



# 实验物理中的统计方法

## 第六章：最大似然法

杨振伟

# 回顾

---

估计量

估计量好坏的评价标准

相合性  
偏倚性  
有效性

样本均值

样本方差

样本协方差

相关系数的估计量

不需要概率  
分布的形式

# 估计量好坏的三个标准

---

## 相合性(一致性)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0 \text{ 成立}$$

## 偏倚大小(偏倚性)

$$b = E[\hat{\theta}] - \theta = 0$$

## 方差大小(有效性)

对任何估计量  $\hat{\theta}'$  , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V[\hat{\theta}_n]}{V[\hat{\theta}'_n]} \leq 1$  ,  
则  $\hat{\theta}$  为渐进有效估计量。

# 本章要点

---

- 似然函数，最大似然估计量
- 指数与高斯分布的参数确定
- 最大似然估计量的方差
- 扩展的最大似然估计
- 分区间数据的最大似然估计
- 不等精度观测结果的合并

# 参数估计与最大似然法

---

前面给出了在不知道概率密度函数 pdf 的情况下，如果没有未知参数，如何从有限的数据样本中，估计出随机变量的期待值、方差与相关系数。

如果已经知道概率密度函数 pdf 的具体形式，但是函数中包含有未知参数，如何从有限的样本中估计未知参数的期待值、方差与相关系数.....

## 最大似然法

---

# 参数估计与概率大小的关系

---

考虑数据样本 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i$ 独立同分布,  $x_i \sim f(x; \theta)$ 。

目标: 估计 $\theta$ , 或更一般地, 估计 $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$

如果 $f(x; \theta)$ 为真, 则

$$P(\text{对所有在}[x_i, x_i + dx_i]\text{观测到的}x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) dx_i$$

如果假设(包括 $\theta$ 的取值)为真

→ 可以预料会使观测结果具有高的概率。

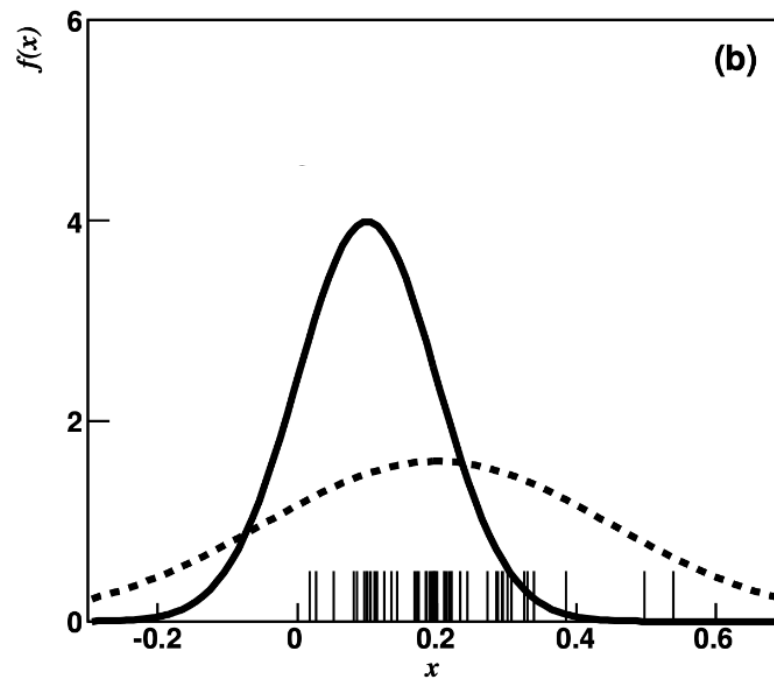
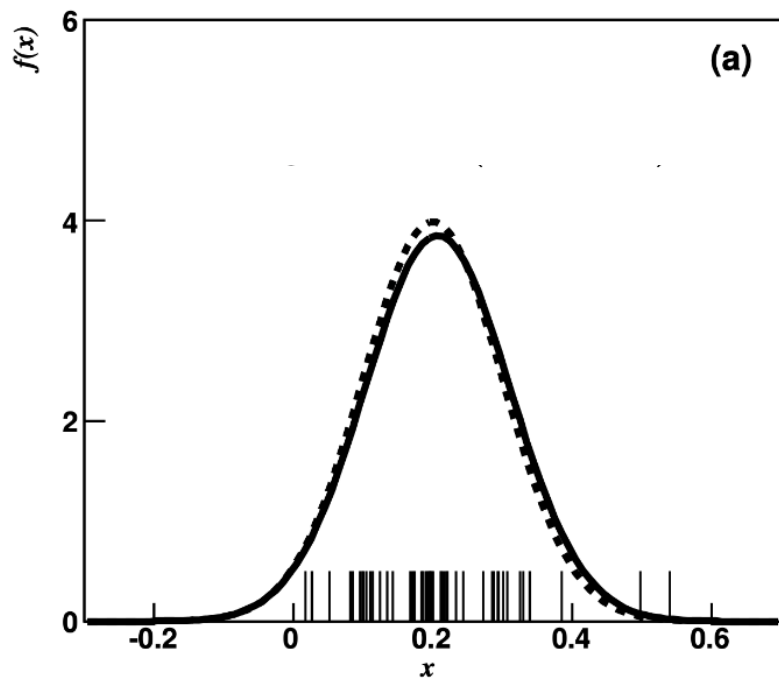
如果假设的 $\theta$ 取值远离真值

→ 会使观测结果具有低的概率。

# 参数估计与概率大小的关系

$\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$  在什么情况下比较大?

$$f(x_i, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# 似然函数

---

假设一组实验的完整结果可以用矢量  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  表示, 并假设数据  $\vec{x}$  的联合概率密度依赖于的一组参数  $\vec{\theta}$ , 即  $f(\vec{x}; \vec{\theta})$ .

