北京大学

理论力学

赵鹏巍

内容回顾

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 正则变换
- 标度变换
- 四类生成函数的基本型

今日目标

- 无穷小正则变换
- 直接条件
- 正则变换的两种“绘景”

无穷小正则变换

- 无穷小正则变换是一种正则变换，但其中p，q 的改变量非常小

$Q_i = q_i + \delta q_i$ $\quad$ $P_i = p_i + \delta p_i$ $\quad$ $\delta q_i, \delta p_i$ 代表很小的改变量，非变分！！

- 无穷小正则变换与恒等变换非常接近

相应的生成函数应为 $F_2(q, P, t) = \boxed{q_i P_i} + \boxed{\varepsilon} G(q, P, t)$

恒等变换的生成元

很小！

查生成函数表

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

由于ε很小，保留到一级无限小

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \approx -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial Q_i}$$

无穷小正则变换的生成元

- 无穷小正则变换的生成函数为 $F_2(q,P,t) = q_i P_i + \varepsilon\, G(q,P,t)$

$$Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \qquad P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

- *G* 被称为无穷小正则变换的生成元

虽然这一称呼并不完全准确，因为生成函数是 *F*！

由于正则变换是无穷小的，*G* 可以表示为 *q* 或 *Q*，以及 *p* 或 *P* 的函数。

例如：$G = G(q,p,t)$ $\qquad Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}$

哈密顿量

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

- 令 $G = H(q,p,t)$

$$\Rightarrow \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} = \varepsilon \dot{q}_i \qquad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \varepsilon \dot{p}_i$$

