实验物理中的统计方法 作业6

1.

习题 4.2. 考虑某检验统计量 t 为输入变量 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ 的线性组合，系数为 $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$，即

$$t(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\mathbf{a}^T\mathbf{x}. \tag{4.1}$$

假定在 H_0 和 H_1 假设下，$\mathbf{x}$ 的均值分别为 $\boldsymbol{\mu}_0$ 和 $\boldsymbol{\mu}_1$，协方差矩阵分别为 V_0 和 V_1，检验统计量 t 的均值分别为 τ_0 和 τ_1，方差分别为 Σ_0^2 和 Σ_1^2（见 *Statistical Data Analysis* 第 *4.4.1* 节）。

(a) 证明：当系数为 $\mathbf{a}=W^{-1}(\boldsymbol{\mu}_0-\boldsymbol{\mu}_1)$ 时（其中 $W\equiv V_0+V_1$），下式定义的量（即费舍尔线性甄别量）达到最大值：

$$J(\mathbf{a})=\frac{(\tau_0-\tau_1)^2}{\Sigma_0^2+\Sigma_1^2}. \tag{4.2}$$

(b) 假定 $V_0=V_1=V$，且 $\mathbf{x}$ 在 H_0 和 H_1 假设下的概率密度函数 $f(\mathbf{x}|H_0)$ 和 $f(\mathbf{x}|H_1)$ 都是多维高斯分布，均值分别为 $\boldsymbol{\mu}_0$ 和 $\boldsymbol{\mu}_1$（参见 *Statistical Data Analysis* 的式 *4.26*）。记 H_0 和 H_1 假设下 $\mathbf{x}$ 的先验概率密度分别为 π_0 和 π_1。利用贝叶斯定理，求验后概率 $P(H_0|\mathbf{x})$ 和 $P(H_1|\mathbf{x})$ 作为 t 的函数。

(c) 推广该检验统计量，使其包含一个偏倚 a_0，即：

$$t(\mathbf{x})=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i. \tag{4.3}$$

证明此时验后概率 $P(H_0|\mathbf{x})$ 可以表示为

$$P(H_0|\mathbf{x})=\frac{1}{1+e^{-t}}, \tag{4.4}$$

其中偏倚 a_0 为

$$a_0=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_0^TV^{-1}\boldsymbol{\mu}_0+\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_1^TV^{-1}\boldsymbol{\mu}_1+\log\frac{\pi_0}{\pi_1}. \tag{4.5}$$

解:

(a)

设$B=(\mu_0-\mu_1)(\mu_0-\mu_1)^T$, $W=V_0+V_1$。由检验统计量的定义知道:

$$J(\vec{a})=\frac{\vec{a}^TB\vec{a}}{\vec{a}^TW\vec{a}}$$

极大值要求

$$\frac{\partial J}{\partial\vec{a}}=0$$

得到

$$B\vec{a}\vec{a}^TW\vec{a}=\vec{a}^TB\vec{a}W\vec{a}$$

代入$B=(\mu_0-\mu_1)(\mu_0-\mu_1)^T$

$$W\vec{a}=\frac{\vec{a}^TW\vec{a}}{\vec{a}^TB\vec{a}}(\mu_0-\mu_1)^T\vec{a}(\mu_0-\mu_1)$$

故知

$$a=\lambda W^{-1}(\mu_0-\mu_1)$$

代入方程得到

$$\lambda = 1$$

(b)

$$\begin{aligned} P(H_0|x) &= \frac{P(x|H_0)\pi_0}{P(x|H_0)\pi_0 + P(x|H_1)\pi_1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{P(x|H_1)}{P(x|H_0)}\frac{\pi_1}{\pi_0}} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu}_0)^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}_0) - \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu}_1)^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}_1) + \ln\frac{\pi_1}{\pi_0})} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(\frac{1}{2}\vec{\mu}_0^T V^{-1}\mu_0 - \frac{1}{2}\vec{\mu}_1 V^{-1}\vec{\mu}_1 - t + \ln\frac{\pi_1}{\pi_0})} \end{aligned}$$

(c)

代入$t = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$，得到

$$P(H_0|x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

$$a_0 = -\frac{1}{2}\vec{\mu}_0^T V^{-1}\mu_0 + \frac{1}{2}\vec{\mu}_1 V^{-1}\vec{\mu}_1 + \ln\frac{\pi_0}{\pi_1}$$

2.

习题 4.6. 在宇称守恒的条件下某可观测量 x 的取值大于零和小于零的概率均为 0.5。现在对 x 作了 *1000* 次观测，其中 *560* 次 $x > 0$，*440* 次 $x < 0$。根据这组观测，试问宇称守恒的假设合理吗？请用假设检验给出显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下的结论。

解:

测量的结果服从$p = 0.5$的二项分布。由假设检验

$$p = P(x \leq 440) + P(x \geq 560) = 0.00016505 < \alpha$$

说明宇称守恒的假设不成立。

3.

习题 4.7. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是来自 $N(\mu, 1^2)$ 的样本，考虑如下假设检验问题：

$$H_0: \mu = 2 \quad vs \quad H_1: \mu = 3.$$

检验的拒绝域选为 $W = \{\overline{x} \geq 2.6\}$。

(a) 当 $n = 20$ 时，求该检验犯第一类错误和第二类错误的概率；

(b) 如果要使得该检验犯第二类错误的概率 $\beta \leq 0.01$，则 n 最小应该取多少？

(c) 证明：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha \to 0$ 且 $\beta \to 0$。

解:

(a)由高斯分布的性质，知道:

$$\overline{x} \sim N\left(\mu, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

$$\alpha=\int_{2.6}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}=0.00364518$$

$$\beta=\int_{-\infty}^{2.6}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\sigma^2}}=0.0368191$$

(b)

$$\beta=\int_{-\infty}^{2.6}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2n}{2}}\leq 0.01$$

解得:

$$n\geq 33.8$$

即n最少为34。

(c)

$n\to\infty$时，$\sigma=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$，粒子变得完全可区分，此时$\alpha,\beta\to 0$。

4.

习题 4.8. 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,2^2)$ 的样本，考虑如下假设检验问题:

$$H_0:\ \mu=6\qquad vs\qquad H_1:\ \mu\neq 6.$$

检验的拒绝域取为 $W=\{|\overline{x}-6|\geq c\}$。试求 c 使得检验的显著性水平为 0.05，并求该检验在 $\mu=6.5$ 处犯第二类错误的概率。取 $n=16$。

解:

$$\int_{\mu-c}^{\mu+c}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=0.95$$

代入$\mu=6,\sigma=\frac{2}{\sqrt{16}}=\frac{1}{2}$，解得

$$c=0.979982$$

$$\beta=\int_{\mu-c}^{\mu+c}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu')^2}{2\sigma^2}}$$

代入$\mu'=6.5$，解得

$$\beta=0.829925$$