利用给定的数据计算  $f(\vec{x}; \vec{\theta})$ , 则  $f(\vec{x}; \vec{\theta})$  只是  $\vec{\theta}$  的函数, 称为似然函数 (likelihood function)。记为

$$L(\vec{\theta}) = f(\vec{x}; \vec{\theta})$$

$\vec{x}$  为常数

$\ln L(\vec{\theta})$ : 对数似然函数

在经典统计中,  $L(\theta)$  并不是  $\theta$  的概率密度。

在贝叶斯统计中, 把  $L(\theta) = L(\vec{x}|\theta)$  看作给定  $\theta$  的情况下,  $\vec{x}$  的概率密度, 然后利用贝叶斯定理得到验后概率密度  $p(\theta|\vec{x})$ 。



# 独立同分布数据的似然函数

随机变量  $x \sim f(x; \vec{\theta})$ ，考虑  $x$  的  $n$  次独立观测，观测结果为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。整个数据样本的联合概率密度为

$$f(x_1, \dots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \vec{\theta})$$

此时，似然函数为

$$L(\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \vec{\theta})$$

$x_i$  为常数

$L(\vec{\theta})$  只是  $\vec{\theta}$  的函数。

对数似然函数：

$$\ln L(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \vec{\theta})$$

如果假设的  $\vec{\theta}$  接近于其真实值，则期待得到实际观测数据的概率比较大。

# 最大似然估计量

定义最大似然估计量  $\hat{\vec{\theta}}$  为使得  $L(\vec{\theta})$  最大的  $\vec{\theta}$  值。

$$\frac{\partial L(\vec{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$



$$\hat{\vec{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m)$$

有时候  $L(\hat{\vec{\theta}})$  可以有多个极大值



取最大值

注意：1) 利用了数据的所有信息，与数据分区间无关；  
2) 定义的最大似然估计量并不保证性质总是最优的。

➡ 需要研究诸如无偏性、有效性等问题

实际应用中，最大似然估计量通常能给出最好的实用解。

对数函数是单调函数

$$\frac{\partial L(\vec{\theta})}{\partial \theta_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \ln L(\vec{\theta})}{\partial \theta_i} = 0$$

# 最大似然估计量的唯一性

考虑  $\theta$  的最大似然估计值是下列方程的解

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

如果选用另一个等价参数  $h(\theta)$  , 则  $h$  的最大似然估计值是下列方程的解

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial h} = 0$$

因为  $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \theta}$  所以, 只要  $\frac{\partial h}{\partial \theta} \neq 0$  , 就有

$$\left. \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial h(\theta)} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left. \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{h} = h(\hat{\theta})$$

因此,  $h$  的最大似然估计值与参数选取无关, 具有唯一性。

# 本章要点

---

- 似然函数，最大似然估计量
- 指数与高斯分布的参数确定
- 最大似然估计量的方差
- 扩展的最大似然估计
- 分区间数据的最大似然估计
- 不等精度观测结果的合并

# 例：指数分布参数的最大似然估计

考虑指数分布

$$f(t; \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

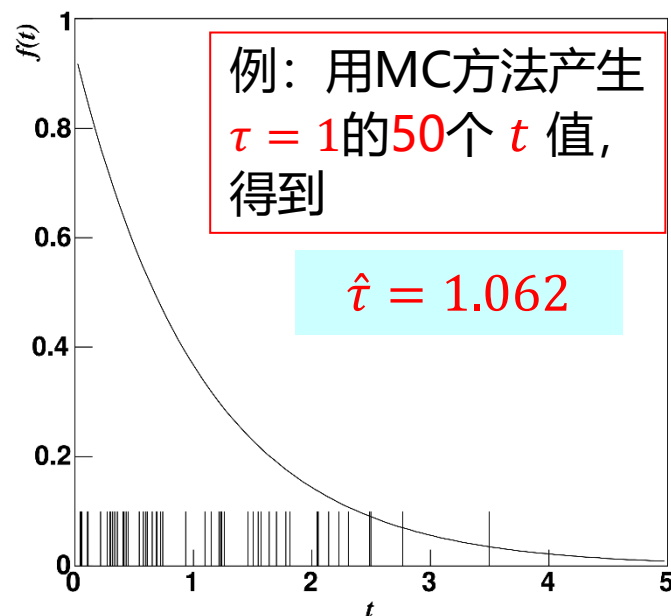
假设简单数据样本  $t_1, \dots, t_n$ 。对数似然函数为

$$\ln L(\tau) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_i}{\tau}} = \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{1}{\tau} - \frac{t_i}{\tau} \right)$$

令  $\frac{\partial \ln L(\tau)}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow$  最大似然估计值

$$\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

这是是平均寿命的最大似然估计



# 指数分布中参数最大似然估计的偏倚性

---

对样本求样本均值

$$\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

它是  $\tau$  的无偏估计量吗？

原则上可以找出  $\hat{\tau}$  的概率密度  $g(\hat{\tau}; \tau)$ ，并计算偏倚量大小：  
(例如，蒙特卡罗方法或特征函数法)

$$b = E[\hat{\tau}] - \tau$$



检查估计量是否无偏

但是...

# 指数分布中参数最大似然估计的偏倚性

一种较简单的方法是直接计算  $E[\hat{\tau}]$ :

$$\begin{aligned} E[\hat{\tau}(t_1, \dots, t_n)] &= \int \cdots \int \hat{\tau}(\vec{t}) f_{\text{joint}}(\vec{t}; \tau) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \int \cdots \int \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_1}{\tau}} \cdots \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_n}{\tau}} dt_1 \cdots dt_n \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \int t_i \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_i}{\tau}} dt_i \prod_{j \neq i} \int \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_j}{\tau}} dt_j \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau = \tau \end{aligned}$$

更简单的方法是证明样本均值  $\bar{t}$  是均值  $E[t]$  的无偏估计量，而对于指数分布， $E[t] = \tau$ 。

因此， $\hat{\tau}$  是  $\tau$  的无偏估计量。

# 指数分布中 $\tau$ 的倒数的最大似然估计

---

假设指数概率密度可写为

$$f(t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$$

其中  $\lambda = 1/\tau$ , 是衰变常数或寿命的倒数。

在测量值是时间  $t$  的情况下, 如何找出  $\lambda$  的最大似然估计量?  
根据最大似然估计量的唯一性, 当  $\lambda$  是  $t$  的等价参数时,

使  $L_\lambda(\lambda)$  达到最大值的是  $\lambda(\hat{t})$ , 变量  $\hat{t}$  也同时使  $L_\tau(\tau)$  达到最大。

➡ 函数  $\lambda(\theta)$  的最大似然估计量是  $\hat{\lambda} = \lambda(\hat{t})$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{t}} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right)^{-1}$$



