量 $F_{\mu\nu}$, 或者等价地用三维形式表达的电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 。因此, 在经典力学的水平上, $A_\mu(x)$ 并不具有直接的可测量的物理效果, 因为带电粒子直接感受到 (测量到) 的是场强张量 (电场强度和磁感应强度)。这一点的更为明确的表述就是电磁相互作用具有所谓的规范不变性。这种对称性在分析力学的体系中体现得特别直接而简洁。我们记得前面强调过 (见第 4 节末尾), 系统的拉格朗日量中可以加上一个任意函数对时间的全微分而不改变运动方程。因此我们可以将粒子与电磁场相互作用的作用量变为:

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int \left(A_\mu(x) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu, \quad (2.50)$$

其中第二项是一个标量场 Λ 的全微分, 因此积分后变为边界项从而对粒子的运动方程没有任何影响。因此, 从粒子的运动方程来看, 这个作用量与我们前面给出的作用量完全等价。也就是说, 在外场 $A_\mu(x)$ 在如下的变换下:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (2.51)$$

粒子的运动方程并不会改变, 其中 $\Lambda(x)$ 是任意一个给定的标量场。这种对称性被称为电磁场的规范对称性。上面的电磁势的变换被称为规范变换。将变换 (2.51) 代入到场强张量的定义 (2.46) 之中很容易验证场强张量 $F_{\mu\nu}$ 在规范变换下是不变的。

¶ 通过上述讨论我们看到, 相对论性的带电粒子在外加电磁场所产生中的运动方程可以从最小作用量原理导出。这些给定的外加电磁场实际上是由给定的其他电磁场的源给出的 (例如静电场可由电荷给出, 静磁场可以由带电线圈给出等等)。同样是带电粒子与电磁场之间相互耦合的作用量, 如果我们考察产生电磁场的源给定—即带电粒子的运动轨迹是给定的, 我们去考察相互作用的作用量对电磁场的变分。我们就可以求出源给定时, 它产生的电磁场所满足的方程。这实际上就是电动力学课程中主要关注的内容。当然, 与此同时我们还需要加上仅仅依赖于电磁场本身的作用量, 因为在时空中分布的场本身也带有能量。与电磁场相关的作用量可以写为:

$$S[A_\mu(x)] = - \int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \quad (2.52)$$

其中的第一项实际上就是带电粒子的相互作用作用量:

$$S = -e \int dx^\mu A_\mu(x) = - \int (d^3\mathbf{x} dt) \rho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right) A_\mu(x) \quad (2.53)$$

其中我们引进了时空点的电荷密度 $\rho(t, \mathbf{x})$, 它并不是一个四矢量, 但是组合 $\rho(t, \mathbf{x}) dx^\mu / dt$ 是一个四矢量, 称为电流密度四矢量:

$$J^\mu = \rho(t, \mathbf{x}) \frac{dx^\mu}{dt} = (\rho(t, \mathbf{x}), \rho \mathbf{v}(t, \mathbf{x})), \quad (2.54)$$

¹⁷ 具体来说我们有: $F_{0i} = \mathbf{E}_i$, $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} \mathbf{B}_k$ 。

式 (2.52) 中的第二项只包含电磁场, 不依赖于产生电磁场的外源。将此式中的 $S[A_\mu(x)]$ 对电磁场变分并要求其为零, 我们就可以获得关于电磁场 $A_\mu(x)$ 所满足的欧拉-拉格朗日方程。这其实就是电磁场的麦克斯韦方程。我们将在本讲义的后面第五章讲述电磁场的动力学——也就是电动力学的内容。

我们这里顺便提一下, 如果我们讨论一个相对论性粒子与一个二阶张量场耦合, 同时加上张量场本身的运动, 我们实际上就会得到爱因斯坦的广义相对论 (这也是其他课程的内容)。我们这里只是希望指出: 最小作用量原理是一个十分基本的原理。将它与其他重要的物理原理结合, 我们就可以得到经典力学体系以及其他物理体系的运动规律。

7 非相对论极限

¶ 虽然我们的课程是从相对论性的时空观出发的, 但实际上我们的主体内容涉及的是粒子在低速运动下的动力学问题, 这被称为非相对论极限。¹⁸ 粗略地说, 在上一节得到的相对论性的公式中, 如果我们令 $\mathbf{v}^2/c^2 \rightarrow 0$, 我们就可以得到非相对论极限下的相应公式。在我们这样做之前, 先从时空观的角度来分析一下非相对论极限的特点是有意义的。

在非相对论极限下, 闵氏时空变为传统的伽利略时空。在伽利略时空中, 时间具有绝对的意义 (同时的绝对性), 换句话说, 时间与空间发生了分离。相应的, 所有在洛伦兹变换下具有确定变换规则的张量的时间分量与空间分量也都会发生分离。以四矢量 V_μ 为例, 它的时间分量 V_0 在三维空间下变为三维的标量, 而空间分量 $V_i, i = 1, 2, 3$ 则变为三维空间的三矢量。由于四矢量的三个空间分量具有完全相同的变换规则并且与时间分量分离, 因此也没有必要再区分矢量的上标和下标。为了方便起见, 我们统一将时间指标和空间指标都写为下标。类似的讨论可以扩展到更高阶的张量。例如一个二级张量 $D_{\mu\nu}$ 在非相对论极限下可以分解为: D_{00} , 这是一个三维的标量; D_{0i} (或者 D_{i0}), 这是一个三维空间的矢量; D_{ij} , 这是一个三维空间的二阶张量。

洛伦兹变换在非相对论极限下也发生退化。具体来说, 时间根本不变, 而一个三维矢量的三个分量则按照三维空间旋转的矩阵来变换:

$$x'_i = A_{ij}x_j. \quad (2.55)$$

这里 x_i 和 x'_i 分别表示变换前后的一个三维矢量的分量; A_{ij} 是一个三维转动所对应的正交矩阵 (用张量的语言来说就是二级张量)。它满足: $A_{ij}A_{kj} = \delta_{ik}$ 。由此变换规则不难得到更高阶三维张量的变换规则。

¶ 现在我们来考虑力学体系的拉氏量。在非相对论极限下, 它本身是伽利略意义下的标量, 即三维空间的标量。例如, 在非相对论极限下, 由 (2.29) 做低速展开可以得到一个自由粒子的拉格朗日量:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2. \quad (2.56)$$

¹⁸ 相对论性的粒子的动力学问题将主要在电动力学课程中进行处理。

这里我们略去了常数 $-mc^2$ 。这个拉格朗日量也可以直接从空间平移不变 (要求拉格朗日量不依赖于空间坐标) 和各向同性 (要求拉格朗日量不依赖速度的方向) 直接得到。它说明一个非相对论性的自由粒子的拉格朗日量可以取为其动能。容易验证, 要使得相应的作用量取极小值而不是极大值, 我们要求粒子的惯性质量参数 $m > 0$ 。

如果一个粒子与标量外场相互作用, 其相互作用能量我们记为 $V(\mathbf{x}, t)$, 那么我们可以在公式 (2.38) 中取: $\Phi(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}, t)/(mc^2)$ 。由于在非相对论极限下, 一切能量都远远小于粒子的静止能量 mc^2 , 因此:

$$e^{\Phi(\mathbf{x}, t)} = e^{V(\mathbf{x}, t)/mc^2} \sim 1 + \frac{V(\mathbf{x}, t)}{mc^2},$$

式 (2.40) 中的拉格朗日量可以低速展开为:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{x}, t). \quad (2.57)$$

这里 $V(\mathbf{x}, t)$ 被称为势能 (它具有能量量纲)。也就是说, 我们可以取一个外场中的粒子的拉格朗日量为它的动能减去势能。¹⁹ 它所对应的运动方程为:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.58)$$

这就是一个质点在外势场 $V(\mathbf{x}, t)$ 中的牛顿方程。

对于一个与矢量场 (电磁场) 耦合的非相对论性粒子, 它的拉格朗日量可以取为:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - e\Phi(\mathbf{x}, t). \quad (2.59)$$

这个拉格朗日量对应的运动方程就是一个非相对论性的粒子在洛伦兹力作用下的牛顿方程 [式 5.30]。特别需要指出的是, 如果外磁场为零, 那么一个粒子与矢量场的标量势相互作用的拉格朗日量与一个粒子与标量场相互作用的拉格朗日量在形式上没有区别。这一点并不奇怪, 因为正如本节开始所说的, 在非相对论极限下一个四矢量的时间分量 (标量势) 的确变成一个三维空间的标量。

¶ 在非相对论极限下, N 个具有相互作用的粒子组的拉格朗日量可以取为:

$$L = \sum_i \frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2 - V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t). \quad (2.60)$$

其中的第一项就是各个粒子的动能之和; 第二项的函数 $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ 被称为这一组粒子的势能。由于取了非相对论极限, 因此我们假定势能中的所有与粒子速度相关的项都

¹⁹从这个讨论我们看到, 力学中所谓的势能的概念仅仅在非相对论极限下才有意义。

可以略去。如果系统具有时间平移不变性，那么势能不能显含时间。这样的系统被称为保守系统。保守系统的一个重要性质就是其能量守恒，这一点我们下一节会更为细致地讨论。一个保守体系的运动方程可以写成：

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \frac{\partial V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (2.61)$$

¶ 拉格朗日量 (2.60) 是利用直角坐标表达的。有的时候我们需要更为普遍的广义坐标。由于广义坐标与直角坐标之间的函数关系仅仅依赖于各个坐标而不依赖于速度，而且我们假定势能中也不包含速度，因此经过这个变换以后拉格朗日量一定可以写为：

$$L = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \dots, q_f). \quad (2.62)$$

这里的 $a_{ij}(q)$ 可以依赖于所有的广义坐标 q_i ，但是它一定是一个对称的、正定的矩阵。势能 $V(q_1, \dots, q_f)$ 则仅仅依赖于所有的广义坐标。

¶ 现在我们总结一下我们目前已经得到的结论。从最小作用量原理和基本的洛伦兹不变性出发，我们得到了相对论性粒子的拉格朗日量，这包括自由粒子的情形和与外场相互作用的情形。我们简单讨论了相对论性粒子的运动方程。在非相对论极限下，我们可以得到非相对论性系统的拉格朗日量。此时力学系统的运动方程与我们通常熟悉的牛顿方程是完全一致的。这就是我们在前面提到的：在纯机械力学的非相对论体系中，拉格朗日力学提供了一种与牛顿力学完全等价的描述。当然我们同时也看到，以最小作用量原理为出发点的拉格朗日力学具有更加广泛的适用性。我们这里简单地讨论了相对论性的力学，这些结果表明在高速极限下的相对论性力学是与牛顿力学不同的。此时，拉格朗日力学仍然可以胜任，它同时还可以处理电磁问题，这也是传统的牛顿力学所无法比拟的。因此，最小作用量原理虽然历史上脱胎于经典的非相对论性的牛顿力学，但它已成为可以处理包括相对论和场等更为复杂的广义力学体系的、更为普遍的物理学原理。

8 对称性与守恒律

¶ 从微分方程解的角度来看，一个 f 个自由度的力学系统的拉格朗日方程一般具有 $2f$ 个独立的初积分（例如，这 $2f$ 个常数可以取为系统的初始位置和速度）。它们原则上都是该力学系统的守恒量。但并非每个初积分都具有重要的物理意义。力学系统的初积分中只有若干个是与时空的对称性密切联系着的，这些守恒量也是在物理上最为重要的。本节中，我们将主要讨论时间平移（能量守恒）、空间平移（动量守恒）、空间转动（角动量守恒）和尺度变换等对称性。同时，空间反射和时间反演这两种分立对称性也在力学中也扮演重要的角色，我们也一并加以讨论。

8.1 时间平移与能量守恒

¶ 一个力学系统，如果它的拉格朗日量不显含时间，我们就称该力学系统具有时间平移不变性。此时系统拉格朗日量对于时间的变化率为：

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i . \quad (2.63)$$

同时，让我们考虑 $p_i \dot{q}_i$ 的时间变化率，其中 p_i 是与 q_i 共轭的广义动量：

$$\frac{d(p_i \dot{q}_i)}{dt} = \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i + p_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} . \quad (2.64)$$

按照拉格朗日方程，这两个表达式的右边实际上是完全相同的。因此如果我们定义：

$$E = p_i \dot{q}_i - L , \quad (2.65)$$

那么我们发现： E 将是力学系统的守恒量。这个守恒量是直接和系统时间平移不变性联系起来的。对机械力学系统而言，它就是这个系统的机械能量。对于前面提到的保守系统：

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) . \quad (2.66)$$

第一项是各个粒子的动能和，第二项则是粒子之间相互作用的势能。此时系统的总能量可以写成动能与势能之和。这个结论直接来自于动能是速度的二次齐次函数的事实。因此我们看到，在分析力学的框架下，能量守恒与广义力学系统的时间平移不变性直接相连。

8.2 空间平移与动量守恒

¶ 下面考察直角坐标中的空间平移不变性。这个对称性要求在变换：

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0 , \quad (2.67)$$

下系统的拉格朗日量不变。因此我们得到：

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} = 0 .$$

利用拉格朗日方程，我们得到：

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 , \quad \mathbf{P} \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \sum_i \mathbf{p}_i . \quad (2.68)$$

也就是说，空间平移不变性要求系统的总动量守恒。

对于一个总动量守恒的体系，我们总是可以利用伽利略不变性来进行一个参照系变换，使得在新的参照系中系统的总动量恒等于零。假定在某个参照系中系统的总动量为 \mathbf{P} ，它是一个守恒的矢量。我们选取一个相当于这个参照系以速度 $\mathbf{V} = \mathbf{P} / \sum_i m_i$ 运动的新的参照系。读者很容易验证，在新的参照系中，原来力学体系的总动量等于零。这样的一个参照系被称为该力学体系的质心系。在原参照系中：

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{\sum_i m_i}, \quad (2.69)$$

被称为体系的质心坐标。显然利用质心坐标可以将体系的总动量写为： $\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}$ 。换句话说，系统的总动量好像是所有质量都集中在其质心，速度是其质心坐标变化率的一个质点的动量。

上面关于空间平移不变性的讨论是在直角坐标中进行的。我们看到，如果系统的拉格朗日量在直角坐标中具有空间平移不变性，那么该力学系统的平动动量是守恒的。类似的讨论实际上可以推广到任意的广义坐标。如果一个力学系统的拉格朗日量 $L(q, \dot{q}, t)$ 不显含某一个广义坐标 q_1 ，那么与 q_1 所对应的广义动量 $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1$ 一定守恒。力学系统的拉格朗日量中不出现的广义坐标被称为循环坐标。因此我们可以说，力学系统的循环坐标所对应的广义动量都是守恒的。

8.3 空间转动与角动量守恒

下面我们来考察直角坐标中系统的转动不变性。对于一个固定的原点，我们绕通过原点的一个轴进行一个无穷小的转动： $\delta\phi$ 。这里的轴矢量 $\delta\phi$ 指向右手法则所确定的转轴方向；它的大小等于转动的角度 $\delta\phi$ 。在这样一个无穷小的转动下，原来每个粒子的位置、速度等都相应地发生一个无穷小的变化。简单的几何考虑告诉我们：

$$\delta \mathbf{x}_i = \delta \phi \times \mathbf{x}_i, \quad \delta \mathbf{v}_i = \delta \phi \times \mathbf{v}_i. \quad (2.70)$$

于是体系的拉格朗日量不变导致：

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (2.71)$$

即体系的总角动量守恒。

需要注意的是，一个体系的角动量一般来说依赖于坐标原点的选取。如果我们将坐标原点平移一个常矢量 \mathbf{x}_0 ，新的坐标系中所有位置矢量都相应平移： $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ ，那么一个体系的总角动量变化为：

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{x}_0 \times \mathbf{P}, \quad (2.72)$$

其中 \mathbf{P} 是体系的总动量。一个特例是在体系的质心系中，这时系统的总动量 $\mathbf{P} = 0$ ，因而体系的总角动量不依赖于坐标原点的选取。

8.4 尺度变换

¶ 这一小节我们讨论一下在物理学中具有重要意义的尺度变换。在这种变换中，空间的坐标被乘以一个常数因子 λ_1 : $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \lambda_1 \mathbf{x}$ 。这相当于用不同的尺子来度量长度。因子 λ_1 称为该长度变换的变换因子。类似地，我们可以将时间变换一个因子: $t \rightarrow \lambda_2 t$ 。

在时间和空间的尺度变换下，有一类函数具有特别重要的意义。这就是所谓的齐次函数。这类函数在尺度变换下只是乘以变换因子的某个幂次。例如，对于一个多个粒子组成的闭合系统，在上述尺度变换下，每一个粒子的速度一定乘以一个因子: λ_1/λ_2 ，因而系统的动能乘以一个因子: $(\lambda_1/\lambda_2)^2$ 。如果该系统的势能正好是各个粒子坐标的 k 次齐次函数，也就是说它满足：

$$U(\lambda_1 \mathbf{x}_1, \lambda_1 \mathbf{x}_2, \dots, \lambda_1 \mathbf{x}_N) = \lambda_1^k U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (2.73)$$

那么，我们可以选取适当的 $\lambda_2 = \lambda_1^{1-k/2}$ ，从而系统的拉格朗日量在尺度变换下正好乘以一个因子。由于拉格朗日量乘以一个常数因子并不改变系统的运动方程，因此变换以后的系统的运动方程仍然形式上与原先的系统相同。这意味着这类系统具有几何上相似的轨道，在这些轨道上运行的特征时间与轨道尺度之间的比例也是固定的。具体来说，我们有：

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l} \right)^{1-k/2}, \quad (2.74)$$

其中 t' , l' 和 t , l 分别是两个相似轨道上的特征时间和特征尺度。这个公式的一个最重要特例就是开普勒的第三定律。在太阳系的行星的周期运动中，势能恰好是坐标的齐次函数 ($k = -1$)。因此，上面的结论就是行星周期的平方之比等于其轨道尺寸的立方之比，此即开普勒第三定律。

¶ 尺度变换的另外一个重要例子是所谓的维里定理。

这个定理在统计力学中也会用到。我们考虑一个多粒子的力学体系并且假定体系局限在有限的空间范围内运动 (例如：太阳系中行星的运动，容器中空气分子的运动等等)。由于体系的动能是速度的二次齐次函数，我们有：

$$2T = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i \right) - \sum_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (2.75)$$

现在我们将上式中的两边在很长的时间间隔中平均。右边的第一项是时间的全微商，因此时间平均化为上式圆括号中的量在两个时间之间的差在除以时间间隔。由于系统局限在有限的区域运动，因此这个平均在长时间极限下为零：

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i \right) dt = 0.$$

于是，我们得到了重要的维里定理：

$$2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i \mathbf{x}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \right\rangle, \quad (2.76)$$

其中我们用 $\langle \dots \rangle$ 来表示对力学量的长时间平均值。如果系统的势能是其坐标的 k 次齐次函数, 按照著名的欧拉定理, 我们有:

$$2\langle T \rangle = k\langle U \rangle, \quad (2.77)$$

也就是说, 系统的动能的平均与势能的平均有着简单的比例关系。这个关系的两个重要特例是有心力场中的开普勒问题 ($k = -1$) 和谐振子 ($k = 2$)。对于开普勒问题, 动能平均是势能平均 (负的) 的一半, 从而总能量也是势能平均的一半。对于谐振子, 动能平均与势能平均相等。

8.5 分立对称性

¶ 分立对称性在物理学中也起着十分重要的作用。我们这里主要讨论空间反射 (又称为宇称变换) 和时间反演变换。

空间反射变换代表了如下的操作:

$$\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, \quad (2.78)$$

显然, 两次空间反射变换等效于没有变换, 因此物理量在空间反射变换下往往只能不变或者变一个符号。我们称前一类物理量为具有正的宇称的物理量, 后一类物理量则称为具有负宇称的物理量。如果结合 (三维) 空间的转动下物理量的变换规则, 我们可以将各种物理量按照其变换的行为分为几类: 标量是在空间转动和空间反射下都不变的物理量; 赝标量是在空间转动下不变但在空间反射下变号的物理量。矢量是在空间转动下按照直角坐标一样变换在空间反射下变号的物理量; 轴矢量 (又称赝矢量) 是在空间转动下与矢量一样变换但是在空间反射下不变的物理量。

一个力学的体系的拉格朗日量 (作用量) 一般来说一定是一个标量。对于一个多粒子组成的闭合系统, 它的动能和势能都是标量。其运动方程显然在空间反射变换下保持同样的形式 (两边都变号)。矢量的例子如坐标、速度、动量等等; 赝矢量的例子如角速度、角动量、磁场强度等等。例如, 从角动量的定义可以看出, 在空间反射下位置矢量和动量矢量都变号, 因此两者的叉乘不变, 也就是说角动量矢量是一个赝矢量。如果我们取一个赝矢量与一个矢量的点乘, 我们就可以得到一个赝标量。

¶ 下面我们讨论时间反演变换。时间反演变换是指将时间 t 变为 $-t$ 的变换。也就是说, 在时间反演变换下, 时间的走向发生反转。一个力学系统, 在时间反演变换下, 它的所有广义速度都变号。因此它的拉格朗日量的变化行为为:

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L(q, -\dot{q}, -t), \quad (2.79)$$

如果系统的拉氏量满足:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, -\dot{q}, -t), \quad (2.80)$$

那么, 考察拉格朗日方程我们发现, 系统的运动方程在时间反演变换下形式不变。最为常见的形式是拉格朗日量本身并不显含时间, 同时拉格朗日量中只包含广义速度的偶数次幂

(二次幂)。时间反演对称性意味着力学系统的运动完全是可逆的。如果, 某个系统的拉格朗日量中含有广义速度的一次幂, 那么这个系统的运动方程在时间反演下不是不变的。这意味着时间有着一个确定的走向。一个典型的例子就是阻尼振子。

¶ 最后, 在结束这一节时我们简要总结一下我们这节中讨论的对称性。本节所讨论的时空对称性可以分为连续对称性和分立对称性。连续对称性的对称变换是由若干个连续变量描写的 (例如平移的矢量、尺度变换的因子等等); 而分立对称性由分立的对称操作构成。我们看到, 每一个连续的对称性都会导致一个守恒的物理量, 这个结论又被称为诺特定理。是德国著名的理论物理学家艾米·诺特 (Emmy, Nöther, 1918) 首先总结出来的。关于时空的两个分立对称性在现代粒子物理之中也起着十分重要的作用。

9 哈密顿力学概要

前面的讨论中, 我们从变分原理出发建立了拉格朗日形式的分析力学。本节中, 我们要介绍另一种与拉格朗日力学等价的分析力学描述方式—哈密顿力学。读者也许最初会感到奇怪, 对于经典力学我们已经有了牛顿的矢量力学体系和拉格朗日的分析力学体系。为何还需要一个哈密顿力学体系呢? 这个问题的答案实际上超出了传统的经典力学之外才能够看得更加清晰。在纯经典力学范畴之内, 它只是拉格朗日分析力学的另外一种等价的描述。但是, 在超出经典力学之外, 例如进入量子力学或统计力学时, 哈密顿力学就显示出它特有的优势。历史上, 量子力学的诞生很大程度上是受到哈密顿力学的启发。

9.1 哈密顿正则方程

¶ 考虑一个由拉格朗日量 $L(q, \dot{q}, t)$ 描述的经典力学系统。为了简化记号, 我们用 q 和 \dot{q} 来代表该系统所有的广义坐标 q_i 和广义速度 \dot{q}_i , 其中 $i = 1, 2, \dots, f$, f 是系统的自由度数目。我们可以写出拉格朗日量的全微分:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i,$$

其中我们运用了爱因斯坦求和规则, 即对于重复的指标意味着求和 (从 1 到 f)。对于每一个广义坐标 q_i , 我们曾定义了与之共轭的广义动量 p_i (参见第 4 节中的公式 (2.23)):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.81)$$

利用广义动量表达, 并结合系统的拉格朗日运动方程, 拉格朗日量的全微分变为:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + p_i d\dot{q}_i + \dot{p}_i dq_i. \quad (2.82)$$

现在我们定义新的的一个物理量, 它是函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 的勒让德变换:

$$H(p, q, t) = p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.83)$$

我们称以广义坐标和共轭的广义动量为变量的函数 $H(p, q, t)$ 为系统的哈密顿量。哈密顿量的物理意义实际上我们在第二章的第 16 节中讨论过。对于一个具有时间平移对称性的系统，哈密顿量的数值就是系统守恒的能量。虽然哈密顿量在数值上就等于系统的能量，但是它与能量是有区别的。特别需要强调的一点是，哈密顿量是作为力学体系的广义坐标以及广义动量的函数。它与拉格朗日量不同，拉格朗日量是作为广义坐标和广义速度的函数。也就是说，按照定义 (5.46)，当我们已知系统的拉格朗日量后，需要按照定义 (5.46) 构造系统的哈密顿量，同时，我们必须利用广义动量的定义 (2.81) 将公式 (5.46) 中的所有广义速度利用广义坐标和广义动量来表达。这样最终得到的以广义坐标和广义动量为变量的函数才是系统的哈密顿量。也就是说，当我们说给定了力学系统的哈密顿量的时候，强调的绝不仅仅是它的数值，更重要的是它对于广义坐标和广义动量的函数依赖关系。容易验证，哈密顿量的微分为：

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.84)$$

这个关系可以从拉格朗日函数的微分 (2.82) 以及哈密顿量的定义 (5.46) 直接取微分得到。从拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}, t)$ 变换到哈密顿函数 $H(p, q, t)$ 的变换被称为勒让德变换。这种变换在热力学中会经常遇到。

将哈密顿量的微分 (2.84) 与它的完全微分进行比较，我们立刻得到：

哈密顿正则方程 (Hamilton's Canonical Equations)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.85)$$

这一组方程就是著名的哈密顿方程。它们又被称为正则方程或者哈密顿正则方程。从数学上讲，这一组微分方程与系统的欧拉-拉格朗日方程完全等价，只不过拉格朗日方程是二级常微分方程，而哈密顿方程是一阶常微分方程。因此，只要给定初始的广义坐标和广义动量，力学系统的运动就被方程 (2.85) 所完全确定了。

特别需要注意的是，如果我们考察哈密顿量随时间的变化率，我们有：

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

利用哈密顿正则方程 (2.85) 代入，我们发现：

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.86)$$

所以，如果系统的哈密顿量不显含时间 (例如，如果系统的拉格朗日量不显含时间，那么它的哈密顿量也不显含时间)，这个力学系统的哈密顿量是一个守恒量，而其守恒的数值正是系统的能量，见第二章公式 (2.65)。

¶ 哈密顿方程是关于广义坐标和广义动量对 (p, q) 的一阶常微分方程。我们随后会看到，在哈密顿分析力学的理论框架中，所谓“坐标”和“动量”的概念其实不是一成不变

的。事实上,两者完全可以“互换”。因此,更准确的称呼是称它们互为共轭变量。对于一个自由度数目是 f 的力学系统,我们有 f 对共轭变量,而系统的运动完全由这 $2f$ 个变量所描述。这 $2f$ 个独立的变量 (f 对变量) 为坐标轴可以构成一个 $2f$ 维的“空间”,它通常称为这个力学系统的相空间。²⁰ 一个力学系统在任意时刻的力学状态可以用其相空间中的一个点来表示,它称为这个力学系统在其相空间中的代表点。随着时间的推移,力学系统的代表点也会在其相空间中移动从而划出一条轨迹,它称为这个力学系统的相轨道。从相空间中一个给定的点出发,力学系统的相轨道完全由其哈密顿正则方程所唯一确定。

利用相空间、相轨道这些“几何术语”来描述一个力学系统的运动有时是方便的。特别在讨论力学系统定性行为的时候。另外,在统计物理中,我们也会频繁地运用这些概念。特别需要强调指出的是,一个力学系统的相空间的几何结构(拓扑性质)可以是相当复杂的。它通常不是一个简单的 $2f$ 维的平直欧几里德空间。一个典型的例子就是当系统的某个广义坐标是角度的时候。例如,一个单摆的相空间是一个圆柱面。一些多自由度力学体系的相空间可以是具有十分丰富拓扑结构的弯曲流形。

¶ 只要给定了系统的拉格朗日量,我们就可以按照标准的程式得到它的哈密顿量。对于一个保守系统我们有(参见第7节中的公式(2.62)):

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \dots, q_f). \quad (2.87)$$

按照定义,与 q_i 共轭的广义动量 p_i 为:

$$p_i = a_{ij}(q) \dot{q}_j. \quad (2.88)$$

这个公式中可以反解出 \dot{q}_i 作为广义动量的函数:²¹

$$\dot{q}_i = a_{ij}^{-1}(q) p_j, \quad (2.89)$$

其中 $a^{-1}(q)$ 表示对称矩阵 $a(q)$ 的逆矩阵。简单的计算表明系统的哈密顿量为:

$$H = \frac{1}{2} a_{ij}^{-1}(q) p_i p_j + V(q_1, q_2, \dots, q_f). \quad (2.90)$$

也就是说,保守系统的哈密顿量可以写成动能项²² 加上势能项。

例题 2.1 电磁场中粒子的哈密顿量 考虑一个相对论性的粒子与外加电磁场的相互作用。它的拉格朗日量由第6节中的公式(2.43)给出。求它的哈密顿量。

解: 按照定义,粒子的正则动量 \mathbf{P} 为:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (2.91)$$

²⁰更现代一些的称呼是相流形 (phase manifold)。

²¹我们假定对称矩阵 $a(q)$ 不奇异。

²²不难验证,这个哈密顿量中的动能项(第一项)在数值上与拉格朗日量中的动能项(第一项)是相等的。只不过哈密顿量的动能项必须用广义坐标和广义动量表达,而拉格朗日量中的动能项是用广义坐标和广义速度表达的。

于是, 哈密顿量可以直接写出 (注意将原来拉格朗日量中所有的速度都换成正则动量 \mathbf{P}):

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2} + e\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.92)$$

这就是一个带电粒子在外加电磁场中的哈密顿量 (相对论性的), 其中电磁势四矢量为 $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ 。如果我们取非相对论近似, 那么上式 (2.92) 的根号中我们可以假定: $m^2 c^4 \gg c^2 [\mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A}]^2$, 因而我们展开根号并且略去静止能量的常数项得到:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.93)$$

这就是非相对论近似下一个带电粒子与外电磁场相互作用的哈密顿量。

搞定

¶ 在哈密顿正则体系里面广义坐标和广义动量变得更加平权了。为此可以将两者集合在一个变量里面——这通常被称为 ξ -记号。我们定义一个变量 ξ (注意其上下标的区别):

$$\begin{cases} \xi^j = q^j, & j = 1, \dots, n, \\ \xi^j = p_{j-n}, & j = n+1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (2.94)$$

容易验明哈密顿正则方程可以改写为:

$$\dot{\xi}^j = \omega^{jk} \partial_k H, \quad (2.95)$$

其中 $\partial_j = \partial/\partial \xi^j$ 而 ω^{jk} 为下列 $2n \times 2n$ 反对称矩阵:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 1_{n \times n} \\ -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

而它的逆矩阵为 $\omega^{-1} = -\omega = \omega^T$, 其矩阵元我们将用下标表示: ω_{jk} , 因此哈密顿正则方程亦可写为: $\omega_{jk} \dot{\xi}^k = \partial_j H$ 。

9.2 刘维尔定理

考虑在 $t = 0$ 时刻相空间的一个小体积元: $d^{2n}\xi(0)$, 现在让该体积元中的点按照哈密顿正则方程演化。经过一段时间 t 之后, 它变为体积元 $d^{2n}\xi(t)$ 。我们感兴趣的是这个体积元是如何随时间演化的。按照微积分它们之间相差一个雅可比行列式:

$$J(\xi(t); \xi(0)) = \det \left(\frac{\partial \xi(t)}{\partial \xi(0)} \right) = \det \left(\frac{\partial(\xi^1(t), \dots, \xi^{2n}(t))}{\partial(\xi^1(0), \dots, \xi^{2n}(0))} \right). \quad (2.97)$$

现在我们定义一个矩阵 $M(t)$, 其矩阵元为

$$M_{ij}(t) = \frac{\partial \xi_t^i}{\partial \xi_0^j},$$

那么显然 $J(t) = \det M(t)$ 。于是利用对于一个矩阵的公式: $\ln \det M = \text{Tr} \ln M$, 我们有,

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} e^{\ln \det M(t)} = \frac{d}{dt} e^{\text{Tr} \ln M(t)} = J(t) \text{Tr} (M^{-1}(t) \dot{M}(t)) ,$$

另一方面我们有,

$$\text{Tr} (M^{-1} \dot{M}) = \frac{\partial \xi_0^i}{\partial \xi_t^j} \frac{\partial \dot{\xi}_t^j}{\partial \xi_0^i} ,$$

其中重复的指标隐含求和。但是我们有,

$$\frac{\partial \dot{\xi}_t^j}{\partial \xi_0^i} = \frac{\partial \dot{\xi}_t^j}{\partial \xi_t^k} \frac{\partial \xi_t^k}{\partial \xi_0^i} ,$$

于是上面的求迹表达式化为,

$$\text{Tr} (M^{-1} \dot{M}) = \frac{\partial \xi_0^i}{\partial \xi_t^j} \frac{\partial \dot{\xi}_t^j}{\partial \xi_t^k} \frac{\partial \xi_t^k}{\partial \xi_0^i} = \delta_{jk} \frac{\partial \dot{\xi}_t^j}{\partial \xi_t^k} = \frac{\partial \dot{\xi}_t^j}{\partial \xi_t^j}$$

其中我们现将第三个因子与第一个因子结合并且利用了 $\partial \xi_t^k / \partial \xi_t^j = \delta_{jk}$ 。因此我们最后得到了 $J(t)$ 的时间演化规律为:

$$\frac{dJ}{dt} = J \partial_j \dot{\xi}^j , \quad (2.98)$$

由于 ω^{jk} 的反对称性质, 按照公式 (2.95) 我们显然有: $\partial_j \dot{\xi}^j = 0$, 这意味着相空间的体积元随时间是不变的, 即 $dJ/dt = 0$ 。这个结论被称为刘维尔定理。这个定理对于统计力学来说非常有启发性。

9.3 泊松括号

我们现在来考察一个力学量 $f(p, q, t)$, 它可以是广义动量、广义坐标和时间的任意函数。它随时间的变化率可以写成:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i .$$

将正则方程 (2.85) 代入得到:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] , \quad (2.99)$$

其中我们定义了力学量 f 与哈密顿量 H 的泊松括号,

$$[f, H] \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (2.100)$$

事实上, 对于任意两个力学量 f 和 g 而言, 我们可以定义它们之间的泊松括号如下:²³

$$[f, g] \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (2.101)$$

注意, 这个定义也可以利用前面 (2.96) 中定义的 ω 写为:

$$[g, f] \equiv (\partial_j g) \omega^{jk} (\partial_k f). \quad (2.102)$$

如果一个力学量 $f(p, q, t)$ 随时间的变化率为零, 它被称为力学体系的一个运动积分或守恒量。按照公式 (2.99), 一个力学量 $f(p, q, t)$ 是运动积分的条件可以表达为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \quad (2.103)$$

特别对于不显含时间的力学变量 $f(p, q)$, 它是一个运动积分 (守恒量) 的条件是:

$$[f, H] = 0. \quad (2.104)$$

也就是说, 它与哈密顿量的泊松括号必须等于零。

上面定义的两个力学量的泊松括号 (2.101) 满足一些基本的性质, 它对于两个量是反对称的同时是双线性的:

$$[c_1 f_1 + c_2 f_2, g] = -[g, c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 [f_1, g] + c_2 [f_2, g], \quad (2.105)$$

其中 c_1, c_2 是任意常数。另外, 两个函数乘积的泊松括号可以表达为:

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]. \quad (2.106)$$

另外一个重要的关系是所谓的雅克比恒等式:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (2.107)$$

利用上述这些关系, 任意两个已知函数的泊松括号都可以化简为基本的泊松括号:

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}. \quad (2.108)$$

例题 2.2 角动量的泊松括号 考虑一个质点的角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 。计算角动量各个分量之间的泊松括号。

解: 直接利用基本的泊松括号的性质, 我们可以得到:

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2. \quad (2.109)$$

当然, 任何一个分量与自身的泊松括号恒等于零。这三个等式可以统一地写成:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k. \quad (2.110)$$

搞定

²³注意, 有的教科书中泊松括号的定义与我们这里的相差一个负号, 例如 [1]。这里的定义与 [3, 4] 一致。

泊松括号的一个重要的性质是：如果 f, g 是力学系统的两个运动积分，那么它们的泊松括号 $[f, g]$ 一定也是该力学系统的运动积分。这个结论被称为泊松定理。

如果函数 f, g 都不显含时间，这个结论的证明是十分简单的。只要在雅克比等式中令： $h = H$ ，同时利用 $[f, H] = [g, H] = 0$ ，我们立刻得到： $[H, [f, g]] = 0$ ，即 $[f, g]$ 也是力学体系的运动积分。泊松定理的一个应用就是可能产生新的运动积分。如果我们已知系统的两个运动积分 f 和 g ，如果 $[f, g]$ 并不是常数，或者简单的 f 和 g 的函数，那么 $[f, g]$ 就给出了系统的一个新的运动积分。

¶ 特别值得一提的是，这一节对于运动积分 (守恒量) 的讨论完全可以移植到量子力学中。我们所需要做的只是将经典的泊松括号换成量子力学中的对易括号就可以了。



相关的阅读



这一章是我们这个课程中最最重要的一章。



第三章

分析力学的三类典型的应用

本章提要

- 中心力场与开普勒问题
- 刚体的运动学、惯量张量和动力学介绍
- 多自由度系统的小振动与简正模式

前

两章中我们从狭义相对论的时空观和最小作用量原理出发，建立了广义的力学体系的拉格朗日力学和哈密顿力学体系。这一章中我们将着重讨论分析力学的理论框架在三类最典型的机械运动体系中的应用，具体来说就是：中心力场中的两体问题、三维的刚体运动、多自由体系在其平衡位置的小振动。

10 中心力场与开普勒问题

10.1 两体中心力场问题的简化

¶ 考虑两个质量分别为 m_1 和 m_2 的粒子，通过一个有心势相互作用的力学体系。所谓有心势是指两者相互作用的势能仅是两粒子间距离的函数。因此，该体系的拉格朗日量可以写为：

$$L = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别是两个粒子的速度； $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 则是两个粒子的位置； $V(r)$ 就是两粒子之间的有心势。这样的两体问题可以完全分解为两个单体问题。由于这个力学体系的总的动量是守恒的，因此两个粒子组成的体系的质心的速度是常矢量。于是我们取一个特定的惯性系使得两个粒子体系的质心速度为零。这样的参照系被称为质心系，并令质心坐标架的原点。再引入两粒子的相对坐标 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ 。于是很容易发现：

$$\mathbf{x}_1 = m_2\mathbf{x}/(m_1 + m_2), \quad \mathbf{x}_2 = -m_1\mathbf{x}/(m_1 + m_2). \quad (3.2)$$

换句话说, 只要求出了相对位移 $\mathbf{x}(t)$, 我们就可以分别获得两个粒子的运动轨道了。利用相对坐标 \mathbf{x} , 拉格朗日量 [式 3.1] 变为一个等效的单粒子运动的形式:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(r), \quad (3.3)$$

其中 $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 为两个粒子的约化质量 (也称为折合质量), $r = |\mathbf{x}|$ 为两个粒子的相对距离。我们看到, 这个两体问题在质心的运动与相对运动完全分离之后变为一个匀速运动的质心加一个等效单粒子在中心力场中的运动问题。

拉格朗日量 (3.3) 的转动不变性决定了在这样一个中心力场中粒子的角动量一定是守恒的。因此, 我们可以将粒子的角动量取为沿 z 轴的方向。于是粒子的运动轨道将完全处在 xy 平面内。采用更为方便的极坐标 (r, ϕ) , 粒子的拉格朗日量可以写为:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (3.4)$$

这个拉格朗日量不显含坐标 ϕ , 因此与 ϕ 相应的广义动量守恒, 它实际上就是粒子沿 z 方向的角动量:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = \text{constant}. \quad (3.5)$$

这实际上就是著名的开普勒第二定律: 行星与太阳之间的连线在单位时间内扫过的面积是常数。我们看到, 该定律并不依赖于相互作用势 $V(r)$ 的具体形式, 只要是有心势 (角动量守恒) 就可以了。

拉格朗日量 [式 3.4] 的时间平移对称性导致另外一个守恒量是粒子的能量:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r). \quad (3.6)$$

于是我们得到:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{J^2}{m^2 r^2}}. \quad (3.7)$$

另一方面, 角动量的方程 [式 3.5] 可以写成:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{mr^2}, \quad (3.8)$$

如果将上面两个方程相除消去时间的微分 dt , 可以得到一个 $d\phi/dr$ 的方程, 再通过积分原则上就可以得到粒子的轨道 $r(\phi)$:

$$\phi = \phi_0 + \int^r dr' \frac{(J/r'^2)}{\sqrt{2m[E - V(r')] - \frac{J^2}{r'^2}}}. \quad (3.9)$$

其中 ϕ_0 为一个常数。关于径向运动的微分方程 (3.7) 类似于一个粒子在一维空间的运动, 只不过该粒子感受到的有效势能为:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{J^2}{2mr^2}. \quad (3.10)$$

这里的第二项正是所谓的离心势能。

10.2 开普勒问题

¶ 如果有心势中势的形式是反比于距离——即著名的 $1/r$ 势——这时的力学问题称为开普勒问题。这类力学体系出现在以万有引力相互作用的行星与太阳之间，也存在于有库仑相互作用的两个点电荷之间。太阳系中行星的运动规律首先由开普勒总结出来，随后牛顿利用经典力学体系和万有引力定律加以解释。下面我们首先来讨论相互吸引的情形，这时系统的有效势能的形式为：

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2mr^2}. \quad (3.11)$$

其中 $\alpha > 0$ 为一个正的常数。这个有效势能的特点是在 $r \rightarrow 0$ 时，它趋于正的无穷；在 $r \rightarrow \infty$ 时，它从负的值趋于零。在区间 $(0, \infty)$ 中间，有效势能有一个极小值点。因此，粒子的径向运动可以分为三种情况：如果粒子的能量 $E > 0$ ，那么粒子可以跑向无穷远，也就是说粒子的运动并不是束缚在力心周围有限的空间内。对于严格的 $1/r$ 势，这时粒子的轨道是双曲线的一支。如果粒子的能量 $E < 0$ ，那么粒子的径向距离一定局限在一个有限的区间： $[r_{\min}, r_{\max}]$ 之内，这时粒子的运动一定被束缚在力心周围的一个有限区域内，不可能逃逸到无穷远。对于形如 $1/r$ 型的势，我们下面可以证明粒子的轨道是一个闭合的椭圆。如果粒子能量 $E = 0$ ，这时粒子的运动仍然可以逃逸到无穷，但运动轨道是一条抛物线。

要得到开普勒问题中粒子运动的轨道方程，可以从能量守恒 [式 3.7] 和角动量守恒 [式 3.8] 的方程中消去 dt 并积分 [式 3.9]，得到的结果是：

$$\frac{l_0}{r} = 1 + e \cos \phi, \quad (3.12)$$

其中参数 l_0 和 e 分别由下式给出：

$$l_0 = \frac{J^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.13)$$

方程 (3.12) 是极坐标中标准的圆锥曲线的方程，极坐标的原点位于圆锥曲线的焦点 (focus)。这里我们选取了积分常数使得距离原点最近的点对应于 $\phi = 0$ 。这个点在天文学中称为近日点 (perihelion)。参数 $2l_0$ 被称为正焦弦 (latus rectum)， e 被称为偏心率。平面解析几何的知识告诉我们，当 $e > 1$ 时，轨道为双曲线；当 $e = 1$ 时为抛物线；当 $0 < e < 1$ 时，轨道为椭圆；当 $e = 0$ 时，轨道是正圆。¹

在吸引势中， $E < 0$ 的椭圆形的轨道的结果正是开普勒第一定律。椭圆的半长轴 a 和半短轴 b 的值分别为：

$$a = \frac{l_0}{(1 - e^2)} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{l_0}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{J}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (3.14)$$

¹如果我们在轨道方程 (3.12) 中令 $\phi \rightarrow \pi + \phi$ (这等价于重新选择极轴) 就可以改变轨道方程中 e 前面的符号。因此，不失一般性，我们总可以假定 $e \geq 0$ 。

椭圆轨道的近日点距离 r_{\min} 和远日点距离 r_{\max} 分别为:

$$r_{\min} = \frac{l_0}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\max} = \frac{l_0}{1-e} = a(1+e). \quad (3.15)$$

椭圆形轨道的周期可以用椭圆的面积除以面积速度 (即 $r^2\dot{\phi}/2$, 它正比于粒子的角动量 J) 来加以确定:

$$T = \frac{\pi ab}{r^2\dot{\phi}/2} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/\alpha}. \quad (3.16)$$

正如第 8.4 小节中通过分析对称性得到的结论一样, 行星的周期的平方之比等于其相应半长轴立方之比。这就是著名的开普勒第三定律。²

在吸引势中, 对于 $E \geq 0$, 粒子的 r 可以是无穷的, 其中 $E > 0$ 时轨道为双曲线的一支, 力心位于该支双曲线的内焦点。其近日点的距离 r_{\min} 和双曲线的半长轴 a 分别为:

$$r_{\min} = \frac{l_0}{e+1} = a(e-1), \quad a = \frac{l_0}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}. \quad (3.17)$$

