北京大學
PEKING UNIVERSITY

概率论沉思录

第2章：定量规则

杨振伟

概率论无外乎化常识为计算。

——拉普拉斯（1819）

本章要点

- 乘法规则
- 加法规则
- 定性性质
- 数值
- 记号与有限集策略

- 如果已知A和B的合情性，即$A|C$和$B|C$，那么逻辑积AB的合情性 $AB|C = ?$
- 要求：满足基本的合情条件

机器人决策过程的分解

- 决定AB为真的过程可分解为两个关于A和B的基本决策

（1）判定B为真； $(B|C)$
（2）接受B为真，判定A为真。 $(A|BC)$

等价地，

（1′）判定A为真； $(A|C)$
（2′）接受A为真，判定B为真。 $(B|AC)$

机器人对上面的步骤给出判定即给出相应的合情性。

机器人决策过程的分解

（1）判定B为真；　　　　　　　　$(B|C)$
（2）接受B为真，判定A为真。　　$(A|BC)$

- 要判定AB为真，则B必须为真，因此需要合情性$B|C$
- 在B为真的条件下，要进一步判定A为真，需要合情性$A|BC$
- 若B为假，则可直接判定$AB|C$为假，不需要$A|\bar{B}C$或$A|C$
- 不需要$A|B$、$B|A$
  - ✓ 如果已知信息C，则没必要考虑在不知信息C的条件下的判断

由于可交换性，也可以用$(A|C)$和$(B|AC)$。

用$(B|C)$和$(A|BC)$得到结果与用 $(A|C)$和$(B|AC)$得到的结果必须相同。

逻辑积的合情性函数形式

$(AB|C)$是$(B|C)$和$(A|BC)$的函数:

$$(AB|C) = F[(B|C),(A|BC)]$$

或 $(B|C)$和$(A|BC)$的函数:

$$(AB|C) = F[(A|C),(B|AC)]$$

可以证明，函数形式

$$(AB|C) = F[(A|C),(B|C)]$$

不满足定性合情条件（II）。

原因：给定C，可能A非常合情，B也非常合情，但无法判断AB是否非常合情。

其他可能性

- 引入实数

$$u = (AB|C),$$
$$v = (A|C),$$
$$w = (B|AC),$$
$$x = (B|C),$$
$$y = (A|BC)$$

u应当是v, w, x, y中两个或多个量的函数，共11种可能性：

$F_1(v,w)$, $F_2(v,x)$, $F_3(v,y)$, $F_4(w,x)$, $F_5(w,y)$, $F_6(x,y)$, $F_7(v,w,x)$, $F_8(v,w,y)$, $F_9(v,x,y)$, $F_{10}(w,x,y)$, $F_{11}(v,w,x,y)$.

$A \leftrightarrow B$给出

$$u \to u$$
$$v \to x$$
$$w \to y$$
$$x \to v$$
$$y \to w$$

$$u = F_1(v,w) = F_6(x,y)$$
$$u = F_2(v,x) = F_2(x,v)$$
$$u = F_3(v,y) = F_4(x,w)$$
$$u = F_5(w,y) = F_5(y,w)$$
$$u = F_7(v,w,x) = F_9(x,y,v)$$
$$u = F_8(v,w,y) = F_{10}(x,y,w)$$
$$u = F_{11}(v,w,x,y) = F_{11}(x,y,v,w)$$

除了$u = F(v,w)$和$u = F(x,y)$，其他都不满足合情条件

其他可能性（续）

C： 人
$A|C$： 此人眼睛蓝色
$B|C$： 此人头发棕色

$A|C$很合情
$B|C$很合情
$AB|C$很合情

C： 人
$A|C$： 此人左眼蓝色
$B|C$： 此人右眼棕色
(对应$A \Rightarrow \bar{B}$)

