

理论力学

赵鹏巍

狭义相对论

- 狭义相对论是对力学结构的一种修正，不要与量子力学混为一谈
- 我们不做全面的、详细的、历史性的讨论
只尝试讨论如何使狭义相对论纳入经典力学的范畴
- 两个基本假设：
 1. 相对性原理：物理定律在所有惯性系中都保持一致
 2. 光速不变原理：真空中的光速在所有惯性系中都相同

惯性系的定义遵循牛顿第一定律：无外力时，物体保持静止或匀速直线运动状态的参考系，即牛顿第一定律成立的参考系。

真空光速是Maxwell方程中的一个常数，光速不变原理是保持Maxwell方程正确的一个要求。

时空间隔

- 定义时空间隔 $(\Delta s)^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$
- 任意两个事件间的时空间隔在所有惯性系中保持不变。

- $(\Delta s)^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 代表光的传播

如果一个速度小于光速的物体从事件1运动到事件2，时间 t 肯定更长 $(\Delta s)^2 > 0$

如果 $(\Delta s)^2 < 0$ ，说明时间间隔短到即使是光速也不能到达。

- 两个事件之间的时空间隔可能落在三个区间

- | | | | |
|----|--------------------|------|----------------|
| 1. | $(\Delta s)^2 > 0$ | 类时时隔 | 一般物体 |
| 2. | $(\Delta s)^2 < 0$ | 类空时隔 | 快子，速度大于光速的假想粒子 |
| 3. | $(\Delta s)^2 = 0$ | 类光时隔 | 光 |