# 指数分布中 $\tau$ 的倒数的有偏估计

$\hat{\lambda}$  是  $\lambda$  的无偏估计量吗？

一般而言，一个无偏估计量的非线性函数对该函数的估计是有偏倚的。

利用特征函数方法，可以证明

$$E[\hat{\lambda}] = \lambda \frac{n}{n-1}$$

$$b = E[\hat{\lambda}] - \lambda = \frac{\lambda}{n-1}$$



$\hat{\lambda}$  是有偏估计量。

当  $n \rightarrow \infty$  时，偏倚  $b \rightarrow 0$ ，称为渐进无偏估计量。

# 高斯分布中的参数 $\mu$ 和 $\sigma^2$

考虑高斯变量的简单样本，参数  $\mu$  和  $\sigma^2$  未知。其对数似然函数为

$$\begin{aligned}\ln L(\mu, \sigma^2) &= \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sigma^2} - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)\end{aligned}$$

对  $\mu$  和  $\sigma^2$  求导，令导数为零得到

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} = 0$$



$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$



$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

# 高斯分布参数估计值的偏倚性

---

前面已证明  $\hat{\mu}$  是  $\mu$  的无偏估计量。

计算  $\widehat{\sigma^2}$  的数学期望：

$$E[\widehat{\sigma^2}] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

因此， $\sigma^2$  的最大似然估计量是有偏估计量。  
这种偏倚性随样本容量  $n$  趋于无穷大而消失。

样本方差

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

对任何概率密度函数的方差估计都是无偏的。

但样本方差不是最大似然估计量。

# 本章要点

---

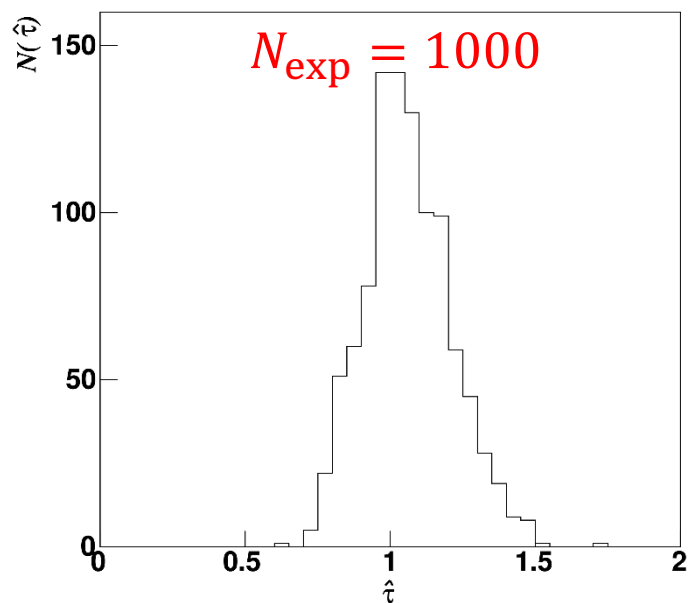
- 似然函数，最大似然估计量
- 指数与高斯分布的参数确定
- 最大似然估计量的方差
- 扩展的最大似然估计
- 分区间数据的最大似然估计
- 不等精度观测结果的合并

# 估计量的方差：蒙特卡罗方法

我们希望估计并报道参数估计值的统计不确定度，即如果重复整个实验很多次，估计的参数值分布多宽。

一种做法是，利用蒙特卡罗方法多次模拟整个实验，得到  $g(\hat{\theta}; \theta, n)$ 。

例如，对指数分布的例子， $\hat{\tau} = 1.062$ 。以此为  $\tau$  的真值，产生样本容量  $n = 50$  的样本，重复  $N_{\text{exp}} = 1000$  次。每次实验估计  $\hat{\tau}$ ，并填充直方图。



蒙特卡罗实验可给出样本标准差

$$\hat{\sigma}_{\hat{\tau}} = \left[ \frac{1}{N_{\text{exp}} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} (\hat{\tau}_i - \bar{\hat{\tau}})^2 \right]^{1/2} = 0.151$$

注意：  $g(\hat{\tau}; \tau, n)$  近似服从高斯分布。在大样本极限下，最大似然估计量几乎总是服从高斯分布。

# 估计量的方差：解析方法

指数分布平均值的估计量为：

$$\hat{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

对应的概率密度  $g(\hat{t}; \tau, n)$  分布的宽度可以估计

$$\begin{aligned} V[\hat{t}] &= E[\hat{t}^2] - (E[\hat{t}])^2 \\ &= \int \cdots \int \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \frac{1}{\tau} e^{-t_1/\tau} \cdots \frac{1}{\tau} e^{-t_n/\tau} dt_1 \cdots dt_n \\ &\quad - \left( \int \cdots \int \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right) \frac{1}{\tau} e^{-t_1/\tau} \cdots \frac{1}{\tau} e^{-t_n/\tau} dt_1 \cdots dt_n \right)^2 \\ &= \frac{\tau^2}{n} \end{aligned}$$

$\hat{t}$  的方差是  $t$  的方差  $1/n$  倍。

# 估计量的方差：解析方法(续)

---

注意：对于未知真值  $\tau$  的  $V[\hat{\tau}]$  或  $\sigma_{\hat{\tau}}$ ，其估计可以采用

$$\hat{\sigma}_{\hat{\tau}} = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}} = \frac{1.062}{\sqrt{50}} = 0.150$$

通常情况下，“统计不确定度”由上式给出。例如，

$$\hat{\tau} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\tau}} = 1.062 \pm 0.150$$

这就意味着

最大似然法对  $\tau$  的估计值为 **1.062**;

最大似然法对  $g(\hat{\tau}; \tau, n)$  的  $\sigma$  的估计为 **0.150**。

如果  $g(\hat{\tau}; \tau, n)$  是高斯分布，则  $[\hat{\tau} - \hat{\sigma}_{\hat{\tau}}, \hat{\tau} + \hat{\sigma}_{\hat{\tau}}]$  为所谓的

**“置信水平68.3%的置信区间”**

# 估计量的方差：信息不等式

信息不等式为任何估计量的方差设定了下界

$$V[\hat{\theta}] \geq \left(1 + \frac{\partial b}{\partial \theta}\right)^2 / E \left[ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right]$$

最小方差界 (MVB)  
( $b$ 为偏移量)

也称为 Rao-Cramér-Frechet (RCF) 不等式。

如果  $b = 0$  且等式成立，则称  $\hat{\theta}$  是有效估计量。

通常偏移量  $b$  很小，等式严格或在很好的近似下成立，则

$$V[\hat{\theta}] \approx -1/E \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right]$$