对于 $E = 0$ 的情形, 偏心率恒等于 1, 轨道为抛物线, 其近日点 $r_{\min} = l_0/2$ 。

对于排斥的势: $V(r) = \alpha/r$, 其中 $\alpha > 0$, 我们得到的轨道永远是双曲线。与吸引势不同的是, 现在力心位于双曲线一支的外焦点上。类似于前面的公式, 我们有:

$$\frac{l_0}{r} = -1 + e \cos \phi, \quad (3.18)$$

其中参数 l_0 和 e 仍然由公式 (3.13) 给出。排斥势中轨道近日点的表达式为:

$$r_{\min} = \frac{l_0}{e-1} = a(e+1). \quad (3.19)$$

¶ 最后, 我们简单讨论一下开普勒问题的特殊性。对于形如 $1/r$ 的吸引势, 如果粒子的运动是局限在有限区域的 (也就是说粒子的总能量小于零), 那么它的轨道一定是闭合的椭圆。这种轨道的闭合性并非对所有的有心势都成立的, 它实际上是开普勒问题所特有的。另外一个已知的、能够构成闭合轨道的有心势是三维谐振子势。对于绝大多数的有心势, 即使粒子的能量小于零, 粒子的运动局限在有限的区域, 它的轨道也不一定是闭合的。这种不闭合性的标志就是其近日点的进动。如果有心势只是稍微偏离 $1/r$ 的形式, 那么 $E < 0$ 的粒子的轨道几乎是闭合的, 只是其近日点有微小的进动。

开普勒问题中轨道的闭合性实际上意味着 $1/r$ 有心势具有更高的对称性。这种对称性并不是由于时空基本对称性而是由于势能的特殊形式造成的, 因此被称为动力学对称。动力学对称性的存在直接的后果就是有多余的守恒量。如果我们定义

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + m\alpha \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad (3.20)$$

²注意 m 是行星与太阳系统的折合质量而 $\alpha = Gm_1m_2$, 因此在太阳与行星质量之比是无穷大的极限下, 参数 m/α 是与行星质量无关的常数。

其中 \mathbf{p} 是粒子的动量, 它感受到的有心势为 $V(r) = \alpha/r$, α 可以大于零或小于零。我们下面会直接验证, (3.20) 定义的矢量实际上是一个守恒量, 它通常被称为拉普拉斯-龙格-楞次矢量 (Laplace-Runge-Lenz vector), 它的方向是沿着力心到近日点的方向。矢量 \mathbf{M} 是常矢量意味着力心到近日点的矢量的方向是不变的, 也就是说, 没有近日点的进动。这直接联系着轨道的闭合性。

要验证这一点, 直接取以下时间的微商, 记住角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}}$ 是守恒的, 因此,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = \frac{m\alpha}{r^3}[\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}})] = \frac{m\alpha}{r^3}[\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - r^2\dot{\mathbf{x}}] = \frac{d}{dt}\left(-m\alpha\frac{\mathbf{x}}{r}\right),$$

其中第二步我们运用了粒子的运动方程 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = (\alpha/r^3)\mathbf{x}$; 第四步我们运用了 $\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = r\dot{r}$ 。所以根据上式一定有 $d\mathbf{M}/dt = 0$, 即 \mathbf{M} 是一个守恒的矢量。

例题 3.1 利用 **Laplace-Runge-Lenz** 矢量求轨道 利用上面给出的 Laplace-Runge-Lenz 矢量求出 Kepler 问题中轨道的形状。

解: 上面已经证明, \mathbf{M} 是一个守恒的矢量。我们将其取为极坐标中极轴的方向。由于,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} = rM \cos \phi, \quad (3.21)$$

其中 $M = |\mathbf{M}|$ 是该矢量的大小, ϕ 是 \mathbf{x} 与 \mathbf{M} 之间的夹角。另一方面, 将 \mathbf{x} 直接点乘 \mathbf{M} 的定义式 (3.20), 并注意到角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, 我们得到,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + m\alpha r = J^2 + m\alpha r. \quad (3.22)$$

原则上将上述两式联立就可以获得轨道。例如, 对于吸引的问题, $\alpha = -|\alpha|$, 我们有,

$$r \left(1 + \frac{M}{m|\alpha|} \cos \phi \right) = \frac{J^2}{m|\alpha|} \quad (3.23)$$

换句话说, 我们发现 $l_0 = J^2/(m|\alpha|)$ 以及偏心率满足 $e = M/(m|\alpha|)$, 这与公式 (3.12) 以及 (3.13) 一致。同样, 对于排斥势, $\alpha > 0$, 我们得到的轨道方程为

$$r \left(-1 + \frac{M}{m\alpha} \cos \phi \right) = \frac{J^2}{m\alpha} \quad (3.24)$$

这与公式 (3.18) 一致。

搞定

10.3 有心势中的散射问题

本节简要讨论散射截面的概念。这个概念在经典力学中是非常直观的。它在后续的经典电动力学乃至量子力学中也是十分重要的概念。散射的过程一般涉及两类客体: 一类是散射者, 另一类则是被散射者。两者原则上可以是有限尺寸的物体 (比如刚体), 也可以是一个点粒子。我们又把散射者称为力心或者力心体。为了简化讨论, 本小节的讨论中我们假设散射者只有一个。

散射截面，顾名思义就是力心相对于入射粒子看起来的“有效面积”。在这个面积之内，入射的粒子会被散射，即其动量会偏离原来的入射方向；如果超出这个面积，入射粒子的动量就不会发生偏离。显然对于一个没有相互作用的刚体的力心体而言，其散射截面真的就是两者之间沿入射方向看过去的几何截面积。但对于与被散射者有超出几何尺寸之外的“超距”相互作用（比如引力场、电磁场等）的力心体来说，散射截面一般会比其几何截面积要大。

为了简单起见，我们考虑一个在有心势 $V(r)$ 中运动的经典粒子。一般我们总是假设在足够大的距离 r 处 $V(r) \rightarrow 0$ 假设在 $t \rightarrow -\infty$ 的时候，该粒子从无穷远处入射到力场之中，在原点附近经过“散射”，然后在 $t \rightarrow +\infty$ 的时候飞到无穷远去。这就构成了一个典型的散射过程。能量守恒告诉我们，粒子入射的能量（速率）和出射的是一样的。因为无论是初态还是末态，粒子感受到的势能都等于零，所以它的动能，也就是速率必定相同。图 3.1 显示了一个典型的散射过程。我们将散射者，即力心位置选为坐标的原点，原点与入射粒子的初始速度矢量构成了轨道平面。入射粒子的初始速度矢量的延长线与原点之间的距离称为碰撞参数，用 b 来表示。粒子总的散射角度是指其末态速度与初始入射速度之间的夹角，图中用 θ 表达。

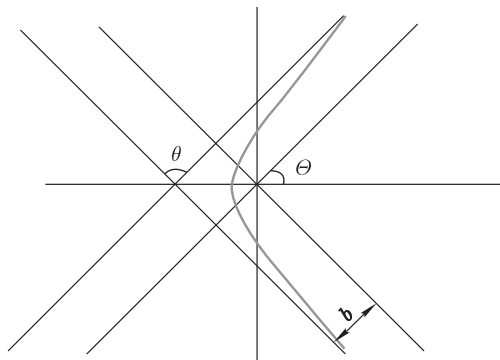


图 3.1: 散射的示意图。粒子在无穷远处的张角分别为 $\pm\Theta$ 。显然，散射角度 θ 满足 $\theta + 2\Theta = \pi$ 。

一般来说粒子的轨道总是有一定的对称性的，只要问题中有时间反演对称性。事实上，如果我们把粒子经过最靠近力心处的时刻取为时间零点，那么图 3.1 中关于 x 轴对称的两支将分别对应于 $t > 0$ 和 $t < 0$ ，时间反演对称性告诉我们，这两支一定是对称的。 $t \rightarrow \pm\infty$ 时轨道的张角 2Θ 满足

$$r(\pm\Theta) = +\infty. \quad (3.25)$$

换句话说，只要我们得到了轨道方程 $r = r(\phi)$ ，就可以定出轨道的张角 2Θ 。前面引入的散射角 θ 与轨道的张角之间显然有如下简单的几何关系：

$$\theta + 2\Theta = \pi. \quad (3.26)$$

现在考虑不止一个粒子入射的情形，例如我们有一粒子束从无穷远入射到上述的有心势中。入射粒子束的流强为 I ，它表征了单位时间内通过单位截面积的粒子数目。这些入

射的粒子最终都会被力心散射到无穷远处. 单位时间内发生的总的散射事件数目被称为散射率, 记为 S . 它一定会与入射的流强 I 成正比, 即

$$S = I\sigma, \quad (3.27)$$

其中的比例系数 σ 就体现了力心的散射能力. 注意它恰好具有面积的量纲, 称为相应力心的总散射截面 (total scattering cross section). 容易验证, 按照上述定义, 一个钢球力心的总散射截面就是它的几何截面积. 因此, 这个定义也完全符合我们对于散射截面的直观理解.

上面给出的总散射截面体现了散射者 (力心) 的总体散射能力. 如果我们还需要更为精细的描写, 就需要了解所谓的微分散射截面了, 它可以给出具体散射到某个立体角中的散射能力. 类似于上面的定义, 我们可以写下

$$dS = I \left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \right) d\Omega. \quad (3.28)$$

这里 $d\Omega$ 是某个方位角 (θ, ϕ) 附近的立体角的微分, dS 则是单位时间散射到上述立体角中的粒子数目, 而 $d\sigma(\theta, \phi)/d\Omega$ 则称为微分散射截面, 它体现了散射者将入射粒子散射到某个特定方位角中的散射能力. 显然, 将微分散射截面对所有立体角积分就得到了总散射截面:

$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \right) d\Omega. \quad (3.29)$$

对于有心势而言, 其散射具有轴对称性, 因此微分散射截面不会依赖于方位角 ϕ 而仅仅是 θ 的函数. 因此我们可以将其记为

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}. \quad (3.30)$$

同时, 散射的角度 θ 将唯一地由碰撞参数 b 确定, 反之亦然. 因此, 我们可以记为 $b = b(\theta)$ 或者 $\theta = \theta(b)$. 现在考虑从碰撞参数 b 附近, 一个宽度为 db 的圆环中入射的粒子, 单位时间内穿过其截面积 $2\pi b db$ 的粒子数目为 $dS = I(2\pi b db)$, 其中 I 为入射流强. 这些粒子都将被散射到角度 θ 附近立体角 $2\pi \sin \theta d\theta$ 的圆锥之中, 因此我们得到

$$-d\sigma(\theta) = 2\pi b db = -2\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \sin \theta d\theta. \quad (3.31)$$

上式中的负号代表了这样一个事实: 当瞄准距离 b 减小时, 粒子会感受到更接近力心的相互作用, 因此散射角 θ 也会变大, 即 $db(\theta)/d\theta < 0$. 这个方程可以视为 $b(\theta)$ 和 $d\sigma(\theta)/d\Omega$ 所满足的微分方程, 知道了其中的一个就可以确定另一个. 这个式子也可以等价地写为

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = -\frac{b(\theta)db}{\sin \theta d\theta}. \quad (3.32)$$

剩下的问题就是对于给定的 $V(r)$ 如何确定 θ 与 b 之间的关系了.

为了得到结果, 我们首先需要利用任意 $V(r)$ 时极坐标中轨道的方程 (3.9). 我们定义出射方向与入射方向之间的夹角为 2Θ , 它可以视为粒子到力心的距离 $r(\phi)$ 趋于无穷大时的两个特殊角度, 即

$$r(\phi = \pm\Theta) = \infty. \quad (3.33)$$

注意到散射角 θ 与轨道的张开角度 Θ 满足一个简单的几何关系 (见图 3.1): $\theta + 2\Theta = \pi$. 同时, 对于入射粒子而言, 其能量 $E = (1/2)mv_0^2$, 而其角动量为 mv_0b , 其中 v_0 是入射粒子在无穷远处的速率, b 是碰撞参数. 因此由 (3.9) 式可以得到

$$\theta = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2(1 - V(r)/E) - b^2}}. \quad (3.34)$$

对于给定的有心势的形式, 完成这个积分就可以获得 $\theta(b)$, 然后代入 (3.32) 式中就可以解得微分散射截面.

下面我们具体讨论中心力场开普勒问题中的散射问题. 这类散射问题有时候又称为卢瑟福散射 (Rutherford scattering), 因为它发生在卢瑟福利用 α 粒子轰击金箔的著名实验中. 在经典的卢瑟福散射实验中, 相互作用的势能是一个形如 α/r 的排斥势, 即原子核与 α 粒子之间的库仑势, 其中 $\alpha > 0$. 因此这时候的轨道方程由 (3.18) 式给出, 其近日点则由 $r_{\min} = l_0/(e - 1)$ 给出, 渐近的角度 $\pm\Theta$ 则由下列式子给出:

$$\cos \Theta = \frac{1}{e}. \quad (3.35)$$

考虑到 $E = (1/2)mv_0^2$ 以及 $J = mv_0b$, 有

$$e^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2} = 1 + \left(\frac{mbv_0^2}{\alpha}\right)^2,$$

也即

$$\left(\frac{mbv_0^2}{\alpha}\right)^2 = \sec^2 \Theta - 1 = \tan^2 \Theta.$$

再利用 $\theta/2 + \Theta = \pi/2$, 我们就可以得到

$$b(\theta) = \frac{\alpha}{mv_0^2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \equiv K \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad K = \frac{\alpha}{mv_0^2}. \quad (3.36)$$

将此式代入 (3.32) 式, 得到

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = -\frac{bdb}{\sin\theta d\theta} = \frac{K^2}{4} \csc^4\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.37)$$

这就是著名的卢瑟福微分散射截面公式. 仰仗这个公式与实验结果的比较, 卢瑟福提出了著名的原子有核模型。

11 刚体的运动规律

在本节中, 我们将简要讨论经典的理论力学中很有特色的对象—刚体的运动规律。

11.1 刚体的平动与转动

¶ 刚体可以看成是由无穷多质点构成的一个经典力学体系。它具有固定的尺寸和总质量，并且刚体内任意两个质点之间的距离都不随时间改变，也就是说这个物体可以看成是纯粹刚性的。³ 真实的物体严格来说都不是真正的刚体，但是如果其形变对运动的影响可忽略，那么可以近似地将其视为刚体从而大大简化相应的力学计算。

一个一般的三维刚体具有六个力学自由度。例如，我们可以选择刚体的质心坐标 (3 个)、从质心 C 到刚体上任意一个固定点 A 的位移矢量 \mathbf{R}_0 的方向 (2 个) 再加上刚体绕着沿 \mathbf{R}_0 方向的一个轴转动的角度 (1 个)。当然某些刚体的自由度数目低于 6。三维刚体的自由度因此可以分解为其质心的三个平动自由度，再加上绕通过质心的某个轴 (其方向具有两个自由度) 的转动 (共 3 个) 自由度。

读者在前面的物理力学的学习中已经了解了一个刚体进行平面平行运动规律。在刚体的平面平行运动中，该刚体的转动总是绕着一个空间完全固定的轴 (一般选为 z 轴) 进行转动。但在本节中，我们希望讨论的是刚体最一般的三维转动。也就是说，刚体的转动并不总是绕着同一个固定的轴进行的。一般的三维转动与绕某个固定轴的平面平行运动最显著的区别在于：一般的三维转动的次序并不是可以交换的，而绕着某个固定轴的平面平行运动中的转动是可以交换次序的。与此相对应，三维的转动也需要用 3×3 在实正交矩阵来描写。

在刚体的运动学描述中，我们常常会选择一个随着刚体一起运动的坐标架来描写刚体的运动。我们通常称这样固着在刚体上的坐标架为刚体的体坐标架 (body axis)。这样的好处是，由于刚体的形状是完全不变的，因此可以证明它总是存在一个与其固态连接的正交坐标架——这称为该刚体的主轴，在主轴坐标架中刚体的转动惯量矩阵是完全对角化的，这样一来，刚体的动能和角动量将变得十分简洁。这里需要强调的一点是，读者不要把主轴坐标架想象成是取随着刚体一起运动的一个参照系。由于刚体的速度、角速度一般随时都在变化，因此这个参照系将是一个复杂的非惯性系。更为简单的想法是仅把体坐标架想象成随着刚体运动的一些坐标轴。我们仍然可以在空间固定的我们熟悉的惯性系中来考察刚体的运动方程。该运动方程中会涉及到表征刚体的一些矢量，例如角速度、角动量、力矩等等。采用体坐标架只是在每一个时刻都将所考虑的这些矢量向体坐标架的坐标轴投影而已。一般来说，这个体坐标架的原点总是选择在刚体的质心。

如果一个矢量 \mathbf{x} 在某组基矢 $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3\}$ 下的坐标 (分量) 为 x_i ，在另外一组基矢 $\{\mathbf{e}'_i, i = 1, 2, 3\}$ 下的坐标 (分量) 记为 x'_i ，那么我们有：

$$x'_i = A_{ij}x_j, \quad (3.38)$$

其中矩阵 A_{ij} 是一个 3×3 的实正交矩阵。它标志了不同基矢的选取之间的转换关系。事

³我们知道，三维的距离并不是一个洛伦兹不变量，只有四维间隔才是。因此，并不存在与狭义相对论完全兼容的“刚体”的概念。在非相对论牛顿力学中，时空对称性由洛伦兹对称性退化为伽利略对称性。这样一来，三维的转动 (它保持空间中任意两点间三维距离不变) 与时间完全剥离，这时可以自然地定义刚体的概念。因此，本节关于刚体的所有讨论仅在非相对论力学中才有意义。

实上我们有：

$$\mathbf{e}_i = A_{ij}^{-1} \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_j A_{ji}. \quad (3.39)$$

读者不难验证，对于任意一个矢量 $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x_i A_{ji} \mathbf{e}'_j = x'_j \mathbf{e}'_j$ ，因此这与坐标的变换规则 (3.38) 一致。正是在这个意义下，我们常常说变换规则 (3.38) 可以视为三矢量的定义。换句话说，凡是各个分量 x_i 在坐标变换下 (即不同基矢的选取下) 按照规则 (3.38) 变换的量就称为 (三维) 矢量。

¶ 在讨论转动的过程中，可以采用两种等价的描述方法。一种观点是认为矢量保持不变，转动坐标架 (或者说选择不同的基矢)，这又称为被动观点；另一种等价的描述方法是转动矢量 (或者更复杂的张量) 本身而坐标架保持不动，这又称为主动观点。我们前面说的三维转动是采用前一种方法，即被动观点 (被动观点也常用定义 $\mathbf{e}'_i = R_{ij} \mathbf{e}_j$ ，其中旋转矩阵 $R = A$)。有的时候，特别是在讨论刚体问题的时候，我们会相互转换这两种观点。很显然，一种观点中的转动角与另一种观点的转动角刚好相反。

在物理上，每个实正交矩阵 (在被动观点中) 都等价于一个坐标架的三维转动，因此又称为三维转动矩阵。如果 A 的转置矩阵记为 A^T ，那么它们满足：

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = \mathbb{1}, \quad (3.40)$$

其中 $\mathbb{1}$ 为 3×3 单位矩阵。容易证明，两个正交矩阵的乘积仍然是一个正交矩阵。因此，所有的三维转动矩阵 (或者称为正交矩阵) 在矩阵乘法下构成一个群的结构，称为三维转动群或三维正交群，记为 $O(3)$ 。将此式子两边取行列式并利用 $\det(A) = \det(A^T)$ ，我们就得到： $\det(A) = \pm 1$ 。因此，三维转动矩阵可以按照其行列式的两个不同取值分为互不联通的两支。满足 $\det(A) = +1$ 的转动我们称为正常转动；满足 $\det(A) = -1$ 的转动我们称为非正常转动，它实际上可以看成是一个正常转动再乘以宇称变换矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

显然宇称变换矩阵 P 满足 $\det(P) = -1$ 。所有的正常转动也构成一个群，称为特殊三维正交群，或特殊三维转动群，记为 $SO(3)$ 。因此， $O(3)$ 群可以分为互不连通的两支，其中一支由所有的正常转动构成，即 $SO(3)$ 群；另一支则由所有的非正常转动构成。

¶ 关于三维正常转动矩阵我们有下面的重要结论，它又经常被称为欧拉定理：

定理 3.1 一个正常转动所对应的三维转动矩阵一定存在一个本征值为 $+1$ ，与其对应的本征矢量实际上对应于该转动的转动轴。

这个结论有多种方法可以证明。一个最简单而直接的方法是利用恒等式：

$$(A - \mathbb{1})A^T = \mathbb{1} - A^T,$$

并在两边取行列式，利用 $\det A^T = \det A = +1$ ，因此我们有：

$$\det(A - \mathbb{1}) = (-)^3 \det(\mathbb{1} - A) = \det(\mathbb{1} - A) = \det(\mathbb{1} - A^T).$$

这意味着 $\det(A - \mathbb{1}) = 0$, 即 A 一定有一个本征值为 $\lambda = +1$ 。欧拉定理说明, 刚体的任意的一个三维正常转动一定可以视为绕着空间的某个方向——该方向的单位矢量记为 \mathbf{n} , 它实际上就是对应于描写该正常转动的三维正交矩阵对应的本征值为 $+1$ 的本征矢的方向——的一个角度为 Θ 的转动, 记为 $R(\Theta, \mathbf{n})$ 。

¶ 描述一个刚体的三个转动自由度有不止一种方法。一个经常用到的、同时也是相对比较直观的方式是欧拉角。为此我们考虑在惯性系空间固定的一个坐标架 xyz 。同时考

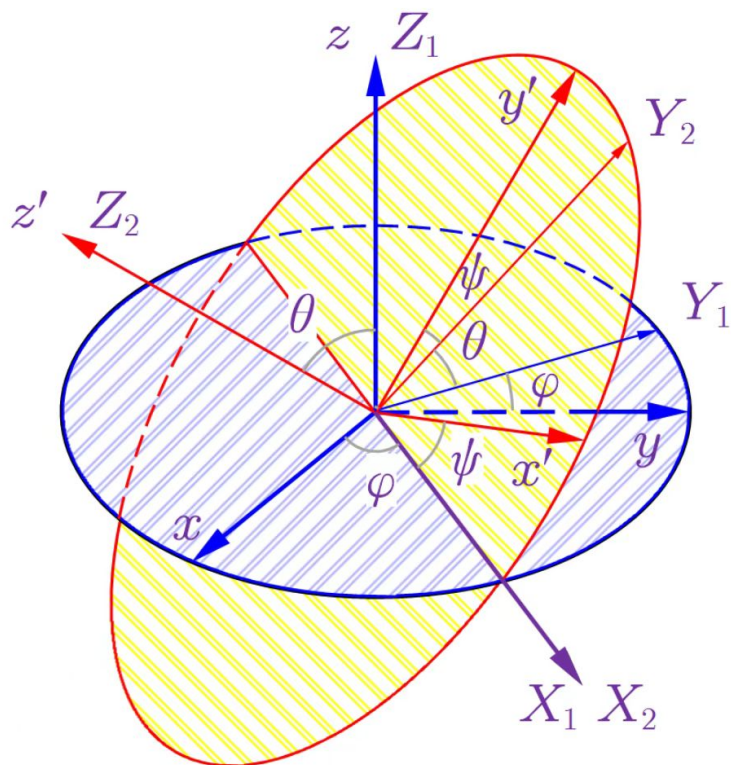


图 3.2: 所谓 ZYZ 约定中刚体的欧拉角 (ϕ, θ, ψ) 的展示: 它们刻画了随刚体运动的体坐标架 $x'y'z'$ 相对于空间固定坐标架 xyz 的三个方位角。

虑一个原点位于刚体质心、同时随着刚体运动的坐标架 $x'y'z'$, 初始时体坐标架 $x'y'z'$ 与 xyz 完全重合, 即 $x'y'z' \equiv xyz$, 参见图 3.2。⁴ 随着刚体的运动, 体坐标架 $x'y'z'$ 将不再与 xyz 重合。刚体的位置可以完全由其质心的坐标 (即图中坐标原点在固定坐标架 xyz 中的坐标) 和体坐标架的三个坐标轴 $x'y'z'$ 相对于固定坐标架 xyz 的三个角度所唯一确定。下面将通过三个顺序的转动, 将刚体的体坐标架 $x'y'z'$ 从其初始位置 xyz 转到新的位置 $x'y'z'$ 。这三个转动角被称为欧拉角: ϕ, θ, ψ , 它们按照下列三个顺序进行转动:⁵

⁴ 由于我们仅仅关心动坐标架 $x'y'z'$ 相对于静止坐标架 xyz 的方位角, 因此我们完全可以将它们的原点画在一起。

⁵ 我们这里选择的是比较常用的 ZYZ 约定, 即首先绕 Z 轴旋转一个角度, 然后绕 (新的) X 轴转第二个

1. 首先绕原先的 z 轴, 逆时针旋转角度 ϕ 到新的坐标系 $X_1Y_1Z_1$; 由于是绕 z 轴旋转, 因此新的 Z_1 轴与老的 z 轴是完全重合的。这一步可简记为: $xyz \xrightarrow{R(\phi, \hat{Z})} X_1Y_1Z_1$ 。
2. 绕新的 X_1 轴, 逆时针旋转角度 θ 到新的坐标系 $X_2Y_2Z_2$; 由于是绕 X_1 轴旋转, 因此新的 X_2 轴与老的 X_1 轴也是重合的。这一步可简记为: $X_1Y_1Z_1 \xrightarrow{R(\theta, \hat{X})} X_2Y_2Z_2$ 。
3. 最后, 绕新的 Z_2 轴, 逆时针旋转角度 ψ 到新的坐标系 $X_3Y_3Z_3$ 即 $x'y'z'$ 。这一步可简记为: $X_2Y_2Z_2 \xrightarrow{R(\psi, \hat{Z})} x'y'z'$ 。

这三个角度中, θ 的取值范围是从 0 到 π ; ϕ, ψ 的取值范围都是从 0 到 2π 。这三个角度一起被称为刚体运动的欧拉角。它们可以视为一个刚体转动部分的广义坐标, 相应的广义速度则记为: $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ 。

为了明确写出与欧拉角对应的转动矩阵的显式, 我们将最初的 XYZ 坐标系中某个矢量的坐标记为 $\mathbf{x}^{(0)}$ 。相应的坐标系 $X_1Y_1Z_1$ 中的坐标记为 $\mathbf{x}^{(1)}$; 坐标系 $X_2Y_2Z_2$ 中的坐标记为 $\mathbf{x}^{(2)}$ 。最后, 坐标系 $X_3Y_3Z_3 \equiv xyz$ 中的坐标记为 $\mathbf{x}^{(3)}$ 。对于第一个旋转我们有:

$$\mathbf{x}^{(1)} = D \cdot \mathbf{x}^{(0)}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

欧拉角定义是被动观点, 所以矢量是绕 Z 轴转动 $-\phi$ 。对第二个旋转我们有

$$\mathbf{x}^{(2)} = C \cdot \mathbf{x}^{(1)}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

注意第二个转动矢量是绕 X_1 轴转动 $-\theta$, 因此矩阵的形式也需要做适当调整。第三个转动矢量是绕 Z_2 轴或 z 轴转动 $-\psi$, 因此我们有

$$\mathbf{x}^{(3)} = B \cdot \mathbf{x}^{(2)}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

将上述三个转动结合, 我们就得到了与欧拉角对应的转动矩阵的表达式:

$$\mathbf{x}^{(3)} = (B \cdot C \cdot D) \cdot \mathbf{x}^{(0)} = A \cdot \mathbf{x}^{(0)}, \quad A \equiv BCD. \quad (3.45)$$

将上述三个矩阵明确地乘出来我们就得到矩阵 A 的明显表达式,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

角度, 最后再绕 (新的) Z 轴转第三个角度。其他经常使用的约定还有 ZXY 约定等。关于更多的约定以及各个约定之间的关系, 有兴趣的读者可以参考网页: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles。

大家可以验证这个矩阵满足 $A^T = A^{-1}$ 。

¶ 一个重要的结果就是利用三个欧拉角及其时间微商来表达刚体的角速度在动坐标架 xyz 上面的投影。参考图 3.2 我们看到 $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ 分别沿着 $Z(Z_1)$, $X_1(X_2)$, $z'(Z_2)$ 轴, 于是经过简单的几何考虑我们可以得到的结果是:

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \Omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \Omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (3.47)$$

这个结果我们下面讨论刚体的动能时会用到。

11.2 刚体的转动惯量与动能

¶ 前面漫长的一节借助刚体运动学讨论了转动的数学描述。这一节中我们讨论一个刚体的动能、角动量和惯量张量。这是计算刚体的拉格朗日量的重要一步, 也属于介于刚体运动学和刚体动力学之间的衔接部分。我们会看到, 刚体的动能以及角动量都与它的惯量张量密切联系。

一个刚体的动能可以通过计算组成它的各个质点动能之和得到。为此, 我们利用刚体中任意一点的速度公式 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum \delta m (\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2. \quad (3.48)$$

此式中的求和遍及刚体上所有的质点 (其质量记为 δm), \mathbf{r} 是该质心到被求和质点的位置矢量。因此, 求和中 \mathbf{r} 会随着不同的质点而变化。对一个刚体而言, 其质心速度 \mathbf{v}_c 和角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 是唯一的, 不会随求和时质点的变化而改变, 因此将这个式子展开后得到:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c^2 + \frac{1}{2} \sum \delta m [\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2]. \quad (3.49)$$

其中 $m = \sum \delta m$ 表示刚体的总质量。这个式子中没有交叉项是因为: $\sum \delta m \mathbf{v}_c \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{v}_c \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times (\sum \delta m \mathbf{r})) = 0$, 其中 $\sum \delta m \mathbf{r} = 0$ 是由于我们取了质心为坐标原点。这个表达式的物理意义十分明显: 第一项代表刚体整体的平动动能; 第二项则是刚体绕其质心的转动动能。刚体的转动动能可以更加明确地写成:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_j I_{ij}, \quad (3.50)$$

其中我们引入了刚体的转动惯量张量, 也简称为惯量张量:

$$I_{ij} = \sum \delta m (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j). \quad (3.51)$$

显然 I_{ij} 是一个对称的二阶张量。因此，我们可以将刚体的总动能表达为：

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c^2 + \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j . \quad (3.52)$$

这就是一个刚体的总动能的表达式。它二次地依赖于刚体的质心速度和刚体的角速度。这些二次型前面的系数由刚体的惯性特性所决定。对于一个刚体来说，它的惯性特性由其总质量 m 和绕质心的惯量张量 I_{ij} 所完全描述。⁶

对于对称的惯量张量，我们总可以适当地选取坐标架使得它被对角化。这样的方向被称为刚体惯量张量的主轴方向。⁷ 相应的对角化后的数值： I_1 ， I_2 ， I_3 则被称为主轴转动惯量。这时刚体的转动动能部分可以简洁地写为：

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) . \quad (3.53)$$

特别需要注意的是，主轴坐标是相对于刚体本身固定的坐标架，它一般不是在空间固定的坐标架。现在我们可以理解为何我们关心一个固定在刚体上面的动坐标架与固定坐标架之间的关系了。刚体的转动能在相对于刚体固定的主轴坐标架中是最为简洁的。例如，如果我们选取上一小节中讨论的附着在刚体上的坐标架 xyz 为其主轴坐标架，那么刚体的转动能就可以利用角速度与欧拉角时间导数的关系 (式 3.47) 表达出来：

$$T_{rot} = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{I_2}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 . \quad (3.54)$$

对于一个对称陀螺 ($I_1 = I_2 \neq I_3$)，刚体转动能可以进一步简化为：

$$T_{rot} = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 . \quad (3.55)$$

与此同时，一个刚体绕其质心的角动量也可以利用上面引入的惯量张量简单地表达出来。为此我们注意到角动量的表达式：

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum \delta m \mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \\ &= \sum \delta m [\Omega r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})] = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \boldsymbol{\Omega} . \end{aligned}$$

其中我们用 $\overset{\leftrightarrow}{I}$ 来表示惯量张量，即 $(\overset{\leftrightarrow}{I})_{ij} \equiv I_{ij}$ 。这样我们得到：

$$\mathbf{L}_i = I_{ij} \Omega_j . \quad (3.56)$$

⁶具体的刚体的惯量张量的计算大家应当在普通物理力学中已经涉及，我们这里不再赘述。

⁷显然，如果刚体本身具有某种几何的对称性，那么它的主轴方向总是沿着它的对称轴的。但是即使是完全没有任何对称性的刚体也是存在主轴的。

我们看到, 如果选取主轴, 那么惯量张量是对角的, 此时我们有: $L_i = I_i \Omega_i$ 。即某个方向的角动量与该方向的角速度成正比, 比例系数就是该主轴的主轴惯量。

需要注意的是, 一般来说刚体的角动量一般并不与其角速度平行, 尽管两者之间有着线性关系。此外, 尽管对质量均匀分布且具有几何对称性的刚体而言, 其主轴一般总是沿着其几何对称轴, 但即使是完全没有任何几何对称性甚至是质量分布不均匀的任意刚体也是存在主轴的, 只不过其三个主轴惯量可能完全不同而已。在刚体力学的语境中, 三个主轴惯量中都相同的被称为球形陀螺—尽管其外观可能完全不一定是球形的; 只有两个主轴惯量相同的被称为对称陀螺; 三个主轴惯量都不相等的则被称为任意陀螺。

11.3 刚体转动的动力学方程

我们首先在空间固定坐标系 (假定这是一个惯性系) 中来表述刚体的动力学。刚体具有六个力学自由度, 它们可以选为质心的坐标 (三个) 和固着在刚体上的动坐标架相对于空间固定坐标架的三个角度 (例如三个欧拉角) 来表征。一般来说, 一个刚体的拉格朗日函数可表达为其动能 T 与势能 $V(\mathbf{r})$ 之差: $L = T - V$, 其中的动能 T 又可以分为质心的平动动能和绕质心的转动动能, 而刚体的势能则取决于具体的力学问题。

描写刚体质心运动的方程比较简单:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (3.57)$$

其中 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_c$ 就是刚体的总动量, \mathbf{F} 是刚体所受到的外力总和。刚体各个质点之间的内力可以完全不必考虑因为它们对于质心运动没有影响。

刚体的另外三个自由度 (转动自由度) 的运动规律可以通过下述方式来描写。利用拉格朗日分析力学的方式, 我们可以写下:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \phi},$$

由于: $\partial L / \partial \Omega_i = I_{ij} \Omega_j = \mathbf{L}_i$, 同时势能 $V(\mathbf{r})$ 对于角度的变化可以表达为:

$$\begin{aligned} \delta V &= - \sum \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = - \sum \mathbf{f} \cdot (\delta \phi \times \mathbf{r}) \\ &= - \delta \phi \cdot \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = - \mathbf{N} \cdot \delta \phi. \end{aligned} \quad (3.58)$$

因此: $-\partial V / \partial \phi = \mathbf{N}$, 这里 \mathbf{N} 代表作用在刚体上的总力矩。同样的, 这里仅仅需要考虑外力, 因为刚体内部的内力的力矩为零。于是我们可以将刚体转动自由度的运动方程写为:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (3.59)$$

方程 (3.57) 和方程 (3.59) 就完全描述了一个刚体的动力学规律。这两个方程也是大家在普通物理力学中已经得到过的结果。这里需要注意的是, 这两个方程中各矢量的分量都是相对于空间固定坐标架来定义的。

我们也可以用相对于刚体静止的体坐标架来讨论刚体的动力学问题——特别是它的转动相关的问题。我们前面已经看到了，这种坐标架有它的方便之处，此时我们可以选取刚体的惯量主轴使得刚体的惯量张量具有对角的形式。刚体所具有的任意一个矢量 \mathbf{G} 相对于一个固着在刚体上的运动坐标架 xyz 的时间微商与空间固定坐标架 XYZ 的时间微商之间的关系可以写为：

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{body}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \mathbf{N}. \quad (3.60)$$

现在假定我们取固着在刚体上面的坐标架为刚体的惯性主轴，那么写成分量我们有：

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = \mathbf{N}_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = \mathbf{N}_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = \mathbf{N}_3. \end{cases} \quad (3.61)$$

这一组方程就是关于刚体转动的著名的欧拉方程。

¶ 根据上面的讨论我们看到，即使对于完全无外力矩的刚体而言，刚体转动部分的动力学微分方程——即欧拉方程 (3.61) 关于 $\Omega_{1,2,3}$ 而言也是非线性的。这种非线性实际上源于三维转动的对称群 $SO(3)$ 的内禀的非线性，是不可避免的。与此同时，这种非线性使得即使在非常简单的情形下，方程 (3.61) 的解也是颇为复杂的。这里我们就不再进一步深入讨论这个问题了，有兴趣的同学可以参加相关教材的相关讨论。

12 多自由度系统的简谐振动

现在我们讨论多个自由度力学系统的小振动情况。考虑一个一般的保守系统⁸：

$$L = \frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q),$$

我们假定系统在其稳定平衡位置 q_{i0} 附近运动。我们可以令 $x_i = q_i - q_{i0}$ 为小量并将势能展开至二阶。由于 q_{i0} 是系统的稳定平衡位置，一定有

$$U(q) \approx U(q_0) + \frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j.$$

另一方面，动能的系数 $a_{ij}(q)$ 中，在第一级近似我们可以取 $q_i = q_{i0}$ 。因此，一个多自由度的保守系统在其稳定平衡位置附近进行小振动的拉格朗日量可以写成

$$L = \frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j. \quad (3.62)$$

⁸我们这里假定重复的指标隐含着求和，即启用所谓的爱因斯坦求和约定。

为了写得更为紧致一些, 我们可以引入矩阵和矢量的符号. 记 $m, k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 $n \times n$ 的实矩阵, 它们的矩阵元分别为 m_{ij} 和 k_{ij} , 相应的矢量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. 那么体系的拉格朗日量可以写为

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^T m \dot{x} - \frac{1}{2} x^T k x. \quad (3.63)$$

我们下面会分别按照矩阵形式或者分量形式来写这些方程.

这个系统的运动方程为

$$m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j = 0, \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0. \quad (3.64)$$

如果我们假定这些微分方程组的解的形式为 $x(t) = \eta e^{-i\omega t}$, 并代入方程 (3.64) 中, 要求其存在非零解, 就得到

$$\det[k - \omega^2 m] = 0. \quad (3.65)$$

也就是说, 系统振动的 n 个本征值 ω^2 是简谐振动本征频率的平方. 这个方程有时又被称为久期方程 (secular equation). 对于每一个本征值 ω^2 , 都有一个相应的本征矢量, 这些本征矢量实际上就按照相应的本征频率进行简谐振动的振幅矢量. 线性代数的知识告诉我们, 不同的本征频率对应的本征矢量一定是线性无关的. 当存在某两个本征频率相等 (简并) 时, 需要更为细致的考虑. 可以证明这时仍然可以找到线性无关的一组完备的本征矢量. 这些本征矢量实际上与系统的简正坐标是联系在一起的.

12.1 动能和势能的对角化与多自由度系统小振动的解

另外一种考察简正坐标的观点是从将体系的拉格朗日量 (3.62) 这个二次型对角化的角度来分析. 这里我们要利用线性代数中一个熟知的定理.

定理 3.2 任何一个厄米的矩阵总可以通过一个么正变换将其对角化. 而对于一个实对称矩阵, 总可以找到一个正交变换将其对角化.

因此, 我们总可以通过一个正交变换 $x = P_1 \cdot y$ 使得动能的二次型变为对角的:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i^2. \quad (3.66)$$

由于动能总是正定的, 因此 $m_i > 0$ 是正的实数. 注意, 在这个变换下, 势能 $V = (1/2) y^T K' y$, 其中 $K' = (P_1)^T k P_1$ 仍然是实对称的正定矩阵. 我们现在可以令 $z_i = \sqrt{m_i} y_i$, 或者等价地写为 $z = (M_D)^{1/2} y$, 其中 M_D 是对角的矩阵, 其矩阵元就是上述各个 m_i . 这样一来动能部分变为 $T = (1/2) \dot{z}^T \dot{z}$, 而势能部分则由一个实对称正定矩阵 K'' 描写:

$$T = \frac{1}{2} \dot{z}^T \dot{z}, \quad V = \frac{1}{2} z^T K'' z, \quad (3.67)$$

其中 $K'' = M_D^{-1/2} K' M_D^{-1/2}$. 由于 K'' 仍然是实对称矩阵, 我们可以进一步寻找将 K'' 对角化的正交矩阵 P_2 . 也就是说, 我们令

$$z = P_2 \cdot Q, \quad (3.68)$$

并要求它将势能对角化. 由于势能部分也是正定的, 不失一般性我们令其对角元为 $\omega_i^2 > 0$. 由于动能部分已经化为单位矩阵的形式, 因此它在任何正交矩阵变换下是不变的, 仍然保持原形式. 在上述一系列变换 (准确地说, $Q = (P_2)^T M_D^{1/2} (P_1)^T \cdot x = A^{-1} \cdot x$) 下, 我们将动能和势能同时对角化了:

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2), \quad (3.69)$$

其中联系 Q 和 x 的矩阵 $A = P_1 M_D^{-1/2} P_2$ 通常被称为模态矩阵 (modal matrix). 简正坐标与原坐标之间的关系为

$$Q = (P_1 M_D^{-1/2} P_2)^{-1} \cdot x = A^{-1} \cdot x, \quad A \equiv P_1 M_D^{-1/2} P_2. \quad (3.70)$$

这样的一组 Q_i 称为简谐振动系统的简正坐标, 又称为简正模. 因此, 利用简正坐标 Q 来表达, 多自由度的简谐振动问题完全简化为独立的单自由度系统的简谐振动问题. 求解多自由度系统的简谐振动问题实际上最主要的步骤就是寻找其简正模和相应的本征频率. 在系统的拉格朗日量给定后, 这实际上是一个单纯的线性代数问题⁹.

12.2 多自由度系统小振动的初值问题求解

下面我们简要说明一下如何求解一个多自由度体系的小振动的初值问题. 上面的线性代数证明仅仅是从存在性上论证了简正坐标与原坐标的关系, 在具体操作层面, 更为简单的方法是直接求解本征方程的非零本征矢.

从体系的运动方程 (3.64) 出发, 令试探解 $x = \eta e^{-i\omega t}$, 代入该方程可得

$$(\omega^2 m - k)_{ij} \cdot \eta_j = 0, \quad (3.71)$$

其中 $i, j = 1, \dots, n$ 等标志体系的不同自由度. 正如前面已经提到的, 要获得非零的解 η , 我们需要矩阵 $(\omega^2 m - k)$ 奇异, 即

$$\det(\omega^2 m - k) = 0. \quad (3.72)$$

这是关于 ω^2 的一个 n 次方程. 按照前面的分析, 它一定具有 n 个非负的实数解 ω_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$.

对应于每一个本征方程的解 ω_i^2 , 我们都可以找到一个非零的本征矢 $\eta^{(i)} \neq 0$, 它满足

$$(\omega_i^2 m - k) \cdot \eta^{(i)} = 0. \quad (3.73)$$

对于另外一个本征值 ω_j^2 , 我们有类似的方程

$$(\omega_j^2 m - k) \cdot \eta^{(j)} = 0.$$

⁹一般来说, 我们称坐标 Q_i 为系统的简正坐标. 需要注意的是, 简正坐标 Q_i 一般并不具有与原坐标 x_i 相同的量纲.

我们可以将前一个方程左乘以 $(\eta^{(j)})^T$ ，后一个方程左乘以 $(\eta^{(i)})^T$ ，再相减就得到

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)(\eta^{(j)})^T \cdot m \cdot \eta^{(i)} = 0, \quad (3.74)$$

其中运用了矩阵 m 和 k 为对称矩阵的事实. 因此, 对于不同的本征频率 $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, 它们相对应的本征矢一定满足如下的正交关系:

$$(\eta^{(j)})^T m \eta^{(i)} = 0. \quad (3.75)$$

对于一个所有本征频率没有简并的系统而言, 我们可以将相应的本征矢进行归一化, 即进行如下的代换:

$$\eta_j^{(i)} \rightarrow \tilde{\eta}_j^{(i)} = \frac{\eta_j^{(i)}}{\sqrt{(\eta^{(i)})^T m \eta^{(i)}}}. \quad (3.76)$$

这样一来归一化之后的本征矢满足

$$\tilde{\eta}^{(i)T} m \tilde{\eta}^{(j)} = \delta_{ij}. \quad (3.77)$$

因此 $\{\tilde{\eta}^{(i)} : i = 1, \dots, n\}$ 构成了 n 维空间一组正交归一完备的基. 我们待求的模态矩阵 A 则由下式给出:

$$A_{ji} = \tilde{\eta}_j^{(i)}. \quad (3.78)$$

这一点很容易看出. 我们注意到对于任意的 j , 有

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{\eta}^{(i)})^T (\omega_j^2 m - k) \tilde{\eta}^{(j)} \\ &= \omega_j^2 \delta_{ij} - (\tilde{\eta}^{(i)})^T k \tilde{\eta}^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

其中我们利用了正交归一关系 (3.77). 再利用上面的矩阵 A 与本征矢 $\tilde{\eta}^{(i)}$ 之间的关系 (3.78), 我们发现 (4.32) 式意味着矩阵 A 恰好可将矩阵 k 对角化并且其对角元为各个 ω_j^2 :

$$A^T k A = \text{Diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (3.80)$$

这就完成了对模态矩阵求解的全过程.

那么求得了模态矩阵 A 之后如何求解一个一般的多自由振动体系的初值问题呢? 我们从如下的事实出发:

$$x = A Q, \quad (3.81)$$

并且有如下的矩阵关系

$$A^T m A = I, \quad A^T k A = \text{Diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (3.82)$$

每一个简正模 Q_i 都是以确定的频率 ω_i 进行简谐振动:

$$Q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t) + D_i \sin(\omega_i t), \quad (3.83)$$

因此最终 $x(t)$ 的解为

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n A_{ji} [C_i \cos(\omega_i t) + D_i \sin(\omega_i t)] , \quad (3.84)$$

其中的 C_i 和 D_i 是由初条件确定的 $2n$ 个参数, 由初始坐标和速度来确定.