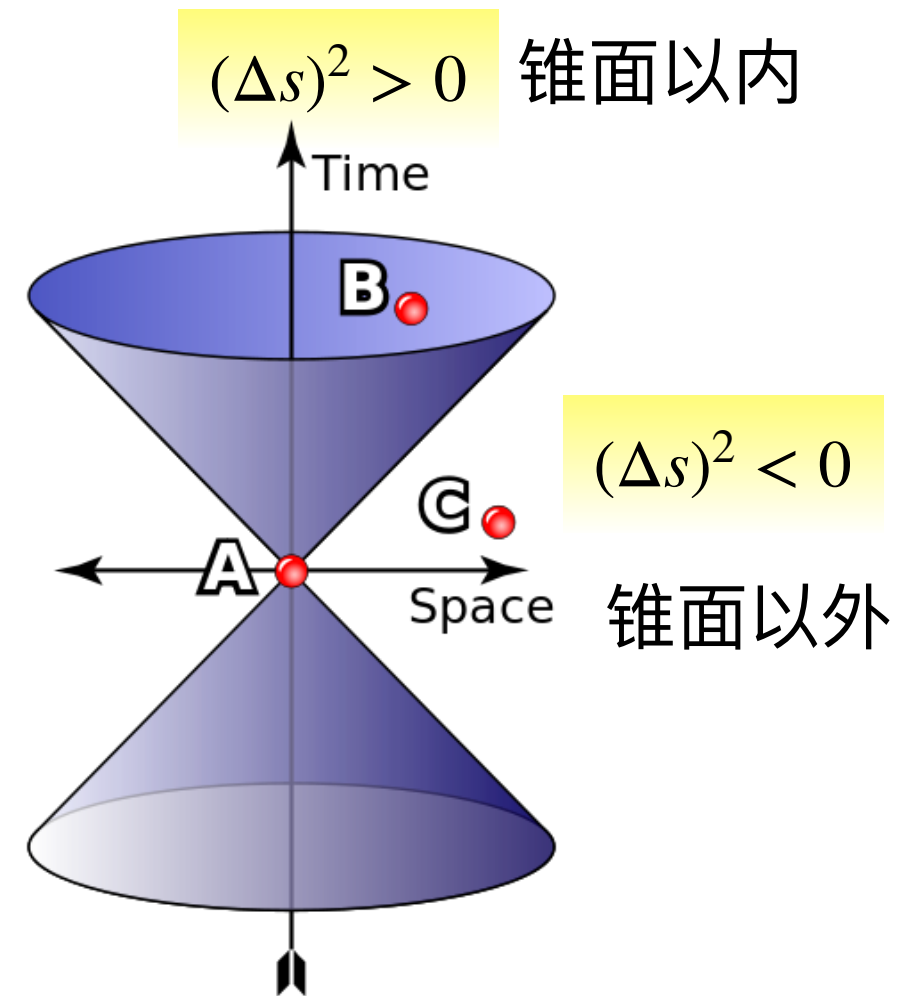
光锥

- $(\Delta s)^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 给出一个四维

空间的锥面

光锥面将时空分成了past, future 以及
elsewhere

- 这种划分是参考系无关的，因为惯性系中的间隔不变
- 因果律，过去是过去，未来是未来，无论你处于什么惯性系



光锥之内就是命运？

时间膨胀

- 考虑一个物体在参考系S中以速度 \mathbf{v} 运动

$$(dx, dy, dz) = (v_x, v_y, v_z)dt$$

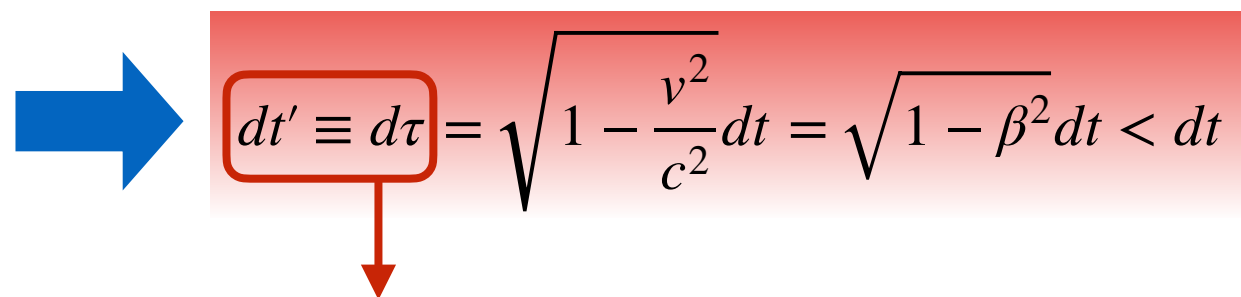
定义参考系S'，使得物体在S'中始终处于坐标原点

考虑在时空中从事件1到事件2的一个移动，

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= (c\Delta t')^2 && \text{in } S' \\ &= (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) && \text{in } S\end{aligned}$$

微分

$$(cdt')^2 = (cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (c^2 - v^2)dt^2$$


$$dt' \equiv d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt < dt$$

运动的时钟变慢!

原时 (Proper Time) 与事件位于同处的时钟所测时间

四矢量与闵氏空间

- 我们可以用四矢量来表示时空中的一个事件 (t, x, y, z)
光速 c 的引入是为了让四个分量的量纲一致
在一般的四维欧氏空间中，这一矢量的长度为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

物理上不使用!

- 在闵可夫斯基 (Minkowski) 空间，定义矢量的长度为，

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

时空间隔!

- 定义度规 \mathbf{g} $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{g} \mathbf{x} = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$
欧氏空间 $\mathbf{g} = \mathbf{1}$

闵氏空间任意四矢量的长度在所有惯性系下保持不变!

惯性系间的线性变换

- 两个不同的惯性系 S 和 S' 是怎样联系在一起的呢？

非相对论情况下，通过伽利略变换联系

在三维欧氏空间，伽利略变换保持三矢量长度不变。

- 在相对论情况下，

我们需要一种变换保持时空间隔 $(\Delta s)^2$ 不变

我们需要这种变换保持闵氏空间的四矢量长度不变

- 这种变换当然一定是线性变换

因为，两个这种变换相继作用，依然得到这种变换

$$(ct, x, y, z) \xrightarrow{L} (ct', x', y', z') \xrightarrow{L'} (ct'', x'', y'', z'')$$

惯性系1

惯性系2

惯性系3

庞加莱变换

- 任意一个线性变换均可写为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

庞加莱变换

\mathbf{a} 代表参考系原点的平移，当然不会涉及物理后果。

- 我们忽略平移部分，只考虑 \mathbf{L} 变换

即洛伦兹变换或齐次洛伦兹变换

两个“洛伦兹”

