

第四章 刚体的运动

4.1 刚体运动的描述

4.1.1 刚体的自由度和运动分解

➤ 刚体是任意两个点部位的距离在运动过程中保持不变的质点系模型，一般刚体的运动自由度为 6。

- 从几何约束上，固定刚体内部任意三个不共线的点，即固定一个“刚性三角形”，则刚体随之被固定，而刚性三角形三顶点的 9 个笛卡尔坐标中，只有 6 个是独立的（存在 3 个距离约束），故一般刚体的运动自由度为 6。

- 从运动分解来看，刚体的运动存在两种基本形式：

1) 平动 (translational motion)：任意两点部位连线方位不随时间变化

各点部位运动轨道平行，速度、加速度同步

可选任意点部位（基点）的运动来代表，因此平动的自由度为 3

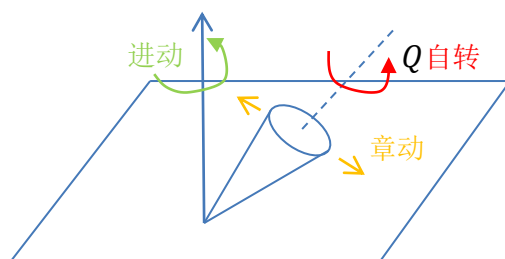
2) 定点转动 (fixed point rotation)：绕

某一固定点的转动。

非直线形刚体的定点转动自由度

为 3，如陀螺的定点转动可分解为自转、进动和章动三种自由度为 1 的独

立的定轴转动 (fixed axis rotation)



“刚体的一般运动可以分解为平动加绕某瞬时转轴的转动”，这一点被称为沙勒 (Chasles) 定理，可以看作是“刚体运动的欧拉定理”的直接推论。

4.1.2 刚体运动的欧拉定理

➤ “具有一个固定点的刚体的任意位移，等效于绕过该定点的某个轴线的转动”，这被称为刚体运动的欧拉定理。

- 如果采用讲义上 49 页定理 3.1 中的表述，即是“一个正常转动所对应的三维转动矩阵一定存在一个本征值为 +1，与其对应的本征矢量实际上对应于该转动的转动轴”。

这里“正常转动所对应的三维转动矩阵”是指行列式为 +1 的 3×3 正交矩阵 A ，即

$$AA^T = A^T A = \mathbb{1} \quad (1.1)$$

$$\det A = \det A^T = 1 \quad (1.2)$$

- 欧拉定理的证明：

$$(A - \mathbb{1})A^T = \mathbb{1} - A^T$$

两边取行列式，考虑到 (1.2) 式，则有

$$\det(A - \mathbb{1}) = \det(\mathbb{1} - A^T) = \det(\mathbb{1} - A)$$

而另一方面

$$\det(A - \mathbb{1}) = (-1)^3 \det(\mathbb{1} - A)$$

于是

$$\det(A - \mathbb{1}) = 0$$

即有刚体运动的欧拉定理。

- 刚体的一般性运动，可以看作是随刚体中某点的平动加上刚体相对于此点的运动，而根据欧拉定理，后一种运动即为绕过该点的某（瞬时）转轴的转动。

➤ 数学补充：

群是由集合 G 和封闭的乘法运算 “ \cdot ” 组成的系统 $\{G, \cdot\}$ ，它满足如下公理：

- 1) 结合律： $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G$ ；
- 2) 单位元：存在唯一的 $e \in G$ ，使得 $e \cdot a = a \cdot e = a, \forall a \in G$ ；
- 3) 逆元：对于 $\forall a \in G$ 存在唯一的逆元 $a^{-1} \in G$ ，使得 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ 。

