

2024 春实验中的统计物理期中考试（杨振伟）

考试时间 1 小时 50 分钟

一、填空题（32 分，每题 4 分）

1. $X \sim N(0, 2^2)$, $Y \sim N(0, 2^2)$, 且 $V[X - Y] = 0$, 求 X 和 Y 的协方差矩阵。
2. 有 n 个编号为 1 到 n 的小球, n 个编号为 1 到 n 的盒子, 将小球放入盒子之中, 每个盒子放且仅放一个小球。小球编号与盒子编号相等称之为配对。求配对数 X 的方差。
3. 一个仪器在任意 t 时间内发生故障的次数 N_t 服从参数为 λt 的泊松分布, 求第一次发生故障的时间 T 的概率密度函数。
4. 平面上有方格子, 边长为 $a > 1$ 。将直径为 1 的圆形硬币扔在平面上, 求硬币不与方格线相交的概率。
5. 一种原子的半衰期为 10 年。现有 5 个原子, 经过了 20 年, 恰好衰变 2 个的概率是多少?
6. 一个显示屏随机显示从 1 到 N 的数字, 显示每个数字的概率相等。一个人观测此显示屏, 看到显示屏前后共显示了 n 个, 此人记录下观测到的最大数字 k 。求 k 的概率分布。
7. 元件发生故障的时刻 τ 的累积分布函数为 $F(\tau)$ 。现有两个相互独立的元件, 只有它们都正常工作时仪器才能正常工作, 求仪器正常工作的时间 T 的累积分布函数。
8. X 和 Y 都服从标准正态分布, $Z = X - Y$, 求 $E[Z]$, $E[|Z|]$, $V[|Z|]$ 。

二、计算题（68 分）

9. 雷达显示屏是一个半径为 R 的圆形区域, 圆内随机出现一个光点且其位置服从均匀分布。求光点与圆心距离的期望和方差。(10 分)
10. 一个矩形, 边长分别为 a 和 b , 且 $a > b$ 。在矩形的任意边上任取两个点, 求这两个点的距离的平方的期望值。(10 分)
11. 作业原题, 见图 1。(10 分)
12. 某一个衰变事件（具体是什么我不记得了）的发生是极为稀有的事情。本底数为 3, 现在观察到 6 个疑似信号, 求显著性水平。(10 分)
13. 制造了一批工件, 每个工件的横截面积（单位为平方毫米）服从 $N(\mu, 0.02^2)$ 。现在抽取 15 个样本, 测得样本方差为 $S^2 = 0.025^2$ 。已知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 问方差有没有明显差异? 参考数据: 卡方分布的两个上 α 分位数为 $\chi_{0.025}^2(14) = 26.119$, $\chi_{0.975}^2(14) = 5.629$ 。(10 分)

习题 1.3. 某粒子束流包含 10^{-4} 的电子，其余为光子。粒子通过某双层探测器，可能在 2 层都给出信号，也可能只有一层给出信号或者没有任何信号。电子 (e) 和光子 (γ) 在穿过该双层探测器给出 0, 1 或 2 个信号的概率如下

$$P(0|e) = 0.001$$

$$P(1|e) = 0.01$$

$$P(2|e) = 0.989$$

$$P(0|\gamma) = 0.99899$$

$$P(1|\gamma) = 0.001$$

$$P(2|\gamma) = 10^{-5}$$

(a) 如果只有一层给出信号，该粒子为光子的概率是多少？

(b) 如果两层都给出了信号，该粒子为电子的概率是多少？

图 1: 第 11 题

14. 蒲丰投针实验计算 π 的公式为 $\pi \approx \frac{2lN}{an}$ ，其中 N 为总投掷次数， n 为针与线相交次数。某次实验中， $l = 2.5\text{cm}$ ， $a = 3\text{cm}$ ， $N = 3408$ ， $n = 1808$ ，于是算出 $\pi = 3.1415929$ 。忽略 l 和 a 的误差，计算 π 的不确定度。(7 分)

15. 仪器在任意时间内观察到噪声的概率相等。在 $[0, T]$ 的时间窗口内观察到两个噪声，如果两个噪声间距小于 t ，就被误鉴别为信号。在时间窗口内已经观察到两个噪声的前提下，求误鉴别为信号的概率。(6 分)

16. 已知 $X_i \sim U(0, 1)$ 。定义随机变量

$$N_a = \min \left\{ k : \prod_{i=1}^k X_i < a \right\}, \quad 0 < a < 1.$$

求此随机变量的概率分布。