# 线性代数B 期末复习随想

## 矩阵的运算

### 知识

- 证明矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ 行列式不为0
- 矩阵的分块
    - 应用非常之多且灵活，导致根本不能总结，注意做行变换是左乘，做列变换是右乘。

### 题目与技巧

#### 数量矩阵

- 与所有 $n$ 级矩阵可以交换的矩阵是数量矩阵。

  证明：可以先考虑特殊情况。结合矩阵乘法的结合律，我们知道可以优先考虑 $E_{1j}$ 形式的矩阵，利用 $AE_{ij}(p;q) = E_{ij}A(p;q)$ 证明是数量矩阵。

  进一步推广的结论是，与所有 $n$ 级可逆矩阵可以交换的矩阵也是数量矩阵，构造方案类似，对于任意矩阵，考虑 $|B+tI|$ ，发现是关于t的多项式，一定可以构造出可逆矩阵 $B+tI$ ，然后就回到了上面的情形。

#### 幂零矩阵

##### 上（下）三角矩阵是幂零矩阵⇔对角元均为0

> 证明可以直接研究$a(i;i+1)$验证，使用数学归纳法验证。

### 上（下）三角矩阵

- 证明的方式常见于施密特正交化的构造。

  如，回想矩阵的QR分解（分解成正交矩阵和上三角矩阵）
- 左乘对角元素全为1的下三角矩阵（做特殊的初等行变换）和右乘对角元素全为1的上三角矩阵（做特殊的初等列变换）不改变顺序主子式的值。

#### 对角矩阵

- 与分块对角矩阵（保证特征值两两不同）可以交换的矩阵一定是相同分块的对角矩阵。

#### 正交矩阵

正交矩阵的本征值为 $\pm 1$ （实数域中），复数域中模为 $1$ 。

#### 分块矩阵和矩阵的秩

- 如何构造分块矩阵转换求秩的问题？

  $$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

  这一点实在是太好用了，解决了很多矩阵秩的问题。

  常见的例子是：
  已知 $A^2 = 2A$ ，求证 $A$ 可以对角化。

- 关于分块矩阵的构造，我还想补充一点，其实，有人说，分块的关键在于“打洞”，但是我觉得这是在计算的过程中涉及到的，构造的时候重要的还是能否处理出单位阵（保证后面的运算中可以进行“打洞“）。

# 矩阵的相抵与相似

## 知识

- 矩阵的满秩分解：
  - 两种观点：
    - 找出矩阵列向量的极大线性无关组
    - 做相抵变换
- 两个矩阵相似：
  - 行列式相同
  - 秩相同
  - 迹相同
- 求特殊矩阵的特征值

  这里仅仅标注一个循环矩阵的特征值问题，做简要表述。

  **例 11** 求复数域上 $n$ 级循环移位矩阵 $C=(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1})$ 的全部特征值和特征向量。

  **解** $C$ 的特征多项式 $|\lambda I-C|$ 为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=\lambda^n-1.$$

  于是 $n$ 级循环移位矩阵 $C$ 的全部特征值是 $1,\xi,\cdots,\xi^{n-1}$，其中 $\xi=e^{i\frac{2\pi}{n}}$。

  对于非负整数 $m(0\leqslant m<n)$，有

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^m \\ \xi^{2m} \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^m \\ \xi^{2m} \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)m} \\ 1 \end{pmatrix} = \xi^m \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^m \\ \vdots \\ \xi^{(n-2)m} \\ \xi^{(n-1)m} \end{pmatrix}.$$

  因此 $C$ 的属于特征值 $\xi^m$ 的所有特征向量组成的集合是

$$\{k(1,\xi^m,\xi^{2m},\cdots,\xi^{(n-1)m})' \mid k\in\mathbf{C} \text{ 且 } k\neq 0\}.$$

  当然，这一问题可以做进一步拓展，将循环矩阵做次方后的叠加，问题得到化简。

**例 13** 求复数域上 $n$ 级循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

的全部特征值和特征向量。

**解** 据 4.2 节的典型例题的例 11 的结论，得

$$A=a_1I+a_2C+\cdots+a_nC^{n-1},$$

其中 $C$ 是 $n$ 级循环移位矩阵。令

$$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}, \qquad \xi=e^{i\frac{2\pi}{n}},$$