最大似然估计量对大样本容量  $n$  几乎总是有效估计量。

通常假设ML估计量为有效估计量，利用RCF边界估计  $V[\hat{\theta}]$ 。



# 信息不等式：指数分布的例子

对于指数分布,

$$\ln L(\tau) = \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{1}{\tau} - \frac{t_i}{\tau} \right)$$

$$\frac{\partial \ln L(\tau)}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{t_i}{\tau^2} \right)$$

可以得到

$$\frac{\partial^2 \ln L(\tau)}{\partial \tau^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\tau^2} - \frac{2t_i}{\tau^2} \right) = \frac{n}{\tau^2} \left( 1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right) = \frac{n}{\tau^2} \left( 1 - \frac{2\hat{\tau}}{\tau} \right)$$

已知  $b = 0$ , 所以

$$V[\hat{\tau}] \geq \frac{1}{E \left[ -\frac{n}{\tau^2} \left( 1 - \frac{2\hat{\tau}}{\tau} \right) \right]} = \frac{1}{-\frac{n}{\tau^2} \left( 1 - \frac{2E[\hat{\tau}]}{\tau} \right)} = \frac{\tau^2}{n}$$

$$= V[\bar{\tau}]$$



ML估计量  $\hat{\tau}$  对任何样本容量  $n$  都是有效估计量。

# 多维参数的信息不等式：费舍尔信息矩阵

对于  $m$  个参数  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ , 最小方差界由费舍尔信息矩阵给出:

$$I_{ij} = E \left[ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = -n \int f(x; \vec{\theta}) \frac{\partial^2 \ln f(x; \vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} dx$$

信息不等式:  $V - I^{-1}$  是半正定矩阵, 其中  $V_{ij} = \text{cov}[\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j]$ 。

因此,  $V[\hat{\theta}_i] \geq (I^{-1})_{ii}$

经常用  $I^{-1}$  近似协方差矩阵, 利用  $L$  在最大值处的二阶微分矩阵来估计。

$$(V^{-1})_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \bigg|_{\vec{\theta} = \hat{\vec{\theta}}}$$

费舍尔信息矩阵

一维:

$$\hat{v}(\hat{\theta}) = \left( -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \bigg|_{\theta = \hat{\theta}}$$

# 估计量的方差: 图解法

考虑单参数  $\theta$  的情况, 将  $\ln L(\theta)$  在  $\hat{\theta}$  附近展开:

$$\ln L(\theta) = \underbrace{\ln L(\hat{\theta})}_{= \ln L_{\max}} + \underbrace{\left[ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}}}_{= 0} (\theta - \hat{\theta}) + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta})^2 + \dots$$

信息不等式  $\rightarrow$

$$\left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{1}{\widehat{\sigma^2_{\hat{\theta}}}}$$



$$\log L(\theta) \approx \log L_{\max} - \frac{(\theta - \hat{\theta})^2}{2\widehat{\sigma^2_{\hat{\theta}}}}$$

即

$$\log L(\hat{\theta} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}) \approx \log L_{\max} - \frac{1}{2}$$



为了得到  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ , 让  $\theta$  偏离  $\hat{\theta}$ , 使得  $\ln L$  减小数值 0.5。

# 估计量的方差: 图解法示例

考虑指数分布最大似然估计的例子:

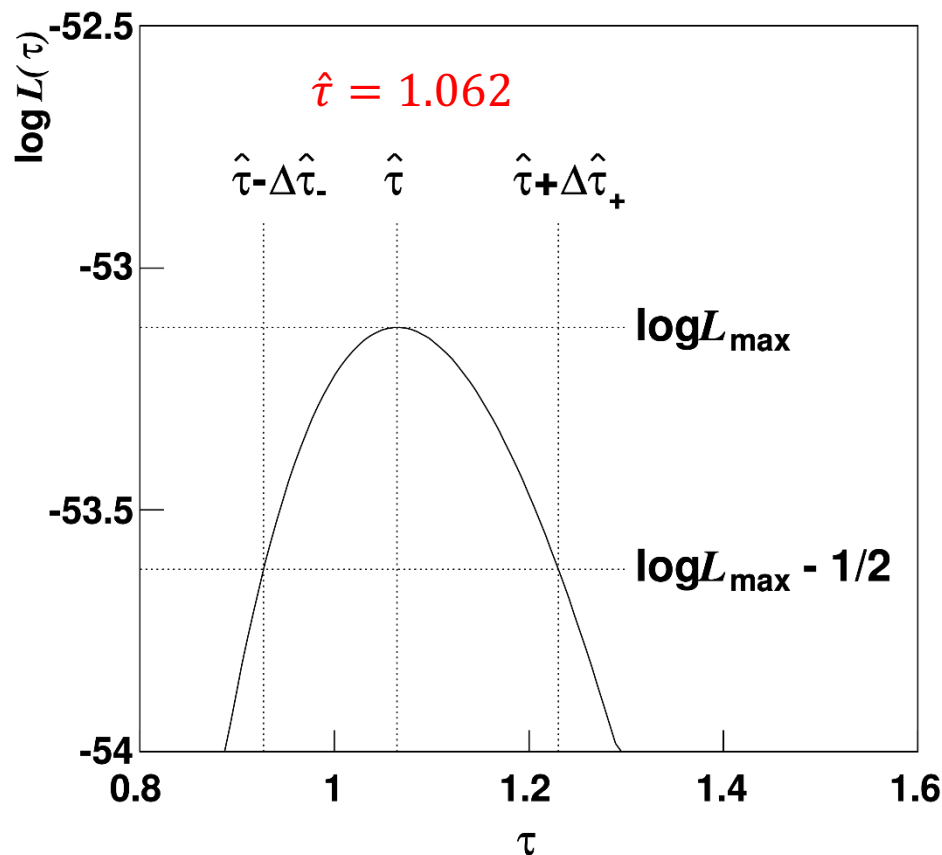
$$\hat{\tau} = 1.062$$

$$\Delta\hat{\tau}_- = 0.137$$

$$\Delta\hat{\tau}_+ = 0.165$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\tau}} \approx \Delta\hat{\tau}_- \approx \Delta\hat{\tau}_+ \approx 0.15$$