$A|C$很合情
$B|C$很合情
$AB|C$很不合情

$u = (AB|C)$,
$v = (A|C)$,
$w = (B|AC)$,
$x = (B|C)$,
$y = (A|BC)$

考虑$u = F_2(v, x)$， v和x在上面两种情况下可能分别相同，但u确可能相差很大。所以$u = F_2(v, x)$应当被排除。

其他可能性（续）

$u = (AB|C),$
$v = (A|C),$
$w = (B|AC),$
$x = (B|C),$
$y = (A|BC)$

假定A与B相互独立。则

$$w = x, \qquad y = v$$

考虑$u = F_3(v, y)$。此时，

$$u = F_3(v, v)$$

即当A与B相互独立时，$(AB|C)$的合情性仅与$(A|C)$有关。
所以$u = F_3(v, y)$应当被排除。

假定C = “A是不可能事件” $\equiv i$ 。则

$$u = v = y = i, \qquad w \rightarrow \text{不允许出现}$$

考虑$u = F_5(w, y) = F_5(y, w)$。此时，

$$i = F_5(?, i) = F_5(i, ?)$$

即其中一个变量变成不确定，所以$u = F_5(w, y)$应当被排除。
同样，$F_8(v, w, y)$和$F_{11}(v, w, x, y)$也应当被排除。

其他可能性（续）

如何排除$u = F_7(v, w, x)$?

$u = (AB|C)$,
$v = (A|C)$,
$w = (B|AC)$,
$x = (B|C)$,
$y = (A|BC)$

确定$F(x,y)$的形式

- $F(x,y)$：关于x和y的连续单调增函数，并假定可微（非必要条件）。则

$$F_1(x,y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \geq 0, \qquad F_2(x,y) \equiv \frac{\partial F}{\partial y} \geq 0$$

(下标表示对函数的第几个变量求偏导)

- 假设想求三个命题同时为真的合情性 $ABC|D$。由结合性 $ABC = (AB)C = A(BC)$，按照一致性要求，无论采用哪种方式都应当得到相同的结果。

确定$F(x,y)$的形式

- 若把BC当作一个命题，则

$$(ABC|D) = F[(BC|D),(A|BCD)]$$

由于$(BC|D) = F[(C|D),(B|CD)]$，所以

$$(ABC|D) = F\{F[(C|D),(B|CD)],(A|BCD)\}$$

- 若把AB当作一个命题，则

$$(ABC|D) = F[(C|D),(AB|CD)]$$

由于$(AB|CD) = F[(B|CD),(A|BCD)]$，所以

$$(ABC|D) = F\{(C|D),F[(B|CD),(A|BCD)]\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)]}$$

确定$F(x,y)$的形式

令 $u \equiv F(x,y), \qquad v \equiv F(y,z)$

则 $F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)]$ 简化为

$$F(u,z) = F(x,v)$$

分别对x和y求偏导

$$F_1(u,z)\frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x,v) \quad \Rightarrow \quad F_1(u,z)F_1(x,y) = F_1(x,v)$$

$$F_1(u,z)\frac{\partial u}{\partial y} = F_2(x,v)\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad F_1(u,z)F_2(x,y) = F_2(x,v)F_2(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(x,y) = G(x,v)F_1(y,z)}$$

其中 $G(x,y) \equiv \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(x,y)G(y,z) = G(x,v)F_2(y,z)}$$

确定$F(x,y)$的形式

定义 $G_1(x,y) \equiv \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}$ $G_2(x,y) \equiv \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}$

$F_{11}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2}$ $F_{12}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y} = F_{21}(x,y)$

$$G(x,y) = G(x,v)F_1(y,z)$$

对z求偏导

$$\Rightarrow \quad 0 = G_2(x,v)F_2(y,z)F_1(y,z) + G(x,v)\,F_{12}(x,y)$$

$$G(x,y)G(y,z) = G(x,v)F_2(y,z)$$

对y求偏导

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial G(x,y)G(y,z)}{\partial y} = G_2(x,v)F_1(y,z)F_2(y,z) + G(x,v)\,F_{12}(y,z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial G(x,y)G(y,z)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{G(x,y) = r\frac{H(x)}{H(y)}}$$

