

理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 构建了哈密顿表述、与拉格朗日表述等价，更简洁，但方程的数目变为2倍
- 哈密顿量可以守恒、可以不守恒、可以等于总能量、可以不等于总能量
- 关于循环坐标的正则方程可自动略去。

今日目标

- 转动变换
- 欧拉角与四元数
- 自由陀螺与对称陀螺

3D 转动

- 一个3D矢量 \mathbf{r} 在两个坐标系中可分别表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

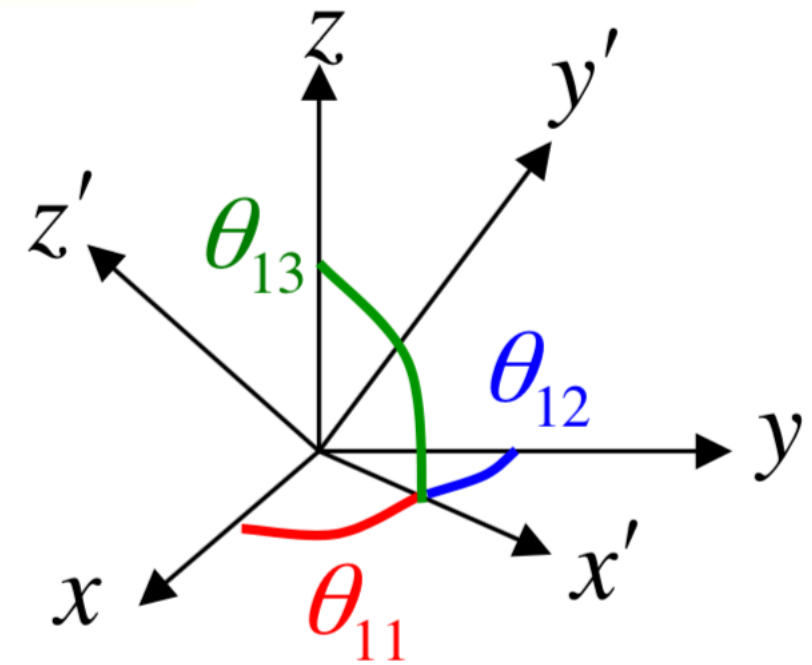
- 利用转动前后任意两轴之间的夹角 θ_{ij}

$$x' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}' = x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' + z\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' = \cos \theta_{11}x + \cos \theta_{12}y + \cos \theta_{13}z$$

$$y' = \cos \theta_{21}x + \cos \theta_{22}y + \cos \theta_{23}z$$

$$z' = \cos \theta_{31}x + \cos \theta_{32}y + \cos \theta_{33}z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



3D 转动

- 简化符号表示

$$(x, y, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3); \quad (x', y', z') \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$$

转动可表示为

$$x'_i = \sum_j \cos \theta_{ij} x_j = \sum_j a_{ij} x_j = a_{ij} x_j$$

爱因斯坦求和约定：重复指标
表示对指标求和！

- 于是，我们得到了9个参数来描述3D转动，但只有3个是独立的。

3D 转动的约束

- 转动不改变矢量的长度

$$r^2 = x_i x_i = x'_i x'_i$$

利用转动矩阵，可知

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad \longrightarrow \quad x'_i x'_i = a_{ij} x_j a_{ik} x_k$$

$$\longrightarrow \quad a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

6个条件，使得转动矩阵的9个参数
只有3个是自由的

- 矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 是正交阵：

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{1}$$

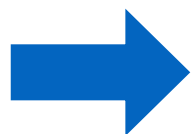
正交矩阵

- 正交矩阵的一些性质

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^T A = A A^T = 1$$

$$|A^T A| = |A^T| |A| = |A|^2 = 1$$



$$|A| = \pm 1$$

$|A| = 1 \rightarrow$ 恰当矩阵

$|A| = -1 \rightarrow$ 非恰当矩阵

空间反射

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r} = S\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

$$|S| = -1$$

转动是从单位阵出发的连续变换，而单位阵的行列式为+1

刚体转动由恰当正交矩阵来表示！

欧拉角

- 将 x - y - z 变换到 x' - y' - z' ，三步法：

(x, y, z)



绕 z 轴逆时针转动 ϕ

(ξ, η, ζ)



绕 ξ 轴逆时针转动 θ

(ξ', η', ζ')