附注：如上 2)、3)并不是定义群所需满足的最小条件，但从应用上看是等价的。

- 3 维欧几里得空间 (\mathbb{R}^3) 中，如果我们取正交归一基底，相应基底变换矩阵为正交矩阵 A ，从而在矩阵乘法的基础上构成三维正交群 $O(3)$ 。
- $O(3)$ 群中，满足 (1.2) 式的元素集合（含单位元）构成三维特殊正交群 $SO(3)$ ，其元素为我们之前讨论的正常转动对应的三维转动矩阵。 $O(3)$ 群中的其他元素可以看作是空间反演 $P = \text{diag}\{-1, -1, -1\}$ 与正常转动矩阵的乘积。
- 由欧拉定理， $SO(3)$ 群中基本的元素可以写作 $R_{\vec{n}}(\theta)$ ，表征的是绕转轴 $\vec{n}(\psi, \phi)$ 转 θ 角的转动变换元素。
- 如果群 $\{G, \cdot\}$ 的一个子集 H 在乘法运算 “ \cdot ” 下成群，则称 H 为 G 的一个子群。例如，如果固定转轴 \vec{n} ，则所有的转动 $R_{\vec{n}}(\theta)$ 集合（含单位元）构成 $SO(3)$ 的一个子群。这个子群其实是二维特殊正交群 $SO(2)$ 。
- $SO(2)$ 群元的乘积是可交换顺序的，这样的群被称为交换群，或阿贝尔群。而 $SO(3)$ 是不可交换群，或被称为非阿贝尔群。

4.1.3 无穷小角位移与角速度

- 因为一般的三维转动矩阵的乘积不满足交换律，故有限大小转动一般不可交换顺序，但无穷小转动是可以的。

我们将无穷小转动矩阵记为

$$A = \mathbb{1} + \epsilon \quad (1.3)$$

其中 ϵ 为无穷小量（矩阵）。则两个无穷小转动矩阵的乘积，在一阶小量的水平上可交换顺序，即

$$A_1 A_2 = \mathbb{1} + \epsilon_1 + \epsilon_2 = A_2 A_1$$

故无穷小转动是可交换次序的。

- 由 (1.1)、(1.3) 式，对于无穷小转动有

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1} + \epsilon)(\mathbb{1} + \epsilon)^T = \mathbb{1} + \epsilon + \epsilon^T$$

故有 $\epsilon = -\epsilon^T$ ，即 ϵ 反对称。

- 3×3 的反对称矩阵含有三个独立元素，我们可以参量化

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\theta_k \quad (1.4)$$

其中， ϵ_{ijk} 为 Levi-Civita 记号（也是三阶完全反对称张量）， $d\vec{\theta} = (d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3) = d\theta \vec{n}$ 被称为无穷小角位移。

- 矢量 \vec{x} 在无穷小转动下的增量

$$\delta \vec{x} = -\epsilon_{ijk} d\theta_k x_j \vec{e}_i = d\vec{\theta} \times \vec{x}$$

- 时间演化过程中，可以引入角速度及角加速度

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}, \quad \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

它们是三维线性空间中的矢量，这个三维线性空间正好与三维欧几里得空间相互对应。

- 数学补充：考虑到 (1.4) 式，无穷小转动矩阵可表示为

$$A = \mathbb{1} + d\vec{\theta} \cdot \vec{K}$$

其中 $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ 是由矩阵组成的向量，具体形式为

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

这三个分量被称为 $SO(3)$ 的生成元，其含义是，任意转动矩阵可写作

$$R_{\vec{n}}(\theta) = e^{\theta \vec{n} \cdot \vec{K}} \quad (1.6)$$

证明：考虑固定 \vec{n} 的无穷小转动

$$R_{\vec{n}}(d\theta) = \mathbb{1} + d\theta \vec{n} \cdot \vec{K}$$

则由 $SO(2)$ 为阿贝尔群可知

$$R_{\vec{n}}(\theta + d\theta) = R_{\vec{n}}(\theta) R_{\vec{n}}(d\theta) = R_{\vec{n}}(\theta) + d\theta R_{\vec{n}}(\theta) \vec{n} \cdot \vec{K}$$