确定$F(x,y)$的形式

把 $\boldsymbol{G(x,y) = r\frac{H(x)}{H(y)}}$ 代入 $G(x,y) = G(x,v)F_1(y,z)$

$G(x,y)G(y,z) = G(x,v)F_2(y,z)$

$$\Rightarrow \quad F_1(y,z) = \frac{H(v)}{H(y)} \qquad F_2(y,z) = r\frac{H(v)}{H(z)}$$

因为 $dv = dF(y,z) = F_1(y,z)dy + F_2(y,z)dz = \frac{H(v)}{H(y)}dy + r\frac{H(v)}{H(z)}dz$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{H(v)} = \frac{dy}{H(y)} + r\frac{dz}{H(z)}$$

定义 $\ln\phi(x) = \int \frac{dx}{H(x)} \Rightarrow d[\ln\phi(x)] = \frac{dx}{H(x)}$

$$\Rightarrow \quad d\ln\phi(v) = d\ln\phi(y) + r\,d\ln\phi(z) \Rightarrow \boldsymbol{\phi(v) = C\cdot\phi(y)\phi^r(z)}$$

确定$F(x,y)$的形式

利用 $F[F(x,y),z]=F[x,F(y,z)]$ ，即 $F(u,z)=F(x,v)$

$+$ $\boldsymbol{\phi(v)=\phi[F(y,z)]=C\cdot\phi(y)\phi^{r}(z)}$

$\Rightarrow$ $\phi[F(u,z)]=C\cdot\phi(u)\phi^{r}(z) \;=\; \phi[F(x,v)]=C\cdot\phi(x)\phi^{r}(v)$

$\Rightarrow$ $C^{2}\cdot\phi(x)\phi^{r}(y)\phi^{r}(z) = C\cdot\phi(x)[C\cdot\phi(y)\phi^{r}(z)]^{r}$

$\Rightarrow$ $C\cdot\phi(x)\phi^{r}(y)\phi^{r}(z)=C\cdot\phi(x)\phi^{r}(y)\phi^{r^{2}}(z)$

对任意x,y,z都成立

$\Rightarrow$ $r=r^{2}\Rightarrow r=1$或0，其中平庸解 $r=0$ 不满足合情性条件

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\phi(v)=C\cdot\phi(y)\phi(z)}$ 或 $\boldsymbol{\phi(F(x,y))=C\cdot\phi(x)\phi(y)}$