据本节的例 11 和例 12 的结论得，$A=f(C)$ 的全部特征值是 $f(\xi^m)$，$m=0,1,2,\cdots,n-1$；$A$ 的属于特征值 $f(\xi^m)$ 的所有特征向量组成的集合是

$$\{k(1,\xi^m,\xi^{2m},\cdots,\xi^{(n-1)m})' \mid k\in\mathbf{C} \text{ 且 } k\neq 0\}.$$

- 矩阵可以对角化的条件：
  - **定义**：存在 $n$ 个线性无关的特征向量，用这 $n$ 个特征向量可以构成一个可逆矩阵 $U$ ，使得 $A$ 对角化；
  - 定理：子空间的维数之和为 $n$ 。

## 题目与技巧

- 计算矩阵的特征值
  - 利用 $|\lambda I-A|=0$ 进行验证
  - 由定义，$A\alpha=\lambda\alpha$ ，利用矩阵运算的性质分析
  - 另外还可以注意到矩阵的特征进行初步分析，如 $\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(A)$ ， $\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}(A)$
- 数学归纳法

  **基本操作：**

  分块 $\rightarrow$ 初等行列变换（左右乘可逆矩阵） $\rightarrow$ 降维打击 $\rightarrow$ 归纳递推证明

  比如，证明矩阵相似的性质：回想证明实对称矩阵可以正交相似对角化的证明。先找到一个特征向量进行扩充，转化成 $(n-1)$ 阶矩阵的性质，进而进行代数运算得到结果。

  如书本习题：

  *4. 证明：如果 $n$ 级实矩阵 $A$ 的特征多项式在复数域中的根都是实数，则 $A$ 一定正交相似于上三角矩阵.

  其实想一想，题目完全可以说是方阵，但是专门提到n级就是说要使用数学归纳法进行证明。
- 证明分块矩阵对角化的结论：

  若矩阵是分块对角矩阵，则矩阵可以对角化 $\Leftrightarrow$ 对角线上每个矩阵均可对角化

  > 证明矩阵可以对角化的方案：
  >
  > （1）我们可以构造矩阵U（可以找到若干个线性无关的特征向量），使得 $U^{-1}AU=D$ ;
  >
  > （2）利用定理证明矩阵可以对角化，子空间的维数与矩阵维数之间的关系。

# 二次型 · 矩阵的合同

## 知识

- 正交替换（直角坐标替换）：要求使用正交矩阵进行替换
- 两个矩阵合同：
  - 秩相同
  - 正负惯性指数相同
- 二次型隐含要求（正定矩阵等等相关概念）:对称矩阵
- 标准形 $\Rightarrow$ 对角矩阵；规范形 $\Rightarrow$ 对角元素只能是 1，-1，0。
- 证明一个矩阵是正定（半正定）矩阵
  - 先从定义出发，对于 $\forall \alpha \in V,\ \alpha^T A\alpha > (\geq) 0$
  - 再尝试利用定理进行证明，要求顺序主子式都大于零。（只有正定的证明是可行的）
- 主子式：

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix}$$

  顺序主子式：注意是依次取行列指标

$$A\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

- 正定矩阵 $\rightarrow$ 实对称矩阵

## 技巧与题目

- 证明对称矩阵合同于对角矩阵
  - 思路很重要：矩阵分块 $\rightarrow$ 初等行列变换 $\rightarrow$ 数学归纳
- 合同变换与矩阵的对称性
  - $A$ 是斜对称矩阵 $\Leftrightarrow\ \alpha^T A\alpha = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}^n$

