

线性代数B 2024 fall期中

1

求下列行向量构成的向量组的秩和一个极大线性无关组：

$$\alpha_1 = (-1, 5, 3, 2), \alpha_2 = (4, 1, -2, 9), \alpha_3 = (2, 0, 1, 4), \alpha_4 = (0, 3, 4, -5)$$

2

4. 下述齐次线性方程组何时非零解？何时只有零解？

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + ax_3 = 0, \\ 5x_1 + bx_2 - 55x_3 = 0. \end{cases}$$

3

求解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

4

已知

$$\begin{vmatrix} x & y & z & x+y+z \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

求

$$\begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ y-x & 2-y & x-z & 2-x-y-z \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

5

证明：

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

6

β 能由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ 线性表出, 但是不能由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}\}$ 线性表出, 求证:
 $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta\}$

7

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{bmatrix}$$

的行向量组何时与

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

等价?

8

例 3 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于 0, 并且 A 的 (k, l) 元的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$ 。证明:

$$\eta = \begin{pmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

9

已知方程组:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

...

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0$$

的解都是方程

$$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$$

的解, 求证:

$\beta = \{b_1, \dots, b_n\}$ 可以由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 线性表出, 其中 α_i 为系数矩阵 A 的行向量。