此外，

$$R_{\vec{n}}(\theta + d\theta) = R_{\vec{n}}(\theta) + d\theta \frac{dR_{\vec{n}}}{d\theta}$$

于是有

$$\frac{dR_{\vec{n}}}{d\theta} = R_{\vec{n}}(\theta) \vec{n} \cdot \vec{K}$$

带入边界值 $R_{\vec{n}}(0) = \mathbb{1}$ ，积分得

$$R_{\vec{n}}(\theta) = e^{\theta \vec{n} \cdot \vec{K}} = \mathbb{1} + \theta \vec{n} \cdot \vec{K} + \frac{1}{2!} (\theta \vec{n} \cdot \vec{K})^2 + \dots$$

例如，

$$R_z(\theta) = e^{\theta K_3} = \dots = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

4.1.4 刚体内部任意点的速度和加速度

- 由沙勒定理，刚体上任一点的运动可以分解为随基点的平动加上绕基点的

转动。通常，我们会选择刚体的质心 C 为基点及参考点，则由运动的叠加法则，刚体上相对 C 的位矢为 \vec{r} 的点部位的速度和加速度为

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \vec{a}_C + \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (1.8)$$

其中， \vec{v}_C 、 \vec{a}_C 分别为质心速度和加速度， $\vec{\omega}$ 、 $\vec{\beta}$ 为刚体瞬时角速度即角加速度。

- 角速度与基点的选取无关：任选基点 B ，则

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CB}$$

由 (1.8) 式，刚体上任意一点的速度为

$$\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

其中 $\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{CB}$ 为点部位相对于 B 点的位矢。由此可以看出，整个刚体相对于任意 B 点的角速度仍为 $\vec{\omega}$ 。

4.2 欧拉刚体运动学方程

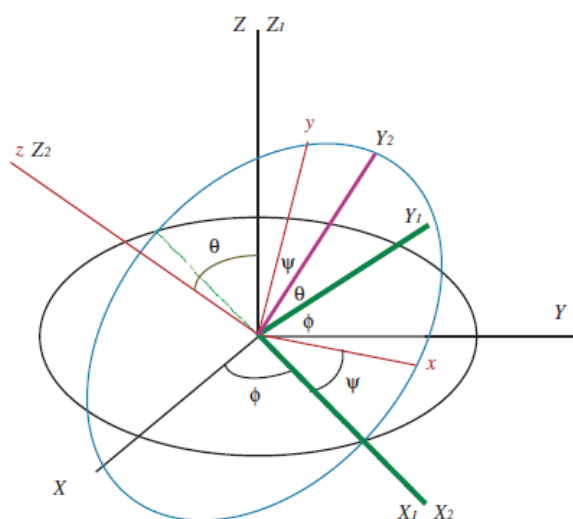
4.2.1 欧拉角

- 描述刚体的坐标框架可以固定在惯性系中，称为惯性坐标系，或空间坐标系、固定坐标系，也可以固定在刚体上，称为本体坐标系。

考虑到动力学，应用惯性坐标系的好处是其坐标轴方向固定，所以计算某一矢量（如角动量）的时间微商，只需计算其分量微商即可。但缺点是刚体的一些几何参量（如转动惯量）在该框架下表达式复杂，而且处于变动中。在本体坐标系中，刚体的几何参量的表达经常是直观且简单的，但如果将矢量按此坐标框架分解，则其微商要考虑坐标框架（相对于惯性坐标系）转动的效应。

两个坐标框架的相对关系可以由一个含三个独立参量的转动矩阵来描述，我们可以把这三个独立参量取作三个角度——欧拉角。

- 欧拉角：我们采用 ZXZ 约定，如下图， $XYZ \rightarrow xyz$ 的变换分三个步骤



- 1) 先绕 Z 轴右手转动 ϕ 角, 形成 $X_1Y_1Z_1(X_1Y_1Z)$, 并取 $\phi \in [0, 2\pi)$;
 - 2) 再绕 X_1 轴 (节线) 右手转动 θ 角, 形成 $X_2Y_2Z_2(X_1Y_2Z_2)$, 并取 $\theta \in [0, \pi]$;
 - 3) 最后, 绕 Z_2 轴右手转动 ψ 角, 形成 $xyz(xyZ_2)$, 并取 $\psi \in [0, 2\pi)$.
- 作为坐标变换的转动矩阵为 (这里显然采用了“被动”观点)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

