

实验物理中的统计方法

chap 01 基本概念

1. 随机事件：现象 A 有可能发生，也有可能不发生，那么现象 A 发生的事例叫做随机事件。

2. 概率

柯尔莫戈夫公理：（概率的定义）概率是事件的函数。

- $P(A) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

3. 条件概率与独立性

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

A 与 B 独立: $P(A|B) = P(A)$

$A \cap B = \emptyset$ 不能推出 AB 独立无关。

4. 概率的诠释

- 概率是相对频率（**可重复**实验中某个结果出现的次数占所有结果的比例）
- **主观**概率（贝叶斯概率）

$P(A)$ = 对 A 为真的信心程度

5. 贝叶斯定理与全概率公式

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(\cup_i (B \cap A_i)) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

阐释：

- $P(A)$ 为理论的**先验概率**：“抛掷一枚硬币，正面反面向上的可能性各占一半”这一理论正确的概率
- $P(B|A)$ 为理论预言的实验正确的概率：“硬币正面向上的概率为 $\frac{1}{2}$ ”
- $P(A|B)$ 为理论的**后验概率**

将 $P(A|B)$ 作为下一次的先验概率，进行不断迭代。

例子：三门问题

- 参赛者可看见三扇关闭的门，其中一扇门后面有一辆汽车，选中它即可赢得汽车；另外两扇门后面各藏有一只山羊。参赛者先选定一扇门，但在开启之前，知情的主持人会在其余两扇门中打开一个后面是山羊的门，并讯问参赛者是否更换其选择的门。问题是：参赛者更换选择是否会增加赢得汽车的机会？



三门问题的贝叶斯解法：

不失一般性，可以始终将嘉宾选择的门标记为“1”，将主持人打开的门标记为“3”，将剩下的门标记为“2”。

第 i 个门后面是汽车的先验概率为

$$P(T_i) = 1/3$$

如果汽车在1号门，主持人打开3号门的条件概率为

$$P(O_3|T_1) = 1/2$$

如果汽车在2号门，主持人打开3号门的条件概率为

$$P(O_3|T_2) = 1$$

如果汽车在3号门，主持人打开3号门的条件概率为

$$P(O_3|T_3) = 0$$

由贝叶斯定理，主持人打开3号门的条件下，在1号门和2号门发现汽车的条件概率分别为：

$$\begin{aligned} P(T_1|O_3) &= \frac{P(O_3|T_1)P(T_1)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)P(T_i)} = \frac{P(O_3|T_1)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)} \\ &= \frac{1/2}{1/2 + 1 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(T_2|O_3) &= \frac{P(O_3|T_2)P(T_2)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)P(T_i)} = \frac{P(O_3|T_2)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3|T_i)} \\ &= \frac{1}{1/2 + 1 + 0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

所以，嘉宾变更选择后获得汽车的概率更大。

累积分布函数 (c.d.f.)

7. α 分位数、中位数、众数

定义:

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

按照数值小的一方面积分定义。

即, α -分位数称为下侧 α -分位数, 当然也可以对应的定义上侧 α -分位数。

8. 直方图与概率密度函数

联合概率密度分布函数 $f(x, y)$

边缘概率密度 $f_x(x), f_y(y)$

相互独立:

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$$

9. 随机变量的函数

- 一维随机变量

函数 $a = a(x)$, x 的概率密度函数 $f(x)dx$

$$g(a)da = f(x)dx$$

得到:

$$g(a) = f(x) \left| \frac{dx(a)}{da} \right|$$

- 多维随机变量的函数

如: $z = xy$

Mellin 卷积

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}$$

Flourier 卷积

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(z-x)dx$$

- Jacobi 行列式

做变换, 将我们不关心的函数部分积分掉, 得到我们关心的概率。

10. 期待值与方差

期待值、方差、标准差

- 期待值

$$\mu = E[x] = \int x f(x)dx$$

- 协方差

$$\text{cov}[x, y] = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - \mu_x \mu_y$$

- (Pearson)相关系数

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{cov}[x,y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

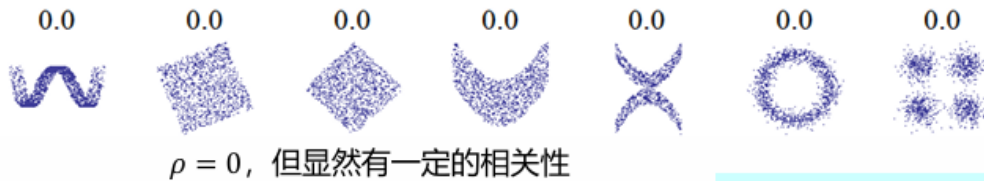
◦ 协方差矩阵 V :

$$V_{ij} = \text{cov}[x_i, x_j]$$

由定义，协方差矩阵为对称矩阵。

相关性定义的局限性：相关系数为0，但是不能说明x与y不相关。

其他的比较方式：秩相关性（只看顺序，不看数值）等等



原点矩与中心矩

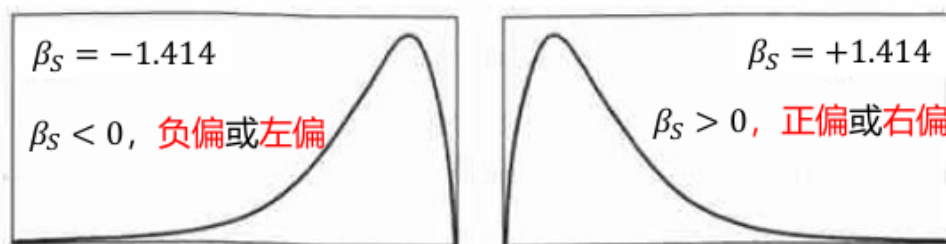
$$\mu_k = E(X^k)$$

$$\nu_k = E[(X - E(X))^k]$$

其他特征数:

偏度系数

β_S 描述分布偏离对称性的程度



11. 特征函数

对于随机变量 X ，称 e^{itX} 的数学期望值为随机变量的特征函数。

$$\varphi(t) = E[e^{itX}]$$

对于连续的情况，

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x) dx$$

特征函数的性质:

如果 XY 相互独立，则特征函数

$$\varphi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX} e^{itY}] = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$$

一例:

已知随机变量 X_1, \dots, X_n 服从相同的概率分布 $f(x)$ 且相互独立，则如何计算 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ 的概率分布函数?