要求出这些常数, 我们首先假设初始的广义坐标 $x_j(0)$ 以及初始的广义速度 $\dot{x}_j(0)$ 是已知的常数. 在公式 (3.84) 中令 $t = 0$ 以及对时间求导后再令 $t = 0$, 就得到

$$x_j(0) = A_{ji} C_i , \quad \dot{x}_j(0) = A_{ji} \omega_i D_i . \quad (3.85)$$

这两个公式都可以写成矩阵形式. 如果我们令 $C = (C_1, \dots, C_n)^T$, $f = (\omega_1 D_1, \dots, \omega_n D_n)^T$, 那么有

$$x(0) = A \cdot C , \quad \dot{x}(0) = A \cdot f , \quad (3.86)$$

从而它们的解为

$$C = A^{-1} \cdot x(0) = (A^T m) \cdot x(0) , \quad f = A^{-1} \cdot \dot{x}(0) = (A^T m) \cdot \dot{x}(0) . \quad (3.87)$$

更明确地写出来就是

$$C_i = A_{ik}^T m_{kk'} x_{k'}(0) , \quad \omega_i D_i = A_{ik}^T m_{kk'} \dot{x}_{k'}(0) . \quad (3.88)$$

这就给出了多自由度体系简谐振动的通解.

总结一下, 对于多自由度小振动系统 $m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$ 来说, 求解其一般的初值问题由以下步骤构成:

- (1) 求解久期方程 $|\omega^2 m - k| = 0$, 给出 n 个本征频率 ω_i^2 (可能有简并);
- (2) 对于每一个上一步求解出的 ω_i^2 (无论是否简并), 求解 $(\omega_i^2 m - k) \cdot \tilde{\eta}^{(i)} = 0$, 给出相应的非零本征矢量 $\tilde{\eta}^{(i)}$, 并且按照公式 (3.77) 将其归一化;
- (3) 求出每一个本征矢之后, 我们就获得了模态矩阵

$$A = (\tilde{\eta}^{(1)}, \tilde{\eta}^{(2)}, \dots, \tilde{\eta}^{(n)}) ; \quad (3.89)$$

(4) 基于初始的位置 $x(0)$ 和速度 $\dot{x}(0)$, 利用公式 (3.88) 给出简谐振动的解 (3.84) 中的各个系数 C_i 和 D_i , 从而获得最终的解.

前面我们提到, 如果久期方程 (3.65) 定出来的本征频率正好出现相同的情形, 这时我们称系统的这两个本征频率出现简并 (degenerate). 当系统出现简并时需要更多的细致考虑. 一般来说, 我们可以将出现简并的情况分为两类: 一类是由于所研究的力学系统具有某种对称性而造成的简并; 另一类则不是由于对称性造成的, 这又被称为偶然简并. 无论哪一种情形, 对于多自由度系统的小振动而言, 我们总是能够找到足够多的非零本征矢量以展开我们感兴趣的解.

12.3 具体的例子

例题 3.2 平面双摆 考虑第 ?? 章第 ?? 节中的重力场中的平面双摆的小振动 (参见图 ??)。为了简化起见, 假定 $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$ 。给出体系小振动的本征频率以及模态矩阵 A 。同时对于特定的初始条件, $\phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0 \ll 1$, $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$, 给出任意时刻体系的解 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 的明显表达式。

解: 以 ϕ_1, ϕ_2 为广义坐标, 我们首先写下这个系统的拉格朗日量:

$$L' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2)gl\cos\phi_1 + m_2gl\cos\phi_2. \quad (3.90)$$

我们现在假定 $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$, 于是我们得到小振动近似下的拉格朗日量:

$$L = ml^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_2^2 + ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - mgl\phi_1^2 - \frac{1}{2}mgl\phi_2^2. \quad (3.91)$$

这意味着矩阵 m 和 k 由下式给出:

$$m = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

于是我们得到矩阵 $(\omega^2 m - k)$ 的表达式如下,

$$\omega^2 m - k = ml^2 \begin{pmatrix} 2(\omega^2 - \omega_0^2) & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

其中 $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$ 。令上面矩阵的行列式为零我们得到本征频率满足的方程及其解为,

$$2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega^4 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_0^2. \quad (3.94)$$

这给出了系统的两个本征频率 $\omega_{1,2}$, 其中 1 对应于 “+” 号而 2 对应于 “-” 号。

下面我们求相应的本征矢并进而求出模态矩阵 A 。通过求解本征方程 $(\omega_i^2 m - k)\eta^{(i)} = 0$ 我们发现,

$$\eta^{(1)} = C'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \eta^{(2)} = C'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

其中 C'_1 和 C'_2 是两个归一化系数。很容易验证这两个本征矢满足正交关系: $(\eta^{(2)})^T m \eta^{(1)} = 0$ 。归一化条件可以确定出 C'_1 和 C'_2 为,

$$C'_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})/(ml^2)},$$

因此最后获得的模态矩阵为,

$$A = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{ml^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{4+2\sqrt{2}} & +\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

因此我们得到体系的两个简正模式 $Q_{1,2}$ 分别按照 $\omega_{1,2}$ 进行简谐振动, 而体系的广义坐标 $x = (\phi_1, \phi_2)^T$ 与简正坐标 $Q = (Q_1, Q_2)^T$ 之间的关系为,

$$Q = A^{-1} \cdot x, \quad (3.97)$$

其中 $x = (\phi_1, \phi_2)^T$ 为两个振动角构成的矢量。至此, 我们已经找到了系统的所有简正模和本征频率。

如果我们要求解体系的某个特定的初值问题, 比如说对于题目中所要求的初条件:

$$x(0) = \phi_0(1, -1)^T, \quad \dot{x}(0) = (0, 0)^T. \quad (3.98)$$

我们只需要确定系数 C_i 和 D_i 即可。由于初始的速度为零, 因此按照公式 (3.88) 我们得知 $D_{1,2} = 0$, 而系数 C_i 也可以求出,

$$C_i = A_{ik}^T m_{kk'} x_{k'}(0), \quad i = 1, 2. \quad (3.99)$$

将前面求得的矩阵 A 、以及 m 和 $x(0)$ 带入上式我们得到,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \frac{(ml^2)\phi_0}{2\sqrt{ml^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & +\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\phi_0\sqrt{ml^2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & +\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \phi_0 \frac{\sqrt{ml^2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.100)$$

按照一般通解的公式 (3.84), 我们可以写出 $\dot{x}(0) = 0$ 的这个初值问题的通解,

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t) \\ C_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\phi_0}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{4+2\sqrt{2}} & +\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} \cos(\omega_1 t) \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\phi_0}{4} \begin{pmatrix} (2+\sqrt{2}) \cos(\omega_1 t) + (2-\sqrt{2}) \cos(\omega_2 t) \\ -(2+2\sqrt{2}) \cos(\omega_1 t) + (2\sqrt{2}-2) \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

其中的 $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \omega_0$ 。这就完全求解了这个小振动问题。

搞定

例题 3.3 一维固体的振动 考虑由 N 个等质量的原子 (质量设为 m) 构成的一个环。相邻的原子之间等效地用一个经典的劲度系数为 k 的弹簧彼此联结。每个原子只允许沿着圆环的切向无摩擦地运动。讨论这个经典系统的小振动问题。

解 这个问题是上个苯环问题的推广版本。我们用 x_n 来标记第 n 个粒子偏离其平衡位置的坐标, 其中 $n = 1, 2, \dots, N$ 。那么体系的拉格朗日量可以写成

$$L = \sum_{n=1}^N \frac{m}{2} \dot{x}_n^2 - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^N [(x_n - x_{n-1})^2]. \quad (3.102)$$

注意, 周期边条件意味着我们必须保持 $x_{N+n} \equiv x_n$. 体系的运动方程为

$$\ddot{x}_n = \omega_0^2(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n), \quad (3.103)$$

其中 $\omega_0^2 = k/m$. 为了求解这个方程, 我们寻求如下形式的解:

$$x_n(t) = A e^{-i\omega t + ipn}, \quad (3.104)$$

其中 p 为一维波动的波数¹⁰. 注意, 周期边条件意味着波数 p 必须满足

$$e^{ipN} \equiv 1,$$

因而

$$p = \frac{2\pi}{N}l, \quad (3.105)$$

其中 $l = 1, 2, \dots, N$. 事实上, l 可以取任意连续的 N 个整数值, 并不一定要从 1 开始. 也就是说真正有意义的是 $\text{mod}(l, N)$, 因为具有相同 $\text{mod}(l, N)$ 值的不同 l 实际上给出完全等价的 x_n . 因此, 一个对称的选择是令整数 $l \in (-N/2, N/2]$. 将这个形式代入运动方程 (3.103), 我们发现本征值

$$\omega^2(p) = 2\omega_0^2(1 - \cos(p)), \quad (3.106)$$

其中波数 $p = (2\pi/N)l$, $l \in (-N/2, N/2]$. (4.59) 式给出了一维振动链的 N 个本征值.

以 $N = 6$ 为例, 我们发现对应于 $l = \pm 2, \pm 1, 0, 3$ 的本征频率的平方分别为 $3\omega_0^2, \omega_0^2, 0, 4\omega_0^2$, 其中前两个为二重简并的解, 这与上例得到的结果完全一致.

这个例子可以看成是一个一维固体振动的经典模型. 在固体物理中, 同学们会处理更为复杂的振动模式 (更为复杂的晶格结构、更高的维数等等).

12.4 非谐效应

非线性振子, 或者称为非谐振子, 是一个十分有趣的研究对象. 从小振动的角度来看, 如果我们将系统的拉格朗日量在系统的平衡位置附近展开, 只要系统偏离平衡位置足够小, 系统的运动就可以用简谐振动来加以描述. 由于这时的运动方程是线性的微分方程, 所以简谐振动又被称为线性振动. 如果系统偏离平衡位置的位移 x 不是很小, 我们一般需要在拉格朗日量中考虑 x 的高阶 (高于二阶) 修正. 这时相应系统的运动方程就变成非线性微分方程. 因此这种振动又被称为非线性振动. 当非线性效应出现时, 系统会出现一些新的, 线性振动中所没有的特点. 这一节简单介绍一下这些效应.

考虑一个非谐振子, 它的拉格朗日量可以写为

$$L = \frac{1}{2}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j) + \frac{1}{2}n_{ijk}\dot{x}_i\dot{x}_jx_k - \frac{1}{3}l_{ijk}x_ix_jx_k, \quad (3.107)$$

¹⁰我们这里为了方便利用了复数表示, 其含义是真正物理的解是相应复数表示的实部, 即 $x_n = \text{Re}(A e^{-i\omega t + ipn})$.

其中引入了两个非谐项：第一项的形式是 $\dot{x}_i \dot{x}_j x_k$ ，它是动能项中的系数对 x 展开所产生的；第二项是势能项展开到位移 x_i 的三次幂所得到的。显然展开式中应当还存在 x_i 的更高幂次，比如关于 x 或 \dot{x} 分量的四阶项，不过在多数情况下，如果三阶的项的确是存在的，这时三阶项往往提供最重要的非谐效应。但如果某些对称性限制了三阶项的可能贡献，那么这时四阶或更高阶的项可能也是需要考虑的。在下面的讨论中，我们将假定高于三阶的项是足够小并可以忽略的。同时我们也将假定三阶的非谐项与谐振项相比是小量，因此可以将它们看作微扰。

现在我们利用谐振项所确定的系统的简正坐标来表达拉格朗日量，它的形式为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\alpha - \omega_\alpha^2 Q_\alpha Q_\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma, \quad (3.108)$$

其中系数 $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ 关于前两个指标是对称的，而系数 $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ 关于所有指标都是对称的。

非线性振子系统的运动方程可以写成

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (3.109)$$

其中函数 f_α 是一个二次齐次函数，包含各种可能的 Q, \dot{Q}, \ddot{Q} 的二次项。我们将假定所有非线性项都是小的，因而可以利用逐阶展开的方法来求解这个非线性方程：

$$Q_\alpha(t) = Q_\alpha^{(0)}(t) + Q_\alpha^{(1)}(t) + Q_\alpha^{(2)}(t) + \dots, \quad (3.110)$$

而 $Q_\alpha^{(0)}(t)$ 就是线性振动的解。其中的零阶项满足谐振子方程 $\ddot{Q}_\alpha^{(0)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(0)} = 0$ ，而到第一阶有

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = f_\alpha(Q^{(0)}, \dot{Q}^{(0)}, \ddot{Q}^{(0)}). \quad (3.111)$$

注意到这个等式右边的函数 f 是其宗量的二次函数，因此简单的“三角关系”告诉我们：一个形如 $Q_\beta^{(0)} Q_\gamma^{(0)}$ 的非线性项一定会产生具有频率 $\omega_\beta \pm \omega_\gamma$ 的周期运动，因此，到第一阶 $Q_\alpha^{(1)}(t)$ 中一定会包含具有频率 $\omega_\beta \pm \omega_\gamma$ 的项。这些频率称为组合频率。

如果我们考虑到第二阶，那么更多的组合频率会进入。另外，还会出现一个与原先频率相同的项出现在方程 (3.111) 的右边，因为 $\omega_\alpha \equiv \omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$ 。这样一来，这一项会在方程 (3.111) 的左边形成共振（表面上会造成无穷大的解），这需要特别的处理。真实的情况是，到第二阶，系统原先的频率也会有所改变：

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha. \quad (3.112)$$

只要频率的移动不为零，就不会出现无穷大的解。因此，要求到第二阶能够解出自洽的解，就能够定出频率的移动 $\Delta\omega_\alpha$ 。事实上，频率的移动也可以逐渐展开。将频率的展开式和简正坐标的展开式同时代入系统的运动方程，比较同阶的项就可以逐阶确定非线性振动的微扰解。

最后我们指出，上面讨论的是假定非线性的影响足够小的情况。这时我们可以将非线性项看成微扰，逐渐求解运动方程。如果非线性项的贡献本身就不是微扰，那么一般来说

求解非线性振动方程是十分复杂的，很多时候只能够依赖于数值方法。另外需要注意的是，非线性方程的解不具有线性叠加性。也就是说，非线性微分方程的两个解的线性组合一般不再是方程的解。这也正是非线性振动比较复杂的一个重要原因。有关这方面的详细讨论和更具体的例子见参考书 [4] 的第七章。



相关的阅读

本章讨论了分析力学三方面典型的应用：中心力场中粒子的运动——特别是开普勒问题、三维刚体的运动、多自由度系统的小振动。

第四章

连续介质力学

本章提要

- 一维振动与波
- 晶格谐振与三维连续介质力学

分 析力学不仅可以处理有限的质点系统的经典动力学，同时它也可以处理原则上不可数无穷多自由度的经典力学系统。即连续介质力学 (continuum mechanics)。连续介质力学所研究的对象是十分广泛的：流体力学、弹性力学、经典场论等；它既可以属于纯粹的理学，也可以应用于工学。

本章将首先以一维分布的弦上的振动和波为对象，介绍分析力学的处理方法。随后，我们将从三维点阵出发，讨论晶格谐振理论并过渡到长波的连续介质弹性理论。对于三维弹性介质的讨论实际上对同一时期的电磁学的发展起到了相当重要的参考作用。事实上，麦克斯韦的电磁理论几乎就是参照三维弹性体的力学而构造出来的关于电磁位移的动力学理论，这正是我们在后续电动力学部分所讨论的。

13 一维振动与波

声音传播的理论源于 17 世纪牛顿 (Isaac Newton) 的工作，他得到波速 $v = \sqrt{\kappa}$ ，其中 κ 是压强涨落 ΔP 与密度涨落 $\Delta \rho$ 之比或压缩率：

$$v = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{\Delta P}{\Delta \rho}} . \quad (4.1)$$

18 世纪中叶，欧拉 (Leonhard Euler) 在研究这类问题过程中创立了微分方程的学科，其中最重要的是给出了图 4.1(a) 中一维空气中的声波 (纵波)、或图 4.1(b) 中一维弦上的机械波 (横波) 的波动方程。下面我们将介绍这个波动方程是如何从分析力学中得到的。

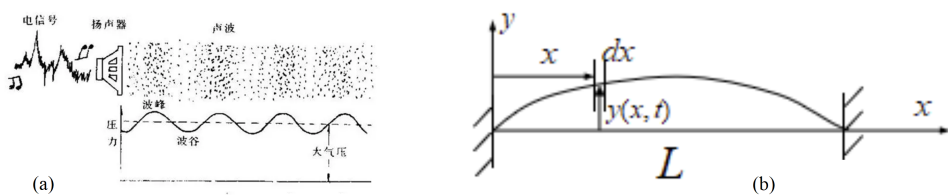


图 4.1: 一维的波: (a) 空气中的一维纵波—声波; (b) 一维弦上的横波

13.1 一维弦上的波

我们在讨论小振动时处理过的的一维原子链问题 (例题 3.3) 可以作为一维弦上纵波的传播的很好的模型。我们需要考虑的只是将两个相邻的原子之间的间距 $a \rightarrow 0$, 同时取 $N \rightarrow \infty$, 但保持 $L = Na$ 固定, 同时我们还需要取 $k \rightarrow \infty$ 但 $T = ka$ 保持固定. 这样一来, 体系的拉氏函数就可以写为:

$$L = \int_0^L dx \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{u}^2 - \frac{T}{2} (u')^2, \quad (4.2)$$

其中 $\dot{u} = \partial u / \partial t$, $u' = \partial u / \partial x$. 注意此时系统偏离平衡位置的位移是沿着 x 方向的, 这一类的沿着空间分布的小振动—即波动—被称为纵波, 即波的传播方向与每一点振动的方向是相同的. 与此对应, 如果空间每一点处偏离平衡位置的位移 u 的方向与波的传播方向垂直, 就被称为横波. 在三维的固体之中, 往往既可以传播纵波也可以传播横波.

对图 4.1(b) 中沿着一维 x 轴分布的弦上的机械横波, 另外一种求出体系作用量和拉格朗日函数的方法是利用微元法. 假定弦单位长度的质量可以用 $\mu(x)$ 来描述, 弦内的张力则由 $T(x)$ 所描写, 弦的 (偏离平衡位置 $u = 0$) 的位移由 $u(x, t)$ 所描写. 考虑从 x 到 $x + dx$ 一个弦的微分线元, 这个微分线元的长度相对于平衡位置的偏离为,

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + du^2} - dx \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (4.3)$$

由于弦内的张力为 $T(x)$, 这段微元的长度变化贡献的微分势能为,

$$dU = T(x) d\ell = \frac{T(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (4.4)$$

这个微元的运动主要在垂直弦的方向, 那么微元的动能显然是,

$$dK = \frac{\mu(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (4.5)$$

于是我们也能得到弦的拉格朗日量 L 和作用量 S 为,

$$S = \int dt L = \int dt \int dx \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{\mu(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{T(x)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (4.6)$$

上式中的 \mathcal{L} 表示单位长度上的拉格朗日量, 称为 (一维连续体系) 拉格朗日密度。如果是更高维的连续体系, 例如二维或三维的连续体系, 则应当换为单位面积、单位体积的拉格朗日函数。总之, 系统的总的拉格朗日量是相应连续体系拉格朗日密度的一个体积分。为了符号上的方便, 我们将引入记号:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.7)$$

这样一来, 上式中的拉格朗日密度可以视为时空坐标 t, x , 位移 $u(x, t)$ 及其时空偏导数 \dot{u} 和 u' 的函数:

$$\mathcal{L}(x, t, u, \dot{u}, u') = \frac{1}{2}\mu(x)\dot{u}^2 - \frac{1}{2}T(x)(u')^2. \quad (4.8)$$

关于体系的运动方程仍然可以藉由最小作用量原理导出。为此我们考虑场 $u(x, t)$ 的一个无穷小变分: $\delta u(x, t)$, 这时作用量的变分为,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \mu(x) \dot{u} \delta \dot{u} - T(x) u' (\delta u)' \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} \right) \right] \delta u \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} \delta u \right]_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

上式的最后一行包含了两类的边界项: 第一项是通常时间端点的边界项, 第二项则是空间端点处的边界项。对于体系的运动方程而言, 其时间端点处总是固定的, 即总是有对任意的 x , $\delta u(x, t) = 0$; 如果对于空间端点处我们也有 $\delta u(x_1, t) = \delta u(x_2, t) = 0$, 抑或在端点处有 $\partial \mathcal{L} / \partial u' = 0$, 我们都得到如下的运动方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} \right) = 0. \quad (4.10)$$

对于公式 (4.8) 中的具体形式我们得到,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4.11)$$

对于给定的函数 $T(x)$ 和 $\mu(x)$, 这是一个关于 $y(x, t)$ 的二级偏微分方程。结合上具体的边界条件, 就可以完全确定该方程的解。特别的, 对于最为简单的情形, 即 $T(x) = T$ 和 $\mu(x) = \mu$ 都是常数的情况, 我们就得到标准的波动方程,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4.12)$$

其中 $c = \sqrt{T/\mu}$ 为波速。本节将主要讨论上述两类一维的非相对论性弦的动力学问题。我们称式 (4.12) 为一维的波动方程而更为一般的式 (4.11) 则称为推广的波动方程。

13.2 弦上的波与能量守恒

本小节中我们简单讨论一下弦上的行波解。对于上节导出的一维波动方程 (4.12)，它具有一个非常直观的行波解。为此我们定义，

$$x_{\pm} = x \pm (ct), \quad (4.13)$$

于是简单的变量替换告诉我们，一维的二级微分算符（一维的达朗伯算符）可以写为

$$\square = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-}. \quad (4.14)$$

于是波动方程可以写为，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_+ \partial x_-} = 0, \quad (4.15)$$

它的最一般的解显然是，

$$u(x_+, x_-) = f(x_-) + g(x_+). \quad (4.16)$$

或者用原先的时空坐标 x 和 t 写出来就是，

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (4.17)$$

其中 f 和 g 是任意的函数。显然， $f(x - ct)$ 描写了一个沿着 x 轴向右（也就是 x 轴的正方向）传播的扰动（right-moving disturbance），而 $g(x + ct)$ 则表示了沿着 x 轴向左传播的扰动（left-moving disturbance）。这个一般解的任意函数 f 和 g 需要通过运用相应具体问题的初条件或边条件来加以确定。人们一般称一维波动方程 (4.12) 的式 (4.17) 形式的解为达朗伯解（d'Alembert's Solution）。

对一个没有边界空间中的无穷弦，那我们没有什么边界条件需要满足。要求解一条无穷弦的力学问题，我们需要知道它的初始位移 $u(x, 0)$ 以及初始的速度 $\dot{u}(x, 0)$ ，两者都是关于位置 x 的已知函数。进一步假定这是一个张力和质量分布都是均匀的弦，从而满足波动方程 (4.12)。这时候利用式 (4.17)，我们发现最后的问题的解可以写为，

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u(x - ct, 0) + u(x + ct, 0)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \dot{u}(\xi, 0). \quad (4.18)$$

这就是一维波动方程 (4.12) 的初值问题的解。

下面我们讨论弦的机械能及其传播。首先从一维弦的一般的拉氏密度 (4.6) 出发，获得其哈密顿密度，

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{u} - \mathcal{L}, \quad \Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \mu \dot{u}, \quad (4.19)$$

这给出以一对共轭变量 (y, Π) 为自变量的一维弦的一般的哈密顿密度，

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi^2}{2\mu} + \frac{1}{2}T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (4.20)$$

式 (4.20) 中的哈密顿密度是用正则动量密度 Π 以及广义坐标 u 来表达的, 如果用原来的广义速度 \dot{u} 和 u 来表达哈密顿密度, 就是系统的机械能密度,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu\dot{u}^2 + \frac{1}{2}Tu'^2. \quad (4.21)$$

对于一个满足推广的波动方程 (4.11) 的解 $u(x, t)$ 而言, 我们现在考察其式 (4.21) 中的机械能密度随时间的变化率,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \mu(x)\dot{u}\ddot{u} + T(x)u'\dot{u}' = \dot{u}[Tu']' + Tu'\dot{u}' = \frac{\partial}{\partial x}[T(x)\dot{u}u'], \quad (4.22)$$

其中的第二步到第三步我们运用了运动方程 (4.11), 即 $\mu\ddot{u} = [Tu']'$ 。现在我们令

$$j_{\mathcal{E}}(x, t) \equiv -T(x)\dot{u}u', \quad (4.23)$$

它称为一维体系的能流密度, 那么系统机械能密度和能流密度满足如下的连续性方程:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot j_{\mathcal{E}} = 0. \quad (4.24)$$

这实际上是一个连续体的总的机械能守恒定律。要看清这一点, 我们只需要将上面的连续性方程在任何一段空间 $[x_a, x_b]$ 上进行积分就得到,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{x_a}^{x_b} \mathcal{E} dx \right) = [j_{\mathcal{E}}(x_a) - j_{\mathcal{E}}(x_b)] \quad (4.25)$$

这说明任意一段区间上弦的能量变化率, 一定等于它的两端流入的能流之差。更准确地说, 式 (4.23) 中的 $j_{\mathcal{E}}(x, t)$ 代表了在位置点 x 、时刻 t 时, 单位时间内从 x 的左侧流入右侧 (也就是沿着 x 轴的正方向) 的能量。因此式 (4.25) 的左边就是整个区间 $[x_a, x_b]$ 上弦的机械能的时间变化率, 而式的右边就是该区间两端流入的净机械能的能流。换句话说, 式 (4.25) 就是一段弦的机械能守恒定律。

显然, 如果我们考虑连续体的维度不是一维的, 比如说三维的, 那么在微分形式的能量守恒定律 (4.24) 中, 能流密度 $\mathbf{j}_{\mathcal{E}}$ 就将变为一个三维矢量, 而相应的空间算符 $\partial/\partial x$ 需要替换为三维的梯度算符 ∇ , 并对 $\mathbf{j}_{\mathcal{E}}$ 求散度。

对波动方程 (4.12), 可以很容易地写出其上的向左和向右传播的波动模式的能量密度和能流密度。对于达朗伯解 (4.17) 而言, 能量密度和能流密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= T(f'(x-ct))^2 + T(g'(x+ct))^2, \\ j_{\mathcal{E}}(x, t) &= cT(f'(x-ct))^2 - cT(g'(x+ct))^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

13.3 边条件: 波的反射与透射

¶ 如果我们对弦加上边界条件, 即考虑在 x 方向有边界的弦, 这时候弦的运动方程的解会受到边界条件的影响。首先我们考虑一个定义在区间 $[0, \infty)$ 上的弦的振动问题。假定在 $x=0$ 处我们加上一个固定边条件 (又称为 Dirichlet 边条件、第一类边条件):

$$u(x=0, t) \equiv 0. \quad (4.27)$$

我们仍可运用达朗伯解 (4.17) 就得到,

$$u(0, t) = f(-ct) + g(ct) = 0, \quad f(\xi) = -g(-\xi), \quad (4.28)$$

于是一般的达朗伯解 (4.17) 必须满足,

$$u(x, t) = g(ct + x) - g(ct - x), \quad (4.29)$$

这就是一端固定的半无限弦的波动方程之最一般解, 其中 $g(\xi)$ 仍然可以是任意的函数。如果我假定 $g(\xi)$ 是一个只在 $\xi = 0$ 附近一定范围内才不为零的脉冲型的函数, 那么由于 $x > 0$, 因此上式中的第二项 (向右传播的部分) 在 $t \rightarrow -\infty$ 的地方完全没有贡献; 只有第一项 (向左传播的部分) 有贡献, 而且脉冲的位置位于: $x \simeq -(ct) > 0$ 的位置附近, 它代表了一个向左传播的入射波。对于 $t > 0$ 并且趋于正无穷时, 上述情形刚好反过来: 第一项将没有贡献, 第二项则有贡献并且等于 $-g(ct - x)$, 这个脉冲位于 $x \simeq ct > 0$ 并且代表一个向右运行的反射波。注意其中的负号, 它意味着在关于 $t = 0$ 对称的时间点, 入射波和反射波刚好相差一个位相 π 。

类似的讨论可以用于第二类边条件。如果我们的边界条件是

$$u'(0, t) = f'(-ct) + g'(ct) = 0, \quad f'(\xi) = g'(-\xi), \quad (4.30)$$

这给出

$$u(x, t) = g(ct + x) + g(ct - x), \quad (4.31)$$

这个的物理诠释与第一类边条件类似, 只不过反射波没有 π 的位相差。

下面我们讨论 $x = 0$ 的左右两个区间都有波的情况。考虑在 $x = 0$ 处有一个质量为 m 的质点。它的左右两端都是标准的弦。如果在 $t \rightarrow -\infty$ 时有一个脉冲从左向右入射, 假定在 $t = 0$ 时, 它影响到 $x = 0$ 点附近。由于这里存在的质点, 它将在弦的左右两边分别产生透射波和反射波。为此, 我们可以令,

$$\begin{cases} u(x, t) = f(ct - x) + g(ct + x), & x < 0, \\ u(x, t) = h(ct - x), & x > 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

其中 $f(ct - x)$, $g(ct + x)$ 分别代表入射波和反射波; $h(ct - x)$ 则表示透射波。这些函数都是在其宗量的原点附近不为零。作为入射波, 函数 $f(\xi)$ 的形式应当是已知的。

在 $x = 0$ 处的质点 m 的运动方程就是其牛顿方程,

$$m\ddot{u}(0, t) = T[u'(0^+, t) - u'(0^-, t)]. \quad (4.33)$$

如果 $u(x, t)$ 是连续的函数, 根据式 (4.11), 力为 $(Tu')'$; 但原点有质量为 m 的质点, 因此在原点附近 $Tu'(0, t)$ 的跃变代表了作用在质点 m 上的力。虽然 $u(x, t)$ 对 x 的偏微商在原点不连续, 但是 $u(x, t)$ 本身在点 $x = 0$ 是连续的。这个连续条件给出

$$h(\xi) = f(\xi) + g(\xi), \quad (4.34)$$

而质点 m 的运动方程 (4.33) 则给出,

$$g''(\xi) + \frac{2T}{mc^2} g'(\xi) = -f''(\xi). \quad (4.35)$$

注意, 作为入射波而言, 函数 f 一般来说是已知的。上述这个微分方程可以利用傅里叶变换来加以求解。为此, 我们对于所有的脉冲函数 f , g 和 h 都引入它们相应的傅里叶变换, 分别记为 \tilde{f} , \tilde{g} 和 \tilde{h} 。它们之间的联系由下式给出,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ik\xi}, \quad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) e^{-ik\xi}. \quad (4.36)$$

当然, 类似的定义式也适用于另外两个函数 g 和 h 。我们知道, 如果 $f(\xi)$ 仅仅在 $\xi = 0$ 附近 Δx 的范围内不为零, 那么相应的 $\tilde{f}(k)$ 也一定在 $k = 0$ 附近的 Δk 的范围内不为零, 并且两者之间满足著名的测不准关系,

$$\Delta x \cdot \Delta k \simeq 1. \quad (4.37)$$

利用傅里叶变换, 关于 g 的微分方程 (4.35) 变为相应的傅里叶振幅的代数方程并且可以直接解出来:

$$(-k^2 + ik_0 k) \tilde{g}(k) = k^2 \tilde{f}(k), \quad \tilde{g}(k) = \frac{-k}{k - ik_0} \tilde{f}(k). \quad (4.38)$$

其中我们令 $k_0 \equiv 2T/(mc^2)$ 。类似地, 我们可以解出 $\tilde{h}(k)$ 。因此, 我们可以统一写为:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &\equiv r(k) \tilde{f}(k), \quad \tilde{h}(k) \equiv t(k) \tilde{f}(k), \\ r(k) &= \frac{-k}{k - ik_0}, \quad t(k) = 1 + r(k). \end{aligned} \quad (4.39)$$

复系数 $r(k)$ 和 $t(k)$ 分别被称为形如 $e^{ik\xi}$ 的复行波的反射系数 (reflection coefficient) 和透射系数 (transmission coefficient)。注意, 这两个系数是复的而不简单地是实的, 主要是因为经典物理学中经常会利用波的复形式来表达它。真正物理的振幅则是相应复形式的实部。因此, 反射和透射系数不一定是实的则反映了在波的反射和透射过程中, 除了振幅的大小的变化之外, 还有可能会存在波的相位的改变。

如果我们感兴趣实空间的行为, 我们可以把式 (4.39) 直接代入到傅里叶变换 (4.36) 中得到相应的反射或透射波的行为。以透射波 h 为例,

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} t(k) \tilde{f}(k) e^{ik\xi}, \\ &= \int d\xi' \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} t(k) e^{ik(\xi-\xi')} \right] f(\xi'), \\ &= \int d\xi' G(\xi - \xi') f(\xi'). \end{aligned} \quad (4.40)$$

其中第二步我们将 $\tilde{f}(k)$ 用其定义式代入, 即写回到实空间, 最后一步我们定义的一维的推迟格林函数 (Green's function), 其中 $\Theta(x)$ 为阶梯函数 (step function)

$$G(\xi - \xi') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} t(k) e^{ik(\xi - \xi')} = k_0 e^{-k_0(\xi - \xi')} \Theta(\xi - \xi'). \quad (4.41)$$

因此, 对已知的入射波 f 而言, 原点存在质点 m 的透射波可以写为,

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' G(\xi - \xi') f(\xi') \\ &= k_0 \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' e^{-k_0(\xi - \xi')} f(\xi'), \quad k_0 = \frac{2T}{mc^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

当然, 相应的反射波 g 也可以由 $g(\xi) = h(\xi) - f(\xi)$ 给出。

13.4 驻波: 伯努利解

如果我们考虑的弦在两端都有边界, 例如两端固定的弦, 或者一根自由端点的弦, 那么弦上面的波动解需要额外的考量。这时候的解仍然可以写成左移和右移的模式叠加, 只不过两种模式必须以恰当的方式进行叠加, 以保证两端的边界条件都得到满足。

从达朗伯解 (4.17) 出发令 $y(0, t) = 0$ 我们得知,

$$u(x, t) = g(ct + x) - g(ct - x), \quad (4.43)$$

我们再利用 $x = L$ 处的边条件 $y(L, t) = 0$ 就得到: $g(ct - L) = g(ct + L)$, 这意味着函数 $g(\xi)$ 是以 $2L$ 为周期的函数,

$$g(\xi + 2L) = g(\xi), \quad (4.44)$$

所以 $g(\xi)$ 一定可以展开为傅里叶级数, 体现了古老的毕达哥拉斯音乐与整数的关系:

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A'_n \cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \right). \quad (4.45)$$

将这个形式代入达朗伯解我们发现, 它可以写为标准的级数展开形式。为了简化记号我们引入如下的定义,

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \equiv n\omega_1 \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.46)$$

以及归一化的函数 $\psi_n(x)$ 如下,

$$\psi_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.47)$$

它们满足如下的正交归一关系:

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle \equiv \mu \int_0^L dx \psi_m^*(x) \psi_n(x), \quad \mu \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m^*(x') = \delta(x - x'). \quad (4.48)$$

这时我们的一般解可以写为,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] , \quad (4.49)$$

而系数 A_n 和 B_n 则由初始条件 $u(x, 0)$ 和 $\dot{u}(x, 0)$ 共同确定;

$$\begin{aligned} A_n &= \mu \int_0^L dx \psi_n(x) u(x, 0) , \\ \omega_n B_n &= \mu \int_0^L dx \psi_n(x) \dot{u}(x, 0) . \end{aligned} \quad (4.50)$$

其中的 ω_n 以及 $\psi_n(x)$ 分别由式 (4.46) 和式 (4.47) 给出。由式 (4.49) 所给出的解说明两端固定的弦的振动实际上由一系列固定频率 $\omega_1 = \pi c/L$ 的整数倍的谐振三角函数构成。我们的解法是通过达朗伯形式的行波解进行叠加, 它们在有限的区间上恰好形成驻波解。这种形式的驻波解在历史上首先是由 Daniel Bernoulli 在 1728-1733 年左右获得的, 因此这个解常常被称为伯努利解 (Bernoulli solution)。¹

14 晶格谐振与三维连续介质力学

本节首先将简要从力学中单晶体原子层面三维分立波的晶格谐振理论出发, 通过寻求连续的极限获得三维的连续介质弹性理论。

14.1 晶格谐振理论简述

1912-1913 年, 德国哥廷根大学的玻恩 (Max Born) 和冯·卡门 (Theodore von Karman) 合作, 利用分析力学更精确地计算了晶体中原子的振动问题, 给出了三维分立点阵中的原子振动和波的色散关系 $\omega_s(\vec{k})$ 。晶格谐振理论 (lattice dynamics) 的基本假设为:

1. 我们假设每个原子的平衡位置位于三维的晶格点阵上。在具有复式晶格的晶体中, 原子的平衡位置位于点阵的格矢量 $\vec{R}_{lj} = \vec{R}_l + \vec{d}_j$ 位置上, 其中 \vec{R}_l 是布喇菲点阵的格矢量 (下标 $l = 1, 2, \dots, N_L$ 代表晶体中的原胞, 在三维空间 l 得用一组整数 $\{l_1, l_2, l_3\}$ 表示: $\vec{R}_l = l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2 + l_3 \vec{a}_3$); \vec{d}_j 标志了原胞内部的基的位置 ($j = 1, 2, \dots, n_a$)。
2. 原子振动波是一个微观机械波, 它可以由在三维周期性点阵上定义的振动波函数来描述。离开平衡位置 \vec{R}_{lj} 的原子振动由 $\vec{u}_{lj} = \vec{r}_{lj} - \vec{R}_{lj}$ 定义, 其中 \vec{r}_{lj} 是晶体中第 (l, j) 原子在运动中的原子核位置。原子位移 $|\vec{u}|$ 比晶格常数 a, b, c 小得多, 因此原子势可近似为类似胡克定律的 \vec{u}_{lj} 的二次项, 这就是谐振近似。

¹这个时期他正在 S. Petersburg 与欧拉一起工作。

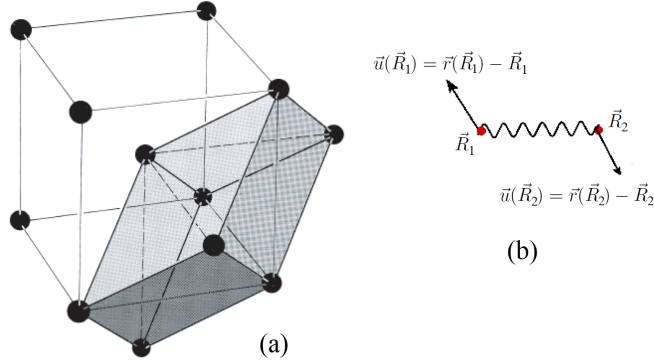


图 4.2: 晶格谐振理论的基本假设。(a) 最常用的结构材料中铁晶体的立方单胞和灰色部分的原胞 (韦丹, 2023); (b) 谐振近似, 即分别位于 \vec{R}_1 和 \vec{R}_2 格点上的原子之间的原子势可近似为类似胡克定律的 $\vec{u}_{12} = \vec{u}(\vec{R}_1) - \vec{u}(\vec{R}_2)$ 的二次项。

假设 1 考虑了实验观测到的固体微观的晶体结构, 假设在原子振动存在的时候, 原子或离子的平衡位置位于周期性的点阵 \vec{R}_{lj} 上, 以图 4.2 中的铁单晶为例,

$$\vec{R}_{lj} = \vec{R}_l + \vec{d}_j = \sum_i l_i \vec{a}'_i + \vec{d}_j, \quad \vec{d}_1 = 0, \quad \vec{d}_2 = \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \quad (4.51)$$

其中 $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ 就是简单立方的基矢 $a\hat{x}, a\hat{y}, a\hat{z}$, 体心立方 (BCC) 是布拉维点阵, 但式 (4.51) 的写法是旋转对称性高的立方单胞格矢量 \vec{R}_l 加上一个两格点的基 ($j = 1, 2$)。瞬时位置 \vec{r}_{lj} 不是周期的, 格点 \vec{R} 附近的原子振动的位移定义为:

$$\vec{u}(\vec{R}) = \vec{r}(\vec{R}) - \vec{R}. \quad (4.52)$$

晶格谐振理论的哈密顿量中谐振势能的普遍形式为 ($\mu, \nu = 1, 2, 3$, 自动求和)

$$U^{\text{harm}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{R}\vec{R}'} u_{\mu}(\vec{R}) D_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}') u_{\nu}(\vec{R}'). \quad (4.53)$$

其中 $D_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}')$ 被称为力常数矩阵, 它并没有简单的解析形式。但是我们可以根据晶体的对称性给出 $D_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}')$ 所满足的对称性条件:

$$\begin{aligned} D_{\nu\mu}(\vec{R}' - \vec{R}) &= D_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}'). \\ D_{\mu\nu}(\vec{R} - \vec{R}') &= D_{\mu\nu}(\vec{R}' - \vec{R}) \quad \text{或} \quad \tilde{D}(\vec{R}) = \tilde{D}(-\vec{R}). \\ \sum_{\vec{R}} D_{\mu\nu}(\vec{R}) &= 0 \quad \text{或} \quad \sum_{\vec{R}} \tilde{D}(\vec{R}) = 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

有了力常数矩阵这些对称性, 就可以求解单原子布拉菲点阵振动的 $3N_L$ 个联立的运动方程, 其中 $N_L = N_1 N_2 N_3$ 是原胞数或原子数, M 为原子质量:

$$M\ddot{\vec{u}}(\vec{R}) = - \sum_{\vec{R}'} \tilde{D}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{u}(\vec{R}'). \quad (4.55)$$

点阵振动的经典简正模式 (normal mode) 不管是对理解晶体的声学性质或是热性质都是非常有用的。我们尝试如下的三维平面波解,

$$\vec{u}(\vec{R}, t) = \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)}. \quad (4.56)$$

其中 $\vec{\epsilon}$ 是简正模式的偏振矢量 (polarization vector), 它需要通过求解相应的本征方程的非零本征矢量得到。在有限大晶体中, 式 (4.56) 中的平面波满足玻恩-卡门周期边界条件 $\vec{u}(\vec{R} + N_i \vec{a}_i) = \vec{u}(\vec{R})$ 意味着波矢满足的形式为

$$\vec{k} = \frac{n_1}{N_1} \vec{b}_1 + \frac{n_2}{N_2} \vec{b}_2 + \frac{n_3}{N_3} \vec{b}_3, \quad n_i \text{ integer}, \quad (4.57)$$

其中 \vec{b}_i 是倒易点阵的一组原矢, 与真实空间的直接点阵的原矢 \vec{a}_j 之间满足正交关系 $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = 2\pi \delta_{ij}$ 。注意在声子谱 $\omega(\vec{k})$ 中, \vec{k} 可以选择位于第一布里渊区 (FBZ) 内, 这样一个分支的声子谱中容纳的声子类型正好等于原胞数 $N_L = N_1 N_2 N_3$ 。

把平面波解 [式 (4.56)] 代入运动方程 [式 (4.55)], 即可得到本征矢量为 $\vec{\epsilon}$ 的三维本征方程:

$$M\omega^2 \vec{\epsilon} = \tilde{D}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}. \quad (4.58)$$

此处的 $\tilde{D}(\vec{k})$ 是力常数矩阵 $\tilde{D}(\vec{R})$ 傅里叶变换, 称为三维动力矩阵 (dynamical matrix)

$$\tilde{D}(\vec{k}) = \sum_{\vec{R}} \tilde{D}(\vec{R}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}. \quad (4.59)$$

三维动力矩阵是 3×3 的矩阵, 而力常数矩阵是 $3N_L \times 3N_L$ 的矩阵, 所以在傅里叶变换以后, 式 (4.58) 用三维线性代数的方法就可以求解了。

对第一布里渊区 (First Brillouin Zone, FBZ) 中的每个 \vec{k} , 本征方程 [式 (4.58)] 的解有三个, 总的简正模式对应于单原子布拉菲点阵的 $3N_L$ 个振动自由度。根据对称性 [式 (4.54)], 由力常数矩阵 $\tilde{D}(\vec{R})$ 可求得三维单原子布拉菲点阵晶体的动力矩阵 $\tilde{D}(\vec{k})$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{R}} \tilde{D}(\vec{R}) [e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} - 2] \\ &= \sum_{\vec{R}} \tilde{D}(\vec{R}) [\cos(\vec{k} \cdot \vec{R}) - 1] \\ &= -2 \sum_{\vec{R}} \tilde{D}(\vec{R}) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \vec{k} \cdot \vec{R} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

式 (4.60) 是 \vec{k} 的偶函数, 而且它还是实对称矩阵。根据线性代数, 每个三维实对称矩阵有三个实数的本征矢量 $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$, 本征值 λ_s 与本征频率 ω_s 相关:

$$\tilde{D}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \lambda_s(\vec{k}) \vec{\epsilon}_s(\vec{k}), \quad \omega_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\lambda_s(\vec{k})}{M}}. \quad (4.61)$$

而且三个实数本征矢量之间还是正交的:

$$\vec{\epsilon}_s(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_{s'}(\vec{k}) = \delta_{ss'}, \quad s, s' = 1, 2, 3. \quad (4.62)$$

14.2 从晶格谐振理论到连续弹性理论

经典的弹性理论 (theory of elasticity) 并不聚焦到微观原子结构, 而是把固体处理成连续介质 (continuous media)。就像从一维原子链可以取连续极限后获得一维连续弦的振动规律一样, 三维连续固体的谐振理论也可以从前一小节介绍的三维晶格谐振理论通过取相应的连续极限得到。

固体形变一般来说是由连续的位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 来描述, 记录连续介质中 \mathbf{x} 紧邻微元运动的位移矢量。弹性理论的基本假设是对固体能量密度的贡献只依赖于位移矢量 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, 更准确地说, 只依赖于 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 对 \mathbf{x} 的一阶微分。

初看起来似乎我们需要考虑所有的 $\partial u_i / \partial x_j$, 共有 9 种可能性。但实际上其中关于 i, j 反对称的部分无需考虑, 因为它们对应于整个固体一个刚性的整体转动, 这部分“形变”不会贡献弹性势能。因此我们只需要考虑其中的关于指标 i, j 对称的部分即可。这导致如下的应变张量 (strain tensor) ε_{ij} 的定义以及弹性势能的表达式:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad U^{\text{harm}} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\sum_{ijnl} \varepsilon_{ij} c_{ijnl} \varepsilon_{nl} \right]. \quad (4.63)$$