  > 想：证明一个对称矩阵是零矩阵 $\Leftrightarrow$ 证明这个矩阵也是反对称矩阵

- 数学归纳法证明矩阵合同变换的性质

  联想原来定理的证明：将矩阵分块，做对称的初等行、列变换，化归成降阶的矩阵。

- 构造式的证明

  **例 5** 证明：一个 $n$ 元实二次型可以分解成两个实系数 1 次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩等于 2 且符号差为 0，或者它的秩等于 1。

> 想法1：直接构造二次型矩阵A；想法2：构造可逆变换C。

**例 8** 设实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = l_1^2 + \cdots + l_s^2 - l_{s+1}^2 - \cdots - l_{s+u}^2, \tag{5}$$

其中 $l_i(i=1,2,\cdots,s+u)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 1 次齐次多项式。证明：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数 $p \leqslant s$，负惯性指数 $q \leqslant u$。

- 这个证明和书上定义的证明一模一样。

**例 10** 证明：如果 $A$ 是 $n$ 级正定矩阵，$B$ 是 $n$ 级实对称矩阵，则存在一个 $n$ 级实可逆矩阵 $C$，使得 $C'AC$ 与 $C'BC$ 都是对角矩阵。

- 两个矩阵同时合同变换。

  **例 15** 证明：如果 $A$ 是 $n$ 级正定矩阵，$B$ 是 $n$ 级半正定矩阵且 $B\neq 0$，那么

  $$|A+B| > \max\{|A|, |B|\}. \tag{10}$$

- 一方面。看到矩阵同时合同的条件可以进行联想，另一方面，想要处理两个矩阵的和的行列式显然是不方便的，需要将其转化成乘积的形式进行运算。
- 半正定矩阵开平方要想得到半正定矩阵，则该矩阵唯一，用特征值证明！进而可以证明SVD分解与极分解的唯一性。

# 线性空间

## 知识

- 线性空间验证
  - 非空集合
  - 对加法、数乘封闭
  - 8条运算法则：交换律、结合律、零元、负元、1的数乘、数乘的结合律、分配律【对于数与向量均成立】
- 子空间验证
  - 非空
  - 加法和数乘封闭
  - 由于继承了原来空间的加法与数乘规律，所以不需要验证八条运算法则
- 空间的交与空间的和
  - 证明两个（或多个）空间的和是直和：

    > 直和的直接定义是，对于任意一个 $\alpha \in V$ ,均可以直接表出。

    - $\forall\alpha \in V, \exists!\ \alpha_1 \in V_1,\ \alpha_2 \in V_2,\ s.t.\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
    - 上一条可以简化为 $\alpha = \mathbb{0}$
    - $dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$
    - $V_1 \cap V_2 = \mathbb{0}(与其他空间的和的交为0元素)$
    - 两个空间的基合起来是 $V_1 + V_2$ 的一个基
- 重要的**定义**：无限维空间的线性相关性与线性无关性：
  - 无限个数线性无关 ⇔ 任意有限个数线性相关
- 线性空间同构 ⇔ 两个空间之间可以构建一个同构映射，问题化归为证明一个映射是同构映射
  - 定义：证明这个映射是双射 + 证明这个映射满足加法和数乘关系：
    - $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$
    - $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$
  - 同构定理：
    - 两个空间维数相同 ⇔ 两个空间同构

# 题目与技巧

- 不用同构定理直接从定义出发，能否解决一个简单的问题？

$$k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\!=(k\alpha_1,k\alpha_2,\cdots,k\alpha_n). \qquad (11)$$

**命题 14** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $V$ 的一个基，且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $V$ 的一个基当且仅当 $A$ 是可逆矩阵.

**证明** 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，并且有

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix},$$

因此

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $V$ 的一个基 $\Longleftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 从 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$ 可推出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\Longleftrightarrow$ 从 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0$ 可推出 $\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0$

$\Longleftrightarrow$ 从 $A\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0$ 可推出 $\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=0$



$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $AZ=0$ 只有零解

$\Longleftrightarrow|A|\neq0$

$\Longleftrightarrow A$ 是可逆矩阵. ▌

命题 14 的必要性表明，基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 $A$ 是可逆矩阵.

直接用定义就可以说的很清楚！

- 同构定理的应用

**例 7** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 $V$ 的一个向量组，并且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A. \tag{9}$$

证明：$\dim\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle=\operatorname{rank}(A)$.