绕 ζ' 轴逆时针转动 ψ

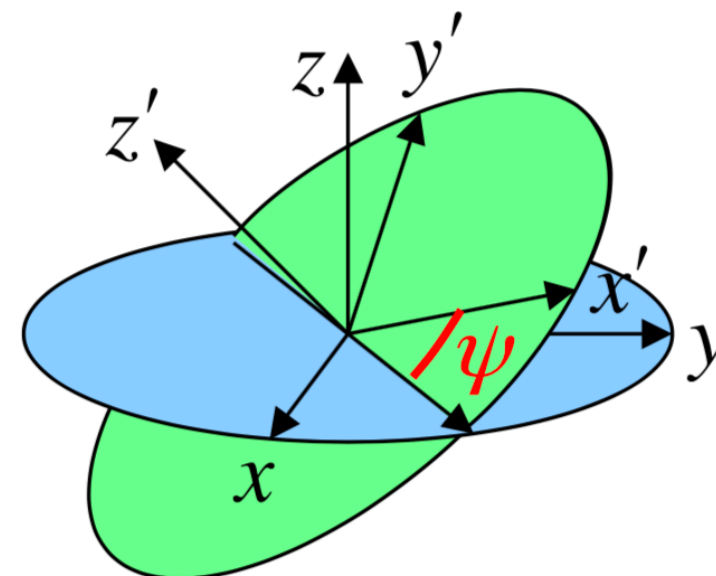
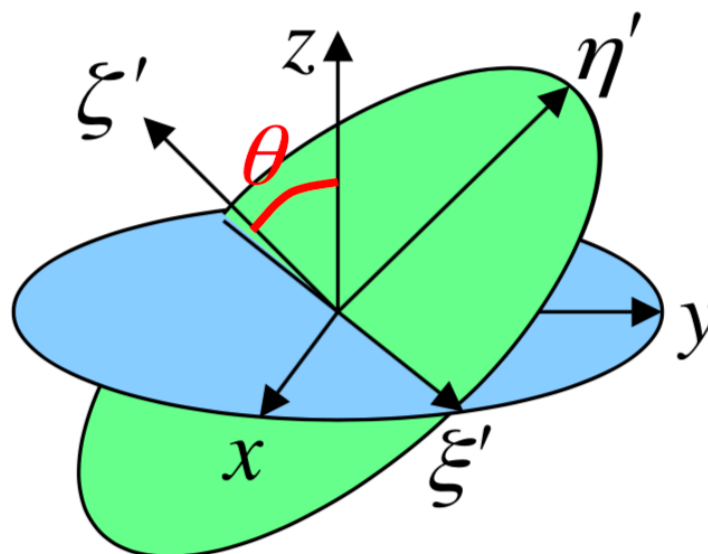
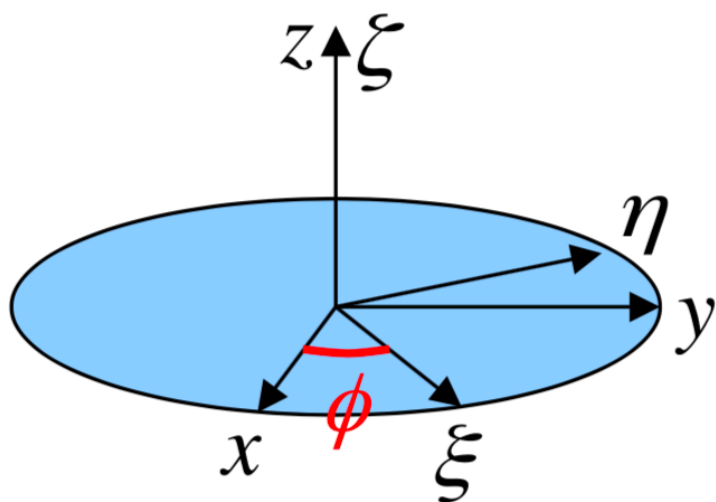
(x', y', z')

x

Dx

CDx

$$Ax = BCDx$$



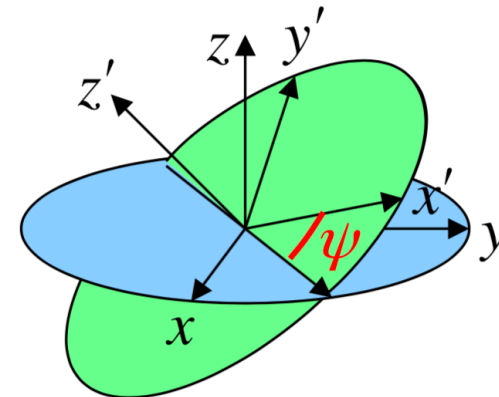
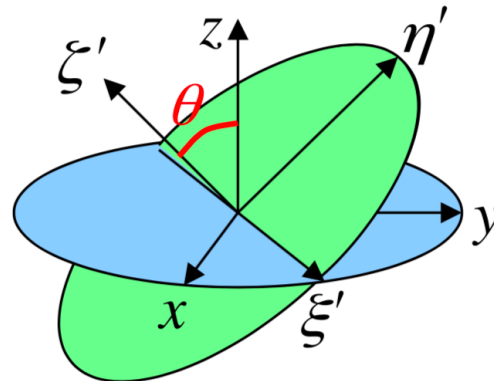
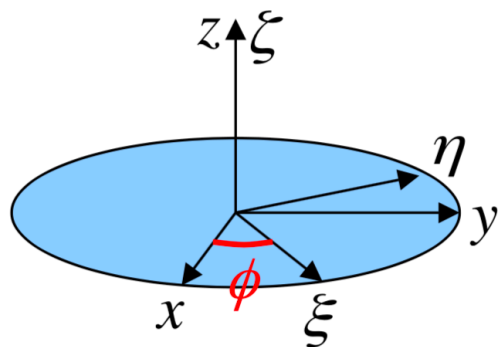
欧拉角