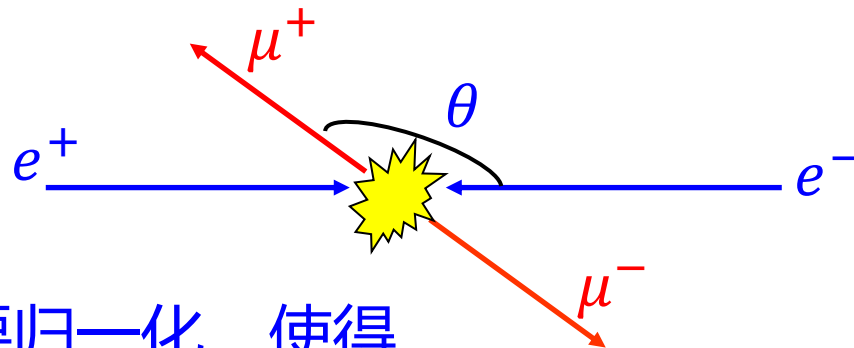
$\ln L(\tau)$  不是抛物线, 因为  
样本容量  $n = 50$  不够大。



# 双参数的最大似然估计

考虑某个散射角的分布, 定义  $x = \cos \theta$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1 + \alpha x + \beta x^2}{2 + 2\beta/3}$$



如果  $x_{\min} < x < x_{\max}$ , 则需要归一化, 使得

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x; \alpha, \beta) dx = 1$$

例:  $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, x_{\min} = -0.95, x_{\max} = 0.95$

产生  $n = 2000$  个蒙特卡罗事例。

似然函数:

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{2000} f(x_i; \alpha, \beta)$$

# 双参数的最大似然估计 (续)

数值求  $\ln L(\alpha, \beta)$  的最大值, 得到

$$\hat{\alpha} = 0.502$$

$$\hat{\beta} = 0.509$$

协方差矩阵

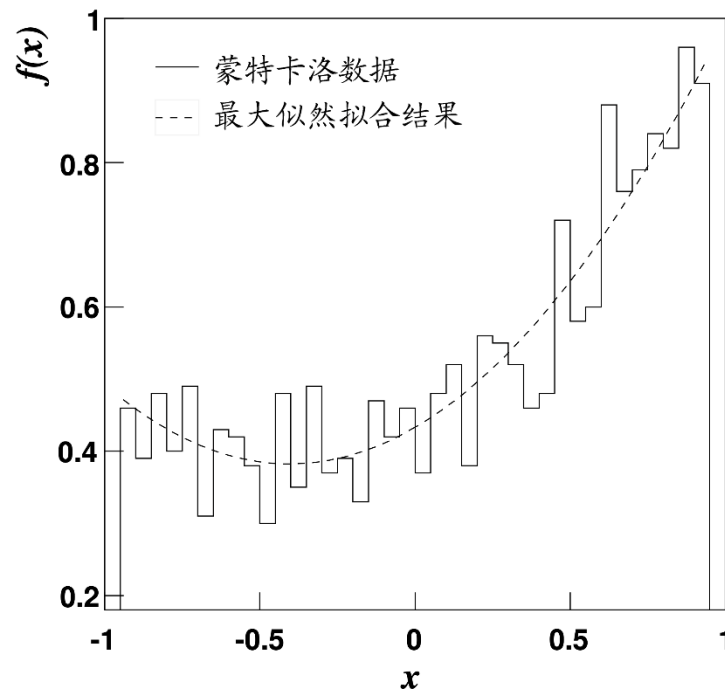
$$(\hat{V}^{-1})_{ij} = - \left. \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\vec{\theta} = \vec{\hat{\theta}}}$$

$$\hat{\alpha} = 0.50 \pm 0.05$$

$$\hat{\beta} = 0.51 \pm 0.11$$

$$\widehat{\text{cov}}[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = 0.0024$$

$$\hat{\rho} = r = 0.42$$

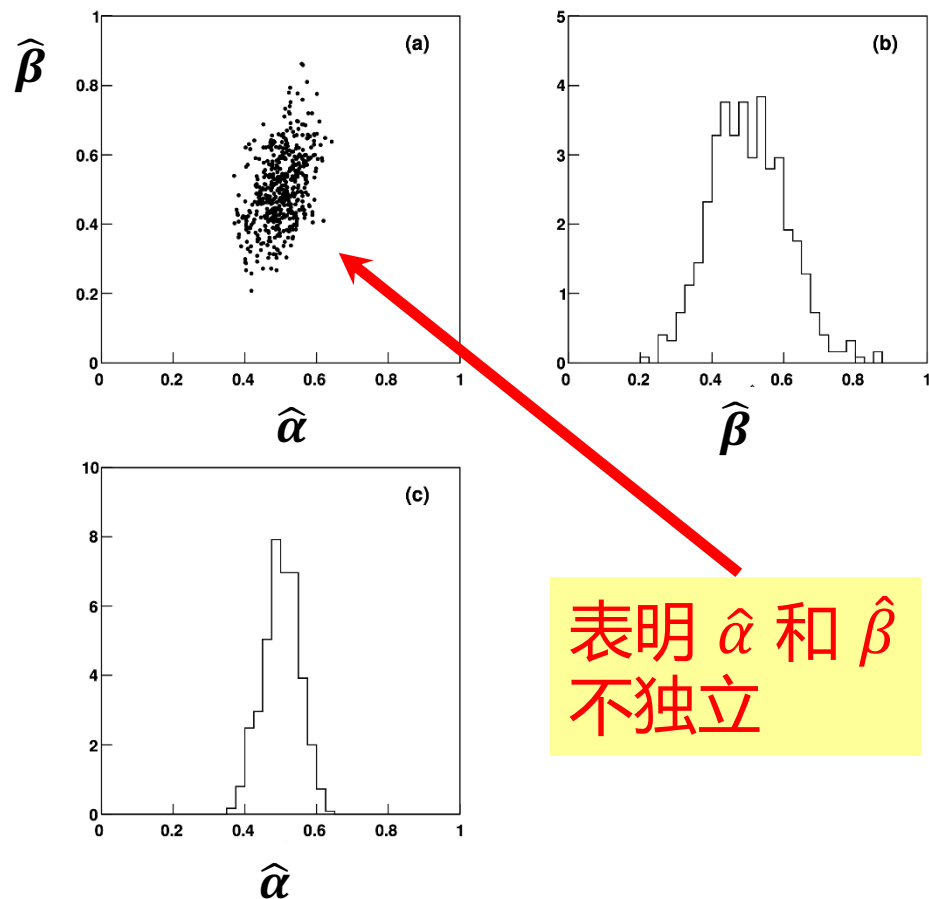


**注意:** 拟合中采用的是点拟合, 与直方图的区间大小划分无关。

但是, 可以与直方图比较得到拟合优度。

# 双参数拟合结果的蒙特卡罗检验

做500次模拟实验，每次模拟样本容量均为 $n = 2000$ 。重复最大似然拟合。



$$\begin{aligned}\overline{\hat{\alpha}} &= 0.499 & \overline{\hat{\beta}} &= 0.498 \\ s_{\hat{\alpha}} &= 0.051 & s_{\hat{\beta}} &= 0.111 \\ \widehat{\text{cov}}[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] &= 0.0024 \\ \hat{\rho} = r &= 0.42\end{aligned}$$