解:

将卷积转化为乘积，都化成特征函数处理。（傅里叶变换的性质）

12. 不确定度的传递

问题表述：

假设我们对某个量测量了一组值 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ，并得到其协方差 $V_{ij} = \text{cov}[x_i, x_j]$ （表征与 x_i 有关的测量不确定度）。不确定度的传递^{(1) 73} 现考虑一函数 $y = y(\vec{x})$ ，如何求其方差 $V[y]$ ？

例：

考虑随机变量 X_1, X_2 与不确定度 σ_1, σ_2 ，计算 $Y = f(X_1, X_2)$ 的不确定度？

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_{X_2}^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_2} \text{cov}[X_1, X_2]}$$

证明：

认为误差不太大，将 Y 在平均值附近展开：

$$y(\vec{x}) = y(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} (x_i - \mu_i)$$

计算

$$\sigma_y = E[y^2] - E[y]^2$$

即可得到结果。

随机变量之间的相关性往往与坐标选取有关，可以通过正交变换消除相关性。可以使用类似的方案得到结果：

实验上测量带电粒子动量通常是，测量粒子在探测器中各点的击中坐标 (x, y) ，然后拟合径迹。径迹往往用极坐标 (r, θ) 描述。一般来说， (x, y) 的测量不相关。 (r, θ) 是否相关？

两种坐标的变换关系：

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x$$

$$V_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

由于

$$U_{r\theta} = A V_{xy} A^T$$

$$A_{ij} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix}$$

坐标变换后的协方差矩阵为

$$U_{r\theta} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r^2} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} x^2 \sigma_x^2 + y^2 \sigma_y^2 & xy(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \\ xy(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) & x^2 \sigma_x^2 + y^2 \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

除非处处满足 $\sigma_x = \sigma_y$ ，否则 (r, θ) 有相关性。

由于实对称矩阵可以正交相似对角化，所以一定可以找到对角化的协方差矩阵。

chap 02 常用概率分布

二项分布

1. 定义

N 次**独立**测量(伯努利试验)，每次**只有**成功(概率始终为 p) 或失败(概率为 $1 - p$)两种可能。

定义随机变量 n 为成功的次数，则 n 服从二项分布：

$$f(n; N, p) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

记作 $B(N, p)$ 。

2. 平均值与方差

随机变量 n 的平均值

$$E[n] = Np$$

方差

$$V[n] = Np(1-p)$$

例：计算探测效率与探测效率的不确定度。

探测效率

$$\varepsilon = \frac{N'}{N}$$

假设探测到的粒子数遵循二项分布， $(E(N') = N\varepsilon)$

则

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\sqrt{N\varepsilon(1-\varepsilon)}}{N}$$

多项分布

- 测量的结果不止一种，将其中一种视为成功，其他视作失败，则变为二项分布。

泊松分布

- 泊松分布可以看作二项分布的极限近似，在 $N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, N \rightarrow \nu$ 的情况下，得到：

$$f(n; \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}$$

- 均值

$$E[n] = \nu$$

方差

$$V[n] = \nu$$

泊松分布的特点： $n \pm \sqrt{n}$

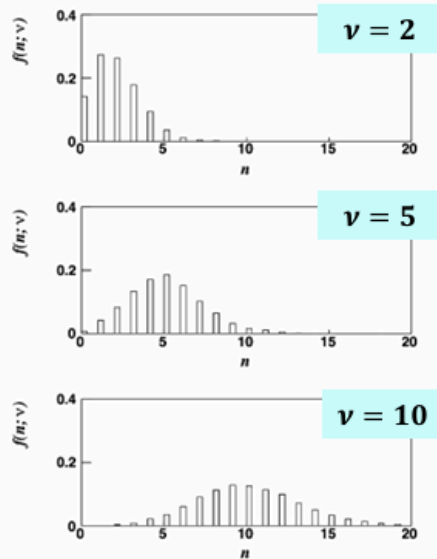
- 泊松过程——泊松分布的产生

条件：

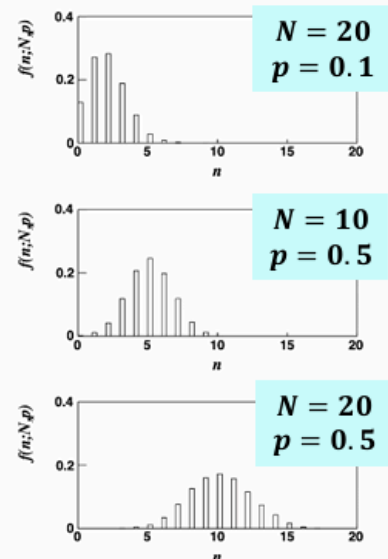
- 单位时间事件发生的概率固定
- 同时发生两次事件几乎不可能（每次事件发生的概率低）
- 每次事件发生是相互独立的

例：

泊松分布



二项分布



哪两个最相似？

N 越大， p 越小，泊松分布与二项分布越接近！

例：

假设某人站在路边想搭便车。

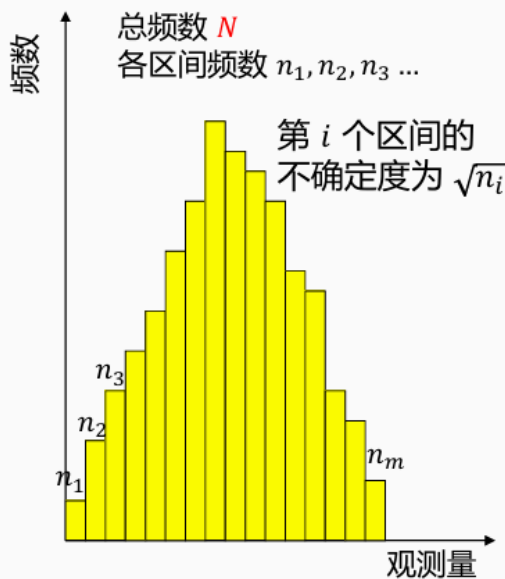
- (1) 每分钟过路的汽车数服从泊松分布，平均每分钟过路一辆，计算一小时通过的汽车数的分布。
- (2) 每分钟过路的汽车数服从泊松分布，平均每分钟过路一辆。假设每辆车让搭便车的概率为 1%，并相互独立。计算过了60辆车后还未能搭上车的概率。

解：

对于问题1，分布显然满足泊松分布的条件（时间可以无限细分，时间无限短的时候通过的汽车数目趋于零）。

对于问题2，分布满足二项分布的条件。

例：



直方图可看成

1. 事例总数 N 服从泊松分布，每个区间频数 $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ 服从多项分布 ($\sum_{i=1}^m n_i = N$)
2. 或者，每个区间相互独立的泊松分布