H. Lorentz 洛伦兹变换

L. Lorenz 洛伦兹规范

洛伦兹变换

- 现在，我们考虑 $x' = Lx$ L 是一个 4×4 的矩阵

- L 变换保持四矢量的长度不变

$$|x|^2 = x^T g x \quad \Longleftrightarrow \quad |x'|^2 = x'^T g x' = x^T L^T g L x \quad \Rightarrow \quad L^T g L = g$$

写成分量形式

$$L_{ji} g_{jk} L_{kl} = g_{il} \quad \text{对应16个实数方程}$$

对应 L 的行列式为 ± 1

g 是对称阵 \rightarrow 16个方程中有6个方程是重复的 \rightarrow 10个约束

\Rightarrow L 变换有6个自由度

空间转动

- 空间转动 \mathbf{A} 保持三维矢量的长度不变
- 很容易看出当 \mathbf{L} 仅对应一个空间转动时，也能保持四矢量的长度不变

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

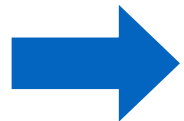
$$|\mathbf{x}|^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \text{const}$$

不作用

保持不变

三维空间转动是齐次洛伦兹变换的一个子集

三维转动具有3个自由度（欧拉角）



齐次洛伦兹变换 \mathbf{L} 一定还有另外 3 个自由度

洛伦兹推促 (Boost)

- 考虑两个惯性系 S 和 S'

在 S 中观察, S' 的原点以常速度 \mathbf{v} 运动

$$(x', y', z') = 0 \quad \rightarrow \quad x = v_x t \quad y = v_y t \quad z = v_z t$$

- 总可以**将 S 和 S' 进行转动, 使它们的 x 和 x' 轴与常数速度 \mathbf{v} 平行, 此时, y 与 y' , z 与 z' 都是相互平行的

“总可以”这样做, 因为空间转动是齐次洛伦兹变换的一个子集

只涉及 x 方向与时间 t 的混合; y, z 保持不变

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & 0 & 0 \\ L_{10} & L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

洛伦兹推促 (Boost)

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & 0 & 0 \\ L_{10} & L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 作为洛伦兹变换，必须满足 $L^T g L = g$

$$\rightarrow L_{00}^2 - L_{10}^2 = 1 \quad L_{01}^2 - L_{11}^2 = -1 \quad L_{00}L_{01} - L_{10}L_{11} = 0$$

- 在参考系 S' 中观察， S' 的原点当然满足 $x' = 0 \rightarrow 0 = L_{10}ct + L_{11}x$
 在参考系 S 中观察， S' 的原点当然满足 $x = vt \rightarrow \beta \equiv \frac{v}{c} = -\frac{L_{10}}{L_{11}}$

符号的不确定性?

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$L_{00}L_{01} - L_{10}L_{11} = 0 \rightarrow L_{00}^2 L_{01}^2 = L_{10}^2 L_{11}^2 \rightarrow (1 + \beta^2 L_{11}^2)(L_{11}^2 - 1) = \beta^2 L_{11}^4$$

符号的确定

- 符号不确定性

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta \\ \mp\gamma\beta & \pm\gamma \end{pmatrix}$$

ct' 的符号不确定性

x' 的符号不确定性

- 取低速极限 $\beta \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta \\ \mp\gamma\beta & \pm\gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

应该是一个单位矩阵



$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

时空反演

- 其它符号的物理含义

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ \gamma\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

对应空间反射

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

对应时间反演

- 这两个变换将时空取反向

物理定律应当保持不变

变换不是连续变换，是离散变换

行列式为 -1 （非恰当洛伦兹变换，暂不考虑）

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-\gamma\beta) \begin{vmatrix} \gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = -\gamma^2 + \gamma^2\beta^2 = -1$$

洛伦兹推促的一般形式

- 我们得到了沿 x 方向的洛伦兹推促的形式
- 可以通过旋转参考系 S 和 S' ，得到其他任意方向的推促
- 也可以通过矢量运算得到

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们将一个三维矢量 \mathbf{r} 分解为两部分：平行于速度 \mathbf{v} 的部分 + 垂直于速度 \mathbf{v} 的部分