$\hat{\alpha}$  和  $\hat{\beta}$  正相关

边缘概率密度函数  
近似为高斯分布。

# 双参数拟合中的 $(\ln L_{\max} - 1/2)$ 等高线

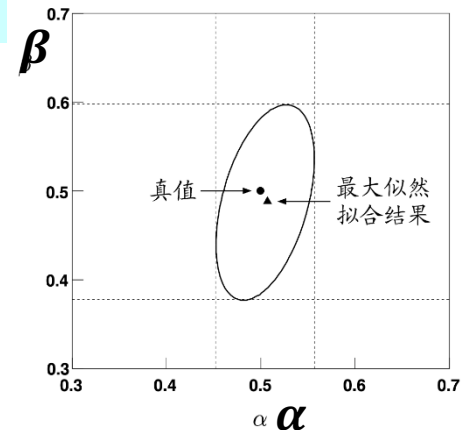
对于大样本容量  $n$ ,  $\ln L$  在最大值处具有二次型的形式:

$$\ln L(\alpha, \beta) \approx \ln L_{\max} - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[ \left( \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \right)^2 + \left( \frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \right) \left( \frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}} \right) \right]$$

等高线  $\ln L(\alpha, \beta) = \ln L_{\max} - \frac{1}{2}$  是个椭圆:

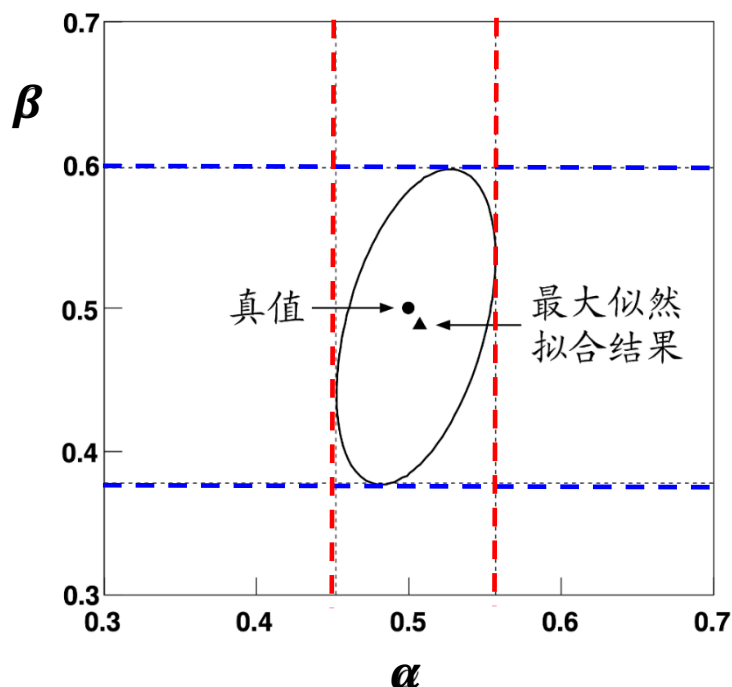
$$\frac{1}{(1 - \rho^2)} \left[ \left( \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \right)^2 + \left( \frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \right) \left( \frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}} \right) \right] = 1$$

在蒙特卡罗样本中, 每次的拟合结果对应于  $\beta - \alpha$  平面上的一个点。





# 从 $\ln L$ 等高线估计方差、协方差



$\beta - \alpha$ 平面:

椭圆是  $\ln L(\alpha, \beta) = \ln L_{\max} - \frac{1}{2}$  的等高线

椭圆的切线给出参数估计的标准差

椭圆的倾角  $\phi$  与相关性有关:

$$\tan 2\phi = \frac{2\rho\sigma_{\hat{\alpha}}\sigma_{\hat{\beta}}}{\sigma_{\hat{\alpha}}^2 - \sigma_{\hat{\beta}}^2}$$

**注意:** 估计量之间的相关性大小会影响估计量的标准差 (统计不确定度), 或偏大或偏小。

# 本章要点

---

- 似然函数，最大似然估计量
- 指数与高斯分布的参数确定
- 最大似然估计量的方差
- 扩展的最大似然估计
- 分区间数据的最大似然估计
- 不等精度观测结果的合并

# 扩展的最大似然法

前面只考虑了样本容量  $n$  固定的情形，有时候， $n$  被看作均值为  $\nu$  的泊松变量。



实验结果定义为：  $n, x_1, \dots, x_n$

则扩展的似然函数为

$$L(\nu, \vec{\theta}) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \prod_{i=1}^n f(x_i; \vec{\theta})$$

假设理论给出  $\nu = \nu(\vec{\theta})$ ，去掉与  $\vec{\theta}$  无关的项，对数似然函数：

$$\begin{aligned} \ln L(\vec{\theta}) &= n \ln \nu(\vec{\theta}) - \nu(\vec{\theta}) + \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \vec{\theta})) \\ &= -\nu(\vec{\theta}) + \sum_{i=1}^n \ln(\nu(\vec{\theta}) \cdot f(x_i; \vec{\theta})) \end{aligned}$$

# 扩展的最大似然法（续）

---

例：期待事例数  $\nu(\vec{\theta}) = \sigma(\vec{\theta}) \int L dt$ ,

其中总截面 $\sigma(\vec{\theta})$ 预期为理论参数的函数。

扩展的最大似然法利用了更多信息  $\rightarrow \hat{\vec{\theta}}$ 的不确定度更小

这对某些测量可能会非常重要。

# 扩展的最大似然法： $\nu$ 和 $\vec{\theta}$ 独立

假如  $\nu$  和  $\vec{\theta}$  相互独立,

$$L(\nu, \vec{\theta}) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \prod_{i=1}^n f(x_i; \vec{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nu} = \left(\frac{n}{\nu} - 1\right) \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \prod_{i=1}^n f(x_i; \vec{\theta}) = 0$$



$$\hat{\nu} = n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\theta}} = 0$$