总频数 N 的不确定度: $\Delta N = \sqrt{N}$

或由独立的 n_i 的不确定度传递得

$$\begin{aligned} (\Delta N)^2 &= (\Delta n_1)^2 + (\Delta n_2)^2 + \dots + (\Delta n_m)^2 \\ &= n_1 + n_2 + \dots + n_m \\ &= N \end{aligned}$$

注意：当 $N < 5$ 时不确定度估计会有很大的偏差。

均匀分布

1. 函数形式

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

2. 均值与方差

$$\begin{aligned} E[x] &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ V[x] &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

均匀分布是蒙特卡洛方法实现的基础！

指数分布

1. 函数形式

$$f(x; \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi}, & x > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

2. 期望与方差

$$E[x] = \xi, V[x] = \xi^2$$

指数分布没有记忆性，可以任意选取开始位置！

高斯分布

1. 函数形式

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

记作 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

2. 期望值

$$E[x] = \mu$$

方差

$$V[x] = \sigma^2$$

高斯分布是对连续变量概率分布的很好近似。

中心极限定理

高斯分布的重要性在于，如果一个随机变量是由大量小贡献随机变量之和构成的，那么它往往服从高斯分布。

对于 n 个独立的随机变量 x_i ，如果每个 x_i 的方差存在，那么这些变量之和构成的随机变量

$$y = \sum_{i=1}^n x_i$$

在 $n \rightarrow \infty$ 的极限下，服从高斯分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

测量不确定度通常来自很多贡献之和，所以重复测量的值可以看作服从高斯分布的随机变量。

注意，变量 y 的分布形式与 x 原来的分布形式无关。

多维高斯分布通过协方差矩阵定义：

$$f(\vec{x}; \vec{\mu}, V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |V|^{1/2}} e^{\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T V^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}$$

对于二维高斯分布可以证明

卡方分布

1. 定义

对于相互独立的高斯随机变量 x_1, \dots, x_n ，定义

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

得到 z 满足的分布：

$$f(z; n) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}$$

记作 $\chi^2(n)$

2. 均值

$$E[z] = n$$

方差

$$V[z] = 2n$$

例：最小二乘法的拟合优度检验

$$y = f(x) = kx + b$$

改变 k 与 b 的取值，使得

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

极小。此时我们认为估计的结果是最好的。

不断重复实验，得到一系列卡方的值，这个值满足自由度为 $(n-2)$ 的卡方分布。

拟合优度：

P值（假设检验）判断有多大的概率出错（理论模型与实际情况是否可以认为相符）

柯西分布

柯西（布莱特-魏格纳）分布

连续随机变量 x 的柯西分布为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

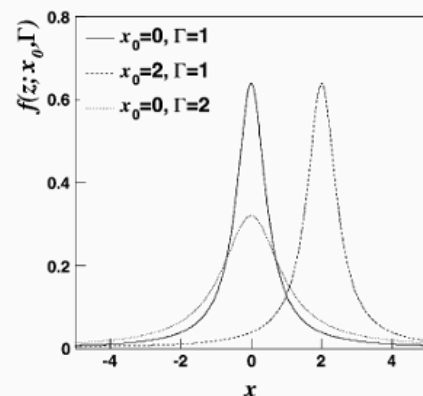
它是布莱特-魏格纳分布的特例

$$f(x; \Gamma, x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{\Gamma^2/4 + (x - x_0)^2}$$

x_0 ：模（most probable value）

Γ ：半高全宽（full with half maximum）

$E[x]$ 没有好的定义， $V[x] \rightarrow \infty$



常用于描述“共振态”粒子的不变质量分布，例如 ρ, K^*, ϕ^0, \dots
 Γ = 衰变率（平均寿命的倒数）

朗道分布

速度为 $\beta = v/c$ 的带电粒子穿过厚度为 d 的薄物质层，其能量损失 Δ 服从朗道分布：

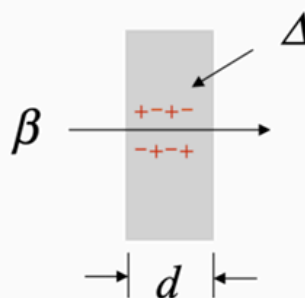
$$f(\Delta; \beta) = \frac{1}{\xi} \phi(\lambda),$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u \ln(u) - \lambda u} \sin \pi u \, du$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi} \left[\Delta - \xi \left(\ln \frac{\xi}{\epsilon'} + 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right]$$

$$\xi = \frac{2\pi N_A e^4 Z^2 \rho \Sigma Z}{m_e c^2 \Sigma A} \frac{d}{\beta^2}$$

$$\epsilon' = \frac{I^2 (1 - \beta^2) \exp(\beta^2)}{2 m_e c^2 \beta^2}$$

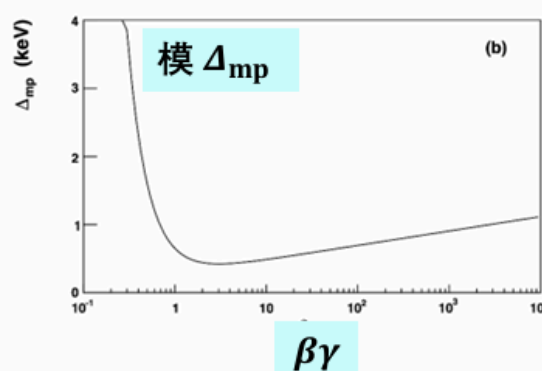
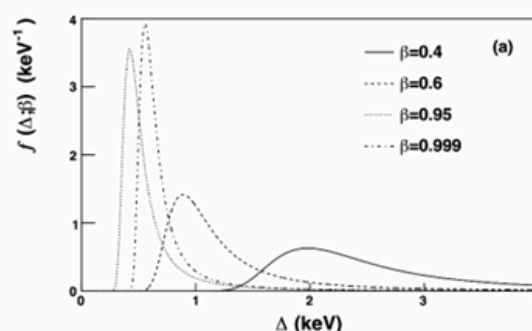


厚度 d 增大时，趋于正态分布。

常用于描述粒子的电离能损或能量沉积。

朗道分布有长的“朗道尾部”
→ 所有的矩都发散

模 (most probable value)
对 β 很敏感
→ 可用于粒子鉴别(PID)



