理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 刘维尔可积系统
- 作用—角变量
- 绝热不变量、**几何相位**
- **近可积系统与混沌系统**

绝热过程的几何图像

- 对于刘维尔可积系统，可以构建如下正则变换，给出作用变量和角变量，并以它们作为局部坐标系，在相空间中构造稳定的不变环面。

$$(q, p) \xrightarrow{F(q, I; \lambda)} (\theta, I) \qquad H(q, p; \lambda) \xrightarrow{F(q, I; \lambda)} K(\theta, I; \lambda) = H(I; \lambda)$$

- 在绝热过程中，哈密顿量 $H(q, p; \lambda(t))$ 依赖于一组随时间缓慢变化的外参量
- 在每一时刻 t，都可以定义一组新的作用—角变量，相应的正则变换生成函数 $F(q, I; \lambda(t))$ 是显含时的，因此，变换后的哈密顿量必须加一项：

$$H(q, p; \lambda(t)) \to K(\theta, I; \lambda(t)) = H(I; \lambda(t)) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

- 在慢参量演化过程中，不仅哈密顿量本身变化，局部的作用—角变量坐标系也随之变化，因此不变环面在相空间中的“形状”和“位置”会随时间缓慢演变。

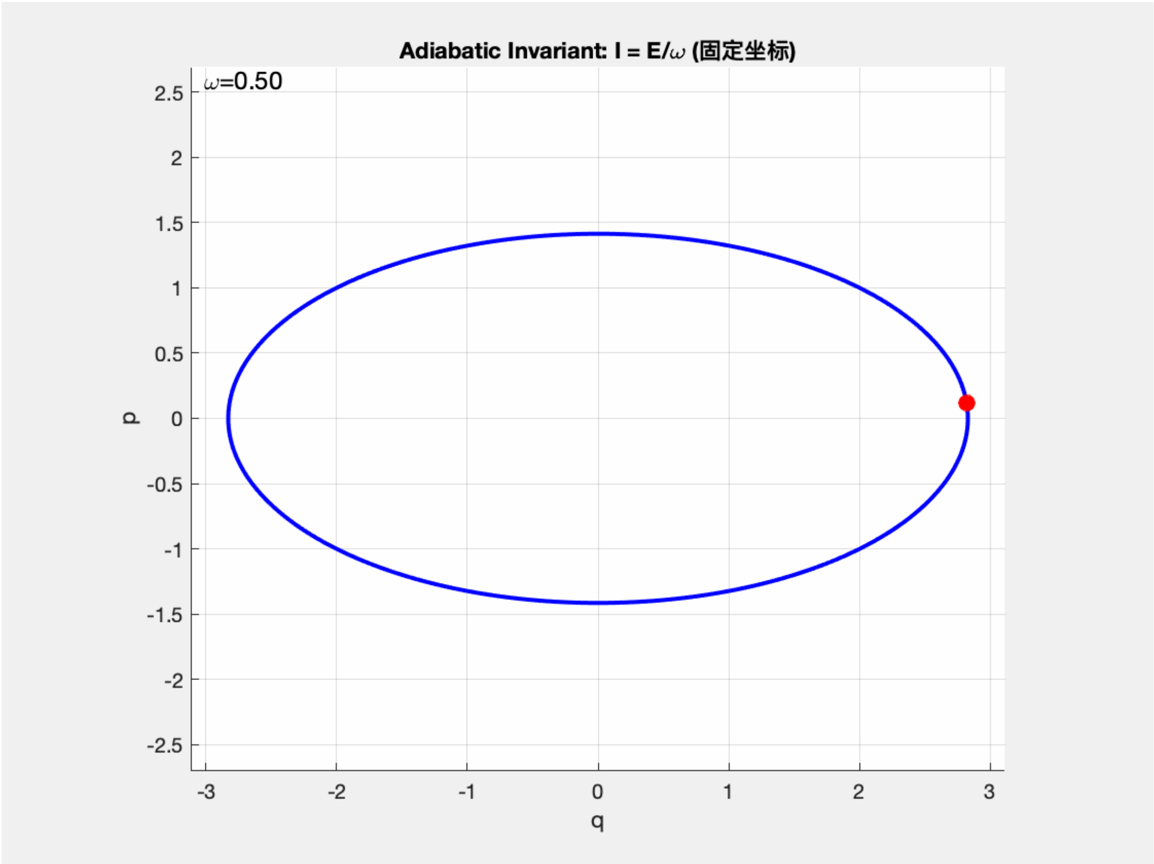
绝热过程的几何图像

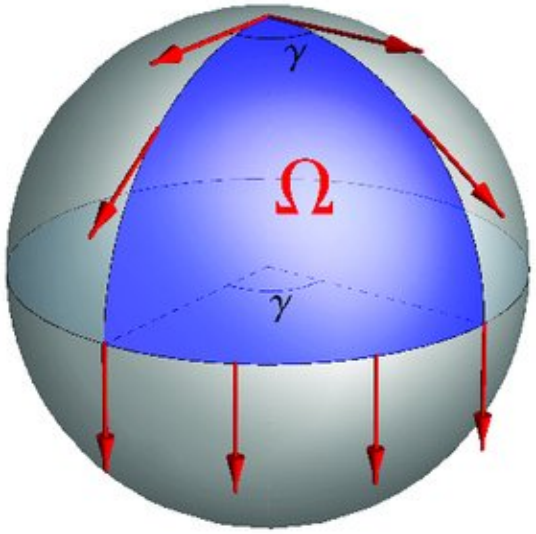
- 在绝热极限下，作用变量保持不变，即不变环面的“大小”（相空间面积）是守恒的。
- “形状” 变化源自哈密顿量对慢参量的依赖（如谐振子频率变化导致轨道扁率改变）
- “位置”变化则反映了局部坐标系在慢参数空间中的回旋，积累出几何相位。

