概率论沉思录

第1章：合情推理

杨振伟

当前，实际的逻辑学只擅长处理确定的、不可能的或者完全可疑的事情。幸运的是，这三者都不需要我们推理。因此，这个世界真正的逻辑是概率演算的逻辑，它考虑的是一名理性思考者的大脑中已经或者应该存在的概率大小。

——詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（1850）

本章要点

- 演绎推理与合情推理
- 布尔代数
- 合情条件

演绎推理

➢ 强三段论

前提：　A真则B真
观测：　A真

结论：　B真

A和B为命题，

其值为“真”（T）或“假”（F）。

前提：　A真则B真
观测：　B假

(逆)

结论：　A假

弱三段论与推理规则的扩展

➢ 弱三段论

前提：　A真则B真
观测：　B真

结论：A变得更合情

前提：　A真则B真
观测：　A假

结论：B变得更不合情

➢ 更弱的三段论

前提：　A真则B更合情
观测：　B真

结论：　A变得更合情

合情推理
(plausible reasoning)

推理规则：
演绎推理+合情推理

关键之处：不完全信息

思维机制与推理机器人

- 大部分思维都是基于合情推理而不是演绎推理
- 只要能明确定义问题，就可以制造出相应的推理机器人
- 推理机器人
  - 对命题（A、B、C等等）进行推理
  - 命题必须对机器人具有明确意义（简单明确的逻辑类型，非真即假）

布尔代数

- A和B为命题，其值为“真”（T）或“假”（F）
- 逻辑符号AB（积）、$A+B$（和）、$\bar{A}$（否）

A	B	AB	$A+B$	$\bar{A}$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

A和B更复杂的逻辑运算都可以用这几个符号表示

布尔代数的性质

- 幂等性 $\begin{cases} AA = A \\ A + A = A \end{cases}$
- 交换性 $\begin{cases} AB = BA \\ A + B = B + A \end{cases}$
- 结合性 $\begin{cases} A(BC) = (AB)C = ABC \\ A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C \end{cases}$
- 分配性 $\begin{cases} A(B + C) = AB + AC \\ A + (BC) = (A + B)(A + C) \end{cases}$
- 对偶性 $\begin{cases} \text{若} C = AB, \quad \text{则} \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} \\ \text{若} D = A + B, \text{则} \overline{D} = \bar{A}\,\bar{B} \end{cases}$

布尔代数性质的推论

- 由基本性质可以推导出很多等式（定理），例如
- $\bar{A} + A =$ 真
- 若$\bar{B} = AD$，则$A\bar{B} = \bar{B}$且$B\bar{A} = \bar{A}$

蕴含关系（implication）

- 命题 “$A \Rightarrow B$” 被称为 “A蕴含B”
- 蕴含关系是命题，并不断言A为真或B为真
- $A \Rightarrow B$：意味着$A\bar{B}$为假，或者$(\bar{A}+B)$为真
  可以写成逻辑方程 $A = AB$

$A \Rightarrow B$：
实际上是强三段论中的大前提 “A真则B真”

前提:	A真则B真		前提:	A真则B真
观测:	A真		观测:	B假
结论:	B真		结论:	A假

蕴含关系与弱三段论

- 对于蕴含关系$A \Rightarrow B$
  - 若A假，则B真或B假均满足逻辑方程$A = AB$
  - 若B真，则A真或A假也均满足逻辑方程$A = AB$

但从弱三段论来说，A假和B真确实传递了某些信息

前提：	A真则B真		前提：	A真则B真
观测：	B真		观测：	A假
结论：	A变得更合情		结论：	B变得更不合情

蕴含关系的陷阱

- $A \Rightarrow B$是否表示B在逻辑上可从A中推导出来?

在形式逻辑中，$A \Rightarrow B$仅表示 $A = AB$

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

只有当A真且B假时，$A \Rightarrow B$的值才为假

逻辑运算完备集

- 给定两个命题A和B，可以定义多少个新命题?
  - 积：AB；和：$A+B$；否：$\bar{A}$，$\bar{B}$；蕴含：$A \Rightarrow B$

$$C \equiv (A+\bar{B})(\bar{A}+A\bar{B})+\bar{A}B(A+B) =?$$

逻辑运算完备集?

➢ 给定两个命题A和B，可以定义多少个新命题?