贝塔分布

连续随机变量 $0 < x < 1$ 的贝塔分布为：

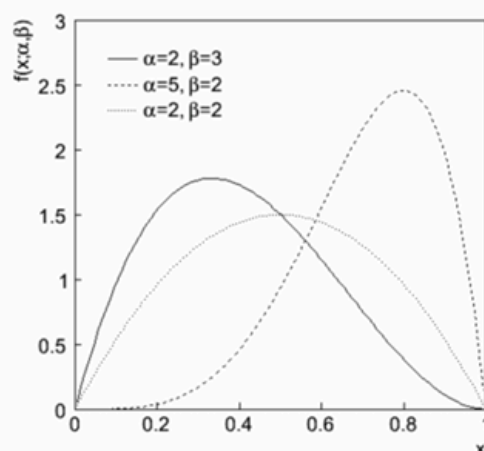
$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$E[x] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

简记 $Be(\alpha, \beta)$

$$V[x] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$Be(1,1) = U(0,1)$$



常用来表示只在某个有限区间非零的连续随机变量。

$\alpha = \beta = 1$ 变为均匀分布。

伽马分布

连续随机变量 x 的伽马分布为：

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

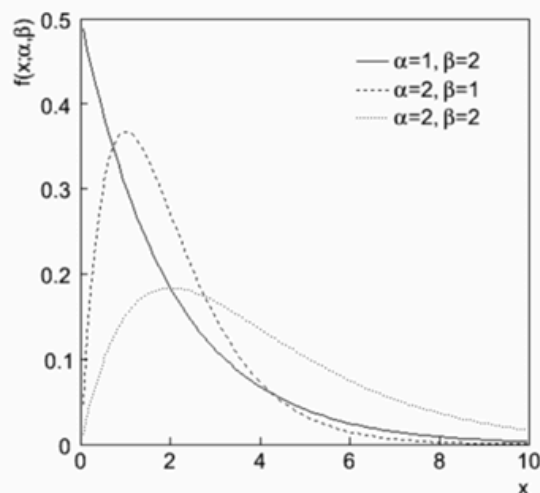
$$E[x] = \alpha\beta$$

简记 $Ga(\alpha, \beta)$

$$V[x] = \alpha\beta^2$$

$$Ga(1, \xi) = Exp(\xi)$$

$$Ga(n/2, 2) = \chi^2(n)$$



常用来表示在 $[0, \infty]$ 内不为零的连续随机变量。

例： n 个指数分布随机变量的和，泊松过程第 n 个事件发生的时间。

学生氏分布

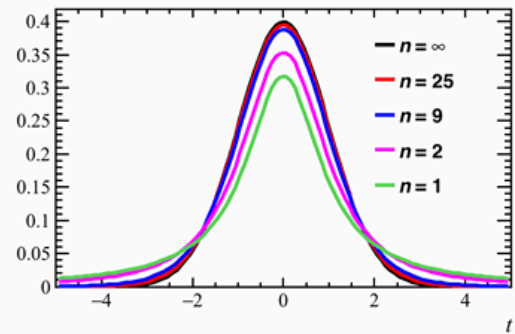
连续随机变量 x 的自由度为 ν 的学生氏分布为：

$$f(x; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$$E[x] = 0 \quad (\nu > 0)$$

$$V[x] = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

简记 $t(\nu)$



ν ：自由度的数目（可以不是整数）

$t(1)$ = 柯西分布

$t(\infty)$ = $N(0,1)$

chap 03 蒙特卡罗方法 Monte Carlo Method

方法简介

应用场景

1. 对于分布不方便解析求解；
2. 没有必要进行解析求解。
3. 处理高维数值定积分方面具有独特的优势。

使用方法

- 使用MC方法计算定积分：
 1. 生成随机数序列 r_1, \dots, r_n ；
 2. 按照函数 $f(x)$ 生成随机数序列 x_1, \dots, x_n ；
 3. 根据函数所占比例计算积分值。
- 使用MC方法进行数据模拟。

随机数的产生

- 用物理方法产生真随机数：不可重复，产生速度慢
- 用数学方法产生伪随机数：可重复，产生速度快

随机数产生子

函数变换法与舍选法

函数变换法

考虑随机变量 $r = F(x) = \int f(x)dx$

$$g(r)dr = f(x)dx$$

$$g(r) = 1$$

故知随机变量 r 为均匀分布。

取 $x = F^{-1}(r)$ ，随机生成0-1之间的均匀分布，就可以得到 x 的分布。

对于指数分布 $f(x) = e^{-x}$ ，进行处理得到：

$$r = F(x) = 1 - e^{-x}$$

$$x = -\ln(1 - r)$$

实现代码如下：

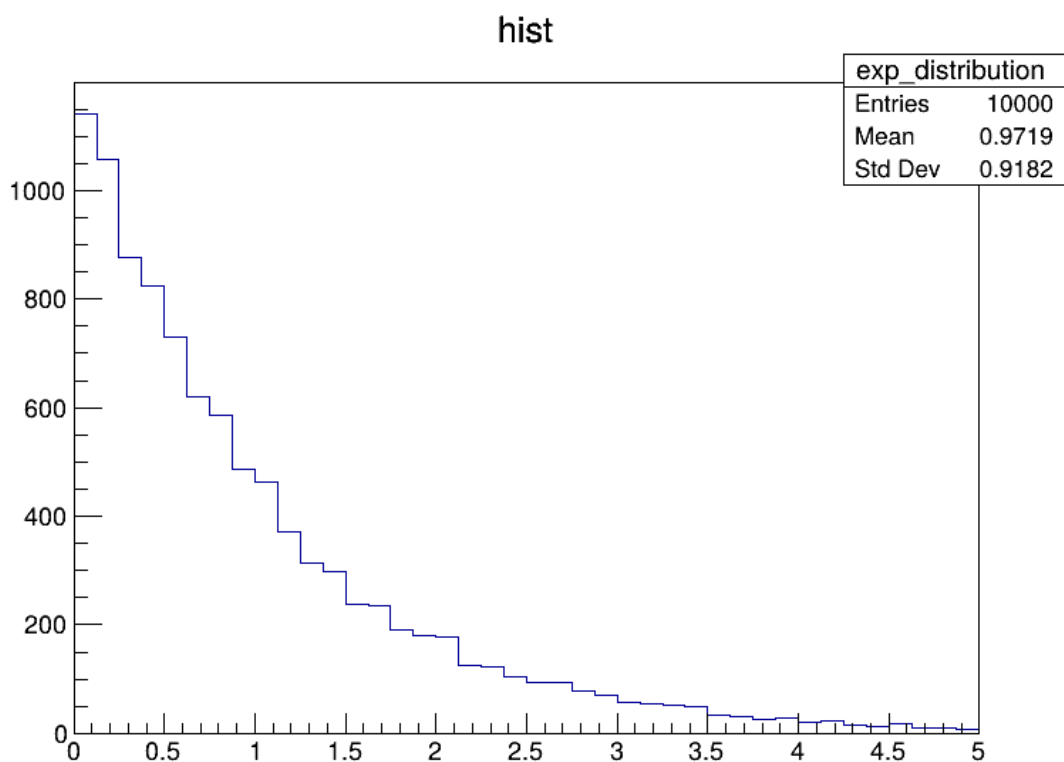
```
import ROOT
import math
rnd = ROOT.TRandom3()

hist = ROOT.TH1F('exp_distribution', 'hist', 40, 0, 5)

for i in range(10000):
    hist.Fill(-math.log(1-rnd.Rndm()))

canvas = ROOT.TCanvas('canvas', 'Canvas', 800, 600)
hist.Draw()

canvas.SaveAs('exp_distribution.png')
```



