线性代数B 期中复习

求解线性方程组

1. 解下述线性方程组：

$$\begin{cases}(1+a_1)x_1+ x_2+x_3+\cdots+ x_n=b_1,\\ x_1+(1+a_2)x_2+x_3+\cdots+ x_n=b_2,\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ x_1+ x_2+x_3+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n,\end{cases}$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，且$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\neq -1$。

用简化的方法处理，注意题目给的提示条件，不一定要全部化成阶梯型矩阵处理。大致就和小时候求解线性方程组差不多，注意到所有未知数的和可以方便的求出，进而可以快速得到答案。

求解行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$。

刚刚学会加一行加一列计算，发现还是挺方便的，但是直接用第一行加加减减还是很快能够搞定的。

$1 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$

0

.

.

.

0

$i=1$

计算下列 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

=(归纳法)

元素比较少，还是建议展开然后递推比较方便。

例 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix},$$

其中 $a\neq b$。

题目不难，注意讨论$a=0,b=0$的情形。

遇到组合数，想组合数的性质！

$$C_n^l=C_{n-1}^{l-1}+C_{n-1}^l$$

例 11 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{n-1,1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{n-1,1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{n-1,1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

可以很好的加深对行列式展开的理解。

例 12 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \cos2\alpha_1 & \cdots & \cos(n-1)\alpha_1 \\ 1 & \cos\alpha_2 & \cos2\alpha_2 & \cdots & \cos(n-1)\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\alpha_n & \cos2\alpha_n & \cdots & \cos(n-1)\alpha_n \end{vmatrix}.$$

用倍角公式展开，然后发现和上一题一致。

$1\leqslant j<i\leqslant n$

例 13 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}.$$

分析：这个行列式与范德蒙行列式的区别仅在于第 n 行不是$(x_1^{n-1},x_2^{n-1},\cdots,x_n^{n-1})$。为了利用范德蒙行列式的计算公式，在原行列式的第 n 列右边添加一列$(1,y,y^2,\cdots,y^{n-2},y^{n-1},y^n)'$。在第 $n-1$ 行和第 n 行之间插入一行$(x_1^{n-1},x_2^{n-1},\cdots,x_{n-1}^{n-1},x_n^{n-1},y^{n-1})$，形成一个 $n+1$ 阶行列式 $\widetilde{D}_{n+1}$，它的$(n,n+1)$元的余子式即为 D_n，也就是 $\widetilde{D}_{n+1}$ 的完全展开式中 y^{n-1} 的系数乘以$(-1)^{n+(n+1)}$即为 D_n。

注意到题目下边的提示，感觉还是挺刁钻的。

7. 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix},\ y\neq z.$$

个人感觉是，如果整理不成因式分解的形式，就直接写上那个展开的多项式应该也没有问题。

. 计算下述 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

进行一次行行相减之后，注意到每行之和均为0，可以简化运算。

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

解　每次都按第一行和最后一行展开，得

注意对称性展开

例 11 设数域 K 上的 n 级矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

明：A 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩等于 n。

证明 只要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。

假如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，则在 K 中有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

这个题目还是挺重要的，而且思考起来有一定难度，可以注意一下。

5. 证明：如果 $n(n>1)$ 级矩阵 A 的行列式等于零，那么 A 的任何两行(或两列)对应元素的代数余子式成比例。

用解集的结构说明这个问题。