  经典系统中对应于Hannay角，量子系统中对应于Berry相位。

Hannay, Journal of Physics, A18 (1985) 221

Berry, Journal of Physics, A18 (1985) 15





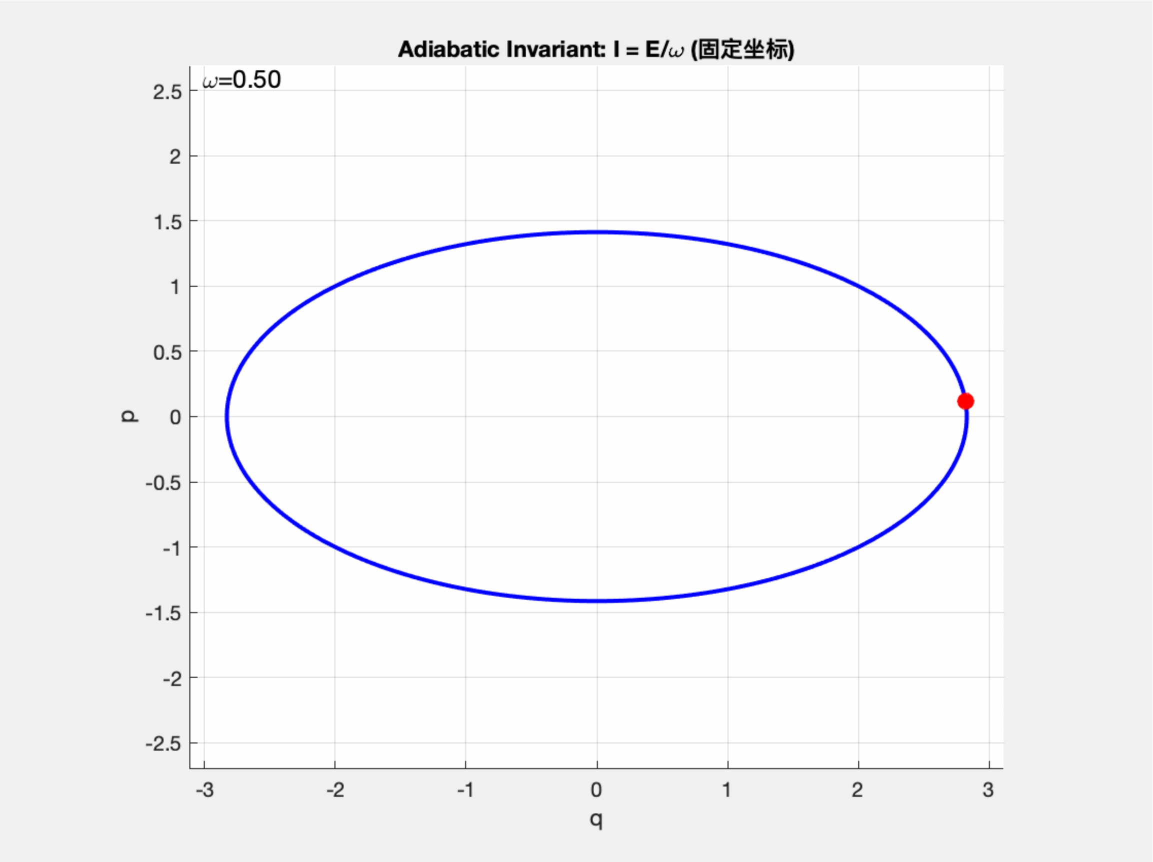
绝热过程的几何图像

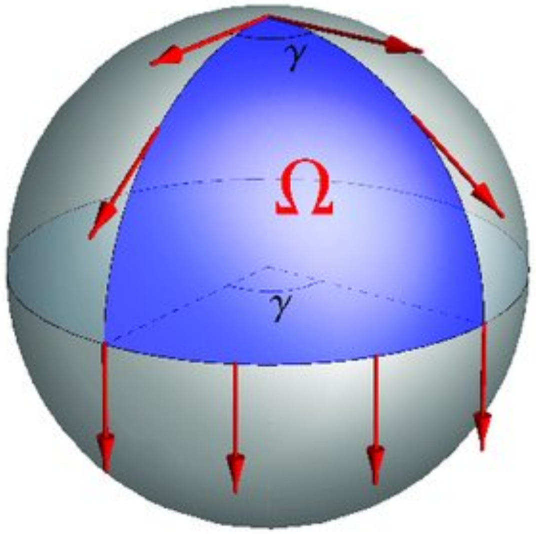
- 在绝热极限下，作用变量保持不变，即不变环面的“大小”（相空间面积）是守恒的。
- “形状” 变化源自哈密顿量对慢参量的依赖（如谐振子频率变化导致轨道扁率改变）
- “位置”变化则反映了局部坐标系在慢参数空间中的回旋，积累出几何相位。

  经典系统中对应于Hannay角，量子系统中对应于Berry相位。

Hannay, Journal of Physics, A18 (1985) 221

Berry, Journal of Physics, A18 (1985) 15





Hannay角

- 角变量在绝热过程中如何变化呢?

$$K(\theta,I;\lambda(t)) = H(I;\lambda(t)) + \frac{\partial F(q,I;\lambda)}{\partial t}$$

$$K(\theta,I;\lambda(t)) = H(I;\lambda(t)) + \frac{\partial F(q,I;\lambda)}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$$

$$F(q,I;\lambda) = F(q(\theta,I;\lambda),I;\lambda)$$

$$\frac{\partial F(\theta,I;\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(q,I;\lambda)}{\partial q}\frac{\partial q(\theta,I;\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial F(q,I;\lambda)}{\partial \lambda}$$

$$A(\theta,I;\lambda) = \frac{\partial F(\theta,I;\lambda)}{\partial \lambda} - p\frac{\partial q}{\partial \lambda}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H(I;\lambda)}{\partial I} + \frac{\partial A(\theta,I;\lambda)}{\partial I}\dot{\lambda} = \omega(I;\lambda) + \frac{\partial A(\theta,I;\lambda)}{\partial I}\dot{\lambda}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial K(\theta,I;\lambda(t))}{\partial I}$$

对多个周期平均后，不再依赖于θ

$$\Delta\theta = \int_{t_0}^{t}\omega(I;\lambda(t))dt + \frac{\partial}{\partial I}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\langle A(I,\lambda)\rangle d\lambda$$

