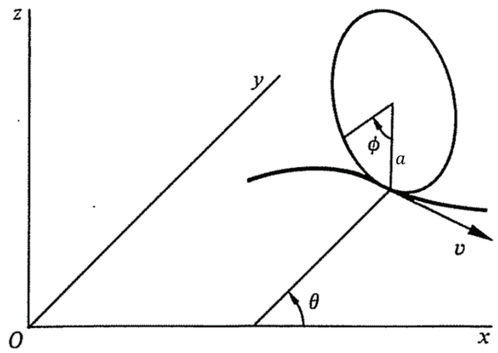
《理论力学》习题

作业一

1. 如图所示，一个恒与地面垂直的半径为 a 的圆盘在地面上滚动，确定圆盘空间位置要用到 4 个坐标，即盘心位置的坐标 x 和 y、圆盘轴线与 x 轴夹角 θ、圆盘绕自身轴线转过的角度 φ。当圆盘作 “纯滚动” 或 “沿直线纯滚动” 时，体系的约束方程分别是什么？是否为完整约束？为什么？考虑圆盘作纯滚动，利用拉格朗日乘子法给出系统四个广义坐标的运动方程，并分析圆盘质心坐标的运动规律。



2. 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点，由一根穿过光滑水平桌面上小孔的轻绳相连接，m_1 静止在桌面上，m_2 悬挂着。假设 m_2 仅在垂直方向上运动，写出系统的拉格朗日量和拉格朗日方程，并求出方程的初次积分。(只需考虑 m_1 和 m_2 都不穿过小孔的运动。)

3. 电磁场在矢势和标势的规范变换下不变，即

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\psi(\boldsymbol{r}, t), \quad \phi \to \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{1}$$

其中，ψ 是任意可微函数。考察规范变换对电磁场内运动质点的拉格朗日量有何影响？质点运动是否会受到影响？

4. 曲面上两点之间路程为极小值的曲线叫短程线，用变分法说明球面上的大圆 (即圆心与球心重合的圆) 是其短程线。

5. 瓦特调速器原理如图所示，考虑 4 根轻杆的长度都是 l，两个小球的质量均为 m，质量为 M 的套管 C 可沿 z 轴滑动，顶端 A 点为固定点，体系以恒定角速度 ω 绕 z 轴旋转。不计摩擦，给出体系的拉格朗日量、拉格朗日方程及其初积分。

6. 如图所示，一质量为 m，半径为 r 的均匀圆环在半径为 R 的固定圆筒上无滑滚动。如果圆环在圆筒顶端从静止开始滚动，仅考虑重力，用拉格朗日乘子法求圆环跌离圆筒的位置。

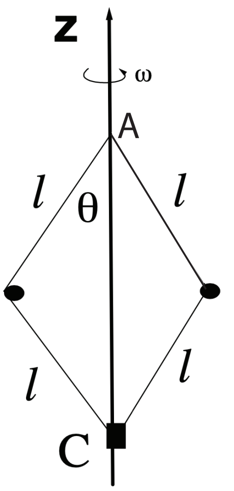


图 1: 瓦特调速器

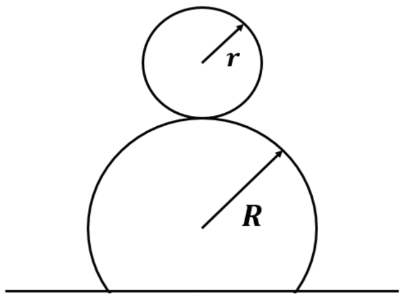
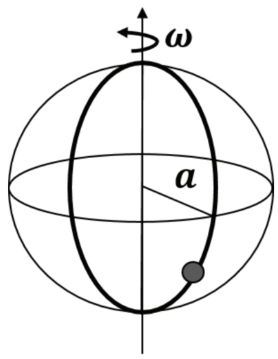


图 2: 圆环跌离圆筒

7. 如图所示，一半径为 a 的无质量圆环绕自身竖直对称轴以常角速度 ω 旋转，圆环上有一质量为 m 的质点可以沿圆环光摩擦的滑动。仅考虑重力, 写出体系的拉格朗日量，求拉格朗日运动方程，给出运动常数。证明, 如果 ω 大于某一临界值 ω_0 时，就能得到一个质点不处于环底的稳定解，但若 ω 小于该临界值时，则质点的唯一稳定点是在环底，给出 ω_0 的值。