其中弹性刚度张量 (elastic stiffness tensor) c_{ijnl} 可以与分立版本中的力常数矩阵 $D(\vec{R})$ 直接联系起来, 只需要取定一个特定的晶格结构并取连续极限即可。这个关系非常类似于我们对于一维原子链的参数和一维连续弦中的参数之间的对应关系。

弹性刚度张量 c_{ijnl} 在 $ij \leftrightarrow nl$ 指标换位的变换下是不变的。此外, 它在 $i \leftrightarrow j$ 或 $n \leftrightarrow l$ 的指标换位的变换下也是不变的。在上述对称性下, 弹性刚度张量 c_{ijnl} 中独立的下标可能排列组合数为: (1) 四个指标一样, 3 种; (2) 三个指标一样, 另一个不同, 6 种; (3) 两个指标 ij 或 nl 一样, 6 种; 两个指标 in 或 jl 一样, 6 种; 因此, 可以总结出弹性刚度张量 c_{ijnl} 的独立分量的个数为 21 个。

在对称性较高的晶体中, 独立的非零弹性常数的数量会进一步减少。例如, 对立方晶系而言 c_{ijnl} 只有三个独立的分量, 下面就是著名的立方晶系的弹性常数 (elastic constants):

$$\begin{aligned} C_{11} &= c_{xxxx} = c_{yyyy} = c_{zzzz}, \\ C_{12} &= c_{xxyy} = c_{yyzz} = c_{zzxx}, \\ C_{44} &= c_{xyxy} = c_{yzyz} = c_{zxzx}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

所有其他的 c_{ijnl} 中, x, y , 或 z 出现的次数是奇数, 那么相应的 c_{ijnl} 必然是零。

最后我们可以看一下连续介质弹性理论中的运动方程。弹性体的动能就是对其内部每一个体积元动能的积分:

$$T = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)^2. \quad (4.65)$$

其中 $\rho = MN/V$ 为连续介质的质量密度, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 为弹性体内 \mathbf{x} 处的位移。拉格朗日函数为动能 [式 (4.65)] 减去弹性势能 [式 (4.63)]:

$$L = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)^2 - \frac{1}{4} \sum_{ijnl} c_{ijnl} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_l} \right) \right]. \quad (4.66)$$

然后根据哈密顿最小作用量原理, 我们有

$$\delta S = \delta \int dt L = 0, \quad (4.67)$$

弹性理论的运动方程为

$$\rho \ddot{u}_i = \sum_{jnl} c_{ijnl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_n}. \quad (4.68)$$

仍然把规范的平面波试探解

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.69)$$

代入连续介质弹性运动方程就可以获得波动的本征方程为

$$\omega^2 A_i = \sum_l \left(\frac{1}{\rho} \sum_{jn} c_{ijnl} k_j k_n \right) A_l. \quad (4.70)$$

在厘清了 c_{ijnl} 与分立版本的 $\widetilde{D}(\vec{k})$ 之间的关系之后, 上述本征方程可以验明与分立版本的本征方程式 (4.58) 完全一致。

¶ 如果材料是所谓各向同性的弹性体, 那么它的力学性质的描述参数可以比立方晶系中的弹性常数再减少一个。各向同性、线性的四阶弹性刚度张量的一般形式为:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.71)$$

其中的 λ 和 μ 一般被称为拉梅 (Gabriel Lamé) 常数 (Lamé constants), 或者拉梅模量。

在实际运用中, 人们一般使用杨氏模量 E 和泊松比 ν 这两个物理量来表征, 其中泊松比 (Poisson ratio) 的定义是横向应变与纵向应变之比, 它一般是处在 0-0.5 之间. 式 (4.71) 中弹性刚度张量的两个拉梅参数可以用 E 和 ν 表示

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \\ c_{1111} &= E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = B + \frac{4}{3}G, \quad c_{1122} = \lambda, \quad c_{1212} = G, \\ B &= V \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \Big|_{V_0} = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

其中 B 是体弹性模量 (bulk modulus), G 是切变模量 (shear modulus)。具体的材料的模量和泊松比可以在通常的材料力学书中查到. 它们还都可以通过对声速的测量获得。

在各向同性的弹性体, 读者可以验证, 利用式 (4.63) 和 (4.71), 体系的弹性势能可以改写为如下的形式:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} u_i(\mathbf{x}) \hat{K}_{ij} u_j(\mathbf{x}), \quad \hat{K}_{ij} = -[\mu \nabla^2 \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j], \quad (4.73)$$

其中的二阶微分算符 \hat{K}_{ij} 又可以分为横向和纵向两个部分:

$$\hat{K}_{ij} = \hat{K}_{ij}^T + \hat{K}_{ij}^L, \quad \hat{K}_{ij}^T = -\mu [\nabla^2 \delta_{ij} - \partial_i \partial_j], \quad \hat{K}_{ij}^L = -(\lambda + 2\mu) \partial_i \partial_j. \quad (4.74)$$

密度为 ρ 的各向同性弹性体中的横向声速和纵向声速分别对应于式 (4.74) 中的二阶算符 \hat{K}_{ij}^T 和 \hat{K}_{ij}^L 的本征模式；其振动的方向 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 分别与波的波矢方向垂直或平行。对于一个给定的波矢 \mathbf{k} ，横向声波有两个本征矢，而纵向声波则只有一个方向，它平行于 \mathbf{k} 的方向。横向声波和纵向声波的声速 (sound velocity) 则分别由下列两式确定：

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{1111}}{\rho}} \xrightarrow{\nu \ll 1} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.75)$$

我们看到，由于一般来说材料的泊松比在 $0 - 0.5$ 之间，因此这导致弹性体中纵向的声波传播的速度要大于横向的声波的传播速度。利用两种声波传递速度的差异，时刻监控地震波的地震台网就可以迅速确定地震发生的具体位置。



相关的阅读

本章中我们首先讨论了最为简单的一维连续体系——一条经典弦运动规律。我们的讨论从非相对论性的弦开始，讨论了它的拉氏密度，经典运动方程，能量和能流等概念。这些概念实际上是更一般的经典场论的一个代表。随后，我们尝试将固体的振动推广到三维，介绍了三维弹性固体的谐振理论。这个理论是将场的概念运用于三维机械力学系统的典型范例。历史上，它也为麦克斯韦电磁理论的发展提供了十分有益的参考。

第五章

电磁场与麦克斯韦方程

本章提要

- 协变形式和三维形式的麦克斯韦方程
- 经典电磁现象中的对称性：协变性和规范对称性
- 介质的影响和边条件
- 电磁现象中的守恒律

经

典物理学 (classical physics) 的成就可以浓缩为两个最为成功的理论：一个是经典力学，它包括牛顿力学以及随后发展起来的分析力学 (拉格朗日和哈密顿力学)；另一个就是以麦克斯韦方程为代表的经典电动力学。可以毫不夸张地说，这两个经典物理理论几乎含盖了我们日常生活中所遇到的所有物理现象。另一方面，经典电动力学同时也是相关的电子工程、材料工程、通讯等应用领域中的重要理论基础。经典电动力学在现代物理学理论的发展中也占据了举足轻重的地位，一方面它是狭义相对论诞生的摇篮；与此同时，经典电动力学中的一些重要概念 (例如规范不变性等) 更是近代量子场论的核心和基础。由此可见，经典的电动力学对于近代物理的两大重要理论框架——相对论和量子论都有着不可或缺的启蒙作用。

本章中我们将转换视角，聚焦于电磁场这一广义的力学系统，这其实就是经典电动力学的主体部分。另一方面，当电磁场存在的时候，它们不可避免地会极化介质。整个经典的电动力学的讨论几乎完全集中于电磁场本身以及电磁场如何与相关介质是相互影响之上。本章中，我们将延续第二章中的讨论——特别是第 6 节中关于带电粒子与矢量场相互作用的作用量出发，建立其关于电磁场的运动方程——这其实就是电动力学中所谓的真空中的麦克斯韦方程。

15 协变形式和三维形式的麦克斯韦方程

¶ 现在多数的教科书 (包括本讲义) 在讨论电磁理论时往往从真空中的麦克斯韦方程开始。这实际上是忽略了当初引导历史前辈们得出这些方程的哲学化的背景。在电磁学得以高速发展的 19 世纪, 电磁以太论曾十分盛行。当时的物理学家将我们现在称为电磁场的客体想象为在一种特殊的介质—以太—之中的特殊位移。其理论框架试图完全仿照机械力学—特别是第 14.2 小节中介绍的三维弹性力学中机械波的讨论, 将电磁波想象为以太这种“电磁弹性介质”之中的电磁振动。

按照现代物理学的逻辑我们知道, 在 1905 年狭义相对论提出特别是随后被广泛认可之后, 基于以太的理论框架实际上已经被扬弃了。具体来说, 以太基本上已经成为“真空”的代名词。而以太之中的电磁特质的“位移”也被取代为电磁场, 电磁场本身就是物质存在的另外一致方式而已, 它们就像实物粒子一样, 可以具有能量、动量、角动量等等这些力学特征。换句话说, 现代物理语言中所说的真空中的电磁场麦克斯韦方程, 在当年应当被称为以太中的电磁方程, 它们是 1873 年由麦克斯韦继承了法拉第等前人的电磁定律概括和总结出来的。虽然我们现在赋予了电磁场以更加现代的哲学内涵, 但不可否认的是, 以太论在当年对于人们建立完整的电磁场理论起到了不可替代的重要作用。

15.1 协变形式的麦克斯韦方程

有了上述的历史介绍, 我们下面将以更为现代的物理学语言来介绍麦克斯韦的电磁理论。事实上, 我们可以从第 6 节的讨论出发, 直接写出协变形式的麦克斯韦方程, 只要我们接受一个后验的事实—自然界的电磁相互作用可以由一个四矢量场 (2.42) 所描写, 产生它的源—我们称之为电荷是一个洛伦兹标量。按照那里的讨论, 与场 $A_\mu(x)$ 有关部分的作用量可以写为 [式 (2.52)]:

$$S[A_\mu(x)] = - \int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \quad (5.1)$$

其中的 $J_\mu(x)$ 是与源电荷/电流相应的电流密度四矢量 [式 (2.54)], 而场强张量 $F_{\mu\nu}(x)$ 与四矢势的关系为: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ [式 (2.46)]. 上式中的第二项—我称之为麦克斯韦-拉摩作用量—是拉摩在 1900 年首先给出的 (尽管形式稍有不同)。¹

有了四维协变形式的作用量, 我们可以考虑在固定的外源 $J_\mu(x)$ 的情况下, 电磁场 $A_\mu(x)$ 的运动方程。按照分析力学的基本原理, 我们只需要对 $A_\mu(x)$ 进行变分并令结果为零即可。直接的计算给出:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad (5.2)$$

另一方面, 根据 $F_{\mu\nu}$ 的定义式, 很容易验证它满足如下的比安基恒等式:

$$\partial_\alpha F_{\beta\rho} + \partial_\beta F_{\rho\alpha} + \partial_\rho F_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.3)$$

¹是的, 你没有看错, 这个作用量的诞生早于狭义相对论 (1905 年), 是从以太论中获得的。

我们可以将上述两式合并起来写为：

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \\ \partial_\alpha F_{\beta\rho} + \partial_\beta F_{\rho\alpha} + \partial_\rho F_{\alpha\beta} = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

这就是真空中麦克斯韦方程的协变形式。

为了把比安基恒等式 (5.3) 写的更为简洁，可以引进与 $F_{\mu\nu}$ 对偶的反对称张量 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ ：

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (5.5)$$

这样一来，真空中的麦克斯韦方程可以写为：

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \\ \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

其中的第一个式子被称为麦克斯韦方程的非齐次方程，第二个式子则被称为麦克斯韦方程中的齐次方程。这两个式子之所以具有某种不对称性源于自然界没有孤立的磁荷。我们这里希望强调的是，由于包含电磁场的作用量天然具有洛伦兹不变的特性，因此由其导出的场的运动方程 (5.4) 或 (5.6) 具有天然的洛伦兹协变性。这意味着麦克斯韦理论天生是与狭义相对论的时空观兼容的。换句话说，它必定与传统的伽利略时空观不兼容。这也解释了为何通过对电磁性质在不同参照系的变换过程中电磁性质的探讨最终会导致狭义相对论的诞生以及以太概念的被扬弃。

利用 $F^{\mu\nu}$ 的反对称性，我们很容易从麦克斯韦方程 (5.6) 中的非齐次方程得到：

$$0 \equiv \partial_\nu(\partial_\mu F^{\mu\nu}) = 4\pi\partial_\nu J^\nu, \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.7)$$

这就是电荷守恒的连续性方程，它自动蕴含在麦克斯韦方程之中。

15.2 三维形式的麦克斯韦方程与电磁单位制

按照我们在第 6 节中提及的，一个带电的电荷所感受到只是由四矢量场 $A_\mu(x) = (A^0, \mathbf{A})$ 所派生出来的电磁场张量 $F_{\mu\nu}(x)$ 而不是 $A_\mu(x)$ 本身。事实上 $A_\mu(x)$ 本身并不都是物理可观测的，这里面包含了规范的冗余性。电磁场张量 $F_{\mu\nu}(x)$ 又可以用三矢量电场强度 \mathbf{E} 和轴三矢量磁感应强度 \mathbf{B} 所描写 [式 (2.48) 和 (2.49)]：

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.8)$$

如果我们运用 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 来表达麦克斯韦方程 (5.6)，它的形式变为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

这就是在高斯制 (同时取了 $c = 1$ 的自然单位制) 下的真空中麦克斯韦方程组。

电磁相互作用是一种典型的长程相互作用。这种长程性使得电磁相互作用的尺度不仅仅局限在微观, 而是一直延伸到宏观的尺度。前面也曾提及, 在电磁学发展的重要时期中, 人们曾将电磁相互作用设想为特殊介质—以太之中的某种位移, 当时所有关于电学和磁学的实验研究都是在宏观尺度的实验室中进行的。不仅如此, 在最初的研究中, 电学、磁学和光学的实验都是各自独立地进行的。只有到了麦克斯韦理论建立之后, 人们才认清电、磁和光实际上都是电磁现象。这些复杂的历史过程就使得电磁学的单位制颇为复杂。在不同的电磁单位制中, 不仅仅基本方程的形式有所不同, 物理量的量纲也有所不同。具体来说, 历史上很多科学家使用了不同于我们前一小节中的高斯单位制。前一小节所采用的高斯和自然单位制, 更加适合微观尺度的电磁现象的研究, 但它并不是历史上人们所采用的适用于描写宏观电磁现象的单位制。

本小节中我们将简要介绍宏观尺度的电磁学中经常使用的单位制—国际单位制以及它与微观尺度单位制类高斯制之间的关系; 这将帮助读者厘清不同单位制之间的关联, 从而可以根据具体的问题从容地切换。概况来说, 宏观电磁现象的研究多数科学家采用国际单位制, 而对于微观尺度的电磁现象而言, 采用类高斯的自然单位制则更为方便。在下面一段的讨论之中, 我们暂时恢复真空中的光速 c , 在自然单位之中, 它被取为速度的单位。我们会看到, 每一个电磁单位制都被真空中的麦克斯韦方程所唯一确定, 而这些方程又源于历史上著名的电磁学实验。

¶ 真空中的麦克斯韦方程与单位制

一种电磁单位可以通过真空中电磁现象中的几个基本方程加以定制。下面我们将分别列出这些规律并逐一说明。

❖ 首先是静电学中描写真空中两个点电荷之间相互作用力的库仑定律:

$$F = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (5.10)$$

其中 k_1 是一个 (可能有量纲的) 比例常数。由一个点电荷产生的电场可以定义为该电荷周围一个单位测试电荷所受到的力:

$$E = k_1 \frac{q}{r^2}. \quad (5.11)$$

❖ 另一个用来确定单位的方程来源于稳恒电流所产生的磁场中电流所受的力。如果我们真空中有两个相距为 d , 电流分别为 I 和 I' 的无限长平行导电导线 (其直径可以忽略), 那么其中一个导线单位长度所感受到的, 来自另一个导线的力为:

$$\frac{dF}{dl} = 2k_2 \frac{II'}{d}. \quad (5.12)$$

其中 k_2 是另一个 (可以有量纲的) 比例常数。磁场可以定义为单位电流所感受到的力, 但是我们一般可以插入一个比例常数 α :

$$B = 2k_2 \alpha \frac{I}{d}. \quad (5.13)$$

值得注意的一个重要事实是，比较公式 (5.10) 和公式 (5.12)，我们发现 k_1/k_2 一定具有速度平方的量纲。独立的实验验证了：

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2, \quad (5.14)$$

其中 c 即为真空中的光速。

- 前面讨论的两个常数分别涉及电和磁，第三个用以确定电磁单位制的方程可以取为法拉第电磁感应定律，它涉及电与磁的相互感应：

$$\nabla \times \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (5.15)$$

- 最后我们注意到，在任何单位制中，电荷守恒定律的形式总是相同的：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (5.16)$$

上面列出的四个基本定律基本上就已经完全确立了一个单位制。我们可以据此写出这个最一般的单位制下、在真空中的麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} + \frac{k_2}{k_1} \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi k_2 \alpha \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

在这个方程组之中，第一个方程右边的系数来源于我们对于电场的定义 (5.11)；第二个方程的右边的系数来源于我们关于磁场的定义 (5.13) 以及电荷守恒的连续方程 (5.16)。如果我们考察真空中的上述麦克斯韦方程组，并且要求它给出真空中的波动方程（波速为 c ），那么我们立刻发现：

$$\frac{k_1}{k_3 k_2 \alpha} = c^2. \quad (5.18)$$

与前面的实验结论 (5.14) 比较我们发现：

$$k_3 = \frac{1}{\alpha}. \quad (5.19)$$

因此，我们得到如下的重要结论：对于一个任意的电磁单位制，只要给定： k_1, k_3 两个常数就可以完全确定该电磁单位制中的各种电磁方程。此外， k_1, k_2 必须满足约束 (5.14)。这当然并不是一个巧合：它是麦克斯韦方程协变性的要求。

在表 5.1 中我们列出了最为常用的三种电磁单位制对于不同的常数 k_1, k_2, k_3 的选取。同时列出的还有它们可能的量纲。我们发现，这些量纲在国际单位制之中特别的复杂一些；在高斯制或者海维赛德-洛仑兹单位制——它们可以统称为类高斯单位制——中，这些常

表 5.1: 三种常用的电磁单位制, 即国际制、高斯制、海维赛德-洛仑兹制对于常数 k_1 , k_2 , k_3 的选取。我们同时列出了这些常数的量纲。

单位制	$k_1 [k_1]$	$k_2 [k_2]$	$k_3 = 1/\alpha [k_3]$
国际	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 10^{-7} c^2 [ml^3 t^{-4} I^{-2}]$	$\frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7} [mlt^{-2} I^{-2}]$	1 [1]
高斯	1 [1]	$\frac{1}{c^2} [l^{-2} t^2]$	$\frac{1}{c} [l^{-1} t]$
海维赛德-洛仑兹	$\frac{1}{4\pi} [1]$	$\frac{1}{4\pi c^2} [l^{-2} t^2]$	$\frac{1}{c} [l^{-1} t]$

数要么是 1, 要么是光速的某个幂次, 因此其量纲是十分简单的。特别是如果我们进一步将光速 c 取为速度的单位, 那么常数 k_1 , k_2 就变成完全相等的常数, 同时高斯制以及海维赛德-洛仑兹制中的所有常数都变成无量纲的常数。这就是为什么在处理微观的电动力学问题中, 我们更加偏爱类高斯制, 因为它们在刻画电磁现象最基本的规律 (即麦克斯韦方程组) 的时更加方便简洁。

¶ 不同单位制下介质中的麦克斯韦方程

前面的讨论仅仅涉及了真空中的场和方程。不同的电磁单位制中介质中的场 \mathbf{D} , \mathbf{H} 的定义也有所不同。假定介质的电磁性质可以简单地用电极化矢量 \mathbf{P} 和磁化矢量 \mathbf{M} 来描写, 那么我们可以将宏观介质中的场统一写为:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M}, \quad (5.20)$$

其中的 ϵ_0 , μ_0 , λ , λ' 都是 (可能有量纲的) 比例常数。由于 \mathbf{D} , \mathbf{H} 是新定义的量, 我们完全没有必要将它的量纲取得与 \mathbf{P} , \mathbf{M} 不同, 因此在所有通用的单位制中, 人们取 λ , λ' 为无量纲常数。但 ϵ_0 和 μ_0 完全可以是有量纲的, 例如在大家所熟悉的国际制当中, 就是如此。上述三种单位制对于这些常数的选择是:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, \quad \lambda = \lambda' = 1, \quad \text{国际制} \quad (5.21)$$

$$\epsilon_0 = \mu_0 = 1, \quad \lambda = \lambda' = 4\pi, \quad \text{高斯制} \quad (5.22)$$

$$\epsilon_0 = \mu_0 = \lambda = \lambda' = 1, \quad \text{海维赛德-洛仑兹} \quad (5.23)$$

特别注意的是, 在国际制中 ϵ_0 和 μ_0 是有量纲的常数。它们的单位可以取为 F/m (法拉每米) 和 H/m (亨利每米)。由于目前的长度单位“米”是通过真空中光速和秒来定义的, 因此真空中的光速是一个没有误差的、严格的物理量:

$$c = 299792458 \text{ m/s}. \quad (5.24)$$

因此, 常数 ϵ_0 和 μ_0 也都是没有任何误差的物理常数。此外, 在电磁的国际单位制在, 还有一系列历史曾经起过重要作用的单位, 例如: 安培、伏特、欧姆、法拉、亨利等等, 这些都可以视为是我们上述提及的国际单位的导出量, 这里我们就不深入介绍了。有兴趣的读者可以参考相关的读物。

15.3 国际制中的真空麦克斯韦方程

¶ 在 1873 年, 麦克斯韦总结了以往电磁学的实验规律, 首先引入了所谓的位移电流的概念并且写下了著名的麦克斯韦方程。在国际单位制中, 真空中—或者说自由以太中—的麦克斯韦为:²

Maxwell Equations in Vacuum

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0, \quad (5.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (5.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (5.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.28)$$

方程 (5.25) 到方程 (5.28) 就是真空中的麦克斯韦方程的微分形式, 其中矢量场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 分别是某个时空点的电场强度和磁感应强度 [式 (5.8)]。电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 一起, 共同描写了真空中的电磁场; ρ 和 \mathbf{J} 是产生电磁场的电荷密度和电流密度 [式 (2.54)];³ ϵ_0 和 μ_0 是国际单位制中所特有的两个常数, 它们分别被称为真空中的介电常数和磁导率。这两个常数与真空中的光速 c 由下式联系:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (5.29)$$

麦克斯韦方程中的每一个方程都是以历史上的著名实验为基础的。方程 (5.25) 反映了高斯定律, 它源于著名的库仑 (Coulomb) 定律; 方程 (5.26) 是安培 (Ampère) 环路定律加上麦克斯韦的位移电流的假设, 我们称之为安培-麦克斯韦定律; 方程 (5.27) 是所谓的法拉第 (Faraday) 电磁感应定律; 方程 (5.28) 实际上是电场的库仑定律在磁学中的对应, 它反映了自然界中没有孤立的磁单极。

麦克斯韦对于电磁场理论的最大贡献, 是他在总结前人实验定律的基础上, 对以往的安培环路定律做出了修改, 加入了位移电流的贡献。也就是说, 与前人的结果比较, 他仅仅是改变了方程 (5.26), 而其他的电磁场方程则与前人的结果完全相同。但是, 这个看似小小的改动却是本质的, 它使得整个麦克斯韦方程组成为一个完整的、自我支撑的动力学体系并体现出许多重要的对称性。

²我们目前所写下的三维形式的麦克斯韦方程并不是当初麦克斯韦用的形式。麦克斯韦当年实际是利用分量形式写出的, 因此相当的烦杂。

³电流密度和电荷密度分布可以是所谓的广义函数 (例如, δ -函数), 这样一来, 这个公式也适用于分立电荷分布或电流分布的情形。

¶ 麦克斯韦方程回答了电磁场本身所满足的物理规律。而如果一个带电粒子处在外加的电磁场之中，它就会受到电磁场对它的电磁相互作用的力，它由著名的洛伦兹力公式给出。如果我们假定空间存在着电荷分布和电流分布，那么这些电荷以及电流分布在单位体积内感受到的力（即力密度）为：

Lorentz Force

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} , \quad (5.30)$$

其中 ρ 和 \mathbf{J} 是空间的电荷密度分布和电流密度分布。洛伦兹力的公式与麦克斯韦方程组一起构成了经典电动力学的基础。

16 麦克斯韦方程的对称性

¶ 前面提到，麦克斯韦方程具有一系列十分重要的对称性。这一节中，我们讨论这些重要的对称性。这种讨论既可以从其四维协变形式出发，也可以从三维形式的出发，只不过某些对称性在其中一种中会显得更为明显罢了。

1. 线性：

麦克斯韦方程的一个重要的特性就是它对于电磁场是线性的。这种线性意味着经典电磁场满足所谓的线性叠加原理。也就是说，如果真空中的电流密度四矢量 $J_\mu^{(1)}$ 所产生的电磁场为 $F_{\mu\nu}^{(1)}$ ；电流密度四矢量 $J_\mu^{(2)}$ 所产生的电磁场为 $F_{\mu\nu}^{(2)}$ ；那么当 $J_\mu^{(1)}$ 和 $J_\mu^{(2)}$ 同时存在时，它们所产生的电磁场一定是 $F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)}$ 。因此，我们只需要知道一个单位电流密度产生的电磁场，就可以利用线性叠加原理来得到任意电荷和电流分布下的电磁场。

2. 洛伦兹协变性：

麦克斯韦方程所具有的连续对称性中最为重要的有两个：其中一个便是洛伦兹不变性，它体现了电磁场在时空变换下的性质；另一个是下面要讨论的规范对称性。由于我们导出麦克斯韦方程就是从洛伦兹协变的作用量出发的，因此导出的麦克斯韦方程天然就是协变的，其中 $F_{\mu\nu}$ 按照反对称张量来变换。如果两个参照系之间的洛伦兹变换由 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 来描写，这个变换可以写为 [参考式 (2.12)]：

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} . \quad (5.31)$$

如果将 $F^{\mu\nu}$ 用 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 表达出来，这个式子就告诉了我们电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 在一般的洛伦兹变换下如何变换。

3. 规范不变性：

麦克斯韦方程组具有的另一个十分重要的对称性就是规范对称性，我们在第节中已

经看到, 一个带电粒子感受到的实际上并不是 A_μ , 而是相应的场强张量 $F^{\mu\nu}$, 或者等价地说, 与其对应的 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 。因此, 如果我们对 A_μ 做如下的规范变换,

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (5.32)$$

其中 $\Lambda(x)$ 是任意的标量场, 那么容易验证相应的场强张量不变, 即

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \quad (5.33)$$

因此规范变换 (5.32) 相当于给粒子的拉格朗日量加上一个全微分项, 这并不会改变粒子和场的运动方程。

在经典物理的范畴内, 由于四矢势不影响物理, 我们完全可以选择对于处理问题最为方便的一组四矢势。这个过程被称为定规范。通常选择的规范包括保持协变性的洛伦兹规范, 以及仅仅包括物理自由度的库仑规范:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0, \quad \text{洛伦兹规范} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0, \quad \text{库仑规范} \end{aligned} \quad (5.34)$$

对于协变形式的麦克斯韦方程, 将 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ 代入并加上洛伦兹规范条件我们就得到:

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu = 4\pi J^\nu, \quad (5.35)$$

在无源的空间, 这是关于 A^ν 的典型的波动方程 (波速是真空中光速 $c = 1$)。我们在第七章中会讨论电磁波的传播问题; 如果源 $J^\mu \neq 0$, 那么上式是非齐次的波动方程, 可以告诉我们给定的源所产生的辐射场 $A^\nu(x)$, 这是第八章中讨论的内容。

4. 分立对称性:

麦克斯韦方程除了上面提及的两个连续对称性以外, 它还具有一些重要的分立对称性。我们这里着重讨论两类分立对称性: 空间反射 (又称为宇称) 和时间反演。

- 空间反射变换: 就是将所有的空间坐标都改变一个符号: $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ 的变换。这个变换又被称为宇称变换。注意到在这个变换下面, 电荷密度是不变的; 电流密度会改变一个符号 (因为造成电流的微观带电粒子的速度改变了符号); 梯度算符也改变一个符号。考察真空中的麦克斯韦方程我们发现, 电磁场应当按照下列形式变化:

$$\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}. \quad (5.36)$$

这样一来, 麦克斯韦方程组的形式就在空间反射变换下不变。由此我们发现电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} , 尽管它们都是三维空间的矢量, 但是它们在空间反射变换下的性质是不同的。电场 \mathbf{E} 在空间反射变换下的变换性质与坐标 \mathbf{x} 的变换性质是相同的, 即要改变一个符号; 磁场 \mathbf{B} 则不变。一般人们将具有电场或坐标这样

变换性质 (即在空间反射下变号) 的三维矢量称为矢量; 将磁场这类在空间反射下不变的矢量称为轴矢量。⁴

- 时间反演变换: 另一个可以考虑的对称性是时间反演变换。从形式上讲, 时间反演变换相当于将时间反号: $t \rightarrow -t$ 的变换。在这个变换下, 电流密度矢量会变号, 另外对于时间的偏微商算符也会变号。如果我们考察四个麦克斯韦方程, 我们发现要保证麦克斯韦方程的形式在时间反演下不变, 相应的电磁场应当如下变换:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}. \quad (5.37)$$

我们看到, 电场和磁场在时间反演下也具有不同的变换性质。

17 介质中的麦克斯韦方程

¶ 如果我们考虑的空间存在介质, 那么其中的电磁现象则会更为复杂。从原则上讲, 如果以原子尺度来考虑问题, 那么所谓介质无非是大量的、不断运动的微观粒子的集合体。这些微观粒子一般都带有电荷或磁矩。因此, 介质中的电磁场原则上是我们外加的电磁场和这些介质中的微观粒子所产生的电磁场线性叠加后, 再进行某种统计平均的结果。在经典的电动力学中, 我们将满足于一个经典的、唯象的描述。

17.1 线性介质中的麦克斯韦方程组

我们首先考虑所谓线性、各向同性、均匀的介质。当存在电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 时, 它会使介质极化 (电极化、磁化)。因此, 介质单位体积中的平均电偶极矩会不为零。描写一个电偶极子的特征物理量是它的 \mathbf{p} 。我们称介质单位体积中的平均电偶极矩为介质的电极化强度矢量, 记为 \mathbf{P} 。

由于介质中电极化强度 (电偶极矩) 的存在, 就会附加产生一个电荷密度分布, 这个电荷分布与自由的电荷分布不同, 它是由于介质分子极化造成的, 因此不能在介质中自由流动。我们称这种电荷为束缚电荷。在介质内任意取一个封闭曲面, 简单的考察我们发现: 该封闭曲面内所包含的束缚电荷的总电量 Q_b 可以写成:

$$Q_b \equiv \int d^3\mathbf{x} \rho_b = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

由于我们取的封闭曲面的任意性, 上面这个积分表达式可以化为介质内任意一点的微分关系:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (5.38)$$

其中 ρ_b 是介质内任意一点的束缚电荷密度。类似的, 在介质边界面上的束缚电荷面密度为 (假定介质外是真空):

$$\sigma_b = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}. \quad (5.39)$$

⁴这应当不是读者第一次接触到轴矢量。经典力学中的角速度、角动量矢量都是轴矢量。

如果束缚电荷密度的分布随时间改变,就会产生束缚电流密度分布,它完全是由于束缚电荷密度随时间变化引起的,记为 \mathbf{J}_b 。由于束缚电荷本身必须满足连续性方程: $\partial\rho_b/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}_b = 0$, 因此与 (5.38) 比较我们有:

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} . \quad (5.40)$$

考虑到分子内部的带电微观粒子是在运动的,这也会产生一个电流密度分布,我们称之为分子电流密度 \mathbf{J}_m 。这个概念是安培首先引入的,它的存在同样可以产生磁场。当介质被外加磁场磁化时,介质中的单位体积中的平均磁偶极矩⁵被称为该介质的磁化强度矢量,记为 \mathbf{M} 。在介质中取一个由无穷小闭合回路 C 所围成的面积元,记该面积元的法向方向为 \mathbf{n} , 那么我们有:

$$\int \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} ,$$

所以,分子电流密度与磁化强度之间的关系为:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} . \quad (5.41)$$

同样的,在介质表面由于分子电流所造成的面电流密度为:

$$\mathbf{K}_m = -\mathbf{n} \times \mathbf{M} . \quad (5.42)$$

¶ 现在我们可以按照上面这个简化的模型来推导出介质中的麦克斯韦方程组了。显然,两个齐次的麦克斯韦方程不会有任何变化。对于两个非齐次的方程,我们只需要将电荷密度中加上束缚电荷密度;在电流密度中加上束缚电流密度和分子电流密度就可以了。于是这两个方程变为:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})/\epsilon_0 , \quad (5.43)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) , \quad (5.44)$$

于是我们引入电位移矢量 \mathbf{D} 和磁场强度矢量 \mathbf{H} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (5.45)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} . \quad (5.46)$$

这样一来,介质中的麦克斯韦方程组可以写成

⁵让我们回忆一下一个平面电流环的磁矩的定义。如果存在一个平面的电流环,它所包围的面积为 S , 电流强度为 I , 按照右手法则所确定的平面法向的单位矢量为 \mathbf{n} , 那么这个平面环行电流就构成了一个磁偶极子,表征它的物理量是它的磁偶极矩,或简称磁矩。这个平面电流环的磁矩 \mathbf{m} 的定义为: $\mathbf{m} = (SI)\mathbf{n}$ 。

Maxwell Equations in media

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.47)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (5.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (5.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.50)$$

¶ 这里我们需要指出, 上面的讨论是一个十分简化的模型。在一般的情形下, 电位移矢量 \mathbf{D} 和磁场强度矢量 \mathbf{H} 与电场 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的关系可能是十分复杂的。这种关系被称为这种介质中的本构关系 (或本构方程):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (5.51)$$

原则上讲, 上述关系不仅仅可以是非线性的, 甚至可以是非局域的。我们将假设上面所讨论的最为普遍的本构方程可以用比较简化的形式 (5.45) 和 (5.46) 来替代。

17.2 各种介质的简单介绍

¶ 下面我们简要描述一下我们电动力学课程中会遇到的各种介质:

☞ 线性介质:

这种介质中, 电极化强度 \mathbf{P} 和磁化强度 \mathbf{M} 对电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的依赖关系可以用一个普遍的线性关系表达。我们将它写成:⁶

$$\mathbf{P}_i(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{ij}^{(e)}(t') \mathbf{E}_j(t-t'). \quad (5.52)$$

$$\mathbf{M}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_{ij}^{(m)}(t') \mathbf{H}_j(t-t'). \quad (5.53)$$

注意我们这里写出了—个比较普遍的线性关系, 它们对于时间不是局域的,⁷也就是说, 任意一个时刻的电或磁极化强度可以与其他时刻的电场和磁场有关联。按照因果性的要求, 系数 $\chi_{ij}^{(e)}(t)$ 和 $\chi_{ij}^{(m)}(t)$ 在 $t < 0$ 时应当恒等于零, 也就是说每个时刻的极化只与该时刻之前的场有关, 不可能与该时刻之后的场有关。⁸上面两个公式的

⁶纯粹由于历史的原因, 磁介质中的磁化率是用场 \mathbf{H} 而不是 \mathbf{B} 来表达的。

⁷最为普遍的线性关系实际上还可以包含空间的不局域性。也就是说, 某个点的极化情况还可以依赖于空间其他点的外场。这种现象被称为空间色散。

⁸利用这一点, 可以得到一系列十分有意义的关于介电常数的解析性的结论, 这些结论集中的体现在所谓的 Kramers-Kronig 色散关系中。

右端实际上是函数 χ_{ij} 和外场的卷积。所以，如果我们将所有函数作一个时间傅立叶变换，我们就得到如下的形式：⁹

$$\mathbf{P}_i(\omega) = \chi_{ij}^{(e)}(\omega) \mathbf{E}_j(\omega), \quad \mathbf{M}_i(\omega) = \chi_{ij}^{(m)}(\omega) \mathbf{H}_j(\omega). \quad (5.54)$$

其中 $\chi_{ij}^{(e)}(\omega)$ 和 $\chi_{ij}^{(m)}(\omega)$ 则被称为电极化率张量和磁化率张量。¹⁰ 现在利用场 \mathbf{D} , \mathbf{H} 的定义式 (5.45) 和 (5.46) 我们就得到：

$$\mathbf{D}_i(\omega) = \epsilon_{ij}(\omega) \mathbf{E}_j(\omega), \quad \mathbf{B}_i(\omega) = \mu_{ij}(\omega) \mathbf{H}_j(\omega), \quad (5.55)$$

其中 $\epsilon_{ij}(\omega)$ 和 $\mu_{ij}(\omega)$ 分别称为介质的介电张量和磁导率张量，它们只与介质的性质有关，不再依赖于电磁场。它们与电极化率张量和磁化率张量的关系是：

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(e)}(\omega)), \quad \mu_{ij}(\omega) = \mu_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(m)}(\omega)). \quad (5.56)$$

对于静态的外场，只要介质不具有电滞或者磁滞现象，那么该介质的介电张量和磁导率张量一定是一个对称的张量；对于非静态的情形，利用昂萨格的互易关系，也可以证明它是一个对称的张量。满足上述关系（即从式 (5.54) 式 (5.56)）的介质被统称为线性介质。

如果进一步假设线性介质具有旋转对称性，¹¹ 这时我们称之为各向同性线性介质，那么它的介电张量和磁导率张量都退化为与单位张量成正比，也就是说： $\chi_{ij}^{(e/m)}(\omega) = \chi^{(e/m)}(\omega) \delta_{ij}$ 。于是，我们得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega) &= \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0 (1 + \chi^{(e)}(\omega)). \\ \mathbf{H}(\omega) &= \frac{1}{\mu(\omega)} \mathbf{B}(\omega), \quad \mu(\omega) = \mu_0 (1 + \chi^{(m)}(\omega)). \end{aligned} \quad (5.57)$$

其中 $\epsilon(\omega)$ 被称为介质的电容率或者介电常数；¹² $\mu(\omega)$ 则被称为介质的磁导率。无量纲参数 $\chi^{(e)}(\omega)$ 和 $\chi^{(m)}(\omega)$ 称为该各向同性线性介质的电极化率和磁化率。一般人们又称无量纲的量 $\epsilon(\omega)/\epsilon_0$ 为该介质的相对介电常数；称 $\mu(\omega)/\mu_0$ 为介质的相对磁导率。

需要指出的是，大量的线性介质都不是各向同性的。例如，绝大多数的晶体都是各向异性的。只有液体和气体以及个别的固体（具有立方对称性的）是各向同性的。对于各向同性的线性介质，其电极化率永远是正的；但磁化率则可以是正的（被称为顺

⁹我们这里假设了 \mathbf{D} 只线性依赖于 \mathbf{E} ，而 \mathbf{H} 只是线性依赖于 \mathbf{B} 。也就是说不存在电和磁之间的“混合”，这对于多数情形是正确的。唯一的常见的例外是介质本身在运动的情形，参见 [?] 中的讨论。

¹⁰这依赖于傅里叶变换中对归一化常数的约定。这里的约定是对于所有的场都采用相同的约定而对于电极化率和磁化率则采用： $\chi(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{-i\omega t}$ 。

¹¹事实上，只需要立方对称性就足以将介质的介电张量和磁导率张量约化为一个标量。

¹²不同的书籍文献名称不太统一。有的书籍强调有量纲的 ϵ 应当称为电容率，只有无量纲的相对介电常数被称为介电常数。有的则直接称 ϵ 为介电常数，称 ϵ/ϵ_0 为相对介电常数。

磁性),也可以是负的(被称为逆磁性或抗磁性)。一般来说,抗磁性是由于构成介质的原子具有饱和的原子轨道;否则它一般具有顺磁性。另一种重要的磁介质是所谓的铁磁介质。铁磁性源于一些过渡元素原子之间的交换相互作用。一般来说,介质对于外加电场的响应取决于该介质的构成以及它的结构。对于这个问题的系统讨论属于固体物理学的一个重要课题;介质的磁性则更为复杂。磁学已经成为凝聚态物理学的一个重要分支。

介电常数和磁导率一般依赖于外场的圆频率 ω , 其中介电常数对频率的依赖更是明显。介电张量依赖于电磁场的频率的现象被通称为色散。我们会在后面电磁波传播一章中更为详细地讨论它的物理。另外值得指出的是,介电常数和磁导率一般都依赖于温度。例如对于顺磁介质,其磁化率一般反比于温度。这些问题是统计物理中的重要研究对象。

导体:

这是具有导电性能的介质。它的例子比如金属、导电溶液、电离的等离子体等等。这一类介质在电场中会相应地产生宏观的电流。一般来说,这种电流的流动也同时伴随着热的产生,因此这种介质一定是耗散的。也就是说,电磁场的能量会不断地转换成介质的内能。金属的导电性是一个固体物理中十分重要而复杂的问题。我们这里不去讨论其导电机理,而是假设电流密度 \mathbf{J} 与电场 \mathbf{E} 有着线性的联系。类似于前面线性介质的讨论,我们把这种普遍的线性关系唯象地写成:

$$\mathbf{J}_i(\omega) = \sigma_{ij}(\omega)\mathbf{E}_j(\omega) , \quad (5.58)$$

其中的 $\sigma_{ij}(\omega)$ 被称为电导率张量,它原则上是频率的函数。这个线性关系可以称为广义欧姆定律。如果导电介质是各向同性的,那么利用对称性可以证明电导率张量退化为正比于单位张量,其比例系数就是所谓的电导率 $\sigma(\omega)$, 这时我们就得到了通常的欧姆定律:

$$\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega) . \quad (5.59)$$

在静电学、静磁学中经常会遇到的一类特殊的导体称为理想导体,所谓理想导体就是各向同性且电导率趋于无穷大的导体。理想导体的一个实际例子就是超导体。理想导体内部的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 都等于零(后者即所谓的迈斯纳效应)。

铁磁体、铁电体:

首先明确地指出,铁磁体和铁电体都不是线性介质,公式(5.54)对于铁磁体和铁电体绝不适用。铁电体和铁磁体的特点是在外电场或外磁场是零的时候它也存在自发的电极化或磁化。介质具有铁电性和铁磁性的原因完全是构成介质的原子的微观性质造成的。关于铁磁性的研究已经成为物理学的一个专门的分支—磁学。本课程中我们将假设公式(5.45)和(5.46)仍然适用。本课程中会遇到的一类重要铁磁体是所谓的硬铁磁体,这种介质的磁化强度 \mathbf{M} 不依赖于外磁场。

17.3 介质边界处的边界条件

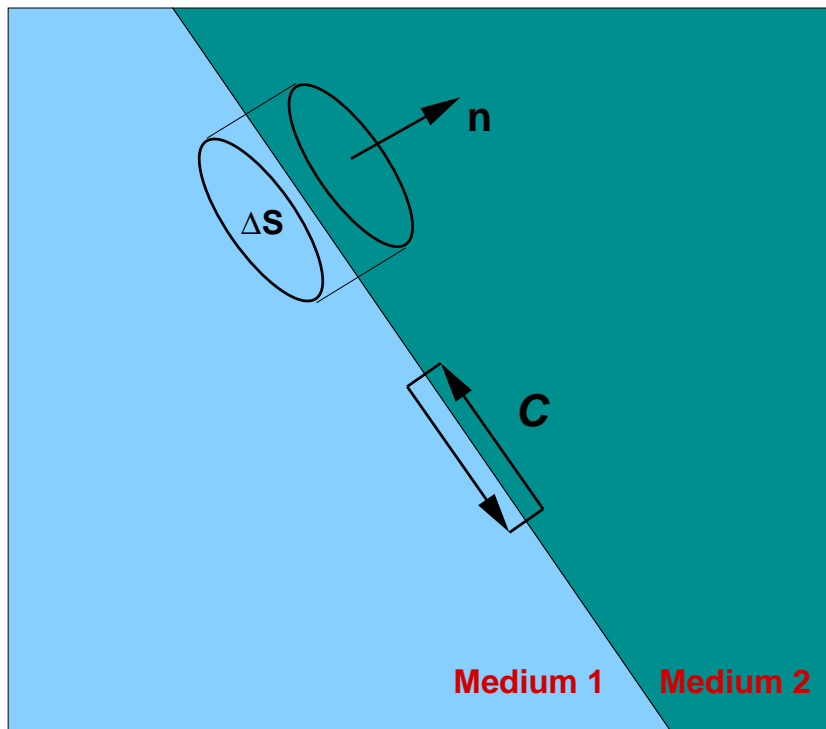


图 5.1: 推导电磁场在两种介质交界面处的边界条件的示意图。左上角的无穷小高斯小盒可以用来推导电磁场法向的边界条件 (5.60) 和 (5.61); 右下角的无穷小安培小回路可以用来推导电磁场切向的边界条件 (5.62) 和 (5.63)。

¶ 在两种不同介质的交界面附近，电磁场必须满足一定的边界条件，这些边界条件可以从积分形式的麦克斯韦方程得到。

考虑如图 5.1 中所示的两种介质（我们分别称为介质 1 和介质 2）的分界面上的任意一点，我们可以在该点附近构造一个底面与该点法向方向垂直、高度为无穷小的柱体。柱体的两个底面分别处于两种介质之中，同时底面积 ΔS 也是无穷小（我们以后常常会称这类小柱体为“高斯小盒”）。将方程组 (5.47) 中的第一个方程在这个无穷小的柱体体积元中积分并且利用高斯定理，我们得到：

$$\int d^3\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{D} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \Delta S$$