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$



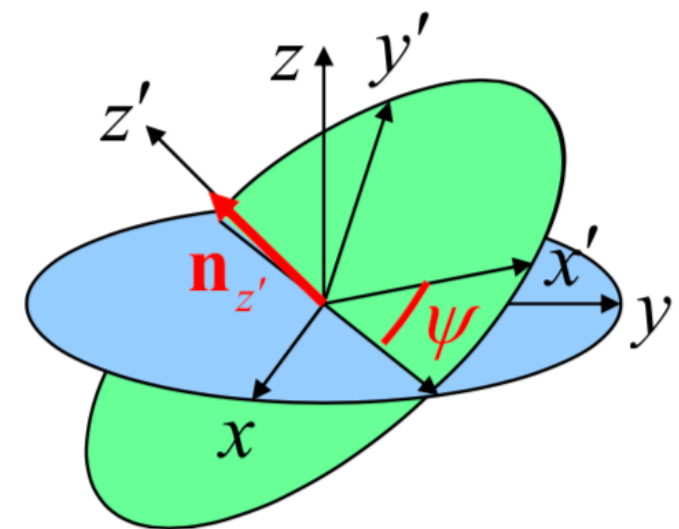
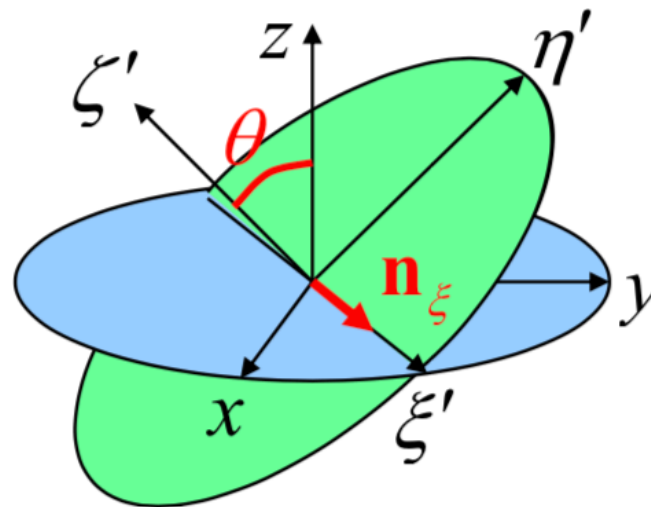
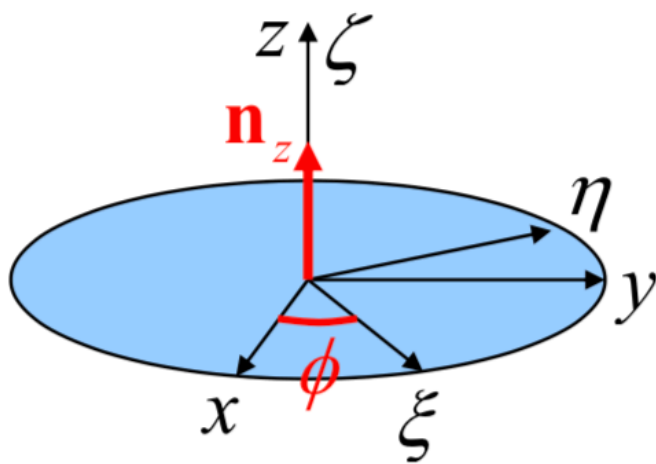
- 可以证明矩阵A是正交的
- 有多种约定方法：（右手系下有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种）
第一个转动绕任意轴，然后不绕同一坐标轴相继转动

欧拉角的变化率

- 利用角速度可以计算质点的速度
利用欧拉角可以描述刚体的转动
- 如何利用欧拉角计算角速度呢？欧拉角的时间导数

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times$$

$$\boldsymbol{\omega} = n_z \dot{\phi} + n_\xi \dot{\theta} + n_{z'} \dot{\psi}$$



欧拉角的变化率

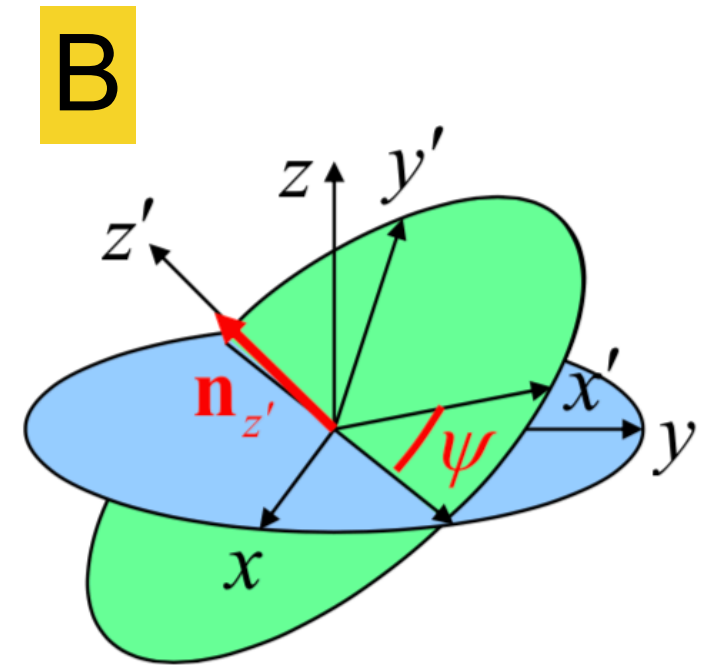
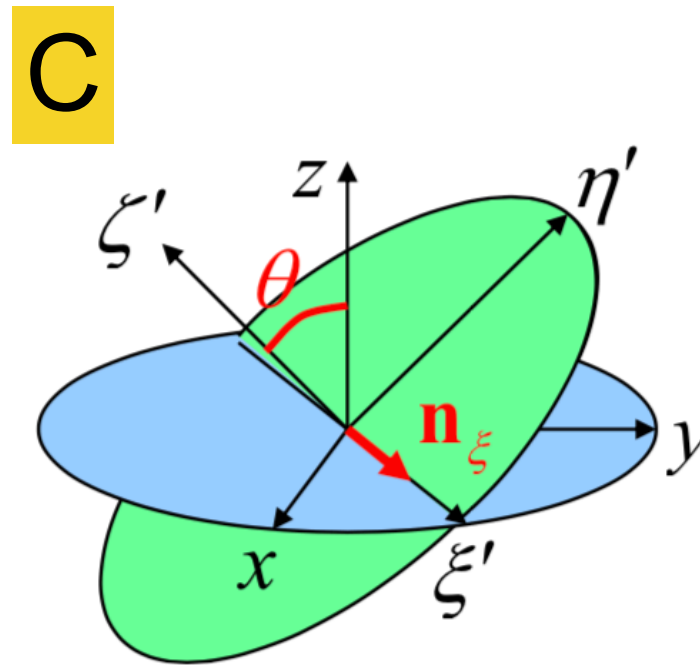
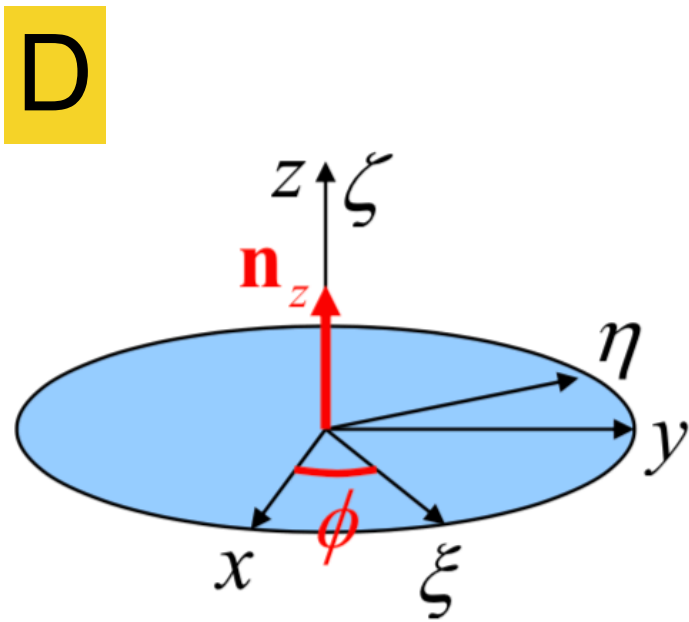
- 在 $(x'-y'-z')$ 坐标系下计算 ω