确定$F(x,y)$的形式

定义 $$w(x) \equiv C \cdot \phi(x) = \exp\left\{\int^x \frac{dx}{H(x)}\right\}$$

$$\boldsymbol{\phi(u) = \phi[F(x,y)] = C \cdot \phi(x)\phi(y)}$$

⇒ $$w[F(x,y)] = w(x)w(y)$$

⇒ $$F(x,y) = w^{-1}[w(x)w(y)]$$

乘法规则

合情性

$$u = (AB|C),$$
$$v = (A|C),$$
$$w = (B|AC),$$
$$x = (B|C),$$
$$y = (A|BC)$$

$$w(x) \equiv \exp\left\{\int^{x} \frac{dx}{H(x)}\right\}$$

$$w(F(x,y)) = w(x)w(y)$$

⇒ 乘法规则

$$\boldsymbol{w(AB|C) = w(A|BC)w(B|C) = w(B|AC)w(A|C)}$$

乘法规则：对$w(x)$的额外限制

要求与常识定性相符，可以对$w(x)$作出额外限制

- 假设给定C时A是**确定的**，即$C \Rightarrow A$，此时

$$AB|C = B|C$$

同时，只要B不与C矛盾，A依然是确定的，于是必有

$$A|BC = A|C$$

$w(AB|C) = w(A|BC)w(B|C)$ ⇒ $w(B|C) = w(A|C)w(B|C)$

⇒ **命题的确定性由 $w(A|C) = 1$ 表示**

乘法规则：对$w(x)$的额外限制（续）

要求与常识定性相符，可以对$w(x)$作出额外限制

- 假设给定C时A是不可能的，即$C \Rightarrow \bar{A}$，则给定C时AB也是不可能的，有

$$AB|C = A|C$$

同时，只要B不与C矛盾，A依然是不可能的，必有

$$A|BC = A|C$$

$w(AB|C) = w(A|BC)w(B|C)$ ⇒ $w(A|C) = w(A|C)w(B|C)$

⇒ **命题的不可能性由 $w(A|C) = 0$（或$+\infty$）表示**

加法规则的推导

- 在二元逻辑中，命题A非真即假，$A\bar{A}$总是假的，$A+\bar{A}$总是真的
  ➔ A为假的合情性必须依赖于A为真的合情性
- 定义 $u \equiv w(A|B)$，$v \equiv w(\bar{A}|B)$，则比存在某种函数关系
$$v = S(u)$$
  显然，S是$0 \le u \le 1$上的单调递减函数，并且
$$S(0) = 1, \qquad S(1) = 0$$
- $S(u)$还必须与乘法规则一致：
$$w(AB|C) = w(A|C)w(B|AC)$$
$$w(A\bar{B}|C) = w(A|C)w(\bar{B}|AC)$$

加法规则的推导

- 利用 $w(B|AC) = S\big(w(\bar{B}|AC)\big)$，
  以及 $w(A\bar{B}|C) = w(A|C)w(\bar{B}|AC)$，则

$$w(A\bar{B}|C) = w(A|C)w(\bar{B}|AC) = w(A|C)S\big(w(B|AC)\big) = w(A|C)S\left(\frac{w(AB|C)}{w(A|C)}\right)$$

- 考虑$w(AB|C)$关于A和B交换对称性

$$w(A|C)S\left(\frac{w(A\bar{B}|C)}{w(A|C)}\right) = w(B|C)S\left(\frac{w(B\bar{A}|C)}{w(B|C)}\right)$$

这对所有A, B, C都成立。令 $\bar{B} = AD$，则$A\bar{B} = \bar{B}$，$B\bar{A} = \bar{A}$

$$w(A\bar{B}|C) = w(\bar{B}|C) = S[w(B|C)]$$
$$w(B\bar{A}|C) = w(\bar{A}|C) = S[w(A|C)]$$

令$x \equiv w(A|C)$，$y \equiv w(B|C)$，则

$$xS\left[\frac{S(y)}{x}\right] = yS\left[\frac{S(x)}{y}\right]$$

$0 \le S(y) \le 1, \qquad 0 \le x \le 1$

缩放性

加法规则的推导

$$xS\left[\frac{S(y)}{x}\right] = yS\left[\frac{S(x)}{y}\right]$$

缩放性

$0 \leq S(y) \leq 1, \qquad 0 \leq x \leq 1$

当$y = 1$时，很自然的结果

$$S[S(x)] = x \Rightarrow S(x) = S^{-1}(x)$$

加法规则的推导

令 $u = S(x)/y$，$v = S(y)/x$

$$xS\left[\frac{S(y)}{x}\right] = yS\left[\frac{S(x)}{y}\right] \Rightarrow yS(u) = xS(v) \qquad (1)$$

分别对 x 和 y 求导，可得

$$S'(u)S'(x) = S(v) - S'(v)S(y)/x = S(v) - S'(v)v \qquad (2)$$

$$S'(v)S'(y) = S(u) - S'(u)S(x)/y = S(u) - S'(u)u \qquad (3)$$

(2) 再对 y 求导，可得

$$\frac{S''(u)S(x)S'(x)}{y^2} = \frac{S''(v)S(y)S'(y)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S''(u)S'(x)u}{y} = \frac{S''(v)S'(y)v}{x} \Rightarrow \frac{S''(u)S'(x)u}{S(v)} = \frac{S''(v)S'(y)v}{S(u)} \qquad (4)$$

