理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 讨论对称性与守恒律

  广义动量

  体系的对称性

  —> 拉格朗日量的不变性

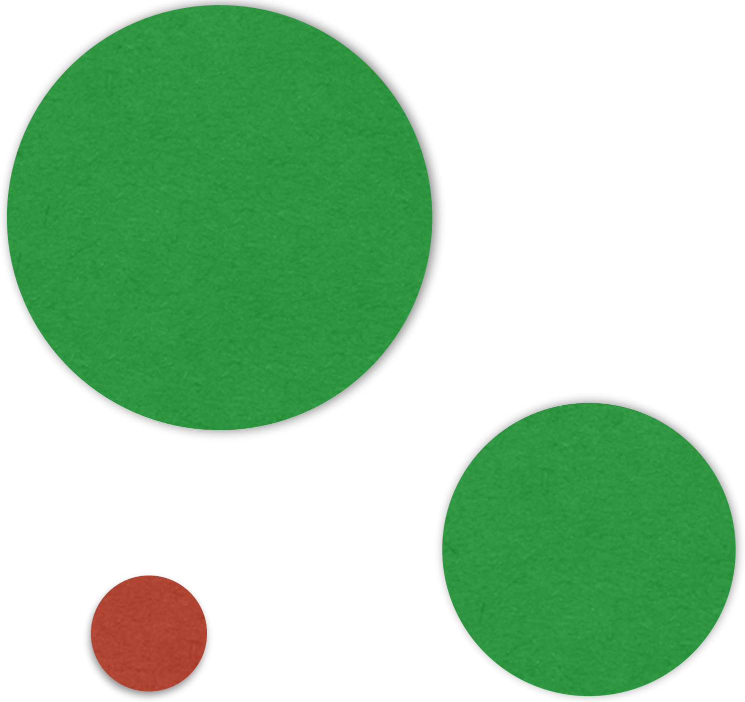
  —> 广义动量守恒

  定义“能量”函数，讨论了能量守恒

- 诺特定理

今日目标

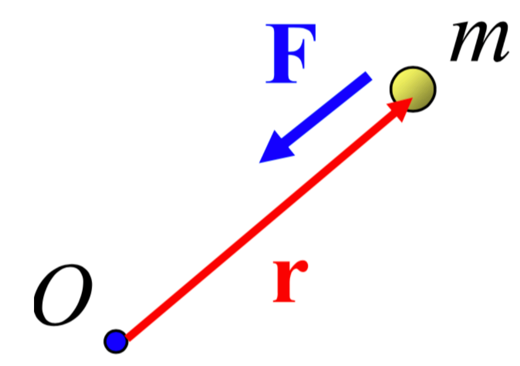
- 受限三体问题



有心力问题

- 考虑一个质点在一个有心力作用下运动

  力 ***F*** 平行于位置向量 ***r***



- 假设 ***F*** 为保守力 $\boldsymbol{F} = -\nabla V(r)$

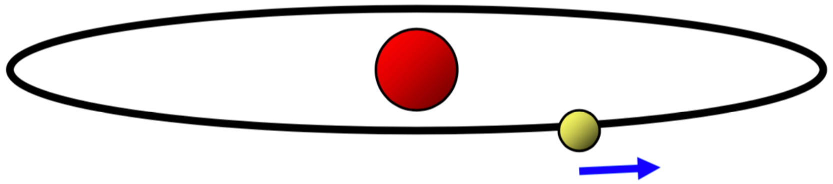
  若 ***F*** 是有心力，则 *V* 是 |***r***| 的函数

- 这样的系统是十分普遍的

  地球绕着太阳转

  卫星绕着地球转

  电子绕着原子核转



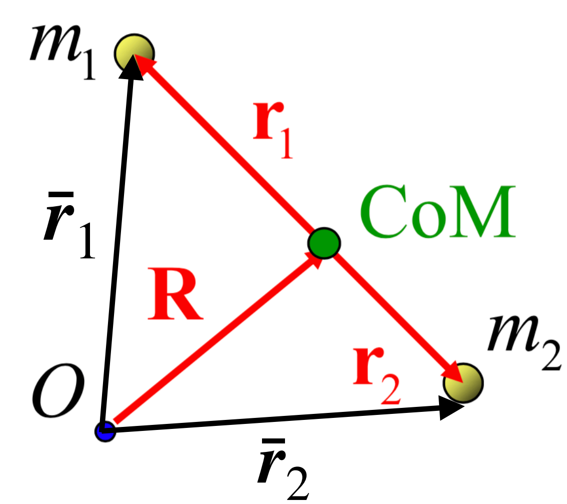
当然，这些例子中假设处于中心的体系非常重，不会运动。

两体问题

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\bar{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\bar{\boldsymbol{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

- 考虑无外力情形下由两个质点组成的系统

  $\boldsymbol{r_1}$ 和 $\boldsymbol{r_2}$ 是相对于质心的位置矢量



- 拉格朗日量为

$$L = \underbrace{\frac{(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2}}_{\text{质心运动}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}}_{\text{相对于质心的运动}} - V(r)$$

相互作用来源于一个有心势场

$$|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$$

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$$

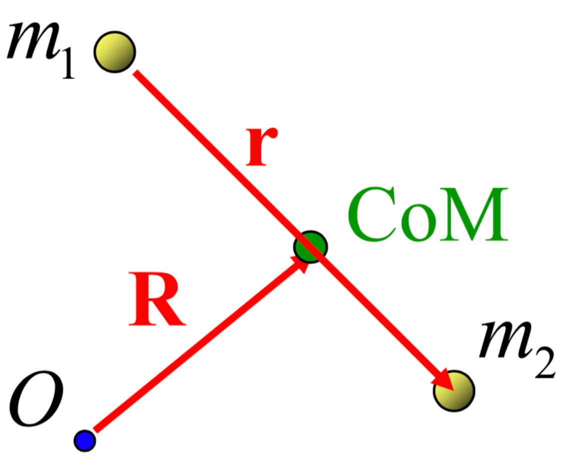
$$\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \bar{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \bar{\boldsymbol{r}}_2 - \boldsymbol{R}$$

两体问题 —> 有心力问题

$$L = \frac{(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r)$$



- ***R* 是一个循环变量**

质心以一个恒定的速度在运动

关于 $\boldsymbol{r}$ 的运动方程不会含有质心位置 ***R*** 或其时间导数 $\dot{\boldsymbol{R}}$

将原点 O 移至质心位置，不考虑质心运动

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r)$$

两质点间的相对运动等价于一个质点在有心力势场下的运动

定义约化质量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ $\qquad \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$

