北京大学

# 理论力学

赵鹏巍

# 内容回顾

- 达朗伯原理
- 哈密顿原理
- 非完整约束
- 拉格朗日乘子法

# 今日目标

- 动量守恒
- 角动量守恒
- 能量守恒
- 对称性与守恒律：诺特定理

# 守恒量

- 约束：自由度的重要性 —〉约化自由度
- 守恒量：自由度的等价性 —〉简化问题
- 守恒量对应作用量的某种性质，是运动方程的先导信息，而非运动方程的推论，比运动方程更底层、更基本。

# 动量守恒

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

- 考虑一个简单的系统

势场不依赖于速度

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)}{2} - \underline{V(x_i, y_i, z_i, t)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$$

动量

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{ix}$$

力

如果势场 $V$ 不依赖于 $x_i$，则动量 $p_{ix}$ 守恒

# 广义动量

- 定义广义动量

  也称为正则动量、共轭动量

  针对简单的 x-y-z 坐标系，即回到普通动量

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

- 拉格朗日方程

  如果 $L$ 不显式依赖于 $q_j$ , $p_j$ 是守恒的

  $q_j$ 被称为循环坐标或可遗坐标

$$\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

共轭于循环坐标的广义动量是守恒的

线动量守恒构成一个特例

# 广义动量

- 广义动量可能不具有普通动量的量纲

  但 $p_j\, q_j$ 具有作用量的量纲 [能量乘时间]

