第五章 小振动

5.1 多自由度系统的振动

本节我们考虑多自由度（自由度取作 n ）保守体系在稳定平衡位置附近的小振动，相应约束取作定常。

5.1.1 拉氏量及运动方程

- 拉氏量的一般形式为（求和约定）

$$L=\frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j-V(q)$$

在稳定平衡位形 $\{q_{i0}\}$ 附近运动，我们可以重新取广义坐标 $x_i=q_i-q_{i0}$，并在展开下作近似

$$V(q)\approx V(q_0)+\frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j\,,\qquad k_{ij}=\partial_i\partial_jV(q_0)=k_{ji}\tag{2.1}$$

$$a_{ij}(q)\approx a_{ij}(q_0)=m_{ij}=m_{ji}\tag{2.2}$$

进一步，我们可以选取稳定平衡位形的势能取值为零，则近似有

$$L=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j-\frac{1}{2}k_{ij}x_ix_j\tag{2.3}$$

其中，动能项和势能项分别是关于广义速度和广义坐标的正定二次型。

- 矩阵形式：引入实对称矩阵 $m,k\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其矩阵元分别为 m_{ij} 和 k_{ij} 。则拉氏量形式上可以改写为

$$L=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^Tm\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^Tk\boldsymbol{x}\tag{2.4}$$

其中列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$

- 运动方程的形式：由 (2.3) 式，

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\frac{1}{2}m_{kj}\delta_{ki}\dot{x}_j+\frac{1}{2}m_{kj}\dot{x}_k\delta_{ji}=m_{ij}\dot{x}_j$$

类似的

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-k_{ij}x_j$$

则运动方程为

$$m_{ij}\ddot{x}_j+k_{ij}x_j=0\,,\qquad m\ddot{\boldsymbol{x}}+k\boldsymbol{x}=0\tag{2.5}$$

5.1.2 简正模式、通解和简正坐标

- 取同频简谐试探解（其合理性将会在后面的内容中加以验证）

$$x_j=\eta_je^{-\mathrm{i}\omega t}\tag{2.6}$$

代入方程 (2.5)，

$$(k-\omega^2m)\boldsymbol{\eta}=0\tag{2.7}$$

其中列向量 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)^T$ 非零，如此要求

$$\det[k-\omega^2m]=0\tag{2.8}$$

- 式 (2.8) 是 ω^2 满足的 n 次方程，被称为<u>特征方程</u>或<u>久期方程</u>，它存在 n 个根

$\omega_i^2\ (i=1,2,\dots,n)$ 。

可以证明这些根均为正的实根。物理上这一点好理解，因为如果 ω_i 存在虚部，则特解 (2.6) 式将包含指数减小或指数增长因子，导致能量不守恒，但这是不可能出现的。"根为正"的数学论证如下：

由 (2.7) 式，

$$\boldsymbol{\eta}^{*\boldsymbol{T}}(k-\omega^2 m)\boldsymbol{\eta}=0$$

由此得

$$\omega^2=\frac{k_{ij}\eta_i^*\eta_j}{m_{ij}\eta_i^*\eta_j}$$

其中，分子、分母均为实数，例如，

$$\left(k_{ij}\eta_i^*\eta_j\right)^*=k_{ij}\eta_i\eta_j^*=k_{ij}\eta_i^*\eta_j$$

此外，因为 k 与 m （实）正定，故 $\omega^2>0$.

附注：可以设 $\eta_j=a_j+\mathrm{i}b_j$ ，其中 $a_j,b_j\in\mathbb{R}$ ，则（求和约定）

$$k_{ij}\eta_i^*\eta_j=k_{ij}(a_i-\mathrm{i}b_i)\left(a_j+\mathrm{i}b_j\right)=k_{ij}a_ia_j+k_{ij}b_ib_j>0$$

- 考虑**非简并**的情形，即方程 (2.8) 存在 n 个互不相同的正实根，相应频率 ω_i 被称为<u>本征频率</u>。每一个本征频率 ω_i ，对应的本征矢量 $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$ 满足

$$(k-\omega_i^2 m)\boldsymbol{\eta}^{(i)}=0 \tag{2.9}$$

且具有如下性质：

1) $\boldsymbol{\eta}^{(i)*T}m\boldsymbol{\eta}^{(j)}=m_i\delta^{ij}$ (2.10)
2) $\boldsymbol{\eta}^{(i)*T}k\boldsymbol{\eta}^{(j)}=m_i\omega_i^2\delta^{ij}$ (2.11)

其中，$m_i>0\ ,i=1,2,\dots,n$.

