# 第三章　有心力场

## 3.1 有心力场概述

### <u>3.1.1</u>　两体质心系中的描述

➢ 考虑孤立两体，质量分别为$m_1$、$m_2$，其间相互作用势能

$$V = V(|\vec{r}|),\qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{1.1}$$

- 取质心（惯性）参考系、质心参考点，则有

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r},\qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

相应拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - V(r),\qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{1.2}$$

- 体系的旋转不变性导致角动量$\vec{J}$守恒，故可确定相对运动的轨道为平面曲线，其平面法向即为角动量的方向。取$m_2$为参考点，建立极坐标，则拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \tag{1.3}$$

相应守恒的轨道角动量和轨道能量分别为

$$J = \mu r^2\dot{\theta} \tag{1.4}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r) \tag{1.5}$$

于是我们得到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{\mu r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r)] - \frac{J^2}{\mu^2 r^2}}$$

如果我们关心的是轨道（如上取了$\dot{r} > 0$的轨道分支），则可以对微分方程

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \tag{1.6}$$

直接积分得

$$\theta - \theta_0 = \int^r dr\frac{(J/r^2)}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \tag{1.7}$$

- 能量方程中

$$\frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r) = V_{\text{eff}}(r) \tag{1.8}$$

被称为<u>有效势能</u>，它决定了轨道径向（分）运动的特征。例如，对于能量为$E$的轨道，其径向折返点$r_0$决定于方程

$$E = V_{\text{eff}}(r_0)$$

### 3.1.2 比奈方程

- 有心力场的拉格朗日方程的径向分量式为

$$F(r) = -V'(r) = \mu\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \qquad (1.9)$$

- 我们引入变量 $u = r^{-1}$．考虑到角动量守恒，可做如下替换

$$\frac{d}{dt} \to \frac{J}{\mu}u^2\frac{d}{d\theta}$$

例如

$$\dot{r} = \frac{J}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{J}{\mu}\frac{du}{d\theta}\,, \qquad \ddot{r} = -\frac{J^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

由此可得到比奈方程

$$-\frac{J^2}{\mu}u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = F(r) \qquad (1.10)$$

☞ 例：由开普勒第一定律可知，大行星相对于太阳的轨道为椭圆，轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad u = p^{-1} + \frac{e}{p}\cos\theta$$

代入比奈方程得

$$F(r) = -\frac{J^2}{\mu p}u^2 = -\frac{\alpha}{r^2}\,, \qquad \alpha = \frac{J^2}{\mu p}$$

即可以反推出“平方反比律”。

## 3.2 开普勒问题

- 万有引力场中的轨道问题，被称为开普勒问题，相应

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}\,, \qquad \alpha = GMm \qquad (2.1)$$

- 轨道方程：由方程(1.7)，得

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \int dr \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2\mu\left[E + \frac{\alpha}{r}\right] - \frac{J^2}{r^2}}} \\ &= -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{J^4}\left(1 + \frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}\right) - \left(u - \frac{\mu\alpha}{J^2}\right)^2}}\,, \qquad u = \frac{1}{r} \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{p\cdot u - \frac{\alpha}{|\alpha|}}{e}\right)\end{aligned}$$

即

$$r = \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad (2.2)$$

其中

$$\begin{cases} p = \dfrac{J^2}{\mu|\alpha|} \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}} \end{cases} \qquad (2.3)$$

对于万有引力场，$\alpha > 0$，进一步取积分常量 $\theta_0 = 0$（相当于取近日点为极轴方向），则

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (2.4)$$

- 由偏心率 $e$ 表征的曲线特征，物理上主要反应了轨道能量的正负，

$$\begin{cases} E > 0\ (e > 1) & \text{双曲线(的一支)} & \text{不闭和（可到 } r \to \infty\text{）} \\ E = 0\ (e = 1) & \text{抛物线} & \text{不闭和（可到 } r \to \infty\text{）} \\ E < 0\ (e < 1) & \text{椭圆} & \text{闭和且有周期} \end{cases}$$

大行星的轨道为椭圆，即 $E < 0$，反映了它们无法逃脱太阳引力的束缚。

- 由正焦弦 $p$ 表征的曲线特征，物理上主要反应了轨道角动量的大小，尤其是 $L = 0$ 时，椭圆退化成直线段（可看作椭圆的特例），抛物线和双曲线退化成射线。