蒙特卡罗方法在物理实验中的应用

习题

1. 公平的抽签：袋中有 r 个红球与 b 个黑球，现任意不放回地——摸出，求事件第 k 次摸出红球的概率。

解：

$$P(K) = \frac{r}{r+b}$$

样本空间

$$n_{\Omega} = (r+b)!$$

成功的次数

$$n_A = r \cdot (r+b-1)!$$

概率

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{r}{r+b}$$

2. 生日问题：求任意 n ($n \leq 365$) 个人中，至少有两个人生日相同的概率。

解：

将事件转化成对立事件进行计算。 n 个人生日各不相同的概率为

$$P(\bar{A}) = \frac{n_{\bar{A}}}{n_{\Omega}} = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

3. 约会问题：小明和小红二人约定在 $[0, T]$ 时段内去未名湖会面，规定先到者等候一段时间 t ($t \leq T$)再离开。试求小明和小红将会面的概率。

解：

两人出现的时间范围在 $[0, T]$ 之间均匀分布，在两者事件相差的绝对值为 t 之内的情形可以相遇。

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = 1 - \frac{(T-t)^2}{T^2}$$

4. 贝特朗奇论：1889年，法国数学家贝特朗提出下述几何概率问题，并给出三种不同的答案。这就使有的人对当时的概率论中的一些概念与方法产生怀疑，因此被称作“奇论”。请思考：在单位圆上任作一弦，求弦长大于 $\sqrt{3}$ 的概率。

解：

这与任意的方式具有相关性，对于任意的理解不同会导致结果不同。

可以任意先选择圆周上的一个点，然后任意选择一个角度；或者任意选择弦的中点的位置。

5. 有 n 个人参加聚会，每个人都随身带了一份礼物，之后把礼物混合放在一起。会后每个人随机拿取一份礼物。求至少有一个人拿到了自己的礼物的概率。

解：

事件 A_i 代表第 i 个人拿到属于自己的礼物，则

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \frac{C_n^1}{A_n^1} - \frac{C_n^2}{A_n^2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{C_n^n}{A_n^n} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

6. 有n个人参加聚会，每个人都随身带了一份礼物，之后把礼物混合放在一起。会后每个人随机拿取一份礼物。求恰好有 k 个人拿到了自己的礼物的概率。

解：

$$P = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

7. 二项分布，泊松分布，高斯分布的特点以及转化关系

8.

假设有一系列独立同分布的随机变量 $X_i \sim U(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots$ 。定义

$$N_a = \min \left\{ k : \prod_{i=1}^k X_i < a \right\} \quad (0 < a < 1).$$

求 N_a 的分布。

解：

$$P(N_a = n_0) = \int_a^1 dx_1 \int_{a/x_1}^1 dx_2 \cdots \int_{a/x_1 \cdots x_{n_0-2}}^1 dx_{n_0-1} \int_0^{a/x_1 \cdots x_{n_0-1}} dx_{n_0} = \frac{a}{(n_0 - 1)!} (-\ln a)^{n_0-1}$$

9. $Z = XY, X + Y, Y/X, \min X, Y, \max X, Y$ 的随机变量分布

实例：计算存在两种衰变方式时的粒子寿命。

分析：

设粒子的寿命为 x ，则粒子寿命小于等于 a 的概率（累积分布函数）：

$$H(a) = P(x \leq a) = 1 - P(x > a) = 1 - P(x_1 > a)P(x_2 > a) = 1 - [1 - F(a)][1 - G(a)]$$

同理可以计算出

$$P(x \leq a) = P(x \leq a_1)P(x \leq a_2)$$

下面对实例进行处理：

$$f(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

$$g(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$$

$$G(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x}$$

$$H(x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

$$h(x) = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

得到粒子寿命：

$$\tau = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}}$$

例：

$$X, Y \sim U(0, 1), Z = \min(X, Y) / \max(X, Y)$$

令 $u = \min, v = \max$

$$f(u, v) = 2, 0 \leq u \leq v \leq 1$$

10. 某粒子在 A 气体中的平均自由程为 L_A , 在 B 气体中的平均自由程为 L_B , 求它在 AB 等量混合气体中的平均自由程

11. 习题 1.13, 1.14, 1.15 讲解

相关性: **线性相关**, 即: $Y = X^2$ 的关系不能得到验证

习题 1.13. 假设 X 和 Y 是两个连续的随机变量, 且其方差有限。证明相关系数 $\rho \equiv \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \pm 1$ 的充要条件是 X 与 Y 几乎处处有线性关系, 即存在常数 $a \neq 0$ 和 b 使得 $Y = aX + b$ 。

构造统计量 $U = Y - aX - b$, 计算 $\sigma[U], E[U]$, 证明二者均为零即可。

不妨取:

$$b = E$$

12. 重期望法则

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

13. Stein's lemma

14. 一名矿工被困在一个有三扇门的矿井中。如果选择 1 号门, 3 小时后可以到达安全区域; 如果选择 2 号门, 5 小时后会回到原来的位置; 如果选择 3 号门, 7 小时会回到原来的位置。如果假设这名矿工对走过的门没有记忆, 每次都以相等的概率选择每扇门, 那么他平均需要多少时间才能到达安全区域?