其逆变换矩阵为

$$A^{-1} = A^T = A(\phi \rightarrow -\psi, \theta \rightarrow -\theta, \psi \rightarrow -\phi)$$

4.2.2 欧拉刚体运动学方程

- 刚体运动的角速度可以看作三个欧拉角独立变化贡献的矢量叠加

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{Z} + \dot{\theta} \hat{X}_1 + \dot{\psi} \hat{z}$$

如果投影到本体坐标系, 可利用

$$\hat{Z} = \sin \theta \sin \psi \hat{x} + \sin \theta \cos \psi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad \hat{X}_1 = \cos \psi \hat{x} - \sin \psi \hat{y}$$

因此有欧拉刚体运动学方程

$$\begin{cases} \omega_x = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_y = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_z = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases} \quad (2.2)$$

这组方程, 可以用来把刚体的角动量投影到本体坐标系上。

4.3 刚体的动能和角动量 惯量张量

4.3.1 刚体的动能和角动量

- 以质心 C 为参考点, 由速度分解 (1.8) 式及柯尼希定理, 刚体的动能可以分解为平动动能 (质心动能) 和转动动能

$$T = T_{\text{tr}} + T_{\text{r}} \quad (3.1)$$

其中

$$T_{\text{tr}} = \frac{1}{2} m v_C^2, \quad m = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad (3.2)$$

$$T_{\text{r}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij=1,2,3} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (3.3)$$

其中

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha,i} r_{\alpha,j}) \quad (3.4)$$

构成三维空间中的二阶对称张量，被称为（质心参考点）转动惯量张量。

- 以质心 C 为参考点，刚体的角动量为

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (3.5)$$

其中我们引入记号 \vec{I} 表示惯量张量，其分量如 (3.4) 式所示。如此，则转动动能可记为

$$T_r = \vec{\omega} \cdot \vec{J} = \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

- 如果任选 Q 为参考点，则角动量

$$\vec{J}^Q = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) = \vec{I}^Q \cdot \vec{\omega}$$

其中 \vec{r}'_{α} 为质元 m_{α} 相对于 Q 的位置矢量，惯量张量 \vec{I}^Q 与质心参考点惯量张量 \vec{I} 之间有平行轴定理的关系（参见后面的讨论）。

此外，若 Q 点瞬时静止，则刚体动能为

$$T_r = \vec{\omega} \cdot \vec{J}^Q = \vec{\omega} \cdot \vec{I}^Q \cdot \vec{\omega}$$

但一般情形相对于 Q 点，并没有柯尼希形式的动能分解定理。

4.3.2 惯量张量及其性质

- 惯量张量的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

其中，对角元 I_{11} 、 I_{22} 和 I_{33} 分别为 x 、 y 和 z 轴的转动惯量，而非对角元被称为惯量积。

- 性质：

- 1) 对称性： $I_{ij} = I_{ji}$.
- 2) 广延性：刚体的惯量张量等于各部分惯量张量之和。
- 3) 一般形式的平行轴定理：设刚体的某个点部位 Q 相对于质心 C 的位置矢量为 \vec{R} ，则两点转动惯量张量间满足

$$I_{ij}^Q = I_{ij}^C + m(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j) \quad (3.7)$$

