作业 3：针对讲稿第三、四、五章的内容

有心力场：

3-1 刘川《理论力学》84-85 页，习题 5（附注：a 问中的折合质量即为约化质量）

中心力场中的圆轨道 考虑两个质量分别为 m_1 和 m_2 的非相对论性的粒子之间有如下的有心势能相互作用：$U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = k|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^\beta$，其中 k，β 是两个同号的实常数（这保证了如果 $\beta > 0$，则 $k > 0$，因此粒子的运动不会跑到无穷远. 如果 $\beta < 0$，则 $k < 0$，U 也是一个吸引的势能）.

(a) 写出两粒子体系的拉氏量 L. 引入质心坐标 $\boldsymbol{R}$ 和相对坐标 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$，说明这个两体问题可以化为一个单体问题. 通过选取质心系，进一步说明这个三维的单体问题可以化为一个折合质量为 m 的，关于径向坐标 $r = |\boldsymbol{x}|$ 的一维动力学问题. 给出 m 与 m_1，m_2 的关系并写出等效的一维问题的有效势能 $V_{\text{eff}}(r)$.

(b) 现在考虑这个问题中局限在有限区域的一个圆轨道 (即 $r(t) = r_0$ 为常数)，参数 k 及 β 如何取值才能使在这样的圆轨道附近的扰动是稳定的?

(c) 考虑圆轨道稳定的情况. 这时如果在该稳定圆轨道附近做一个微扰 $r(t) = r_0 + \eta(t)$，说明 $\eta(t)$ 的运动是一个简谐振动，并给出其振动本征频率.

(d) 当该圆频率与圆轨道的圆频率之比为有理数时，轨道才是闭合的. 在 $k > 0$，$\beta = 15/25$ 和 $k < 0$，$\beta = -2/9$ 这两种情况下，微扰的轨道是否闭合？如果闭合，请大致画出它的行为.

刚体：

3-2 刘川《理论力学》140 页，习题 6

球形陀螺 考虑三个质量相同的 (记为 m) 质点位于一个边长为 a 的等边三角形的三个顶点. 不失一般性，我们认为它们放置在 x-y 平面内，其中心位于原点，并且假定三个质点的坐标取为 $a(\sqrt{3}/3, 0, 0)$，$a(-\sqrt{3}/6, +1/2, 0)$ 和 $a(-\sqrt{3}/6, -1/2, 0)$.

(a) 我们现在将另外一个质量为 M 的质点 (一般来说 $M \neq m$) 放置在 z 轴上坐标为 $(0, 0, z)$ 的位置，这时四个质点构成的体系的质心位于什么位置?

(b) 如果我们将三维坐标的原点平移，取在质心，这个体系相对于质心的转动惯量矩阵是什么样子的?

(c) 我们现在需要将 M 放置在空间的什么位置才能够使得这四个质点构成的系统成为一个球形陀螺?

(d) 假定我们在制备这个球形陀螺的过程中没有测量得很准确，以至于 M 的位置比起上面求出的精确位置 z_0 有个小的偏离 δz_0，这个偏离会使得体系的转动惯量有什么变化?

3-3 刘川《理论力学》140 页，习题 7。（附注：(c) 问中条件“$\ldots\Omega_2, \Omega_2 \ll \Omega_0$”应为“$\ldots\Omega_2, \Omega_3 \ll \Omega_0$”；(d) 问中只需说明为何不稳定，无需给出所谓“Ω 偏离该主轴的速率”）

自由刚体的运动 考虑自由非对称陀螺的运动，它的三个主轴惯量 $I_1 < I_2 < I_3$，相应的欧拉方程为 (5.51) 式或更具体来说是 (5.55) 式. 本题中我们将考虑刚体的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 分别非常接近于第一、第二和第三个主轴时的运动.

(a) 首先考虑角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 大体上沿着第三个主轴. 这时可以假定 $\Omega_3 \approx \Omega_0$，$|\Omega_3 - \Omega_0|, \Omega_1, \Omega_2 \ll \Omega_0$. 利用这个近似，将上述欧拉方程中关于 Ω_1 和 Ω_2 的方程给出来，可以仅保留到 Ω_1 和 Ω_2 的一阶.

(b) 利用上问得到的方程，给出 Ω_1 和 Ω_2 的运动. 说明它们的运动是小振动并给出振动的圆频率.

(c) 现在考虑 $\boldsymbol{\Omega}$ 沿着第一个主轴的情形，说明运动也是稳定的. 这时可以假定 $\Omega_1 \approx \Omega_0$，$|\Omega_1 - \Omega_0|, \Omega_2, \Omega_2 \ll \Omega_0$. 说明这时候 Ω_2 和 Ω_3 的运动也是小振动并给出振动的圆频率.