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}$$

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$$

平行方向的推促变换与 x 方向类似，而垂直方向不变

$$ct' = \gamma ct - \gamma\beta |\mathbf{r}_{\parallel}| = \gamma ct - \gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{r}' = -\gamma\beta ct + \gamma\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} = -\gamma\beta ct + \mathbf{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}(\gamma - 1)}{\beta^2}$$

恰当洛伦兹变换

- 显式的写为矩阵形式

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

3个自由度 $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$

纯推促洛伦兹变换的一般形式

洛伦兹变换的小结

- 恰当洛伦兹变换 L

3 个自由度 β ,

纯推促、无空间转动

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

- 齐次洛伦兹变换 LA

A 是一个三维空间转动

$3 + 3 = 6$ 个自由度

参考系原点保持不变

- 庞加莱变换 $\mathbf{x}' = L\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$

\mathbf{a} 平移坐标原点

$6 + 4 = 10$ 个自由度

满足狭义相对论的惯性系变换的最一般形式。

纯推促洛伦兹变换的性质

- 当 $\beta \rightarrow 0$ 时, $L \rightarrow 1$
- 当 $\beta \rightarrow -\beta$ 时, $L \rightarrow L^{-1}$

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

验证!

- L 矩阵是对称的
我们知道, 空间转动 \mathbf{A} 不是对称的
- 所以齐次洛伦兹变换 $L\mathbf{A}$ 矩阵并无对称性可言

两次变换：速度叠加


- 两个纯推促变换 L 和 L' 相继操作

如果 β 和 β' 的方向是平行的，我们总可以定义其方向为 x 方向

$$L'L = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta' \\ -\gamma'\beta' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'\gamma(1 + \beta'\beta) & -\gamma'\gamma(\beta + \beta') \\ -\gamma'\gamma(\beta + \beta') & \gamma'\gamma(1 + \beta'\beta) \end{pmatrix}$$

只显示了 ct 和 x 方向

- 令 $\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta'\beta}$ 速度叠加


$$L'L = \begin{pmatrix} \gamma'' & -\gamma''\beta'' \\ -\gamma''\beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

当然，也可证明对于任意 β 和 β' ， $|\beta''| < 1$

两次变换：速度叠加

- 两个纯推促变换 L 和 L' 相继操作

如果 β 和 β' 的方向**不是平行的**，例如， β 方向为 x 方向， β' 方向为 y 方向

$$L'L = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\gamma'\beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma'\beta' & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'\gamma & -\gamma'\gamma\beta & -\gamma'\beta' \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ -\gamma'\gamma\beta' & \gamma'\gamma\beta'\beta & \gamma' \end{pmatrix}$$

只显示了 ct 和 x, y 方向

- 这个矩阵是非对称的，显然，不能写成一个纯推促变换 L''
- 显然， $L'L \neq LL'$ 方向不同的纯推促变换是非对易的。

两次变换：速度叠加

- 一般地， LL' 是非对称性矩阵

两个恰当纯推促洛伦兹变换相乘不等于一个恰当纯推促洛伦兹变换

- 我们知道，齐次洛伦兹变换是保持四维矢量长度不变且不移动原点的线性变换

两个齐次洛伦兹变换相乘自动满足上述条件

所以，两个齐次洛伦兹变换相乘等于一个齐次洛伦兹变换

- 所以，两个恰当纯推促洛伦兹变换相乘必须等于一个齐次洛伦兹变换

即， $LL' = L'' A$

亦即，纯推促 + 纯推促 = 纯推促 + 3D 空间转动

洛伦兹群

- 所有齐次洛伦兹变换构成一个闭合的群（洛伦兹群）
任意两个群元的乘积仍然是群元
- 所有三维空间转动变换构成一个闭合的群（转动群）[欧拉定理证明！]
是洛伦兹群的一个子群
- 所有纯推促变换不能构成一个群！