证明：由 (2.9) 式得

$$\boldsymbol{\eta}^{(i)*T}(k-\omega_i^2 m)=0 \tag{2.12}$$

再由 (2.9)、(2.12) 得

$$\boldsymbol{\eta}^{(i)*T}(k-\omega_i^2 m)\boldsymbol{\eta}^{(j)}=0 \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\eta}^{(i)*T}\left(k-\omega_j^2 m\right)\boldsymbol{\eta}^{(j)}=0$$

若 $i\neq j$ ，则将上两式两边做差得

$$\left(\omega_j^2-\omega_i^2\right)\boldsymbol{\eta}^{(i)*T}m\boldsymbol{\eta}^{(j)}=0,\qquad i\neq j$$

故有 (2.10) 式的成立，且有 $m_i>0$（因为矩阵 m 正定）。进一步将 (2.10) 代入 (2.13) ，便可得到 (2.11) 。

- 通解：

非简并情形，因为有 (2.10) 式，故属于不同本征值的本征矢量之间线性无关，并在 (2.10) 式的意义下相互正交。此外，因 (2.9) 式为齐次方程，故本征矢量解 $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$ 可以相差任意的乘积因子，因此，方程 (2.5) 的通解为（矩阵形式，求和约定）

$$\boldsymbol{x}=\sum_i A_i\widetilde{\boldsymbol{\eta}}^{(i)}e^{-\mathrm{i}\omega_i t-\mathrm{i}\varphi_i} \tag{2.14}$$

其中 A_i 、φ_i 是 $2n$ 个积分常量，而实向量 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(i)}$ 满足归一化条件

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(i)T} m \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(j)} = \delta^{ij}$$

- 简正模式及简正坐标：

方程 (2.10)、(2.11) 告诉我们：实对称矩阵 m 和 k 是可以同时被对角化的。考虑到 (2.15) 式，我们可以取所谓的模态矩阵

$$A = \left\{\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(2)}, \dots, \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(n)}\right\} \tag{2.15}$$

即 A 的第 i 列构成列向量 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(i)}$. 如此则有，

$$A^T m A = \mathbb{1}, \qquad A^T k A = \mathrm{Diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2\} \tag{2.16}$$

- 作坐标变换

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{Q} \tag{2.17}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为新的广义坐标 Q_i 组成的列向量。在新的广义坐标下，(2.3) 式中的拉氏量变换为

$$L = \sum\nolimits_i \frac{1}{2}\dot{Q}_i\dot{Q}_i - \sum\nolimits_i \frac{1}{2}\omega_i^2 Q_i Q_i \tag{2.18}$$

运动方程为

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{2.19}$$

如此，则属于不同特征频率的振动完全变成相互独立的一个自由度的振动。

- 一定的初值条件下，单一特征频率 ω_i 对应的振动被称为（第 i 个）<u>简正模式</u>，相应的频率被称为（第 i 个）简正频率，其运动学方程如 (2.6) 式。若以广义坐标 Q_i 来表示，则是 (2.19) 的特解

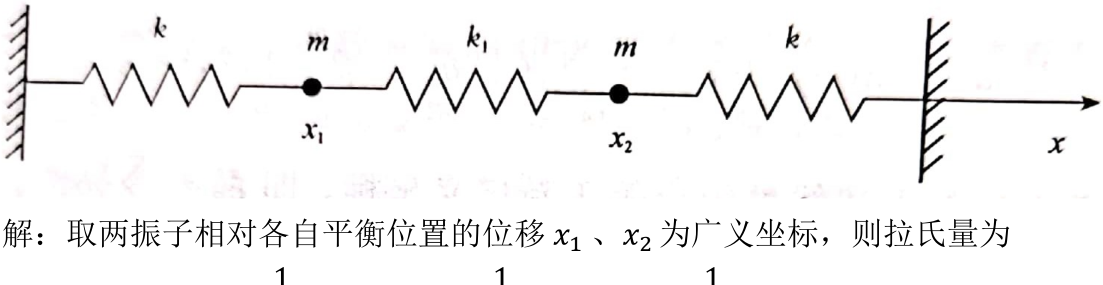
$$Q_j = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)\,\delta_{ij}$$