- 这时，ε 事实上可以看作是无穷小时间 δt

$$\delta q_i = \dot{q}_i \delta t \qquad \delta p_i = \dot{p}_i \delta t$$

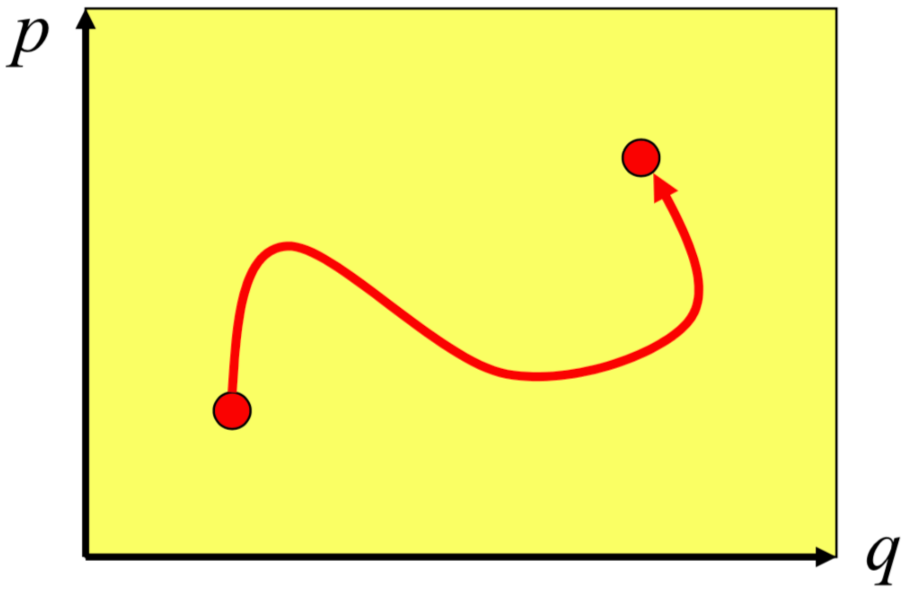
- 哈密顿量是系统随时间所做无穷小正则变换的生成元

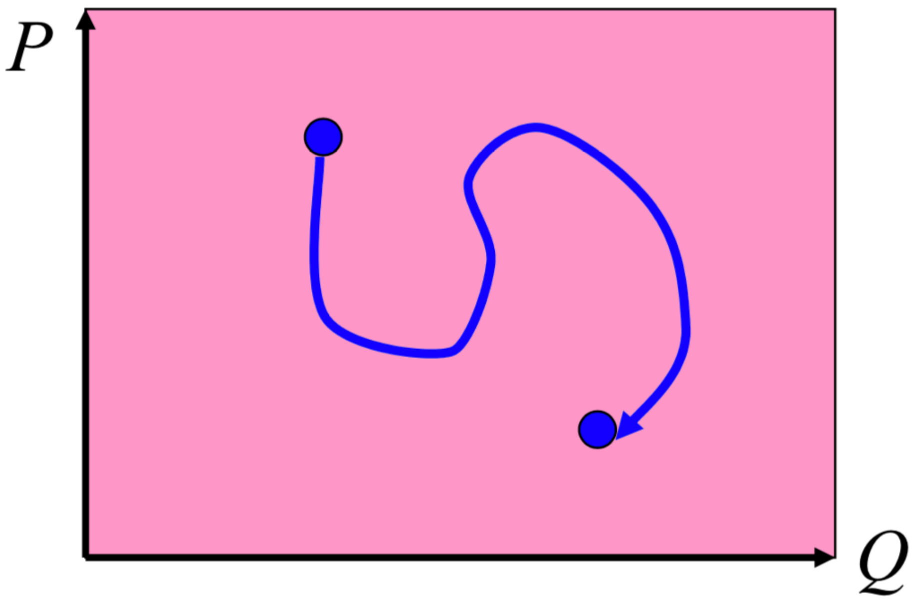
在量子力学中，哈密顿量表征时间演化的算符

两种绘景

- 正则变换允许我们利用多种“坐标/动量”来描述同一体系

  不同相空间中的同一系统





- 这是 “静态” 绘景 (static view)

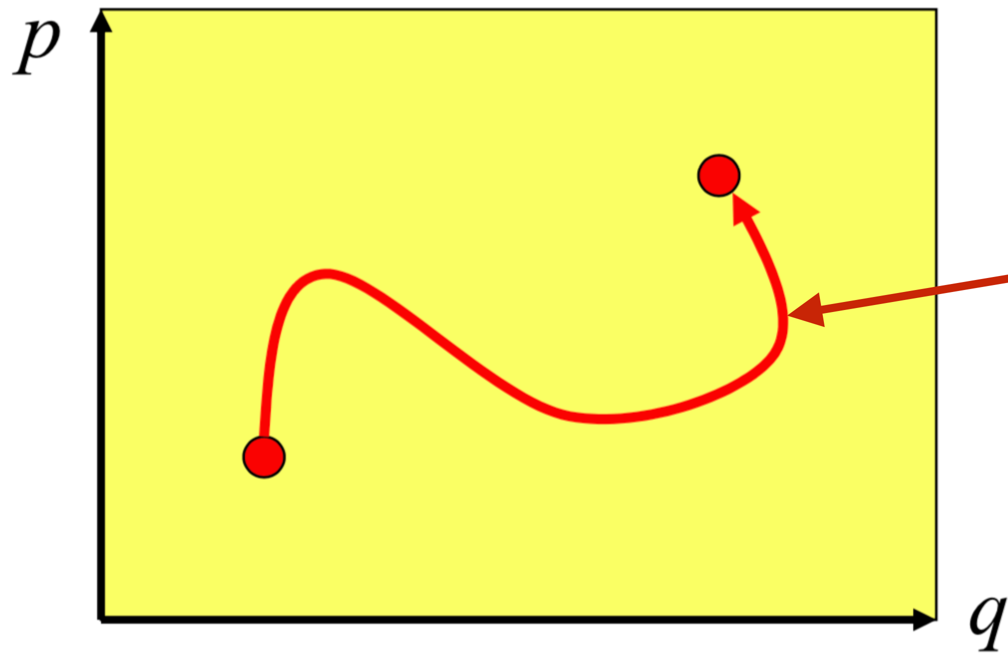
  体系本身没有发生变化

正则变换的“动态” 绘景 (dynamic view)