**证明** 由于 $\dim V=n$，因此 $V\cong F^n$。映射

$$\sigma: \alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\longmapsto(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$$

是 $V$ 到 $F^n$ 的一个同构映射。从(9)式得出，$\beta_j$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是矩阵 $A$ 的第 $j$ 列 $A_j$。因此 $\sigma(\beta_j)=A_j$，$j=1,2,\cdots,s$。从而 $\sigma\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle=\langle A_1,A_2,\cdots,A_s\rangle$。于是

$$\begin{aligned}\dim\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle&=\dim\sigma\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\rangle\\&=\dim\langle A_1,A_2,\cdots,A_s\rangle\\&=\operatorname{rank}(A).\end{aligned}$$

■

**点评** 例 7 就是 8.2 节典型例题例 11。现在利用 $V$ 到 $F^n$ 的一个同构映射 $\sigma$ 简捷地证出了结论。这说明多掌握一些深刻的理论就能站得更高一些，看得更透彻一些，从而解题可以更简捷。

这个题目就是上面题目的升级版，利用同构定理，将抽象的线性空间转化成向量空间，由于空间同构，可以运用向量空间的知识计算空间的维数，从更高的角度看问题，用已知的结论看问题！

**例 11** 设 $A,B$ 都是域 $F$ 上的 $s\times n$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$。用 $U,W$ 分别表示 $n$ 元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，$B\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，证明：

(1) $U\cong W$；

(2) 存在域 $F$ 上的一个 $n$ 级矩阵 $H$，使得 $\sigma(\boldsymbol{\eta})=H\boldsymbol{\eta}\ (\forall\,\boldsymbol{\eta}\in U)$ 是 $U$ 到 $W$ 的一个同构映射。

对于第二小问，看起来是说同构定理直接应用，但是如果直接做基变换的话不能保证两个解空间的基可以互相线性表出，所以需要利用矩阵的秩与相抵标准形的关系进行联想处理。

**例 17** 设 $V$ 和 $V'$ 都是域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间，$\sigma$ 是 $V$ 到 $V'$ 的一个映射，它保持加法和纯量乘法运算，证明：$\sigma$ 是单射当且仅当 $\sigma$ 是满射，从而只要 $\sigma$ 是单射（或满射），就有 $\sigma$ 是 $V$ 到 $V'$ 的一个同构映射。

**证明** 必要性。设 $\sigma$ 是单射。从本节同构映射性质 4 的证明过程看到，只要 $\sigma$ 保持加法和纯量乘法运算且 $\sigma$ 是单射，就有结论："$V$ 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关当且仅当 $\sigma(\alpha_1)$，$\sigma(\alpha_2)$，$\cdots$，$\sigma(\alpha_s)$ 是 $V'$ 中线性相关的向量组。"于是在 $V$ 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就有 $\sigma(\alpha_1)$，$\sigma(\alpha_2)$，$\cdots$，$\sigma(\alpha_n)$ 线性无关。又由于 $\dim V'=n$，因此 $\sigma(\alpha_1)$，$\sigma(\alpha_2)$，$\cdots$，$\sigma(\alpha_n)$ 是 $V'$ 的一个基。于是对于任意 $\beta\in V'$，有 $\beta=b_1\sigma(\alpha_1)+b_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+b_n\sigma(\alpha_n)=\sigma(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n)$。



由于 $b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n\in V$，因此 $\sigma$ 是满射。

充分性。设 $\sigma$ 是满射。$V$ 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。则 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 是 $V'$ 中一个向量组。任取 $\beta\in V'$。由于 $\sigma$ 是满射，因此存在 $\alpha\in V$，使得 $\beta=\sigma(\alpha)$。设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$，则 $\beta=\sigma(\alpha)=\sigma(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sigma(\alpha_i)$。又由于 $\dim V'=n$，因此 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 是 $V'$ 的一个基。设 $\alpha,\gamma\in V$，则 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$，$\gamma=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$。如果 $\sigma(\alpha)=\sigma(\gamma)$，那么 $\sigma(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i)=\sigma(\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\alpha_i)$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sigma(\alpha_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\sigma(\alpha_i)$。由于 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ 是 $V'$ 的一个基。因此 $a_i=c_i$，$i=1,2,\cdots,n$。从而 $\alpha=\gamma$。于是 $\sigma$ 是单射。 ■