球对称性

- 有心力系统是球对称的，即绕过原点的任意轴旋转不变

  拉格朗日量不依赖于任意方向 $L = T(\dot{\boldsymbol{r}}^2) - V(r)$

- 角动量守恒 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \text{const}$

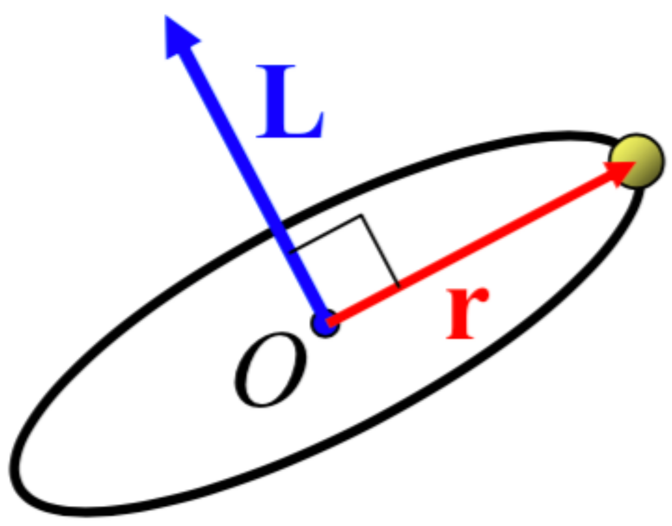
  因为角动量的方向是固定的，且 $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{L}$，所以 $\boldsymbol{r}$ 始终处于一个平面内

- 选择极坐标系

  极轴方向为角动量 $\boldsymbol{L}$ 的方向

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(r, \theta, \boxed{\psi}) = \boldsymbol{r}(r, \theta)$$

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$



运动方程：角动量

- 可以消去 ψ，于是拉格朗日量可约化为

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

- θ 是循环坐标，相应的共轭动量是守恒量，

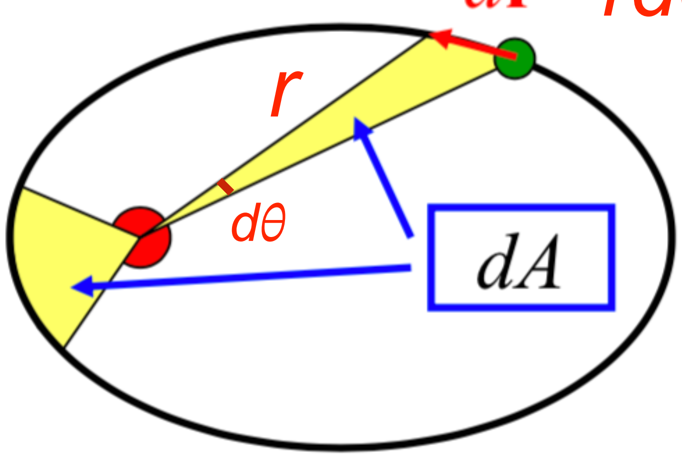
$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const} \equiv l$$

角动量大小

- 等价于，

掠面速度

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{const}$$



dA 为矢径在 dt 时间内扫过的面积 $dA = \frac{1}{2}r(rd\theta)$

对任意中心力场均成立，
不局限于平方反比力场！

开普勒第二定律：行星与太阳的联线扫过的面积与时间成正比

运动方程：径向运动

- 可以消去 ψ，于是拉格朗日量可约化为

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

中心力

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

- 关于 r 的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = \underbrace{\boxed{mr\dot{\theta}^2}}_{\text{离心力}} + \underbrace{\boxed{f(r)}}_{\text{中心力}}$$

- 利用角动量

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + f(r)$$

$$l = mr^2\dot{\theta}$$

引入两个积分常数，将此式积分即可，但是其实可以更简单

能量守恒

1. 约束方程是时间无关的; *2.* 势场*V* 是速度无关的; *3.* 拉格朗日量不显含时间

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V(r) = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\underline{\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

关于 *r* 的一阶微分方程

这一项肯定非负!

- 原则上，可以求解

$$t = \int_0^t dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = t(r)$$

- 求逆函数 $t(r) \rightarrow r(t)$

- 通过积分求$\theta(t)$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

Done!

关于自由度的讨论

- 两体问题具有六个自由度，约去质心运动，简化为单体问题
- 一个质点具有三个自由度
  运动方程是二阶微分方程，所以产生6个积分常数
- 每个守恒定律量可约去一阶微分
  时间导数为零
- 我们可以使用**角动量** $\boldsymbol{L}$ 和能量 E，共4个守恒常数
  余下2个积分常数，即 r_0 和 θ_0
- 当然，我们也可以不使用守恒定律，那样直接求解拉格朗日方程时会更繁琐一些。
- 使用守恒量 $\boldsymbol{L}$ 和能量 E 更自然，可过渡至量子力学情形！

运动轨迹方程

- 我们已经尝试过解出 $r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$

  现在，我们感兴趣的是轨迹的形状 $r = r(\theta)$

  将 *dt* 换成 *dθ* $l = mr^2\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{l}{mr^2}\dfrac{d}{d\theta}$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

从 *r* 到 *u* ≡1/*r*

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d}{dr} = -u^2\frac{d}{du}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

求解这一方程将给出运动轨迹的形状

先分析对称性总是有帮助的

运动轨迹的对称性

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

- 方程关于 θ 是对称的

将 θ 替换为 $-\theta$ 是不改变方程的

如果初始条件是对称的，则方程的解 $u(\theta)$ 一定是对称的

选择初始条件 $t = 0$ 时，$\theta = 0$，于是 θ —> $-\theta$ 将有

$u(0) \rightarrow u(0)$ 成立

$\frac{du}{d\theta}(0) \rightarrow -\frac{du}{d\theta}(0)$ OK if $\frac{du}{d\theta}(0) = 0$

运动轨迹在角度θ 满足 $\frac{du}{d\theta} = 0$ 处是对称的

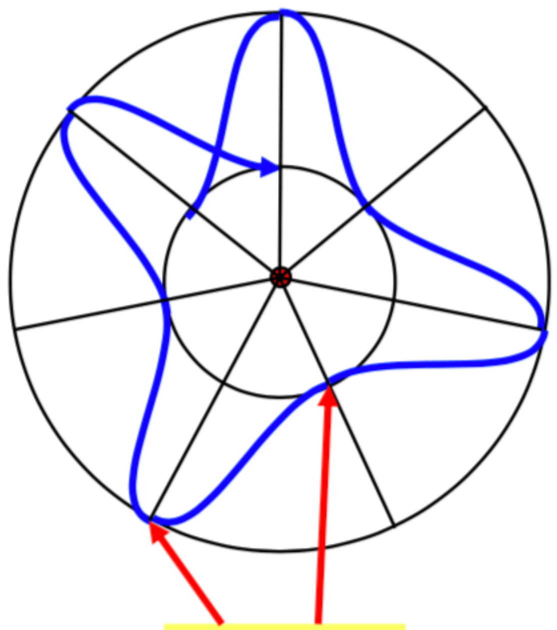
运动轨迹的对称性

- 运动轨迹在每个转折点都是对称的 = 拱点

  轨迹在绕拱点矢量的反射下保持不变!

  所以我们不必太在意 $\dot{r}$ 的符号

  求得一对拱点之间的轨迹，即可得到全部轨迹



$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

现在，我们可以求解方程了!