而转动惯量的平行轴定理便是 (3.7) 式的对角元形式。

- ✎ 思考：试证明 (3.7) 式。

- 惯量主轴及主转动惯量

惯量张量为二阶对称张量，总可以通过正常转动实现其矩阵的对角化，即

$$A^T I A = D = \text{Diag}\{I_1, I_2, I_3\}$$

其中 I 表示任意坐标系中的惯量张量矩阵, A 为使 I 对角化的正常转动矩阵。而原坐标系通过转动 A 得到的三个坐标轴被称为惯量主轴, 相应转动惯量 I_1, I_2, I_3 被称为主转动惯量, 而 A 对应的变换便可以称为主轴变换。

- I 的对角化可以通过求解如下特征方程实现:

$$I\mathbf{X}_i = I_i\mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

其中, 特征值 I_i 便是主转动惯量, 而三个特征向量正交归一化 ($\mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j = \delta_{ij}$) 之后, 便可组成主轴变换矩阵 $A = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\}$ 。

- 主轴相对于刚体固定, 所以主轴坐标架对应于刚体的本体坐标系, 如果选择质心 C 为参考点, 则相应主轴被称为中心惯量主轴, 而转动动能和角动量的表达式可以分别被简化为

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (3.8)$$

$$\vec{J} = \sum_i I_i \omega_i \vec{e}_i \quad (3.9)$$

其中 ω_i 可以通过欧拉刚体运动学方程 (2.2) 表达为欧拉角参量及其时间导数的形式。

- 惯量主轴的性质

- 1) 三个惯量主轴彼此垂直;
- 2) 中心惯量主轴延长线上取平行坐标系, 则新的坐标系仍为惯量主轴。
- 3) 刚体的旋转对称轴为主轴;

设 z 轴为刚体的 n 次旋转对称轴, 则在给定 z 的平面上, 取刚体内部 n 个对称质元, 质量均为 δm , 柱坐标分别为 $(\rho, \varphi + \frac{2l\pi}{n}, z)$, $l = 1, 2, \dots, n$ 。由于 $\sum_{l=1}^n \rho e^{i(\varphi + \frac{2l\pi}{n})} = 0$, 则对任意的 ρ, φ, z , 如上 n 个质元贡献的惯量积

$$\sum_l \delta m x_l z = 0, \quad \sum_l \delta m y_l z = 0$$

这说明 z 轴为主轴。

- 4) 刚体对称面的法线为主轴。

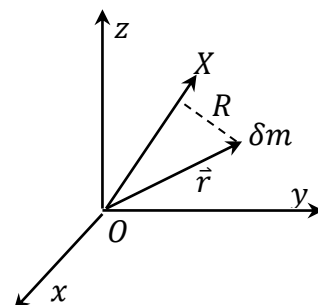
➤ 惯量椭球

如图, 设转轴的 OX 的方向余弦为 (α, β, γ) , 质元 δm 的位矢为 $\vec{r} = (x, y, z)$, 其到转轴的距离为

$$R = \sqrt{r^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}$$

则对 OX 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_x &= \sum \delta m R^2 = \sum \delta m [(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2] \\ &= \alpha^2 I_{11} + \beta^2 I_{22} + \gamma^2 I_{33} + 2\alpha\beta I_{12} + 2\beta\gamma I_{23} + 2\alpha\gamma I_{13} \end{aligned} \quad (3.10)$$



在 OX 轴上取 Q 点, 使得 $\overline{OQ} = 1/\sqrt{I_x}$, 则 Q 点坐标

$$(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)/\sqrt{I_x}$$

满足椭球方程

$$x^2 I_{11} + y^2 I_{22} + z^2 I_{33} + 2xy I_{12} + 2yz I_{23} + 2xz I_{13} = 1 \quad (3.11)$$

这个中心在 O 点的椭球被称为惯量椭球。任意过 O 点的转轴在椭球上半径 \overline{OQ} 平方的倒数便是该转轴的转动惯量。

- 取主轴坐标框架, 则惯量椭球方程为

$$x^2 I_1 + y^2 I_2 + z^2 I_3 = 1$$

故惯量张量的主轴即为惯量椭球的主轴。

- 若刚体存在 $n \geq 3$ 次对称 z 轴, 则惯量椭球为旋转对称椭球, 且垂直于 z 轴的 xy 平面为该椭球的旋转对称平面。如此, xy 平面任意两个垂直方向均可作为刚体的主轴, 且对应的转动惯量相等。