四矢量

- 我们在四维时空中构造一个四维矢量 x^μ

$$x^0 = ct$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

- 考虑一个在四维时空中运动的粒子

运动轨迹可以写为 $x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda)$

λ 是一个沿着运动轨迹单调变化的参数

例如，原时 τ 通常可选取为一个方便的 λ

- 于是，在运动轨迹上的任意一点，都可以定义切向四动量，

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

称之为四速度

四速度

$$\tau = \sqrt{1 - \beta^2} t$$

- 设 S 为观察者所在参考系， S' 为粒子的静止参考系，
设 S 中粒子运动的三速度为 \mathbf{v} ，于是有

$$x^0 = ct = \gamma c \tau$$

$$x^i = v^i t = \gamma \beta^i c \tau = \gamma v^i \tau \quad i = 1, 2, 3$$

- 定义四速度

$$u^0 = \frac{\partial x^0}{\partial \tau} = \gamma c$$

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tau} = \gamma v^i$$

空间分量与三速度成正比

四速度的长度

$$u^0 u^0 - u^i u^i = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

洛伦兹不变量！

四速度是三速度 \mathbf{v} 的相对论推广

$c^2 > 0$ ，四速度是类时的。

四动量

- 将四速度乘以质量给出四动量

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$$

$$p^0 = mu^0 = m\gamma c$$

$$p^i = mu^i = m\gamma v^i$$

空间分量是三动量的自然推广

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$$

时间分量对应能量

$$E/c = p^0 = m\gamma c$$

We will see ...

- 四动量的长度是一个洛伦兹不变量

$$p^0 p^0 - p^i p^i = m^2 c^2$$



$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$$

- 定义动能

$$T = E - E_{v=0} = mc^2(\gamma - 1) = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} - mc^2$$



$$T = mc^2(\gamma - 1) \rightarrow \infty$$

$$\beta \rightarrow 1$$

不可能通过加速的手段从某一低于光速的速度达到或超过光速！所需能量无穷大！



$$T = mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2}mv^2 + O(\beta^4)$$

Taylor 展开 $\beta \ll 1$ *You see ... 动能!*

度规张量

- 一个坐标系总是建立在一组基矢量上的

$$u = u^\mu e_\mu = u^0 e_0 + u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

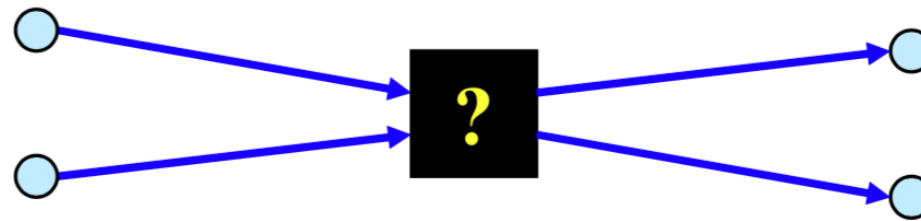
- 标量积 $u \cdot v$ 可以写为

$$u \cdot v = u^\mu e_\mu \cdot v^\nu e_\nu \quad \longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$$

- 度规张量其实对应着基矢量的标量乘积
故与基矢量的长度以及夹角有关
- 闵氏空间的度规是对角的，坐标轴总是相互正交的
在弯曲时空中，度规可以有更复杂的形式，广义相对论。

粒子碰撞

- 考虑两个粒子发生碰撞
力的作用在仅碰撞时发生
在碰撞前后均为自由运动
- 将碰撞过程当做一个黑箱子

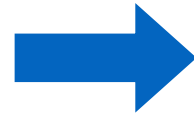


- 我们不去研究黑箱子里发生了什么（通常不是经典力学过程）
我们只关注黑箱子外面的事情 ——> 相对论运动学
我们可以利用碰撞前后的四动量守恒原理
- 在不打开黑箱子的情况下，能了解多少物理呢？

动量中心系 (CoM)

- 考虑体系的总四动量，即总能量、总动量

$$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$$



$$E = \sum_{s=1}^n E_s$$

$$\mathbf{p} = \sum_{s=1}^n \mathbf{p}_s$$

总四动量作为一个洛伦兹矢量，也满足洛伦兹变换

$$p'^\mu = \sum_s p_s'^\mu = \sum_s L^\mu_\nu p_s^\nu = L^\mu_\nu p^\nu$$

- 引入**动量中心系**

在这一参考系下，**总四动量的空间部分 $\mathbf{p} = 0$**

在这一参考系下，**“质心”是静止的**

通常也称为“质心系”

动量中心系 (CoM)