求解运动轨迹方程

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

给定轨迹，可知受力！

- 为求运动轨迹，不直接积分二阶微分方程，而利用能量守恒可得

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

坐标变换

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$l = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2mV(1/u)}{l^2}}$$

将此式积分

并不总是可以解析积分的…

求解运动轨迹方程

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2mV(1/u)}{l^2}}$$

并不总是可以解析积分的…

取幂律力 $f \propto r^n$ $V \propto r^{n+1}$

解析解存在于以下情形：

$n = 1, -2, -3;$ 简单函数

$n = 1$ 简谐振子

$n = -2$ 开普勒问题

伯特兰定理：对于所有被束缚的质点来讲，只有遵循平方反比律和胡克定律的两种有心力才能给出闭合轨道（证明不做要求~）

$n = 5,3,0, -4, -5, -7$ 椭圆函数

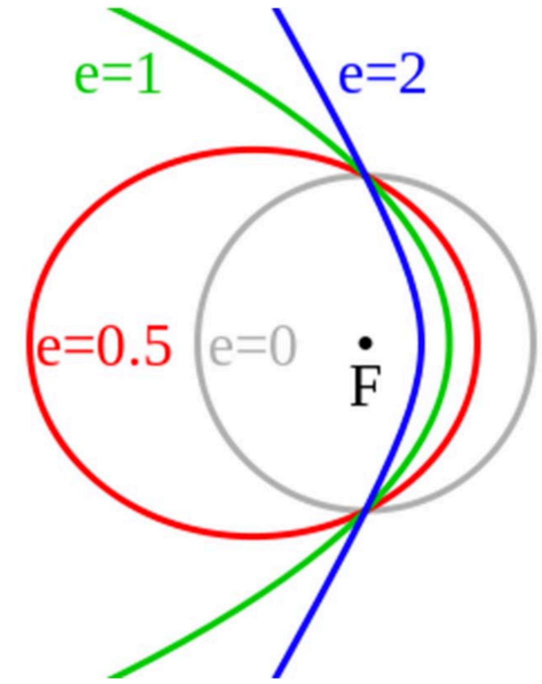
平方反比力

$$f=-\frac{k}{r^2}$$ $$V=-\frac{k}{r}$$ $$u=\frac{1}{r}=\frac{mk}{l^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')\right)$$ $$\theta'=\text{const}$$

- 圆锥曲线

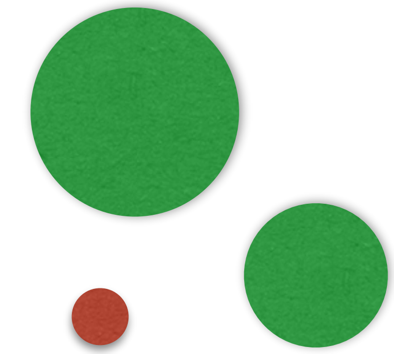
$$\frac{1}{r}=C\left(1+e\cos(\theta-\theta')\right)$$ $$C=\frac{mk}{l^2}$$ $$e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}$$ e 为偏心率

$e>1$	$E>0$	双曲线
$e=1$	$E=0$	抛物线
$e<1$	$E<0$	椭圆
$e=0$	$E=-\frac{mk^2}{2l^2}$	圆



与前面的定性分析一致！

受限三体系统



- 给定一个三体系统，假设三个质点的质量存在很大差异

$$m_1 \gg m, \quad m_2 \gg m$$

- 两个大质量质点的相对运动应该由二者之间的万有引力决定，小质量质点的影响可以忽略

- 大质量质点的运动是简单的，但是小质量质点的运动却是复杂的

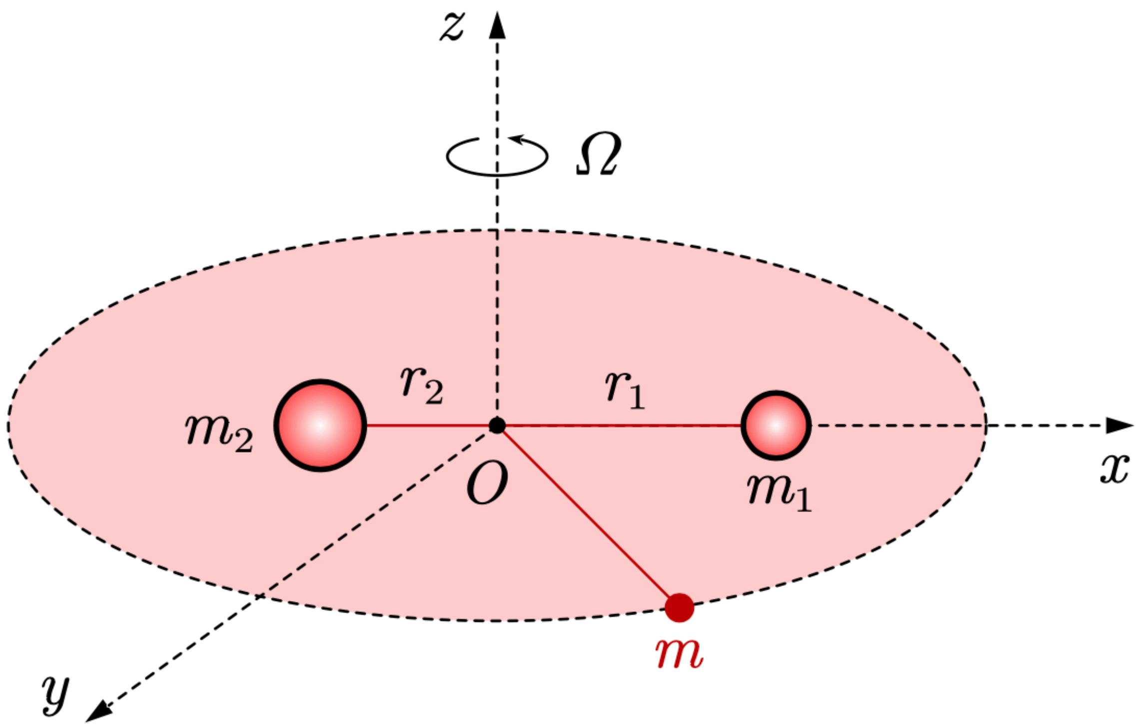
- 进一步限制一些简单情况：

  1. 将大质量质点的轨道近似为正圆。

  2. 三个质点在同一个平面内做二维运动。

受限三体系统

- 选择两个大质量质点 m_1 和 m_2 的质心系，并转换到与之同步旋转的非惯性系



$$m_1 r_1 \Omega^2 = m_2 r_2 \Omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$$

$$r_1 + r_2 = R$$

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

科里奥利效应

- 我们现在研究一个转动坐标系中物体运动的行为（非惯性系）

  如，我们观察地球（在自转）上的一物体的运动

参考系 = 坐标系+观察者

(位于原点)

速度 $\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ ***r*** 是地球上的***r***

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times$$

加速度

$$\boldsymbol{a}_s = \left(\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_s$$
$$= \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

令 $\boldsymbol{\omega}$ 为一常数，不随时间变化

- 牛顿方程（空间参考系） $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_s$

  牛顿方程（本体参考系）

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}_{eff} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

有效力！

科里奥利效应

- 我们现在研究一个转动坐标系中物体运动的行为（非惯性系）

如，我们观察地球（在自转）上的一物体的运动

参考系 = 坐标系+观察者
(位于原点)

速度 $$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{r}$ 是地球上的$\boldsymbol{r}$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times$$

拉氏量

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_s^2 - V(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_r^2 + m \boldsymbol{v}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 - V(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{\omega}$ 为一常数，不随时间变化

- 运动方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_r + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r - m\boldsymbol{v}_r \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} = 0$$

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F}_{eff} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

有效力!