加法规则的推导

(2)和(3) ➔ $S'(x) = \dfrac{S(v) - S'(v)v}{S'(u)}$ $S'(y) = \dfrac{S(u) - S'(u)u}{S'(v)}$

代入 (4) 可得 $$\frac{S''(u)uS(u)}{S'(u)[S(u) - S'(u)u]} = \frac{S''(v)vS(v)}{S'(v)[S(v) - S'(v)v]} \quad (5)$$

(5) 对任意 u和v 都成立 ➔ 比值为常数（设为 $(m-1)$）

$$S''(u)uS(u) = S'(u)[S(u) - S'(u)u](m-1)$$

$$\frac{S''(u)}{S'(u)} = \frac{m-1}{u} - (m-1)\frac{S'(u)}{S(u)}$$

$$\frac{d}{du}\ln S'(u) + (m-1)\frac{d}{du}\ln S(u) = \frac{m-1}{u}$$

加法规则的推导

积分 ➔ $\ln S'(u) + (m-1)\ln S(u) = (m-1)\ln u + \ln C$

$$\Rightarrow \quad S'(u)S(u)^{m-1} = C'u^{m-1}$$

再积分 ➔ $\dfrac{S(u)^m}{m} = C'\dfrac{u^m}{m} + C''$ $\Rightarrow$ $S(u) = [C'u^m + C'']^{\frac{1}{m}}$

$u = 0$时，要求$S(u) = 1$ $\Rightarrow$ $C'' = 1$

$u = 1$时，要求$S(u) = 0$ $\Rightarrow$ $C' = -C'' = -1$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S(x) = (1 - x^m)^{\frac{1}{m}}} \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 < m < \infty$$

加法规则

$$S(x) = (1 - x^m)^{\frac{1}{m}}$$

$x = w(A|B)$，$S(x) = w(\bar{A}|B)$

加法规则 $w^m(A|B) + w^m(\bar{A}|B) = 1$ $\quad 0 < m < \infty$

把乘法规则改写为

$$w^m(AB|C) = w^m(A|BC)w^m(B|C) = w^m(B|AC)w^m(A|C)$$

定义 $p(x) \equiv w^m(x)$

乘法规则 $p(AB|C) = p(A|BC)p(B|C) = p(B|AC)p(A|C)$

加法规则 $p(A|B) + p(\bar{A}|B) = 1$

完备

逻辑和$(A+B)$的合情性

- 反复应用乘法规则和加法规则可得$(A+B)$的合情性

$$
\begin{aligned}
p[(A+B)|C] &= 1-p(\bar{A}\bar{B}|C) \\
&= 1-p(\bar{A}|C)p(\bar{B}|\bar{A}C) \\
&= 1-p(\bar{A}|C)[1-p(B|\bar{A}C)] \\
&= p(A|C)+p(\bar{A}B|C) \\
&= p(A|C)+p(B|C)p(\bar{A}|BC) \\
&= p(A|C)+p(B|C)[1-p(A|BC)] \\
&= p(A|C)+p(B|C)-p(AB|C)
\end{aligned}
$$

广义的加法规则

$$\boldsymbol{p[(A+B)|C]=p(A|C)+p(B|C)-p(AB|C)}$$

定性属性

乘法规则	$p(AB\|C)=p(A\|BC)p(B\|C)=p(B\|AC)p(A\|C)$
加法规则	$p(A\|B)+p(\bar{A}\|B)=1$

- 基于乘法规则、加法规则的推理理论与三段论有什么关联?

