实验物理中的统计方法 作业1

1.

习题 1.1. 考虑某样本空间 S 以及给定子空间 B，并假设 $P(B)>0$。证明条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{1.1}$$

满足概率的公理。

解：

（1）验证非负性：

由于 $P(A\cap B)\geq 0, P(B)>0$，可以得到 $P(A|B)\geq 0$。

（2）验证全集的概率为1：

全集S可以取作B。当$A=B$时，$P(A\cap B)=P(B)$，此时$P(A|B)=1$。

（3）由概率的性质：

$$A\cap C=\varnothing, P(A\cup C)=P(A)+P(C)$$

由集合的性质易得：

$$(A\cap B)\cap(C\cap B)=\varnothing$$

由集合的关系运算与概率的性质，得到：

$$P((A\cup C)\cap B)=P((A\cap B)\cup(C\cap B))=P(A\cap B)+P(C\cap B)$$

故：

$$P(A\cup C|B)=\frac{P((A\cup C)\cap B)}{P(B)}=P(A|B)+P(C|B)$$

证毕。

2.

习题 1.2. 证明

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

(提示：将 $A\cup B$ 表示成 3 个不相交的子集的并。)

解：

由集合的关系运算：

$$A\cup B=\complement_A(A\cap B)+\complement_B(A\cap B)+A\cap B$$

这三个集合两两不交，由概率的性质得到：

$$P(A\cup B)=P(\complement_A(A\cap B))+P(\complement_B(A\cap B))+P(A\cap B)$$

利用

$$A=A\cap B+\complement_A(A\cap B), B=A\cap B+\complement_B(A\cap B)$$

等式右边的集合交集为空，由概率的性质得到

$$P(A)=P(A\cap B)+P(\complement_A(A\cap B)), P(B)=P(A\cap B)+P(\complement_B(A\cap B))$$

代入得到:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

3.

习题 1.3. 证明德摩根律（又见集合运算）的一般形式。设 $\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ 是一列集合（可能是不可数多个），证明：

(a) $(\cup_\alpha A_\alpha)^c=\cap_\alpha A_\alpha^c$;

(b) $(\cap_\alpha A_\alpha)^c=\cup_\alpha A_\alpha^c$;

解:

(a) 设全集为S，只需证明:

$$(\cup_\alpha A_\alpha)\cup(\cap_\alpha A_\alpha^c)=S,(\cup_\alpha A_\alpha)\cap(\cap_\alpha A_\alpha^c)=\varnothing$$

- 先证明第一个等式:

用反证法，假设S中存在集合 B 不能由等式左面的两个集合的并表出。

说明这个集合至少由一部分不在两个集合的并中，所以可以不妨假设B 既不在$(\cup_\alpha A_\alpha)$中，也不在$(\cap_\alpha A_\alpha^c)$中。

由B 不在$(\cup_\alpha A_\alpha)$中，B一定不在任何一个集合 A_α 内。

由定义，这个集合包含于所有 A_α^c 内，则必然包含于集合$(\cap_\alpha A_\alpha^c)$中，矛盾。

- 再证明第二个不等式:

用反证法，若集合 B同时包含于等式左边的两个集合中。

由 B 包含于$(\cap_\alpha A_\alpha^c)$内，知B于任何A_α均不交。

故不可能出现在$(\cup_\alpha A_\alpha)$中，矛盾。

(b)

同理设全集为S，只需证明

$$(\cap_\alpha A_\alpha)\cup(\cup_\alpha A_\alpha^c)=S,(\cap_\alpha A_\alpha)\cap(\cup_\alpha A_\alpha^c)=\varnothing$$

可以注意到，上面的等式仅仅是将A_α替换成了A_α^c，所以证明过程完全相同。

- 先证明第一个等式:

用反证法，假设S中存在集合 B 不能由等式左面的两个集合的并表出。

说明这个集合至少由一部分不在两个集合的并中，所以可以不妨假设B 既不在$(\cup_\alpha A_\alpha^c)$中，也不在$(\cap_\alpha A_\alpha)$中。

由B 不在$(\cup_\alpha A_\alpha^c)$中，B一定不在任何一个集合 A_α^c 内。

由定义，这个集合包含于所有 A_α ，则必然包含于集合$(\cap_\alpha A_\alpha)$中，矛盾。

- 再证明第二个不等式:

用反证法，若集合 B同时包含于等式左边的两个集合中。

由 B 包含于$(\cap_\alpha A_\alpha)$中，知B于任何A_α^c均不交。

故不可能出现在$(\cup_\alpha A_\alpha^c)$中，矛盾。

4.

习题 1.4. 如果一个随机现象的样本空间 Ω 充满某个区域，其度量（长度、面积或体积等）大小可用 S_Ω 表示。任意一点落在度量相同的子区域内（可能位置不同）是等可能的。若事件 A 为 Ω 中的某个子区域，且其度量大小可以用 S_A 表示。则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

这个概率称为几何概率。试证明几何概率满足概率公理化定义。

（1）证明非负性：

由题意，$S_A \geq 0, S_\Omega > 0$，故

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} \geq 0$$

（2）证明全集的概率为1：

可以看出，$A = \Omega$时，

$$P(\Omega) = \frac{S_\Omega}{S_\Omega} = 1$$

（3）证明可加性：

考虑事件A,B互不相交，即两个区域的度量没有重合，得到

$$S_{A\cup B} = S_A + S_B$$

从而

$$P(A\cup B) = \frac{S_{A\cup B}}{S_\Omega} = \frac{S_A + S_B}{S_\Omega} = P(A) + P(B)$$

5.

习题 1.5. 某粒子束流包含 10^{-4} 的电子，其余为光子。粒子通过某双层探测器，可能在 2 层都给出信号，也可能只有一层给出信号或者没有任何信号。电子 (e) 和光子 (γ) 在穿过该双层探测器给出 0，1 或 2 个信号的概率如下

$$P(0|e) = 0.001 \qquad P(0|\gamma) = 0.99899$$
$$P(1|e) = 0.01 \qquad P(1|\gamma) = 0.001$$
$$P(2|e) = 0.989 \qquad P(2|\gamma) = 10^{-5}$$

(a) 如果只有一层给出信号，该粒子为光子的概率是多少？

(b) 如果两层都给出了信号，该粒子为电子的概率是多少？

(a)

$$P(\gamma|1) = \frac{P(\gamma)P(1|\gamma)}{P(e)P(1|e) + P(\gamma)P(1|\gamma)} =$$
$$\frac{0.9999 \times 0.001}{0.0001 \times 0.01 + 0.9999 \times 0.001} \approx 0.9990$$

(b)

$$P(e|2) = \frac{P(e)P(2|e)}{P(e)P(2|e) + P(\gamma)P(2|\gamma)} =$$

$$\frac{0.0001 \times 0.989}{0.0001 \times 0.989 + 0.9999 \times 0.00001} \approx 0.9082$$