- 积：AB；和：$A+B$；否：$\bar{A}$，$\bar{B}$；蕴含：$A \Rightarrow B$

$$
\begin{aligned}
C &\equiv (A+\bar{B})(\bar{A}+A\bar{B}) + \bar{A}B(A+B) \\
&= A\bar{A} + AA\bar{B} + \bar{B}\bar{A} + \bar{B}A\bar{B} + \bar{A}BA + \bar{A}BB \\
&= A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + \bar{A}B \\
&= A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B \\
&= A\bar{B} + \bar{A}(B+\bar{B}) \\
&= A\bar{B} + \bar{A} = \overline{A\left(\overline{A\bar{B}}\right)} = \overline{A(\bar{A}+B)} = \color{red}{\overline{AB}} \\
&= \color{red}{\bar{A}+\bar{B}} \\
&= (B \Rightarrow \bar{A}) = (A \Rightarrow \bar{B})
\end{aligned}
$$

蕴含关系（续）

- $(A \Rightarrow B) = (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) = \bar{A} + B$
- $(A \Rightarrow \bar{B}) = (B \Rightarrow \bar{A}) = \bar{A} + \bar{B}$
- $(\bar{A} \Rightarrow B) = (\bar{B} \Rightarrow A) = A + B$
- $(\bar{A} \Rightarrow \bar{B}) = (B \Rightarrow A) = A + \bar{B}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}+B$ $(A \Rightarrow B)$	$\bar{A}+\bar{B}$ $(A \Rightarrow \bar{B})$	$A+B$ $(\bar{A} \Rightarrow B)$	$A+\bar{B}$ $(\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T

n个命题上可能的逻辑函数

- 假设有n个（独立的）命题$\{A_1, \ldots, A_n\}$，定义逻辑函数$B = f(A_1, \ldots, A_n)$。A_i和B的值均为T或F。

- 问题：一共有多少个不同的逻辑函数?

- 答案：$N = 2^{n+1} = 2^M$，
  其中$M = 2^n$是定义域空间S中点的数目

逻辑函数：$n = 1$

A	T	F
$f_1(A)$	T	T
$f_2(A)$	T	F
$f_3(A)$	F	T
$f_4(A)$	F	F

S中有 $M = 2^1 = 2$个点，即$A =$ "T"或"F"

$$f_1(A) = \begin{cases} T, & \text{当}A = T\text{时} \\ T, & \text{当}A = F\text{时} \end{cases}$$

$$f_2(A) = \begin{cases} T, & \text{当}A = T\text{时} \\ F, & \text{当}A = F\text{时} \end{cases}$$

$$f_3(A) = \begin{cases} F, & \text{当}A = T\text{时} \\ T, & \text{当}A = F\text{时} \end{cases}$$

$$f_4(A) = \begin{cases} F, & \text{当}A = T\text{时} \\ F, & \text{当}A = F\text{时} \end{cases}$$

$$f_1(A) = A + \bar{A}$$
$$f_2(A) = A$$
$$f_3(A) = \bar{A}$$
$$f_4(A) = A\bar{A}$$

$$N = 2^M = 4$$

这4个逻辑函数显然各不相同

逻辑函数：$n=2$

A,B	TT	TF	FT	FF
$f_1(A,B)=AB$	T	F	F	F
$f_2(A,B)=A\bar{B}$	F	T	F	F
$f_3(A,B)=\bar{A}B$	F	F	T	F
$f_4(A,B)=\bar{A}\bar{B}$	F	F	F	T
$f_5(A,B)$	T	T	F	F
$f_6(A,B)$	T	F	T	F
$f_7(A,B)$	T	F	F	T
$f_8(A,B)$	F	T	T	F
$f_9(A,B)$	F	T	F	T
$f_{10}(A,B)$	F	F	T	T

$$f_5(A,B)=f_1+f_2=A$$
$$f_6(A,B)=f_1+f_3=B$$
$$f_7(A,B)=f_1+f_4=AB+\bar{A}\bar{B}$$

$$f_8(A,B)=f_2+f_3=A\bar{B}+\bar{A}B$$
$$f_9(A,B)=f_2+f_4=\bar{B}$$
$$f_{10}(A,B)=f_3+f_4=\bar{A}$$

