# 理论力学

赵鹏巍

# 内容回顾

- 辛几何

  正则变换保辛

$$[u,v]_{q,p} \equiv \frac{\partial u}{\partial q^i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q^i}$$

- 泊松括号

  正则变换保泊松括号

$$[u,v] = (\partial_i u)\omega^{ij}(\partial_j v)$$

**几乎整个哈密顿力学框架都可以用泊松括号来重新阐释**

# 泊松括号运动方程

- 任意物理量 *u(q,p,t)* 的时间演化方程

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$=[u,H]+\frac{\partial u}{\partial t}$$

对应量子力学中的海森堡方程！

- 令 u = q, or p, 则有

$$\dot{q}_i=\left[q_i,H\right]=\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i=\left[p_i,H\right]=\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

哈密顿正则方程！

# 守恒量

- 令 $u = H$，则有**不显含时间的哈密顿量为守恒量**

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- 若 u 不显含时间，则其**时间演化性质完全取决于它与哈密顿量的泊松括号**是否为零。（验证：共轭于循环坐标的广义动量守恒）

$$\frac{du}{dt} = [u, H]$$

- 物理量是否显含时间与是否守恒并无必然联系。

  物理量不显含时间不一定是守恒量!

  **显含时间可能是守恒量吗?**

# 守恒量

- 令 u, H不显含时间，且有 $[u, H] \neq 0$， $[[u, H], H] = 0$
  可构造显含时间的守恒量

$$f = u - t[u, H]$$

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} = [u, H] - [t[u, H], H] - [u, H] = 0$$

- 举例：

$$u = q, \quad H = \frac{p^2}{2m}$$

$$f = q - \frac{p}{m}t$$

**伽利略对称性**

# 泊松定理

- 若 $f$ 和 $g$ 都是运动常数，则它们的泊松括号$[f, g]$ 也是运动常数。

$$
\begin{aligned}
\frac{d[f,g]}{dt} &= \big[[f,g],H\big] + \frac{\partial[f,g]}{\partial t} \\
&= \big[f,[g,H]\big] + \big[g,[H,f]\big] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] \\
&= \left[f,\ [g,H] + \frac{\partial g}{\partial t}\right] - \left[g,\ [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}\right] \\
&= \left[f, \frac{dg}{dt}\right] - \left[g, \frac{df}{dt}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{du}{dt} = [u,H] + \frac{\partial u}{\partial t}
$$

$$
\big[u,[v,w]\big] + \big[v,[w,u]\big] + \big[w,[u,v]\big] = 0
$$

可能产生新的运动常数!

对$n$个自由度的系统，独立守恒量的个数最多$2n$个。

# 连续对称性和泊松括号

- 生成元为G的无穷小正则变换

$$Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \qquad P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

诺特定理：

连续对称性

—〉 连续正则变换

- 无穷小正则变换可以用泊松括号非常整洁地表示

$$\varepsilon\left[q_i, G\right] = \varepsilon\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right) = \varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i} = \delta q_i$$

$$\varepsilon\left[p_i, G\right] = \varepsilon\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right) = -\,\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i} = \delta p_i$$

- 生成元 G 实际上 “定义” 了正则变量的变换率

$$\dot{q}_i = \left[q_i, H\right]$$
$$\dot{p}_i = \left[p_i, H\right]$$

- 取生成元G为哈密顿量H，回到正则方程，给出正则变量的时间变化率

# 无穷小正则变换和泊松括号

- 采用“主动”正则变换的观点，在无穷小正则变换前后，任意物理量 $u(q,p,t)$ 变换为 $u(q+\delta q, p+\delta p, t)$

$$
\begin{aligned}
u \xrightarrow{ICT} u+\delta u &= u + \frac{\partial u}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial u}{\partial t}\delta t \\
&= u + \frac{\partial u}{\partial q_i}\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i} \\
&= u + \varepsilon\left[u, G\right]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta u = \varepsilon\left[u, G\right]}$$

当 G 为 H 时, $\delta t = \varepsilon \neq 0$

这与泊松括号运动方程完全一致!