当高度和底面积都趋于零时， \mathbf{D} 在无穷小柱体表面的积分就等于： $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \Delta S$ ，于是我们得到：

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma, \quad (5.60)$$

其中 \mathbf{n} 是两个介质交界面处由介质 1 指向介质 2 的单位矢量， σ 是两个分界面处的自由

面电荷密度。¹³

类似地，从麦克斯韦方程组的第四个方程出发，运用类似的方法，我们可以得到磁感应强度矢量在两种介质边界处的行为：

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 . \quad (5.61)$$

边界条件 (5.60) 和 (5.61) 确定了电磁场的法向分量在介质分界面附近的行为。它告诉我们，在两种介质的分界面处，磁感应强度矢量 \mathbf{B} 的法向分量连续；电位移矢量 \mathbf{D} 的法向分量可以有一个跃变，其跃变的数值为 σ 。

¶ 我们现在考虑在两种介质的交界面处构造一个无穷小的矩形回路 C ，并且使矩形回路的一对边与交界面的切向平行，另一对边与交界面的法向平行。同时，我们令其沿法向的两个边长为高阶的无穷小（我们将称这种回路为“安培小圈”）。那么我们由麦克斯韦方程和斯托克斯定理可以得到：

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS .$$

由于回路 C 所围成的面积 S 为无穷小，而 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 在边界处为有限，于是上面式子的右方趋于零。于是我们得到电场强度 \mathbf{E} 在边界处的行为：

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 , \quad (5.62)$$

也就是说， \mathbf{E} 的切向分量在边界处连续。

类似地，我们利用麦克斯韦方程组中的第二个方程，就可以确立磁场强度 \mathbf{H} 的切向分量在介质交界面处的跃变，得到的结果为：

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} , \quad (5.63)$$

其中 \mathbf{K} 为两种介质交界面处的自由面电流密度。

¶ 假定我们知道了所考虑的介质的性质，也就是说我们知道了它的本构方程，那么一旦给定空间的电荷密度和电流密度分布以及必要的边条件，数学中关于偏微分方程的理论告诉我们：满足麦克斯韦方程的电磁场就被唯一地确定了。怎样得到这些电磁场以及相关的物理性质正是我们这个课程所要讨论的主要内容。

18 电磁规律中的守恒律

¶ 麦克斯韦方程中已经隐含了电荷守恒定律，它的微分表述是所谓的连续方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (5.64)$$

¹³请大家不要将面电荷密度和导体中的电导率混淆了，两者都习惯性地用字母 σ 来表示。

这一点可以直接利用真空中的麦克斯韦方程 (5.25) 和 (5.26)，或者介质中的方程组 (5.47) 加以证明。

¶ 下面我们来讨论电磁系统中的能量守恒的问题。我们所考虑的系统由产生电磁场的源——也就是电荷密度分布和电流密度分布——加上由它们在空间所产生的电磁场组成。考虑在电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 中的一个电量为 q ，速度为 \mathbf{v} 的运动的带电粒子，电场会对该粒子做功，而磁场对这个粒子不做功，因为磁场对于粒子施加的力永远与该粒子的速度垂直。力学的知识告诉我们，电场 \mathbf{E} 对粒子做功的功率为： $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ 。一般来讲，如果空间存在一个电流密度的分布 \mathbf{J} ，那么电场对电流密度¹⁴所做的功率 W 为：

$$W = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} .$$

这部分能量实际上是由电磁场的能量转化为了带电粒子的机械能或热能。利用麦克斯韦方程，上述功率可以表达为：

$$W = \int d^3\mathbf{x} \left(\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) .$$

现在我们利用下列恒等式：

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) ,$$

以及麦克斯韦方程中的法拉第定律： $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，就可以将上面的功率化为：

$$W = - \int d^3\mathbf{x} \left(\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) . \quad (5.65)$$

上面公式的右方具有典型的连续方程的形式。我们定义电磁场的能量密度 u ：

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) , \quad (5.66)$$

以及能流密度 \mathbf{S} ：

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \quad (5.67)$$

于是我们可以将电磁场与电流之间的功率写为 (假定我们处理的是非耗散的线性介质)：

$$\int d^3\mathbf{x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) = - \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} . \quad (5.68)$$

这个式子的物理意义十分明显：在任意一个体积内的电磁场的能量的变化率由两部分构成：一部分是由于电磁场能流通过体积的边界流出；另一部分则转化为带电粒子的能量。能流密度 \mathbf{S} 又被称为电磁场的玻印廷矢量 (Poynting vector)。

¹⁴这是个简化的说法。确切的说，应当称为电场对引起电流的带电粒子所做的功的功率。

¶ 运用类似的手法可以讨论电磁场和带电粒子系统中的动量守恒问题。考虑一个任意的选定的空间区域，我们将该区域内的带电粒子（源）的总动量（矢量）记为 $\mathbf{P}^{(\text{src})}$ ，那么运用洛伦兹力的公式 (5.30)，我们有：

$$\frac{d\mathbf{P}^{(\text{src})}}{dt} = \int d^3\mathbf{x} (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) . \quad (5.69)$$

我们现在仍然是利用麦克斯韦方程，将上式中的源（也就是 ρ 和 \mathbf{J} ）用电磁场的时空微商来替代：

$$\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) . \quad (5.70)$$

上面公式中含有电场对时间偏微商的项可以化为：

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) .$$

将此式代入 (5.70)，利用麦克斯韦方程： $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 得到：

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}^{(\text{src})}}{dt} + \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{x} \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ = \epsilon_0 \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] . \end{aligned} \quad (5.71)$$

现在注意到下面的恒等式：

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \partial_j \left(\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij} \right) ,$$

以及对于磁感应强度 \mathbf{B} 类似的等式，我们可以将上面的公式化为：

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{P}^{(\text{src})} + \mathbf{P}^{(\text{field})}]_i = \int d^3\mathbf{x} \partial_j T_{ij} . \quad (5.72)$$

在这个公式中，我们定义了我们所考虑的区域内地磁场的总动量：

$$\mathbf{P}^{(\text{field})} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{g} . \quad (5.73)$$

它由电磁场的动量密度矢量在该区域内积分得到。电磁场的动量密度矢量（单位体积内电磁场的动量）的定义为：

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} , \quad (5.74)$$

我们还定义了电磁场的协强张量 T_{ij} ：

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + c^2 \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{ij} \right] . \quad (5.75)$$

它被称为麦克斯韦协强张量。从这个名称不难看出当年弹性力学的研究对电磁学研究的影响。利用高斯定理，公式 (5.72) 的右边可以化为麦克斯韦协强张量在该区域边界面上的积分。公式 (5.72) 所代表的物理意义现在变得比较清晰了，它说明任意区域内的带电粒子（源）动量的变化率与该区域内电磁场的动量变化率之和等于通过该区域边界静流入的动量变化率，而在单位时间内从该区域的边界流入的动量是通过麦克斯韦协强张量在边界面上的面积分所体现的。如果我们在空间任意曲面上某处取其向外的法线方向单位矢量 \mathbf{n} ，那么 $T_{ij}n_j$ 代表了通过该处单位面积、单位时间内流入的动量的第 i 分量。

值得注意的是，电磁场的动量密度 \mathbf{g} 与电磁场的能流密度有着一个简单的关系：

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2 . \quad (5.76)$$

这一点不是偶然的。实际上，这两者以及电磁场的能量密度以及麦克斯韦协强张量一起，构成了电磁场的四维形式的能量动量张量。



相关的阅读



这一章主要是对麦克斯韦方程的一些重要的总体性质进行了回顾和总结，类似的内容可以参考 Jackson 的经典著作 [7] 中的导论以及俞允强老师的书 [?] 的第一章。我想这一章的内容对于一个刚刚接触麦克斯韦方程的同学来说可能会觉得略微有些难以掌握。这并没有很大的关系。正如我们开始所说的，这一章是这个课程的一个总纲。这一章中所涉及到的很多内容还会在以后各个章节中更为具体、详细地讨论。所以，只要能够有一个整体的感受就足够了。如果对于矢量分析不是很熟悉的同学可以参考这个讲义后面的附录，那里讨论的数学结论对于我们电动力学课程来说是绰绰有余了（而且也并不很复杂）。

关于电磁学的历史，有兴趣的同学可以参考物理学史的有关书籍，例如《中国大百科全书》的物理卷 [?]。另外对于早期电磁学的发展，特别向大家推荐 Heilbron 的书 [?]



第六章

静态电场与磁场

本章提要

- 静电势、静磁势与泊松方程
- 泊松方程的分离变量法
- 边值问题的数值解法
- 静电和静磁的多极展开

静

态的电磁场的研究是电磁学中发展最早、同时也是有广泛应用背景的分支。目前，在各种工程应用中，人们需要计算某些特定条件下的静态电磁场。这些计算中的基本方程是麦克斯韦方程在静态情况下的特例，最为常见的情况就是求解某个区域内的拉普拉斯方程或者泊松方程。虽然方程的形式是简单的，但这并不意味着静态电磁场的计算是一个简单的事情。事实上绝大多数工程电磁场的计算问题中，往往需要较大规模的数值计算。原因就在于这些实际问题中所遇到的边界的形状或者边界条件是比较复杂的。在这一章中，我们将对静电学问题以及解决静电学边值问题的基本方法做一个简要的介绍。

所谓静态电磁场，或简称为静电磁场，是指所有的场变量都不随时间变化的情形。考察麦克斯韦方程组我们发现，如果所有的场都不随时间变化，那么关于电场和磁场的方程可以完全分离。所以，静电磁场的问题又可以分为静电问题和静磁问题两大类。静电和静磁问题的处理方法实际上有很多类似的地方：它们最后都可归结为在给定的自由电荷或自由电流分布的情形下，同时又满足一定的边界条件的偏微分方程的求解问题。但静磁问题又有其特殊的地方。本章中我们将首先介绍静电和静磁问题的通用方法，随后静磁问题也将结合其特点简要介绍。

19 静电势、静磁势与泊松方程

正如我们上面提及的, 对于静态的电磁场而言, 所有的场量 (包括产生它们的源) 都不依赖于时间, 因此描写电场和磁场的势分别为静电势和静磁势。对真空中的麦克斯韦方程 (5.35), 将其改写到国际单位制中我们有,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi(x) &= -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, & \nabla^2\mathbf{A}(x) &= -\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}.\end{aligned}\quad (6.1)$$

其中我们运用了电磁势与电磁场之间的关系式 (5.8). 此时的电磁势仍然可以具有不同规范的选择, 常用的洛伦兹规范和库仑规范在静态时完全一致并要求: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。与此同时, 由于需要满足电荷守恒, 因此电流密度矢量 \mathbf{J} 也必须满足 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。

公式 (6.1) 适用于真空中的电磁问题。如果所考虑的是一种均匀、各向同性的线性电或磁介质, 我们只需要将上式中的 ϵ_0 和 μ_0 替换为相应介质的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 即可。由于式 (6.1) 中电磁势满足的方程形式都具有泊松方程的形式, 所以下面我们将主要以静电的情形为例进行讨论, 静磁的情形只需要将相应的 ρ/ϵ 替换为 $\mu\mathbf{J}$ 即可。

在静电/静磁问题中, 如果所考虑的区域中自由电荷密度 $\rho(\mathbf{x}) \equiv 0$ 或 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv 0$, 那么静电/静磁势均满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\mathbf{A} = 0, \quad (6.2)$$

偏微分方程的数学理论告诉我们: 一旦给定了空间中自由电荷/电流分布和一定的边界条件, 泊松方程 (6.1) 的解就被唯一地确定了。因此, 静电/静磁学的基本问题就是求解满足一定边界条件的静电/静磁势, 这又被称为静电/静磁边值问题。

¶ 如果求解泊松方程的问题是在没有边界的无穷大空间中, 同时空间中的电荷分布为已知, 那么泊松方程的解可以十分简单地写出:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (6.3)$$

需要注意的是, 这个公式仅仅对于没有边界的情况才是合适的。如果存在边界, 那么一般在边界面上会产生额外的电荷分布, 且这些面电荷分布在解出静电/静磁势之前是未知的。因此, 仅仅知道体内的电荷/电流分布并不足以完全确定静电/静磁势。

此外, 我们这里讨论的电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ 或电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 可以包含广义函数 (或者称为分布)。例如, 它可以对应于面电流密度和线电流密度 (分别正比于一个一维和二维 δ -函数)。这时我们可以在公式 (6.3) 的积分中运用下面的替换规则:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{K}(\mathbf{x})dS \Leftrightarrow I d\mathbf{l}, \quad (6.4)$$

其中 \mathbf{K} 为面电流密度, I 为线电流的电流强度。

从纯数学的角度来讲, 公式 (6.3) 可以利用下面的恒等式来证明:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \nabla_{\mathbf{x}'}^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (6.5)$$

这个数学公式所表达的实际上就是公式 (6.3) 在单位点电荷情形下的特例。这种类型的函数又被称为格林函数。格林函数反映的是单位的点电荷或者单位的电流产生的电磁势。麦克斯韦方程的线性决定了, 任意的电荷/电流分布所产生的电磁势一定是单位源的线性叠加。有边界区域内的格林函数也是存在的, 只不过不会像式那样简单罢了。利用格林函数可以写出相关静电/静磁问题的形式解。我们这里就不再深入讨论了。

需要强调的是, 如果我们考虑的空间区域不是无穷大的, 我们就必须考虑边界的影响。考虑某个区域 V , 其边界曲面记为 $S = \partial V$ 。假设边界两侧的介质仍然是均匀各向同性的线性介质, 只不过其电磁性质有所不同。此时第 17.3 小节中的讨论告诉我们 [式 (5.60),(5.61),(5.62),(5.63)], 电磁场的切向和法向分量需要满足一定的边界条件。这相应地可以翻译为电磁势相应的边条件。以静电边值问题为例, 经常使用的边界条件包括两类: 第一类边界条件—又称为狄利克雷 (Dirichlet) 边条件, 是给定电磁势在边界上的取值。以静电问题为例, 它要求

$$\Phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S} = f(\mathbf{x}) , \quad (6.6)$$

另外一类边界条件称为第二类边条件—又称为诺依曼 (Neumann) 边条件, 它给定的是电磁势的法向导数:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla)\Phi(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in S} = g(\mathbf{x}) , \quad (6.7)$$


其中的 \mathbf{n} 是边界曲面 S 上由体积 V 内指向 V 外的一个单位矢量, 而 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 则是完全已知的函数。

20 导体组与电流圈组的能量: 电容与电感

上一节对于静电边值问题的讨论更加侧重于泊松方程的数学性质。我们下面来看一下上节讨论的两类边条件 (Dirichlet 和 Neumann) 在物理上是如何实现的。就其静电学性质而言, 我们可以按照填充某区域的物质的物性的不同, 将它们分为下列两类: 导体和电介质。其中前者是可以导电的, 而后者是绝缘体。我们首先讨论一下在理想导体内部的电场以及导体与电介质交界面处的边条件。

我们将假设导体满足欧姆定律 (5.59) 并且它的直流电导率足够的大以至于可以视为理想导体。于是, 如果某个时刻导体内部的电场强度不为零, 那么按照欧姆定律, 导体内部就会产生强大的电流密度。于是, 导体内部的自由电子就会有宏观的流动, 从而会影响空间电荷的分布。于是我们看到, 这时的电场不可能是静态的。因此, 当电场达到静态时,

导体内部一定没有宏观的电流密度。另一方面，在导体与非导体的交界面上，如果表面的静电势不是处处相等，那么就会造成导体表面的面电荷的宏观移动，从而电场也不可能处于静态。所以我们得到的结论是：

 **静电学中，理想导体内部的电场强度恒等于零；导体的表面是一个等电势面；导体上所有的自由电荷只可能分布在导体的表面。**

因此，在静电学里，理想导体实际上是用来实现 Dirichlet 边条件的物体。按照我们第一章推导出来的普遍的边条件 (5.62)，我们发现电场在导体表面一定与表面垂直而不可能有非零的切向分量。在导体表面附近作一个“高斯小盒”并利用高斯定律，可以发现静电势在导体表面的法向偏微商是与该处的自由面电荷密度联系在一起的：

$$\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\sigma, \quad (6.8)$$

其中我们假定了在导体外部是介电常数为 ϵ 的各向同性的、均匀的、线性电介质，此处法向定义为从导体的内部指向外部。比较导体表面是等势面及式 (6.8) 和前面讨论的狄利克雷和诺依曼边条件 [式 (6.6) 和 (6.7)] 我们发现，理想导体恰恰是可以提供第一和第二类边条件的具体物理实现。

¶ 下面我们讨论由 N 个导体构成的系统的静电能量问题。为简化讨论，我们假设各导体间充满了各向同性的、均匀的、线性介质，其介电常数为 ϵ 。设在第 i 个导体的表面的静电势为 Φ_i ，其表面总电量为 Q_i 。这样的系统称为一个导体组。我们再进行假定除了导体组的各导体表面以外，全空间再没有其他自由电荷。我们希望来计算一下整个导体组的静电能量。

按照第一章关于电磁场能量的普遍公式 (5.66)，导体组的静电能应由下式给出：

$$U = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}).$$

上式中的积分遍及全空间，但是由于在各个导体所占据空间中电场 $\mathbf{E} = 0$ ，因此上式积分只需在各导体间的介质空间积分即可。将 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 以及 $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ 代入后得到：

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int d^3\mathbf{x} (\nabla \Phi)^2. \quad (6.9)$$

现在注意到：

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2$$

以及 $\epsilon \nabla^2 \Phi = -\rho = 0$ (在各个导体间的区域没有自由电荷分布) 即得：

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int d^3\mathbf{x} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi).$$

利用高斯公式，这个体积分可以化为在各个导体表面的面积分。另一方面，利用各个导体表面静电势是常数 Φ_i ，同时利用静电势的法向偏微商与面电荷密度之间的关系 (6.8)，我们最终得到：¹

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i, \quad (6.10)$$

由于静电场满足线性叠加原理，对于一个导体组我们一定有：

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j, \quad (6.11)$$

其中系数矩阵 C 的对角元 C_{ii} 被称为第 i 个导体的电容 (capacitance)，而非对角元被称为感应系数 (coefficients of induction)。利用导体组的电容和感应系数，导体组的静电能可以表达成：

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j. \quad (6.12)$$

需要注意的是，一个导体组的电容系数并不只与它们自己的几何参数有关，它还依赖于各导体之间的相对位置以及它们之间介质的介电性质。只有真空中的孤立导体的电容才仅仅依赖于其几何尺寸。

¶ 完全类似的，对空间存在的一系列稳恒电流分布，同样可以讨论其磁场能量。考虑一组 N 个闭合稳恒电流回路 C_i ，其电流强度分别为 I_i ，其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 。假设除了这些电流圈中以外，空间再没有其他的自由电流密度分布。我们同时假设空间其余部分充满了线性、各向同性、均匀的磁介质，其磁导率为 μ 。此时系统的能量可以写为：

$$U = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu} \int d^3\mathbf{x} (\nabla \times \mathbf{A})^2. \quad (6.13)$$

上式中的被积函数可以利用矢量分析中的公式进行适当的化简：

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_l \mathbf{A}_m) \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_l \mathbf{A}_m) \\ &= (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_j \mathbf{A}_k) - (\partial_j \mathbf{A}_k) (\partial_k \mathbf{A}_j) \\ &= \partial_j (\mathbf{A}_k \partial_j \mathbf{A}_k) - \mathbf{A}_k (\partial_j \partial_j \mathbf{A}_k) - \partial_j (\mathbf{A}_k \partial_k \mathbf{A}_j) + \mathbf{A}_k (\partial_j \partial_k \mathbf{A}_j), \end{aligned}$$

其中在得到第二行时，我们运用了两个 ϵ_{ijk} 缩并的公式；在得到第四行时，我们将前面公式中的两项分别凑了一个全微分。现在我们可以将这个式子代入到磁场能量的积分公式

¹这里需要小心的是表面法向的定义问题。以导体来看，它的法向单位矢量是由导体指向导体外部的；以导体外的空间来看，它的表面法向单位矢量是由介质指向导体内部；两者相差一个符号。考虑到这一点就不难得到公式 (6.10) 了。

(6.13) 中。利用高斯公式，两个全微分的项都化为无穷远边界上的积分。对局域电流分布所产生的磁场，在无穷远边界处的被积函数衰减的足够快，因此全微分的两项对能量没有贡献；最后一项由于 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 也没有贡献。于是，在利用了磁矢势满足的泊松方程后静磁能可以表达为：

$$U = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} . \quad (6.14)$$

这与静电学中的公式 (6.10) 对应。

现在注意到，如果局域电流密度分布只存在于各电流圈中，在空间中的其他地方 $\mathbf{J} \equiv 0$ 。公式 (6.14) 中的体积分实际上只要对每个电流圈做线积分就可以了。利用前面给出的替换规则 (6.4)，空间任意一点的磁矢势可以写成：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \frac{I_i d\mathbf{l}_i(\mathbf{x}'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} , \quad (6.15)$$

其中 \mathbf{x}'_i 是电流圈 C_i 上随积分跑动的点， $d\mathbf{l}_i(\mathbf{x}'_i)$ 则代表该点处的一个线元矢量， \oint_{C_i} 表示沿 C_i 进行回路积分。将上式代入式 (6.14) 中，一组电流圈产生的静磁能：

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N L_{ij} I_i I_j . \quad (6.16)$$

这个公式中的各个系数 L_{ij} 被通称为电感系数，其中的对角元 L_{ii} 被称为电流圈 C_i 的自感系数，或简称为电流圈 C_i 的电感；非对角元 L_{ij} (其中 $i \neq j$) 则被称为这一组电流圈的互感系数。电感系数的明显表达式为：

$$L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} . \quad (6.17)$$

其中 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 分别是电流圈 C_i 和 C_j 上的点； $d\mathbf{l}_i$ 和 $d\mathbf{l}_j$ 分别代表相应两点处的线元矢量， \oint_{C_i} 和 \oint_{C_j} 则表示沿电流圈 C_i 和 C_j 进行回路积分。式 (6.16) 和式 (6.17) 与静电学中的式 (6.12) 和式 (6.11) 相当。

最后我们强调，对于一组特定的导体组或电流圈构型，要计算其电容系数或电感系数实际上等价于要求解一个静电或静磁的边值问题。它们的解总是存在且唯一的，并且可以通过我们以下几节所介绍的方法进行求解。

21 唯一性定理与静电镜像法

¶ 前面曾经提到静电边值问题的唯一性定理。我们现在具体地将这个定理表达成：

唯一性定理

设空间某个区域 V 的边界为 S , 那么在区域 V 内满足泊松方程 (??) 并且在边界 S 上满足 Dirichlet 或 Neumann 边界条件的解 $\Phi(\mathbf{x})$ 必定是唯一的。

这个定理的证明实际上是比较简单的。²我们注意到, 如果 $\Phi_1(\mathbf{x})$ 和 $\Phi_2(\mathbf{x})$ 是满足定理中所有条件的两个解, 那么函数 $\Psi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) - \Phi_2(\mathbf{x})$ 就在区域 V 内部满足拉普拉斯方程并且它在边界 S 上要么本身等于零 (Dirichlet 边条件), 要么它的法向偏微商等于零 (Neumann)。现在利用等式:

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\nabla\Psi)^2 = \oint_S \Psi(\nabla\Psi) \cdot d\mathbf{S} - \int_V d^3\mathbf{x} \Psi \nabla^2\Psi,$$

我们发现上式的右方的第一项是在边界面上的积分。无论是两种边条件的那一种它都等于零; 等式右方的第二项也等于零, 因为 Ψ 在区域内满足拉普拉斯方程。于是我们得到结论: $\nabla\Psi = 0$ 。所以, 函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 最多只能是常数。对于 Dirichlet 边条件, 由于函数 Ψ 是连续函数, 同时它在边界处恒为零, 于是我们得知函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 在区域 V 内部以及边界 S 上处处为零。对于 Neumann 边界条件, 本来所求得解就可以相差一个与物理无关的常数。于是, 除去一个与物理无关的常数以外, 我们就证明了唯一性定理。

¶ 唯一性定理在静电边值问题中的应用是十分广泛的。假如我们能够利用某种方法写出既满足泊松方程又满足边条件的函数, 那么唯一性定理保证了我们写出的函数就是相应边值问题的唯一解。利用这个思想, 我们来介绍一下所谓的静电镜像法。

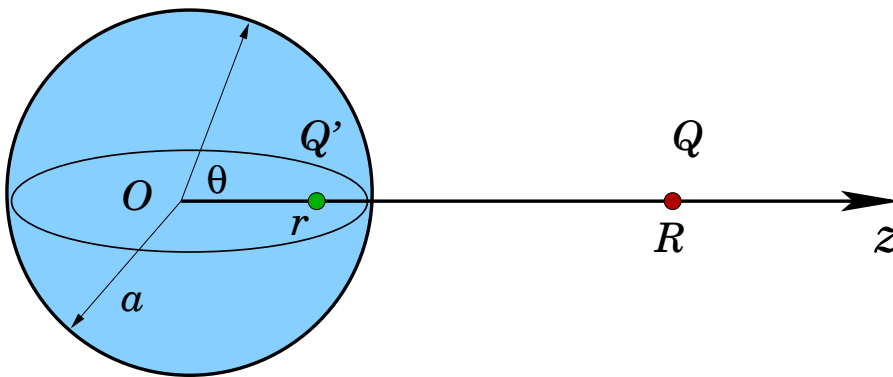


图 6.1: 一个半径为 a 的接地理想导体球外距离球心为 R 的地方放置一个电量为 Q 的点电荷。要求解这个静电问题, 就必须在导体球内部距离球心为 r 处引入一个镜像电荷 Q' 。

例题 6.1 点电荷旁的接地导体球 考虑在真空中一个半径为 a 的理想接地导体球 (从而导体球的电势恒为零), 在球外距离球心 $R > a$ 处放一个电量为 Q 的点电荷。现在我们要求解整个空间的静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ (参见图 6.1)。

²我们这里并没有陈述最为普遍的存在和唯一性定理。但是这个形式对于我们通常所遇到的静电学应用来讲已经足够了。

解：从物理上分析，当我们引入点电荷 Q 时，导体球内自由电荷就会重新调整。从宏观上讲，在靠近点电荷的一侧，会有与该点电荷异号的电量堆积，这些静电量会按照一定的分布存在于导体球的表面。由于导体球是接地的，因此与这些电量中和的、也就是与该点电荷同号的静电量会经过接地的导线流向无穷远处。因此可以想见，当系统达到静态时，导体表面的平衡面电荷分布是比较复杂的。但是，这个静电边值问题所满足的边条件是十分简单的：在空间任意一点（除去导体内部和外部点电荷所在的点）静电势 Φ 满足拉普拉斯方程；在导体球表面静电势 Φ 满足 Dirichlet 边条件： $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ 。

静电镜像法的处理这个问题的思路是：我们试图用另一个（当然，如果需要也可以不止一个）点电荷，我们称之为原先点电荷 Q 的镜像电荷来替代所有导体球表面所产生的面电荷分布的效应。这样一来，导体球外空间的静电势就是原先的点电荷 Q 与镜像电荷所产生的静电势的简单叠加。显然，镜像电荷不是随便放的。它的电量 Q' 以及它的位置都必须精心设计，使得镜像电荷 Q' 加上原先就有的点电荷 Q 所共同产生的静电势刚好能够满足边界条件，即在导体球表面为零。³如果我们能够做到这一点，那么唯一性定理告诉我们，镜像电荷和原先点电荷叠加的静电势就是这个边值问题的解。

按照对称性，如果我们能够用一个镜像电荷来替代导体表面的感应面电荷的话，那么它的位置一定应当放在点电荷 Q 与导体球的球心的连线上。我们假设镜像电荷的电量为 Q' ，而且它距离球心的距离为 r 。利用球面上距离点电荷 Q 最近和最远的点的电势为零的条件，我们得到下列方程：

$$\frac{Q}{R-a} + \frac{Q'}{a-r} = 0, \quad \frac{Q}{R+a} + \frac{Q'}{r+a} = 0.$$

经过简单的代数运算可以解出：

$$r = \frac{a^2}{R}, \quad Q' = -Q \frac{a}{R}. \quad (6.18)$$

注意，仅仅得到这个结果我们还没有完全结束。我们还必须验证：如果我们将满足公式 (6.18) 的镜像电荷与原先的点电荷 Q 的静电势叠加，那么它们在球面上任意一点（而不仅仅是最近点和最远点）产生的电势都是零。这一点请同学们自行验证一下（需要一点儿平面几何的知识）。经过这个验证，我们可以说：这个静电边值问题的解已经完全得到了。整个空间的静电势就是点电荷 Q 以及镜像点电荷 Q' 所产生的静电势的叠加。

利用镜像法求出了静电势以后，我们还可以求出导体球表面的面电荷分布。我们只需要利用公式 (6.8) 就可以了。具体的计算发现，如果我们令从球心指向点电荷 Q 的矢量为 z 轴，那么导体球面上一个与 z 轴夹角为 θ 处的面电荷密度为：

$$\sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi a^2} \frac{\left(\frac{a}{R}\right) \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)}{\left[1 - 2\left(\frac{a}{R}\right) \cos \theta + \frac{a^2}{R^2}\right]^{3/2}}. \quad (6.19)$$

³由点电荷所叠加出来的静电势自动满足拉普拉斯方程，因此我们只需要它满足适当的边条件就可以了。

将这个式子在球面上积分, 就可以得到导体球上所感生的总的电量。得到的结果是: 导体球上感生的总电量正好等于镜像电荷的电量 Q' 。⁴需要指出的是: 镜像电荷是一个虚拟的电荷, 它的引入完全是为了求解边值问题的方便, 它不是物理上存在的电荷。真正物理上存在的是那些在导体球表面的面电荷分布。只不过这些面电荷分布在球外空间任意一点所产生的电势可以等效地用一个镜像点电荷 Q' 来替代罢了。

搞定

需要指出的是: 静电镜像法不是求解静电边值问题的普遍方法。它只是对于某些特殊的几何位型才能适用, 而我们目前讨论的导体球的问题就是一个最有代表性的例子。另外一个相当重要, 但有时候往往被忽略掉的问题是, 一般来说, 静电镜像法要能够运用有一个要求是所引入的镜像电荷必须位于我们原先要求解方程的区域之外。这样一来, 这些镜像电荷的引入并不会改变我们感兴趣的区域中的方程。

22 泊松方程的分离变量解法

正如前面曾经提到的, 看似巧妙的静电镜像法实际上是一个十分特殊的方法。它只能用于一些极为特殊的例子中。处理静电静磁边值问题的最为普遍的方法就是去求解相应的泊松方程。本节中我们将简要回顾一下利用分离变量法求解泊松方程的一些结果。

给定区域 V 内的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$, 我们的目的是要求解该区域内的泊松方程 (??), 同时我们要求解 $\Phi(\mathbf{x})$ 在区域 V 的边界 S 上满足 Dirichlet 或 Neumann 边条件。我们已经注意到: 公式 (6.3) 所表达的函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 已经满足区域 V 内的泊松方程, 问题是它并不正好满足所要求的边界条件。于是我们总可以将我们要求的解写成公式 (6.3) 中的函数再加上一个拉普拉斯方程的解。因此不失一般性, 我们只需讨论拉普拉斯方程的边值问题即可。我们将分为直角坐标、柱坐标、球坐标几个情形来讨论 [?]. 我们这里讨论的直角坐标、柱坐标、球坐标的拉普拉斯方程的解具有两方面的意义: 第一, 当相关的静电边值问题恰好具有 (或近似具有) 相应对称性的时候, 我们可以直接在相应的坐标系中分离变量并求解; 第二, 由于我们这里涉及的所有函数都构成一组完备的函数基, 因此原则上任何边值问题的解都可以用这些特殊函数来展开。如果能够通过边条件确定这些展开系数, 边值问题也就获得了解决。

22.1 直角坐标中的拉普拉斯方程的解: 指数函数或三角函数

在直角坐标系中, 拉普拉斯方程的解可以简单地利用分离变量法得到: $\Phi(\mathbf{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$ 。函数 X , Y 和 Z 的形式一定是指数函数或三角函数:

$$X(x) \sim e^{k_1 x}, Y(y) \sim e^{k_2 y}, Z(z) \sim e^{k_3 z}, k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0. \quad (6.20)$$

参数 k_1^2, k_2^2, k_3^2 的具体的数值必须由边界条件来确定。一般来说, 如果某个方向的边条件是在一个有限的区间内, 则该方向相应的 k_i 往往只能取分立的纯虚数值 (形成驻波); 如

⁴这个结果可不是巧合, 同学们可以想想为什么。

果某方向的边条件是在无穷区间上, 则相应的 k_i^2 则可取连续值。驻波的情形下相应的本征函数是三角函数, 它的正交、归一、完备性由傅立叶级数的理论给出; 连续取值情形下的正交、归一、完备则由傅立叶积分变换的性质给出, 这里我们不再赘述。

22.2 柱坐标中的拉普拉斯方程的解: 贝塞尔函数

在柱坐标中拉普拉斯方程的解可以分离为: $\Phi(\mathbf{x}) = Z(z)\Phi(\phi)R(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示空间任意一点到 z 轴的距离。容易验证, 方程的解为:

$$Z(z) \sim e^{\pm kz}, \Phi(\phi) \sim e^{\pm im\phi}, R(r) \sim J_m(kr), N_m(kr). \quad (6.21)$$

为了保证静电势的单值性, 参数 m 必须为整数。参数 k 有两类取法:

- 选取 k 为实数, 这时的静电势在 z 方向是指数函数。当 z 方向为无穷的情形下, 为了保持静电势有限, 往往只能选择 $e^{\pm kz}$ 中的一个特定的符号。径向函数 $R(r)$ 这时为标准的贝塞尔函数 (振荡解): $J_m(kr)$ 和 $N_m(kr)$ 。往往需要径向的边条件来确定 k 可能的取值。
- 选取 k 为纯虚数, 这时静电势在 z 方向为振荡的三角函数, 这往往由 z 方向有限区间所加的边条件引起。利用这些边条件可以确定 k 的可能取值。相应的, 径向的函数为虚总量贝塞尔函数 (指数型) $I_m(kr)$ 和 $K_m(kr)$ 。根据径向的边条件, 往往我们只能选取其中合适的线性组合。

与三角函数类似, 柱函数同样具有正交归一、完备等特性。依赖于柱坐标中 r 方向边条件的不同, 这些正交归一完备性的表现也有所不同。例如对于有限区间: $0 \leq r \leq a$ 上的 Dirichlet 边条件, 相应的解的形式为: $J_m(x_{mn}r/a)$, 其中 x_{mn} 为 J_m 的第 n 个非负零点:

$$J_m(x_{mn}) = 0. \quad (6.22)$$

也就是说, 对于有限区间的边条件, 一般解 $J_m(kr)$ 中的波数 k 只能取分立的数值: $k = x_{mn}/a$ 。这点与直角坐标中的情形十分类似 (只不过平面波换成柱面波)。

对于有限区间上的柱面波解, 我们同样有正交归一关系:

$$\int_0^a r J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{m'n'}r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(x_{mn})]^2 \delta_{nn'}. \quad (6.23)$$

而相应的完备性关系则可以写成:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a^2 [J_{m+1}(x_{mn})]^2} J_m\left(\frac{x_{mn}r}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}r'}{a}\right) = \frac{1}{r} \delta(r - r'). \quad (6.24)$$

任何区间 $[0, a]$ 上满足狄利克雷边条件的函数都可以用柱函数 $J_m(x_{mn}r/a)$ 展开。

如果径向的边条件是加在无穷区间上的, 那么波数 k 一般可以取连续的值。这时的正交归一关系为:

$$\int_0^\infty r J_m(kr) J_m(k'r) dr = \frac{1}{k} \delta(k - k') . \quad (6.25)$$

这个关系定义了所谓的汉克耳变换 (Hankel transforms)。将上式的 r 与 k 对换, 就得到完备性关系, 它们可以与直角坐标中傅立叶积分变换相类比。

22.3 球坐标中的拉普拉斯方程的解: 球谐函数

¶ 如果我们要求解的边值问题的边界具有球对称性, 那么拉普拉斯方程可以在球坐标中利用分离变量法求解。这时, 边值问题的解可以用所谓的球谐函数来表达。在球坐标 (r, θ, ϕ) 中, 拉普拉斯算符的表达式为:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2} , \quad (6.26)$$

其中与角度有关的算符 $\hat{\mathbf{L}}^2$ 被称为角动量平方算符, 它的表达式为:⁵

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} . \quad (6.27)$$

所谓球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 是算符 $\hat{\mathbf{L}}^2$ 的本征函数:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (6.28)$$

其中 $l = 0, 1, 2, \dots$ 为非负整数, 而整数 m 的取值范围是: $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ 。所以对应于一个固定的整数 l , 共有 $2l+1$ 个 m 的可能取值。球谐函数的 θ 和 ϕ 的依赖也是分离的, 它的明显表达式为:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} , \quad (6.29)$$

其中 $P_l^m(\cos \theta)$ 是所谓的连带勒让德函数。由于在球坐标中一对固定的 θ 和 ϕ 总是与三维空间的一个单位矢量 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 一一对应的, 所以为了简化记号, 我

⁵这个名称是从量子力学里面借用过来的, 这里我们完全可以不必管它为什么是角动量的平方。

们又把球谐函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 简记为 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ ，类似的，我们将立体角元 $\sin \theta d\theta d\phi$ 记为 $d\Omega_{\mathbf{n}}$ 或 $d\mathbf{n}$ 。这样定义的球谐函数满足：

$$Y_{l,-m}(\mathbf{n}) = (-1)^m Y_{lm}^*(\mathbf{n}) . \quad (6.30)$$

球谐函数满足一系列非常重要的性质。其中最为重要的就是正交归一性：

$$\int d\mathbf{n} Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (6.31)$$

以及完备性：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) = \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\phi' - \phi) . \quad (6.32)$$

也就是说，任何一个角度的函数都可以展开成球谐函数。利用球谐函数，球坐标中拉普拉斯方程的一般解可以写成：

$$\Phi(r, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad (6.33)$$

其中系数 A_{lm} 和 B_{lm} 完全由边界条件确定。我们马上就会看到利用球谐函数求解具体的静电边值问题的例子 (见本节后面的例题 6.2)。如果所考虑的问题具有 ϕ 方向的对称性，那么静电势的展开中将只涉及到 $m = 0$ 的球谐函数，这时连带勒让德函数就退化为勒让德多项式。

¶ 球谐函数的一个非常重要的应用是用来展开函数： $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ 。注意到这个函数对于 \mathbf{x} 以及 \mathbf{x}' 都满足拉普拉斯方程 (除去 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ 的点以外)，所以它一定能够展开成 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ 和 $Y_{lm}(\mathbf{n}')$ 。按照函数的对称性，这个展开一定也是对于 \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 对称的。详细的计算得到的结果是：

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) , \quad (6.34)$$

其中 $r_{<}$ 和 $r_{>}$ 分别代表 $r = |\mathbf{x}|$ 和 $r' = |\mathbf{x}'|$ 中的较小的和较大一个的值。这个重要结果被称为球谐函数的加法定理。我们会在第 24 节中讨论多极展开时用到它。

22.4 球坐标中的例子

¶ 下面我们举个实例来说明如何在球坐标系中求解具体的静电边值问题。

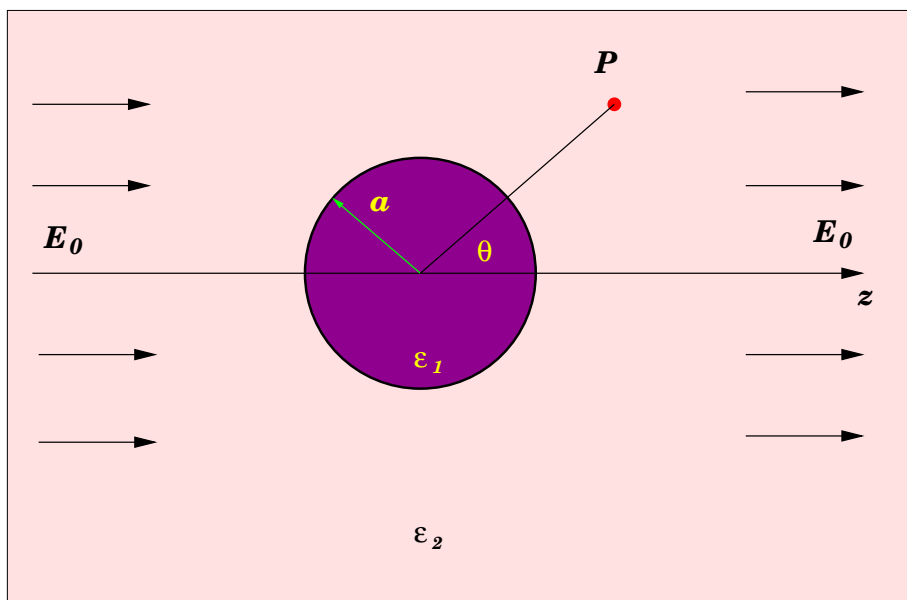


图 6.2: 均匀介质 (介电常数为 ϵ_2) 存在沿 z 方向的均匀电场 E_0 。现在将一个半径为 a 的电介质球 (介电常数为 ϵ_1) 放入, 我们需要求解空间任意一点 P 处的静电势。

例题 6.2 均匀场中的介质球 考虑一个均匀的、线性各向同性的电介质构成的球体, 其半径为 a , 介电常数为 ϵ_1 , 它处在填满无穷空间的另一种均匀、线性、各向同性的电介质中, 其介电常数为 ϵ_2 。在第二种介质中有均匀的、沿 z 方向的电场, 电场强度为 E_0 。我们要求解当介电球体放入后空间各点的静电势 (参见图 6.2)。

解: 显然这个问题适合于在球坐标系中求解。由于空间各点都不存在自由电荷分布, 我们得知静电势 Φ 在全空间满足拉普拉斯方程。因此, 在电介质球内和外部, 我们可以将静电势写成:

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad \Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) = \sum_l \left(B_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta),$$

其中系数 A_l , B_l 和 C_l 由边条件确定。注意, 由于绕 z 轴的对称性, 我们的解中仅仅涉及 $m = 0$ 的球谐函数 (即勒让德多项式)。

下面我们分析一下静电势所满足的边界条件。首先, 在无穷远处电介质球的影响已经消失, 所以在无穷远处一定有:

$$\Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta, \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty,$$

其中为了方便, 我们已经将上式中可能的相加常数取为零。这个条件告诉我们, 所有的 B_l 中只有 $B_1 = -E_0$ 不等于零。由于外场仅仅含有 $l = 1$ 的勒让德函数, 所以由它所产生的介质极化一定也只包含 $l = 1$ 的分量。也就是说: 只有 A_1 , C_1 和 $B_1 = -E_0$ 不等于零。

另外两个非零的系数可以利用在电介质球的表面角坐标为 θ 的位置处电场强度的切向分量连续, 电位移矢量的法向分量连续的事实得到:⁶

$$A_1 = -E_0 + C_1/a^3, \quad \epsilon_1 A_1 = -\epsilon_2(E_0 + 2C_1/a^3),$$

经过简单的代数运算, 我们得到这个方程的解是:

$$A_1 = -\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right)E_0, \quad C_1 = \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right)E_0 a^3.$$

于是, 我们得到最终的静电势在全空间的解:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}}(\mathbf{x}) &= -\left(\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right)E_0 r \cos \theta, \\ \Phi_{\text{out}}(\mathbf{x}) &= -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right)E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta,\end{aligned}\quad (6.35)$$

这个解表明静电势在球内是一个均匀电场; 在球外它是原先存在的均匀外电场与极化的电偶极矩所产生的电偶极场的叠加。该电偶极子的电偶极矩的大小为:

$$p = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}\right)a^3 E_0. \quad (6.36)$$

作为一个特例, 如果我们令上面所讨论的例题中的参数 $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, 那么考察电介质球表面的边条件我们发现, 这实际上等效于一个均匀外场中理想导体球的边界条件。于是, 无须再解方程我们知道一个理想导体球处于介电常数为 ϵ 的电介质中, 同时加上均匀外电场时的静电势为:

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta, \quad (6.37)$$

这时我们不必考虑球内的静电势, 因为它恒为零。

搞定

23 静电边值问题的数值解法

¶ 静电边值问题, 或者具体地说在一定区域中求解拉普拉斯方程的问题, 在实际应用中是经常遇到的。但是, 往往由于边界形状的复杂性、或者由于边界条件的复杂性、或者两种复杂性都存在的原因, 绝大多数实际应用中的边值问题是不可能解析求解的 (有许多甚至不能分离变量)。因此, 寻求一种可靠的数值解法就显得尤其重要了。

拉普拉斯方程的边值问题的数值求解实际上包含两个基本的步骤: 首先, 我们需要对问题做分立化的处理, 也就是将原先无穷多自由度的问题化为求解有限多自由度的问题; 其次, 我们需要利用相应的数值算法来求解所得到的、包含有限多自由度的问题。我们将简单介绍有限元方法, 这是一种处理这类问题的标准方法。

⁶这个方程组中的第一个方程来源于电场强度的切向连续, 它也可以看成是电势本身连续。这两者给出同一方程。第二个方程来源于电位移矢量的法向连续。

23.1 简单的网格法

¶ 我们首先介绍一下经典的网格法解拉普拉斯方程的基本过程。假设我们需要求解区域 V 内的拉普拉斯方程，这个区域的边界 ∂V 由一些平行于三维坐标平面的平面围成，我们要求的解在边界上满足狄利克雷边条件。我们现在将三维空间划分成三维的网格，格距为 a 。假设我们的感兴趣的区域 V 内和边界 ∂V 上只包含有限多个网格交叉点。我们统称称这些交叉点为格点。处于区域 V 内的这些格点被称为内格点，而处在边界上的那些格点被称为边界格点。我们要求的静电势在每个格点处的值记为： $\Phi(\mathbf{x})$ 。由于静电势满足狄利克雷边条件，所以它在边界格点上的值是已知的。如果我们能够求出静电势在每个内格点上的值，我们就可以得到一个关于区域 V 内静电势的一个大概的了解。只要我们将格距不断减小，网格更加细致，我们就可以得到区域内静电势的近似解。

