线性代数B 期末复习随想

矩阵的运算

知识

- 证明矩阵可逆 ⇔ 行列式不为0

特殊矩阵的性质

幂零矩阵

上（下）三角矩阵是幂零矩阵⇔对角元均为0

> 证明可以直接研究$a(i;i+1)$验证，使用数学归纳法验证。

正交矩阵

正交矩阵的本征值为±1（实数域中），复数域中模为1。

矩阵的相抵与相似

知识

- 矩阵可以对角化的条件：
  - 存在 n 个线性无关的特征向量，用这 n 个特征向量可以构成一个可逆矩阵 U ，使得 A 对角化；
  - 子空间的维数之和为 n 。
- 证明对称矩阵合同于对角矩阵
  - 思路很重要：矩阵分块 $\to$ 初等行列变换 $\to$ 数学归纳

二次型·矩阵的合同

知识

- 正交替换（直角坐标替换）：要求使用正交矩阵进行替换
- 二次型隐含要求（正定矩阵等等相关概念）:对称矩阵

线性空间

知识

- 线性空间（8条运算法则：交换律、结合律、零元、负元、1的数乘、数乘的结合律、分配律【对于数与向量均成立】）与子空间（验证加法和数乘是否封闭）
- 证明无限个数线性无关 ⇔ 任意有限个数线性相关
- 证明空间同构 ⇔ 证明空间维数相同

线性映射

知识

- 证明一个变换是从V到V'上的线性映射：证明做变换后对应的元素满足要求以及加法与数乘是否满足规律
- V到V的线性映射-> 线性变换
- 线性映射可逆 ⇔ 线性映射是单射也是满射 ⇔ 线性映射是同构映射

题目

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一个基，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换，证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{A}\alpha_n$ 是 V 的一个基.

证明线性变换可逆，等价于证明线性变换既是单射又是满射，证明单射等价于Ker(f)=零元素