作业 1：涉及讲稿 1.1 至 1.5 节内容

虚功原理：

1. 刘川《理论力学》14 页习题 1。

1. **曲柄连杆构件** 汽车发动机中的曲柄连杆构件（如图 1.3 所示）由两个杆构成，是带动汽车的重要构件. 与发动机直接相连的杆 OA（长度为 l_1）可以绕原点 O 自由地转动. 另一个杆 AB（长度为 l_2）的一端与第一个杆在点 A 连接，另一端 B 则可以沿水平方向 (x 轴) 运动. 当然，为了保证整个系统可以工作，我们要求 $l_2 > 2l_1$. 忽略所有连杆的质量并假定所有构件之间都没有摩擦. 设在点 B 处的水平方向的力 P 与点 A 处垂直方向的力 Q 恰好使系统达到平衡. 选择点 A 与原点 O 之间的夹角 θ 为广义坐标.
   (a) 写出点 A 的坐标 (x_A, y_A) 以及点 B 的坐标 x_B（显然 $y_B = 0$），用广义坐标 θ 以及题目给出的各个长度表达.
   (b) 利用虚功原理 (1.10) 求比值 Q/P.

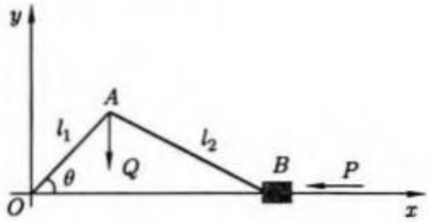


图 1.3 曲柄连杆构件的示意图.

2. 刘川《理论力学》14 页习题 2。（给出可以求解 θ 的代数方程便可）

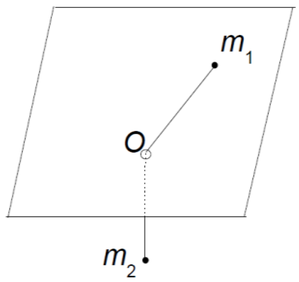
2. **虚功原理** 考虑一个弹性介质构成的绳圈，其自然长度为 l_0，弹性系数为 k. 绳圈的质量分布均匀，单位长度的质量记为 σ. 现在考虑重力场中一个实心光滑的半径为 R 的球面. 假定 $2\pi R > l_0$. 将弹性绳圈套在该光滑球面的正上方并由绳圈重力使其下滑以达到平衡. 假定平衡位置与球心连线和向上方向的夹角为 θ. 利用第 3 节中的虚功原理 (1.10) 求出平衡时的 θ.

变分法：

3. 刘川《理论力学》46 页习题 2.（求出的曲线为悬链线（不是摆线），请给出可确定积分常量的代数方程或方程组）

悬垂线问题 考虑所谓的悬垂线问题. 在均匀引力场中，一根长度为 L 的均匀绳子的两端悬挂在距离为 b 的等高的两点上. 假设 $L > b$. 绳子的总质量为 M，并且单位长度的质量密度 $\lambda = M/L$ 为常数. 试确定绳子平衡时构成的曲线的形状并证明解仍然是一条摆线，只不过与上一题比较的话，两者的情况稍有不同，分别利用了摆线的不同部分.

拉格朗日方程及守恒量：



4. 如图，质量为 m_1 的小球在光滑水平桌面上运动，并通过不可伸长的轻线与质量为 m_2 的小球相连，细线穿过桌面上光滑的小孔 O 点。

a) 以 m_1 所在水平面的极坐标 (r,θ) 为广义坐标，写出体系的拉氏量，并给出拉格朗日方程；

b) 写出体系的运动积分；

c) 已知体系相对于 O 点的角动量为 J，给出体系径向运动的有效势能 $V_{\text{eff}}(r)$，并给出其径向微振动的角频率 ω .

5. 刘川《理论力学》47 页习题 9. （增加一小问：(e)、讨论 b)中各个平衡点的稳定性）

旋转的光滑圆环 如图 2.2 所示. 一半径为 R 的无质量圆环绕自身对称轴 (沿 z 轴) 匀速转动，转动的角速度为（常数）Ω. 圆环上有一质量为 m 的质点可以沿圆环无摩擦的滑动. 整个系统处于均匀重力场 (重力加速度为 g) 中（沿 z 轴向下）.

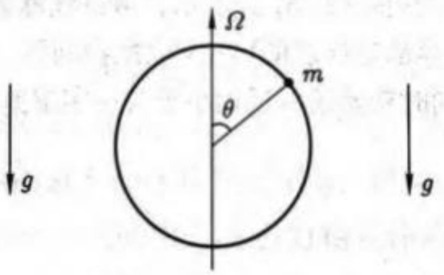


图 2.2 重力场中旋转的光滑圆环.

(a) 选择质点与垂直向下（也就是转动轴）的夹角 θ 为广义坐标，写出系统的动能 T，势能 V，从而给出拉格朗日量 $L = T - V$；

(b) 写出 θ 满足的运动方程，讨论可能的 θ 的平衡点（即 $\ddot{\theta} = 0$ 的点）.

(c) 利用 $p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta}$，求与 θ 共轭的正则动量 p_θ 并给出体系的哈密顿量 $H = \dot{\theta}p_\theta - L$；

(d) 哈密顿量的数值是守恒量吗？它等于系统的机械能（即 $T + V$）吗？

(e)、讨论(b)中各个平衡点的稳定性

6. 质量为 1 的粒子的平面运动

某二维系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \alpha(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}\alpha^2(x^2 + y^2)$$

(a) 请证明系统分别在无穷小旋转下具有对称性，并给出相应的守恒量。

(b) 请证明系统在无穷小变换

$$\begin{cases} x = x' - \delta a_x \cos(\alpha t) - \delta a_y \sin(\alpha t) \\ y = y' + \delta a_x \sin(\alpha t) - \delta a_y \cos(\alpha t) \end{cases}$$

下具有对称性，并给出相应的守恒量，其中 δa_x 和 δa_y 为无穷小变换的参数，均为无穷小量。

(c) 请利用守恒量求解该系统的运动，假设系统初始静止在位置 $(a, 0)$。

(d) 请分析系统运动对应怎样的物理图像。