相应的广义坐标 Q_i 被称为<u>简正坐标</u>。显然，简正坐标可以由 (2.17) 的逆变换得到：

$$\boldsymbol{Q} = A^{-1}\boldsymbol{x} = A^T m \boldsymbol{x} \tag{2.20}$$

- 对于简并情形，仍可以证明：存在非退化的模态矩阵 A ，可以按 (2.16) 式的形式，同时对角化 m 和 k 。（参见讲义 56-57 页内容）

☞ 例 1. 悬珠链如下图，两个振子的质量均为 m ，单个弹簧的弹性系数依次为 k 、k_1 和 k ，装置两端固定。两振子处于平衡位置时，诸弹簧也处于原长。求解此系统在连线方向的运动。（弹簧均处于弹性限度之内）



解：取两振子相对各自平衡位置的位移 x_1 、x_2 为广义坐标，则拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k_1(x_2 - x_1)^2$$

运动方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k_1)x_1 - k_1 x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k + k_1)x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

相应质量矩阵和弹性系数矩阵，可取为

$$m = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad k = \begin{pmatrix} k + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 \end{pmatrix}$$

取模式特解 $x_{1,2} = \eta_{1,2} e^{-\mathrm{i}\omega t}$，则有

$$\begin{cases} (k + k_1 - m\omega^2)\eta_1 - k_1\eta_2 = 0 \\ -k_1\eta_1 + (k + k_1 - m\omega^2)\eta_2 = 0 \end{cases} \qquad ①$$

则得关于特征频率的久期方程

$$\begin{vmatrix} k + k_1 - m\omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k + k_1 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_1}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases} \qquad ②$$

代入 ① 式，得本征向量

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(1)} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(2)} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中由归一化条件 (2.15) 式，可确定

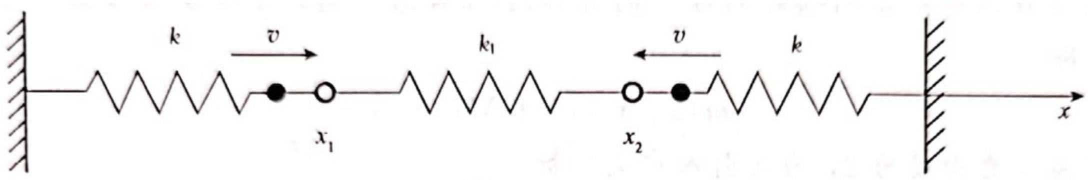
$$a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

相应模态矩阵和广义坐标分别为

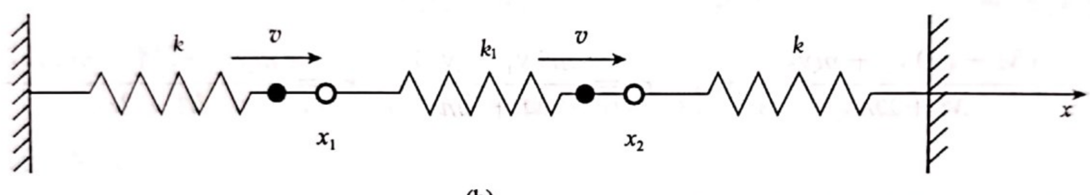
$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \qquad ④$$

② 中两个特征频率对应的两种振动模式分别如下图（a）和（b）所示。



(a)



(b)

➢ 初值问题：

回到 n 自由度系统的振动问题，如果知道初值

$$\boldsymbol{x_0} = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))^T$$
$$\boldsymbol{v_0} = (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dots, \dot{x}_n(0))^T$$

如何确定 (2.14) 式中的 A_i 和 φ_i？

为方便起见，我们改写 (2.14) 式为

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_i \widetilde{\boldsymbol{\eta}}^{(i)}(C_i \cos\omega_i t + D_i \sin\omega_i t) \qquad (2.21)$$

代入初值条件得

$$\boldsymbol{x_0} = A\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{v_0} = AW\boldsymbol{D}$$

其中 $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$，$\boldsymbol{D} = (D_1, D_2, \dots, D_n)^T$，以及对角矩阵 $W = \mathrm{Diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$。如此则可确定

$$\boldsymbol{C} = A^T m \boldsymbol{x_0}, \qquad \boldsymbol{D} = W^{-1} A^T m \boldsymbol{v_0} \qquad (2.22)$$

代入 (2.21) 便求解了初值问题。

☞ 如例 1 中取$x_1(0) = -x_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$，则

$$\boldsymbol{C} = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ -x_1(0) \end{pmatrix} = \sqrt{2m}\,x_1(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2m}\,x_1(0)\cos\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)\cos\omega_1 t \\ -x_1(0)\cos\omega_1 t \end{pmatrix}$$