时间相关
动力学变化

时间无关
几何变化

Hannay角

- 角变量在绝热过程中如何变化呢?

$$\Delta\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(I;\lambda(t))dt + \frac{\partial}{\partial I}\int_{\lambda_0}^{\lambda} \langle A(I,\lambda)\rangle\, d\lambda$$

$$A(\theta,I;\lambda) = \frac{\partial F(\theta,I;\lambda)}{\partial\lambda} - p\frac{\partial q}{\partial\lambda}$$

- 考察第二项，它取决于外参数空间的积分路径而与时间无关

- 若沿着参数空间的一个闭合回路（$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \boldsymbol{\lambda}(0)$）积分可得

$$\Delta\theta_H = \frac{\partial}{\partial I}\oint \langle \boldsymbol{A}(I,\boldsymbol{\lambda})\rangle \cdot d\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial I}\oint \langle p\, dq(\boldsymbol{\lambda})\rangle$$

- 积分不涉及时间，$dq(\boldsymbol{\lambda})$ 表示 q 变量由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的改变而产生的变化。

- 显然，外参数空间至少要大于1，才会产生非零的几何相位。

近可积系统

- 刘维尔可积的束缚系统在相空间中运动于**n维不变环面**上。
- 可以用作用—角变量来描述可积系统，在这一描述下系统的哈密顿量仅为作用变量的函数。
- 考虑有一个可积系统 $H_0(I)$，给它加上一个微扰，使得系统的哈密顿量变为

$$H(I,\theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\theta)$$

- 显然，扰动不仅依赖于作用变量，同时还依赖于角变量。
- 这个扰动以后的系统会在多大程度上破坏不变环面呢?
- **KAM定理**：虽然某些不变环面（共振环面）会被扰动破坏掉，但满足**强非共振条件**的不变环面（这种不变环面占大多数）仍然会保存下来。
- 故系统在相空间中大部分的相轨道依然是非常规则的，称为**近可积系统**。

近可积系统

- 在那些不变环面被扰动破坏的相空间区域：系统的相空间轨迹可能会对初始条件有极端的敏感性，甚至出现混沌行为，这可能使得系统演化缺乏可预测性。即使我们处理的是严格的确定性系统，它也可能产生随机输出。

- 太阳系是一个多体问题，具有明显的层次性， 其行星与行星之间的相互作用比行星与太阳之间的相互作用要弱得多，可以看成是一个微扰。

$$H(I,\theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\theta)$$

- 行星与太阳的相互作用则是一个可积系统，其解就是开普勒的椭圆轨道。

- 因此，**太阳系是一个近可积系统**，该系统的大体结构是稳健的!