(d) 如果小的偏离是靠近第二个主轴，说明运动是不稳定的，并给出 $\boldsymbol{\Omega}$ 偏离该轴的速率.

3-4 不受力的环境中，一个匀质薄圆盘绕其质心旋转，开始时瞬时转轴与盘面法线夹角为 α，转动角速度为 ω_0。求进动角速度 $\dot{\phi}$ 及进动轴与盘面法线的夹角 θ。

（多自由度）小振动：

3-5 刘川《理论力学》107 页习题 2.

悬挂点可运动的复摆 如图 4.2 所示. 在均匀向下 (即沿负的 y 轴方向) 的重力场中，一个质量为 m 长度为 l 的均匀杆 AB 悬挂于点 A. 悬挂点 A 可以沿曲线 $y = (\alpha/2l)x^2$ 自由、无摩擦地运动，其中 $\alpha > 0$ 为一无量纲的正常数. 杆在重力影响下可以绕 A 点在 x-y 平面内摆动. 已知杆绕其质心 C (位于 AB 的中点) 的转动惯量为 $I = (1/12)ml^2$. 现在选悬挂点 A 的横坐标 x 以及杆相对于垂直方向的角度 ϕ 为系统的广义坐标.

(a) 写出体系的动能和势能并给出它的拉格朗日量表达式，并说明 $x = \phi = 0$ 是体系的一个平衡位置 (即是势能函数的极小值).

(b) 给出与 x 和 ϕ 共轭的正则动量 p_x 和 p_ϕ 的表达式并给出体系的运动方程 (不必明确地将时间导数算出来，将运动方程表达成 $\dot{p}_x = \cdots$ 和 $\dot{p}_\phi = \cdots$ 的形式即可).

(c) 考虑体系在其平衡位置 $x = \phi = 0$ 附近的小振动. 给出这时的体系的近似拉格朗日量和运动方程.

(d) 确定体系小振动的本征频率.

(e) 现在假定 $\alpha=5/2$，试确定体系的相应本征矢量并写出小振动体系的通解.

(f) 如果初始条件为 $x(0)=\dot{x}(0)=\dot{\phi}(0)=0$，$\phi(0)=\phi_0$，给出相应的解随时间的变化规律.

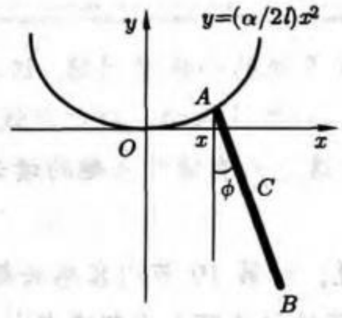

图 4.2　一个长度为 l 的杆 AB 处在均匀向下的重力场中. 悬挂点 A 可以沿曲线 $y=(1/2)kx^2$ 自由无摩擦地运动，杆则可以在 x-y 平面内摆动.

3-6 刘川《理论力学》108 页习题 3.

一维双振子 考虑如图 4.3 所示的一维双振子，质量分别为 m_1，m_2 的两个质点由 3 个弹簧（弹性系数分别为 k_1，k_2 和 k_3）相隔，并做一维振动. 为了方便，我们取最左边的弹簧和质点的弹性系数和质量为单位：$m_1=m$，$k_1=k$. 假定在此单位中，另外的参数为 $m_2=4m$，$k_2=4k$，$k_3=28k$. 对这个小振动系统求解下列问题.

(a) 记两个质点偏离其平衡位置的位移为 x_1 和 x_2，以此为广义坐标，写出系统的拉格朗日量；

(b) 给出体系的运动方程；

(c) 对于这个小振动系统，给出其特征频率；

(d) 对每一个特征频率，求出相应的特征矢量并给出模态矩阵；

(e) 对于特定的初始条件，给出问题的最终解.

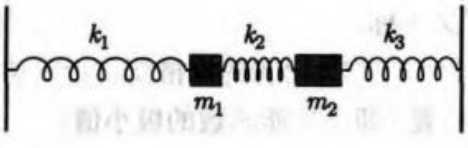

图 4.3　两个质点三个弹簧的系统的一维振动问题.

3-7 刘川《理论力学》108 页习题 5.

一维原子链的不同边条件 在例题 4.3 中我们讨论了加上周期边条件的一维原子链的谐振解. 它体现为一个一维的行波解. 现在尝试加上不同的边条件，例如加上固定的狄利克雷边条件 $x_1 = x_N = 0$，同时链内有一个固定的弦张力 T，再次给出其驻波解以及相应的本征频率.

附注：此处例题 4.3 对应于《讲义》61 页例题 3.3.