4.4 刚体动力学

4.4.1 欧拉刚体动力学方程

- 惯性坐标系中, 刚体运动的自由度可以由 3 个质心坐标和 3 个欧拉角来表征。和质心坐标相关的动力学方程为质心运动定理

$$\vec{F}_{\text{合外}} = m\vec{a}_C \quad (4.1)$$

和 3 个欧拉角相关的动力学方程为质心参考点的角动量定理

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M} \quad (4.2)$$

选取固定在由中心惯量主轴组成的本体坐标系, \vec{J} 的分量式如 (3.9) 式所示。注意到

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i$$

代入 (4.2) 式便得

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = M_3 \end{cases} \quad (4.3)$$

此即欧拉动力学方程。代入欧拉刚体运动学方程 (2.2), 便可得到欧拉角满足的 3 个二阶微分方程。

- 由 (4.3) 式可以看出, 刚体的运动仅仅通过三个主转动惯量与其结构发生关系, 故具有相同主转动惯量和外力矩的刚体运动方式相同, 即考查刚体的运动时, 刚体总可以等效为有着相同主转动惯量的匀质椭球, 或等效为陀螺。
- 三个主转动惯量都不相等的陀螺被称为不对称陀螺; 有两个相等的被称为对称陀螺; 三个均相等的被称为球形陀螺, 如匀质正四面体、匀质正方体等。

4.4.2 自由刚体——欧拉陀螺的运动

- 自由转动刚体也被称为欧拉陀螺，对此我们总可以选取质心惯性系。相应欧拉方程简化为

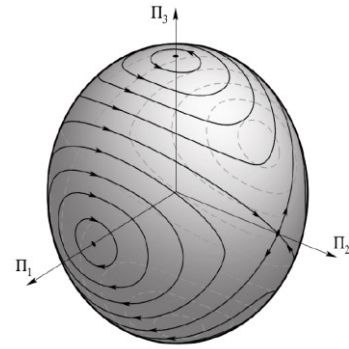
$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

动能和角动量（及其惯性坐标系分量）均为运动积分，故有常量

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{J_1^2}{2I_1} + \frac{J_2^2}{2I_2} + \frac{J_3^2}{2I_3} \quad (4.5)$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad (4.6)$$

本体坐标系分量 $J_{1,2,3}$ 并不守恒，其演化轨道为 (4.5) 式椭球面和 (4.6) 式球面的交线，如图所示，图中 $\Pi_i (i = 1, 2, 3)$ 分别对应椭球的半轴 $\sqrt{2TI_i}$ 的取向。



- 如果三个主转动惯量均不相同，不失一般性，设 $I_1 < I_2 < I_3$ ，显然， $2TI_1 \leq J^2 \leq 2TI_3$ 。
- 轨道的稳定性：
 - 1) $J^2 = 2TI_1$ 的轨道对应于 (4.5) 式椭球在 Π_1 轴上的两个顶点，角动量分别为 $\vec{J} = \pm \sqrt{2TI_1} \vec{e}_1$ 。若 J^2 非常接近 $2TI_1$ ，则其轨道为围绕 Π_1 轴上的两个顶点的（近似）小椭圆，而两个小椭圆间没有联络通道，故可维持 $|J_1| \approx \sqrt{2TI_1}$ ，我们称绕主轴 1 (x 轴) 的转动是稳定的。
 - 2) 类似地，绕主轴 3 (z 轴) 的转动是稳定的。
 - 3) 绕主轴 2 (y 轴) 的转动是不稳定的。也就是说当 J^2 接近于 $2TI_2$ 时， J_2 大致上在 $(-\sqrt{2TI_2}, \sqrt{2TI_2})$ 范围内不断变化，而角动量守恒告诉我们在惯性系中瞬时转轴的绕向是相对稳定的，所以可以看到主轴 2 (y 轴) 不断地颠倒方向，这被称为贾尼别科夫效应 (Dzhanibekov effect)。如果想看到这种效应，只需让欧拉陀螺开始时近似绕主轴 2 旋转即可。
- 求解运动方程的思路：利用守恒方程可得