$$E[X|Y = 1] = 3$$

$$E[X|Y = 2] = 5 + E[X]$$

$$E[X|Y = 3] = 7 + E[X]$$

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \frac{1}{3}(E[X|Y = 1] + E[X|Y = 2] + E[X|Y = 3])$$

可以解出 $E[X]$ 。

15. Skewness (偏度) 与 Kurtosis (峰度)

chap 04 统计检验

假设、检验、显著水平、功效、临界域

- 假设 hypothesis (pl. hypotheses)

假设 \rightarrow 物理理论: 预测数据出现的概率, 通过实验进行检验。

简单假设: 给出的假设 H_0 可以完全确定概率密度函数 $f(x|H)$, 称为假设的似然值 (likelihood) $L(x|H)$ 。

假设的似然值: 假设成立时可观测量 x 出现的概率 $f(x|H)$, 即 $x \sim f(x|H)$ 。

符合假设: 仍然包含未确定的参数。

- 检验

零假设 (null hypothesis) H_0 与备择假设 (alternative hypothesis) H_1 。

对简单假设 H_0 的检验: 在假设 H_0 正确的情形下, 在临界域 W 内观测到结果的 **(小)** 概率不超过 α , 即

$$P(x \in W | H_0) \leq \alpha$$

α : 显著性水平/检验大小

一般情形下 α 的取值范围在 $10^{-6} \sim 10^{-7}$ 之间。

临界域: 拒绝域, 补集称为接受域。

- 第一类错误与第二类错误
 - 第一类错误: 假设 H_0 为真, 但是假设被拒绝。这类错误犯错的最大概率 $P(x \in W|H_0)$ 就是显著性水平 α 。
 - 第二类错误: 假设 H_0 为假, 但是假设 H_1 为真。这类错误的概率为 $P(x \in S - W|H_1) = \beta$, $1 - \beta$ 称为功效 (检验对于排除备择假设 H_1 的效力)。
- 一般而言, 调整临界域不可能使得 α 与 β 同时减小, 但是增大样本量可以实现这一点。
- 临界域的选择: 单边检验与双边检验

信号本底的甄别

对于一次测量的实验结果通常不止是一个数值, 而是一个向量 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 我们需要构造检验统计量来检验假设是否正确。

检验统计量 t

构造一个标量检验统计量 $t = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对假设进行检验。检验统计量也可以直接取为矢量 $\vec{t} = \vec{t}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

纯度

事例选择的纯度: 信号事例被正确分类的概率。(换言之, 被判断为信号的所有事例中真正为信号的事例所占的比例。)

$$P(s|x \in W) = \frac{P(x \in W|s)P(s)}{P(x \in W|s)P(s) + P(x \in W|b)P(b)}$$

检验效率

信号事例被接受的概率 (被接受的信号事例占有所有信号事例的比例)

即:

$$\varepsilon_s = \int f(t|s) dt = 1 - \alpha$$

Neyman-Pearson引理与检验统计量的构造

对于多维统计检验量, 应当如何选取最佳的临界域?

Neyman-Pearson引理

在给定效率的条件下, 想要得到最高纯度的信号样本, 接受域的选择可以为:

$$\frac{g(\vec{t}|H_0)}{g(\vec{t}|H_1)} > c$$

检验统计量可以取为

$$r = \frac{g(\vec{t}|H_0)}{g(\vec{t}|H_1)}$$

引理的证明(from <https://chatgpt.com>)

下面给出内曼-皮尔逊引理 (Neyman-Pearson定理) 的一个经典证明。假设我们要在两种简单假设之间做出检验:

- 零假设 H_0 : 随机变量 X 的概率密度 (或概率质量) 函数为 $p(x)$;
- 备择假设 H_1 : X 的密度为 $q(x)$ 。

我们希望构造一个检验函数 $\phi(x)$, 其中

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{拒绝 } H_0, \\ 0, & \text{接受 } H_0. \end{cases}$$

(为简单起见, 也可以允许在边界点上取介于 0 和 1 的值以调整精确水平。)

定理的结论是: 在所有显著性水平不超过 α 的检验中, 以似然比为依据的检验

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \frac{q(x)}{p(x)} > k, \\ 0, & \text{当 } \frac{q(x)}{p(x)} < k, \end{cases}$$

(在 $\frac{q(x)}{p(x)} = k$ 的点上可能随机化, 使得 $E_{H_0}[\phi^*(X)] = \alpha$) 具有最大的统计功效, 也就是说对于任何其它检验 $\phi(x)$ (其第一类错误率不超过 α), 都有

$$E_{H_1}[\phi^*(X)] \geq E_{H_1}[\phi(X)].$$

下面是证明步骤:

1. 构造最优检验

设我们构造的似然比检验函数为

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & \frac{q(x)}{p(x)} > k, \\ \gamma(x), & \frac{q(x)}{p(x)} = k, \\ 0, & \frac{q(x)}{p(x)} < k, \end{cases}$$

其中 $k > 0$ 和 $\gamma(x) \in [0, 1]$ 取值, 使得该检验的显著性水平满足

$$E_{H_0}[\phi^*(X)] = \int \phi^*(x)p(x) dx = \alpha.$$

2. 对任一水平不超过 α 的检验比较功效

设任一其它检验函数为 $\phi(x)$, 满足

$$E_{H_0}[\phi(X)] = \int \phi(x)p(x) dx \leq \alpha.$$

我们要证明

$$E_{H_1}[\phi^*(X)] - E_{H_1}[\phi(X)] \geq 0.$$

为此, 考虑积分

$$I = \int [\phi^*(x) - \phi(x)] [q(x) - k p(x)] dx.$$

注意：根据 $\phi^*(x)$ 的构造，

- 当 $\frac{q(x)}{p(x)} > k$ 时， $\phi^*(x) = 1$ ；此时 $q(x) - k p(x) > 0$ ，故 $\phi^*(x) - \phi(x) \geq 0$ 时乘上正数得非负；
- 当 $\frac{q(x)}{p(x)} < k$ 时， $\phi^*(x) = 0$ ；此时 $q(x) - k p(x) < 0$ ，而 $\phi^*(x) - \phi(x) = -\phi(x) \leq 0$ ，乘上负数依然非负；
- 在 $\frac{q(x)}{p(x)} = k$ 的点上，由于可以通过随机化调整，积分对这一处的贡献为零（或可以忽略）。