需要将 $\mathbf{n}_z, \mathbf{n}_\xi, \mathbf{n}_{z'}$ 写在此坐标系下

$$\mathbf{n}_z \rightarrow A\mathbf{n}_z, \quad \mathbf{n}_\xi \rightarrow B\mathbf{n}_\xi$$

在 $x-y-z$ 坐标系下也一样“简单”

$$A = BCD$$

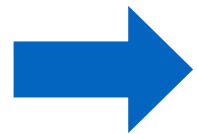


欧拉角的变化率

$$\mathbf{n}_z = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_\xi = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n}_{z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



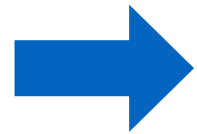
$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}_z \dot{\phi} + \mathbf{n}_\xi \dot{\theta} + \mathbf{n}_{z'} \dot{\psi} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

- 这一表达式是写在 $x'-y'-z'$ 坐标系下的
- 现在我们知道如何利用欧拉角表示速度了，接下来，我们可以构造体系的拉格朗日量了

万向节锁死

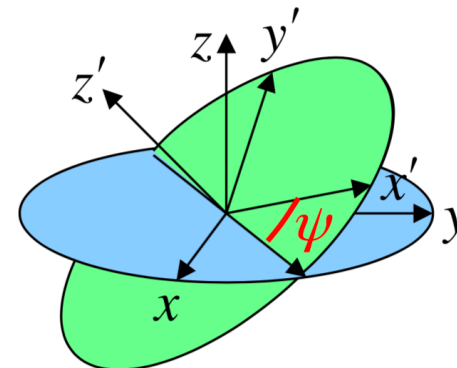
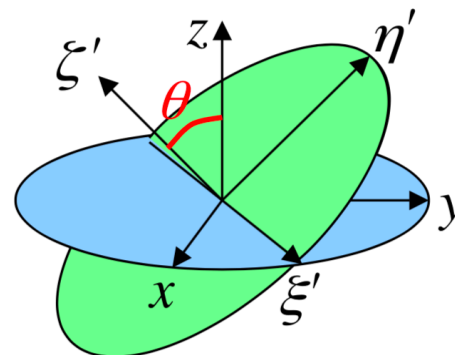
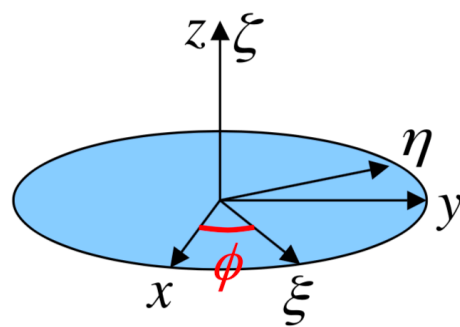
- 当 $\theta = 0$ 时，欧拉角仅仅依赖于两个角度的组合，而不是两个独立的角度。

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \phi) & \sin(\psi + \phi) & 0 \\ -\sin(\psi + \phi) & \cos(\psi + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

损失了一个角度！



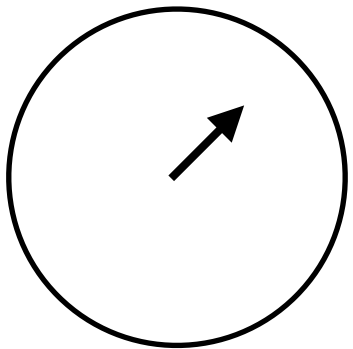
欧拉角表示的局限性

- 所有三维转动操作组成一个集合：

存在恒等变换、逆变换，满足封闭性、结合律。

- 三维转动构成一个群，即SO(3)群：

其参数空间为 (θ, \mathbf{n}) ，对应的拓扑结构称为三维实射影空间 \mathbf{RP}^3



半径为 π 的球体，过球心取一矢量，方向为转轴方向，大小为转动角

所有转动表为 $R([0, \pi]; \pm \mathbf{n})$ ，但 $R(\pi, \mathbf{n}) = R(\pi, -\mathbf{n})$ ，故球面对点粘结