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

受限三体系统

- 选择两个大质量质点 m_1 和 m_2 的质心系，并转换到与之同步旋转的非惯性系

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x} \right)^2 - V(\boldsymbol{x})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\boxed{-2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{x}}}}_{\text{科里奥利力}} - \underbrace{\boxed{\nabla V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x})}}_{\text{有效势}}, \quad V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2}_{\text{离心力}} + \underbrace{V(\boldsymbol{x})}_{\text{引力}}$$

$$\nabla V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) = 0$$

拉格朗日点:

离心力与引力平衡；若质点 m 在该点处的速度恰好为零，则科里奥利力为零。于是，质点的加速度为零，从而将永远静止于该点。

拉格朗日点

- 在运动平面内，令质点 m 的坐标 $\boldsymbol{x} = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y$

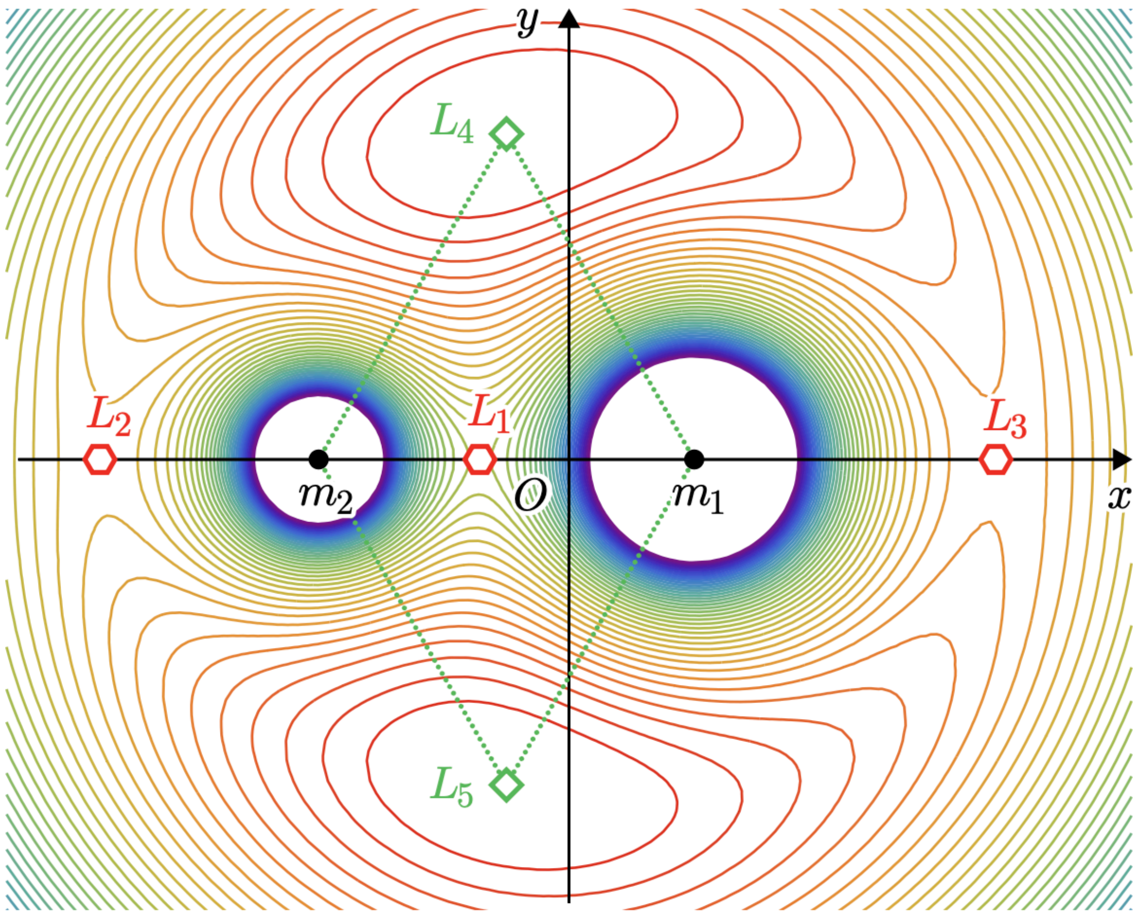
$$V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2 + V(\boldsymbol{x})$$

$$V_{\text{eff}}(x,y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}}$$

$$\nabla V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{Gm_1(\mathrm{x}_L - r_1)}{[(\mathrm{x}_L-r_1)^2+\mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2(\mathrm{x}_L + r_2)}{[(\mathrm{x}_L+r_2)^2+\mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2\mathrm{x}_L \\ \dfrac{Gm_1\mathrm{y}_L}{[(\mathrm{x}_L-r_1)^2+\mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2\mathrm{y}_L}{[(\mathrm{x}_L+r_2)^2+\mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2\mathrm{y}_L \end{cases}$$