$$\begin{cases} \omega_1 = \pm \sqrt{\frac{(2TI_3 - J^2) - I_2(I_3 - I_2)\omega_2^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \triangleq f_1(\omega_2) \\ \omega_3 = \pm \sqrt{\frac{(J^2 - 2TI_1) - I_2(I_2 - I_1)\omega_2^2}{I_3(I_3 - I_1)}} \triangleq f_3(\omega_2) \end{cases} \quad (4.7)$$

代入 (4.4) 便有

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) f_1(\omega_2) f_3(\omega_2) = 0 \quad (4.8)$$

积分得到 $\omega_2 = \omega_2(t)$ ，再代入回 (4.7) 式便可得到 $\omega_1(t)$ 和 $\omega_3(t)$ ，只不过

这些函数都是较为复杂的特殊函数——雅可比椭圆函数。

➤ 对称欧拉陀螺的运动：

令 $I_1 = I_2 \neq I_3$ ，则欧拉动力学方程简化为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \\ \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \text{const.} \end{cases}$$

该方程组的解为

$$\begin{cases} \omega_1 = A \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_2 = A \sin(\Omega t + \varphi_0) \end{cases} \quad (4.9)$$

总角速度大小

$$\omega = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{const.} \quad (4.10)$$

- **规则进动：**我们选取角动量的方向为惯性坐标系的 Z 轴，通常称 ψ 为自转 (spin) 角， θ 为章动 (nutation) 角， ϕ 为进动 (precession) 角。

对称欧拉陀螺没有章动，即

$$\cos \theta = \frac{I_3 \omega_3}{J} = \text{const.} \quad (4.11)$$

没有章动，这种情形被称为规则进动。

此外，可以证明 \vec{J} 、 $\vec{\omega}$ 和 x_3 轴共面，即

$$(\vec{J} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} I_1 \omega_1 & \omega_1 & 0 \\ I_1 \omega_2 & \omega_2 & 0 \\ I_3 \omega_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

事实上

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{Z} + \dot{\psi} \vec{e}_3 \quad (4.12)$$

故 $\vec{J}(\hat{Z})$ 、 $\vec{\omega}$ 和 x_3 轴共面

- 进动角速度：由 (4.9)、(4.12) 可知

$$\dot{\phi} \sin \theta = A = \frac{J \sin \theta}{I_1}$$

故进动角速度为

$$\dot{\phi} = \frac{J}{I_1} \quad (4.13)$$

4.4.3 拉格朗日陀螺（不要求）

➤ 匀强外场中作定点转动的对称陀螺被称为**拉格朗日陀螺**，重力场中的情形如图所示，O点处为完整理想约束。

- 图中 (X, Y, Z) 为惯性坐标系，相应 Z 轴取为竖直向上；
 $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ 为本体坐标系，其中 x_3 取为对称轴。
- 欧拉角已经在图中示出。其中 ψ 为自转角， θ 为章动角， ϕ 为进动角。在对称轴某一点运动的球面上， ϕ 为经度， θ 为（余）纬度。
- 设质心到 O 点的距离为 l ，势能为

$$V = mgl \cos \theta$$

动能可以看作是质心动能和绕质心转动动能的叠加，也可以利用平行轴定理直接写成绕 O 点转动动能

$$T = \frac{1}{2} I_1' (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

其中 $I_1' = I_1 + ml^2$ ，利用欧拉刚体运动学公式

$$L = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta \quad (4.14)$$

- 运动积分：两个广义动量

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = J_3 \quad (4.15)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1' \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \cos \theta \dot{\psi} = J_Z \quad (4.16)$$