最大似然估计

适用于处理  $f(x; \vec{\theta})$  已知的不同成分叠加的情况。

例如，信号成分和本底成分的叠加。

可将其分解成单独求  $\nu$  和  $\vec{\theta}$  估计值的问题。

# 扩展的最大似然法： $v$ 和 $\vec{\theta}$ 独立（续）

如果联合概率密度函数可以表示为

$$f(x; \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^m \theta_i f_i(x)$$

根据概率的定义可知并非所有的  $\theta_i$  独立：

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$$



$$\theta_m f_m(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \theta_i\right) f_m(x)$$

在扩展的最大似然法中

定义  $\mu_i = v\theta_i$

$$\ln L(v, \vec{\theta}) = -v + \sum_{i=1}^n \ln \left( \sum_{j=1}^m v\theta_j f_j(x_i) \right)$$

$$\ln L(\vec{\mu}) = -\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{i=1}^n \ln \left( \sum_{j=1}^m \mu_j f_j(x_i) \right)$$

$\mu_j$  为类型  $j$  的事例数期待值。 $n$  为观测事例总数。

# 扩展的最大似然法：非物理结果

假设有两类事例：信号 (s) 与本底 (b)

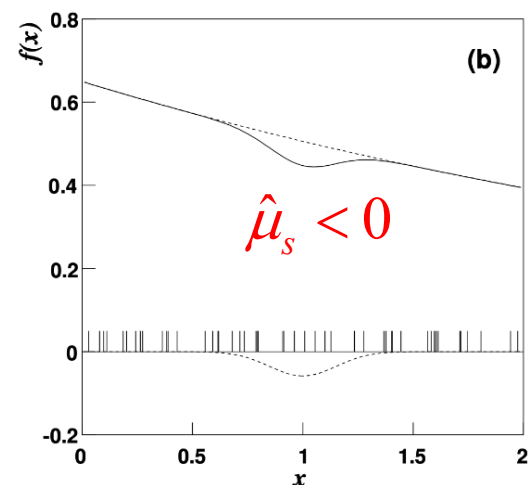
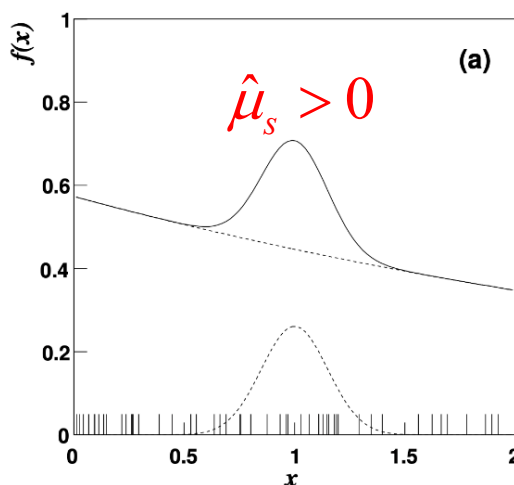
$$f(x; \mu_s, \mu_b) = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_b} f_s(x) + \frac{\mu_b}{\mu_s + \mu_b} f_b(x)$$

假设  $f_s(x)$  和  $f_b(x)$  已知，需要估计  $\mu_s$  和  $\mu_b$

$$\ln L(x; \mu_s, \mu_b) = -(\mu_s + \mu_b) + \sum_{i=1}^n \ln[(\mu_s + \mu_b) f(x_i; \mu_s, \mu_b)]$$

本底高低对拟合结果  
不确定度影响很大。

**问题：**如果出现负值，  
应该如何报告结果？



# 本章要点

---

- 似然函数，最大似然估计量
- 指数与高斯分布的参数确定
- 最大似然估计量的方差
- 扩展的最大似然估计
- 分区间数据的最大似然估计
- 不等精度观测结果的合并



# 分区间的最大似然估计

通常数据  $\vec{x}$  在划分为  $N$  个区间的直方图中的频数为

$$\vec{n} = (n_1, \dots, n_N), \quad n_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N n_i$$

通常称 “对直方图拟合”

在某种假设下，频数期待值为

$$v_i(\vec{\theta}) = v_{\text{tot}} \int_{x_i^{\min}}^{x_i^{\max}} f(x; \vec{\theta}) dx$$



$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_N), \quad v_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N v_i$$

如果用多项分布描述样本 ( $n_{\text{tot}}$  为常数):

$$f(\vec{n}; \vec{v}) = \frac{n_{\text{tot}}!}{n_1! \cdots n_N!} \left(\frac{v_1}{n_{\text{tot}}}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{v_N}{n_{\text{tot}}}\right)^{n_N}$$



$$\ln L(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N n_i \ln v_i(\vec{\theta})$$

# 分区间的最大似然估计：指数分布

把指数分布的样本填充成直方图

直方图拟合 (binned ML) :

$$\hat{t} = 1.07 \pm 0.17$$

点估计 (unbinned ML) :

$$\hat{t} = 1.06 \pm 0.15$$



两者结果吻合。  
点估计结果误差较小。

当区间宽度为零时,

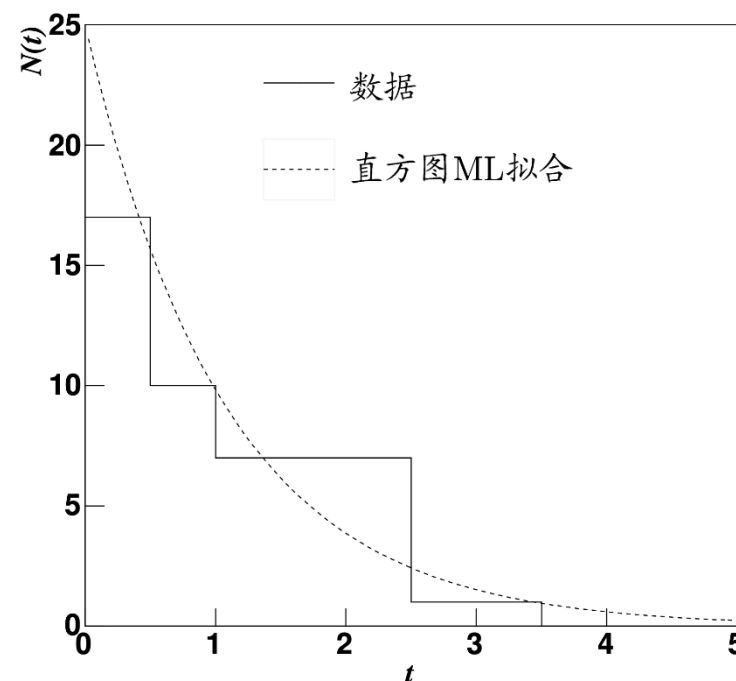
直方图拟合



点估计

如果  $n_i$  是泊松随机变量, 扩展的对数似然函数为

$$\ln L(v_{\text{tot}}, \vec{\theta}) = -v_{\text{tot}} + \sum_{i=1}^N n_i \ln v_i(v_{\text{tot}}, \vec{\theta})$$