8. 如果拉格朗日量包含高于一阶的时间微商 $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$，而且当 q_i 和 $\dot{q}_i$ 在端点处的变分

为零时，哈密顿原理依然适用，利用变分法证明相应的拉格朗日方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

试将这一结果应用于拉格朗日量

$$L = -\frac{m}{2} q\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2. \tag{3}$$

9. 假设空间中的电荷按照下列形状均匀分布，给出带电粒子在空间中运动的循环坐标及其相应的守恒量（仅考虑静电力）：1）无限大平面；2）无限大圆柱面；3）圆环表面；4）无限大半平面；5）两个点；6）圆锥面；7）无限长螺旋线。

作业二

1. 一质点在有心势场
$$V=-k\frac{e^{-ar}}{r}$$
中运动，其中，常数 k 和 a 为正。定性讨论质点可能的各种运动性质，什么时候出现圆形轨道？求关于圆周运动的微幅径向振荡周期。

2. 质量相同的两个质点，用一原长为 l, 弹性系数为 k，质量可不计的弹性棒连接起来，用手握住其中的一个质点，使另一个作水平圆周运动，其速度为 v_0，然后将手放开，讨论这两个质点以后的运动情况。

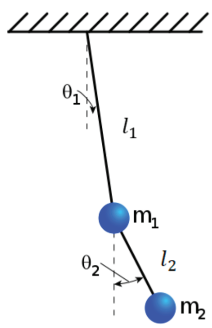
3. 求粒子在势场
$$V=\begin{cases}0 & (r>a)\\ -V_0 & (r\leqslant a)\end{cases}$$
中的微分散射截面。

4. 有一均匀正圆锥, 高度为 h, 顶角为 2α, 密度为 ρ，沿其边在一均匀水平面上无滑滚动, 在 τ 时间后回到它原来的位置。求该锥体的动能和角动量分量表达式。

5. 根据绕各主轴的转动的微小偏差来检验一般非对称刚体的欧拉方程的解, 从而用解析方法分析一般非对称刚体分别绕长轴、短轴和中间轴转动的稳定性。

6. 给放置在光滑水平桌面上的物体以一个水平初速度，若考虑地球为非惯性系，证明物体的轨迹是一个圆, 并求出圆半径及桌面所受的力。

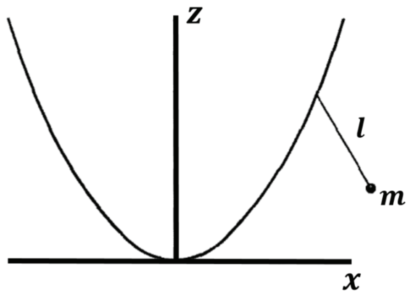
7. 如图所示，考虑一复摆系统，用哈密顿量和哈密顿运动方程表述这一系统的运动。已知摆的长度为 l_1 和 l_2，相应的质量为 m_1 和 m_2。



8. 根据韦伯的电动力学观点，两电荷之间的作用力是
$$F(r)=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2-2r\ddot{r}}{c^2}\right).$$

设一质点受到上式所给出的有心力 $F(r)$ 的作用，试写出这质点的广义势能 U、拉格朗日函数以及哈密顿函数。

9. 如图，一长度为 l, 质量为 m 的单摆的悬挂点被约束在竖直平面内的抛物线 $z = ax^2$ 上运动。推导支配摆及其悬挂点的运动的哈密顿量，给出哈密顿运动方程。



10. 一质量为 m, 电荷为 e 的质点在有心力势 $V(r)$ 以及恒定均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用下在一平面内运动, $\boldsymbol{B}$ 垂直于该平面并由静矢势

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}$$

产生。a) 求用观测者的惯性系坐标表示的哈密顿量. b) 采用相对于该坐标系的转动坐标重复 (a) 中的推导。转轴垂直于平面，转动角速度为

$$\omega = -\frac{eB}{2m}.$$

作业三

1. 证明下列变换为正则变换：
   （1） $Q=\ln(\frac{1}{q}\sin p),\quad P=q\cot p.$ （2） $q=\sqrt{\frac{2Q}{k}}\cos P,\quad p=\sqrt{2Qk}\sin P.$

2. a) 证明变换
$$Q=p+iaq,\quad P=\frac{p-iaq}{2ia}$$
是正则的, 并寻找生成函数。b) 利用此变换求解线性谐振子问题。

3. a) 某个系统的哈密顿量的形式为
$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2}+p^2q^4\right),$$
求 q 的运动方程。b) 求出把 H 化为谐振子形式的正则变换。证明变换后的变量的解能够满足 (a) 部分所求得的运动方程。

4. 证明下列变换：
$$Q=\sqrt{2q}e^t\cos p,\quad P=\sqrt{2q}e^{-t}\sin p$$
是正则变换，求该变换的生成函数 $S_1(q,Q,t)$. 如果系统的哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$，求在上述变换下的新哈密顿函数 K.

