实验物理中的统计方法 作业11

1.

习题 8.1. 考虑服从高斯分布的随机变量 x，均值 μ 和方差 σ^2 未知，并假设样本为 $x_1, \dots, x_n$。

(a) 利用矩方法构造 μ 和 σ^2 的估计量。利用函数 $a_1 = x$，$a_2 = x^2$，使得期待值 $E[a_i(x)]$ 对应于 x 的一阶和二阶代数矩。

(b) 计算 *(a)* 中得到的估计量 $\hat{\mu}$ 与 $\hat{\sigma^2}$ 的期待值。这两个估计量是否是无偏的？

8.1

(a) $E[a_1] = \int f(x;\mu,\sigma^2)\, x\, dx = \mu$.

$E[a_2] = \int f(x;\mu,\sigma^2)\, x^2 dx = \mu^2+\sigma^2$

$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\hat{\mu}^2 + \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.

(b) $E[\hat{\mu}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \frac{n}{n}\mu = \mu$

$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i^2] - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E[x_i^2] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} E[x_i]E[x_j]\right)$

$= \frac{1}{n}\cdot n(\mu^2+\sigma^2) - \frac{1}{n^2}\left(n(\mu^2+\sigma^2) + n(n-1)\mu^2\right)$

$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$\hat{\mu}$是无偏估计量，但$\hat{\sigma}^2$不是无偏估计量.

2.

习题 8.2. 考虑粒子反应中产生的 ρ^0 介子衰变为两个带电 π 介子 ($\pi^+\pi^-$)。衰变角定义为，在 $\pi^+\pi^-$ 质心系中 π^+ 运动方向与 ρ 的原初方向的夹角，见图 (8.1)。由于 ρ^0 的自旋为 1，π 介子的自旋为 0，可以证明 $\cos\theta$

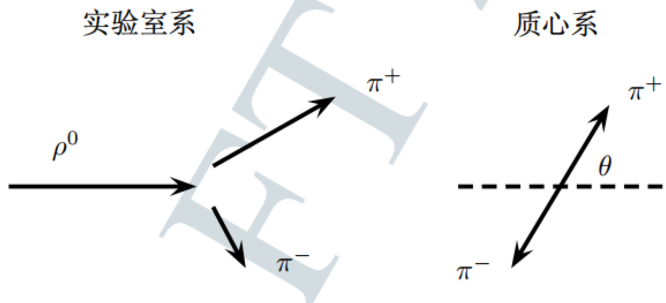


图 8.1: $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ 中衰变角的定义。

的分布具有如下形式

$$f(\cos\theta;\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta) + \frac{3}{2}\eta\cos^2\theta, \tag{8.1}$$

其中自旋排列参数 η 的取值范围为 $-\frac{1}{2} \le \eta \le 1$。

(a) 假设某反应产生的 ρ^0 中，测量到 n 个 $\cos\theta$ 值。利用矩方法，取 $a = x^2$，构造自旋排列参数的估计量 $\hat{\eta}$。为什么不能用 $a = x$ 构造估计量?

(b) 计算 $\hat{\eta}$ 的期待值和方差。

8.2

(a) $E[a]=E[x^2]=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}(1-\eta)+\frac{3}{2}\eta x^2\right)x^2dx=\frac{1}{2}(1-\eta)\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\eta\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\eta$

$\hat{\eta}=\frac{15}{4}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{3}\right)$

由 $f(\cos\theta;\eta)$ 的性质知 $E[x]=0$，故不能取 $a=x$ 构造估计量.

(b) $E[\hat{\eta}]=\frac{15}{4}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_i^2]-\frac{1}{3}\right)=\frac{15}{4}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot n\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\eta\right)-\frac{1}{3}\right)=\eta$

$E[\hat{\eta}^2]=\frac{225}{16}\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}E[x_i^4]+\sum_{i\neq j}E[x_i^2]E[x_j^2]\right)-\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}E[x_i^2]+\frac{1}{9}\right)$

$=\frac{225}{16}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{5}+\frac{8}{35}\eta\right)+\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\eta\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\eta\right)+\frac{1}{9}\right]$

$=\frac{n-1}{n}\eta^2+\frac{5}{7n}\eta+\frac{5}{4n}$.

$V[\hat{\eta}]=E[\hat{\eta}^2]-E[\hat{\eta}]^2=\frac{5}{4n}+\frac{5}{7n}\eta-\frac{1}{n}\eta^2$

3.

习题 9.1. 假设估计量 $\hat{\theta}$ 服从高斯分布，高斯分布的参数分别为 $\hat{\theta}$ 的真值 θ 和标准偏差 $\sigma_{\hat{\theta}}$。假设 $\sigma_{\hat{\theta}}$ 已知。

(a) 画出定义置信带的函数 $u_\alpha(\theta)$ 和 $v_\beta(\theta)$（参见 *Statistical Data Analysis* 第 *9.2* 节）。

(b) 证明置信水平为 $1-\gamma$ 时参数 θ 的中心置信区间 由下式给出

$$[\hat{\theta}-\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\gamma/2), \hat{\theta}+\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\gamma/2)], \tag{9.1}$$

其中 ϕ^{-1} 是标准高斯分布的分位数。

9.1

(a)

$$\alpha = \int_{-\infty}^{u_\alpha(\theta)} g(\hat{\theta};\theta)\, d\hat{\theta}$$

$$= \int_{-\infty}^{u_\alpha(\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{2\sigma_{\hat{\theta}}^2}} d\hat{\theta}$$

$$= \int_{-\infty}^{u_\alpha(\theta)/\sigma_{\hat{\theta}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta/\sigma_{\hat{\theta}})^2}{2}} dx$$

$$= \phi\left(\frac{u_\alpha(\theta)-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right)$$

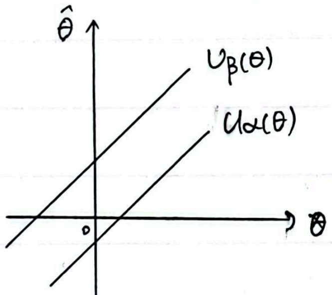
$$u_\alpha(\theta) = \sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(\alpha)+\theta = -\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\alpha)+\theta$$

同理: $\beta = \int_{v_\beta(\theta)}^{\infty} g(\hat{\theta};\theta)\, d\theta$

$$1-\beta = \int_{-\infty}^{v_\beta(\theta)} g(\hat{\theta};\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow v_\beta(\theta) = \sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\beta)+\theta$$

均为一次函数, 示意图如下:



(b) 置信水平为$1-\gamma$时, $\alpha=\beta=\frac{\gamma}{2}$

$u_\alpha(a)=\hat{\theta} \Rightarrow a = \hat{\theta}+\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\frac{\gamma}{2})$

$v_\beta(b)=\hat{\theta} \Rightarrow b = \hat{\theta}-\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\frac{\gamma}{2})$

$\Rightarrow$ 置信区间 $[\hat{\theta}-\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\frac{\gamma}{2}), \hat{\theta}+\sigma_{\hat{\theta}}\phi^{-1}(1-\frac{\gamma}{2})]$