对于椭圆轨道，给定轨道能量 $E < 0$，角动量的极大值对应于匀速圆周运动。

➢ 椭圆轨道：取半长轴长 $A$、半短轴长 $B$，则焦距 $C = \sqrt{A^2 - B^2}$

$$\begin{cases} A - C = \dfrac{p}{1+e} \\ A + C = \dfrac{p}{1-e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \dfrac{C}{A} \\ p = \dfrac{B^2}{A} = A(1 - e^2) \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = -\dfrac{\alpha}{2A} = -\dfrac{GMm}{2A} \\ J = \mu\sqrt{\dfrac{\alpha}{\mu A}}\, B = \mu\sqrt{\dfrac{G(m+M)}{A}}\, B \end{cases} \qquad (2.6)$$

- Kepler 三定律升级版（太阳系中的天体）

开Ⅰ：引申为圆锥曲线，太阳位于焦点

开Ⅱ：引申为圆锥曲线，对于椭圆轨道有 $K = \frac{dS}{dt} = \frac{J}{2\mu} = \frac{\sqrt{G(m+M)}}{2}\frac{B}{\sqrt{A}}$

开Ⅲ：只对椭圆轨道，$T = \frac{\pi AB}{dS/dt} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m+M)}}A^{3/2}$

- 附注：对于太阳系中的天体运动，经常可以利用 $M \gg m$ 来做近似。

➢ 双曲线轨道：近日点

$$C - A = \frac{p}{1+e}, \qquad e = \frac{C}{A}$$

由此可得

$$A = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{GMm}{2E} \qquad (2.7)$$

- 库仑排斥力场：$\alpha = -kQq < 0$，轨道方程

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\theta} \qquad (2.8)$$

因此轨道为双曲线。近心点距离

$$A + C = \frac{p}{e-1}$$

则

$$A = \frac{p}{e^2-1} = \frac{kQq}{2E} \qquad (2.9)$$

- 利用比奈方程求解轨道：

$$-\frac{J^2}{\mu}u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = F(r) = -\alpha u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = p^{-1}$$

其通解为

$$u = A_0\cos(\theta - \theta_0) + p^{-1}$$

即是轨道方程（$e = pA_0$）。

- 隆格-楞次矢量：

Laplace-Rouge-Lenz 矢量是平方反比力场特有的守恒量，其形式为

$$\vec{B} = \mu\vec{v} \times \vec{J} - \mu\alpha\hat{r} \qquad (2.10)$$

• 守恒性的证明：

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d(\mu\vec{v})}{dt} \times \vec{J} - \mu\alpha\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$= -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} \times \vec{J} - \mu\alpha\frac{\vec{J}}{\mu r^2} \times \hat{r} = 0$$

• 轨道方程：

$$\vec{B} \cdot \vec{r} = Br\cos\theta = J^2 - \mu\alpha r$$

$$\therefore r = \frac{J^2}{\mu\alpha + B\cos\theta} \qquad (2.11)$$

• $\vec{B}$ 的大小：

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = \mu^2 v^2 J^2 + \mu^2\alpha^2 - 2\mu^2\alpha(\hat{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{J}$$

$$= \mu^2\alpha^2 + \mu^2 v^2 J^2 - 2\mu\frac{\alpha}{r}J^2 = \mu^2\alpha^2 + +2\mu E J^2$$

因此

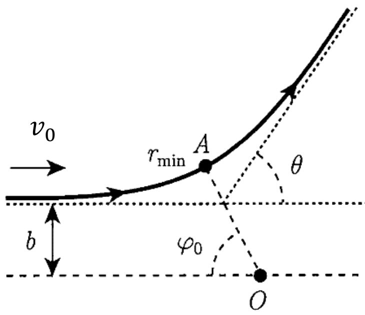
$$B = \mu\alpha\sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu\alpha^2}} = \mu\alpha e \qquad (2.12)$$