再次说明

**时间演化本身是一种哈密顿量为生成元的正则变换**

# 无穷小正则变换和泊松括号

- 当 u 为 H 时呢？这对应 G 生成的无穷小正则变换前后，哈密顿量 $H(q,p,t)$ 的变化

$$\delta u = \varepsilon\left[u, G\right]$$

$$H \xrightarrow{ICT} H + \delta H - \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t} = H + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t - \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$= H + \frac{\partial H}{\partial q_i}\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i} - \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$= H + \varepsilon\left[H, G\right] - \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}$$

仅考虑“隐变化”

$$F_2(q,P,t) = q_i P_i + \varepsilon\, G(q,P,t)$$

$$\delta H = \varepsilon\left[H, G\right] - \varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

# 对称性与守恒律

- 守恒律：

  $u$ 是一个运动常数

$$\frac{du}{dt}=[u,H]+\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

- 对称性：

  一个生成元为 $G$ 的连续正则变换不改变 $H$

$$\delta H=\varepsilon\left[H,G\right]-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

- 当取 u = G 时，

$$0=\delta H=\varepsilon\left[H,G\right]-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}=\varepsilon\left(\left[H,G\right]-\frac{\partial G}{\partial t}\right)=-\varepsilon\frac{dG}{dt}=0$$

对称性　　　　守恒量

**诺特定理：守恒量是那些使哈密顿量保持不变的无限小正则变换的生成元！**

# 空间平移对称性与动量守恒

$$\delta H = \varepsilon \left[H, G\right] - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

- 一个最简单的例子

  动量 $p_i$ 生成什么样的无穷小正则变换呢?

  $\delta q_j = \varepsilon[q_j, p_i] = \varepsilon\delta_{ij}$　　$\delta p_j = \varepsilon[p_j, p_i] = 0$

  这是将 $q_i$ 平移了$\varepsilon$ —〉空间平移

- 如果哈密顿量在空间平移下不变，则 $\left[H, p_i\right] = 0$ —〉动量守恒

- 这一事实并不局限于线动量

将广义坐标 $q$ 平移不改变哈密顿量

相应的无穷小正则变换生成元是共轭动量 $p$

$\left[H, p\right] = 0$　　$p$ 是守恒的

# 空间旋转对称性与角动量守恒

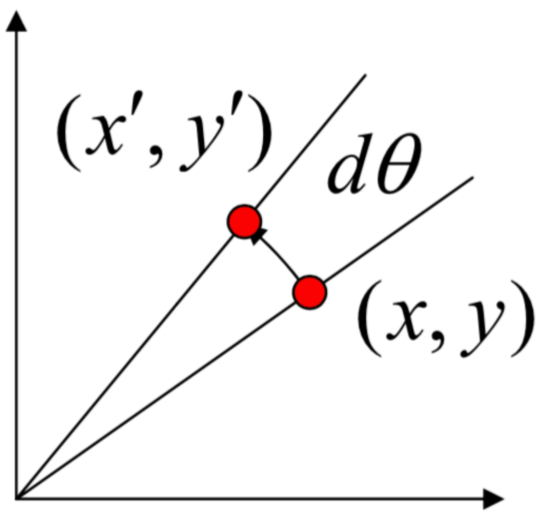
- 考虑一个具体例子：角动量

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\theta \\ d\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

选取坐标系 *x-y-z*，*z* 轴为转动轴，*n* 个粒子的位置为（$x_i$, $y_i$, $z_i$）

将所有粒子绕 *z* 轴逆时针转动 $d\theta$ 主动模式

$$x_i' = x_i - y_i d\theta \qquad y_i' = y_i + x_i d\theta$$




相应地，动量转动为

$$p_{ix}' = p_{ix} - p_{iy} d\theta \qquad p_{iy}' = p_{iy} + p_{ix} d\theta$$

可以验证此变换的生成元为 $G = x_i p_{iy} - y_i p_{ix}$

$$d\theta\,[x_i, G] = d\theta \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} = -\,y_i d\theta \qquad d\theta\,[p_{ix}, G] = -\,d\theta \frac{\partial G}{\partial x_i} = -\,p_{iy} d\theta$$