$$\mathrm{y}_L = 0 \quad \text{or} \quad \mathrm{y}_L \neq 0$$



拉格朗日点L1, L2, L3

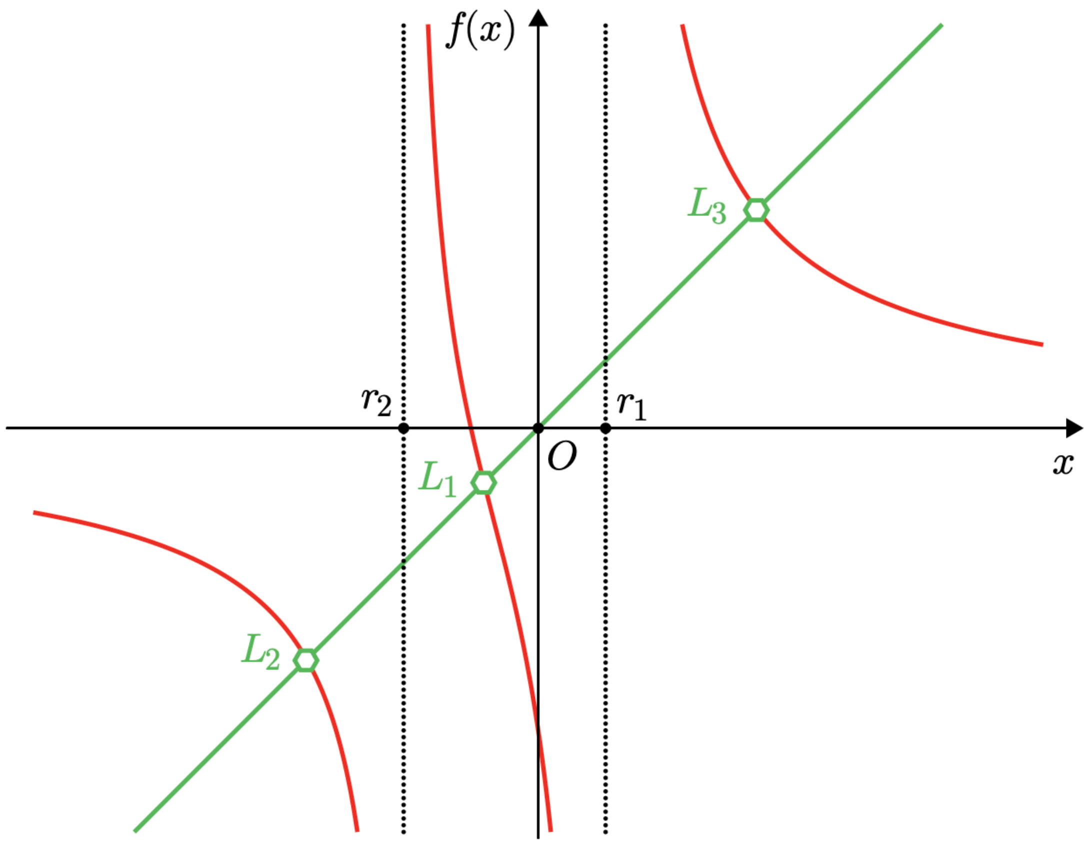
$$\begin{cases} \dfrac{Gm_1(\mathrm{x}_L - r_1)}{[(\mathrm{x}_L - r_1)^2 + \mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2(\mathrm{x}_L + r_2)}{[(\mathrm{x}_L + r_2)^2 + \mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 \mathrm{x}_L \\ \dfrac{Gm_1\mathrm{y}_L}{[(\mathrm{x}_L - r_1)^2 + \mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2\mathrm{y}_L}{[(\mathrm{x}_L + r_2)^2 + \mathrm{y}_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 \mathrm{y}_L \end{cases}$$

令 $\mathrm{y}_L = 0$

$$r_2 \frac{R^2(\mathrm{x}_L - r_1)}{|\mathrm{x}_L - r_1|^3} + r_1 \frac{R^2(\mathrm{x}_L + r_2)}{|\mathrm{x}_L + r_2|^3} = \mathrm{x}_L$$

取长度单位为 *R*=1，即可约去 *R*

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$



通常约定，两质点中间的拉格朗日点为L1，两侧的拉格朗日点分别记为 L2 和 L3。

拉格朗日点L4, L5

令 $y_L \neq 0$

将第二式两边同时除以 y_L，并乘以 x_L 与第一式相减，

$$\begin{cases} \dfrac{-Gm_1 r_1}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2 r_2}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ \dfrac{Gm_1}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 \end{cases}$$

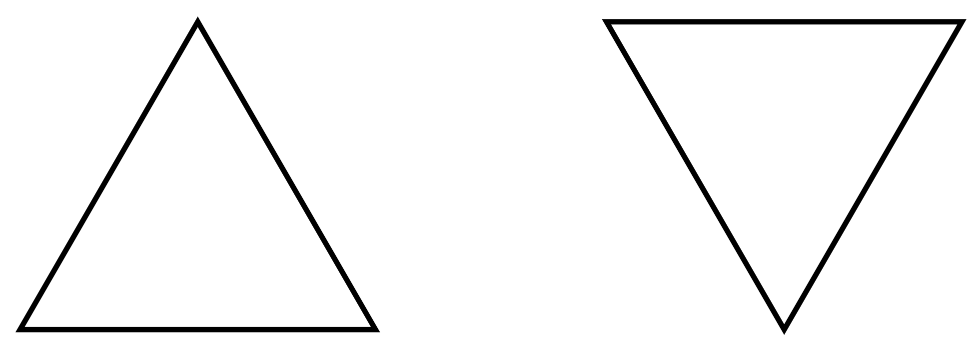
$$(x_L - r_1)^2 + y_L^2 = 1,$$
$$(x_L + r_2)^2 + y_L^2 = 1$$

取长度单位为 R=1，即可约去 R

$$\begin{cases} \dfrac{Gm_1(x_L - r_1)}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2(x_L + r_2)}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 x_L \\ \dfrac{Gm_1 y_L}{[(x_L - r_1)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{Gm_2 y_L}{[(x_L + r_2)^2 + y_L^2]^{\frac{3}{2}}} = \Omega^2 y_L \end{cases}$$

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}, \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

两组解：三个质点的坐标构成一个等边三角形。此时，两个拉格朗 日点分别记为 L4 和 L5。



极限条件下的拉格朗日点

当 $m_2/m_1 \to 0,$ 有 $r_1 \to 0, \quad r_2 \to R$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}R$$

L1，L2，L3 满足

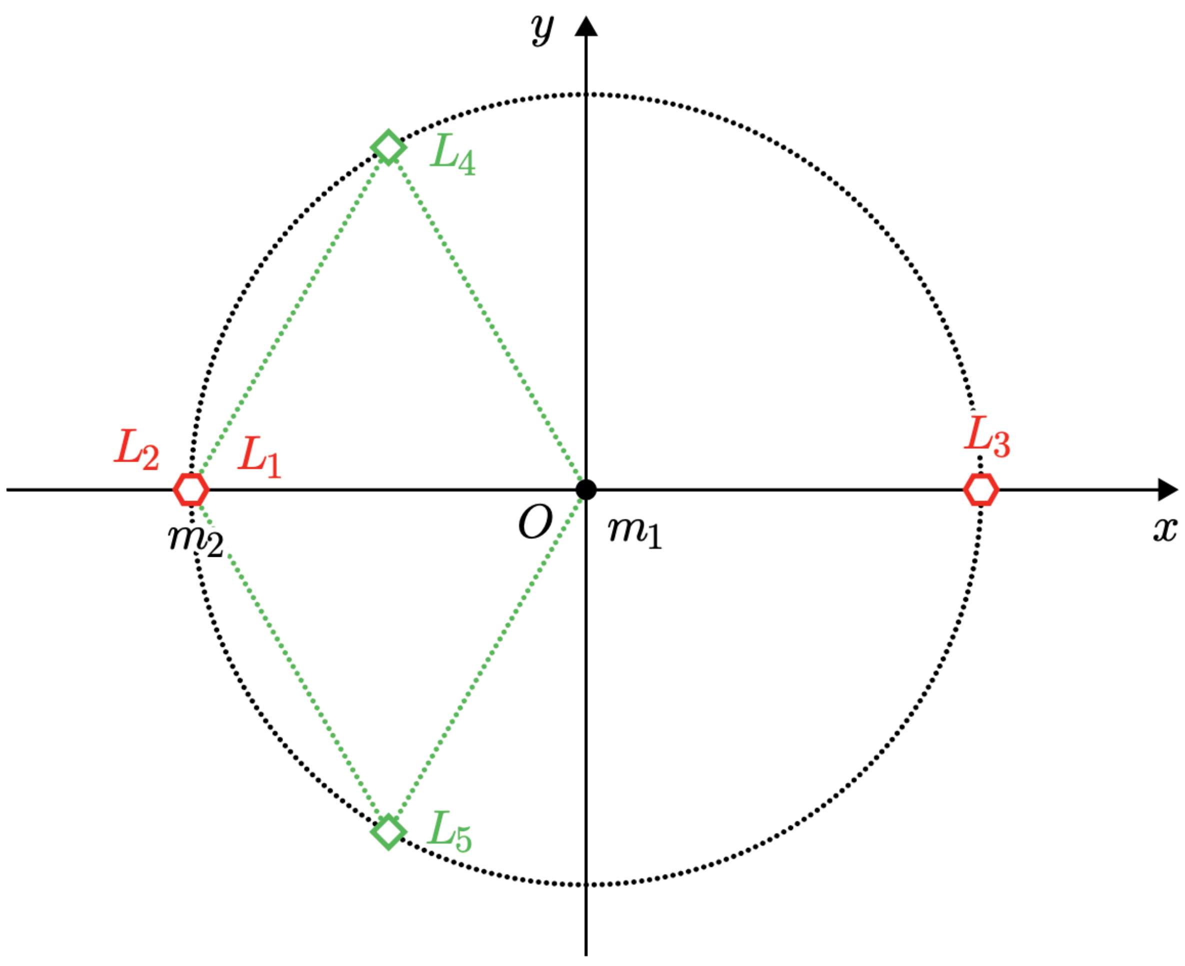
$$r_2\frac{(\mathrm{x}_L - r_1)}{|\mathrm{x}_L - r_1|^3} + r_1\frac{(\mathrm{x}_L + r_2)}{|\mathrm{x}_L + r_2|^3} = \mp\frac{1}{\mathrm{x}_L^2} = \mathrm{x}_L$$