- 欧拉角的参数空间 (ϕ, θ, ψ) 对应的拓扑结构为三维环面 \mathbf{T}^3

欧拉角表示：从三维环面 \mathbf{T}^3 映射到 三维射影空间 \mathbf{RP}^3

由于两个空间具有不同的拓扑结构，因而一个映射无法形成全局覆盖。

凯莱-克莱因表示

- 考虑如下二维复矩阵，若要求 $\det(Q) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ，则称为复特殊么正矩阵，满足 $Q^\dagger Q = QQ^\dagger = 1$ 。所有二维复特殊么正矩阵构成一个群：SU(2)

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}$$

独立变量：4 - 1 = 3 个；用于表示转动？

- 以泡利矩阵为基，将三维空间矢量映射到二维复厄米矩阵

$$M = x_i \sigma_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(M \sigma_i)$$

矢量长度 ~ 矩阵行列式

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = -x_i x_i = -|\mathbf{x}|^2$$

凯莱-克莱因表示

- 三维转动下矢量长度保持不变，即相应的矩阵 M 行列式保持不变。
- 将 $SU(2)$ 矩阵作用在 M 上，可以保持矩阵 M 行列式不变。

$$M' = QMQ^\dagger \quad |M'| = |QMQ^\dagger| = |Q| \cdot |M| \cdot |Q^\dagger| = |M|$$

- 可见 $SU(2)$ 矩阵确实诱导了一个三维转动， $SU(2)$ 矩阵可表示一组四元数表示。

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & iq_1 + q_2 \\ iq_1 - q_2 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix} = q_0 I + i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$q_0^2 + \mathbf{q}^2 = 1$$

- 欧拉角与四元数的对应关系

推导！ 验证！

$$Q = \begin{bmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

SU(2) 转动的周期

- 设将三维矢量 $(1,0,0)$ 绕 z 轴转逆时针旋转 ϕ :

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

- 相应的SU(2)矩阵应为

$$Q = \begin{pmatrix} Ae^{ia} & -Be^{-ib} \\ Be^{ib} & Ae^{-ia} \end{pmatrix}$$

$$M' = QMQ^\dagger$$

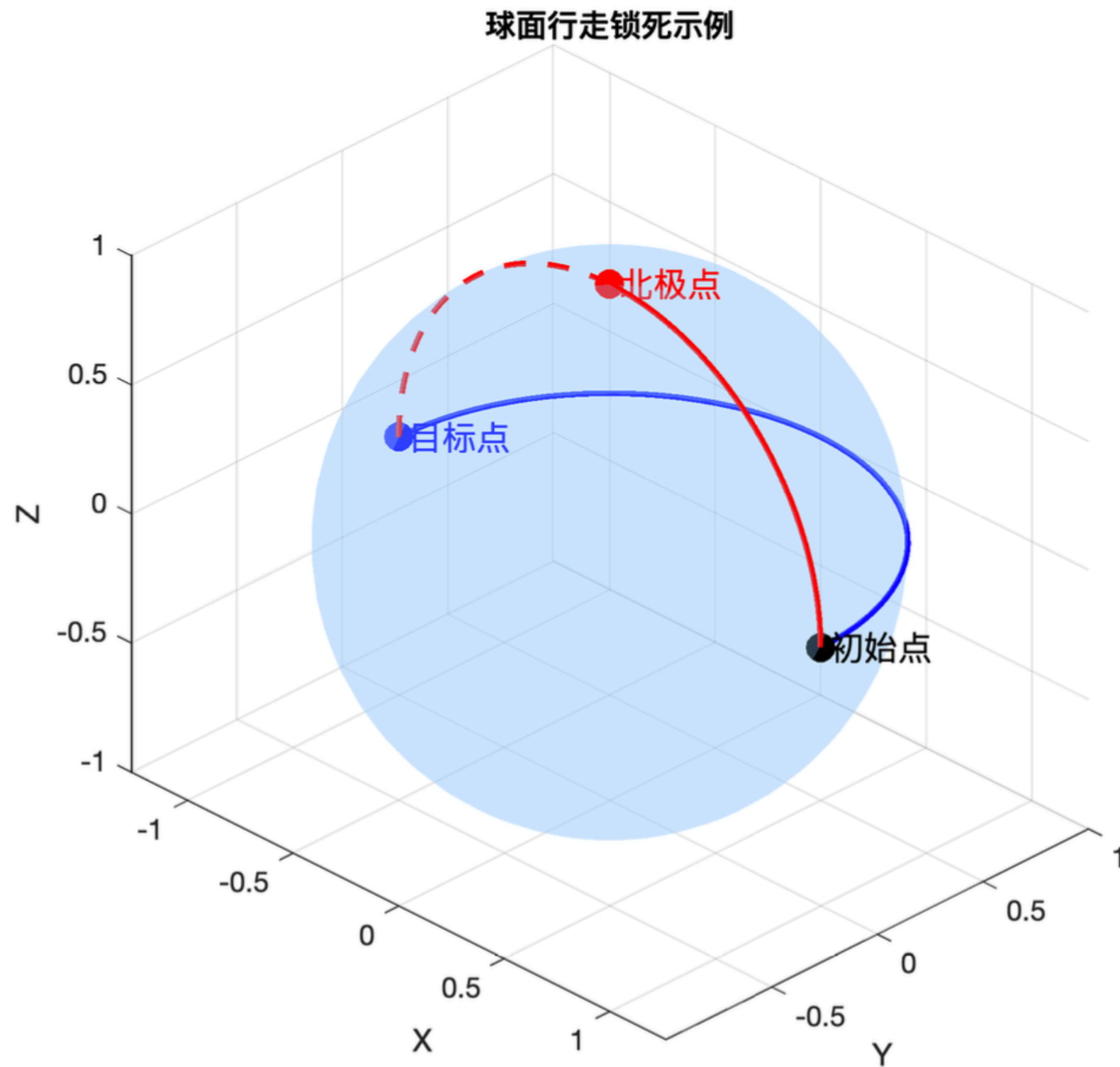
$$Q = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