- 但是，我们并不能非常确定目前的太阳系处在相空间的稳定区域。

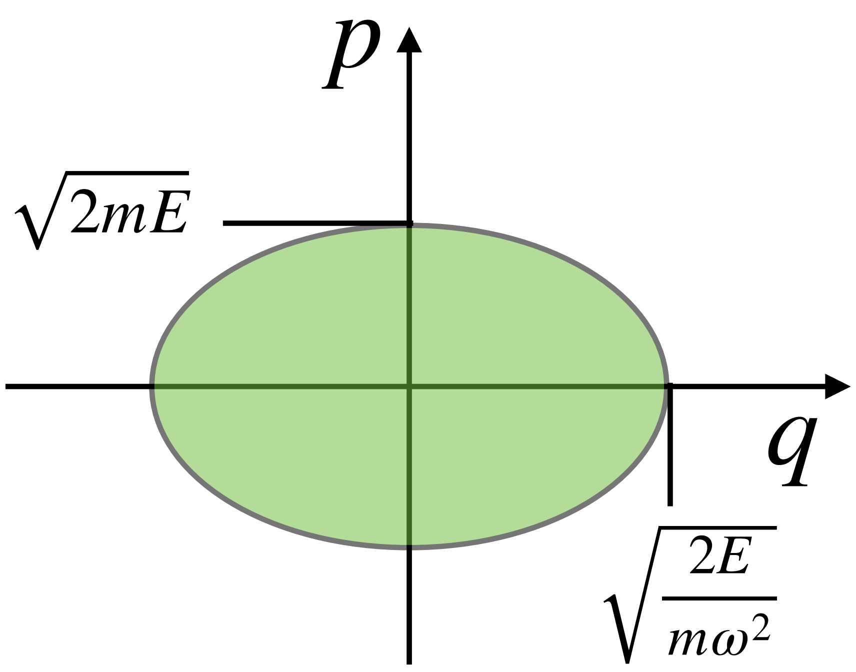
混沌系统

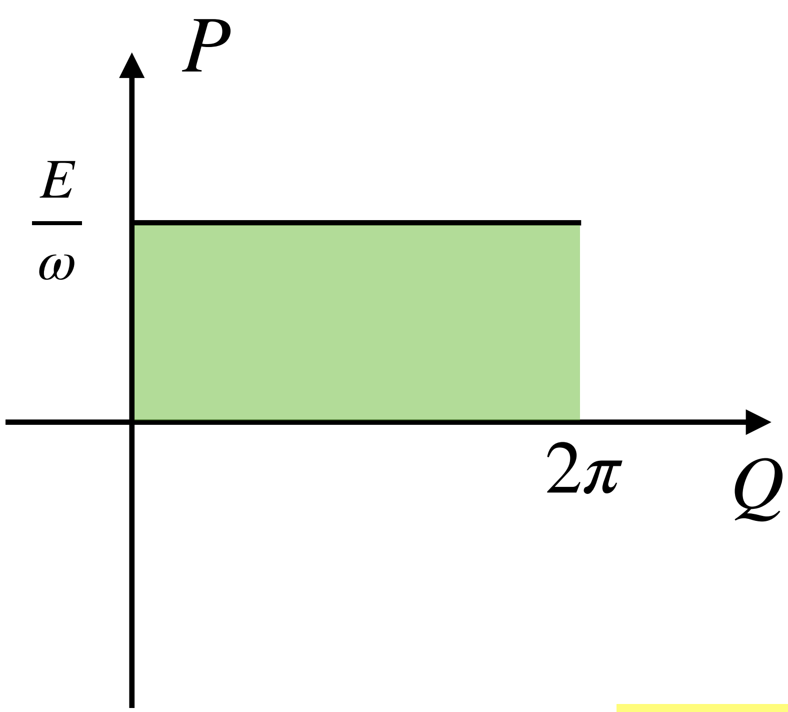
- 对于一般的哈密顿系统，既不是刘维尔可积系统，又不是近可积系统，其泊松对易的守恒量的数目少于（甚至远小于）自由度数目 n，那这时候系统的动力学行为往往不再规则，而是常常会表现出混沌。
- 双摆系统是一个两自由度的系统， 但是它只有一个守恒量，即能量。当能量足够大时这个系统会表现出混沌行为。
- 一般性的三体问题，显然它有9个自由度，但是守恒量只有能量、总动量、总角动量，共7个守恒量，而且相互泊松对易的守恒量实际上只有四个，故一般会展现出混沌行为。
- ...