在三维空间中如果我们用差分来代替微分，我们就可以得到拉普拉斯算符的一个近似表达式：

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi(\mathbf{x}) \simeq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a^2} (\Phi(\mathbf{x} + \hat{i}) + \Phi(\mathbf{x} - \hat{i}) - 2\Phi(\mathbf{x})) , \quad (6.38)$$

其中 \hat{i} 代表沿着 i 正方向的长度为 a 的矢量。由于所有的格点的数目是有限大，所以如果利用上面这个拉普拉斯算符的近似式作用于某一格点的静电势，它得到的是该点的静电势以及与其相邻的六个格点上静电势的线性叠加。换句话说，在分立的网格情形下，所有格点（内格点和边界格点）上的静电势 $\Phi(\mathbf{x})$ 可以看成是一个列矢量，它的维数等于总的格点数目；拉普拉斯算符可以看成是这个矢量空间的一个矩阵（线性变换）。我们要求解的静电势满足： $\nabla^2 \Phi = 0$ 。

¶ 要求解差分形式的拉普拉斯方程，我们可以从扩散方程出发：

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) , \quad (6.39)$$

这个方程的差分形式为（时间也分立化为 $t = n\Delta t$ ，其中 n 是非负整数）：

$$\frac{\Phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \Phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a^2} (\Phi(\mathbf{x} + \hat{i}, t) + \Phi(\mathbf{x} - \hat{i}, t) - 2\Phi(\mathbf{x}, t)) , \quad (6.40)$$

注意，这个方程可以用来迭代地求出 $\Phi(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ ，只要所有的 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 为已知。一个重要的特性就是：叠代无穷多（在实际计算中是足够多）次以后得到的函数： $\Phi(\mathbf{x}, t \rightarrow \infty)$ 一定满足拉普拉斯方程。换句话说，拉普拉斯方程的解是扩散方程的一个稳定解。可以证明，为了保证迭代的稳定性，时间方向的间隔 Δt 不能够取太大，它必须满足：

$$6\Delta t \leq a^2 . \quad (6.41)$$

在此条件下，上述的迭代一定会收敛。如果我们取最大的可能的 Δt 的值，那么公式 (6.40)

中的迭代具体形式为：

$$\Phi^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 [\Phi^{(n)}(\mathbf{x} + \hat{i}) + \Phi^{(n)}(\mathbf{x} - \hat{i})], \quad (6.42)$$

其中，我们已经将时间的依赖写在 Φ 的上标处 (例如 $\Phi^{(n)}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, n\Delta t)$)。这个迭代公式的形式十分简单：在保持已知的边界静电势不变的情况下，我们可以将内格点处的静电势改变成它的六个近邻格点的代数平均值，如此往复，直到每个内格点的静电势在所要求的精度之内不再变化。这时我们就得到了该区域内拉普拉斯方程的一个近似解。这个方法是一个十分古老的算法，它被称为雅可比方法 (Jacobi's method)。它早在十九世纪就已经广为人知了。

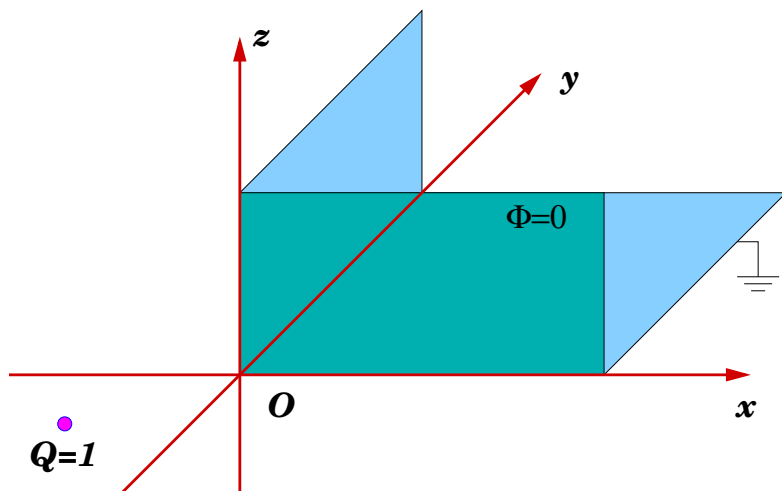


图 6.3: 三维空间的第一卦限填满接地的理想导体，在其外部任意一点放置一个电量为 $Q = 1$ 的点电荷，我们需要求解空间任意一点处的静电势。这个问题可以利用网格法来近似求解。

¶ 我们用一个实例来说明这种方法。考虑三维空间中一个稍微复杂一点的边值问题。设想我们在三维直角坐标系的第一卦限中 (也就是 $x > 0, y > 0, z > 0$ 的区域) 填满理想导体并将其接地；空间其他区域为真空。现在，我们在第一卦限外的任意一点放置一个电量为 $Q = 1$ 的单位点电荷，我们试图来求解空间的静电势 (见图 6.3)。

首先，这不是一个可以用静电镜像法简单求解的问题。原因就在于如果按照通常的方法引入镜像电荷 (例如在点电荷关于三个坐标平面的镜像位置)，你会发现有些镜像电荷并不在第一卦限内，因此镜像电荷将影响导体外部的方程。这就使得静电镜像法不能直接应用。我们可以利用雅可比方法来求解这个问题。注意到第一卦限外的静电势总是可以写成点电荷的静电势加上一个拉普拉斯方程的解 $\Phi(\mathbf{x})$ ，而 $\Phi(\mathbf{x})$ 在边界上 (与第一卦限的交界面上) 满足确定的狄利克雷边条件，即它正好等于点电荷 Q 在边界上产生的静电势的负

值,从而两者之和满足该边界上总的静电势为零。于是,剩下的工作就是利用上面讨论的雅可比方法,从而求解函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的近似值。

23.2 有限元方法

¶ 一种比前一小节更为复杂一些的方法是所谓的有限元方法 (Finite Element Method, FEM)。有限元方法与网格法的最主要区别在于求解问题的第一步骤,即如何对原先的问题进行分立化。在有限元方法中,我们对于待求解区域的划分不是按照均匀的网格来进行,而是根据实际的需要(依赖于待求函数变化的快慢、边界的形状等等)来划分,而且一般常用的微小单元也不是小立方体(或长方体),而是相应维数中的单纯形 (simplex)。具体来说,对于一维问题是线段,二维是三角形,三维是四面体。之所以用各个维数的单纯形是因为它们(与通常的立方网格比较)可以更好地处理复杂形状的边界。每一个小的单纯形单元被称为一个有限元。整个待求区域被一系列的有限元所覆盖。这在数学上称为对待求区域对一个单纯剖分。不同的有限元的大小形状通常并不是相同的,而是根据所求解的问题来具体确定的。因此,利用有限元方法的第一个步骤就是确立一个合理的单纯剖分方案。

以二维情形为例,对待求区域进行单纯剖分后,覆盖区域的各个有限元(小三角形)的顶点被称为这个剖分的节点 (node) 如果能够计算出静电势在各个节点处的值(或者其近似值),我们就可以得到静电势在待求区域内的一个分立的近似表达。事实上,我们还可以做得更多。我们不仅仅可以得到静电势在各个分立的节点处的值,我们还可以利用某种内插—其中最常用的是线性内插—给出静电势在区域内每一点处的一个近似表达。例如,考虑二维平面上一个任意的有限元,它的三个节点的坐标分别为: (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ 。假定我们给定这三个节点处的静电势的数值: Φ_i , 那么在有限元内部,我们可以利用线性内插公式:

$$\Phi(x, y) = a + bx + cy, \quad (6.43)$$

其中 (x, y) 是所考虑的有限元 (三角形) 内部的任意一点。利用静电势在三个节点处点数值,我们有:

$$\Phi_i = a + bx_i + cy_i, i = 1, 2, 3; . \quad (6.44)$$

由此我们可以解出三个系数: a, b, c :

$$a = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \Phi_1 & x_1 & y_1 \\ \Phi_2 & x_2 & y_2 \\ \Phi_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & \Phi_1 & y_1 \\ 1 & \Phi_2 & y_2 \\ 1 & \Phi_3 & y_3 \end{vmatrix}, c = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \Phi_1 \\ 1 & x_2 & \Phi_2 \\ 1 & x_3 & \Phi_3 \end{vmatrix}, \quad (6.45)$$

其中 D 为系数行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (6.46)$$

它的数值正好等于相应的有限元 (三角形) 面积的两倍。将这些表达式带入 (6.43) 我们就得到:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i x + r_i y) \Phi_i, \quad (6.47)$$

其中各个系数由下式给出:

$$p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, q_1 = y_2 - y_3, r_1 = x_3 - x_2. \quad (6.48)$$

其他的系数可以由上式循环交换 (1, 2, 3) 得到。因此我们看到, 只要给定某个单纯剖分的各个节点处的静电势的近似数值 $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$, 我们就可以得到整个区域内任意一点处的静电势的近似值。我们还可以计算上述静电势对应的电场。由于在有限元内部静电势线性依赖于坐标, 因此电场 $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ 在一个有限元内部为常矢量:

$$\mathbf{E}_x = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 q_i \Phi_i, \mathbf{E}_y = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 r_i \Phi_i. \quad (6.49)$$

¶ 如何能够得到一组好的近似值 $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$ 呢? 我们知道严格的静电势 $\tilde{\Phi}(\mathbf{x})$ 应当满足拉普拉斯方程或泊松方程。一个更为方便的办法是利用与方程等价的最小静电能量条件。我们知道, 在一定的边界条件下, 满足相应拉普拉斯方程的静电势一定是使得该区域上的静电能泛函:

$$\mathcal{E}[\Phi] = \frac{\epsilon}{2} \int d^2\mathbf{x} |\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2, \quad (6.50)$$

取极小值。利用这个原理我们就得到一个求解静电问题的变分法。当我们给定某个单纯剖分上各个节点处的静电势尝试值 $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$ 后, 由于一个有限元内部的电场为常矢量, 见公式 (6.49), 并且该电场线性依赖于有限元的三个结点处的静电势 Φ_i 。所以与尝试静电势 (6.47) 对应的静电能泛函就等于各个有限元上的静电能密度乘以相应的有限元面积, 再将所有有限元的贡献相加即可:

$$\mathcal{E}[\{\Phi_i\}] = \frac{\epsilon}{2} \sum_{f=1}^{N_f} \mathbf{E}_f^2 \Delta S_f, \quad (6.51)$$

其中 $f = 1, 2, \dots, N_f$ 标记不同的有限元 (假定总共有 N_f 个), ΔS_f 是有限元 f 的面积。由于每个有限元上的静电能密度是其结点处静电势 Φ_i 的二次函数, 因此与尝试静电势 (6.47) 对应的总静电能泛函也是所有 Φ_i 的正定二次型。我们希望寻找的拉普拉斯方程的近似解就对应于上述总静电能泛函的极小值。

为了考虑边条件, 我们将一个待求区域的单纯剖分的节点分为内部节点和边界节点两大类。对于边界节点来说, 与之对应的静电势是给定的 (如果是 Dirichlet 边条件)。因此,

能量泛函 (6.51) 中需要确定的变量实际上只涉及那些内部节点处的静电势。事实上，我们可以进一步将它写成：

$$\mathcal{E}[\{\Phi_i\}] = \frac{1}{2} \Phi_i \mathcal{A}_{ij} \Phi_j - \mathcal{B}_i \Phi_i + \mathcal{C}, \quad (6.52)$$

这个式子中的指标 i 仅仅涉及内部节点，重复的指标意味着对于所有内部节点求和。矩阵 \mathcal{A}_{ij} 是一个正定的、对称稀疏矩阵； \mathcal{B}_i 是一个矢量。显然这个二次型取极小的条件对应于：

$$\mathcal{A}_{ij} \Phi_j = \mathcal{B}_i. \quad (6.53)$$

也就是说，只要确定了系数矩阵 \mathcal{A}_{ij} 以及矢量 \mathcal{B}_i ，我们只需要求解上面的线性方程组，就可以获得需要的解 Φ_i 。 Φ_i 获得了，带入前面的公式 (6.47)，我们就得到了待求区域上静电问题的一个近似解。一般来说，型如 (6.53) 的方程组可以利用迭代的方法来求解。特别是对于正定的、实对称矩阵，存在很多的数值方法可供选择，目前也存在非常高效的商用软件。

24 静电与静磁多极展开

¶ 静电与静磁多极展开考虑的是在 origin 附近的静态电荷源或电流源在远离 origin 区域所产生的静电场或静磁场问题。另外一个可以考虑的是在 origin 附近的源与一个外加的静态电磁场之间的相互作用能量。

我们首先来看静电的问题。在空间 origin 附近局域的一团电荷分布，我们用函数 $\rho(\mathbf{x})$ 表示它的电荷分布密度。这里所谓的局域是指 $\rho(\mathbf{x})$ 只是在空间有限大的一个区域 V 内才不等于零，而在该区域以外恒等于零。我们现在要求远离这团电荷分布的一点处的静电势。

按照公式 (6.3)，在该区域外一点 \mathbf{x} 处的静电势可以写成：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

其中积分变量 \mathbf{x}' 取值在区域 V 内。现在我们利用前面得到的球谐函数的加法定理 (6.34) 得到：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\int Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \right) \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}},$$

其中我们利用了前面所说的， \mathbf{x} 是在区域外远处的一点，所以 $|\mathbf{x}| > |\mathbf{x}'|$ 。上式中的积分是一个只与电荷分布有关，而与点 \mathbf{x} 的位置无关的常数。于是，我们可以将远离电荷分布处任意一点的静电势表达成：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}}, \quad (6.54)$$

其中系数 q_{lm} 被称为与电荷分布对应的多极矩，它的表达式为：

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\mathbf{n}') (r')^l \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' . \quad (6.55)$$

公式 (6.54) 就称为静电势的多极展开。对于一个给定的 l ，一共有 $2l+1$ 个 m 的取值，但由于球谐函数的性质， $q_{l,m}$ 与 $q_{l,-m}$ 只是复共轭的关系。为了进一步看清各个多极矩的物理意义，我们利用 $l=0, 1, 2$ 的球谐函数的明显表达式得到：

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q, & q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathbf{p}_3, & q_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\mathbf{p}_1 - i\mathbf{p}_2), \\ q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \mathbf{D}_{33}, & q_{21} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\mathbf{D}_{13} - i\mathbf{D}_{23}), \\ q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\mathbf{D}_{11} - 2i\mathbf{D}_{12} - \mathbf{D}_{22}), \end{aligned} \quad (6.56)$$

其中 Q 是电荷分布 $\rho(\mathbf{x}')$ 所包含的总电量而 \mathbf{p} 则是相应的电偶极矩 (矢量)：

$$Q = \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{p} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'), \quad (6.57)$$

张量 \mathbf{D}_{ij} 是该电荷分布的电四极矩张量，其定义为：

$$\mathbf{D}_{ij} = \int d^3\mathbf{x}' (3\mathbf{x}'_i \mathbf{x}'_j - (r')^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}'). \quad (6.58)$$

根据静电势的多极展开公式我们看到，任意一个局域电荷分布在远离电荷分布区域所产生的静电势可以按照它的多极矩进行展开：贡献最大的是单极矩——也就是总电量——的贡献，它按照 $1/r$ 的形式衰减；随后是按照 $1/r^2$ 的形式衰减的电偶极矩的贡献；再次是按照 $1/r^3$ 衰减的电四极矩的贡献。当然如果需要更为精确的结果，还可以加上电八极矩、电十六极矩等。需要提醒大家注意的是，一般来说一个带电体系的各个多极矩是依赖于原点的选取的。可以证明，只有体系的最低阶的、非零的电多极矩不依赖于原点位置的选取。

作为一个十分重要的例子，我们发现一个位于原点的电偶极矩在空间任意一点 \mathbf{x} 所产生的静电势和静电场分别为：

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} \quad (6.59)$$

这个公式我们将在本课程中多次用到。

¶ 下面我们讨论局域的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 在一个外电场中的静电能的问题。设与外场相对应的静电势为 $\Phi(\mathbf{x})$ ，那么静电能的表达式为：

$$U = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}). \quad (6.60)$$

我们假定电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 只是在 $\mathbf{x} = 0$ 附近才不为零, 因此我们可以将外场在 $\mathbf{x} = 0$ 附近展开:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots$$

注意对于外电场 \mathbf{E} , 产生它的源处于无穷远处, 因此我们有: $\nabla \cdot \mathbf{E}(0) = 0$ 。所以, 我们可以在上面的二阶展开中加上一项: $-\frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}(0)$ 。将此式代入静电能的表达式, 我们得到:

$$U = Q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (6.61)$$

所以我们看到, 一团任意的局域电荷分布与外电场的相互作用能量可以表达成总电荷 Q 与电势、电偶极矩 \mathbf{p} 与电场强度的内积、电四极矩 \mathbf{D} 与电场梯度的内积等各个贡献之和。

类似于静电学的多级展开, 静磁学中也可以讨论一个局域在原点附近的电流密度分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ 在远离电流区域所产生的磁矢势, 即磁多级展开。在远离原点的任意一点 \mathbf{x} , 它满足 $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$, 其中 \mathbf{x}' 是电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}') \neq 0$ 区域的点。那么我们可以做泰勒展开:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$$

于是, 在点 \mathbf{x} 处的磁矢势可以近似写成:

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi|\mathbf{x}|} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') + \frac{\mu x_j}{4\pi|\mathbf{x}|^3} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') x'_j + \dots \quad (6.62)$$

为了能进一步化简上式, 我们利用下面的矢量恒等式:

$$\int d^3\mathbf{x}' \partial'_i [\mathbf{J}_i(\mathbf{x}') \mathbf{x}'_j] = 0 \quad (6.63)$$

这个恒等式之所以成立是因为我们可以将等式的左边化为无穷远边界上的面积分, 而我们假设了电流分布是局域的, 因此在无穷远边界处相应的函数恒等于零。如果我们将上面的恒等式左边括号外的偏微商作用到括号里面去, 它将产生两项: 一项是正比于 $\partial'_i \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') = \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ (电荷守恒); 另一项由于 $\partial'_i \mathbf{x}'_j = \delta_{ij}$ 给出:

$$\int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.64)$$

这意味着磁多极展开式 (6.62) 中的第一项恒等于零。注意到第一项在远离电流分布的地方产生的磁矢势正比于 $1/|\mathbf{x}|$, 即为磁单极势。因此此项恒为零与不存在磁单极的事实是一致的。

所以在远离电流分布的点 \mathbf{x} 处的磁矢势的领头阶的非零贡献来自展开式 (6.62) 中的第二项, 它正比于 $1/|\mathbf{x}|^2$, 这是一个磁偶极势。为了看清这一点, 我们利用另一个恒等式

$$\int d^3\mathbf{x}' \partial'_k [\mathbf{J}_k(\mathbf{x}') \mathbf{x}'_i \mathbf{x}'_j] = 0, \quad (6.65)$$

这个恒等式证明与式 (6.63) 类似。于是，将上式中的偏微商具体计算出来并且利用 $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ 我们得到：

$$\int d^3\mathbf{x}' [\mathbf{x}'_i \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') + \mathbf{x}'_j \mathbf{J}_i(\mathbf{x}')] = 0 . \quad (6.66)$$

这意味着磁多极展开式 (6.62) 第二项中的积分关于指标 i 和 j 对称的部分实际上贡献也为零，我们只需保留其反对称部分：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') \mathbf{x}'_j &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}_j \int d^3\mathbf{x}' [\mathbf{J}_j(\mathbf{x}') \mathbf{x}'_i - \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') \mathbf{x}'_j] \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \mathbf{x}_j \int d^3\mathbf{x}' [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')]_k \\ &= -\frac{1}{2} \left[\mathbf{x} \times \int d^3\mathbf{x}' [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] \right]_i . \end{aligned} \quad (6.67)$$

其中我们定义了电流分布 \mathbf{J} 对应的磁偶极矩 \mathbf{m} (或者简称为磁矩)：

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}' [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] . \quad (6.68)$$

容易验证，如果电流分布是位于一个平面内的电流圈 (不一定是圆形的)，那么我们磁矩的普遍定义 (6.68) 可以表达成：

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}_0 , \quad (6.69)$$

其中 S 和 I 分别为该平面环行电流所包围的面积和电流强度， \mathbf{n}_0 是沿着右手法则所确定的平面电流环的法向单位矢量。目前的定义 (6.68) 可适用于普遍的电流密度分布。

利用磁矩的定义 (6.68)，并仅保留展开式 (6.62) 的领头阶即式 (6.67) 的形式，我们可以得到磁多极展开的首项磁矢势和相应的磁场：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \simeq \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} , \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \right] . \quad (6.70)$$

其中 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 为 \mathbf{x} 方向的单位矢量。正如我们所说的，这是一个磁偶极矢势。

与带电体系在外电场中的能量公式 (6.61) 类似，我们也可以讨论局域分布的稳恒电流密度与外磁场 \mathbf{B} 相互作用的能量。由于没有磁单极子 (净磁荷)，因此如果仅仅考虑到磁偶极的相互作用，这个表达式为：

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(0) , \quad (6.71)$$

其中 \mathbf{m} 是电流分布 \mathbf{J} 所对应的磁矩。这个公式在考虑原子的能级时经常会被用到。



相关的阅读



本章是主要处理的是静电/静磁问题。基本上只考虑了最为简单的例子。



第七章

电磁波的传播

本章提要

- 平面电磁波的基本属性
- 电磁波在介质表面的折射与反射
- 电磁波在介质中的色散
- 波导与谐振腔

电 磁波从一开始就伴随着人类的生产和生活。我们现在知道，光（确切地说是可见光）只不过是处于某个特殊频率范围内的电磁波。人们对电磁波的认识发生革命性的进步却是在麦克斯韦电磁理论之后。到现在为止，我们对于电磁波的运用可以说已达到登峰造极的程度：卫星通信、无线通讯、光纤通讯等。关于电磁波的问题，一般总可以将其归为产生、传播和接收等三个基本过程。电磁波的接收主要是一个工程技术的问题，我们不会涉及；宏观和微观领域的电磁波的产生和发射问题我们将在下章中简要讨论。本章中我们将首先讨论电磁波在各种介质中传播的基本物理问题。由于电磁波如此广泛的应用，我们不可能在一章之中将电磁波传播的所有磷磷总总的性质都给出详尽的讨论，我们将只涉及电磁波在最简单、也是最典型的介质（线性非耗散介质、导体、波导、谐振腔）中传播的最基本和普遍的性质。

25 均匀平面电磁波的基本性质

¶ 麦克斯韦方程告诉人们，电磁场是一个可以自我支撑的动力学系统，它不再需要依附于任何介质而可以在真空中传播，¹ 这一点我们在第五章中就已经看到了。那里我们

¹ 这一点实际上在麦克斯韦的年代还没有真正认识到。当时人们认为电磁波需要在一种特殊的介质中传播，这种特殊的介质就是所谓的以太。但是，后来的实验以及狭义相对论的产生宣告了以太

得到了电磁势满足的波动方程。利用电磁势与电磁场的关系可以轻易地证明：在没有源的空间，电场强度矢量和磁感应强度矢量本身也满足同样的波动方程：


$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.1)$$

其中我们假定空间存在电容率和磁导率分别为 ϵ 和 μ 的均匀线性介质。波动方程的解中最为基本的形式是所谓的均匀平面电磁波。它的形式可以表达为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (7.2)$$

其中我们将电磁场的波动部分用复的指数来表达，波动部分的任意常数相因子则被吸收 in 波的矢量振幅之中，这样电磁场的振幅 \mathbf{E}_0 和 \mathbf{B}_0 原则上也都是复矢量。我们在讨论与电磁波有关的现象时总是假设：

波场的复表示

 任何真实的实物理量都由其复数表示形式的实部给出。

¶ 均匀平面电磁波之基本性质

麦克斯韦方程告诉我们，我们写出的均匀平面电磁波解中波矢 \mathbf{k} 一定与场的振幅垂直。同时，电磁场的复振幅之间也相互垂直并满足：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{B}_0 = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad (7.3)$$

其中 \mathbf{n} 为波矢 \mathbf{k} 方向的单位矢量。因此我们看到，均匀平面电磁波的波矢、电场强度和磁感应强度构成相互垂直的坐标架。要使方程 (7.2) 满足波动方程，我们必须有：

$$k^2 \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mu\epsilon\omega^2. \quad (7.4)$$

这意味着平面波的相速度（也就是平面波中位相保持相同的点在空间移动的速度）为：

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}, \quad (7.5)$$

其中的 n 称为该介质的折射率。² 对于非色散介质，其折射率几乎与频率 ω 无关。这时将平面波解 (7.2) 进行线性叠加就可以写出波动方程的通解。例如对于一维的情形，这些解一定具有行波解的形式： $g(x - vt) + f(x + vt)$ 。这个通解的重要特性是波的形状在波的传播过程中不变。但对于色散介质，这时 $\mu\epsilon$ 与频率 ω 有关，叠加出来的解就不再是保持波形的行波解了。

论的破产。

²这又是一个相当不幸的记号。在电磁波的传播中，我们通常用 \mathbf{n} 表示电磁波波矢方向的单位矢量；但是又用 n 来表示折射率。

¶ 偏振性质

为了更为明确地表示电磁波作为矢量波的行为，我们可以引入三维空间的三个实单位常矢量：一个是沿波矢 \mathbf{k} 方向的 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_3$ ；另外两个在垂直于 \mathbf{n} 的平面内，我们记为： \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 ，它们满足：

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{n} . \quad (7.6)$$

电场强度的复振幅就可以用 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 展开：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} , \quad (7.7)$$

其中的系数 E_1 和 E_2 都可以是复数。随着 E_1 和 E_2 之间的关系不同，我们称电磁波处于不同的偏振状态。一般来说， E_1 和 E_2 的复相角是不相同的（也就是说两者之比不是实数）。可以证明，一个任意的由 (7.7) 所描写的平面电磁波，如果我们在空间中一个固定点，面对着电磁波传播的反方向来看，其物理的电场矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ —即复电场矢量振幅的实部—将随着时间的推移描出一个椭圆。此时我们称该均匀平面电磁波是椭圆偏振的。如果 E_1 和 E_2 的复相角相同，我们称均匀平面电磁波为线偏振的。如果比值 $E_2/E_1 = \pm i$ ，我们则分别称该均匀平面电磁波为左旋或右旋圆偏振的。³ 针对圆偏振的特殊情形，引入下列的复单位矢量是方便的：

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) . \quad (7.8)$$

它们满足下列重要正交归一关系：

$$\mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} = 0 , \quad \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} = 1 . \quad (7.9)$$

显然一个任意偏振的平面电磁波既可以用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ；也可以用 \mathbf{e}_{\pm} 来展开。

在描写电磁波的偏振性质时常常引入所谓的斯托克斯参数 (Stokes parameters)。以线偏振为例，如果我们令：

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E} = a_1 e^{i\delta_1} , \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E} = a_2 e^{i\delta_2} , \quad (7.10)$$

其中 a_1, a_2 为相应复数的模 (正实数)； δ_1, δ_2 为相应幅角。我们可以定义下列的斯托克斯参数：

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2 , \quad s_1 = a_1^2 - a_2^2 , \quad (7.11)$$

$$s_3 = 2a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) , \quad s_4 = 2a_1 a_2 \sin(\delta_2 - \delta_1) . \quad (7.12)$$

显然，上述四个斯托克斯参数并不是独立的，它们满足： $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ 。这些参数是实验上可以直接测量的物理量。通过对它们的测量就可以确定平面电磁波的偏振性质。

³左旋和右旋圆偏振的定义并不完全统一。我们这里采用的定义是这样的：如果我们面对正入射的电磁波来看，其物理的电场强度矢量 \mathbf{E} 的旋转方向是逆时针方向的，我们就称之为左旋的；反之则称之为右旋的。用光子的语言来说，左旋偏振光的光子具有正的螺旋度 (helicity)，即它的角动量沿着传播方向的投影为 +1。

¶ 均匀平面电磁波的能量

伴随着电磁波的传播有能量的传输。我们知道电磁场的能流密度由所谓的玻印廷矢量给出(参见第 18 节)。对于均匀平面电磁波,真实的玻印廷矢量也是随着时间变化的,其时间平均值代表了在一个周期中平均通过的能流并可下式给出:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{n} . \quad (7.13)$$

所以我们看到,时间平均的效果是有静能流沿波矢 \mathbf{k} 的方向传播(所以阳光能给我们带来温暖)。类似的,我们也可以计算出空间电磁场的能量密度在一个周期内的时间平均值:

$$u = \frac{1}{4} \left[\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right] = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}_0|^2 . \quad (7.14)$$

由于沿着单位矢量 \mathbf{n} 方向传递的能流密度矢量可以写为: $\mathbf{S} = uv\mathbf{n}$, 其中 v 是能量流动的速度; 因此将上述两个公式比较我们就得到均匀平面电磁波中能量流动的速度是: $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/n$, 即恰好与电磁波的相速度一致。注意这个结果仅仅对于单色均匀平面电磁波是正确的。一般来说电磁波能量流动的速度并不一定与其相速度相同。

26 电磁波在介质表面的折射与反射

¶ 这一节中我们处理电动力学课程中最为痛苦而又不能不讲的内容, 也就是电磁波在两种非导电介质表面的反射和折射的问题。

为此, 我们考虑两种均匀、各向同性的线性介质, 它们的介电常数和磁导率分别为 ϵ , μ 和 ϵ' , μ' 。它们分别填充在 $z < 0$ 和 $z > 0$ 的半空间, 也就是说两种介质的交界面是 xy 平面。我们将两种介质分界面的法线方向的单位矢量 \mathbf{n} 取为沿着 $+z$ 方向。我们会用到两种介质的折射率, 它们的定义是:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}, \quad n' = \sqrt{\frac{\epsilon'\mu'}{\epsilon_0\mu_0}} . \quad (7.15)$$

我们假设有一均匀平面电磁波从具有折射率 n 的介质中入射到两种介质的分界面上。为了方便, 我们取入射电磁波的波矢 \mathbf{k} 位于 xz 平面内。矢量 \mathbf{k} 与单位法矢 \mathbf{n} 构成的平面被称为入射面, 两者之间的夹角 i 被称为入射角。在两种介质的分界面处会出现电磁波的反射和折射。我们将反射波的波矢记为 \mathbf{k}'' , 它与负的法向 $-\mathbf{n}$ 之间的夹角 r'' 被称为反射角; 折射波的波矢记为 \mathbf{k}' , 它与法向 \mathbf{n} 的夹角 r 被称为折射角。我们还将用 $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}}'$ 和 $\hat{\mathbf{k}}''$ 来分别表示相应三个波矢方向的单位矢量(见图 7.1 和图 7.2)。

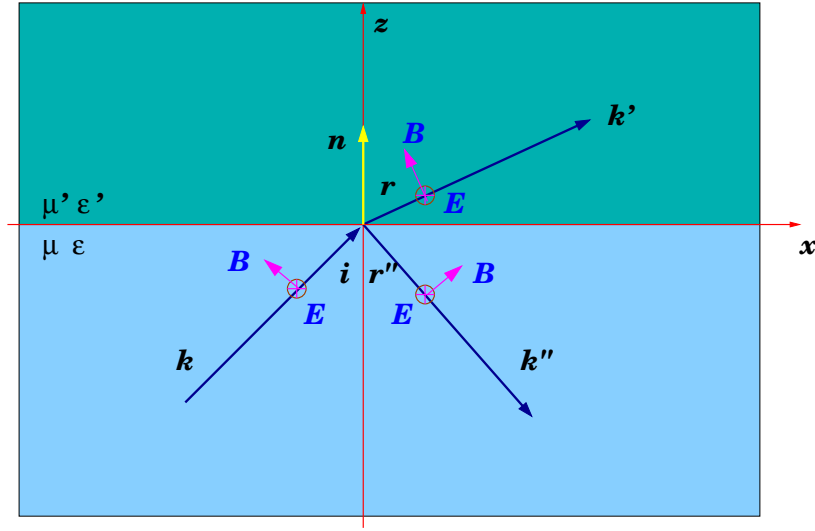


图 7.1: 电磁波在两种介质表面的反射和折射示意图。两种介质分别具有介电常数、磁导率 ϵ, μ 和 ϵ', μ' 。入射电磁波的波矢与界面的法向位于 xz 平面内。本图显示的是电场强度与入射面垂直的偏振情况。

于是，我们可以写出入射、折射和反射电磁波的电磁场：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} . \\ \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \mathbf{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{E}' , \\ \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \mathbf{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{\mathbf{k}}'' \times \mathbf{E}'' . \end{cases} \quad (7.16)$$

三种不同的电磁波的波矢大小是与电磁波的频率以及所在介质的折射率直接联系的：

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| = k = n \frac{\omega}{c}, \quad |\mathbf{k}'| = k' = n' \frac{\omega}{c} . \quad (7.17)$$

在两种介质的交界面处物理的电磁场要满足一定的边界条件 [式 (5.60),(5.61),(5.62),(5.63)]。由于介质交界面处没有任何的自由电荷和电流，因此这些边界条件就体现为电磁场矢量的切向或法向分量的连续性条件。再注意到这些边界条件必须在任意时刻、同时在 $z = 0$ 平面上的任意一点都得到满足。这就要求三种波的相因子必须在 $z = 0$ 平面上时时处处相等：

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x})_{z=0}$$

这个式子可以用来说明三个波矢实际上都处于一个平面 (也就是入射面 xz 平面) 之内。对于反射波它给出入射角 i 等于反射角 r'' 而对于折射波它正好给出著名的折射定律 (或斯奈尔定律)：

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n} . \quad (7.18)$$

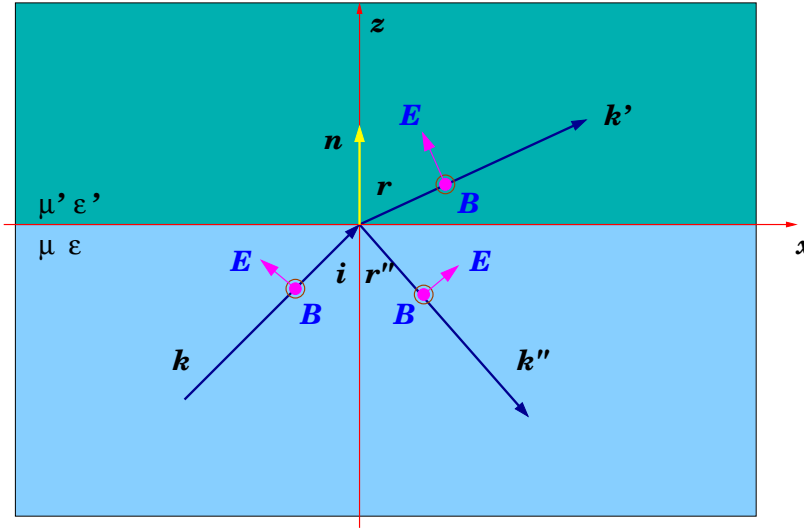


图 7.2: 电磁波在两种介质表面的反射和折射示意图。两种介质分别具有介电常数、磁导率 ϵ, μ 和 ϵ', μ' 。入射电磁波的波矢与界面的法向位于 xz 平面内。本图显示的是电场强度与入射面平行的偏振情况。

其中 i 和 r 分别表示入射角和折射角。

¶ 现在我们可以运用电磁场在两种介质交界面处所应当满足的边界条件。对于目前的情况，它们可以表达成：

$$[\epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \epsilon'\mathbf{E}_0'] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7.19)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7.20)$$

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} = 0, \quad (7.21)$$

$$\left[\frac{1}{\mu}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0' \right] \times \mathbf{n} = 0. \quad (7.22)$$

上述四个方程分别来自于 \mathbf{D} 的法向、 \mathbf{B} 的法向、 \mathbf{E} 的切向和 \mathbf{H} 的切向连续条件。

将电场垂至于入射面的分量和平行于入射面的分量分开讨论是比较方便的。我们首先讨论电场 \mathbf{E} 垂至于入射面的分量（也就是电场 \mathbf{E}_0 的 y 方向分量） $(\mathbf{E}_0)_\perp$ 。这时的偏振情况如图 7.1 所示。公式 (7.19) 只涉及电场的平行分量；对电场的垂直分量公式 (7.20) 和公式 (7.21)（在用了 Snell 定律后）是等价的；它们和公式 (7.22) 给出：

$$(\mathbf{E}_0)_\perp + (\mathbf{E}_0'')_\perp - (\mathbf{E}_0')_\perp = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [(\mathbf{E}_0)_\perp - (\mathbf{E}_0'')_\perp] \cos i - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} (\mathbf{E}_0')_\perp \cos r = 0.$$

于是我们可以解出电场振幅的垂直分量之比：

$$\frac{(\mathbf{E}'_0)_\perp}{(\mathbf{E}_0)_\perp} = \frac{2n \cos i}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos r}, \quad \frac{(\mathbf{E}''_0)_\perp}{(\mathbf{E}_0)_\perp} = \frac{n \cos i - \frac{\mu}{\mu'} n' \cos r}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos r}. \quad (7.23)$$

我们这里特别提请大家注意的是，这些公式中除了出现两种介质的折射率之外，还出现它们的磁化率之比（换句话说，介电常数和磁化率分别出现在公式中，而不仅仅是以折射率的组合出现）。但是，至少对于可见光频率段，多数介质都可以近似地认为 $\mu/\mu' \simeq 1$ ，于是上面公式中将仅仅出现介质的折射率。

对于电场振幅平行于入射面的分量（如图 7.2 所示），公式 (7.20) 根本不涉及；公式 (7.19) 和公式 (7.22) 等价（同样利用 Snell 定律）；它们和公式 (7.21) 给出的解为：

$$\frac{(\mathbf{E}'_0)_\parallel}{(\mathbf{E}_0)_\parallel} = \frac{2n \cos i}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos i + n \cos r}, \quad \frac{(\mathbf{E}''_0)_\parallel}{(\mathbf{E}_0)_\parallel} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos i - n \cos r}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos i + n \cos r}. \quad (7.24)$$

公式 (7.23) 和公式 (7.24) 被统称为菲涅耳公式 (Fresnel's equations, 1812)。它们是 1812 年法国物理学家菲涅耳利用光的波动说首先获得的。

作为一个特例，如果是正入射（即 $i = 0$ ）的情形，那么公式 (7.23) 和公式 (7.24) 等价，我们就得到一个十分简单的结果：

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{2\mathbf{E}_0}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} + 1}, \quad \mathbf{E}''_0 = \mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} + 1}, \quad (7.25)$$

¶ 从公式 (7.24) 看出，对于反射波的振幅来说，如果入射波的入射角正好等于所谓的布儒斯特角 (Brewster's angle) i_B 的时候，⁴ 反射波的电场平行分量等于零，其中布儒斯特角满足：

$$i_B = \tan^{-1} \left(\frac{n'}{n} \right). \quad (7.26)$$

也就是说，这个时候无论入射电磁波的偏振方向如何，反射波中电场的平行于入射面的分量都将是零，从而反射波的偏振方向就会完全垂至于入射面。根据公式 (7.24) 还可以看出，即使是入射角不正好等于布儒斯特角，在反射波中的电场平行于入射面的分量也会被较大幅度地减小。这就解释了为什么不偏振的自然光经过反射以后，其反射光往往具有较高的偏振度。利用这个事实，人们制造了汽车驾驶员专用的墨镜，它可以有效地减少对面来车的前挡风玻璃所反射的阳光。

另外一个值得一提的现象就是全反射，它发生在电磁波从较大折射率介质（光密介质）入射到较小折射率的介质（光疏介质）表面时。按照前面得到的斯奈尔定律，如果 $n > n'$ ，

⁴以苏格兰物理学家 Brewster (Sir David Brewster, 1781-1868) 命名。

那么就会存在一个角度 i_0 ，我们称它为全反射角，它使得折射角 $r = \pi/2$ ：

$$i_0 = \sin^{-1} \left(\frac{n'}{n} \right) . \quad (7.27)$$

如果入射角等于 i_0 ，那么折射波将沿交界面传播，因此将没有能量流入折射率较小的介质内部。如果入射角比上述的全反射角还大，那么折射角的余弦将变成纯虚数：⁵

$$\cos r = i \sqrt{\left(\frac{\sin i}{\sin i_0} \right)^2 - 1} .$$

于是，折射波的相关因子中将会出现沿 z 方向指数衰减的因子：

$$e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} = e^{-k' |\cos r| z} e^{ik' (\sin i / \sin i_0) x} .$$

因此，如果入射角大于全反射角，折射波将会在 z 方向上指数衰减，无法进入折射率较小的介质，它将沿分界面传播。读者可以用前面的公式 (7.23) 和公式 (7.24) 来验证这时反射波与入射波振幅之比仅仅是一个相因子。也就是说，反射波振幅的模方与入射波相等，但是反射波相对于入射波而言可以有一个相位的改变。

27 电磁波在导电介质中的传播

在这一节中我们来讨论电磁波在导电介质中的传播问题。为了简化我们的讨论，我们将假设我们研究的导电介质是均匀、各向同性的，同时它满足欧姆定律。对电磁波而言，导电介质与非导电介质的重大区别就是电磁波在导电介质中会引起自由电流从而出现耗散，电磁波的能量会转换成导电介质中的焦耳热。因此，最重要对区别来自于麦克斯韦方程中的安培—麦克斯韦定律。如果假定所有的场都是简谐地依赖于时间，我们得到：

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = -i\omega \left(\epsilon_b + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} , \quad (7.28)$$

其中 ϵ_b 和 μ 是该导电介质中通常的介电常数和磁导率，它们仍可能是频率 ω 的函数。与非导电介质中的相应方程比较，我们发现可以将上面公式中圆括号内的量看成是导电介质的 **复介电常数**：

• • • • •

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} . \quad (7.29)$$

如果我们令所有场具有平面波 $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ 的形式，我们得到波矢的平方满足：

$$k^2 = \mu \epsilon_b \omega^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_b} \right) , \quad (7.30)$$

这个式子表明：如果我们假设介质的 $\mu \epsilon_b$ 基本上是实的，只要电导率 $\sigma \neq 0$ ，那么电磁波的波矢 k 以及频率 ω 不可能都是实数。我们下面将针对两种典型的情况进行讨论。

⁵这里我们用的符号似乎有有些容易引起混淆。下面这个公式中根号前面的 i 表示虚数单位；而 $\sin i$ 中的 i 则表示入射角！

- 一种情况是在某个初始时刻 $t = 0$ ，导体中已经存在某个真实的电磁场分布，它可以按照三维空间分解为具有实的波矢 \mathbf{k} 的平面波之叠加。这时满足上面公式的频率 ω 则必须是复数，频率的虚部代表了导体中的电磁场是随时间指数衰减的。这也十分好理解，由于存在欧姆电流，所以 $t = 0$ 时刻存在的电磁场以及与之相对应的能量随时间不断转换为焦耳热，导致导体中电磁场的振幅随时间指数衰减。
- 另一种常见的情况是外界有电磁波入射到导体的情形。这时导体内的场的时间依赖是不衰减的简谐振荡，即 ω 为实数。此时电磁波的波矢 k 必须是复数。虽然能量仍然会转化为焦耳热，但是由于外面入射的电磁波可以源源不断带来能量，所以导体内任意一点的电磁场随时间仍然可以维持不衰减的简谐振荡。对于复的波矢我们通常令：

$$k = k_1 + i \frac{k_2}{2}, \quad (7.31)$$

其中 k_1, k_2 为实数。我们将区分两个不同的极限情形：一个是导电性很差的导体，它满足 $\sigma/(\omega\epsilon_b) \ll 1$ ；另一种情形是良导体： $\sigma/(\omega\epsilon_b) \gg 1$ 。对于不良的导体的情形，我们得到的近似解为：

$$k \simeq \sqrt{\mu\epsilon_b}\omega + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_b}} \sigma. \quad (7.32)$$

我们看到，在最低阶近似下波在空间的衰减速率（由上式中的虚部给出）几乎不依赖于频率（假定 ϵ_b, μ 和 σ 都不明显地依赖于频率）。相反的，对于一个良导体，我们得到的近似解则为：

$$k \simeq (1 + i) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \quad (7.33)$$

这个公式中波矢 k 的虚部的倒数具有长度的量纲。它被称为导体的趋肤深度 δ ：

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}, \quad (7.34)$$

它代表了电磁波能够进入导体内的一个特征长度。它明显地依赖于电磁波的频率。频率越高的电磁波越不易穿透良导体，这个效应通常被称为趋肤效应。

这种情形下导体中的平面电磁波的形式可以写成：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} / \delta} e^{i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} / \delta - i \omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} / \delta} e^{i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} / \delta - i \omega t},$$

其中 \mathbf{n} 为垂直于导体表面并指向导体内部的单位矢量。利用齐次的麦克斯韦方程可以将上述电场和磁场的振幅联系在一起：

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu\omega} k \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad (7.35)$$

由于波矢 k 现在是复数，我们得知导体内的磁场与电场之间一般存在位相差。这个位相差可以很容易地从公式 (7.30) 中得到。特别对于良导体而言， $\sigma/(\omega\epsilon_b) \gg 1$ ，这时 k^2 几乎是纯虚的，因此磁场与电场的位相差几乎为 $\pi/4$ 。

类似于第 26 节的讨论，我们也可以研究平面电磁波从一个非导电介质入射到一个导电介质表面时的反射和透射问题。原则上来说，我们需要的只是将第 26 节中第二种介质的介电常数用本节中给出的等效复介电常数 (7.29) 替代即可。第 26 节中许多的结论仍然成立，唯一复杂的是偏振的变化情况。