- 很明显，生成元是 *z* 轴方向上的角动量 $G = (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i)_z = L_z$

# 时间平移对称性与哈密顿量守恒

- 我们已知哈密顿量生成系统的时间演化

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

- 如果 $H$ 不显含 $t$，即系统具有时间平移对称性，则$H$是守恒量。

- 注意：这里不是用严格的“对称变换 $\leftrightarrow$ 守恒量”的方式来表述，严格表述时间平移变换，需要扩展相空间。

- 三种重要的连续变换对称性及其生成元

  哈密顿量生成了时间平移变换

  线动量生成了空间平移变换

  角动量生成了空间转动变换

# 无穷小时间演化的正则变换

- 无穷小正则变换 $q(t), p(t)$ ➡ $q(t+\delta t), p(t+\delta t)$

  我们已知无穷小时间演化的生成元为哈密顿量

  $$du = dt\,[u, H] + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \left[q, H\right] \quad \dot{p} = \left[p, H\right]$$

  **哈密顿量是系统随时间所做运动的生成元**

- 对时间积分将给出"有限"正则变换，其将初始条件 $q(t_0), p(t_0)$ 转换到任意时刻的相空间状态 $q(t), p(t)$

  这是一种对"求解力学问题"的新定义。

# 无穷小正则变换的积分

- 我们可以通过对无穷小正则变换积分得到有限正则变换

  如何积分? $\delta u = \varepsilon\left[u, G\right]$

- 首先，将上式重写为 $\delta u = d\alpha\left[u, G\right] \rightarrow \dfrac{du}{d\alpha} = \left[u, G\right]$

  我们想求解 *u* 作为 $\alpha$ 的函数 $u(\alpha)$ , 初始条件 $u(0) = u_0$

- 将 $u(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处进行 *Taylor* 展开

$$u(\alpha) = u_0 + \alpha \left.\frac{du}{d\alpha}\right|_0 + \frac{\alpha^2}{2!}\left.\frac{d^2u}{d\alpha^2}\right|_0 + \frac{\alpha^3}{3!}\left.\frac{d^3u}{d\alpha^3}\right|_0 + \cdots$$

$\left[u, G\right]_0$

怎么处理这一项呢?

# 无穷小正则变换的积分

- $\dfrac{du}{d\alpha}=[u,G]$ 对任意 $u$ 均成立，即 $\dfrac{d}{d\alpha}=[\ ,G]$
- 于是，重复进行这一运算

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=\frac{d}{d\alpha}[u,G]=[[u,G],G] \quad \Rightarrow \quad \frac{d^ju}{d\alpha^j}=[\cdots[[u,G],G],\cdots,G]$$

- 回到*Taylor* 展开式

$$u(\alpha)=u_0+\alpha\frac{du}{d\alpha}\bigg|_0+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{d^2u}{d\alpha^2}\bigg|_0+\frac{\alpha^3}{3!}\frac{d^3u}{d\alpha^3}\bigg|_0+\cdots$$

$$=u_0+\alpha[u,G]_0+\frac{\alpha^2}{2!}[[u,G],G]_0+\frac{\alpha^3}{3!}[[[u,G],G],G]_0+\cdots$$

这样，我们得到了一个形式解，好用吗?

# 转动正则变换

- 我们将绕 $z$ 轴转动的无穷小正则变换积分

  省略粒子的下标号 $i$ $G = xp_y - yp_x$

  参数 $\alpha$ 要用 $\theta$ 代替

  坐标 $x$ 随 $\theta$ 怎样变化呢?

$$x(\theta) = x_0 + \theta[x, G]_0 + \frac{\theta^2}{2!}[[x, G], G]_0 + \frac{\theta^3}{3!}[[[x, G], G], G]_0 + \cdots$$

  计算泊松括号

$[x, G] = -y$ $[[x, G], G] = -x$ $[[[x, G], G], G] = y$ $[[[[x, G], G], G], G] = x$