5. 质量为 m 的质点在各向同性的简谐振子势场 $V=\frac{1}{2}kr^2$ 中运动。假定运动的轨道平面为 xy 平面，则系统的哈密顿函数为
$$H=S_0=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}k(x^2+y^2).\tag{4}$$
定义
$$S_1=\frac{1}{2m}(p_x^2-p_y^2)+\frac{1}{2}k(x^2-y^2),\tag{5}$$
$$S_2=\frac{1}{m}p_xp_y+kxy,\tag{6}$$
$$S_3=\omega(xp_y-yp_x),\tag{7}$$
其中，$\omega=\sqrt{k/m}$。证明：

   1) S_0 和 S_i（$i=1,2,3$）是分别对合的，即它们的泊松括号为
$$[S_0,S_i]=0,\quad i=1,2,3,\tag{8}$$
   也即 S_1,S_2,S_3 是系统的运动积分。

2) S_i 之间有关系

$$[S_1, S_2] = 2\omega S_3, \tag{9}$$

$$[S_2, S_3] = 2\omega S_1, \tag{10}$$

$$[S_3, S_1] = 2\omega S_2. \tag{11}$$

3) S_0 与各 S_i 之间有关系

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \tag{12}$$

6. 对于两个互相耦合的线性谐振子系统，其哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_1^2(q_1 - q_2)^2.$$

试确定系统的可积性。

作业四

1. 设系统的拉格朗日函数为

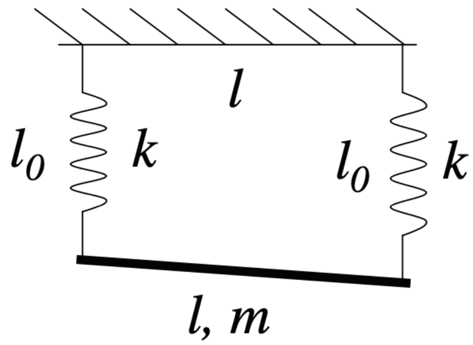
$$L(q,\dot{q},t)=e^{\lambda t/m}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}m\omega_0^2q^2\right),$$

并设生成函数为 $S_2(q,P,t)=e^{\lambda t/(2m)}qP$, 试用哈密顿-雅可比方程求系统的运动方程。

2. 一静止质量为 m, 电荷为 q 的质点, 以初速 $\boldsymbol{v}_0$ 进入到垂直于 $\boldsymbol{v}_0$ 的匀强电场 $\boldsymbol{E}$ 中。求以后质点的轨道，并证明，当极限值 c 趋于无穷大时它将成为抛物线。

3. a) 对于一个任意的三维推促矢量 $\beta=(\beta_x,\beta_y,\beta_z)$，推导恰当洛伦兹变换。b) 证明一个推促 β 的恰当洛伦兹变换的逆变换是由推促 $-\beta$ 产生的。

4. 如图，在 2 根自然长度为 l_0，弹性系数为 k 的弹簧下端悬一细棒 (质量为 m，长度为 l)，体系限于铅垂平面内因两弹簧的不同伸缩情况而运动。1) 通过求解本征值问题求体系小振动的频率和运动模式；2) 通过分析简正模式，求本征频率和简正坐标。



5. 四根弹性系数为 k、自然长度为 $\pi R/2$ 的轻质弹簧, 相互连结着质量为 m 的四个质点, 并组成半径为 R 的圆环，令质点只能沿该圆轨道无摩擦运动，试求体系的简正频率与简正模式，并讨论每一个简正模式的物理意义。

6. 如图，一质量为 m 的质点能在两弹簧作用下作一维运动，两弹簧连接在相距为 a 的两固定点之间。弹簧未被拉伸时长度为零，弹性系数分别为 k_1 和 k_2。写出质点的拉格朗日量和哈密顿函数，列出正则方程并求解。