哈密顿-雅可比方程

谐振子的正则变换

- 我们可以分别在 *p*-*q* 和 *P*-*Q* 两个相空间下考察谐振运动





- 谐振子运动一个周期在两个相空间描绘出的面积相等 $\frac{2\pi E}{\omega}$

- 循环运动系统在相空间内描绘的面积不变！

$$Q = \omega t + \alpha$$

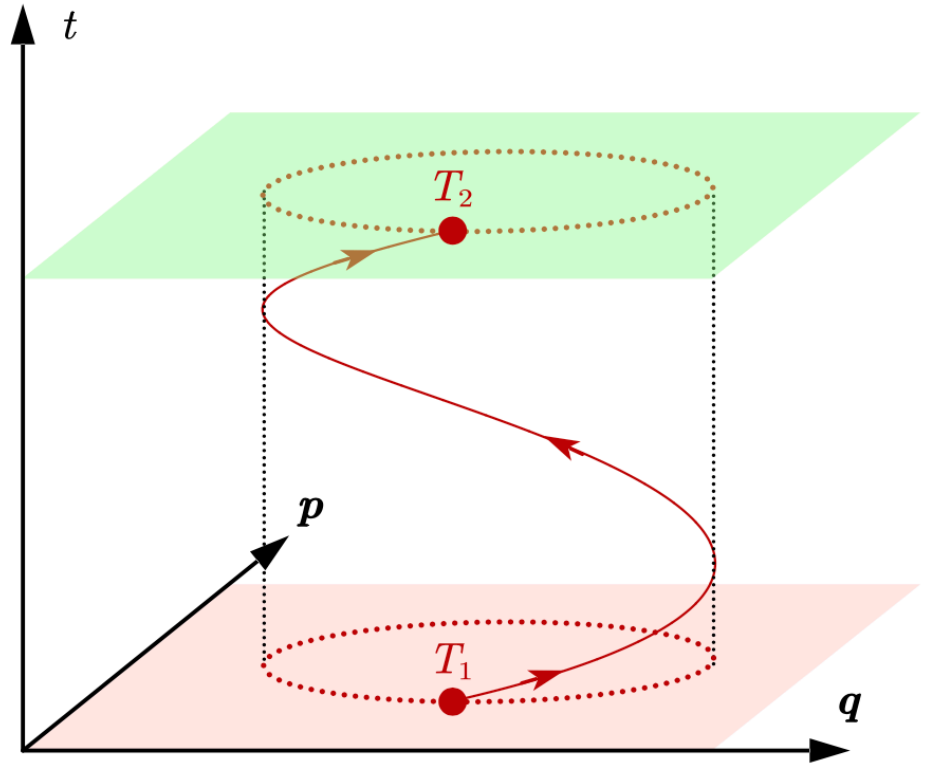
$$P = \text{const} = \frac{E}{\omega}$$

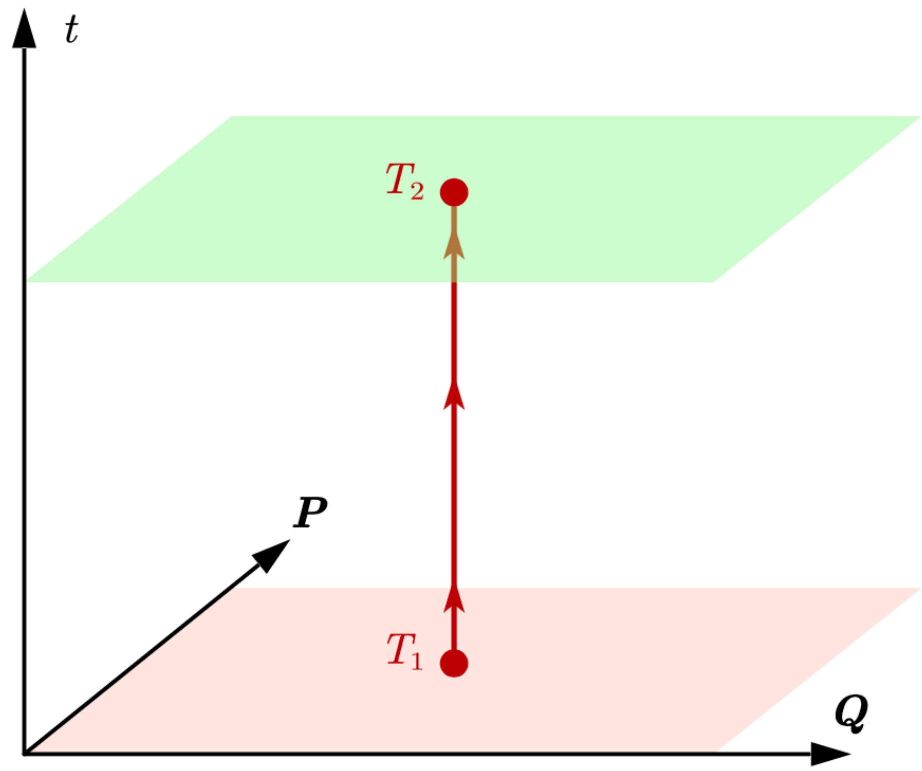
$$p = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha)$$

“最合适”的正则变换

- 如何找到一种正则变换，让运动方程的解最简单?
- 甚至，能不能找到一种“最合适”的正则变换，将哈密顿量变为常数（或者干脆为零）？
- 此时，运动方程的解是一条直线，从而相轨道退化为一个点