**点评** 在 9.2 节的内容精华中，我们将更简捷地证明例 17 的结论。例 17 的用处之一是：在维数相等的线性空间 $V$ 和 $V'$ 中，除了用定理 1 证明中的方法构造 $V$ 到 $V'$ 的一个同构映射外，还可以根据具体问题的需要构造出 $V$ 到 $V'$ 的保持加法和纯量乘法的一个映射 $\sigma$，然后证明 $\sigma$ 是单射（或者满射），就可得出 $\sigma$ 是 $V$ 到 $V'$ 的一个同构映射，见下面的例 18。

说明单射与满射的关系，个人感觉是非常有意思的结论，虽然证明看起来非常繁琐。

# 线性映射

## 知识

- 证明一个变换是从 $V$ 到 $V'$ 上的线性映射：用定义证明做变换后对应的元素满足要求以及加法与数乘是否满足规律
- $V$ 到 $V$ 自身的线性映射 $\Rightarrow$ 线性变换
- 线性映射可逆 $\Leftrightarrow$ 线性映射是单射也是满射（其实也是应用定义证明的，但是线性映射自动保持了加法和数乘的性质，所以仅仅需要验证双射） $\Leftrightarrow$ 线性映射是同构映射

## 题目与技巧

- 线性映射的证明

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 $V$ 的一个基，$\boldsymbol{A}$ 是 $V$ 上的一个线性变换，证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n$ 是 $V$ 的一个基.

证明线性变换可逆，等价于证明线性变换既是单射又是满射，证明单射等价于 $\mathrm{Ker}(f)=\mathbb{0}$ 。当然，用反证法进行处理也是很好的一种选择。

- 研究一个线性映射的核心部分：研究线性映射 $f$ 的 $Ker(f)$ 与 $Img(f)$ 。

  就是说，研究线性映射将那些元素映射成了0，这一映射的全体是什么集合。这一点应用非常广泛，试想，证明一个映射是单射，就是证明 $Ker(f)=0$ ；证明一个映射是满射，就是证明这一映射的像集是指定的集合。同时，还可以注意空间维数的分析，如下面的题目：

  8. (10 分) 令 $V$ 是域 $k$ 上维数大于 1 的线性空间，$V^{*}=Hom_k(V,k)$ 是 $V$ 到 $k$ 上的所有线性映射的集合。对 $i=1,2$ 取集合 $V^{*}\times V$ 中的元素 $(\phi_i,w_i)$ 满足如下条件：$0\neq\phi_i\in V^{*}$, $0\neq w_i\in V$ 且 $\phi_i(w_i)=0$. 定义 $V$ 上的线性变换 $\tau_i(v)=v+\phi_i(v)w_i$。证明：

     (i) $\tau_i$ 是可逆线性变换。

     (ii) 存在 $V$ 上的可逆线性变换 $g$ 使得 $g^{-1}\tau_1 g=\tau_2$。

先观察线性映射 $\phi_i$ ，这一映射的作用是将n维线性空间映射成1维线性空间，所以会将大量的基映射成0向量，如果映射成0向量，那么对于这一部分，题目给出的线性映射 $\tau_i$ 其实就是一个 $v\rightarrow v$ 的线性变换，分析起来就会容易非常多，所以研究空间的像与核还是非常重要的。

- 研究映射的性质，就是研究所映射空间的基的性质。

  12. 设 $f$ 是域 $F$ 上线性空间 $M_n(F)$ 到 $F$ 的一个线性映射，如果 $f(AB)=f(BA)$，$\forall A,B\in M_n(F)$，那么 $f=f(E_{11})\mathrm{tr}$，其中 tr 是迹函数。

  任意两个矩阵在映射下可以交换 $\Leftrightarrow$ 基可以交换！