2024fall 线性代数B 期末试题回忆版

1

判断以下关于线性映射的说法是否正确：

- 线性映射 $\mathbf{A}$ 可逆，则行列式不为零；
- 线性映射 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{B})$ ，则 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}^2) = \operatorname{rank}(\mathbf{B}^2)$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$
- $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \operatorname{rank}(\mathbf{B}) \geq \operatorname{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$
- $\mathbf{A}$ 矩阵在一组基下矩阵表示为 A， $\mathbf{B}$ 矩阵在这组基下矩阵表示为 B，则线性映射 $\mathbf{AB}$ 在这组基下矩阵表示为 AB 。

2

二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4$，做非退化线性替换使得其化为标准形。

3

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 上的一组正交单位基，求出与向量组
$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ 等价的正交单位向量组。

> 注：此题不能保证系数与考试题目完全一致，但是相差不是很多，难度完全相同。

4

矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & (a+1) \end{bmatrix}$$

- a取何值时，这一矩阵可以对角化；
- 若 A 可以对角化，求出可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

5

记

$$A(x,a,n) = \begin{bmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

- 已知 $A(x,a,n)A(y,b,n) = A(z,c,n)$ ，求出 z, c。
- 问矩阵 $A(0,1,4)$ 是否可逆，若可逆，求出逆矩阵。

6

考虑线性空间 V ，满足 $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K}) | \operatorname{tr}(A) = 0\}$ ，存在矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

线性映射：

$$\Phi_P = P^{-1}AP$$

- 求证：$\{E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}\}$ 是一组基；
- 求出线性变换在这组基下的矩阵；
- 求出线性变换的特征向量与特征值；
- 类似定义 $\Phi_U = U^{-1}AU$ ，可逆矩阵U有两个特征值2，4，求出线性变换的特征值。

7

A 是正定矩阵，B 是实对称矩阵，求证存在可逆矩阵 C ， 使得 C^TAC 与 C^TBC 同时为对角矩阵。