即，在这样得初值下，仅激发了第一个振动模式。

☞ 讲义上 61 页例题 3.3 “一维固体的振动”。参量：原子数 N、原子质量 m、相邻原子耦合的有效弹性系数 k。此外，可以设想平衡时原子间距 a 也恰好为等效弹簧的原长。

取周期性边条件：$x_{N+n} = x_n$，体系的拉氏量为

$$L = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m\dot{x}_n^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} k(x_n - x_{n-1})^2 \qquad (2.23)$$

相应运动方程为

$$\ddot{x}_n = \omega_0^2(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) \qquad (2.24)$$

其中 $\omega_0^2 = k/m$.

取试探解

$$x_n(t) = Ae^{-i\omega t + ipn} \qquad (2.25)$$

其中 A 与 p 是不依赖于位置 n 的待定常量，ω 为模式频率。接下来我们将会看到，(2.25) 式中的解可以通过“试探”检验，并且由此可以给出 N 个模式频率。

首先，由周期性边界条件得

$$e^{ipN} = 1$$

由此得 N 个 p 的允许值

$$p_l = \frac{2\pi}{N} l, \qquad l = 1,2, \dots, N \qquad (2.26)$$

再将 (2.25) 式带入运动方程，可得 N 个模式频率

$$\omega_l = 2\omega_0 \left|\sin\frac{p_l}{2}\right| = 2\omega_0 \left|\sin\frac{l\pi}{N}\right| \qquad (2.27)$$

如上模式频率存在二重简并。

为了体现对称性，也可以取 $l \in \left(\left[\frac{-N}{2}\right]+1, \left[\frac{N}{2}\right]\right)$，其中 [...] 为不大于“...”的最大整数。例如，$N = 6$ 时，可取

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, 3$$

相应模式频率

$$\omega_{(0)} = 0, \qquad \omega_{\pm 1} = \omega_0, \qquad \omega_{\pm 2} = \sqrt{3}\omega_0, \qquad \omega_3 = 2\omega_0$$

即为书上例题 4.2 所确定的几种模式频率。

- 连续极限：取 $a \to 0$ 并固定

$$\frac{m}{a} \to \eta, \qquad ka \to \kappa$$

则连续极限下的拉氏量为

$$L = \int \left[\frac{1}{2}\eta(\partial_t x)^2 - \frac{1}{2}\kappa(\partial_z x)^2\right] dz$$

其中 $x(z,t)$ 为（连续）振动量，z 为振动量分布的一维坐标。相应运动方程

$$\partial_t^2 x - u^2 \partial_z^2 x = 0 \qquad (2.28)$$

其中 $u = \sqrt{\kappa/\eta}$.

- 形如 (2.28) 式的方程为波动方程，其简谐波特解为

$$x(z,t) = Ae^{-i\omega t + ik_z z} \qquad (2.29)$$

代入运动方程得

$$\omega = u|k_z| \qquad (2.30)$$

- 对于波动而言，$|k_z|$ 被称为波数，而 $\lambda = \frac{2\pi}{|k_z|}$ 为波长。从 (2.30) 中可以读出，u 为简谐波得波速。
- 与之前讨论得分立情形对照

$$u \to \omega_0 a, \qquad k_z \xrightarrow{z=na} \frac{p}{a}$$

而 (2.30) 式便是 (2.27) 式在 $l \ll N$ （$p \ll 1$）下的极限表达式。

5.2 非谐效应与微扰论

- 前面讨论的微振动理论，建立在势能和动能分别用坐标和速度展开至二阶项的基础上，如 (2.3) 式所示。如此对应的振动为简谐振动，或者称为线性振动。如果考虑更高阶的修正，则振动方程非线性（对应于非简谐振动或非线性振动），相应会出现某些次要的，但定性来看完全不同的性质。
- 考虑微振动的拉氏量展开至三阶项，则（求和规则）

$$L = \frac{1}{2}\left(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j\right) + \frac{1}{2}n_{ijk}\dot{x}_i\dot{x}_j x_k - \frac{1}{3}l_{ijk}x_i x_j x_k \qquad (3.1)$$

两个三阶非谐项分别对应于动能项系数的展开和势能项的展开。

- 如果用线性近似下的简正坐标 Q_i 来描述，注意到 $x \to Q$ 的线性变换并不改变非谐求和项的形式，则（求和规则）

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_i\dot{Q}_i - \omega_i^2 Q_i Q_i\right) + \frac{1}{2}\lambda_{ijk}\dot{Q}_i\dot{Q}_j Q_k - \frac{1}{3}\mu_{ijk}Q_i Q_j Q_k \tag{3.2}$$