- 注意 $\phi = 2\pi$ 时, $Q = -I$, 这对经典三维矢量无影响, 但对自旋态有影响。
- 注意 $\phi = 4\pi$ 时, $Q = I$; 这时SU(2)矩阵才完全回到初始状态! **双覆盖**

SO(3) VS SU(2)

- 三维实转动矩阵构成SO(3)群，对应的拓扑结构为三维实射影空间 RP^3
- 二维复转动矩阵构成SU(2)群，对应的拓扑结构为三维球面 S^3
- SO(3)矩阵和SU(2)矩阵之间的对应关系，建立了两个群间的同态（非同构）。
不是一一对应关系，两个SU(2)矩阵 Q 与 $-Q$ 对应同一个转动 $M' = QMQ^\dagger$
SU(2) 是 SO(3) 的双重覆盖群。
- 四元数的参数空间 (q_0, q_1, q_2, q_3) 对应的拓扑结构为三维球面 S^3
四元数表示：从三维球面 S^3 映射到 三维射影空间 RP^3
只要将三维球面 S^3 上相对的两点等同起来，即三维射影空间 RP^3
因而形成一个二对一映射，双重覆盖，不会出现万向节锁死。

球面行走“锁死”示例



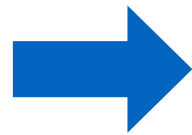
刚体自由转动

$$H = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$
$$= \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

能量守恒、角动量守恒

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_b + \boldsymbol{\omega} \times$$

$$\dot{L}_i + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = 0$$



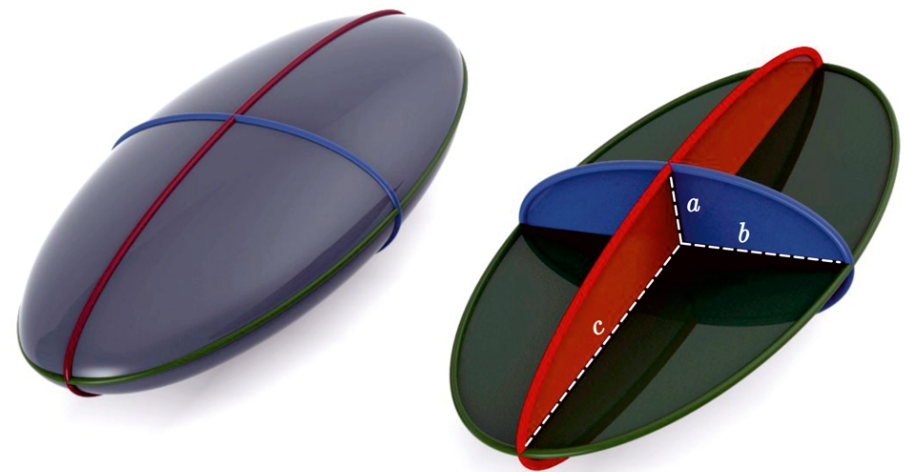
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

刚体定点转动的欧拉运动方程

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0$$



三轴椭球转动的稳定性

- 椭球刚体 $I_1 > I_2 > I_3$
假设初始轴与任一惯性主轴相近
绕1轴与3轴可形成稳定的转动
- 绕2轴不能形成稳定的转动
小的扰动会导致转轴偏离2轴很远

练习!

$$I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = 0$$

设转轴接近1轴

$$\omega = \omega_1 \hat{1} + \varepsilon_2 \hat{2} + \varepsilon_3 \hat{3}$$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 0$$

$$I_2 \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 \omega_1 (I_3 - I_1)$$

$$I_3 \dot{\varepsilon}_3 = \omega_1 \varepsilon_2 (I_1 - I_2)$$

$$\omega_1 = \text{const}$$

小于零

$$\ddot{\varepsilon}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \dot{\varepsilon}_3 = \frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \varepsilon_2$$

振动解!