哈密顿-雅可比方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

- 采用第二类生成函数（当然，也可采用第一类生成函数）

哈密顿-雅可比方程

$$K = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial t} = 0$$

$$H\left(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial t} = 0$$

原始哈密顿量的力学信息已经完全“转移”到了正则变换中！ （“转移”不是整体实现的，是时间依赖的）

生成函数	微商	示例
$F_2(q, P, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ $\quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i$ $\quad Q_i = q_i$, $P_i = p_i$

哈密顿主函数

$$H(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial F_2(q_i, P_i, t)}{\partial t} = 0$$

- 令 $S = F_2$，称为哈密顿主函数，则 H-J 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0$$

n+1 个变量的一阶偏微分方程

- 哈密顿主函数为哈雅方程的解

$$S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$

有*n+1*个积分常数，但哈雅方程本身只含*S*关于*t*和*q*的偏导数，而不含*S*，所以“*S+C*”仍是方程的解，即*n+1*个积分常数中，有一个体现为*S*加一个常数。

- 类比第二类生成函数 $F_2(q, P, t)$，不难看出常数 α_i 可解释为新动量 P_i

当然亦可为新坐标 Q，对应 F_1

- 哈雅方程是 q 和 t 的函数，常数 α 是方程参量，依赖于初始状态 $\alpha = \alpha(q_0, p_0)$

系统运动方程的解

$$q = q(q_0, p_0, t) \quad p = p(q_0, p_0, t)$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

- 列出哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0$$

- 求出哈密顿主函数

$$S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$

- 求出新的广义坐标 Q

（依赖初始状态的常量）

$$\beta_i(q_0, p_0) = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i}$$

- 反解旧的广义坐标 q

$$\boxed{q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t)}$$

- 求出旧的广义动量 p

$$p_i = \frac{\partial S(q(\alpha, \beta, t), \alpha, t)}{\partial q_i} = \boxed{p_i(\alpha_j, \beta_j, t)}$$

$$q = q(\alpha, \beta, t) \quad p = p(\alpha, \beta, t)$$

α, β 是依赖于初始状态的常量

哈密顿-雅可比理论

- 哈密顿主函数是变换到常值坐标和动量的正则变换的生成函数。
- 求解哈密顿-雅可比方程给出了力学问题的解。
- 求解哈密顿-雅可比方程与求解哈密顿正则方程是等价的。
- 等价性源于一阶偏微分方程与一阶常微分方程组的等价性，源于同一个变分原理，即相空间的哈密顿原理。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

经典作用量函数

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0$$

- 哈密顿主函数 $S(q_i, \alpha_i, t)$ 的全微分

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt = p_i dq_i - H dt = L dt$$

$$S = \int L dt$$

- dS 给出相空间中真实路径作用量的积分线元，沿路径积分给出作用量
- 这里的作用量应理解为真实路径端点的函数 **(积分上限函数)**，是在起点 (q_0, t_0) 到终点(q, t)之间真实路径的作用量，函数变量为终点(q, t)
- 哈密顿主函数也是(q, t)的函数，哈密顿主函数具有真实路径作用量的含义，两者只相差一个常数（不影响哈雅方程）。

$$S(q, t; q_0, t_0) = \int_0^t p_i(\tau) dq_i(\tau) - H(q_i(\tau), p_i(\tau), \tau) d\tau$$

经典作用量函数

哈密顿主函数的物理意义

- 求哈密顿-雅可比方程的解，在物理上等价于

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t)$$

- 找一个使新哈密顿量为零的正则变换的**生成函数**
- 找一个从终态“逆”时间演化到初态的**“有限”时间演化**的生成函数

$$(\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t), t) \quad \xrightarrow{S} \quad (\boldsymbol{q}(t_0), \boldsymbol{p}(t_0), t_0)$$

反解给出运动方程的解

- 求从初态（积分常量）沿经典路径（极值路径）到终态（函数变量）的**作用量**

⇒ **如何解析求解?**

变量分离

- 从求解 2n 个常微分正则方程到求解哈密顿-雅可比偏微分方程

解多个一维函数 ——〉 解一个多维函数

物理上的新途径，数学上并不一定更简单！

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0$$

- 对于偏微分方程，最常用的求解方法就是分离变量法。

- 哈密顿主函数可写为两部分

$$S(q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,t)=S_1(q_1)+S_2(q_2\ldots,q_n,t)$$

哈密顿-雅可比方程可分解为关于S_1和S_2的两个方程

$$\frac{\partial S_2}{\partial t}+H\left(\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right),q_i,\frac{\partial S_2}{\partial q_i},t\right)=0 \quad\Rightarrow\quad H_1\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)=H'\left(q_i,\frac{\partial S_2}{\partial q_i},\frac{\partial S_2}{\partial t},t\right)$$