逻辑函数：$n = 2$（续）

A, B	TT	TF	FT	FF
$f_1(A,B) = AB$	T	F	F	F
$f_2(A,B) = A\bar{B}$	F	T	F	F
$f_3(A,B) = \bar{A}B$	F	F	T	F
$f_4(A,B) = \bar{A}\bar{B}$	F	F	F	T
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f_{11}(A,B) = A + B$	T	T	T	F
$f_{12}(A,B) = A + \bar{B}$	T	T	F	T
$f_{13}(A,B) = \bar{A} + B$	T	F	T	T
$f_{14}(A,B) = \bar{A} + \bar{B}$	F	T	T	T
$f_{15}(A,B) = A + \bar{A}$	T	T	T	T
$f_{16}(A,B) = A\bar{A}$	F	F	F	F

$$f_{11}(A,B) = f_1 + f_2 + f_3 = A + B$$
$$f_{12}(A,B) = f_1 + f_2 + f_4 = A + \bar{B}$$
$$f_{13}(A,B) = f_1 + f_3 + f_4 = \bar{A} + B$$
$$f_{14}(A,B) = f_2 + f_3 + f_4 = \bar{A} + \bar{B}$$

通用方法：简化为规范析取范式

- 简化为规范析取范式（reduction to disjunctive normal form）
  - 对于n个命题$\{A_1, \dots, A_n\}$，存在$M = 2^n$个基本合取式

$$
\begin{gathered}
A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n \\
A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \bar{A}_n \\
\vdots \\
\bar{A}_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n \\
\vdots \\
\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{n-1} \bar{A}_n
\end{gathered}
$$

  - 存在$N = 2^M = 2^{n+1}$个不同的逻辑函数，其中$2^{n+1} - 1$个是基本合取式的逻辑和，还有一个是矛盾式：

$$f_{2^{n+1}-1}(A_1, \dots, A_n) = A\bar{A}$$

完备集

- 根据“简化为规范析取范式”的方法，“合取、析取、否定”这三种运算可以生成所有可能的逻辑函数，它们构成逻辑运算的完备集
- 根据对偶性，

$$A + B = \overline{\bar{A}\ \bar{B}}$$

所以，“合取”和“否定”本身就构成完备集
- 实际上，如果定义“与非”运算（NAND）

$$A \uparrow B \equiv \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

则所有逻辑函数都可以用”与非“构建
- 类似地，“或非”运算（NOR）也有同样功能

$$A \downarrow B = \overline{A + B} = \bar{A}\ \bar{B}$$

与非运算和或非运算

- $\bar{A} = A \uparrow \bar{A}$
- $AB = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$
- $A + B = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$

- $\bar{A} = A \downarrow \bar{A}$
- $A + B = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$
- $AB = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$

基本的合情条件（I）

I. 合情程度用实数表示

- 更高的合情性对应更大的数值（自然但非必要）
- 连续性假定（方便起见，非必要），即合情性的微小增加对应数值的微小增大
- 机器人为某个命题A指定的合情性往往依赖于我们是否告诉它另一个命题B的真假，用符号 $A|B$表示$(A|B) > (C|B)$ 表示，给定B为真，A比C更合情性

基本的合情条件（II）

II. 定性地与常识相符

- 不要求机器人根据相互矛盾的前提进行推理

$A|BC$ 意味着B和C是兼容的命题

- 机器人的推理方式定性地与人类思维方式相同

假定机器人的旧信息C更新到C'，从而使得

$$(A|C') > (A|C) \text{ 且 } (B|AC') = (B|AC)$$

即，A的合情性增加了，但给定A下B的合情性不变。

则必须有，

$$(AB|C') > (AB|C)\text{：} AB\text{合情性增加}$$
$$(\bar{A}|C') < (\bar{A}|C)\text{：} \bar{A}\text{合情性减少}$$

基本的合情条件（III）

III. 始终保持一致性推理

a) 如果可以通过多种方式推理出结论，那么每种可能的方式必须给出相同的结果。

b) 机器人总是考虑它拥有的与问题有关的所有证据，它不会随意忽略一些信息，只根据剩余信息得出结论。换言之，机器人是完全无意识形态的。

c) 机器人总是通过指定相同的合情性来表示相同的知识状态。即，如果在遇到两个问题时机器人的知识状态是相同的（除了可能的命题标记之外），那么它必须为二者指定相同的合情性。

小结

- 演绎推理与合情推理

演绎推理：强三段论
合情推理：强三段论、弱三段论、更弱的三段论

- 布尔代数

逻辑积、逻辑和、否构成逻辑运算完备集

- 合情条件

合情推理要满足三个基本的合情条件：
1）合情程度用实数表示；2）定性地与常识相符；
3）始终保持一致性推理