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

- 若势场依赖于速度，如电磁场中的粒子

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow$$

$$p_x = m\dot{x} + \boxed{qA_x}$$

额外项

# 对称性

- 线动量 $(p_x, p_y, p_z)$ 是坐标 $(x, y, z)$ 的共轭动量。

  如果拉格朗日量不依赖于位置坐标，即循环坐标，则线动量守恒

  即，拉格朗日量在空间平移操作下不变

  $$(x, y, z) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

  **体系具有空间平移不变性！**

- **体系的对称性 = 拉格朗日量的不变性 —> 共轭动量的守恒性**

接下来，考察另一个示例：角动量守恒

# 角动量

- 考虑一个多质点体系，满足约束方程 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$

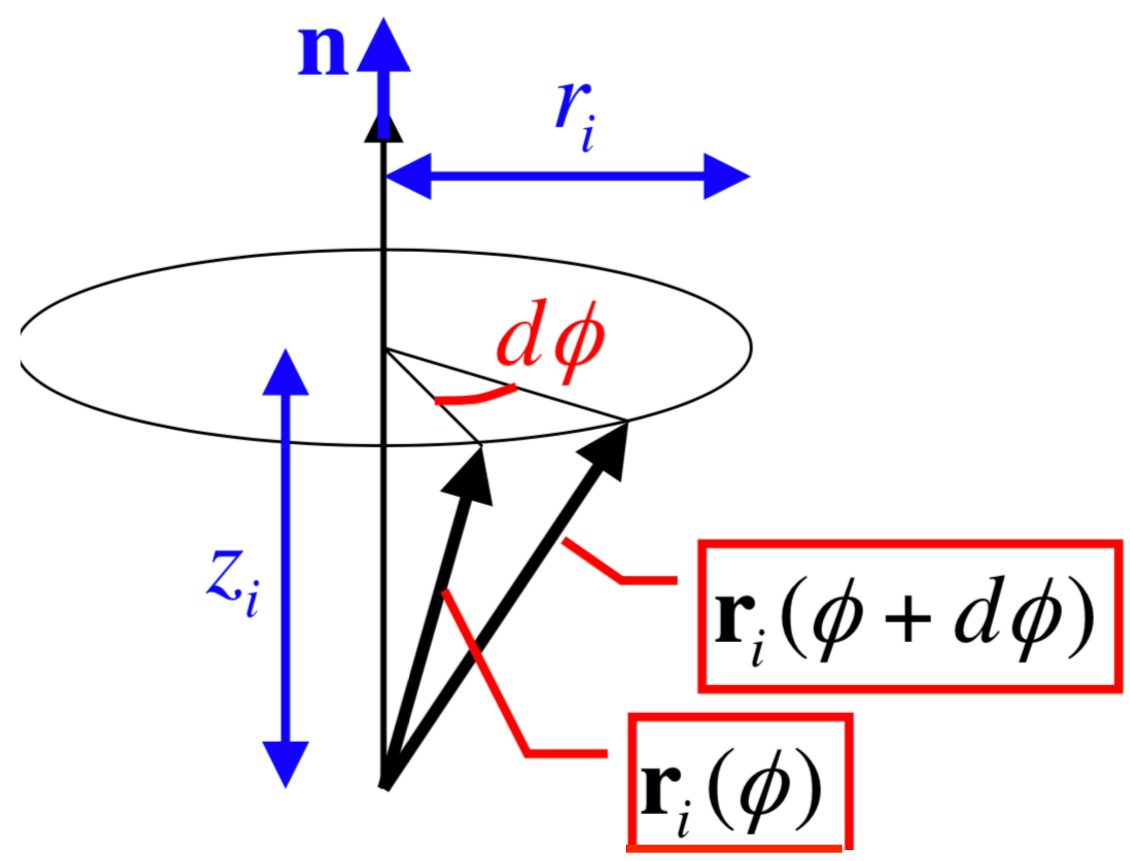
  令 $q_1$ 是体系的一个转动坐标，如

$$\phi \text{ in } \boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i) = (r_i \cos\phi, r_i \sin\phi, z_i)$$

  假设势函数 $V$ 不依赖于 $\dot{\phi}$

  共轭动量为

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}$$



# 角动量

共轭动量为 $$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}$$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\phi, q_2, \ldots, q_n, t)$$

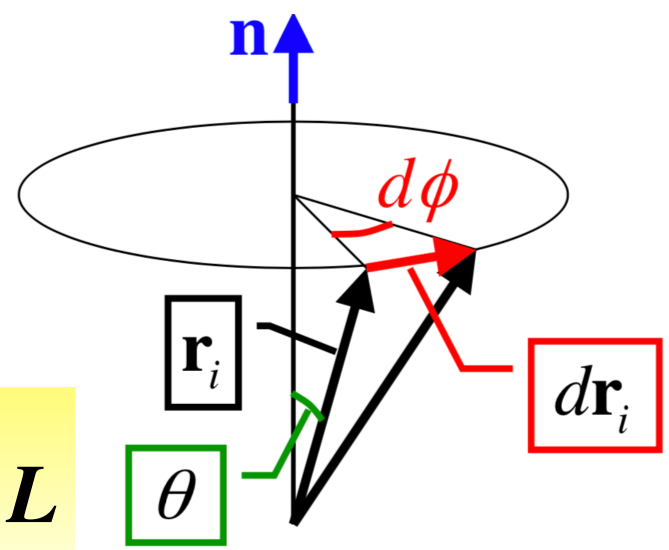
$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{\phi}} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \phi}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \phi}\dot{\phi} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \phi}$$

$d\boldsymbol{r}_i$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{n}$ 以及 $\boldsymbol{r}_i$

$d\boldsymbol{r}_i$ 的大小等于 $r_i \sin\theta d\phi$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \phi} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i$$




$$p_\phi = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i) = \sum_i m_i \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \boldsymbol{n} \cdot \sum_i \boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}$$

# 角动量守恒

- 如果体系具有旋转对称性，则角动量守恒 $p_\phi = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}$

与力矩的关系?

可以证明，动能 ***T*** 不依赖于 $\phi$ 转动不改变 v²

广义力 $Q_\phi \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \phi}$ 若 $\phi$ 是循环坐标，则广义力为零

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \phi} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{n}\cdot\sum_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i}_{\text{力矩}}$$

沿对称轴的总力矩为零!

# 守恒律与对称性

- 以下说法是等价的：

  体系关于某一广义坐标是对称的

  某一广义坐标是循环坐标

  相应的共轭广义动量是守恒的

  相应的广义力为零

| **对称性** | **空间平移** | **空间转动** |
| --- | --- | --- |
| **坐标** | 位移 | 转动角 |
| **动量** | 线动量 | 角动量 |
| **力** | 力 | 力矩 |

# 能量守恒

- 考虑拉格朗日量的时间导数

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

利用拉格朗日方程，可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\boxed{\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right)} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

定义为能量函数 $h(q,\dot{q},t)$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dh}{dt}$$

如果拉格朗日量不显式依赖于时间 $t$, 则能量函数是守恒的。

# 时间无关与能量守恒

- 注意区别：

$f(q, \dot{q}, t)$

是时间无关的
Time invariant
即不显式依赖于时间 $t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\neq$$

$f(q, \dot{q}, t)$

守恒：随时间变化是常数
a constant in time

$$\frac{df}{dt} = 0$$

f 的泛函形式在时间平移下不变

$$t \rightarrow t + \delta t$$

f 仍然隐式地依赖于时间，通过 $(q, \dot{q})$

# “能量” 函数?

$$h(q,\dot{q},t) \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

- 能量函数代表体系的总能量吗?