$H_1\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)$ 一个任意的已知函数

变量分离

- 一个关于 q_1的函数等于一个关于 $q_i\,(i \neq 1)$ 的函数，故两端都等于常数！

$$H_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 = H'\left(q_i, \frac{\partial S_2}{\partial q_i}, \frac{\partial S_2}{\partial t}, t\right)$$

- 可分离变量会导致守恒量，一个守恒性质的新视角。

  系统没有可分离变量并不意味着不存在守恒量

- 特别地，若 q_1 为循环坐标，哈雅方程只依赖于 $\frac{\partial S_1}{\partial q_1}$，则总是可以反解出 $\frac{\partial S_1}{\partial q_1}$，即分离出变量 q_1 相关的部分。

$$S(q_1, \ldots, q_n, t) = S_1(q_1) + S_2(q_2 \ldots, q_n, t)$$

循环坐标必然是可分离变量，对应的正则动量为守恒量。

$$H_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial S_1}{\partial q_1} = p_1 = \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad S = \alpha_1 q_1 + S_2$$

哈密顿特征函数

- 如果哈密顿量 *H* 不显含 *t*，可将哈密顿主函数写为

$$S(q_i,\alpha_i,t)=W(q_i,\alpha_i)-Et$$

分离了时间变量

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad H\left(q_i,\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)=E$$

哈密顿-雅可比方程

H 是一常数

- 哈密顿特征函数 *W* 与哈密顿主函数 *S* 具有类似的物理意义。

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i=p_i(q_i,\alpha_i)\,\dot{q}_i$$

$$W(\alpha_i,q_i)=\int_{t_0}^{t}p_i\dot{q}_i dt=\int_{q_0}^{q_i}p_i dq_i'$$

简约作用量函数

- 对于刘维尔可积系统，哈密顿特征函数 *W* 完全可分离，这时给出作用角变量的生成函数

$$F(I,q)=\int_{q_0}^{q}p_j(I,q)dq^j$$

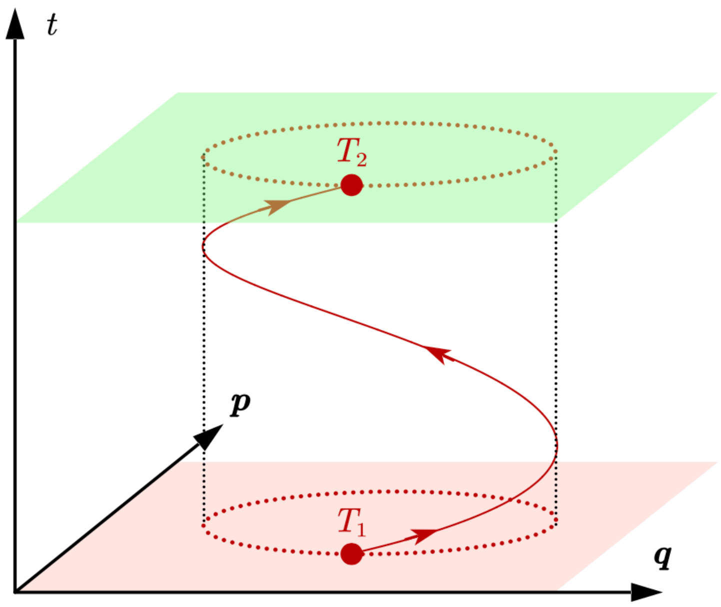
作用角变量生成函数！

$$W(q_i,\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}W_i(q_i,\alpha)$$

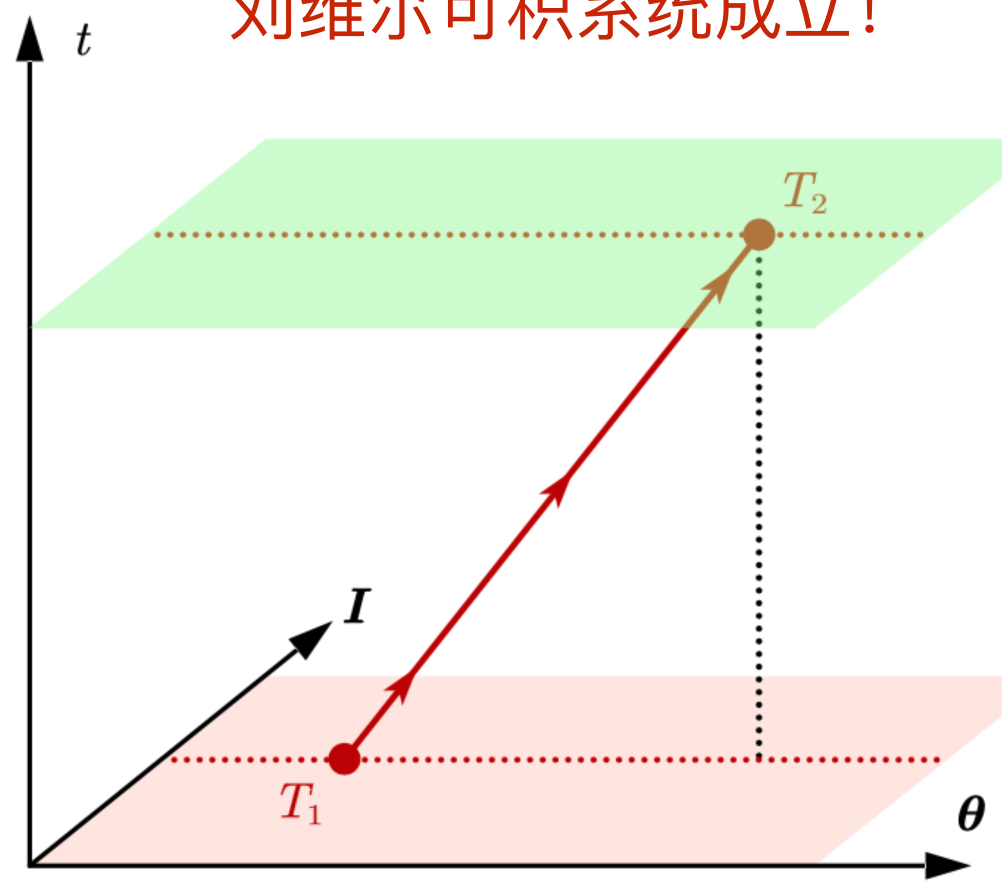
$$p_j=\frac{\partial W_j}{\partial q^j}\quad \theta^j=\frac{\partial W_j}{\partial I_j}$$

