实验物理中的统计方法 作业3

1.

习题 2.1. 考虑 N 个服从多项分布的随机变量 $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_N)$，概率为 $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,n_N$，并且总试验次数为 $n_{\rm tot}=\sum_{i=1}^N n_i$。假设变量 k 定义为前 M 个 n_i 之和，

$$k=\sum_{i=1}^M n_i, \qquad M\leq N. \tag{2.1}$$

利用误差传递以及多项分布的协方差

$$\operatorname{cov}[n_i,n_j]=\delta_{ij}n_{\rm tot}p_i(1-p_i)+(\delta_{ij}-1)p_ip_jn_{\rm tot}, \tag{2.2}$$

求 k 的方差。证明该方差等于 $p=\sum_{i=1}^M p_i$ 并且总试验次数为 $n_{\rm tot}$ 的二项分布的方差。

解：

由定义：

$$\begin{aligned}
V[k]&=E[k^2]-E[k]^2\\
&=E[(\sum_{i=1}^M n_i)^2]-(\sum_{i=1}^M E[n_i])^2\\
&=\sum_{i=1}^M(E[n_i^2]-E[n_i]^2)+\sum_{i,j=1,i\neq j}^M(E[n_in_j]-E[n_i]E[n_j])\\
&=\sum_{i=1}^M V[n_i]+\sum_{i,j=1,i\neq j}^M \operatorname{cov}[n_i,n_j]\\
&=\sum_{i=1}^M n_{tot}p_i(1-p_i)+\sum_{i,j=1,i\neq j}^M(-p_ip_jn_{tot})\\
&=n_{tot}(\sum_{i=1}^M p_i-(\sum_{i=1}^M p_i)^2)\\
&=n_{tot}p(1-p)
\end{aligned}$$

其中：

$$p=\sum_{i=1}^M p_i$$

2.

习题 2.3. 考虑指数分布

$$f(x;\xi)=\frac{1}{\xi}e^{-x/\xi}, \qquad x\geq 0. \tag{2.3}$$

(a) 证明对应的累积分布函数为

$$F(x)=1-e^{-x/\xi}, \qquad x\geq 0. \tag{2.4}$$

(b) 证明给定 $x>x_0$ 时 x 处于 x_0 与 x_0+x' 之间的条件概率 等于 x 小于 x' 的概率 (非条件概率)，即

$$P(x\leq x_0+x'|x\geq x_0)=P(x\leq x'). \tag{2.5}$$

(c) 产生于大气上层的宇宙线 μ 子进入海平面的探测器，其中的一部分在探测器中停止并衰变。进入探测器与衰变的时间差 t 服从指数分布，t 的均值等于 μ 子的平均寿命 (近似为 2.2μS)。解释为什么 μ 子进入探测器前存活的时间对确定平均寿命没有影响。

解:

(a)

$$F(x)=\int_0^x f(x;\xi)\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{1}{\xi}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\xi}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{\xi}},x\geq 0$$

(b)

$$P(x\leq x_0+x'|x\geq x_0)=\frac{F(x_0+x')-F(x_0)}{1-F(x_0)}=1-\mathrm{e}^{\frac{x'}{\xi}}=F(x')=P(x\leq x')$$

(c)

由于指数分布没有记忆性，所以可以任意选取测量的零点。实验时测量的是进入探测器的粒子（对应$x\geq x_0$）中衰变的时间（对应x'）的概率分布（对应于等式右边的项），这一概率等于非条件概率，所以对测量没有影响。

3.

习题 2.6. 证明自由度为 n 的 χ^2 分布的累积分布函数可以表示为

$$F_{\chi^2}(x;n)=P(\frac{x}{2},\frac{n}{2}), \tag{2.10}$$

其中 P 为不完全伽马函数 *(incomplete gamma function)*

$$P(x,n)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x e^{-t}t^{n-1}dt. \tag{2.11}$$

$$\chi^2(x;n)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}$$

$$\begin{aligned}F_{\chi^2}(x;n)&=\int_0^x\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}t^{n/2-1}\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\frac{1}{\Gamma(n/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{n/2-1}\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}\frac{t}{2}\\&=P(\frac{x}{2};\frac{n}{2})\end{aligned}$$

证毕。

4.

习题 2.7. 设随机变量 X 服从参数为 ν 的泊松分布，求 $E[X]$ 和 $V[X]$。

$$f(n;\nu)=\frac{\nu^n}{n!}\mathrm{e}^{-\nu}$$

归一化条件:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\mathrm{e}^{-\nu}=1$$

即:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}=\mathrm{e}^{\nu}$$

得到:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\right)=\frac{\partial}{\partial \nu}\mathrm{e}^{\nu}=\mathrm{e}^{\nu}$$

所以：

$$\begin{aligned}E[X]&=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\nu^n}{n!}\mathrm{e}^{-\nu}\\&=\nu\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-\nu}\\&=\nu\end{aligned}$$

同理：

$$\begin{aligned}V[X]&=E[X^2]-E[X]^2\\&=\left(\nu\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-\nu}-\nu^2\\&=\nu\frac{\partial}{\partial \nu}(\nu\mathrm{e}^{\nu})\mathrm{e}^{-\nu}-\nu^2\\&=\nu+\nu^2-\nu^2\\&=\nu\end{aligned}$$

5.

习题 2.8. 假设 X 和 Y 分别服从参数为 ν_x 和 ν_y 的泊松分布，且相互独立。求 $Z=X+Y$ 的概率质量函数。

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{x=0}^{z}f(x;\nu_X)f(z-x;\nu_Y)\\&=\sum_{x=0}^{z}\frac{\nu_X^x}{x!}\mathrm{e}^{-\nu_X}\frac{\nu_Y^{z-x}}{(z-x)!}\mathrm{e}^{-\nu_Y}\\&=\sum_{x=0}^{z}\frac{\nu_X^x\nu_Y^{z-x}}{x!(z-x)!}\mathrm{e}^{-(\nu_X+\nu_Y)}\\&=\frac{(\nu_X+\nu_Y)^z}{z!}\mathrm{e}^{-(\nu_X+\nu_Y)}\end{aligned}$$

即Z遵循参数为$\nu_X+\nu_Y$的泊松分布。