- 一个随时间演化的系统 $q(t_0), p(t_0) \rightarrow q(t), p(t)$

  任一时刻，q 和 p 都满足哈密顿正则方程

  时间演化必须是一个正则变换



相空间内的移动是一个正则变换

- “静态” 绘景：坐标系在变换，“被动”观点

  “动态” 绘景：物理系统在运动，“主动”观点

从正则方程出发构建正则变换

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 考虑一个受限正则变换，即生成函数不显含时间

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad K(Q,P) = H(q,p)$$

哈密顿量不发生变化！

- Q 和 P 仅依赖于 q 和 p，而不依赖于t

$$Q_i = Q_i(q,p) \qquad P_i = P_i(q,p)$$

利用正则方程！

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{P}_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

直接条件

- 另一方面，直接写出Q、P 满足的正则方程

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i}=\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \Longleftrightarrow \dot{Q}_i=\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\dot{P}_i=-\frac{\partial H}{\partial Q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \Longleftrightarrow \dot{P}_i=\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

正则变换的直接条件！

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p}=\left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p}=-\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p}=-\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p}=\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

这里下标是为了提醒我们自变量是什么 …

直接条件

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

- 直接条件是一个时间无关的正则变换的充分必要条件！

  可以用来检验一个时间无关的变换是否正则！

- 事实上，对于所有的(包括含时的)正则变换，直接条件都是充分必要条件。　怎么证明呢?　(用到无穷小正则变换)

无穷小正则变换

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \approx -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial Q_i}$$

- 无穷小正则变换满足直接条件吗？试试！

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial (q_i + \delta q_i)}{\partial q_j} = \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial q_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial p_j}{\partial P_i} = \frac{\partial (P_j - \delta p_j)}{\partial P_i} = \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial q_j}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial (q_i + \delta q_i)}{\partial p_j} = \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial p_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial q_j}{\partial P_i} = \frac{\partial (Q_j - \delta q_j)}{\partial P_i} = -\varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_i \partial p_j}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = \frac{\partial (p_i + \delta p_i)}{\partial q_j} = -\varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial q_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial (P_j - \delta p_j)}{\partial Q_i} = \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial q_j}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial (p_i + \delta p_i)}{\partial p_j} = \delta_{ij} - \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial p_j} \Longleftrightarrow \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial (Q_j - \delta q_j)}{\partial Q_i} = \delta_{ij} - \varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_i \partial p_j}$$

满足！

连续正则变换

- 两个正则变换接连作用等价于一个正则变换

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} = p_i\dot{q}_i - H \quad + \quad Y_i\dot{X}_i - M + \frac{dF_2}{dt} = P_i\dot{Q}_i - K$$

$$\Rightarrow \quad Y_i\dot{X}_i - M + \frac{d(F_1 + F_2)}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

对任意正则变换（包括含时的）均成立！

- 相应的直接条件也有类似规则，如

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \quad + \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial Q_j}\right)_{Q,P} = \left(\frac{\partial P_j}{\partial Y_i}\right)_{X,Y}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial Y_i}\right)_{X,Y}$$

这真的很容易证明！

非受限正则变换

- 现在，我们考虑一个一般的，含时的正则变换

$Q_i = Q_i(q, p, t)$　　$P_i = P_i(q, p, t)$　　$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

- 这个变换可以分两步进行：

$$q, p \xrightarrow{\text{时间无关的正则变换}} Q(q, p, \underbrace{t_0}_{\text{固定时间}}), P(q, p, t_0) \xrightarrow{\text{时间依赖的正则变换}} Q(q, p, t), P(q, p, t)$$

- 第一步是时间无关的，所以满足直接条件

现在，我们需要证明，第二步也满足直接条件。

非受限正则变换

- 我们关注一个只依赖于时间的正则变换 $Q(t_0), P(t_0)$ → $Q(t), P(t)$

  将 $t - t_0$ 分成许多无穷小的时间间隔 dt

  $Q(t_0), P(t_0)$ → $Q(t_0 + dt), P(t_0 + dt)$ → → → $Q(t), P(t)$

  每一步都是一个无穷小正则变换，所以满足直接条件

  从 $Q(t_0), P(t_0)$ 到 $Q(t), P(t)$ 的变换是随时间 t 连续演变的连续变换

  因此，可看成是由许多步长为dt 的无穷小正则变换相继进行所构成。

所有正则变换均满足直接条件，反之亦然！

总结

- 无穷小正则变换
- 直接条件
- 正则变换的两种“绘景”