

第5次作业：针对电动力学讲稿 2.4-2.6 小节及第三章的内容

题目 1：真空中，半径为 a 的导体球壳被对等地切成两半，彼此相互绝缘，电势分别为 $\pm U_0$ 。如下考查球外电势 $U(r, \theta)$ 。

- (a) 写出该问题球外的 Dirichlet 格林函数 $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，并给出球外电势的积分形式解。
(b) (接上问) 若 $r \gg a$ ，对如上积分做展开(可以先对被积函数做展开)，证明电势展开的(非零)领头阶为偶极场，并确定该偶极场的电偶极矩。

附注：对于 (b) 小问，原则上采用分离变量法更简单些，但这里要求对格林函数法的积分式加以展开。此外，两种方法可以互相印证。

题目 2：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 3.26

习题 3.26 一个半径为 R 的球，球心位于原点，载有电荷密度

$$\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta$$

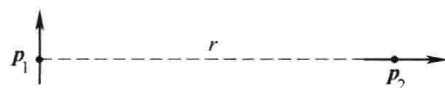
式中， k 是一个常数； r, θ 是通常的球坐标。求出远离球且位于 z 轴上的点的近似电势。

题目 3：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 4.29

习题 4.29

(a) 对于习题 4.5 中的构型，计算 \mathbf{p}_1 作用在 \mathbf{p}_2 上的力和 \mathbf{p}_2 作用在 \mathbf{p}_1 上的力。结果与牛顿第三定律一致吗？

(b) 求作用在 \mathbf{p}_2 上关于 \mathbf{p}_1 的中心的总力矩。并与作用在 \mathbf{p}_1 上关于相同点的总力矩相比较。[提示：将从 (a) 得到的答案与习题 4.5 结合起来计算。]



题目 4：格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 5.42

习题 5.42 对一个半径为 R ，面电荷密度为 σ ，以角速度 ω 自转的带电球壳(例题 5.11)，计算南北半球之间的相互吸引磁力。[答案： $(\pi/4) \mu_0 \sigma^2 \omega^2 R^4$ 。]

提示：你可以直接类比于讲稿中例题 3-5 的情形，写出本题中的磁场分布；此外，本题中计算安培力的面上场强平均值定理仍然是成立的。

题目 5: 格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 5.57

习题 5.57

(a) 证明, 一个半径为 R 的球, 由球内稳恒电流产生的磁场对球的平均值为

$$\mathbf{B}_{\text{平均}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{R^3} \quad (5.89)$$

式中, \mathbf{m} 为球的总磁偶极矩。与静电学的结果式(3.105)相比较。[这有点难, 因此我将给你们一个开端:

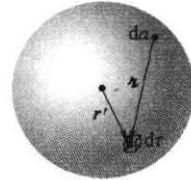
$$\mathbf{B}_{\text{平均}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int \mathbf{B} d\tau$$

用 $\nabla \times \mathbf{A}$ 来表示 \mathbf{B} 并应用习题 1.60(b)。现在代入式(5.63), 首先进行表面积分:

$$\int \frac{1}{r'} d\mathbf{a} = \frac{4}{3}\pi \mathbf{r}'$$

(见图 5.65), 如果你喜欢, 可以用式(5.91)。

(b) 证明由球外部稳恒电流产生的平均磁场与它们在球心处产生的磁场是一样的。



$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\tau \quad (5.91)$$

提示: 也可以直接利用讲稿上的(2.1.8)式加以证明。

题目 6: 格里菲斯《电动力学导论（第三版）》习题 6.23

习题 6.23 注意下述公式的相似处:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = 0, & \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P} & (\text{无自由电荷}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{H} = 0, & \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M} & (\text{无自由电流}) \end{cases}$$

这样, 替代 $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{P} \rightarrow \mu_0 \mathbf{M}$, $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ 将一个静电学问题转化为一个相似的静磁学问题。利用这相似性和静电学结果, 重新导出

- (a) 一个均匀磁化球内部的磁场(式(6.16));
- (b) 在一个均匀外磁场中线性磁化球内部的磁场(习题 6.18);
- (c) 由球内部的稳恒电流产生的球上的平均磁场(式(5.89))。