$$r_2\frac{(\mathrm{x}_L - r_1)}{|\mathrm{x}_L - r_1|^3} + r_1\frac{(\mathrm{x}_L + r_2)}{|\mathrm{x}_L + r_2|^3} = \mathrm{x}_L$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{x}_L = \mp 1$$

L4，L5 始终与两个大质量质点的坐标构成一个等边三角形，不受该比值的影响

所有拉格朗日点都处于以质点 m_1 的坐标为圆心，且 R 为半径的圆周上。



希尔半径

考虑 m_2/m_1 为一小量 ϵ，L1，L2分别向两侧移动一个小量

$$x_{L\pm} = -r_2 + \delta_\pm$$

$$r_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \quad r_2 = \frac{1}{1+\epsilon}$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}R$$

$$r_2\frac{(x_{L\pm}-r_1)}{|x_{L\pm}-r_1|^3} + r_1\frac{(x_{L\pm}+r_2)}{|x_{L\pm}+r_2|^3} = -\frac{r_2}{(1-\delta_\pm)^2} \pm \frac{r_1}{\delta_\pm^2} = -r_2 + \delta_\pm$$

展开至$\delta_\pm$, ϵ的最低次

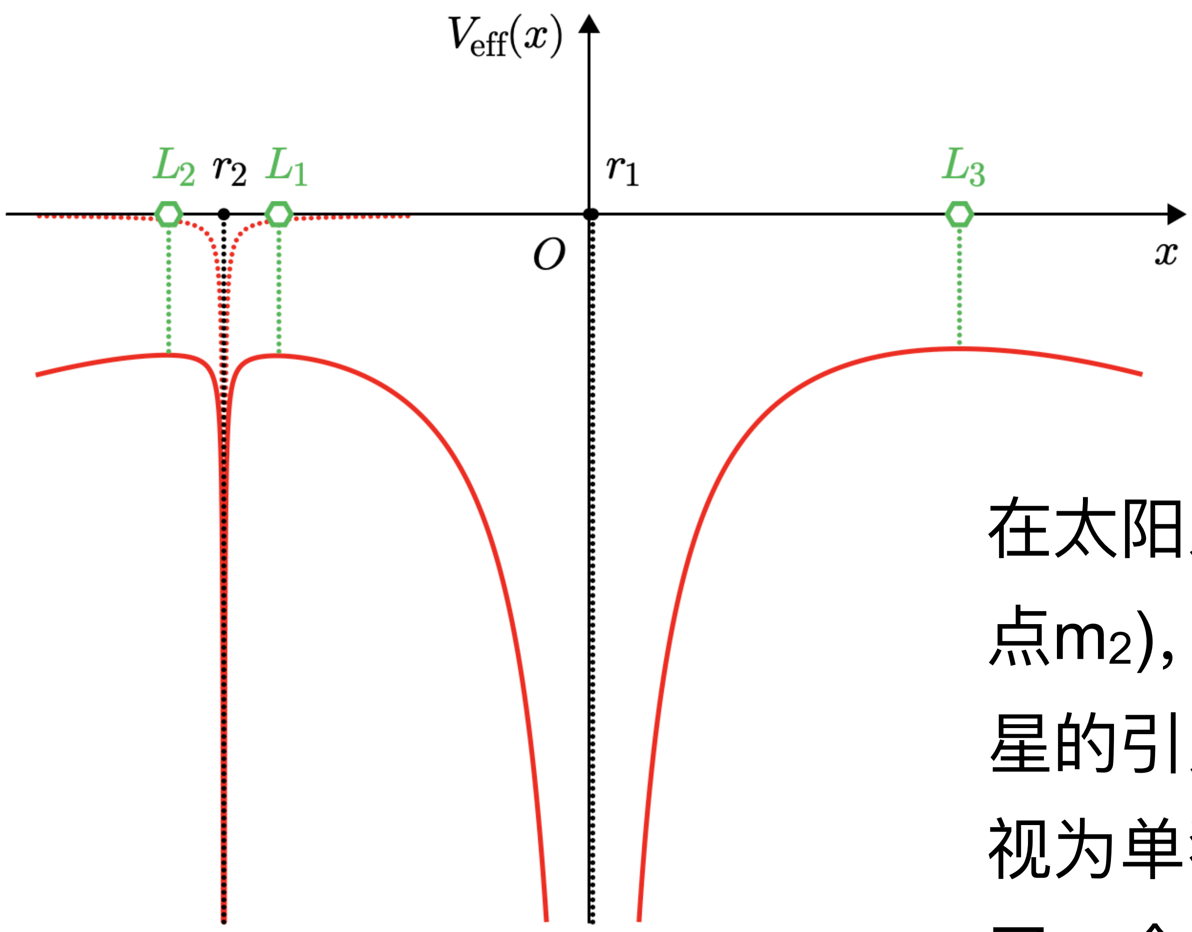
$$-2r_2\delta_\pm \pm \frac{r_1}{\delta_\pm^2} = \delta_\pm \Rightarrow -2\delta_\pm \pm \frac{\epsilon}{\delta_\pm^2} = \delta_\pm \Rightarrow \delta_\pm = \pm\left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/3}$$

$$r_\mathrm{H} = R\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}$$

希尔半径

$$r_2\frac{(x_L-r_1)}{|x_L-r_1|^3} + r_1\frac{(x_L+r_2)}{|x_L+r_2|^3} = x_L$$

希尔半径



$$r_{\rm H} = R\left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{1/3}$$

在太阳系中(太阳为大质量质点 m_1、行星为小质量质点m_2)，虽然任何小质量卫星 m 都同时受到太阳和行星的引力作用，但是若处于行星的希尔球内，则可以视为单独受到行星的引力作用。在希尔球内，除平移了一个常量外，有效势$V_{\rm eff}$与质点m_2单独产生的势能形状几乎完全一致。

$$V_{\rm eff}(x,y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}}$$

L3 的移动

考虑 m2/m1 为一小量 ϵ，L3 向外移动一个小量

$$x_{L_3} = 1 + \delta_3$$

$$r_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \quad r_2 = \frac{1}{1+\epsilon}$$