推理规则与强三段论

强三段论

前提:	$A \Rightarrow B$
观测:	A真
结论:	B真

前提:	$A \Rightarrow B$
观测:	B假
结论:	A假

令 $C \equiv (A \Rightarrow B)$，则这两个强三段论对应为

$$p(B|AC) = 1 \qquad\qquad p(A|\bar{B}C) = 0$$

若$C \equiv (A \Rightarrow B)$，则 $p(AB|C) = p(A|C)$， $p(A\bar{B}|C) = 0$

$$p(B|AC) = \frac{p(AB|C)}{p(A|C)} = \frac{p(A|C)}{p(A|C)} = 1$$

$$p(A|\bar{B}C) = \frac{p(A\bar{B}|C)}{p(\bar{B}|C)} = \frac{0}{p(A|C)} = 0$$

推理规则与弱三段论

弱三段论

前提:	$A \Rightarrow B$
观测:	B真
结论：	A变得更合情

前提:	$A \Rightarrow B$
观测:	A假
结论：	B变得更不合情

令 $C \equiv (A \Rightarrow B)$，则这两个弱三段论对应为

$$p(A|BC) \geq p(A|C) \qquad\qquad p(B|\bar{A}C) \leq p(B|C)$$

若$C \equiv (A \Rightarrow B)$，则 $p(B|AC) = 1$

$$p(A|BC) = p(A|C)\frac{p(B|AC)}{p(B|C)} = \frac{p(A|C)}{p(B|C)} \geq p(A|C)$$

$$p(B|\bar{A}C) = p(B|C)\frac{p(\bar{A}|BC)}{p(\bar{A}|C)} \geq p(B|C)$$

【因为 $p(\bar{A}|BC) \leq p(\bar{A}|C)$】

推理规则与更弱的三段论

更弱的三段论

前提：	A真则B更合情
观测：	B真
结论：	A变得更合情

令 C 代表背景信息，则大前提“A真则B更合情”表明

$$p(B|AC) > p(B|C)$$

更弱的三段论给出，在 $p(B|AC) > p(B|C)$的条件下，

$$p(A|BC) > p(A|C)$$

利用条件 $p(B|AC) > p(B|C)$,

$$\Rightarrow \boxed{p(A|BC) = p(A|C)\frac{p(B|AC)}{p(B|C)} > p(A|C)}$$

当 $p(B|C)$ 非常小时，A的合情性会大幅增加

合情性的赋值

乘法规则	$p(AB\|C) = p(A\|BC)p(B\|C) = p(B\|AC)p(A\|C)$
加法规则	$p(A\|B) + p(\bar{A}\|B) = 1$

满足合情性最一般化的一致性规则，限制了不同命题的合情性之间的关联，但尚未给出机器人可以进行合情推理的唯一规则。

需要利用合情性条件(III-b)和(III-c)将背景信息转换为确定的数值。

合情性条件(III-b)和(III-c)

III-b) 机器人总是考虑它拥有的与问题有关的所有证据，它不会随意忽略一些信息，只根据剩余信息得出结论。换言之，机器人是完全无意识形态的。

III-c) 机器人总是通过指定相同的合情性来表示相同的知识状态。即，如果在遇到两个问题时机器人的知识状态是相同的（除了可能的命题标记之外），那么它必须为二者指定相同的合情性。

互斥命题的合情性

考虑三个命题$\{A_1,A_2,A_3\}$中至少一个为真的合情性，即

$p(A_1+A_2+A_3|B)$

$$
\begin{aligned}
p[(A_1+A_2+A_3)|B] &= p(A_1+A_2|B)+p(A_3|B)-p(A_1A_3+A_2A_3|B) \\
&= p(A_1|B)+p(A_2|B)+p(A_3|B) \\
&\quad -p(A_1A_2|B)-p(A_1A_3|B)-p(A_2A_3|B) \\
&\quad +p(A_1A_2A_3|B) \\
&= 1-p(\bar{A}|C)p(\bar{B}|\bar{A}C)
\end{aligned}
$$