28 介质色散的经典模型

在这一节中我们将简要地讨论一下介质的色散问题。这是一个十分复杂而广泛的课题，不大可能在这么小的篇幅内加以详述。我们将从最为简单的经典振子模型出发来进行定性或半定量的讨论。详尽的色散理论的处理必须借助于固体物理和量子物理的知识。本节讨论的最主要的目的是借助于一个十分简单的模型使读者对介质介电常数依赖于频率的基本特性有一个大致的了解，从而更好地理解色散现象的起源。

本节中我们将使用所谓的经典振子模型。这个模型假设介质中的电子可以看成是一些(可能包含阻尼的)经典简谐振子，它们有各自的本征频率和阻尼系数。一个电子在谐振的电场(比如说可以是单色平面电磁波)作用下做受迫振荡，电子会偏离其固有平衡位置从而产生一个平均的电偶极矩：

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \left(\frac{\mathbf{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right), \quad (7.36)$$

其中 ω 是外电场的频率， ω_0 和 γ 是振子的本征(圆)频率和阻尼系数。现在假定构成介质的原子⁶中的各个电子分别具有不同的本征频率： ω_i 和阻尼系数 γ_i ， $i = 1, 2, \dots$ 。假定在一个原子中，具有某个特定本征频率 ω_i 和阻尼系数 γ_i 的电子数目记为 f_i 。显然 $\sum_i f_i = Z$ 其中 Z 为一个原子中的总电子数目。当这样的一个模型介质处在谐振的电磁场中时，电磁场会使得介质产生一个平均的电偶极矩(即将介质极化)。因此，这个模型给出的介质介电常数为：

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}, \quad (7.37)$$

其中 N 是介质单位体积中的原子数目； f_i 被称为具有频率 ω_i 的电子的振子强度； e 和 m 分别是电子的电荷和质量。这个看上去纯经典的公式其实对于量子的情形也是很不错的描述，我们所需要的只是将上式中的参数，例如： f_i ， ω_i 等赋予量子力学的解释。

⁶原则上也可以是分子。在那种情形下，下面的描述中的“原子”也相应换为“分子”。

¶ 一个值得单独讨论的情形就是导体。这时介质中有某些电子可以视为是“自由”的电子，⁷ 也就是说，它们具有 $\omega_0 = 0$ 的本征频率。如果我们将所有其他“非自由”电子的贡献都归入介电常数 $\epsilon_b(\omega)$ ，那么公式 (7.37) 则可以写成：

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) + i \frac{Ne^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}. \quad (7.38)$$

如果我们将这个式子与公式 (7.29) 比较，我们发现：

$$\sigma(\omega) = \frac{f_0 Ne^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}. \quad (7.39)$$

这就是著名的 (并且很古老的) 德鲁德公式 Paul Karl Ludwig Drude, 1900)。当频率比较低的时候，我们可以忽略掉上式分母中的虚部，因此电导 $\sigma(\omega)$ 基本上是实的。在固体物理中，常常令 $\gamma_0 = 1/\tau$ ，其中 τ 具有时间的量纲，称为自由电子的驰豫时间。

¶ 另外一个值得注意的极限是高频极限。按照公式 (7.37)，如果外场的频率非常高，远远高于介质中的所有 ω_i ，那么介质的介电常数具有十分简单的形式：

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m}. \quad (7.40)$$

这个公式中的 ω_p 被称为 **等离子体频率**。注意，这个近似公式是对于所有介质在极高频时都成立的。作为一个比较特殊的例子，考虑纯粹的等离子体 (比如地球的电离层)，这时介质中的所有电子都是自由的，如果我们进一步忽略电子的阻尼效应，那么公式 (7.40) 就对于所有频率 (而不仅仅是高频) 都成立。对于这样的等离子体，如果电磁波的频率小于其等离子体频率，那么公式 (7.40) 给出的介电常数会使该电磁波的波矢 \mathbf{k} 中进入等离子体区域的分量变成纯虚数，这意味着电磁波的振幅一进入等离子体就指数地衰减了。换句话说，如果有一个电磁波从普通的低层大气入射到高层的电离层，它将被完全反射回来而不会穿透电离层。正是由于这个原因，地球上频率不太高的电磁波信号 (例如长波) 可以经电离层反射而传递很远。但是高频的电磁波是可以穿透电离层的。类似的现象也出现在金属中，简单的数量级估计指出：普通的金属的等离子体频率处在紫外到 X-射线波段，所以虽然多数金属对于可见光是不透明的，但对于紫外线会逐步变成透明的，这个现象称为金属的紫外透明。

¶ 对于一般的频率而言，由于通常非导电介质的 γ_i 比较小，因此公式 (7.37) 给出的介电常数基本上是实数。由于复的介电常数意味着电磁波的吸收 (耗散)，因此如果所有的 γ_i 都很小，只要电磁波的频率不接近介质的振子频率，电磁波的吸收就很小，即该介质对于电磁波来说就是透明的。但是，在 $\omega \simeq \omega_i$ 的时候，相应于该频率的吸收就会十分明

⁷更为确切的说法是“巡游电子”，因为这些介质中的电子实际上并不是真正“自由” (无相互作用) 的。

显。在振子频率附近，介质的介电常数的虚部会有一个明显的增强。这个频率区间被称为该介质的共振吸收区。在共振吸收区内，伴随着虚部的增强，其实部也会剧烈地变化。例如，所谓反常色散的现象就往往出现在共振吸收区。当介电常数明显地成为复数时，电磁波的波数也是复数：

$$k = k_1 + i \frac{k_2}{2}. \quad (7.41)$$

其中的 k_2 标志了电磁波振幅随传播距离的指数衰减，⁸ 它被称为该介质的衰减常数或者吸收系数。

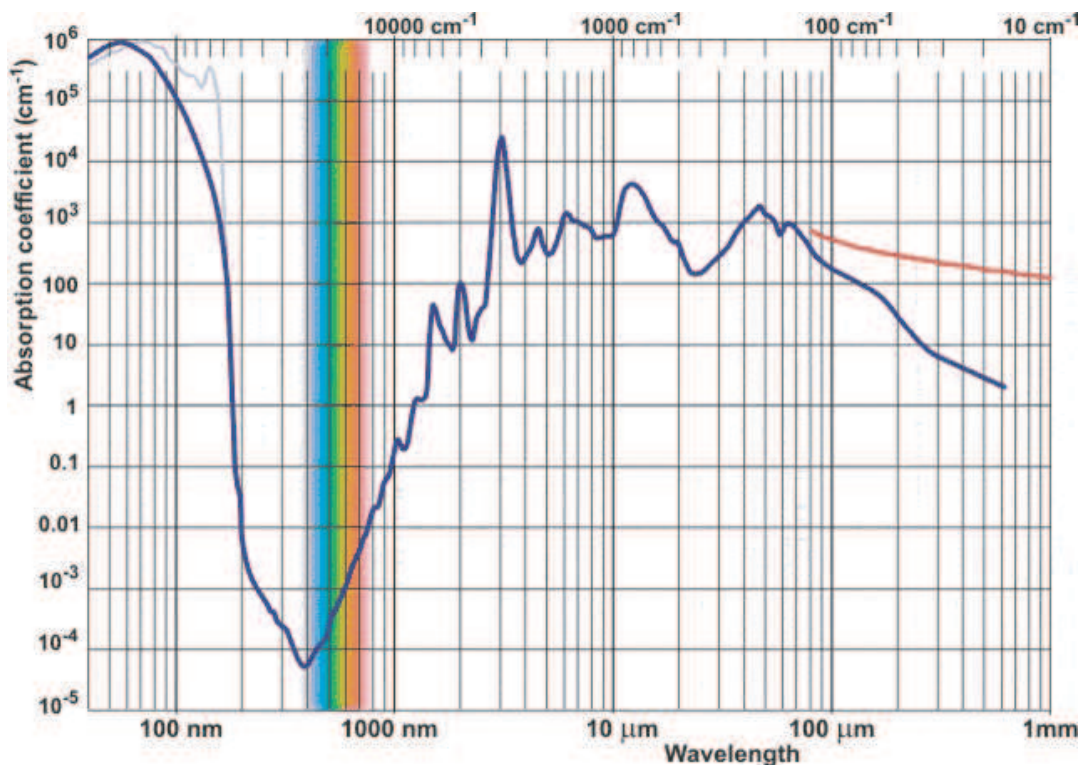


图 7.3: 水的吸收系数作为波长的函数。图中垂直的彩色条纹对应于可见光的波段。我们发现，一般来说水对于电磁波吸收很强。仅仅在可见光波段的狭窄窗口中，水才变得格外透明。

一个典型的例子是水的介电常数。在图 7.3 中，我们显示了水的吸收系数作为电磁波波长的函数。这个图表明水对于电磁波的吸收系数在多数频率范围内一直是很大的。仅仅在一个非常狭小的频率窗口之内，水的吸收系数陡然变小。这个窗口所对应的光波长恰好就是我们称之为 **可见光** 的波段 (大约 3000 ~ 7000)。也就是说，当且仅当电磁波的波长在这个波段时，水才是非常透明的。为什么水的介电常数恰好是这样的行为？要回答这个问题恐怕不是很容易的事情，而且肯定会涉及到水分子的结构及其量子力学性质。但是，如果我们承认这个实验事实，它能够解释为什么我们的肉眼仅仅能够看到“可见光”。其背后的原因就在于地球上所有的动物都源于海洋。因此在这个水环境中进化发展而来的各种

⁸注意电磁波强度正比于振幅的模方，因此波的强度按照 $e^{-k_2 z}$ 衰减，其中 z 是传播距离。

动物 (包括人类的祖先) 能看到的自然就是那些能够透过海水的电磁波。换句话说, 图 7.3 为“水是生命之源”提供了最生动而有力的佐证。

29 波包在色散介质中的传播: 群速度

¶ 前面几节中讨论的电磁波的传播都仅仅涉及了无限延展的、单色均匀平面波。真实的电磁波往往不是单色的, 也不是均匀无限延展的。它们往往是以波包 (wave packet) 的形式传播的。一个波包实际上就是一系列单色平面波的线性叠加。为了简化讨论, 我们将以一维波包为例来说明, 推广到三维是直接了当的。

¶ 考虑一个一维波包, 它的振幅可以写为一系列不同波数 (频率) 平面波的叠加:⁹

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk, \quad (7.42)$$

其中 $\omega(k)$ 的形式依赖于介质的色散性质。系数 $A(k)$ 表征了这个波包中不同频率单色波的成分, 它可以由某个时刻, 比如说 $t = 0$ 时刻的波包振幅 $u(x, 0)$ 给出:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (7.43)$$

大家很容易验证, 如果在 $t = 0$ 时刻的波 $u(x, 0) = e^{ik_0 x}$, 那么傅立叶振幅 $A(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0)$, 我们就得到单色的平面波: $u(x, t) = e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t}$ 。但是如果在 $t = 0$ 时刻 $u(x, 0)$ 不是单色平面波的形式, 而是在空间有一定延展的波包, 那么 $A(k)$ 也不再是 δ -函数, 而是在 k -空间有一定延展的函数。而且, 傅立叶变换的基本性质保证了 $u(x, 0)$ 在实空间的延展 Δx 以及它的傅立叶变换 $A(k)$ 在 k -空间的延展 Δk 之间满足一个重要的关系:

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2}. \quad (7.44)$$

这个关系可以普遍地证明 (在给出 Δk , Δx 的明确定义后)。在两边乘以常数 \hbar 之后, 它实际上就是量子力学 (确切地说是波动力学) 中著名的不确定性关系。这个关系说明, 如果我们需要构造一个在实空间具有一定延展 Δx 的波包, 我们需要选择在 k -空间也具有一定延展 Δk 的一系列单色波的叠加。按照上面的不确定性关系, 实空间的波包越窄, 傅立叶空间需要的不同波长的单色波的延展就越宽。¹⁰

¶ 现在我们讨论一个波包在色散介质中的传播问题。这是一个比单色平面波传播要复杂得多的物理问题。对于一个一般的色散介质, 波的圆频率是波数 (波长) 的函数:

$$\omega = \omega(k), \quad k = k(\omega). \quad (7.45)$$

由于波的相速度为:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(k)}, \quad (7.46)$$

⁹为了简化讨论, 这一节中讨论的波都是标量波, 没有考虑电磁波都偏振。

¹⁰类似的结论还出现在傅立叶光学中。

因此我们看到，由于色散的存在，相速度 v_p 对于波包中不同频率（波数）的成分是不相同的。因此，尽管波包是一系列单色波的线性叠加，但是由于不同单色波传播的相速度不同，这就造成不同频率的成分之间的位相差会随时间的演化而发生相对变化。返回到实空间，这意味着原先波包的形状一般来说将随着时间的推移发生变形。不仅如此，我们知道对于一个单色平面波，它的能量流动的速度与其相速度是相同的。但是，对于一个波包来说，它的能量流动的速度就变得十分复杂了。如果波包的谱 $A(k)$ 仅仅具有一个比较小的延展，也就是说，我们假定它仅仅在 $k = k_0$ 附近一个 Δk 的很小范围内不等于零，同时假定在这个波数（频率）附近， $\omega(k)$ 是缓慢变化的，那么我们可以利用泰勒展开：

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \dots, \quad (7.47)$$

其中 $\omega_0 = \omega(k_0)$ 。将这个近似带入我们发现波包随时间演化的行为可以近似地表达为：

$$u(x, t) \simeq u(x - v_g t, 0) e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t}, \quad (7.48)$$

其中 v_g 是介质中的群速度，其定义为：

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}. \quad (7.49)$$

公式 (7.48) 说明，如果近似 (7.47) 成立，在色散介质中传播的波包在 t 时刻的强度为： $|u(x - v_g t, 0)|^2$ 。与 $t = 0$ 时刻的波包的强度： $|u(x, 0)|^2$ 相比较，波包的整体形状没有改变，只不过它的位置按照群速度移动了一段距离 $v_g t$ 。因此，这时描写波包信号传播更为恰当的物理量是它的群速度 v_g ，而不是相速度 v_p 。可以证明这时波的能量流动的速度也可以近似地用群速度而不是相速度来描写。利用波矢、频率以及折射率的关系： $\omega(k) = ck/n(k)$ ，我们可以得到：

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega(dn/d\omega)}. \quad (7.50)$$

因此只要存在色散，即 $dn/d\omega \neq 0$ ，群速度就不同于相速度。

需要特别提请大家注意的是，群速度是介质中信号（能量）传递的速度的结论并不能无限地扩大。从上面的推导我们看到，它仅仅是在近似条件 (7.47) 成立的前提下才是对于色散介质中电磁波传播有意义的一个物理量。如果这个近似不成立，那么群速度同样也会失去其意义，就像相速度对于色散介质中的波包的传播失去其意义一样。如果 $dn/d\omega > 0$ ，这称为正常色散；如果 $dn/d\omega < 0$ ，这称为反常色散。对于正常色散的情形，由于通常 $n > 1$ ，于是群速度比相速度要小，而且二者都小于真空中的光速。对于反常色散的情形，由于 $dn/d\omega$ 的绝对值可以很大。这一点可以从我们前面关于介质的介电常数的振子模型的表达式中看出。特别是当频率接近某个振子频率时，介质的折射率会出现剧烈的变化，这往往伴随着剧烈的反常色散。这时，群速度可以大于相速度，甚至可以大于真空中的光速。在更为极端的情形下，它还可以是负的。这些貌似奇怪的行为其实并不会撼动狭义相对论的基本原理，因为，当群速度表观上超过真空光速甚或变为负数时，群速度本身已经失去了其原本的物理意义，这时它并不能代表介质中信号或者能量的传播速度。

30 波导与谐振腔

¶ 电磁波在现代社会中最广泛的应用就在于远程通信。在这类实际的应用中，需要将电磁信号传递到比较远的地方。这类传输大体可以分为两类：第一类就是我们前面已经讨论过的，电磁波在自由空间（实际上是空气中）的直接传播；第二类则是利用某种导线来进行传播。第一类的例子是无线通信（手机间的通信、地面与卫星的通信等）；第二类则属于有线通信。有线通信中使用的传递电磁波的导线一般被通称为波导。传统的波导，例如，电话线、有线电视的同轴电缆等等，一般由金属制成，被称为金属波导。随着近年来光通信的发展，介质波导（由不导电的光介质构成的光纤）变得十分普遍了。谐振腔一般是由金属或导电介质所围成的一个封闭空间。它的主要作用是可以进行频率的选择。正是由于在实际中的广泛应用，波导与谐振腔中的电磁波的传播问题值得单独加以讨论。

为了简化讨论，我们这里假定波导管的电磁和几何性质沿着电磁波传播的方向具有不变性。在波导管中，电磁波将沿着该波导管的平移对称轴（我们取为 z 轴）在介质中传播。这些传播的电磁波由于在边界面上必须满足一定的边界条件，所以波导管中传播的电磁波会表现出与无边界介质中的电磁波传播不同的一些特性。如果我们将金属波导管沿 z 轴的两端封闭起来，就构成了一个完全由导体所围合出来的封闭区域，这就是一个典型的谐振腔。由于导体边界的边条件，谐振腔中的电磁波都是所谓的驻波。谐振腔在光学中十分重要因为它的谐振频率完全是由它的几何构型所确定的。

本节中，我们将首先讨论各类波导中麦克斯韦方程分离，然后讨论金属波导和谐振腔，对于介质波导将简单提及。

30.1 麦克斯韦方程按照横向和纵向的分离

如果不考虑边界条件，波导管内部的电磁场所满足的方程与无限介质中的情况相同，都是无源的麦克斯韦方程组。如果假定所有场具有形如 $e^{-i\omega t}$ 的随时间振荡因子，那么电磁场满足：

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (7.51)$$

根据所研究问题的对称性，将电磁场的横向分量（也就是在 xy 平面内的分量）与它的纵向分量（ z 分量）分开是十分有帮助的。我们有：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_z \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_3 \times \nabla) \times \mathbf{E}, \quad (7.52)$$

磁场 \mathbf{B} 也可以类似地进行分解。需要特别引起注意的是，由于波导管边界的影响，波导管中沿着 z 方向传播的电磁波可以有沿着传播方向的纵向分量。这一点在无边界空间中是不可能的。利用电磁场的横向和纵向的分解，麦克斯韦方程可以用场的横向和纵向分量表

达为:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} + i\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_t = \nabla_t \mathbf{E}_z \cdot \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z, \quad (7.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} - i\mu\epsilon\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t = \nabla_t \mathbf{B}_z \cdot \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -i\mu\epsilon\omega \mathbf{E}_z, \quad (7.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_t = -\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z}, \nabla \cdot \mathbf{B}_t = -\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z}, \quad (7.55)$$

这个公式说明, 对于一个在波导管中传播的电磁波来说, 只要确定了电磁场的纵向分量 \mathbf{E}_z 和 \mathbf{B}_z , 电磁场的横向分量也就完全确定了。因此, 所有波导问题中——无论是金属波导还是介质波导——的关键问题就是求解电磁场的纵向分量。由于问题具有沿纵向的平移对称性, 我们可以将波导管中的电磁波的解写成 (注意, 是电磁场的所有分量, 不仅仅是横向分量!):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, y) \\ \mathbf{B}(x, y) \end{pmatrix} e^{\pm ikz - i\omega t}. \quad (7.56)$$

这样一来, 我们可以将上述问题进一步简化。首先, 我们可以明确写出横向的场量用纵向的场量表达的公式。利用 (7.53) 和 (7.54) 我们得到:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} [k\nabla_t E_z - \omega \mathbf{e}_3 \times \nabla_t B_z], \\ \mathbf{B}_t = \frac{i}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} [k\nabla_t B_z + \mu\epsilon\omega \mathbf{e}_3 \times \nabla_t E_z]. \end{cases} \quad (7.57)$$

另一方面, 波导管中电磁场满足的三维亥姆霍兹方程 (7.51) 就可以化为一个二维的亥姆霍兹方程:

$$(\nabla_t^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.58)$$

这里的参数 k 被称为波导管中电磁波的波数。它目前是一个待定的参数, 其数值由边界条件确定。这个方程虽然对于电磁场的所有分量都是成立的, 但是我们真正需要的仅仅是它们的纵向分量。只要利用边条件将波导管中电磁场的纵向分量确定了, 我们就可以利用公式 (7.57) 直接得到电磁场的横向分量。因此, 求解波导管中电磁波传播问题的核心就是利用适当的边条件, 求解其中电磁场纵向分量所满足的二维亥姆霍兹方程。由于不同波导 (金属波导和介质波导) 所满足的边条件不同, 我们将分别讨论它们的解。

¶ 由于波导管中的电磁波完全由电磁场的纵向分量所确定, 因此人们往往按照电磁场的纵向分量的不同行为对波导管中的传播的电磁波模式进行分类。如果电场的纵向分量恒等于零, 即: $\mathbf{E}_z = 0$, 这种传播的电磁波模式就被称为横电波, 或者称为 TE 波、横电模式、TE 模式。类似的, 如果磁场的纵向分量恒等于零, 这种波就被称为横磁波, 或者 TM 波、横磁模式、TM 模式。如果电场和磁场的纵向分量都恒等于零, 这种模式就被称为横电磁波, 或者 TEM 波、横电磁模式、TEM 模式。

30.2 金属波导

¶ 为了讨论上的简化，我们本节中将假定波导管的外壁由所谓的理想导体构成。在第 27 节中我们看到：如果导体的电导率是无穷大，电磁波根本无法进入导体内部，也就是说理想导体内部的电场和磁场都等于零。于是，我们得到由理想导体构成外壁的波导管中电磁场在边界上应当满足：

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

其中 \mathbf{n} 是波导管边界面 S 上的法向单位矢量。如果我们把电场和磁场都分解成横向的分量 \mathbf{E}_t 以及纵向的分量 $\mathbf{E}_z \mathbf{e}_3$ ，那么考察方程 (7.53) 和方程 (7.54) 我们发现上面两个边界条件分别等价于：

$$\mathbf{E}_z|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (7.59)$$

因此我们看到，电场和磁场的纵向分量，我们现在统一用 $\psi(x, y)$ 来表示，确立了一个二维的边值问题：

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi &= 0, \quad \gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k^2, \\ \psi|_S &= 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = 0, \end{aligned} \quad (7.60)$$

其中第一个边界条件适用于电场的纵向分量而第二个边界条件适用于磁场的纵向分量。这组方程还说明了金属波导的一个重要特性：横电和横磁模式是完全分离的，互相没有干扰。它们各自由自己的边条件所完全确立。¹¹ 具体来说，我们有：

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbf{E}_z, \mathbf{B}_z = 0, \mathbf{E}_t = \pm \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t \psi, \text{ 对于 TM 波} \\ \psi &= \mathbf{H}_z, \mathbf{E}_z = 0, \mathbf{H}_t = \pm \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t \psi, \text{ 对于 TE 波} \end{aligned} \quad (7.61)$$

这个公式里面的 \pm 符号分别对应于 $e^{\pm ikz}$ 形式的波。无论对于哪一种模式（TE 或 TM），我们总是有：

$$\mathbf{H}_t = \frac{\pm}{Z} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t. \quad (7.62)$$

其中的 Z 称为波导中的波阻抗。它的表达式为：

$$Z = \begin{cases} \frac{k}{\epsilon\omega} = \frac{k}{k_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{TM 波} \\ \frac{\mu\omega}{k} = \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{TE 波} \end{cases} \quad (7.63)$$

我们知道，二维的边值问题 (7.60) 的解是唯一的，并且相应的二维拉普拉斯算符的本征值 γ^2 一般是正的、分立的实数。如果我们将这些分立的本征值记为： γ_λ^2 。那么对于一个给定的频率 ω ，电磁波的波数为：

$$k_\lambda^2 = \mu\epsilon\omega^2 - \gamma_\lambda^2. \quad (7.64)$$

¹¹我们下面马上会看到，在介质波导中的情形就不是如此了。

我们发现这个表达式的一个明显特点：电磁波的波数并不是对于所有的频率都是实数。对于一个给定的 γ_λ^2 ，存在一个所谓的截止频率：

$$\omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (7.65)$$

如果频率 ω 小于截止频率，那么相应的电磁波根本无法在波导管中传播。由于边值问题的本征值 γ_λ^2 一般总是存在一个最小可能的值，所以对于一个给定的波导管，也存在一个最小的截止频率。频率低于波导管的最小截止频率的电磁波无法在这个波导管中传播。

考察前面的方程我们还发现：横电磁模式 (TEM 模式) 中的电场和磁场都类似于一个二维的静电场。作为一个推论，横电磁 (TEM) 模式无法在一个单连通截面的金属波导管中存在，因为一个二维单连通区域中的拉普拉斯方程的解，如果它满足边界为零的话，在该区域内也一定恒等于零。在实际应用中，可以使用同轴电缆或者平行导线来实现横电磁模式的传播。横电磁模式的波还有一个特性，那就是它的波数与频率之间的关系和无边界空间中平面波的波数与频率之间的关系完全相同：

$$k_{TEM}^2 = \mu\epsilon\omega^2 \Rightarrow k_{TEM} = k_0 \equiv \sqrt{\mu\epsilon}\omega. \quad (7.66)$$

因此，横电磁模式的电磁波的相速度与无边界空间中平面波的相同，就等于该介质中的光速。对于一般的横电或横磁模式，由于截止频率的存在，可以证明波导管中的电磁波的相速度总是大于无边界空间中的光速，在截止频率附近，波导管中的电磁波的相速度趋于无穷大。在金属波导中，可以证明其平均能量的流动速度应当用群速度而不是相速度来描写。

例题 7.1 矩形波导管 考虑一个理想导体构成的矩形波导管，它的截面的边长分别为 a 和 b （假定 $a > b$ ）。讨论其内部可以传播的最小频率的电磁波。

解： 对于 TE 模式的波，考虑到磁场纵向分量的法向导数在边界为零，我们得知管内的磁场的纵向分量一定可以写成：

$$H_z \equiv \psi_{m,n}(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (7.67)$$

这里的整数 n 和 m 不能同时为零（否则管内的电磁场恒为零）。与之相应的本征值和截止频率为：

$$\gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \omega_{m,n} = \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (7.68)$$

由于我们假定 $a > b$ ，所以最低的截止频率是 $m = 1, n = 0$ 的情形，即 $\omega_{1,0} = c\pi/(\sqrt{\mu\epsilon}a)$ 。

对于 TM 模式的电磁波，本征值仍然与 TE 模式相同，但是由于电场的纵向分量是两个正弦函数相乘，因此要求整数 n 和 m 都不为零（否则管内的电磁场恒为零）。因此相应的最低截止频率是 $\omega_{1,1}$ 。

搞定

30.3 谐振腔

¶ 下面我们简单讨论一下谐振腔。如果我们将一个导体波导管的两端也用导体封闭起来，就构成了一个谐振腔。我们前面关于波导管的讨论完全适用，唯一需要修正的是，这时沿 z 方向传播的行波变成了驻波，而且它的波数一定是分立的： $k = \frac{p\pi}{d}$ ，这里 p 是一个整数而 d 是波导管纵向的长度。横向的边值问题确定的本征值如果是 γ_λ^2 ，那么谐振腔中能够存在的频率一定是分立的（量子化的）：

$$\mu\epsilon\omega_{p,\lambda}^2 = \gamma_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2. \quad (7.69)$$

这些分立的频率被称为这个谐振腔的固有频率，或本征频率。它们的具体数值是由谐振腔的几何性质和电磁性质决定的。谐振腔可以被用来筛选固定频率的电磁波，这种应用在激光的研究中经常遇到。

谐振腔的几何构形并不一定都是柱形的。事实上，任何以导体为边界封闭起来的空间都可以构成谐振腔。一个比较有趣的例子是我们的地球（作为一个导体）与它的电离层（另一个导体）之间构成的谐振腔。我们看到：一个谐振腔的最低固有频率与腔的尺寸成反比。一个大的谐振腔可以拥有极低的谐振频率。例如，地球与地球的电离层之间的谐振腔的最低频率大约在 8Hz 左右。这种谐振被称为舒曼谐振 (Schumann resonance)，并且在实验上的确被观测到。舒曼谐振在地学上有许多的重要用途。对于物理学来说，它还提供了一个光子质量上限的不错估计。根据量子力学，电磁场相应的量子是光子，它的能量可以写成 $\hbar\omega$ 。如果光子有质量的话，我们一定有光子的总能量大于它的静止质量： $\hbar\omega > m_\gamma c^2$ 。如果我们将舒曼谐振的最低频率带入，我们发现光子质量 m_γ 一定小于大约 10^{-46} 克，这是一个相当不错的估计。

30.4 介质波导与光纤

本节我们简单讨论一下介质波导。它的主要应用是光纤，这构成了我们目前高速互联网的骨干网。光纤的核心是二氧化硅并且具有极好的抗衰减性。它的传输方式大致分为两类：当所传导的电磁波的波长远小于光纤截面尺寸时，此时电磁波可以视为几何光学来传播，而波导的传播基本上是按照全反射进行的；如果所传播的波长与截面的尺寸相当时，则必须考虑电磁波的波动性质，此时需要求解相应的类似亥姆霍兹方程的本征方程以确定其可导波的模式。

首先在第小节导出的关于麦克斯韦方程横向与纵向分离的基本公式仍然适用。但介质波导由于电场和磁场不会在跨越介质边界时完全变为零，这导致一般来说介质波导的模式并不是像金属波导那样分为 TE/TM/TEM 等模式，它们一般是混合的（除了极个别的几何构型之外）。由于这种混合，介质波导中的方程和边条件是更为复杂的。这里面也存在着所谓的截止频率的问题。我们这里就不进一步深入探讨了。有兴趣的读者可以参考相关方面的著作。



相关的阅读

本章是主要处理的是平面电磁波在各种介质中传播的物理问题。我们的讨论主要针对的是均匀、线性、各向同性的介质。同时我们也讨论了电磁波在波导中的传播。

第八章

电磁波的辐射

本章提要

- 推迟格林函数与李纳-维谢尔势
- 经典谐振源的辐射
- 非相对论性和相对论性加速电荷的辐射
- 切伦可夫辐射
- 辐射阻尼与经典电动力学的局限性

本

章将简要介绍电磁波的辐射问题。这将主要涉及两大类的具体应用：在宏观方面，如果空间存在有随时间变化的电荷密度和电流密度—或者等价地说四电流密度四矢量 J^μ ，这将产生宏观尺度的电磁波辐射，我们关心其辐射的功率分布及总功率，这对于研究例如手机信号塔的辐射将是很重要的；另一方面在微观尺度，一个运动的微观带电粒子，若其运动不是匀速的，也会辐射电磁波，这广泛出现在粒子加速器之中。对于宏观的电磁辐射而言，使用工程上更加通用的国际单位制是合适的；而对于微观粒子的辐射而言，则使用高斯制更加恰当。因此，本章的讨论中，我们将会混合使用这两种单位制，请读者加以留意。具体来说，第 32 节和第 33 节中，我们将采用国际单位制，而在其他各节中则使用高斯单位制。

31 推迟格林函数与李纳—维谢尔势

¶ 让我们从四矢势满足的波动方程出发 (高斯制)[式 (5.35)]：

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi J^\nu, \quad (8.1)$$

为了求出任意 J^μ 的解，我们将需要达朗伯算符 $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ 的格林函数 $D(x, x')$ ，它满足：

$$\partial_\mu \partial^\mu D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (8.2)$$

这可以利用傅立叶变换来求解。我们将要求的格林函数写成：

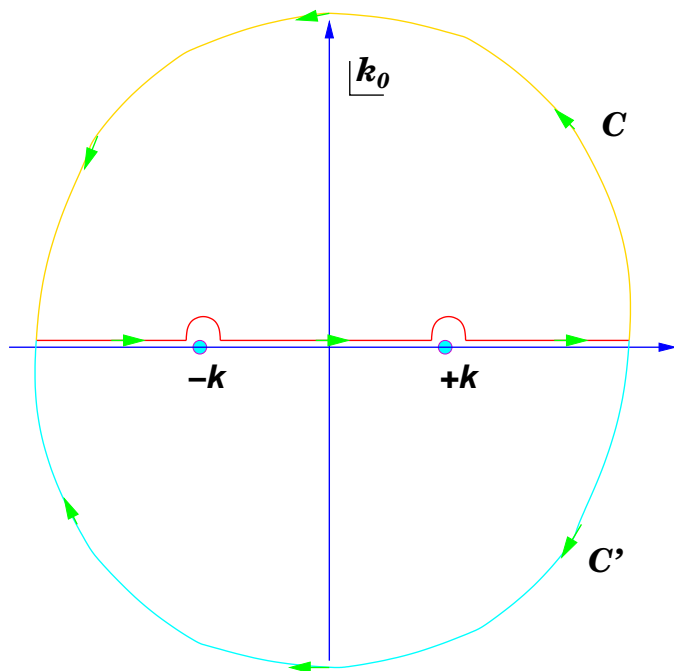


图 8.1: 四维协变形式的推迟格林函数 (8.3) 所对应的复 k_0 平面的围道。当 $x_0 < x'_0$ 时，积分可以从上半平面的围道 C 完成，得到的结果是零；当 $x_0 > x'_0$ 时，积分可以从下半平面的围道 C' 完成，得到的结果等于在两个奇点 $\pm|\mathbf{k}|$ 处的残数之和。

$$D(x, x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot (x - x')},$$

其中傅立叶变换指数上的点乘表示 4-矢量的内积。利用 δ -函数的傅立叶变换，我们立刻得到： $\tilde{D}(k) = -(1/k^2)$ ，所以：

$$D(x, x') = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x - x')}}{k^2},$$

其中 $k^2 \equiv k \cdot k = k_\mu k^\mu$ 。需要注意的是：这个式子到目前为止还只是一个形式表达式，原因是上面被积函数的分母： $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ 在 k_0 积分的路径（实轴上）存在奇点，我们必须对它的涵义给出一个明确的定义。这等价于在 k_0 的复平面上为 k_0 的积分选取恰当的路径。不同的路径定义了不同的格林函数。我们物理上需要的是推迟格林函数，因为这才是符合因果性的格林函数，它对应的路径被显示在图 8.1 中（即图中红色的路径），相应的表

达式为：¹

$$D^{(+)}(x, x') = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{(k_0 + i\epsilon)^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}, \quad (8.3)$$

其中 $\epsilon = 0^+$ 为一正无穷小参数，这个选择相当于从 k_0 平面上的两个奇点 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$ 的上方绕过去的围道。由于两个奇点都在此积分围道的下方（参见图 8.1），因此我们发现：如果 $x_0 < x'_0$ ，也就是说如果观测点的时间比源所在的时间点超前，我们可以将对于 k_0 的积分从上半平面的无穷远处绕回来，从而证明格林函数 $D^{(+)}(x, x') = 0$ 。因此它的确是一个推迟格林函数。反之，如果 $x_0 > x'_0$ ，我们的围道则必须从下半平面绕回来，这个积分不等于零而是等于其中的残数之和。由于仅有的奇点就在 $k_0 = \pm|\mathbf{k}|$ 处，经过一些具体运算我们就得到：²

$$D^{(+)}(x - x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R) = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{2\pi} \delta[(x - x')^2]. \quad (8.4)$$

¶ 在获得了格林函数之后，对于任意给定的电流密度，显然相应的电磁势（高斯制）为：

$$A_\mu(x) = (4\pi) \int d^4 x' D^{(+)}(x - x') J_\mu(x'). \quad (8.5)$$

其中 $J_\mu(x')$ 是任意的已知的四电流密度矢量。

本章后续的讨论主要聚焦于两大类应用：一类则是运动的微观粒子所造成的辐射；另一类是宏观的随时间变化的电流造成的辐射（比如手机信号塔的辐射、无线电信号塔的辐射等）。正如我们在第章中提及的，对于前一类粒子则使用高斯制比较合适，而对后一类则更方便使用国际单位制。需要指出的是，两者的协变的推迟格林函数都是一样的，所不同的只是相应的四电流密度矢量不同而已。

¶ 对于一个在四维时空中电荷为 e 的带电粒子，其轨迹可用一条世界线来表示。假定世界线的参数方程为： $r^\mu = r^\mu(\tau)$ ，其中 τ 可取为粒子的固有时间（原时），那么这个带电粒子的四维电流密度可以写成：

$$J^\mu(x') = e \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}[x' - r(\tau)], \quad (8.6)$$

其中 $u^\mu(\tau)$ 是粒子的四速度矢量。将电流密度的表达式代入到前面的 $A^\mu(x)$ 的表达式中，我们可以轻易完成对 x' 的积分：

$$A^\mu(x) = 2e \int d\tau u^\mu(\tau) \theta[x^0 - r^0(\tau)] \delta[(x - r(\tau))^2]. \quad (8.7)$$

¹如果在公式 (8.3) 中我们在被积函数的分母中取 $(k_0 - i\epsilon)^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ ，我们就得到了超前格林函数 $D^{(-)}(x, x')$ 。

²其中需要利用 δ -函数的标准表达式： $\delta(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}$ 。

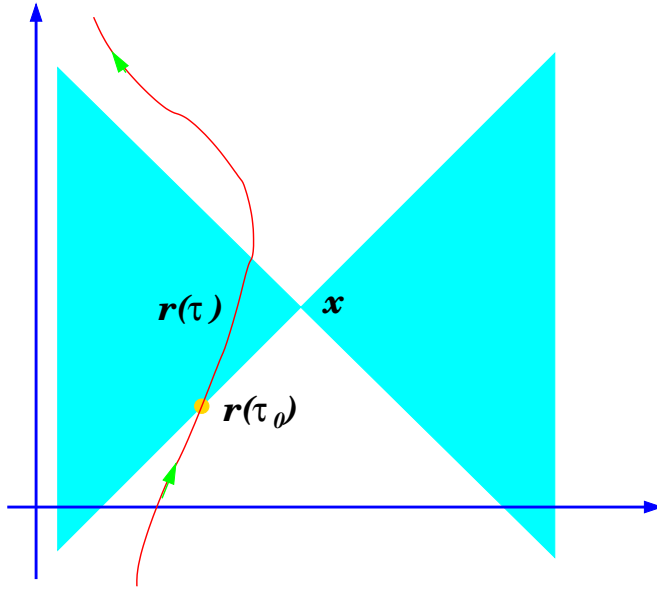


图 8.2: 李纳-维谢尔势的示意图。运动粒子的世界线用方程 $r(\tau)$ 来表示, 观测的时空点是 x 。粒子的世界线与位于 x 处的光锥有两个交点, 其中位于点 x 过去的光锥上的交点正好对应于点 x 所接收到的电磁势。

由于 δ -函数的存在, 这个积分只在一个特定的参数 τ_0 有贡献, 它满足所谓的光锥条件, 参见图 8.2。如果观察时空点为 x , 它会与粒子的世界线有两个交点, 其中一个位于其过去光锥上的交点对应于我们要求的参数 τ_0 , 该点与观察点的时间间隔刚好使得粒子在那里发出的信号被稍晚的点 x 所观察到:

$$[x - r(\tau_0)]^2 = 0, \quad x^0 > r^0(\tau_0), \quad (8.8)$$

现在利用关系:

$$\delta[(x - r(\tau))^2] = \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{\left| \frac{d}{d\tau} (x - r(\tau))^2 \right|_{\tau=\tau_0}}$$

我们就得到了时空中任意一点 x 处的电磁势:

$$A^\mu(x) = \frac{eu^\mu(\tau)}{u \cdot [x - r(\tau)]} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (8.9)$$

这就是一个带电的运动粒子所产生电磁势的四维协变表达式, 它被称为带电粒子的李纳-维谢尔势 (Liénard-Wiechert potential)。四维协变形式的电磁势虽然看上去十分简洁, 但显得不够直观, 人们在实际应用中更愿意将它写成具体的三维分量形式。令: $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0) \equiv R\mathbf{n}$ 并利用光锥条件: $x_0 - r_0(\tau_0) = R$, 我们有: $u \cdot [x - r(\tau)] = \gamma R - \gamma \beta \cdot \mathbf{n} R = \gamma R(1 - \beta \cdot \mathbf{n})$, 从而李纳-维谢尔势可以写为:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{e}{(1 - \beta \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \beta \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}, \quad (8.10)$$

其中脚标 ret 代表括号内的所有物理量必须按照光锥条件 (8.8) 在推迟的 (retarded) 时间: $r_0(\tau_0) = x_0 - R$ 来计算。公式 (8.10) 和公式 (8.9) 都被称为李纳-维谢尔势。

¶ 得到了带电粒子的电磁势, 原则上我们就可以求出它所对应的电磁场, 虽然这个推导的过程有些复杂。³ 一种比较简单的方法是从包含 δ -函数的积分表达式 (8.7) 出发。如果我们仅仅考虑 $R > 0$ 的区域, 那么我们得到:

$$\partial^\nu A^\mu = 2ec \int d\tau u^\mu(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \partial^\nu \delta[(x - r(\tau))^2].$$

这里唯一比较需要技巧的是偏微商作用在 δ -函数上的结果。它实际上可以换成对于 τ 的微商。利用:

$$\partial^\mu \delta[f(x, \tau)] = \partial^\mu f \frac{d}{df} \delta[f(x, \tau)] = \partial^\mu f \frac{d\tau}{df} \frac{d}{d\tau} \delta[f(x, \tau)],$$

其中函数 $f = (x - r(\tau))^2$, 于是我们得到:

$$\partial^\mu \delta[(x - r(\tau))^2] = -\frac{(x - r)^\mu}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \delta[(x - r(\tau))^2].$$

将这个结果代入并且对 τ 分部积分, 再利用 δ -函数完成对 τ 的积分, 最后我们得到:

$$F^{\mu\nu} = \left\{ \frac{ec}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x - r)^\mu u^\nu - (x - r)^\nu u^\mu}{u \cdot (x - r)} \right] \right\}_{\tau=\tau_0}. \quad (8.11)$$

我们也可以将它写成更为明显的三维分量形式。我们需要的是下列关系:

$$(x - r)^\mu = (R, R\mathbf{n}), \quad u^\mu = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}), \quad \frac{d}{d\tau}[u \cdot (x - r)] = -c + (x - r)^\mu \frac{du_\mu}{d\tau},$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = (\gamma^4 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, \quad \gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^4 \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})).$$

利用这些关系, 我们可以将电磁场明确写出:

$$\mathbf{E} = \left[\frac{e(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} + \frac{e}{c} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E})_{\text{ret}}. \quad (8.12)$$

这个公式中的电场分为两项: 第一项是典型的静态场, 它正比于 $1/R^2$; 第二项是典型的辐射场, 它正比于 $1/R$ 并且正比于粒子的加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 。因此, 对一个做匀速运动的粒子来说, 它所产生的场将只有静态场部分, 当然所有的场量都要在推迟的时间来计算。

³ 虽然原则上讲从三维形式的李纳-维谢尔势 (8.10) 出发, 进行必要微分运算得到运动粒子所产生的电磁场, 但因为微分的过程中必须正确处理推迟的效应, 因此并不简单。有兴趣的同学可以参考 [?] 中的相关推导。

图 8.3: 一个匀速运动的电荷在点 P 处所产生的场。这个问题可以通过洛伦兹变换 (??) 或者直接利用本节的公式 (8.12) 来计算。

例题 8.1 一个匀速运动的电荷所产生的电磁场 在这个例子中, 我们将用两种不同的方法计算一个匀速运动的电荷所产生的电磁场。为了简化讨论, 我们假定观测者所在的参照系为 K , 并且观测点 P 的坐标为: $\mathbf{x}_P = (0, b, 0)$ 。我们假定一个电量为 q 的电荷沿着 x 轴的正方向以速度 v 运动。我们选取时间的零点使得在 $t = 0$ 时刻, 电荷正好通过坐标原点 (这时它与观测点的距离也最近并且等于 b)。我们将分别利用电磁场的洛伦兹变化方法以及本节中导出的运动电荷产生的电磁场公式 (8.12) 来计算电荷在空间点 P 所产生的电磁场 (参见图 8.3)。

解: 首先, 让我们利用电磁场的洛伦兹变换的方法来计算。这个方法的出发点是首先计算出随着带电粒子一同运动的参照系 K' 中的电磁场。这是十分简单的, 因为它就是一个点电荷的静库仑场。然后, 我们可以利用电磁场的洛伦兹变换 (??) 给出在参照系 K 中的电磁场。按照这个思路, 我们首先写出 K' 系中的电磁场:

$$\mathbf{E}' = \left(-\frac{qvt'}{r'^3}, \frac{qb}{r'^3}, 0 \right), \mathbf{B}' = (0, 0, 0). \quad (8.13)$$

其中 $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$ 是 K' 系中电荷到观测点的距离。这个表达式就是点电荷的库仑场的表达式。由于我们关心 K 系中的电磁场, 我们希望首先将它表达为 K 系中的坐标。唯一需要转换的就是 $t' = \gamma t$ 。于是我们有:

$$\mathbf{E}' = \left(-\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, 0 \right). \quad (8.14)$$

剩下的就是利用公式 (??) 的逆变换 (改变该公式中速度的符号) 给出 K 系中的电磁场表达式:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{E}_2 = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{B}_3 = \beta \mathbf{E}_2. \end{cases} \quad (8.15)$$

其他的分量都恒等于零。

现在我们直接利用本节导出的公式 (8.12) 来计算。我们只需要其中的第一项的贡献。这里唯一需要注意的是, 这个公式中的各个坐标都是用推迟的坐标来表达的。因此, 为了与前面第一种方法所得到的结果进行比较, 我们需要将推迟的坐标表达为一般的坐标。为此我们利用光锥条件得到推迟时间 t^* 满足的方程: $c(t - t^*) = R$ 。因此在 x 轴上推迟的点和辐射发生的点之间的距离为: $v(t - t^*) = \beta R$ 。也就是说, 当粒子运行到点 A 时产生的场必须用粒子在点 B 时的坐标来表达 (参见图 8.3 上显示的几何关系)。利用光锥条件可以验明距离 AB 为 βR 。如果我们从点 A 向线段 PB 引垂线, 垂足为点 C , 那么距离 PC