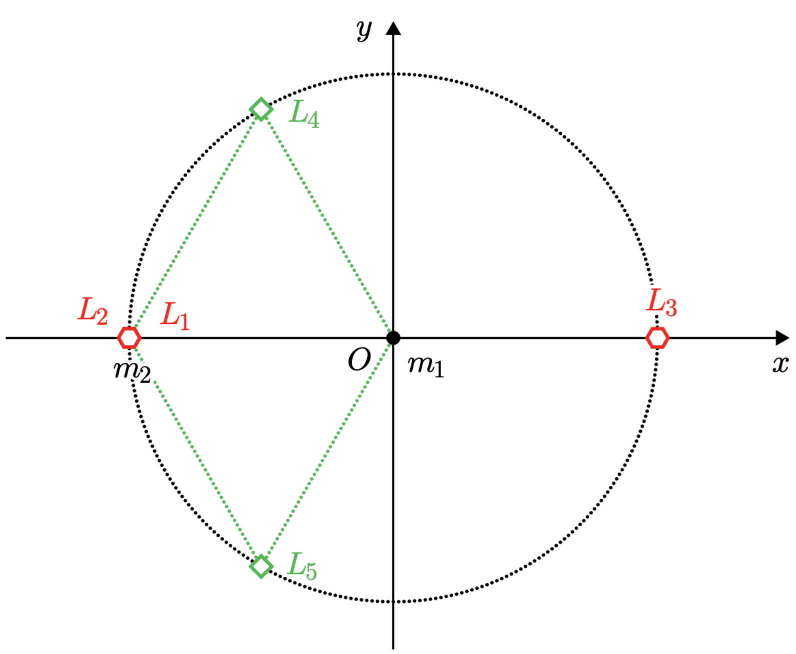
$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}R, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}R$$

$$r_2\frac{(x_{L_3}-r_1)}{|x_{L_3}-r_1|^3} + r_1\frac{(x_{L_3}+r_2)}{|x_{L_3}+r_2|^3} = \frac{r_2}{(r_2+\delta_3)^2} + \frac{r_1}{(1+r_2+\delta_3)^2} = 1+\delta_3$$

展开至$\delta_{\pm}$, ϵ的最低次

$$\frac{1}{r_2} - \frac{2\delta_3}{r_2^2} + \frac{r_1}{(1+r_2)^2} = 1+\delta_3$$

$$-2\delta_3 + \frac{5\epsilon}{4} = \delta_3 \Rightarrow \delta_3 = \frac{5\epsilon}{12}$$

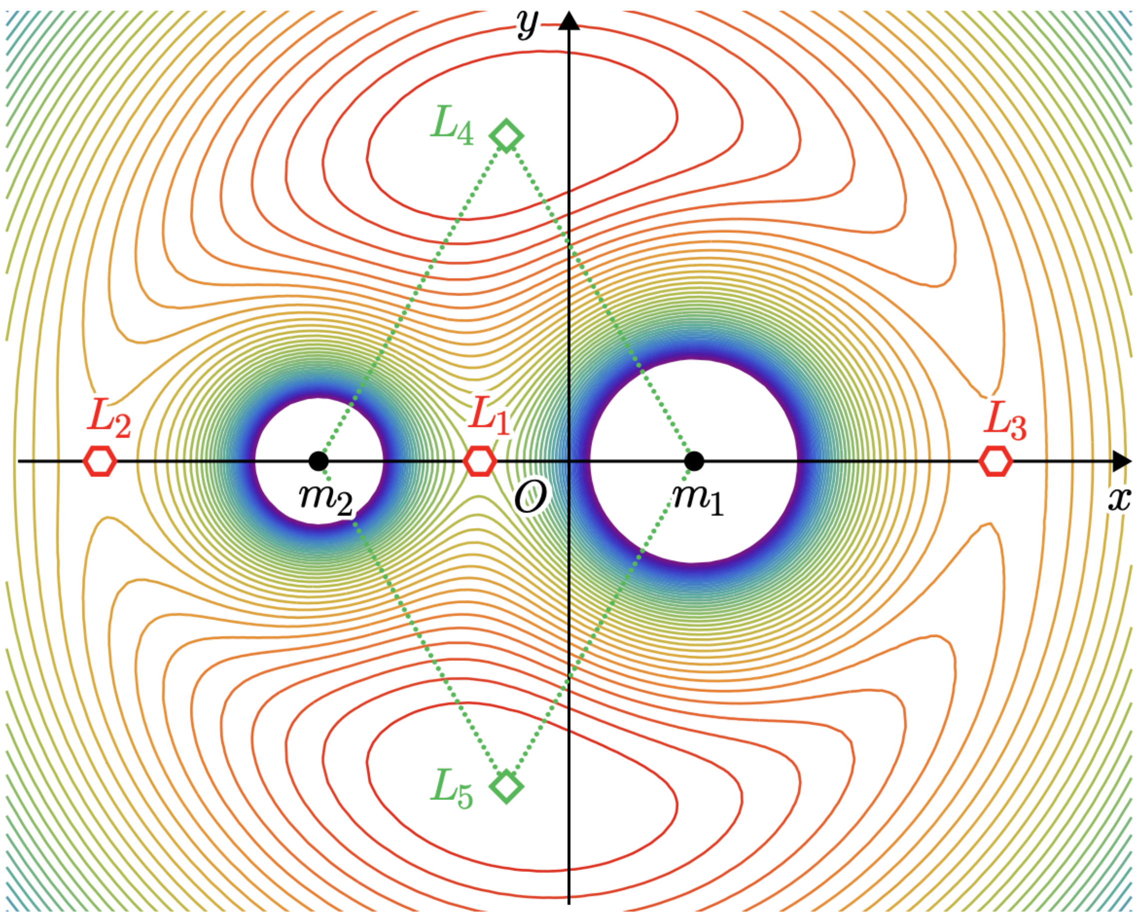


拉格朗日点附近的运动

有效势的二次微分

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}^{xx} = \dfrac{Gm_1[y^2-2(x-r_1)^2]}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{Gm_2[y^2-2(x+r_2)^2]}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{yy} = \dfrac{Gm_1[(x-r_1)^2-2y^2]}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{Gm_2[(x+r_2)^2-2y^2]}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{xy} = \dfrac{3Gm_1y(r_1-x)}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{3Gm_2y(r_2+x)}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} \end{cases}$$

$$V_{\text{eff}}(x,y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}}$$



对于 L1，L2，L3 （y=0）

极大

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}^{xx} = -\Omega^2\left(1+\dfrac{2r_2}{|x_L-r_1|^3}+\dfrac{2r_1}{|x_L+r_2|^3}\right) < 0 \\ V_{\text{eff}}^{yy} = -\Omega^2\left(1-\dfrac{r_2}{|x_L-r_1|^3}-\dfrac{r_1}{|x_L+r_2|^3}\right) > 0 \\ V_{\text{eff}}^{xy} = 0 \end{cases}$$