若$\{A_1,A_2,A_3\}$两两互斥，则 $p\left(A_iA_j\middle|B\right)=p(A_i|B)\delta_{ij}$

$$p[(A_1+A_2+A_3)|B]=p(A_1|B)+p(A_2|B)+p(A_3|B)$$

推广到n个两两互斥的命题

$$\boldsymbol{p[(A_1+\cdots+A_m)|B]=\sum_{i=1}^{m}p(A_i|B),\qquad 1\le m\le n}$$

互斥命题的合情性

考虑三个命题$\{A_1, A_2, A_3\}$中至少一个为真的合情性，即 $p(A_1 + A_2 + A_3|B)$

$$\begin{aligned} p[(A_1 + A_2 + A_3)|B] &= p(A_1 + A_2|B) + p(A_3|B) - p(A_1A_3 + A_2A_3|B) \\ &= p(A_1|B) + p(A_2|B) + p(A_3|B) \\ &-p(A_1A_2|B) - p(A_1A_3|B) - p(A_2A_3|B) \\ &+p(A_1A_2A_3|B) \\ &= 1 - p(\bar{A}|C)p(\bar{B}|\bar{A}C) \end{aligned}$$

若$\{A_1, A_2, A_3\}$两两互斥，则 $p\left(A_iA_j\middle|B\right) = p(A_i|B)\delta_{ij}$

$$p[(A_1 + A_2 + A_3)|B] = p(A_1|B) + p(A_2|B) + p(A_3|B)$$

推广到n个两两互斥的命题

$$\boldsymbol{p[(A_1 + \cdots + A_m)|B] = \sum_{i=1}^{m} p(A_i|B),\qquad 1 \le m \le n}$$

互斥命题的合情性

进一步假定命题$\{A_1,\ldots,A_n\}$不仅互斥，而且是穷举的，即背景信息确定其中有且仅有一个命题必须为真。则

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i|B) = 1$$

如何根据背景信息B确定$p(A_i|B)$的数值是一个难题。

将信息B转化为$p(A_i|B)$的数值的每一个新原理，都将开辟一类新应用。

互斥命题的合情性

问题I： 互斥且穷举的命题集合$\{A_1,\ldots,A_n\}$，求$p(A_i|B)_{\mathrm{I}}$的值

问题II：互斥且穷举的命题集合$\{A'_1,\ldots,A'_n\}$，求$p(A'_i|B)_{\mathrm{II}}$的值

$$A'_1 \equiv A_2, \qquad A'_2 \equiv A_1, \qquad A'_k \equiv A_k \quad 3 \le k \le n$$

推理机器人必须给出所谓的“变换方程”

$$p(A_1|B)_{\mathrm{I}} = p(A'_2|B)_{\mathrm{II}} \qquad p(A_2|B)_{\mathrm{I}} = p(A'_1|B)_{\mathrm{II}}$$

假设信息B对于A_1和A_2没任何区别，此时问题I和问题II完全等同。则机器人必须分配等同的合情性值来表示等同的知识状态：

$$p(A_i|B)_{\mathrm{I}} = p(A'_i|B)_{\mathrm{II}}, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

对称方程

$$\boxed{\boldsymbol{p(A_1|B)_{\mathrm{I}} = p(A_2|B)_{\mathrm{I}}}}$$

互斥命题的合情性

问题I： 互斥且穷举的命题集合$\{A_1,\dots,A_n\}$，求$p(A_i|B)_{\mathrm{I}}$的值

问题III：互斥且穷举的命题集合$\{A_1'',\dots,A_n''\}$，求$p(A_i''|B)_{\mathrm{II}}$的值

$\{A_1'',\dots,A_n''\}$是$\{A_1,\dots,A_n\}$的任意排列，其中$A_k''\equiv A_i$

推理机器人必须给出n个 "变换方程"

$$p(A_i|B)_{\mathrm{I}}=p(A_k''|B)_{\mathrm{III}}$$

假设信息B对于所有命题A_i都没任何区别，此时问题I和问题III完全等同。则机器人必须分配等同的合情性值来表示等同的知识状态：

$$p(A_i|B)_{\mathrm{I}}=p(A_i''|B)_{\mathrm{III}},\qquad i=1,2,\dots,n$$

对称方程

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{p(A_i|B)_{\mathrm{I}}=p(A_k|B)_{\mathrm{I}}}$$