不断重复这一过程…

# 转动正则变换

$[x, G] = -y$　　$[[x, G], G] = -x$　　$[[[x, G], G], G] = y$　　$[[[[x, G], G], G], G] = x$

$$
\begin{aligned}
x(\theta) &= x_0 + \theta[x, G]_0 + \frac{\theta^2}{2!}[[x, G], G]_0 + \frac{\theta^3}{3!}[[[x, G], G], G]_0 + \cdots \\
&= x_0 - \theta y_0 - \frac{\theta^2}{2!}x_0 + \frac{\theta^3}{3!}y_0 + \frac{\theta^4}{4!}x_0 - \cdots \\
&= x_0\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) - y_0\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta
\end{aligned}
$$

- 同理

$$
\begin{aligned}
y(\theta) &= y_0 + \theta[y, G]_0 + \frac{\theta^2}{2!}[[y, G], G]_0 + \frac{\theta^3}{3!}[[[y, G], G], G]_0 + \cdots \\
&= y_0 \cos\theta + x_0 \sin\theta
\end{aligned}
$$

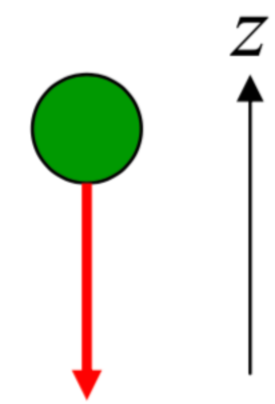
这就是转动!

# 示例：自由落体

- 考虑一个自由落体的物体

  哈密顿量为 $H = \frac{p^2}{2m} + mgz$

  将无穷小正则变换积分




$$z(t) = z_0 + t[z, H]_0 + \frac{t^2}{2!}[[z, H], H]_0 + \frac{t^3}{3!}[[[z, H], H], H]_0 + \cdots$$

$$[z, H] = \frac{p}{m} \qquad [[z, H], H] = -g \qquad [[[z, H], H], H] = 0$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = z_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{g}{2}t^2$$

有没有很妙！

# 与量子力学的关系

- 观察这个级数，这是一个指数级数

$$u(\alpha) = u_0 + \alpha[u, G]_0 + \frac{\alpha^2}{2!}[[u, G], G]_0 + \frac{\alpha^3}{3!}[[[u, G], G], G]_0 + \cdots$$

- 将第 n 项看成是算符 [ , G] 从右边的第 n 次重复作用，即 n 次幂

$$\Rightarrow \quad u(\alpha) = u e^{\hat{G}\alpha} \big|_0$$

算符 $\hat{G}$ 表示 [ , G]

- 这对应量子力学中的海森堡表述，这时 u 是随时间演化的算符

$$\hat{U} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \qquad \hat{R} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{J}\theta}$$

# 对称性与守恒律：拉格朗日VS哈密顿

| 力学体系 | 变换空间 | 不变量 | 守恒量 |
|---|---|---|---|
| 拉格朗日力学 | $n$ 维位形空间 | 拉格朗日 $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ | 诺特荷 |
| 哈密顿力学 | $2n$ 维相空间 | 哈密顿量 $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ | 生成元 |

- 所谓对称性是指力学性质在特定“变换”下保持“不变”
- 拉格朗日力学中，“变换”在 n 维位形空间中进行，“不变”由拉格朗日量体现，“守恒量”表示为诺特荷

$$\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t), \quad \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

点变换

$\dot{Q}$ 显含 $\ddot{q}$, 对称性依赖于运动方程；动力学对称性；隐式对称性

$$\delta L = 0, \quad \text{or} \quad \delta L = \frac{dF(\boldsymbol{q}, t)}{dt}$$

- 哈密顿力学中，“变换”在 2n 维相空间中进行，“不变”由哈密顿量体现，“守恒量”表示为生成元

主动正则变换

$$\delta H = 0$$

# 总结

- 泊松括号运动方程：守恒量
- 无穷小正则变换：连续对称性
- 哈密顿力学中的对称性与守恒律