## 3.3 中心势场散射截面

### 3.3.1 散射角

散射（或碰撞）实验是探测微观粒子结构、性质及相互作用机制的重要手段。

我们考虑两体散射过程，如图所示。设两者相互作用势能为 $V(r)$，并设 $m_2 \gg m_1$，则散射过程中 2 粒子被固定在图中 $O$ 点，相应 2 粒子被称为靶粒子，这种散射也被称为固定靶散射。图中 1 粒子（入射粒子）与固定靶相距无穷远时，其速度大小记为 $v_0$、速度方向线与 $O$ 点距离记为 $b$，它也被称为瞄准距离或碰撞参量。相应轨道能量与角动量分别为




$$E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2, \qquad J = m_1 v_0 b \qquad (3.1)$$

图中，$m_1$ 轨道两条渐近线的夹角 $\theta$ 被称为散射角，显然两条渐近线关于 $OA$ 对称，故有

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 \qquad (3.2)$$

由(1.6)式可知

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \mathrm{d}r \frac{(J/r^2)}{\sqrt{2m_1[E - V(r)] - \frac{J^2}{r^2}}} \qquad (3.3)$$

其中 $r_{\min}$ 决定于方程 $E = \frac{J^2}{2m_1 r_{\min}^2} + V(r_{\min})$。将(3.1)代入(3.3)，得

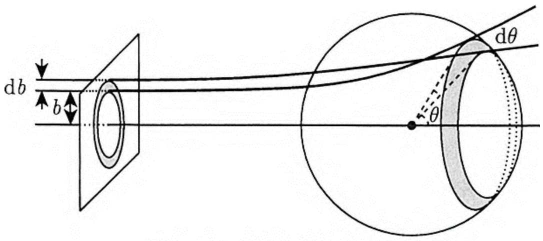
$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{+\infty} \mathrm{d}r \frac{(b/r^2)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{m_1 v_0^2}}} \qquad (3.4)$$

结合(3.2)与(3.4)，便可以得到散射角与碰撞的初值参量之间的关系。

### 3.3.2 散射截面

对于通常的微观粒子散射实验，左侧入射的实际上是由大量速度相同的全同粒子组成的粒子束流。束流强度 $I$ 被定义为左侧无穷远处单位时间、单位横截面积上入射的粒子数，后面的讨论中我们假设 $I$ 为常量。

粒子束流中不同位置入射的粒子具有不同的瞄准距离 $b$，对应于不同的散射角 $\theta$，相应束流中的粒子被散射到不同的立体角区域。因为中心势场散射具有轴对称，故可取环带立体角元 $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$，该立体角元内单位时间散射的粒子数将正比于 $\mathrm{d}\Omega$ 及束流强度 $I$，即有




$$\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{散射}} = \sigma(\theta) \, I \, \mathrm{d}\Omega \qquad (3.5)$$

其中 $\sigma(\theta)$ 具有面积量纲，被称为微分散射截面。

从上图的入射端来看，散射到立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 的粒子完全来自于宽度为 $\mathrm{d}b$ 的

环带上入射的粒子，因此可以将该环带的面元定义为微分有效散射截面

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b\,\mathrm{d}b \qquad (3.5)$$

显然 $I\mathrm{d}\sigma$ 即为单位时间散射到对应立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 的粒子数，因此有

$$|\mathrm{d}\sigma| = \sigma(\theta)\,|\,\mathrm{d}\Omega\,| \qquad (3.6)$$

这样便可得到计算微分散射截面的公式

$$\sigma(\theta) = 2\pi b\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\Omega}\right| = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| \qquad (3.7)$$

在(3.6)和(3.7)式中分别取了绝对值，这是为了保证微分散射截面为正。

考虑库仑排斥力场散射，由轨道方程(2.8)可以解得

$$\varphi_0 = \arccos(e^{-1}) \qquad (3.8)$$

其中

$$e = \sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m_1\alpha^2}}\,, \qquad \alpha = -kQq < 0$$

考虑到(3.1)、(3.2)式，得

$$\cot\frac{\theta}{2} = \tan\varphi_0 = \sqrt{e^2-1} = \sqrt{\frac{2EJ^2}{m_1\alpha^2}} = \frac{m_1 v_0^2}{|\alpha|}b$$

于是

$$b(\theta) = \frac{|\alpha|}{m_1 v_0^2}\cot\frac{\theta}{2} \qquad (3.9)$$

代入(3.7)式可得

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{|\alpha|}{m_1 v_0^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \qquad (3.10)$$

这就是著名的卢瑟福微分散射截面公式。