  一个简单的例子

- 单质点沿 *x* 轴运动

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$h = m\dot{x}^2 - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = T + V$$

总能量

是否可推广?

# "能量" 函数?

$$h(q,\dot{q},t) \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

- 假设拉格朗日量可写为

$$L(q,\dot{q},t) = L_0(q,t) + \underline{L_1(q,\dot{q},t)} + \underline{L_2(q,\dot{q},t)}$$

多数情况下如此!

关于$\dot{q}$一阶齐次函数　　二阶齐次函数　　$f(kx) = k^n f(x)$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} = L_1 \qquad \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = 2L_2$$

欧拉定理
$xf'(x) = nf(x)$

$$\Rightarrow \quad h(q,\dot{q},t) \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = L_2 - L_0$$

# “能量” 函数?

$$h(q,\dot{q},t)=L_2-L_0$$

$$L=T-V$$

- 能量函数等于总能量 $T+V$ 的条件

$$T=L_2,\quad V=-L_0$$

1. 要求从 $\boldsymbol{r}_i$ 到 $q_j$ 的变换是时间无关的，即约束与时间无关
2. 要求势场$V$ 是速度无关的

第二个条件是显然的，第一个条件的推导?

# “能量”函数？动能

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$ 不含时间

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\,2} = \sum_i \frac{m_i}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k = \underbrace{\sum_{j,k}\dot{q}_j\dot{q}_k \boxed{\sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}}}$$

二阶齐次函数 $L_2$

不含广义速度

若显含时间，则上式不成立

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

# 能量守恒律

- 能量函数等于总能量的条件

  1. 约束是时间无关的

  —> 动能 $T$ 是广义速度的二阶齐次函数

  2. 势场 $V$ 是速度无关的

$$h = E$$

- 能量函数守恒的条件

  拉格朗日量不显含时间

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{dh}{dt} = 0$$

- 注意，这是两个“独立存在”的结论！

- 这给出能量守恒定律在更一般框架下的表述…

# 对称性与诺特定理

- 在一个对称性变换 $\mathscr{T}_\eta$ 下，拉格朗日量和作用量保持不变：

$$\mathscr{T}_\eta : \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}_\eta, \quad L \to L, \quad S \to S$$

- 对称变换 $\mathscr{T}$ 可构成对称群，$\mathscr{T}_\eta$ 对称群的群元，$\eta$ 群参数

- 连续对称性：$\eta$ 取连续值；离散对称性：$\eta$ 仅取离散值

$$\frac{dL}{d\eta} = \frac{dS}{d\eta} = 0 \xrightarrow{\text{微分法则}} \frac{dC_m}{dt} = 0$$

**诺特定理：** 作用量的每个连续对称性都具有一个对应的守恒量

# 诺特定理的证明

- 无穷小对称变换 $\mathscr{T}_\eta$:  $$\mathscr{T}_\eta : q \to q_\epsilon = q + \epsilon Q$$

  Q 是对称群的生成元，相当于变化率

- 考虑拉氏量在对称变换下的变化

$$\frac{dL(q_\epsilon, \dot{q}_\epsilon, t)}{d\epsilon} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} Q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{Q}_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] Q_j + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

- 拉氏量不变意味着守恒量  $$\frac{dC_m}{dt} = 0$$  $$C_m = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

# 空间平移对称性

- 空间平移变换： $\mathscr{T}_\epsilon\colon \boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + \epsilon\hat{\boldsymbol{n}}$

  $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是平移变换的方向，生成元 $Q$ 和守恒量 $C_m$ 分别为

$$Q = \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$C_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$C_m = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

- 拉氏量平移不变，方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 可任选，得到动量守恒

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad \boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = 0$$

空间均匀性 → 拉格朗日量 L 的平移不变性 → 总动量 P 守恒

# 空间旋转对称性

- 空间旋转变换： $\mathscr{T}_\epsilon: \boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i + \epsilon \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{x}_i$

