# 实验物理中的统计方法 作业5

## 1.

**习题 4.1.** 带电粒子穿过气体会发生电离现象，电离的数目与入射粒子的类型有关。假设利用对电离的测量构造了某个检验统计量$t$，使其服从高斯分布：如果带电粒子是电子，则高斯分布的均值为 0，标准差为 1；如果带电粒子是 $\pi$ 介子，则高斯分布的均值为 2，标准差为 1。构造一个检验，通过要求 $t < 1$ 选择出电子事件。

(a) 该检验的显著性水平（*significance level*）如何？（显著性水平即在拒绝域中接受电子的概率。）

(b) 该检验排除带电粒子为 $\pi$ 介子的假设的功效（*power*）多大？有多大概率将 $\pi$ 介子鉴别为电子？

(c) 假定已知样本中 $\pi$ 介子和电子的比例分别为 99% 何 1%，求由 $t < 1$ 得到的电子样本的纯度（*purity*）。

(d) 假定要求所得电子样本的纯度不低于 95%，应当如何选择拒绝域（即判选条件）？此时该检验接受电子的效率和显著性水平如何？

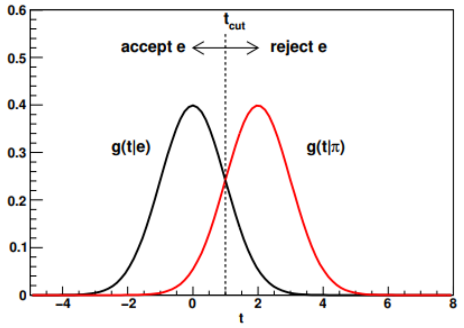


图 4.1: 用于判选电子 $e$ 和 $\pi$ 介子的检验统计量 $t$ 的概率密度，判选条件为 $t_{\mathrm{cut}} = 1$。

解：

(a)

高斯分布：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

显著性水平

$$\alpha=\int_1^\infty g(t|e)\mathrm{d}t=\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x=0.158655$$

(b)

功效

$$1-\beta=\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x=1-0.158655=0.841345$$

鉴别出错的概率

$$\beta=\int_{-\infty}^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x=0.158655$$

(c)

$$P(e|t<1)=\frac{P(e)P(t<1|e)}{P(e)P(t<1|e)+P(\pi)P(t<1|\pi)}=\frac{0.01\times(1-\alpha)}{0.01\times(1-\alpha)+0.99\times\beta}=0.050842$$

(d)

设拒绝域为$t_{cut}$，满足

$$P(e|t<1)=\frac{P(e)P(t<1|e)}{P(e)P(t<1|e)+P(\pi)P(t<1|\pi)}=\frac{0.01\times(1-\alpha)}{0.01\times(1-\alpha)+0.99\times\beta}=0.95$$

$$1-\alpha=\int_{-\infty}^{t_{cut}}g(t|e)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t_{cut}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\beta=\int_{-\infty}^{t_{cut}}g(t|\pi)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t_{cut}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x$$

数值求解，得到：

$$t_{cut}=-2.5153$$

效率

$$P(t<t_{cut}|e)=\int_{-\infty}^{t_{cut}}g(t|e)\mathrm{d}t=0.00594656$$

显著性水平

$$\alpha=\int_{t_{cut}}^{\infty}g(t|e)\mathrm{d}t=0.99405344$$