重陀螺的拉格朗日量

- 假设 $I_1 = I_2 \neq I_3$

动能 $T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$

利用欧拉角的变化率, 可得

$$T = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

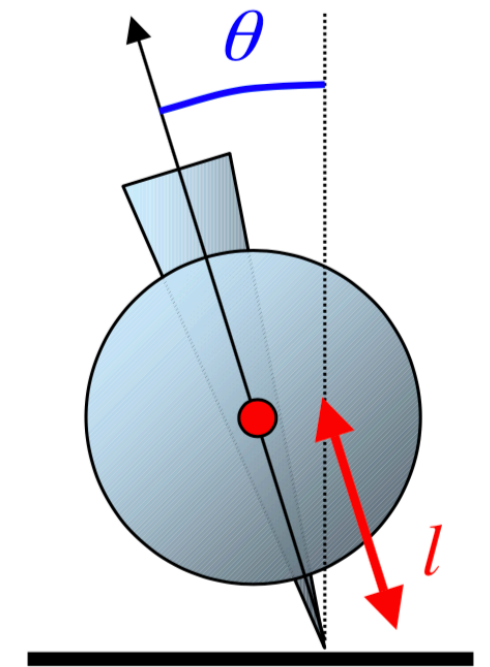
势能由质心的高度给出

$$V = Mgl \cos \theta$$

- 拉格朗日量

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

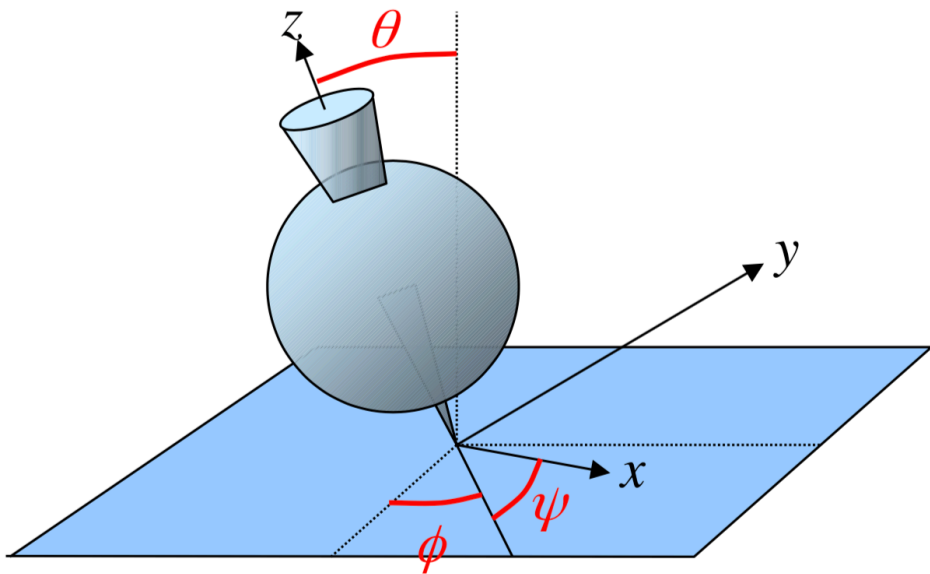


重陀螺

- 有一固定点的旋转陀螺
拉格朗日量

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta$$

- ϕ 和 ψ 是循环坐标，存在对称性
- P_ϕ 和 P_ψ 是守恒的



$\dot{\psi}$ 陀螺关于其对称轴的**转动**

$\dot{\phi}$ 陀螺对称轴关于空间 Z 轴的**进动**

$\dot{\theta}$ 陀螺对称轴的**章动** (上下摆动)

定点转动的重陀螺

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta$$



$$\begin{aligned} H &= p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} + p_\psi \dot{\psi} - L \\ &= I_1 \dot{\theta}^2 + p_\phi \dot{\phi} + p_\psi \dot{\psi} - \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \cos \theta p_\psi \dot{\phi} + p_\psi \dot{\psi} + \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{2I_3} p_\psi^2 + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \boxed{\frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}} + Mgl \cos \theta \end{aligned}$$

有效势

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

可以看成“质量”为 I_1 的质点在一个等效势场中的运动方程 → 章动!

$$H = \text{const} \quad p_\phi = \text{const} \quad p_\psi = \text{const}$$

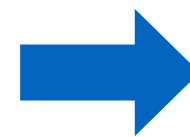
运动方程

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 = \text{const} \equiv I_1 a$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const} \equiv I_1 b$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta$$



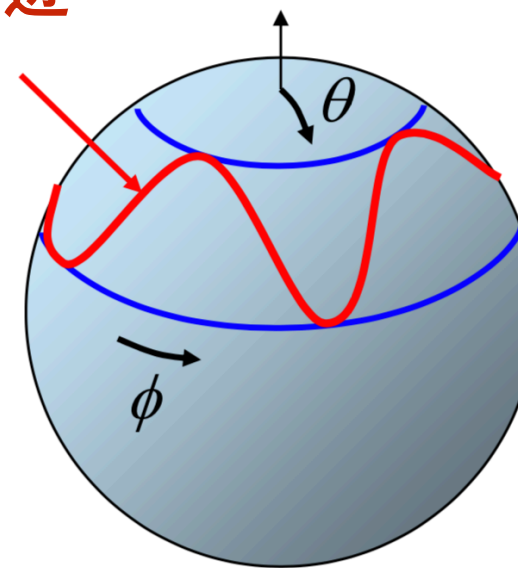
$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V^{\text{eff}}(\theta) = E - \frac{I_3 \omega_3^2}{2} \quad \text{为常数!}$$

- 可以解出 $\theta(t)$, 亦可得 $\phi(t)$, $\psi(t)$;
- $\dot{\phi}$ 的符号在 $\cos \theta = b/a$ 处改变

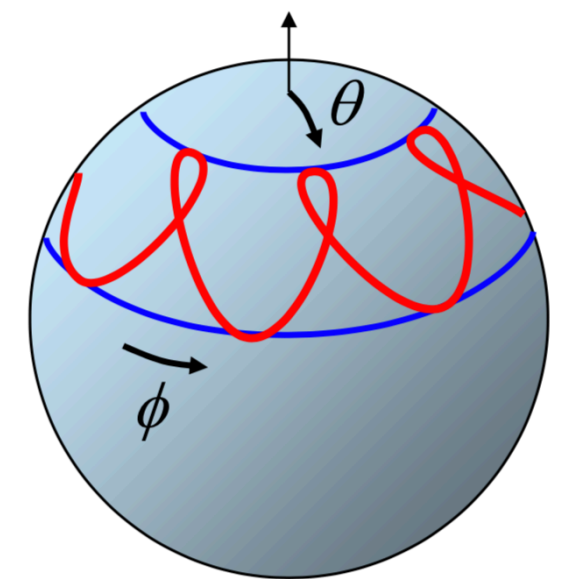
$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

轨迹



ϕ 的大小一直增加



ϕ 的大小有增有减

规则进动

- 可以得到纯进动，无章动的陀螺运动形态吗？

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + V^{eff}(\theta) = E - \frac{I_3\omega_3^2}{2}$$