因此可以证明 $I \geq 0$ 。

3. 将积分 I 与各检验的期望联系起来

将 I 展开得：

$$I = \int \phi^*(x) q(x) dx - k \int \phi^*(x) p(x) dx - \left[\int \phi(x) q(x) dx - k \int \phi(x) p(x) dx \right].$$

也就是说，

$$E_{H_1}[\phi^*(X)] - k E_{H_0}[\phi^*(X)] - [E_{H_1}[\phi(X)] - k E_{H_0}[\phi(X)]] \geq 0.$$

由于按构造 $E_{H_0}[\phi^*(X)] = \alpha$ 而 $E_{H_0}[\phi(X)] \leq \alpha$ ，则

$$E_{H_1}[\phi^*(X)] - k\alpha \geq E_{H_1}[\phi(X)] - k E_{H_0}[\phi(X)] \geq E_{H_1}[\phi(X)] - k\alpha.$$

从而可得

$$E_{H_1}[\phi^*(X)] \geq E_{H_1}[\phi(X)].$$

这说明在所有显著性水平不超过 α 的检验中，似然比检验 ϕ^* 的功效是最大的。

4. 总结

以上证明利用了如下关键思想：

- 将两种检验函数之差乘以 $q(x) - k p(x)$ 后积分，利用似然比检验的构造保证该乘积非负。
- 从而证明了似然比检验在 H_1 下的期望（功效）至少不低于任何其它同水平检验。

这便是内曼-皮尔逊引理的证明，其结论说明在两个简单假设的情形下，基于似然比的检验是均匀最优的，即在控制第一类错误率（显著性水平）的条件下，其功效最大。

参考

本证明的思路与标准教材中给出的证明类似，例如参见

- [维基百科：内曼-皮尔逊引理](#)
- [知乎：Neyman-Pearson基本引理证明](#)

希望这个证明能帮助你理解内曼-皮尔逊定理的基本原理和数学推导过程。

线性检验统计量、费舍尔(Fisher)甄别函数

$$J(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}^T B \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T W \mathbf{a}}$$

注意到这是关于 \mathbf{a} 的齐次函数，所以需要在固定 \mathbf{a} 的模长的情况下进行偏导数运算。

不妨假设 $\mathbf{a}^T W \mathbf{a} = 1$ ，得到

$$J(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T B \mathbf{a} - \lambda(\mathbf{a}^T W \mathbf{a} - 1)$$

对其求偏导数 $\frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}}$ 得到

$$B \mathbf{a} = \lambda W \mathbf{a}$$

$$W^{-1} B \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$

即 \mathbf{a} 是矩阵 $W^{-1} B$ 的特征向量。

再注意到

$$\begin{aligned} B_{ij} a_j &= (\mu_0 - \mu_1)_i \boxed{(\mu_0 - \mu_1)_j a_j} = \lambda_a (\mu_0 - \mu_1)_i \\ &= \lambda_a \end{aligned}$$

最终得到：

$$\mathbf{a} \propto W^{-1}(\mu_0 - \mu_1)$$

在高斯分布的情形下，Fisher检验统计量给出的结果与Neymann-Pearson引理的结果相同。在其他情形下并不相同，但是可以通过做变换实现更好的结果。

(待续：高斯分布情形下证明相同)

神经网络：

- 单层感知器：

输入层->输出层

单层感知器

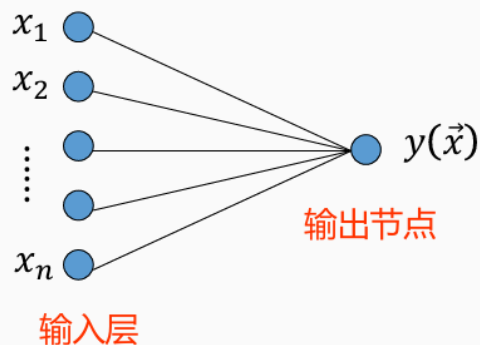
利用非线性函数 $y(\vec{x})$ 定义判别量：
$$y(\vec{x}) = h\left(\omega_0 + \sum_{i=1}^n \omega_i x_i\right)$$

其中 h 是非线性的单调激活函数，例如，逻辑S型函数

$$h(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

如果激活函数是单调的，得到的 $y(\vec{x})$ 等价于原始的线性判别量。

这是“推广的线性模型”的一个例子，称为单层感知器。



- 多层感知器：

输入层->隐藏层->输出层

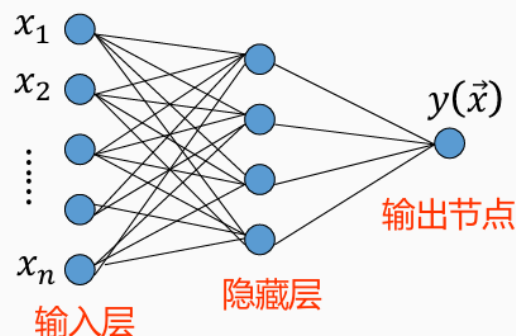
多层感知器 (MLP)

利用同样的想法定义，既可以定义输出 $y(\vec{x})$ ，也可以定义构成“隐藏层”的一组变换输入量 $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x})$ ：

权重中的上标
表示第几层

$$\varphi_i(\vec{x}) = h\left(\omega_{i0}^{(1)} + \sum_{j=1}^n \omega_{ij}^{(1)} x_j\right)$$

$$y(\vec{x}) = h\left(\omega_{10}^{(2)} + \sum_{j=1}^m \omega_{1j}^{(2)} \varphi_j(\vec{x})\right)$$



这种构造称为多层感知器，是基本的神经网络模型；很容易推广到更多隐藏层。

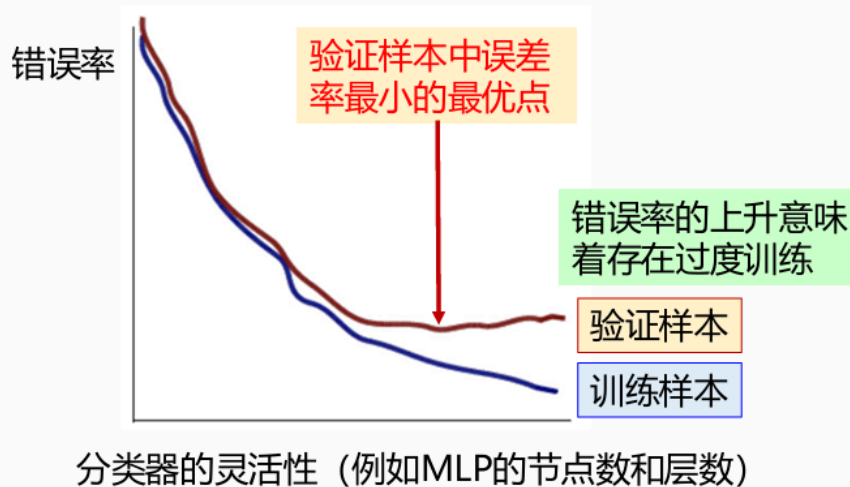
确定中间参数是机器学习核心的内容！

- 过度训练(overfitting)