其中 J_3 和 J_Z 分别为 z 轴和 Z 轴的角动量分量。守恒的能量为

$$E = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos \theta \quad (4.17)$$

由 (4.15)、(4.16) 式得

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{J_Z - J_3 \cos \theta}{I_1' \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} = \frac{J_3}{I_3} - \frac{J_Z - J_3 \cos \theta}{I_1' \sin^2 \theta} \cos \theta \end{cases} \quad (4.18)$$

代入 (4.17) 式得

$$E = \frac{1}{2} I_1' \dot{\theta}^2 + \frac{(J_Z - J_3 \cos \theta)^2}{2 I_1' \sin^2 \theta} + \frac{J_3^2}{2 I_3} + mgl \cos \theta$$

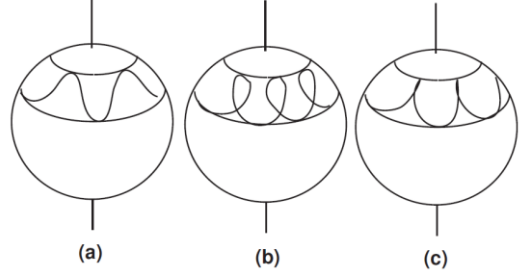
改写为

$$E' = E - \frac{J_3^2}{2I_3} - mgl = \frac{1}{2}I_1'\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) \quad (4.19)$$

其中，有效势能为

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta) \quad (4.20)$$

- 因为 $\theta = 0$ 或 π 时， $V_{\text{eff}} \rightarrow +\infty$ ，故 θ 运动范围有限，只能在 $[\theta_1, \theta_2]$ 范围内变动，其中 $\theta_{1,2}$ 满足 $E' = V_{\text{eff}}(\theta_{1,2})$ 。相应，对称轴某一点运动的球面上，纬度存在两个极限圆，如图所示。其中 (a) 对应于运动过程中， $\dot{\phi}$ 并不改



变符号（即 $J_z - J_3 \cos \theta$ 保持其符号），这种情况被称为**正常章动**。

- 对 (4.19) 积分，便可得到 $\theta = \theta(t)$ ，再代入 (4.18) 便可求解另外两个欧拉角。运算中会再次出现雅可比椭圆函数。

➤ 快速陀螺——回转仪

具有很大自转角速度的对称陀螺被称为快速陀螺，或回转仪。为讨论方便，不妨设初始时 $\theta = \theta_1$ ，并有

$$\dot{\theta}_1 = 0, \quad \dot{\phi}_1 = 0 = \frac{J_z - J_3 \cos \theta_1}{I_1' \sin^2 \theta_1}$$

θ_2 满足守恒方程

$$\frac{(J_z - J_3 \cos \theta_2)^2}{2I_1' \sin^2 \theta_2} - mgl(1 - \cos \theta_2) = -mgl(1 - \cos \theta_1)$$

其中

$$J_z = I_3 \cos \theta_1 \dot{\psi}_1, \quad J_3 = I_3 \dot{\psi}_1$$

则有

$$\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = \frac{2I_1' mgl \sin^2 \theta_2}{I_3^2 \dot{\psi}_1^2} \approx \frac{2I_1' mgl \sin^2 \theta_1}{I_3^2 \dot{\psi}_1^2} \ll 1$$

故章动变化的范围与 $J_3^2 = I_3^2 \dot{\psi}_1^2$ 成反比。

- 此外，进动角速度

$$\dot{\phi}_2 = \frac{J_z - J_3 \cos \theta_2}{I_1' \sin^2 \theta_2} = \frac{I_3 \dot{\psi}_1 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}{I_1' \sin^2 \theta_2} = \frac{2mgl}{I_3 \dot{\psi}_1}$$

故平均进动角速度与 $J_3 = I_3 \dot{\psi}_1$ 成反比。