极小

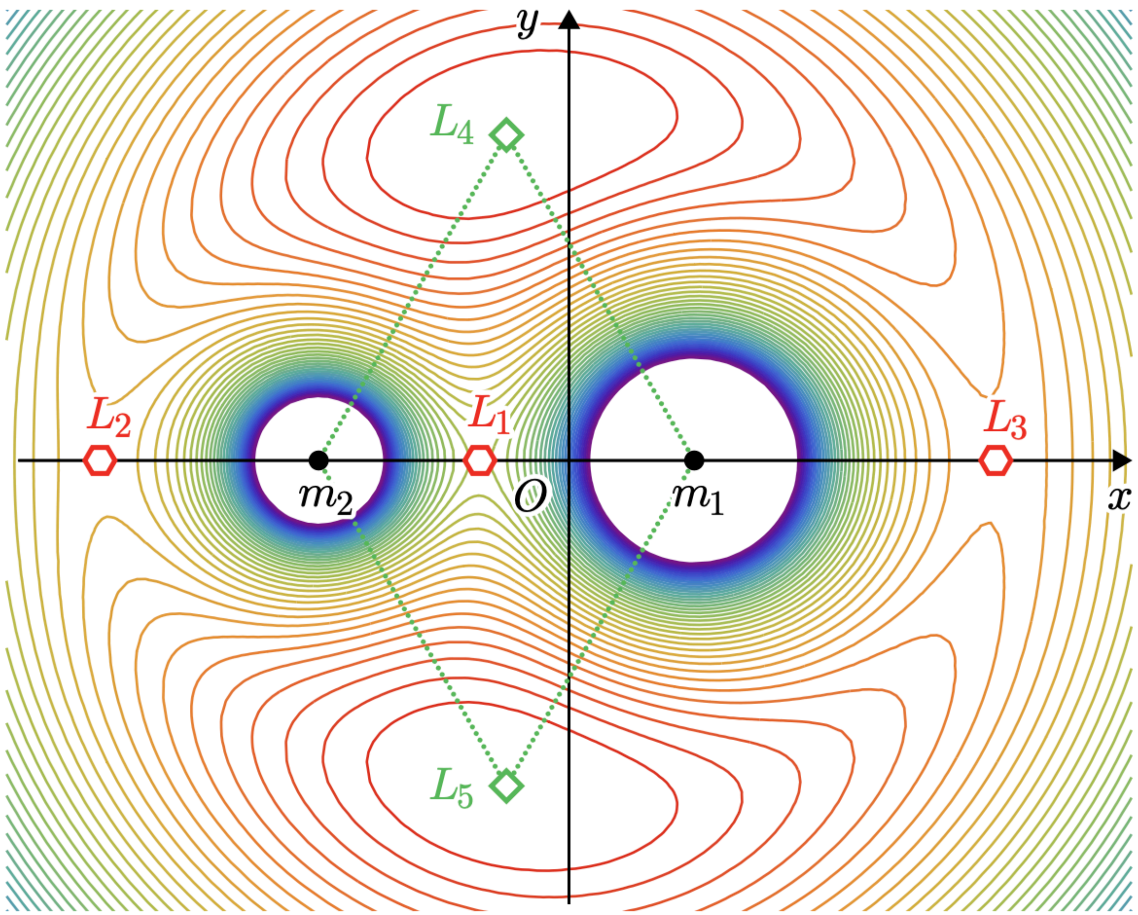
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} V_{\text{eff}}^{xx} & 0 \\ 0 & V_{\text{eff}}^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_x^2 & 0 \\ 0 & \omega_y^2 \end{bmatrix}$$

拉格朗日点附近的运动

有效势的二次微分

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}^{xx} = \dfrac{Gm_1[y^2-2(x-r_1)^2]}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{Gm_2[y^2-2(x+r_2)^2]}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{yy} = \dfrac{Gm_1[(x-r_1)^2-2y^2]}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{Gm_2[(x+r_2)^2-2y^2]}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \Omega^2 \\ V_{\text{eff}}^{xy} = \dfrac{3Gm_1 y(r_1-x)}{[(x-r_1)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{3Gm_2 y(r_2+x)}{[(x+r_2)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} \end{cases}$$

$$V_{\text{eff}}(x,y) = -\frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - \frac{Gm_1}{\sqrt{(x-r_1)^2+y^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{(x+r_2)^2+y^2}}$$



对于 L4，L5 $\quad x_L = r_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - r_2, \quad y_L = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boldsymbol{M} = -\frac{3\Omega^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & \pm\sqrt{3}\lambda \\ \pm\sqrt{3}\lambda & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

由于 $0<\lambda<1$，可知 **M** 是一个负定矩阵（所有本征值为负） **极大**

验证！

拉格朗日点附近的运动方程

- 在拉格朗日点附近，质点 m 的坐标 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\delta}$

$$V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}) = V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\nabla V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}_0) = 0$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{x}} - \nabla V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x})$$

$$\cancel{\ddot{\boldsymbol{x}}_0} + \ddot{\boldsymbol{\delta}} = -\cancel{2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{x}}_0} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\delta}} - \cancel{\nabla V_{\text{eff}}(\boldsymbol{x}_0)} - \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{\delta}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta})$$

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta} = 0$$

拉格朗日点附近的运动方程

试探解 $\boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{v}\, \mathrm{e}^{\kappa t}$

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta} = 0$$

$$\boldsymbol{M}' \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} \kappa^2 & -2\kappa\Omega \\ 2\kappa\Omega & \kappa^2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{M}$$

线性方程组

$$|\boldsymbol{M}'| = 0$$

$$\begin{cases} \kappa^4 + \kappa^2(4\Omega^2 - \omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_x^2\omega_y^2 = 0 \\ \kappa^4 + \kappa^2\Omega^2 + \frac{27}{16}(1-\lambda^2)\Omega^4 = 0 \end{cases}$$

L1，L2, L3

L4, L5

$$\kappa^4 + b\kappa^2 + c = 0$$

L1，L2, L3 有发散解

地月系统 ($\lambda \simeq 1$) L4，L5，只有稳定解 $\kappa^2 < 0$

有效势极大点，但由于科氏力的作用，可以有稳定解！

小行星云

总结

- 两体有心运动的轨迹方程
- 圆锥曲线
- 有心运动的稳定性
- 受限三体运动
- 拉格朗日点
- 接下来：哈密顿力学