# 分区间处理数据的问题

分区间处理数据有时会因区间宽度过大而造成部分信息丢失，影响到参数的估计。例如

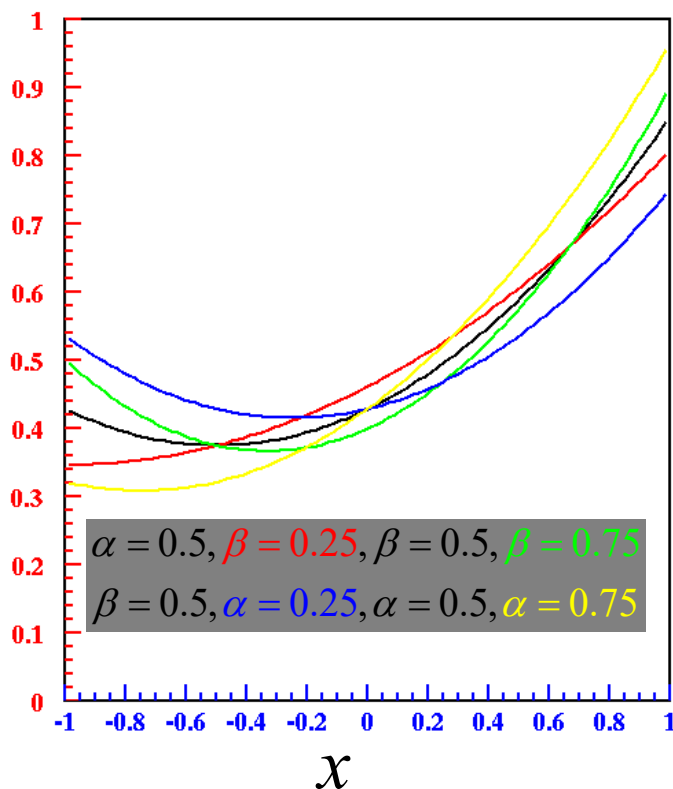
$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1 + \alpha x + \beta x^2}{2 + 2\beta/3}$$

在  $x \in [-1, 1]$  范围内分50个区间

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 0.47 \pm 0.05, \\ \hat{\beta} &= 0.39 \pm 0.11\end{aligned}$$

在  $x \in [-1, 1]$  范围内分200个区间

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 0.50 \pm 0.05, \\ \hat{\beta} &= 0.50 \pm 0.11\end{aligned}$$



因此，对直方图拟合，一定要确认区间的大小对结果无明显影响。  
注意：区间无穷小时，与点估计结果一致。

# 本章要点

---

- 似然函数，最大似然估计量
- 指数与高斯分布的参数确定
- 最大似然估计量的方差
- 扩展的最大似然估计
- 分区间数据的最大似然估计
- 不等精度观测结果的合并

# 不等精度观测结果的合并

对某固定量  $\mu$  作  $n$  次独立的不等精度测量，结果为  $x_i \pm \sigma_i$ ，方差已知，且  $x_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$ 。则该样本的似然函数为

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_i}\right)^2\right]$$

取对数并解似然方程

$$\frac{\partial \ln L(\mu)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma_i} = 0$$



$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

权重因子

$$\omega_i = 1/\sigma_i^2$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$$

$$\widehat{\sigma^2}_{\hat{\mu}} = \left( -1 / \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} \right) \bigg|_{\mu=\hat{\mu}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\omega}$$

# 不等精度观测结果的合并：另一种权重

对某一固定量  $\mu$  作  $n$  次不等精度测量，测量值为  $x_1, \dots, x_n$ ，对应的标准差分别为  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 。每个测量值  $x_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$ ，且各测量值相互独立，方差已知。则该样本的似然函数为

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_i}\right)^2\right]$$

取对数并解似然方程

$$\frac{\partial \ln L(\mu)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma_i} = 0$$



$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

权重因子

$$\omega_i = \frac{1/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}$$

$$\widehat{\sigma^2}_{\hat{\mu}} = \left( -1 / \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} \right) \bigg|_{\mu=\hat{\mu}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

# 例： $\mu$ 轻子寿命的世界平均值

共有五个实验精确测量了  $\mu$  轻子的平均寿命 (单位: ns)

$\tau_i$	权重因子 $\omega_i$	$\tau_i - \hat{\tau}$	$\chi_i^2 \equiv \omega_i(\tau_i - \hat{\tau})^2$
$2197.078 \pm 0.073$	187.65	0.045	0.379
$2197.025 \pm 0.155$	41.62	-0.008	0.0027
$2196.95 \pm 0.06$	277.78	-0.083	1.917
$2197.11 \pm 0.08$	156.25	0.077	0.924
$2197.3 \pm 0.3$	11.11	0.267	0.792

$$\omega_i = 1/\sigma_i^2$$

$$\omega = \sum_{i=1}^5 \omega_i = 674.415 \text{ ns}^2$$

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \omega_i \tau_i = 2197.03 \text{ ns}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = 0.04 \text{ ns}$$

$$\sum_{i=1}^n \chi_i^2 / (5 - 1) = 4.015 / 4 = 1.004$$



与期望值相符。

# 总结

---

- 最大似然估计量
- 四种方法给出最大似然估计的方差
  - ✓ 解析方法
  - ✓ 蒙特卡罗方法
  - ✓ RCF 边界方法
  - ✓ 图解法
- 双参数的最大似然法（等高线）
- 扩展的最大似然法（样本总量为随机数）
- 最大似然法处理分区数据（区间大小）
- 用最大似然法合并多组测量结果