结合$\sum_{i=1}^{n}p(A_i|B)=1$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{p(A_i|B)=\dfrac{1}{n},\qquad 1\le i\le n}$

无差别原则

讨论

- 给定机器人信息B确定了量$p(x)=p(A_i|B)$的数值，而不是合情性$x=A_i|B$的数值
- 给定乘法、加法规则后，推理规则并没有唯一确定。选择不同单调函数$p(x)$会给出一组不同的规则
- 然而，不论选择什么形式的$p(x)$，都会得到相同的结果和相同的$p(x)$值
- 推理结论由p而不是x表示，或数据严格确定的是p而不是x

与其说“$p(x)$”是x的任意单调函数，不如说
合情性$x\equiv A|B$是p的任意单调函数，定义在$0\le p\le 1$上。

讨论（续）

- 合情推理仅依赖于p，我们把 p 成为 **“概率”**
- 概率的数值完全由数据（信息）确定
- 概率 p 定义了度量合情程度的一种特定的标度
- 选择 p 不是因为它更正确，而是因为它更方便
- 正如在热力学中选择开尔文温标 T 不是因为它更正确，而是因为它更方便，热力学定律形式最简单；在实验课直接测量的意义上，开尔文温标的温度值是“刚性固定的”，与任何特定物质无关。

例：“伯努利坛子”问题

- 坛子中有10个大小和重量相同的球，标号为$\{1,2,\ldots,10\}$，其中标号为4,6,7的三个是黑球，其他是白球。摇动坛子并随机抽取一个球。（这是背景信息B）取出一个黑球的概率是多少?

定义命题：$A_i \equiv$ 取出的第i个球（$1 \le i \le 10$）

背景信息B对A_i没有任何区别，适用无差别原则

$$\Rightarrow \quad p(A_i|B) = \frac{1}{10}, \qquad 1 \le i \le 10$$

“取出一个黑球”就是“取出的球标号为4、6或7”

$$\Rightarrow \quad p(\text{黑球}|B) = p(A_4 + A_6 + A_7|B)$$
$$= p(A_4|B) + p(A_6|B) + p(A_7|B) = \frac{3}{10}$$

推广：$p(A|B) = \frac{M}{N}$

B：N个大小重量相同的球

A：取出其中M个特定的球

记号与有限集合策略

- 参数为命题的概率用大写字母P表示，如
$$P(A|B)$$
- 参数为数值的概率用其他函数符号表示，如
$$f(r|np)$$
- 为了与文献保持一致，偶尔会用小写字母p表示概率，如
$$p(x|y), p(A|B), p(x|B)$$
- 一致性定理仅适用于命题的有限集合上的概率
- 仅当有限集合的极限产生定义良好且表现良好的结果时，才允许扩展到无限集合

在涉及无限集合的任何数学运算中，要遵循有限集合策略：
仅将算术和分析的通常过程应用于具有有限数量的项的表达式。在完成计算之后，观察所得的有限表达式随着项数无限增多如何表现。

小结

- 乘法规则 $$p(AB|C) = p(A|BC)p(B|C) = p(B|AC)p(A|C)$$

- 加法规则 $$p(A|B) + p(\bar{A}|B) = 1$$

- 定性性质

  乘法规则与加法规则包含了所有推理规则：
  强三段论、弱三段论、更弱的三段论

- 数值

  无差别原则

  $$p(A_i|B) = p(A_k|B)$$

  $$p(A_i|B) = \frac{1}{n}, \qquad 1 \le i \le n$$

- 记号与有限集策略

  仅当有限集合的极限产生定义良好且表现良好的结果时，才允许扩展到无限集合