实验物理中的统计方法 期中试题回忆

填空题（$3 \times 10 = 30$）

1. 已知 $E[XY] = E[X]E[Y]$，下列一定成立的是：

   a. $D[XY] = D[X]D[Y]$
   b. $D[X+Y] = D[X] + D[Y]$
   c. X, Y 独立
   d. X, Y 相关

2. 从集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中随机选择一个数 X，再从 $\{1,\ldots,X\}$ 中随机选择一个数 Y，求 $P(Y=2)$。
3. 从 $\{1,\ldots,N\}$ 中随机生成 n 个数（可重复），求最大值恰为 k 的概率。
4. 若圆的直径 d 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，求面积 $S = \frac{\pi d^2}{4}$ 的概率密度函数。
5. 某元件的正常工作时间的累积分布函数为 $F(T)$，两个元件相互独立，只有同时正常工作电路才正常，求电路正常工作的累积分布函数。
6. $X \sim N(0,2^2)$，$Y \sim N(0,2^2)$，且 $V[X-Y]=0$，求 (X,Y) 的协方差矩阵。
7. $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$，令 $Z = X - Y$，求 $E[Z]$、$E[|Z|]$ 和 $V[|Z|]$。
8. 将 n 个编号为 $1 \sim n$ 的礼物随机放入编号为 $1 \sim n$ 的 n 个盒子中，求配对数（即礼物编号等于盒子编号的个数）k 的方差。
9. 给定三个半衰期为 10 年的粒子，求 20 年后恰有 2 个粒子衰变的概率。
10. 已知 $P(X > x_1) = 1 - \alpha$，$P(X < x_2) = 1 - \beta$，且 $x_1 < x_2$，求 $P(x_1 < X < x_2)$。

解答题（70）

11. 蒲丰投针问题：设针长为 l，平行线间距为 a，且 $l < a$，求针与线相交的概率。(10)
12. 证明公式 $E[X] = E[E[X|Y]]$，并应用该公式计算经过两个独立的串联子电倍增管电子数（服从泊松分布，均值分别为 ν_1, ν_2）的期望和方差。具体而言，将一个电子打入一个电极中，产生的电子数N服从均值为ν_1的泊松分布，这些电子全部入射第二个电极，产生的电子数X_i服从均值为ν_2的泊松独立同分布，求统计量$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$的期望和方差。(20)
13. 设 $X \sim U(0,1)$，定义 $Y = \tan\left(\pi(x - \frac{1}{2})\right)$，求 Y 的分布。(10)
14. 设 $X_i \sim U(0,\theta), i = 1,\ldots,n$独立同分布，令 $Y = \max(X_i)$，求 Y 的概率密度函数、期望和方差。(10)
15. 某粒子束流中含 10^{-4} 的电子，其余为光子。粒子经过双层探测器，在 0、1 或 2 层中被探测的条件概率如下：

$$
\begin{aligned}
&P(0|e) = 0.001, \quad P(1|e) = 0.01, \quad P(2|e) = 0.989 \\
&P(0|\gamma) = 0.99899, \quad P(1|\gamma) = 0.001, \quad P(2|\gamma) = 10^{-5}
\end{aligned}
$$

   - (a) 若只有一层探测器发出信号，粒子为光子的概率是多少？(10)
   - (b) 若两层探测器都发出信号，粒子为电子的概率是多少？(10)

16. 设 $X \sim \text{Poisson}(\nu_1)$，$Y \sim \text{Poisson}(\nu_2)$，求 $Z = X + Y$ 的分布。(10)