作业 2：涉及讲稿 1.6 至 1.9 节及第二章内容

相对论性粒子及其与外场的耦合：

1. 验证讲稿中 (7.6) 式与 (7.3) 式等价.

2. 验证讲稿中 (7.17) 式与 (7.10) 式等价.（提示：先验证 $F^{i0}=\frac{E^i}{c}, F^{ij}=-\sum_k \epsilon^{ijk}B^k \quad (i,j,k=1,2,3)$）

3. 由变分原理验证讲稿中 (7.19) 式.

4. 刘川《理论力学》书上 48 页习题 10.（题目采用的是取 $c=1$ 的 Gauss 单位制）

斯托末问题[12] 考虑带电粒子与一个恒定的、位于原点的磁偶极子相互作用的经典力学问题（这个问题可以看成地球周围带电粒子受地磁场影响的一个不错的模型）．已知一个（非相对论性的）带电粒子在静磁场中的拉格朗日量为 $L=(1/2)mv^2+e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为磁偶极子（磁矩为 $\boldsymbol{M}$）的磁矢势：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}/r^3$. 为方便起见，选取柱坐标 (ρ,ϕ,z)，将磁偶极子放在原点并且将其磁偶极矩沿 z 轴（从而 $\boldsymbol{M}=M\hat{\boldsymbol{z}}$，$M$ 为其大小）．

(a) 选取柱坐标 (ρ,ϕ,z)，写出粒子的拉格朗日量 $L(\rho,\phi,z;\dot{\rho},\dot{\phi},\dot{z})$（请先在柱坐标中写出矢势 $\boldsymbol{A}$）．

(b) 上问写出的拉格朗日量应当不显含 ϕ，从而与之对应的共轭动量 p_ϕ 是守恒量. 另外，由于磁场不做功，粒子的动能 $E=(1/2)mv^2$ 也是守恒量. 给出 p_ϕ 和 E 的表达式，用各个广义坐标和广义速度表达.

(c) 写出粒子的运动方程（坐标 ρ 和 z 的）. 假设粒子的初始条件满足 $z=\dot{z}=0$，根据你写出的运动方程说明在此初始条件下，粒子的坐标将永远保持在 $z=0$ 的平面内. 这时的运动被称为斯托末问题的“赤道极限”．

(d) 仅考虑斯托末问题的赤道极限. 利用前面的结果，给出粒子的径向坐标 ρ 的方程，说明它可以由一个等效的一维粒子拉氏量 $L_{\text{eff}}=(1/2)m\dot{\rho}^2-V_{\text{eff}}(\rho)$ 给出，进而写出等效势能 $V_{\text{eff}}(\rho)$ 的表达式.

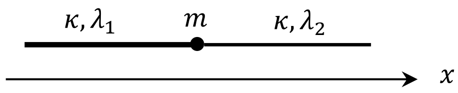
(e) 根据你得到的 $V_{\text{eff}}(\rho)$ 表达式，定性讨论在不同的参数情况下 (但仍然保持赤道极限) 粒子的坐标 $\rho(t)$ 的运动情况.

---

[12] Fredrik Carl Mülertz Störmer (1874—1957)，著名的挪威数学家和天体物理学家. 他由于受极光的吸引，开始研究带电粒子在地球偶极磁场中的运动问题.

弦波的反射与透射：

5. 如右图，两根半无限长弦线质量线密度分别为 λ_1 和 λ_2，张力系数同为 κ，由质量为 m 的小球连接，小球所在位置为 x 轴的坐标原点。现考虑从 $x \to -\infty$ 入射的简谐波的反射和透射行为，其波场设为



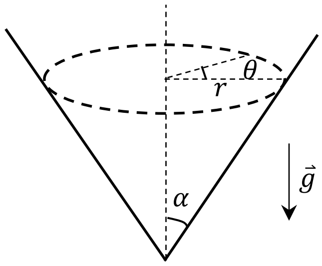
$$q(x,t) = \begin{cases} \tilde{A}_I \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x - \omega t)} + \tilde{A}_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1 x - \omega t)} & x < 0 \\ \tilde{A}_T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 x - \omega t)} & x > 0 \end{cases}$$

将波动处理为一维情形（不必引入质量体密度和模量）。

a) 写出界面上的边界条件（衔接条件）；

b) 已知入射波复振幅为 $\tilde{A}_I = A$(实常数)，若 $\lambda_2 = 0$，求反射波与透射波的振幅和位相。（可以引入参量 $\beta = \frac{m\omega^2}{\kappa k_1}$ 加以表示）

哈密顿正则方程：



6. 重力场中，质量为 m 的质点被约束在如图所示的光滑倒立圆锥面内侧运动，圆锥面半顶角为 α。试以柱坐标中的 r 和 θ 为广义坐标写出该质点的哈密顿量，并由正则方程给出 r 满足的二阶微分方程（不必求解）。

泊松括号：

7. $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$，

请利用泊松括号证明系统

$$H = p^n - ar^{-n}$$

存在守恒量

$$D = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{n} - Ht$$