  生成元 $Q$ 和守恒量 $C_m$ 分别为

$$C_m = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

$$Q = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{x}_i$$

$$C_m = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{p}_i) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$$

- 拉氏量旋转不变，方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 可任选，得到角动量守恒

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{l}_i, \quad \boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

空间各向同性 → 拉格朗日量 L 的旋转不变性 → 总角动量 L 守恒

# 时间平移不变性

- 拉氏量显然不是时间平移不变的：

$$\mathscr{T}_\epsilon\colon L \to L_\epsilon = L + \epsilon \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

- 将时间表示为参数化的形式，类似广义坐标

$$t = t(\tau), \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\tau)$$

- 作用量泛函表示为参数积分的形式

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\mathrm{d}t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}', t, t')\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{q}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}\tau} \qquad t' = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{q}'}{t'} \qquad \tilde{L} = Lt'$$

- 时间与空间地位对等，对称变换为：

$$\mathscr{T}_\epsilon\colon \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}_\epsilon = \boldsymbol{q} + \epsilon \boldsymbol{Q}, \quad t \to t_\epsilon = t + \epsilon T$$

# 时间平移不变性

$$\mathscr{T}_\epsilon\colon \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}_\epsilon = \boldsymbol{q} + \epsilon \boldsymbol{Q}, \quad t \to t_\epsilon = t + \epsilon T$$

- 拉氏量的变换：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}\epsilon} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j}Q_j + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j'}Q_j'\right) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}T + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'}T' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j'}Q_j + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'}T\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \boldsymbol{q}'}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} = 0$$

规范变换！

- 拉氏量不变意味着**拉氏量具有规范任意性**

  对称变换下拉氏量允许改变一个规范项

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}F(\boldsymbol{q}, t)}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\boldsymbol{q}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}\tau} \qquad t' = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{q}'}{t'} \qquad \tilde{L} = Lt'$$

# 时间平移不变性

- 还原为时间微分：

$$\mathscr{T}_\epsilon:\ \boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}_\epsilon = \boldsymbol{q} + \epsilon \boldsymbol{Q}, \quad t \to t_\epsilon = t + \epsilon T$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'_j}Q_j + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'}T\right) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\boldsymbol{q}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}\tau} \qquad t' = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{q}'}{t'} \qquad \tilde{L} = Lt'$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = \frac{\partial (Lt')}{\partial t'} = L + t'\frac{\partial L}{\partial t'} = L + t'\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t'} = L + t'\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(-\frac{1}{t'}\dot{q}_j) = L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'_j} = \frac{\partial (Lt')}{\partial q'_j} = t'\frac{\partial L}{\partial q'_j} = t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q'_j} = t'\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial q'_j}\left(\frac{q'_k}{t'}\right) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta_{jk} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

守恒量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}Q_j - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right)T - F\right] = 0$$

# 时间平移不变性

- 时间平移变换 $\boldsymbol{Q}=0, \quad T=1$

$$\mathscr{T}_\epsilon\colon \boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}_\epsilon=\boldsymbol{q}+\epsilon\boldsymbol{Q}, \quad t\to t_\epsilon=t+\epsilon T$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}\epsilon}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_j}Q_j+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_j'}Q_j'\right)+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}T+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t'}T'=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\tau}$$

拉氏量的改变

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{L}}{\mathrm{d}\epsilon}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\tau}=0$$

时间平移变换下，拉氏量不显含时间，则拉氏量只改变一个规范项

**守恒量**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}Q_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)T-F\right]=0$$

$$\boldsymbol{q}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}\tau} \qquad t'=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\boldsymbol{q}'}{t'} \qquad \tilde{L}=Lt'$$

# 时间平移不变性

守恒量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}Q_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)T-F\right]=0$$

$$Q=0,\quad T=1$$

$$F=\mathrm{const}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L}\right)=0$$

能量函数

时间均匀性 → 拉格朗日量 L 的时间平移不变性 → 能量函数守恒

# 总结

- 讨论对称性与守恒律

  广义动量

  体系的对称性

  —> 拉格朗日量的不变性

  —> 广义动量守恒

  定义“能量”函数，讨论了能量守恒

- 诺特定理

- 下一讲：受限三体问题