对应的运动方程为

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = f_i\left(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}\right) \tag{3.3}$$

其中 f_i 为 Q 及其时间导数的二次齐次函数。

➢ 限于微振动，我们可以称 (3.1) 或 (3.3) 中的非谐项为微扰项，进一步谋求 (3.3) 式的如下形式解（称为微扰展开解）：

$$Q_i = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} \tag{3.4}$$

其中 $Q_i^{(2)} \ll Q_i^{(1)}$，而一阶函数 $Q_i^{(1)}$ 满足“无扰”方程

$$\ddot{Q}_i^{(1)} + \omega_i^2 Q_i^{(1)} = 0$$

即为通常的简谐振动

$$Q_i^{(1)} = A_i\cos(\omega_i t + \phi_i) \tag{3.5}$$

其中 A_i 为展开意义下的“小量”。

- 准确到 A^2 阶，二阶函数 $Q_i^{(2)}$ 满足

$$\ddot{Q}_i^{(2)} + \omega_i^2 Q_i^{(2)} = f_i\left(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}\right) \tag{3.6}$$

因为 f_i 为二次齐次函数，故由三角函数等式知， (3.6) 式右边的振动函数会出现各种组合频率

$$\omega_j \pm \omega_k$$

相应二阶近似中，除了频率对应于简正频率 ω_i 的振动外，还叠加了带有组合频率（含倍频 $2\omega_i$ 和零频）的其他振动，这是一种典型的非谐效应。

- 如果考虑 A^3 阶以上的修正，组合频率中会出现与原频率相同的频率 $\omega_i = \omega_i + \omega_j - \omega_j$，应用上述方法时，方程右边会出现共振项，导致解中出现振幅随时间线性增长的项，这显然和我们试图用“微扰论”的办法逐阶求解的想法不符。

  物理上，微振动系统不可能出现自发的共振。如上“假象”出现的原因是之前并未考虑对基频的修正，而展开式

$$\cos(\omega_i + \Delta\omega_i)t \approx \cos(\omega_i t) - t\Delta\omega_i\sin(\omega_i t)$$

在 t 足够大时，并不合理。

  如此，微扰论求解的方式要加以改进，即要加入频率的修正项，并要求各阶运动方程中不出现共振，从而可以确定频率的各阶修正。

☞ 例：考虑一个自由度的微振动体系，准确到四阶的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 - m\omega_0^2 x^2\right) - \frac{1}{3}m\alpha x^3 - \frac{1}{4}m\beta x^4$$

如此给出准确到三阶的运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=-\alpha x^2-\beta x^3$$

级数解形式为

$$\begin{cases} x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)} \\ x^{(1)}=A\cos\omega t\ , \qquad \omega=\omega_0+\omega^{(1)}+\omega^{(2)} \end{cases}$$

为了方便逐阶求解，我们改写运动方程为

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2 x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}$$

其中方程右边的因子

$$1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=2\frac{\omega^{(1)}}{\omega_0}-3\frac{{\omega^{(1)}}^2}{\omega_0^2}+2\frac{\omega^{(2)}}{\omega_0}+\cdots$$

准确到一阶

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(1)}+\omega_0^2 x^{(1)}=0$$

准确到二阶

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2 x^{(2)}=-\frac{1}{2}\alpha A^2(1+\cos 2\omega t)+2\omega^{(1)}\omega_0 A\cos\omega t$$

无共振要求 $\omega^{(1)}=0$，进一步得到二阶项

$$x^{(2)}=-\frac{\alpha A^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha A^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t$$

准确到三阶

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2 x^{(3)}&=-\alpha x^{(1)}x^{(2)}-\beta {x^{(1)}}^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}^{(1)} \\ &=-\left(\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}+\frac{\beta}{4}\right)A^3\cos 3\omega t+\left(2\omega^{(2)}\omega_0+\frac{5\alpha^2A^2}{6\omega_0^2}-\frac{3\beta A^2}{4}\right)A\cos\omega t\end{aligned}$$

无共振要求

$$\omega^{(2)}=\frac{3\beta A^2}{8\omega_0}-\frac{5\alpha^2A^2}{12\omega_0^3}$$

进一步解得三阶项

$$x^{(3)}=\frac{A^3}{8\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}+\frac{\beta}{4}\right)\cos 3\omega t$$