为 $(1 - \beta \cdot \mathbf{n})R$ 。因此我们可以得到: $[(1 - \beta \cdot \mathbf{n})R]^2 = r^2 - (AC)^2 = r^2 - \beta^2 R^2 \sin^2 \theta = b^2 + (vt)^2 - \beta^2 b^2 = (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)/\gamma^2$ 。利用这个关系很容易发现前面的电场可以写为:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} = \left[\frac{qb}{\gamma^2 (1 - \beta \cdot \mathbf{n})^3 R^3} \right]_{\text{ret}}. \quad (8.16)$$

电磁场的其他非零分量也可以类似验证。于是我们证明了, 利用洛伦兹变换得到的电磁场表达式与本节所得到的电磁场表达式完全一致。 **搞定**

这里顺便指出, 李纳-维谢尔势的另外一种推导方法就是首先在粒子的静止系中写出带电粒子的库仑势, 然后再做一个洛伦兹变换就可以得到普遍的李纳-维谢尔势 (8.10)。当然, 这种推导方法依赖于一个先验的假定, 即电磁势必须仅仅依赖于粒子的速度, 不依赖于它的加速度。我们知道, 一个带电粒子的电磁场一般依赖于它的速度和加速度。因此, 对于一个有加速度的带电粒子而言, 如果我们首先在它的静止系中写出库仑场 (而不是库伦势), 然后再进行洛伦兹变换 (正像上面的例子中那样), 那么我们一般不能够得到完整的电磁场。事实上, 我们只能得到公式 (8.12) 中不依赖于加速度的一项。

32 谐振电荷和电流分布的电磁辐射

对于宏观源的辐射问题, 更为方便的是采用国际单位制。这就是本节下面讨论所采用的。与此同时, 通常人们也会将四矢量满足的方程按照其时间分量和空间分量分开来写。此时, 描写电磁场的电磁势为:⁴

$$A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A}), \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (8.17)$$

在辐射的讨论中一般也会选取洛伦兹规范, 它现在可以写为:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (8.18)$$

同样的道理, 电荷四矢量 J^μ 则分别表达为电荷密度和电流密度矢量:

$$J^\mu = (\rho c, \mathbf{J}). \quad (8.19)$$

当然, 它必须满足连续性方程:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (8.20)$$

本章最开始的关于电磁势 A^μ 的四维波动方程 (8.1) 可以分开写为,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}, \quad (8.21)$$

⁴注意, 在国际电磁制中, 标势和矢势并不是同量纲的, 而是相差一个速度的量纲。同样的, 电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 也相差一个速度的量纲。

由于矢势和标势的洛伦兹规范关系，同时由于有源波动方程的类似性，在宏观辐射问题中，人们一般选择 \mathbf{A} 来讨论相关的场。

利用波动方程的格林函数推迟格林函数，可以写出矢势 \mathbf{A} 的推迟解：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (8.22)$$

对于一个随时间变化的电荷分布，我们可以给出标势的一个类似公式。式 (8.22) 中的延迟磁矢势就是本节讨论宏观振荡电流密度分布所产生的电磁波的基本出发点。

由于任意时间依赖的函数总是可以进行傅立叶变换，同时多数的辐射宏观应用中的确也具有谐振的行为，所以本节中我们将假设电荷密度和电流密度随时间是谐振的：

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (8.23)$$

当然复振幅 $\rho(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 并不是任意的，它们必须满足电荷守恒的连续方程的约束：

$$i\omega\rho(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (8.24)$$

谐振性的源产生的所有的电磁势（以及相应的场）也是谐振的。

按照公式 (8.22)，我们可以将谐振的矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ 的振幅写出：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (8.25)$$

其中 $k = \omega/c$ 。这就是一个局域谐振电流分布在空间任意一点所产生的矢势的公式。

在讨论电磁波的辐射时，一般存在三个相关的长度：一个是集中在原点附近的电磁波的辐射源的尺度 d ；另一个是我们接收（或者说测量）电磁波的点与原点（辐射源）之间的距离 $r = |\mathbf{x}|$ ；第三个就是所辐射的电磁波的波长 λ 。按照上述三个尺度之间的相对关系，我们可将全空间分为下列三个区域：⁵

- 近场区（静态区）：它满足 $d \ll r \ll \lambda$ 。
- 中间区（感应区）：它满足 $d \ll r \sim \lambda$ 。
- 远场区（辐射区）：它满足 $d \ll \lambda \ll r$ 。

我们下面会发现，在不同的区域中电磁场也会具有不同的性状。一般来说，在近场区电磁场基本上是静态的电磁场；在远场区电磁场则是典型的辐射场（球面波）形式。这也是本章着重关注的区域。

⁵我们假设任何电磁波的接受者不会有必要与辐射源非常亲密接触，因此我们总是假定观测点到源的距离远大于辐射源的尺度： $r \gg d$ 。

对中间区或远场区，我们将辐射源与接收点之间的距离做泰勒展开：

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' ,$$

其中 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 为 \mathbf{x} 方向的单位矢量。保留到最低阶，公式 (8.25) 中的分母可以仅仅取展开式中的第一项，也就是只保留 $1/r$ 的因子。这时我们得到的矢势为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'} . \quad (8.26)$$

我们看到，在 $r \rightarrow \infty$ 的极限下（从而一定处于远场区），这样的矢势所代表的是一个典型的球面波，这个球面波的振幅一般来说是依赖于取向的（各向异性的）。求出了在远处的矢势，相应的电磁场可以从下列两式得到：

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} , \quad \mathbf{E} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \mathbf{H} , \quad (8.27)$$

其中 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 代表真空的波阻抗。显然，在远处任意一点的电磁场一定是垂直于从原点指向该点的位置矢量，而且也具有球面波的形式。

如果辐射源所发射的电磁波的波长 λ 比辐射源典型的尺度 d 也要大很多，我们可以进一步利用下面的展开：

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{r} + \dots \right) [1 - ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') + \dots] , \quad (8.28)$$

其中首项贡献 e^{ikr}/r 后面的第一个括号内的各项来自 $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 的展开；第二个括号内的各项来自相因子 $e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ 的展开，这被称为长波近似。将这个展开式代入矢势的表达式 (8.25)，它领头的几项分别对应于电偶极、磁偶极和电四极辐射。这三类辐射的物理性质我们将在下节中更详细地讨论。长波近似对于很多实际的应用都是很好的描述，例如：无线广播的电磁波（短波的典型波长为几十米，发射源的尺度一般小于这个尺度）、原子的光辐射（尽管这本质上是量子问题）等等。但是大家所熟悉的手机之间的无线通信所使用的电磁波的波长比较短（厘米到十厘米量级），因此对于手机发射塔使用长波近似一般来说是不太合适的。

33 电偶极、磁偶极和电四极辐射

本节中我们将利用上节长波近似下的展开式 (8.28)，分别讨论电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射的辐射场分布和辐射功率角分布等性质。

33.1 电偶极辐射

¶ 如果我们仅仅保留展开式 (8.28) 中的首项，我得到的矢势为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') . \quad (8.29)$$

这个公式中的积分可以利用我们讨论静磁学时 (第 ?? 节) 的方法来化简:

$$\int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = - \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' (\nabla' \cdot \mathbf{J}) = -i\omega \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'), \quad (8.30)$$

其中第二步来自于电荷守恒的连续性方程。注意到上式正好是该辐射源的电偶极矩:⁶

$$\mathbf{p} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}'), \quad (8.31)$$

将上述两式代入式 (8.29), 长波近似下的磁矢势为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (8.32)$$

要求出长波近似下的电磁场, 我们可以利用以下矢量分析的公式:

$$\begin{cases} \nabla \times [\psi \mathbf{A}] = \nabla \psi \times \mathbf{A} + \psi \nabla \times \mathbf{A}, \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot [\mathbf{n}f(r)] = \frac{2f}{r} + f'(r), \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla)[\mathbf{n}f(r)] = \frac{f(r)}{r} [\mathbf{A} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})] + f'(r) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}). \end{cases} \quad (8.33)$$

通过式 (??), 式 (8.33) 和麦克斯韦方程获得的电偶极辐射的电磁场为:⁷

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \right\}, \end{aligned} \quad (8.34)$$

这个公式所代表的电磁场被称为电偶极辐射场; 相应的辐射被称为电偶极辐射。需要注意的是, 电偶极辐射场中的磁场总是与径向 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 垂直的, 但是电场在近场区可以有平行于 \mathbf{n} 的分量。事实上, 在近场区的长波近似 ($kr \ll 1$) 下, 电场 \mathbf{E} 趋于一个静态的偶极场。在无穷远的地方 ($kr \gg 1$), 无论电场还是磁场都体现出典型的辐射场的特性, 即它们都与径向 \mathbf{n} 垂直而且其振幅也是典型的球面波的形式:

$$\mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad (8.35)$$

其中 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 为真空的波阻抗。

¶ 一个重要的物理量是辐射功率的角度分布。在某个指定方向 \mathbf{n} 的立体角 $d\Omega_{\mathbf{n}}$ 中辐射的功率可以通过 $r \rightarrow \infty$ 处的玻印廷矢量获得:

$$\frac{dP}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{1}{2} \text{Re} [r^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]_{r \rightarrow \infty}. \quad (8.36)$$

⁶确切地说, 辐射源的电偶极矩也是随时间谐振的, 式 (8.31) 的 \mathbf{p} 实际上是谐振源的复电偶极矩的振幅。

⁷这里我们选择写出磁场 \mathbf{H} 而不是 \mathbf{B} , 这样公式中就不会总出现 μ_0 的因子了。

对于电偶极辐射，我们得到：

$$\frac{dP}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |(\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}|^2 = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta. \quad (8.37)$$

其中第二个等号成立的条件是假定电偶极矩 \mathbf{p} 的不同分量之间没有位相差，而 θ 是 \mathbf{n} 与 \mathbf{p} 之间的夹角。电偶极辐射的总辐射功率可以将上式对于角度积分得到：

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^4}{12\pi} |\mathbf{p}|^2. \quad (8.38)$$

我们看到电偶极辐射的特性是：辐射的功率与辐射的频率的 4 次方成正比；其角分布与观测点处的位置矢量与电偶极矩的夹角正弦的平方成正比。

33.2 磁偶极辐射

¶ 如果我们考虑展开式 (8.28) 中除了首项的下一项，也就是说我们分别取了 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 和 $e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ 中的次级项，我们得到：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int d^3\mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (8.39)$$

这个式子的被积函数可以分为关于 \mathbf{J} 和 \mathbf{x}' 对称和反对称的两个部分，即：

$$(\mathbf{n}_j \mathbf{x}'_j) \mathbf{J}_i = \frac{1}{2} \mathbf{n}_j (\mathbf{x}'_j \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_j \mathbf{x}'_i) + \frac{1}{2} \mathbf{n}_j (\mathbf{x}'_j \mathbf{J}_i - \mathbf{J}_j \mathbf{x}'_i), \quad (8.40)$$

上式中的反对称的部分（等式右方的第二项）对空间积分以后显然可以用体系的磁矩 \mathbf{m} 来表达（参见第 ?? 章中体系磁矩的定义式 (6.68)）。具体来说磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}' [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')], \quad (8.41)$$

其中 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ 表示电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t}$ 的复振幅。所以，如果仅仅考虑反对称部分的贡献，我们可以将矢势写成：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right). \quad (8.42)$$

这个矢势的表达式与电偶极辐射的磁场 \mathbf{H} 的表达式 (8.34) 十分类似。所以这时的磁场应当与电偶极辐射时的电场十分类似。我们得到磁偶极辐射的电场和磁场为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{Z_0}{4\pi} k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right\}, \end{aligned} \quad (8.43)$$

相应的电磁辐射称为磁偶极辐射。我们看到磁偶极辐射的公式与电偶极辐射的公式十分类似，只不过两种辐射的偏振行为是不同的。形式上讲，两种辐射的公式可以通过如下的替换相互转换： $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}/c$ ， $\mathbf{E} \rightarrow Z_0 \mathbf{H}$ ， $Z_0 \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ 。

由于公式上的类似性，磁偶极辐射的辐射功率的角分布与电偶极辐射完全类似：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 k^4}{32\pi^2} |(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n}|^2 = \frac{Z_0 k^4}{32\pi^2} |\mathbf{m}|^2 \sin^2 \theta. \quad (8.44)$$

其中 θ 是 $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 与 \mathbf{m} 之间的夹角。磁偶极辐射的总辐射功率为：

$$P = \frac{Z_0 k^4}{12\pi} |\mathbf{m}|^2. \quad (8.45)$$

33.3 电四极辐射

¶ 下面我们来讨论前面公式 (8.40) 中的对称化的一项，利用分部积分将它化为：

$$\frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}'] = -\frac{i\omega}{2} \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'), \quad (8.46)$$

其中我们还利用了电荷守恒的连续方程： $\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega \rho$ 。

于是，公式 (8.40) 中的对称部分对于磁矢势的贡献为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{x}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'). \quad (8.47)$$

得到了矢势原则上就可以得到任意一点的电磁场，只不过具体的公式有些罗嗦。如果我们仅仅考虑远场区的电磁场，那么得到的公式是比较简单的：

$$\mathbf{B} = ik\mathbf{n} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = ikZ_0(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}/\mu_0. \quad (8.48)$$

满足这些性质的辐射场被称为电四极辐射场，相应的辐射称为电四极辐射。这种名称的原因是上面公式中的电磁场可以用辐射源的电四极矩张量表达成：⁸

$$\mathbf{H} = -\frac{ick^3}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}), \quad (8.49)$$

其中 \mathbf{D} 是辐射源的电四极矩张量，其表达式 (6.58) 为：

$$\mathbf{D}_{ij} = \int d^3 \mathbf{x}' [3\mathbf{x}'_i \mathbf{x}'_j - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') \delta_{ij}] \rho(\mathbf{x}'). \quad (8.50)$$

⁸注意在下列几个公式中，我们用 \mathbf{D} 来表示辐射源的电四极矩张量，应当不至于和电位移矢量混淆。由于 \mathbf{D} 是一个张量，所以 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ 仍然是一个矢量。具体地说，它的分量为： $(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n})_i = \mathbf{D}_{ij} \mathbf{n}_j$ 。

电四极辐射的辐射功率角分布可以写成：

$$\frac{dP}{d\Omega_{\mathbf{n}}} = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1152\pi^2} |[\mathbf{n} \times (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n})] \times \mathbf{n}|^2. \quad (8.51)$$

我们看到电四极辐射的角分布是比较复杂的。要得到总的功率，就必须将上式中的模方展开然后对于角度积分。对于角度的积分需要一些技巧，经过一些运算我们得到：⁹

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1440\pi} \mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^*. \quad (8.52)$$

电四极辐射的特点是它的辐射功率与辐射频率的 6 次方成正比。

对于宏观辐射体系而言，如果仅仅考虑远场区的辐射能流的话，那么电偶极辐射是领头阶的贡献；磁偶极辐射和电四极辐射的强度大致相当，与电偶极辐射比它们的场会被因子 (d/r) 或 (d/λ) 所压低，这个规则与前面讨论的展开式 (8.28) 是一致的。但是，当我们把辐射功率运用到微观的客体（比如原子）时候，这些微观客体的电偶极矩、磁偶极矩和电四极矩的起源是量子的，会呈现出不同于经典的行为。例如某些微观的原子的磁偶极辐射或电四极辐射并不一定就比其电偶极辐射更小。

34 拉摩公式与汤姆孙散射

¶ 现在我们告别宏观谐振源的辐射，再来讨论一个非相对论性的带电粒子的辐射功率及角分布。¹⁰ 带电粒子所辐射的功率只来自于公式 (8.12) 中的第二项（含有加速度的一项）。这时电场可以近似写成：

$$\mathbf{E} = \left[\frac{e}{c} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{ret}}, \quad (8.53)$$

这个辐射场所辐射的功率可以由相应的玻印廷矢量得出：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \Theta. \quad (8.54)$$

其中 Θ 是粒子的加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 与单位矢量 \mathbf{n} 之间的夹角， $d\Omega$ 是 \mathbf{n} 方向的立体角元。将上式对于立体角积分，就可以得到带电粒子辐射的总功率：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (8.55)$$

⁹这个公式中重复的脚标表示对其求和。

¹⁰注意，这里我们不再使用复振幅的表示，所有的物理量都是真实的物理可观测量。

这个简洁的公式被称为拉摩公式，它给出了一个做非相对论性运动的加速带电粒子所辐射的总功率。这个公式可以推广到相对论的情形。为此，我们首先注意到能量在相对论中是一个 4-矢量的零分量，时间也是如此。所以辐射功率实际上是一个洛伦兹不变量。再注意到拉摩公式可以表达为：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^3 c^3} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} ,$$

因此，它的洛伦兹不变的推广显然是：

$$P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^3 c^3} \frac{dp^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 [(\dot{\beta})^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2] , \quad (8.56)$$

这里 p^μ 是带电粒子的 4-能量动量矢量，而 τ 是带电粒子的固有时间。上面公式中三维分量的形式被称为李纳公式，它是李纳 (Alfred-Marie Liénard) 在 1898 年首先得到的。

¶ 作为拉摩公式的一个具体应用，我们下面讨论一个自由电子对电磁波的散射问题。这类散射问题首先由 J.J. Thomson 研究因而被称为汤姆孙散射 (Thomson scattering)。当频率为 ω 的电磁波入射到一个自由电子上的时候，电磁波的电场： $\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 E_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ 会使得自由电子获得加速度： $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_0 (e/m) E_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$ 。按照公式 (8.53) 和 (8.54)，并且对于在一个周期内平均，电子向外辐射的具有偏振 \mathbf{e} 的电磁波的平均功率角分布为：

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2 . \quad (8.57)$$

将上式除以入射的电磁波的能量流，我们就得到了自由电子对于电磁波的分微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2 . \quad (8.58)$$

为了更明确地写出这个表达式，我们选取 \mathbf{k}_0 沿着正 z 方向；散射波的波矢方向的单位矢量为 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ ；与 \mathbf{n} 垂直的两个独立的线偏振方向可以选为：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \theta [\hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \phi] - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta \\ \mathbf{e}_2 &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \phi + \hat{\mathbf{y}} \cos \phi \end{aligned}$$

将两种可能的偏振相加并且对初态的偏振平均，我们就得到非极化的微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} . \quad (8.59)$$

这就是关于汤姆孙散射的非极化微分截面公式，称为汤姆孙公式。将它对于立体角积分就得到了总的散射截面：

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 . \quad (8.60)$$

¶ 上面关于汤姆孙散射的讨论仅仅对于低频的电磁波的散射是正确的。当电磁波的频率增加到一定程度，电磁辐射的量子效应就必须加以考虑了，对电子来说这就是著名的康普顿效应。康普顿在 1923 年发现，硬 X-射线照射到物质后的散射光频率会变得比原先入射光的小。这实际上是由于物质中的电子与入射光子发生了散射（这种散射后来自然地被称为康普顿散射），由于光子的量子性，它的部分能量和动量会传递给电子因而频率变小。康普顿还论证了，必须同时利用狭义相对论的运动学和（光子的）量子化的能量-动量表达式才能够完美地解释康普顿效应。正因为如此，康普顿效应也被视为在量子理论确立过程中起到关键作用的重大实验之一。

35 相对论性加速电荷的辐射

¶ 如果一个加速电荷的速度与光速可以比拟，它的相对论效应就不能忽略了。这时电荷辐射的总功率可以通过将拉摩公式 (8.55) 进行相对论性推广而得到，这就是李纳公式 (8.56)。所以这一节中我们将着重分析相对论性粒子辐射的角分布特性。

我们可以写出玻印廷矢量沿径向单位矢量 \mathbf{n} 的投影：

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})_{\text{ret}} = \frac{e^2}{4\pi c} \left(\frac{1}{R^2} \left| \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right|^2 \right)_{\text{ret}},$$

这个公式所表示的是位于观测点 \mathbf{x} 、在 t 时刻所观测到的辐射能流，这些能量是带电粒子在时刻 $t' = t - R(t')/c$ 所辐射的。一个更为恰当的物理量是带电粒子在一段时间内所辐射的总能量。例如，在 $t' = T_1$ 到 $t' = T_2$ 之间粒子所辐射的能量可以写成：

$$E = \int_{T_1 + R(T_1)/c}^{T_2 + R(T_2)/c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})_{\text{ret}} dt = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} dt'$$

所以我们看到，我们真正感兴趣的物理量是 $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})(dt/dt')$ 。为此，我们定义粒子在单位立体角内的辐射功率：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}). \quad (8.61)$$

将粒子辐射能流的公式代入，我们得到：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5}. \quad (8.62)$$

这个公式是前一节公式 (8.54) 的相对论推广。

¶ 作为一个例子，让我们首先来考察直线加速粒子的辐射角分布。这时 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 沿同一方向，我们将其取为 z 方向。如果观测点位置与 z 轴的夹角用 θ 来表示，那么辐射角分布为：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (8.63)$$

显然, 当 $\beta \sim 0$ 时, 这个公式回到公式 (8.54)。但与非相对论的情况不同的是, 随着粒子速度接近光速, 上式中分母的效应越来越显著。我们可以发现, 使得上面辐射功率达到极大值的角度 θ_{\max} 满足:

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta}. \quad (8.64)$$

显然, 当 $\beta \rightarrow 1$ 时, $\theta_{\max} \rightarrow 0$, 也就是说粒子的辐射会越来越集中于向前的方向。如果将上式对角度积分, 我们就重新得到了总辐射功率的李纳公式 (8.56)。

¶ 另一个经常出现的情况是粒子做圆周运动的情形。这时 β 和 $\dot{\beta}$ 相互垂直。如果我们令 β 沿 z 方向; $\dot{\beta}$ 沿 x 方向, 那么在球坐标为 (θ, ϕ) 的观测方向上的辐射功率为:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (8.65)$$

这个公式虽然看上去比直线加速的情形更为复杂, 但是极端相对论性的粒子辐射仍然具有集中向前辐射的特性。如果将上式对角度积分, 我们仍然得到李纳公式 (8.56)。

¶ 加速带电粒子所辐射的功率对于加速器的设计而言是十分重要的技术信息。加速器是粒子物理学家用来研究微观粒子之间相互作用的重要实验手段。它主要是通过电场中加速带电的粒子 (一般是正负电子、正反质子等), 使得带电粒子的能量不断提高。这些带电粒子流最后以很高的能量进行相互碰撞。从碰撞的产物中, 粒子物理学家能够获取许多关于微观粒子相互作用的重要物理信息。随着技术的发展, 粒子物理实验已经发展到相当的技术水平, 目前世界上的加速器往往需要将电子或者质子加速到接近光速的水平。¹¹ 按照我们这一节的讨论, 随着粒子从外电场中获取能量而被加速, 它也因为辐射电磁波而损失能量。如果一个加速器在设计运行的状态下, 粒子从外电场获得的能量与它辐射的能量大致相当了, 这时粒子就无法继续被加速了。它的能量也就趋于一个饱和值。因此, 了解带电粒子辐射的功率能够帮助我们在加速器建造之前, 事先了解加速器的电磁场设计参数从而是十分重要的。

目前正在运行或准备建造的加速器大致可以分为两类: 直线加速器和环行加速器。按照李纳公式的估计, 一个直线加速器中带电粒子的辐射功率与带电粒子的动量变化率的平方成正比:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2, \quad (8.66)$$

由于电子在所有粒子中具有最大的荷质比, 因此加速电子时辐射的效应最大。实际的加速器的数据显示, 即使对于电子而言, 这个辐射的功率一般远远小于电子从外场中获得的能量。因此, 在直线加速器中, 粒子辐射的影响几乎是完全可以忽略的。因此, 从节约能源的角度讲, 直线加速器无疑是最优的。但是, 直线加速器往往受制于其他一些因素 (总的尺度、地震影响等等)。

¹¹ 例如, 位于欧洲核子中心目前正在运行的所谓大型强子对撞机 (Large Hadron Collider, LHC), 其设计的质心系能量为 14 TeV。这意味着, 在对撞时, 质子的速度已经接近光速到九位有效数字。

环行加速器中的情况就完全不同了。这时，粒子速度的方向频繁变化，但在一个周期中粒子获得的外场能量却不是很大，这时粒子会将大量的能量辐射掉。即使保持这些带电粒子匀速圆周运动，外场也必须提供大量的能量。类似于公式 (8.66)，我们得到的相应结果是：

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2, \quad (8.67)$$

也就是说，对于同样的受力，做圆周运动的粒子比直线运动的粒子所辐射的功率要大一个因子 γ^2 。这个因子对于极端相对论性的粒子来说是相当可观的。

36 切伦可夫辐射

¶ 前面几节中我们简要地讨论了一个加速的带电粒子在真空中的辐射。在这一节中，我们介绍一下高速带电粒子穿过介质时出现的一种特殊的辐射——切伦可夫辐射。

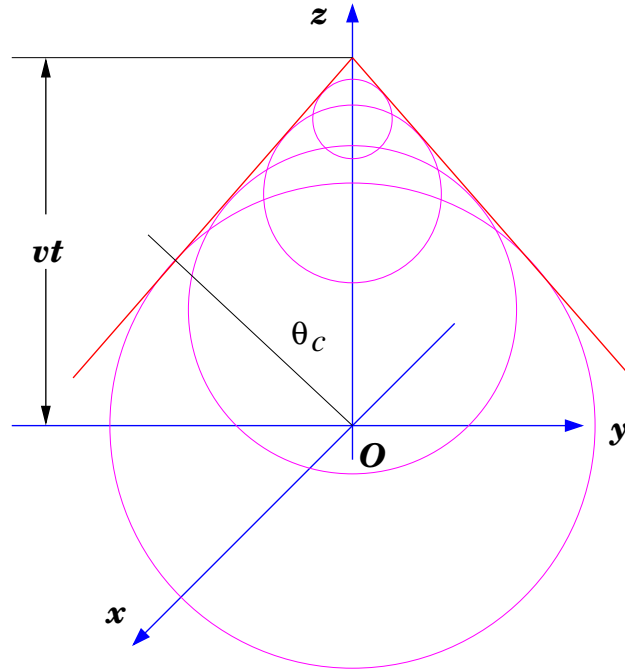


图 8.4: 切伦可夫辐射的示意图。运动粒子的速度沿正 z 方向，并且其速率 $v > c/\sqrt{\epsilon}$ ，这时由两者之比构成了所谓的切伦可夫锥体中顶角的正弦。锥体外的矢势为零，锥体内的矢势可以由公式 (8.74) 给出。

如果一个高速带电粒子不是在真空中，而是在介质之中运动，那么它所产生的标势和矢势所满足的方程是：

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (8.68)$$

我们利用傅立叶变换来求解这个方程。如果我们定义标势 Φ 的傅立叶变换为：

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4} \Phi(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

以及类似的 \mathbf{A} 的傅立叶变换表达式，那么电磁势的傅立叶分量满足：

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon(\omega)} \rho(\mathbf{k}, \omega), \quad \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \right] \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega). \quad (8.69)$$

对于一个在介质中匀速运动的粒子，它的电荷密度与电流密度可以写成：

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}\rho(\mathbf{x}, t).$$

它的傅立叶变换可以直接得到：

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e\mathbf{v}\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (8.70)$$

将此式代入公式 (8.69) 我们立刻得到：

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{8\pi e\beta}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (8.71)$$

于是，我们可以得到介质中一个匀速运动的电荷所产生的空间矢势分布为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 4\pi e\beta \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_3(x_3 - vt)} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{k_3^2(1 - \beta^2\epsilon(k_3v)) + \mathbf{k}_\perp^2}, \quad (8.72)$$

其中为了方便，我们已经假定带电粒子匀速运动的方向为 z 轴的正方向，参见图 8.4。需要注意的是，如果我们的介质的介电常数明显地依赖与频率，那么上式并不能十分简洁的进行化简。但是，如果我们近似地将 ϵ 看成常数，这个积分可以积出来。我们发现，如果粒子的速度极高，高到比这种介质中的光速都大，即： $\beta\sqrt{\epsilon} > 1$ ，那么上式中的被积函数会有奇点。类似于我们前面的讨论，这时我们必须将实轴上的奇点稍稍向下移动（参见图 8.1 处的讨论）。于是，对于空间满足 $x_3 - vt > 0$ 的点，我们可以将对于 k_3 的积分围道从上半平面围合，积分的结果等于零。

以粒子的运动轨迹为轴我们可以构造一个锥体（参见图 8.4），这个锥体的轴正好是粒子运动的方向；锥体的顶点就是粒子所在的位置，而它所辐射的电磁波的波矢方向与粒子运动方向的夹角为：

$$\theta_C = \cos^{-1} \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}, \quad (8.73)$$

由于粒子的速度高于介质中的光速 $c/\sqrt{\epsilon}$ ，因此上式有一个实数解。这个锥体就被称为切伦可夫锥。事实上可以证明，电磁势对于切伦可夫锥外部的所有点都等于零。对于锥体内部，通过具体的计算我们得到：¹²

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{2e\beta}{\sqrt{(x_3 - vt)^2 - (\beta^2\epsilon - 1)\mathbf{x}_\perp^2}}. \quad (8.74)$$

¹²公式 (8.74) 只是切伦可夫辐射的一个近似描述。事实上如果我们用它计算磁场，我们会发现它在切伦可夫锥面上具有 δ -函数的发散。这个发散实际上是由于我们假定 ϵ 是常数造成的。考虑到 ϵ 的频率依赖就可以抹平这个发散。

粒子的这种辐射被称为切伦可夫辐射。切伦可夫辐射是一种典型的激波。事实上，它的行为（例如会形成激波锥体等）相当类似于空气中超声速时产生的激波。切伦可夫辐射在粒子探测器中有着广泛的应用，它多数情形下被用来确定粒子的速度。因为一旦形成切伦可夫辐射，它出射的角度与粒子的速度有着十分简单的关系，是粒子探测器中不错的速度选择装置。

37 辐射阻尼

通过前面几节的讨论我们已经看到，只要带电粒子做变速运动，它就会辐射电磁波。由于电磁辐射的存在，带电粒子会损失能量和动量，尽管它可能同时还从外加电磁场中获得能量和动量。到目前为止，我们并没有考虑带电粒子的辐射对于带电粒子本身运动的影响。也就是说，在讨论一个带电粒子在电磁场中的运动时，我们仅仅考虑了它在外加电磁场中的运动，没有考虑带电粒子的辐射场对带电粒子的影响（自作用）。带电粒子由于自身的辐射对自身运动的影响就被称为辐射阻尼。这一节中，我们就将简要地讨论这个在经典电动力学范畴中实际上不可能完美解决的问题。

首先对辐射阻尼发生的时间尺度做一个半定量的估计是必要的。为此我们考虑一个非相对论性的带电粒子的运动，它对外的辐射功率由第 34 节中的拉摩公式 (8.55) 给出。现在考虑一个特征的时间尺度 τ ，由于带电粒子做加速运动，因此在这个时间尺度内它获得的动能的大小约为： $\Delta E_K \sim m(a\tau)^2$ ，其中 a 为该带电粒子的加速度。同样在这个时间尺度内带电粒子辐射掉的能量就是拉摩功率乘以时间 τ 。因此，如果粒子通过外场获得的动能与它辐射的能量相当，辐射阻尼的效应就必须考虑。因此我们得到：

$$m(a\tau)^2 \sim \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \tau,$$

于是我们发现这个特征的时间尺度为：

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}. \quad (8.75)$$

显然，如果我们考虑的问题的时间尺度 $T \gg \tau$ ，那么带电粒子从外场获得的能量将远大于辐射掉的能量，因此这时我们可以完全忽略掉辐射阻尼的效应。也就是说，只有使得带电粒子加速的外场的特征时间尺度接近或者小于 τ 的时候，我们才需要考虑被加速带电粒子的辐射阻尼效应。

按照上面辐射阻尼特征时间的表达式，我们通常遇到的粒子中电子具有最长的特征时间。如果我们将电子的质量和电荷带入，我们发现电子的特征时间为 $\tau \sim 6.26 \times 10^{-24} \text{s}$ ；与此相应的特征尺度为（即将特征时间乘以光速）： 10^{-13}cm ，这大概就是原子核的尺度（也就是电子的经典半径的尺度）。

上面关于能量的定性分析可以进一步给出辐射阻尼力的表达式。为此我们将带电粒子的运动方程写为：

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rad}}, \quad (8.76)$$

其中 \mathbf{F}_{ext} 和 \mathbf{F}_{rad} 分别是由于外电磁场和辐射阻尼所产生的力。我们要求辐射阻尼力在某个时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内对粒子做的功正好等于粒子辐射出去的能量:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt, \quad (8.77)$$

其中我们运用了辐射功率的拉摩公式 (8.55)。将上式分部积分我们发现可以做如下的选择:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}. \quad (8.78)$$

这就是我们得到的辐射阻尼力的表达式。因此, 考虑到辐射阻尼力的情况下, 一个带电粒子在外场中的运动方程可以表达为:

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (8.79)$$

这个十分古怪的经典运动方程一般被称为亚伯拉罕-洛伦兹方程。方程中明显地包含了粒子的加加速度 $\ddot{\mathbf{v}}$, 而这一点在牛顿力学的框架中是不许可的。一个具体的体现就是, 这个方程一般存在着所谓的发散解 (runaway solutions). 大家可以很容易验证, 即使对于无外力的情形, 方程仍然存在着随着时间指数增加的解, 它们一般被称为发散解。¹³ 当然, 历史上存在着处理掉这些发散解的尝试, 但是这将使得运动方程十分复杂。我们这里采取的方法就是将非物理的发散解直接扔掉, 因为这里整个的讨论仅仅在辐射阻尼是一个小修正的情形下才是有意义的。



相关的阅读

本章对于加速的带电粒子以及宏观谐振系统的电磁辐射给出了一个初步的介绍。

¹³ 这些发散解的引入实际上说明积分形式的方程 (8.77) 与微分形式的方程 (8.78) 并不严格等价。我们中间曾经进行分部积分。可以验明, 对于发散解来说, 分部积分中边界上的项不是可以扔掉的。

第二部

量子物理部分 统计物理与量子力学

参 考 文 献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon Press, 1994.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Pergamon Press, 1994.
- [3] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1980.
- [4] Jorge V. José and Eugene J. Saletan, *Classical Dynamics: a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998.
- [5] C. Truesdell, *Essays in the history of mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1968.
- [6] Arnold V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [7] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, 1994.
- [9] S. Sternberg, *Group theory and physics*, Cambridge University Press, 1994.

总索引

Symbols

$O(3)$ 群 49
 $SO(3)$ 群 49

A

爱因斯坦求和规则 8, 33
安培—麦克斯韦定律 85
安培环路定律 85

B

保守系统 28
被动观点 49
本构方程 *see* 本构关系
本构关系 90
本征频率 56, 139
本征矢量 56
边界节点 115
变分 18
变分法 18, 115
变分学基本引理 19
标量场 23
标量势 24
波包 133
波导 135
 介质波导 135
 金属波导 135
波动方程 (wave equation)
 波速 (wave velocity) 67
 推广的波动方程 67
 一维的波动方程 67
波数
 波导管中电磁波的 136
波阻抗 137

真空的 149, 150
玻恩 (Max Born) 73
玻印廷矢量 95
伯努利解 73
不确定性关系 133
布儒斯特角 127

C

参照系 12
差分 112
场 15
场强张量 24
超导体 92
驰豫时间 131
尺度变换 31
磁场的能量 102
磁场强度矢量 89
磁单极 85
磁导率 91
 真空中的 85
磁导率张量 91
磁感应强度 25, 85
磁化率 91
磁化率张量 91
磁化强度 89
磁矩 89, 119
磁偶极场 119
磁偶极辐射 152
磁偶极辐射场 151
磁偶极矩 89, 119
磁偶极矢势 119
磁偶极子 89
磁学 92

D

- 达朗伯解 68
- 达朗伯原理 8
- 代表点 35
- 单纯剖分 114
- 单纯形 114
- 弹性刚度张量 (elastic stiffness tensor) 76
- 弹性理论 (theory of elasticity) 76
 - 弹性常数 (elastic constants) 76
 - 弹性刚度张量 76
 - 拉格朗日量 (Lagrangian) 76
 - 与晶格谐振理论 73
- 导体组 101
- 德鲁德公式 131
- 等离子体频率 131
- 电场强度 25, 85
- 电磁波
 - 均匀平面电磁波 122
- 电磁场 85
- 电磁现象的动量守恒 95
- 电磁现象的能量守恒 95
- 电磁现象的守恒律 94
- 电感 103
- 电感系数 103
- 电荷密度 85
- 电荷守恒 95
- 电极化率 91
- 电极化率张量 91
- 电极化强度 89
- 电离层 131
- 电量 24
- 电流密度 85
- 电偶极辐射 150
- 电偶极辐射场 150
- 电偶极矩 88, 89, 117
- 电偶极子 89
- 电容 102
- 电容率 91
- 电四极辐射 152
- 电四极辐射场 152
- 电四极矩 117, 152
- 电位移矢量 89
- 动力学对称 44

- 动量守恒 29
- 动能 27
- 度规张量 13
- 对称陀螺 54
- 对易括号 39
- 多个自由粒子的作用量 22
- 多极矩 117
- 多极展开
 - 静磁场的 119

F

- 发散解 160
- 法拉第电磁感应定律 83, 85
- 反常色散 134
- 反射角 124
- 反射系数 71
- 泛函 16
- 菲涅耳公式 127
- 非完整约束 6
- 非线性振动 62
- 非相对极限 26
- 分立对称性 32, 87
- 分析力学 79
- 分子电流密度 89
- 冯·卡门 (Theodore von Karman) 73
- 辐射阻尼 159
- 辐射阻尼力 160
- 傅里叶变换
 - 一维的 71
- 复介电常数 128

G

- 感应系数 102
- 刚体 48
- 刚体的自由度 48
- 高斯定律 85
- 格林函数
 - 一维推迟格林函数 71
- 各种介质的定义 90
- 共轭 20
- 共振吸收 132
- 固有频率 139
- 惯量张量 53
- 惯性 21

- 光速不变原理 12
 光纤 139
 光锥条件 144
 光子质量上限 139
 广义动量 20
 广义力 8, 20
 广义速度 4
 广义坐标 4
 傀标 13
 规范变换 25
 规范不变性 25, 79, 86
 规范对称性 25
 国际单位制 85
- H**
- 哈密顿方程 34
 哈密顿量 34
 电磁场中的 36
 相对论性粒子的 36
 哈密顿密度 68
 一维弦上的横波 68
 哈密顿正则方程 34
 汉克耳变换 108
 横磁波 136
 横磁模式 136
 横电波 136
 横电磁波 136
 横电磁模式 136
 横电模式 136
 胡克定律 (Hooke's Law) 73
 互感系数 103
- J**
- 机械动量 24
 激波 159
 伽利略时空 26
 加速器 156
 简并 59
 简正模 57
 简正坐标 57
 焦点 42
 角动量平方算符 108
 角动量守恒 30, 41
 阶梯函数 71
- 截止频率 138
 节点 114
 解的叠加性 64
 介电常数 91
 真空中的 85
 介电张量 91
 介质边界的边条件 93
 介质波导 139
 金属的紫外透明 131
 近日点 42
 近日点的进动 43
 晶格谐振理论 (lattice dynamics) 73
 偏振 (polarization) 75
 三维动力矩阵 75
 谐振近似 73
 谐振势能的形式 74
 经典电动力学 79
 经典力学 79
 经典振子模型 130
 镜像电荷 105
 静电/静磁边值问题 99
 静电/静磁多极展开 116
 静电多极展开 118
 静电镜像法 104
 静止质量 21
 久期方程 56
- K**
- Kramers-Kronig 关系 90
 开普勒第二定律 41
 开普勒第三定律 31, 43
 开普勒第一定律 43
 开普勒问题 42
 康普顿散射 155
 康普顿效应 155
 抗磁性 92
 可见光 132
 空间反射 32, 87
 空间平移不变性 29
 空间色散 90
 空间转动不变性 30
 库仑定律 82, 85
 扩散方程 112

L

- 拉格朗日量 9, 16
 - 电磁场中带电粒子的 24
 - 一维弦上的横波 66
- 拉格朗日量 (Lagrangian) 76
- 拉格朗日密度 66
 - 一维弦上的横波 66, 68
- 拉梅常数 (Lamé constants) 77
- 拉摩公式 154, 159
- 拉普拉斯-龙格-楞次矢量 44
- 拉普拉斯方程 99
 - 数值解法 111, 116
 - 网格法 112
- 勒让德变换 33, 34
- 离心势能 41
- 李纳-维谢尔势 144
- 李纳公式 154
- 理想导体 92, 100
- 力常数矩阵 (force constants) 74
- 连带勒让德函数 108
- 连续方程 95
- 连续介质 (continuous media) 76
- 连续介质力学 65
 - 弹性理论 (theory of elasticity) 73
 - 一维振动与波 65
- 刘维尔定理 37
- 流强 46
- 卢瑟福散射 47
- 洛伦兹变换 12
- 洛伦兹标量 12
- 洛伦兹不变性 86
- 洛伦兹力 86
- 洛伦兹群 15

M

- 麦克斯韦-拉摩作用量 80
- 麦克斯韦方程 79
 - 介质中的 88
 - 真空中的 85
- 麦克斯韦协强张量 97
- 闵氏时空 12
- 模态矩阵 57

N

- 内部节点 115
- 内积 14
- 能量-动量四矢量 22
- 能量密度 95
- 能量守恒 29
- 能量守恒定律 69
 - 机械能守恒定律 69
- 能流密度 69, 95
 - 一维弦上的横波 69
- 逆变矢量 13
- 逆变四矢量 13
- 逆变指标 13
- 逆磁性 92
- 牛顿 (Isaac Newton) 65
- 牛顿方程 27
- 牛顿力学 79

O

- 欧拉 (Leonhard Euler) 65
- 欧拉-拉格朗日方程 9, 19
- 欧拉定理 32, 49
- 欧拉方程 55
- 欧拉角 50
- 欧姆定律 92
 - 广义的 92

P

- 碰撞参数 45
- 偏心率 42
- 偏振 123
 - 椭圆偏振 123
 - 线偏振 123
 - 右旋圆偏振 123
 - 左旋圆偏振 123
- 平动动能 52
- 泊松比 (Poisson ratio) 77
- 泊松定理 39
- 泊松方程 99
- 泊松方程及其形式解 99
- 泊松括号 38

Q

- 切变模量 (shear modulus) 77

与横波声速 77
 切丛 16
 切伦可夫辐射 157, 159
 切伦可夫锥 158
 球谐函数 108
 加法定理 109
 完备性 109
 正交归一性 109
 球形陀螺 54
 趋肤深度 129
 趋肤效应 129
 全反射角 128
 群 49
 群速度 134, 138

R

任意陀螺 54
 冗余自由度 6
 入射角 124
 入射面 124

S

三维正交群 49
 三维转动群 49
 散射率 46
 色散 92, 122
 非色散介质 122
 色散介质 122
 上标 13
 声速 (sound velocity) 78
 横波 (transverse-) 78
 纵波 (longitudinal-) 78
 时间反演 87
 时间反演变换 32
 时间平移不变性 29
 时空观 12
 矢量场 24
 矢量势 24
 世界线 20, 143
 势能 27
 守恒量 38
 舒曼谐振 139
 束缚电荷 89
 束缚电流密度 89

衰减常数 132
 顺磁性 92
 斯奈尔定律 126
 斯托克斯参数 123
 四动量 22
 四矢量 12
 四矢量势 24
 缩并 13

T

TE 波 136
 TE 模式 136
 TEM 波 136
 TEM 模式 136
 TM 波 136
 TM 模式 136
 汤姆孙公式 154
 汤姆孙散射 154
 特殊三维正交群 49
 特殊三维转动群 49
 体弹性模量 (bulk modulus) 77
 体坐标架 48
 铁磁介质 92
 铁磁体 92
 硬铁磁体 92
 铁磁性 92
 铁电体 92
 透射系数 71
 推迟格林函数 142

W

网格 112
 的边界格点 112
 的格点 112
 的内格点 112
 微分流形 16
 微分散射截面 46
 唯一性定理 103, 104
 维里定理 32
 位型空间 16
 位型流形 16
 位移电流 85

X

吸收系数 132

狭义相对论 12, 79
 下标 13
 线性叠加原理 86
 线性介质 91
 各向同性 91
 线性振动 62
 相对磁导率 91
 相对介电常数 91
 相对性原理 12
 相轨道 35
 相空间 35
 相流形 35
 相速度 122, 124, 138
 协变矢量 13
 协变四矢量 13
 协变指标 13
 谐振腔 135
 虚功原理 7
 虚位移 7
 循环坐标 30

Y

雅可比方法 113
 雅可比恒等式 38
 亚伯拉罕—洛仑兹方程 160
 赝标量 32
 赝矢量 32
 杨氏模量 (Young's modulus) 77
 一维固体的振动 62
 以太 121
 因果性 90
 应变矩阵 (strain tensor) 76
 有限元 114
 有限元方法 114
 有效势能 41
 宇称 32
 宇称变换 32, 87

约化质量 41
 约束 4
 完整约束 4
 约束力 7
 运动积分 38

Z

张量 12
 张量的阶 12
 长波近似 149
 折合质量 41
 折射定律 126
 折射角 124
 折射率 122, 124
 振子强度 130
 正常色散 134
 正焦弦 42
 正则动量 20
 电磁场中的 24
 正则方程 34
 质心系 30, 41
 重参数化变换 21
 重参数化不变性 21
 轴矢量 32, 88
 主动观点 49
 主动力 7
 主轴方向 53
 主轴转动惯量 53
 转动动能 52
 自感系数 103
 自由度数目 4
 总散射截面 46
 组合频率 63
 最小作用量原理 16
 最小作用量原理 (principle of least action)
 76
 作用量 16