即 $\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \text{const.}$

$$V^{eff}(\theta) = \frac{I_1}{2} \left(\frac{b - a \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + Mgl \cos \theta = E - \frac{I_3\omega_3^2}{2}$$

$$\frac{dV^{eff}}{d\theta} = I_1 \frac{(b - a \cos \theta) [(b - a \cos \theta) \cos \theta + a \sin^2 \theta]}{\sin^3 \theta} + Mgl \sin \theta = 0$$



$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi} \cos \theta_0)$$

规则进动

- 陀螺问题的初始条件要求指明 $t = 0$ 时刻的 $\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ (or ω_3)

ϕ 和 ψ 是循环坐标，其初始值无关紧要

若要求陀螺做无章动的匀速进动，则剩余四个初始值不能任意选取

由于需要满足 $\dot{\theta} = 0$ ，因此，在给定 ω_3 和 θ_0 时， $\dot{\phi}$ 也确定下来了。

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi}\cos\theta_0)$$

$\dot{\phi} = 0$ 不可能满足方程，所以要得到规则进动，必须给陀螺一个初始推动，使它开始进动

这是一个二次方程，可能无实数解，也可能有两个实数解

有两个实数解的条件 ($b^2 > 4ac$)

$$I_3^2\omega_3^2 > 4MglI_1\cos\theta_0 \quad \rightarrow \quad \omega_3 > \frac{2}{I_3}\sqrt{MglI_1\cos\theta_0} \quad \text{快陀螺!}$$

两个实数解分别对应“慢进动”与“快进动”

慢进动的近似解

$$I_3\omega_3 \gg I_1\dot{\phi}\cos\theta_0$$

$$\dot{\phi} \simeq \frac{Mgl}{I_3\omega_3}$$

快进动的近似解

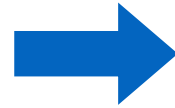
$$\dot{\phi} \gg Mgl$$

$$\dot{\phi} \simeq \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta_0}$$

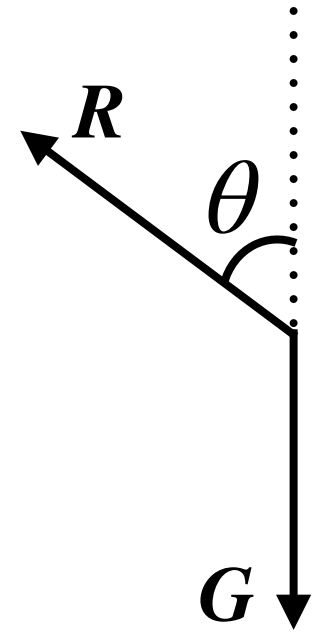
磁场内电荷系统的进动

- 陀螺在重力场中的势函数

$$V = -MR \cdot G = Mgl \cos \theta$$



$$\dot{\phi} \simeq \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}$$



- 磁偶极子在均匀磁场中的势函数

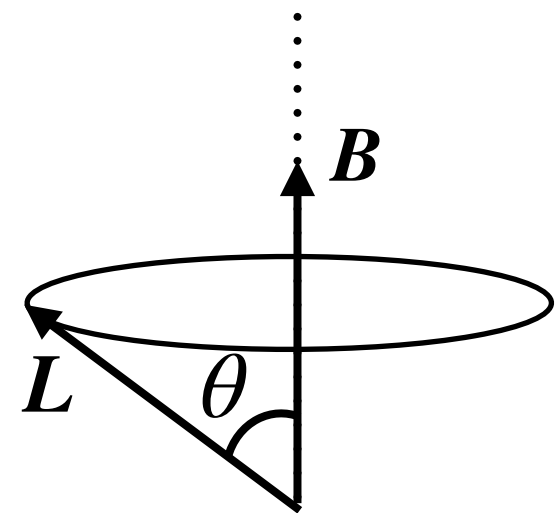
$$V = -M \cdot B = -\gamma LB \cos \theta$$



磁矩 $M = \gamma L = \frac{q}{2m} L$

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{\gamma LB}{L} = -\gamma B$$

拉摩进动



严格的拉摩进动非纯进动，相关推导要参照快陀螺情形

基本粒子

- 许多基本粒子如电子、质子等具有内禀角动量，即自旋 \mathbf{s}
于是也具有内禀磁矩 $\boldsymbol{\mu}$

- 对于自旋为1/2的粒子，狄拉克（Dirac）方程预言
与经典的带电粒子相差一个2倍的因子

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{m} \mathbf{s}$$

- 定义 $\boldsymbol{\mu} = \frac{gq}{2m} \mathbf{s}$
 $g = 1$ 经典
 $g = 2$ 量子

$$\mathbf{M} = \gamma \mathbf{L} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}$$

- $g = 2$, 电子, μ 子等Dirac粒子
- 质子 $g = 2.8$; 中子 $g = -1.9$ 复合粒子

反常磁矩

- 电子和 μ 子的磁矩已经测量得非常精确

$$g_e = 2.00231930436182 \pm 0.0000000000000052$$

$$g_\mu = 2.0023318418 \pm 0.00000000012$$

- 并不是严格等于2，因为有电子和 μ 子周边围绕着各种虚粒子云
- 偏离2的部分为反常磁矩，探索新物理，新粒子？
- 测量利用拉摩进动原理

将已知自旋取向的粒子放在给定磁场 B 中

测量时间 t 后的自旋取向

$$\omega_L = -\frac{gq}{2m}B$$

需要非常高精度的磁场大小测量

总结

- 转动的SU(2)表示
- 分析了重陀螺的运动
约化为一个关于 θ 的一维问题
定性分析 —> 进动 + 章动
规则进动
- 磁场中的旋转带电体
磁矩与角动量的关系：g因子
拉摩进动
基本粒子的g因子测量：新物理