参数过多，对训练数据的符合非常好，但是反而不能准确预测其他数据的结果。

监控过度训练

如果监控验证样本和训练样本中误鉴别事例的比率（或者，误差函数 $E(\omega)$ ），当决策边界变得更灵活时，两个样本的误鉴别比率通常都会下降：



- 输入变量选择

如果输入变量的相关性较强，常常对结果的影响不大。如， x^2, x^4 的结果常常区别不是很大，一般情形下不需要保留高阶矩。

检验拟合优度、p值的定义与应用

对于给定的简单假设 H_0 ，我们可以预测出各个结果出现的概率。实验中的结果是其中一种，考虑预期结果不好于实验结果的概率，定义为 p 值。

例子：在抛硬币实验中，一共抛掷20次硬币，实验结果为17次正面向上。但是，实验预期的最有可能出现的结果为10。所以，与实验结果相比，更糟糕或者一样糟糕的预期结果为0, 1, 2, 3, 17, 18, 19, 20。根据二项式分布的计算可以得到：

$$p = P(N = 0, 1, 2, 3, 17, 18, 19, 20) = 0.0026$$

实验中，想要检验假设是否正确，可以重复实验，检测这些极端事例出现的概率是否与 p 值相符。

对于这一实验结果，能不能认为假设 H_0 并不成立？换言之，有多少信心（Bayes主观概率的角度）认为原假设 H_0 正确或者错误？这是假设检验中的重要问题。

信号观测的显著程度

Pearson χ^2 检验

附录：概率论沉思录

chap 01 合情推理

1. 强三段论（演绎推理）：A真 \rightarrow B真，A真，则B真
弱三段论（合情推理）：A真 \rightarrow B真，B真，则A更合情
2. 布尔代数：

积: AB (A 与 B 同时为真, 则为真)

和: $A+B$ (A 或 B 为真, 则为真)

否: \overline{A} (A 为假)

- 写成加法与乘法的形式, 为了直接运用加法与乘法的运算律。

- 运算的实例:

- $AA = A, A\overline{A} = \text{False}(0), 0 + A = A, \overline{\overline{A}} = A, A + A = A$

- $A + \overline{A} = \text{True}(1), \text{True}(1)A = A$

- $\overline{A} + A\overline{B} = \overline{AB}$

3. 蕴含关系

$A \Rightarrow B$ (A 为真, 则 B 为真; B 为假, 则 A 为假)

用布尔代数表达: $A = AB$, 可以验证满足上面的蕴含关系的定义。

$A \Rightarrow B$ 的布尔值与 $\overline{A} + B$ 的布尔值相同。

4. 逻辑函数

对 n 个命题, 最多有 2^{n+1} 个不同的概率函数。(n个命题有 2^n 种结果, 函数可能有两种取值)

2^{n+1} 种函数, 可以简化为规范析取范式 (形如 $A_1 \dots A_n, \overline{A_1} \dots A_n$ 的合取 (交/乘积) 式的析取 (或/和) 式)

5. 完备集: 合取(AND)、析取(OR)与否定(NOT)

实际上这三种逻辑关系中, 两者可以表出第三者, 如 $A + B = \overline{\overline{A} \overline{B}}$

, $AB = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ 。进而可以定义与非 (\uparrow) 运算: $A \uparrow B = \overline{A + B}$ (合取式的否定), 或非 (\downarrow) 运算: $A \downarrow B = \overline{AB}$ (析取式的否定)

6. 合情条件

- 合情程度用实数表示($A|B$)
- 定性地与常识相符
- 一致性推理 (结果与路径无关)

chap 02 定量规则

1. 乘法规则

$$(AB|C) = F[(B|C), (A|BC)]$$

$$(AB|C) = F[(A|C), (B|AC)]$$

进一步确定 $F(x, y)$ 的形式:

- 由合情条件: $F_x \geq 0, F_y \geq 0$
- 由迭代关系: $F[x, F(y, z)] = F[F(x, y), z]$

记 $u = F(x, y), v = F(y, z)$, 对上面的表达式分别对 x, y 求偏导:

$$F_1(u, z)F_1(x, y) = F_1(x, v)$$

$$F_1(u, z)F_2(x, y) = F_2(x, v)F_1(y, z)$$

$$\text{记 } G(x, y) = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)}$$

$$G(x, y) = G(x, v)F_1(y, z) \dots (\#)$$

或

$$G(x, y)G(y, z) = G(x, v)F_2(y, z) \dots (\#\#)$$

对 (#) 式, 对z求偏导:

$$0 = G_2(x, v)F_2(y, z)F_1(y, z) + G(x, v)F_{12}(y, z)$$

对 (##) 式, 对y求偏导:

$$[G(x, y)G(y, z)]_y = G_2(x, v)F_1(y, z)F_2(y, z) + G(x, v)F_{21}(y, z)$$

连续性给出:

$$F_{12}(y, z) = F_{21}(y, z)$$

代入得到:

$$[G(x, y)G(y, z)]_y = 0$$

进而可以确定函数 $G(x, y)$ 的形式:

$$G(x, y) = r \frac{H(x)}{H(y)}$$

将分离变量的形式代入 (#) (##) 式, 略去推导, 积分得到:

$$\phi(v) = c\phi(y)\phi^r(z)$$

其中:

$$\phi(x) = \int \frac{dx}{H(x)}$$

将这一结果代入迭代关系的表达式, 化简得到:

$$\phi(F(x, y)) = c \cdot \phi(x)\phi(y)$$

令 $w(x) = c \cdot \phi(x)$, 得到:

$$w(F(x, y)) = w(x)w(y)$$

回到原来的问题, 得到结论:

$$w(AB|C) = w(A|BC)w(B|C)$$

2. 加法规则

略去推导, 用类似的方式可以推出:

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

3. 推理规则与演绎推理、合情推理之间的关系 (合情推理的合情程度用概率函数表达)