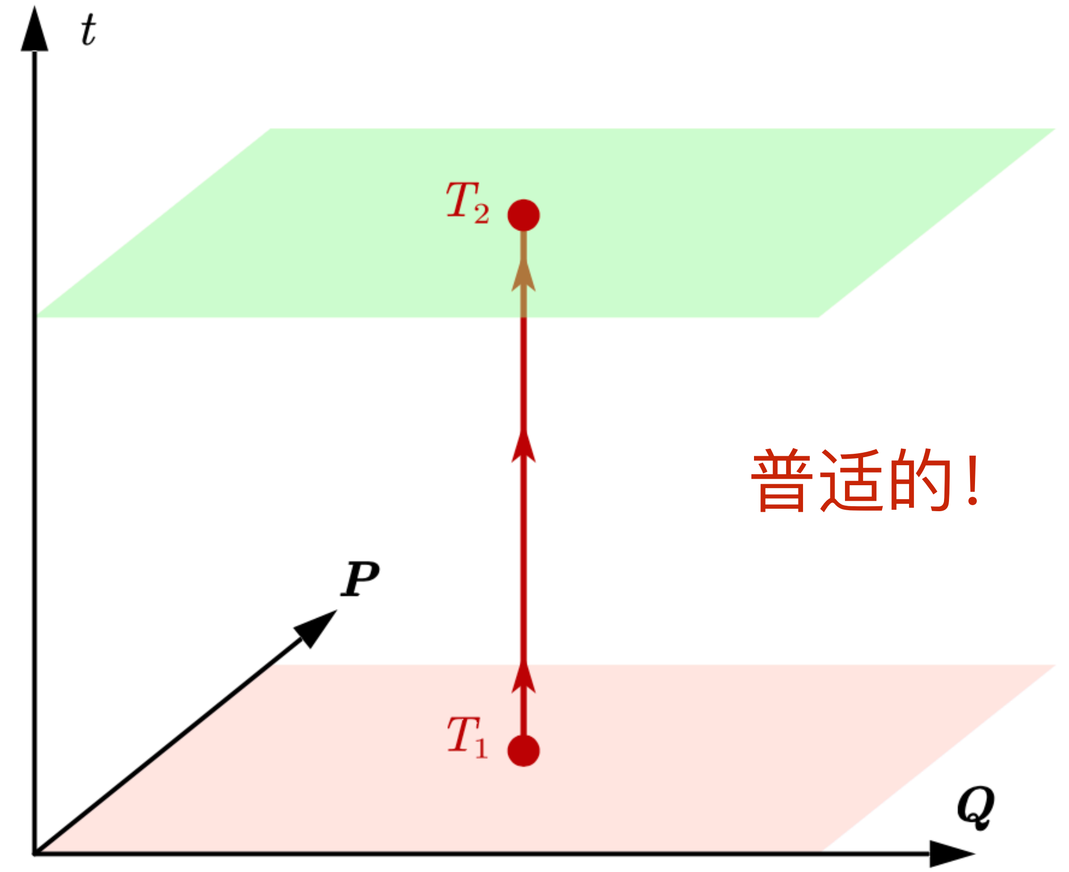
F vs S

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \xrightarrow{F_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{I})} (\boldsymbol{I},\boldsymbol{\phi}), \quad H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \overset{F_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{I})}{=\!=\!=} K(\boldsymbol{I})$$



刘维尔可积系统成立!





总结

- 哈密顿-雅可比方程
- 哈密顿主函数
- 分离变量法
- 哈密顿特征函数与作用变量