- $$p^\mu = \sum_{s=1}^n p_s^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad \rightarrow \quad p'^\mu = \left(\frac{E'}{c}, \mathbf{0} \right)$$

我们引入两个非常重要的物理量

- 动量中心系下的能量 E'

根据洛伦兹不变性

$$p'^\mu p'_\mu = p^\mu p_\mu$$



$$\frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2$$

E' 是体系可能的最小的 E

- 从实验室系到动量中心系的推促 β

根据洛伦兹逆变换 ($\beta \rightarrow -\beta$)

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$p^\mu = L^\mu_\nu p'^\nu = \left(\frac{\gamma E'}{c}, \frac{\gamma\beta E'}{c} \right)$$



$$\beta = \frac{pc}{E}$$

$$\gamma = \frac{E}{E'}$$

两粒子碰撞

- 考虑将粒子1（炮弹）打到粒子2（固定靶）的情形

$$p_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$$

$$p_2 = (m_2c, \mathbf{0})$$



- 总四动量: $p = (E_1/c + m_2c, \mathbf{p}_1)$

- 总 CoM 能量

$$E'^2 = p^\mu p_\mu c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$

$$m^2 c^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$$

E' 随着 E_1 缓慢增加!

- 从实验室系到COM的推促

$$\beta = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1/c + m_2c} = \frac{m_1 \gamma_1 \mathbf{v}_1}{m_1 \gamma_1 c + m_2 c}$$

E_1 很大时, $\beta \rightarrow v_1/c$

生成阈值

- 假设我们要通过两个粒子的碰撞来产生一种新粒子

粒子1 + 粒子2 \rightarrow 粒子3

- 总四动量 $p = p_1 + p_2 = p_3$

$$m^2 c^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2$$

- 总 CoM 能量 $E'^2/c^2 = p_3^\mu p_{3\mu} = m_3^2 c^2$



$$E' = m_3 c^2$$

质心系下的能量 E' 必须
达到新粒子3的质能!

- 我们需要给粒子1提供多少能量呢?

$$E'^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2 = m_3^2 c^4$$



$$E_1 = \frac{(m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2}$$

在 m_3 很大的情况下, E_1 几乎随 m_3 的平方增加!

固定靶 VS 对撞机

- 考虑将一个质子加速去轰击另一个质子，来产生 Higgs 粒子

设 Higgs 粒子比质子重 X 倍

$$E_1 = \frac{(m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2} \approx \frac{X^2}{2} m_p c^2$$



当 $X > 100$ 时，我们需要一个 > 5000 GeV 的加速器

- 对撞机会更加有效率

$$p_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$$

$$p_2 = (E_2/c, \mathbf{p}_2)$$



$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

实验室系正是动量中心系

$$p = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \mathbf{0} \right)$$

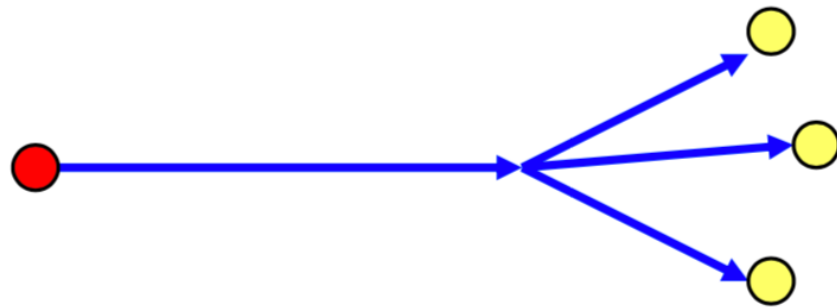
需要能量

$$E_1 + E_2 = m_3 c^2 = X m_p c^2$$

50 GeV + 50 GeV

粒子衰变

- 许多微观粒子是不能稳定存在的，会在一定时间内衰变



$$p^\mu = \sum_i p_i^\mu$$

- 通过计算动量中心系下的总能量，可以从衰变产物的四动量推出母粒子的质量

$$p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu = E'^2/c^2 = m^2 c^2$$

也称为体系的“**不变质量**”！

- 在实验上，经常用来确定发现的新粒子，这些粒子寿命很短，无法进行直接测量
测量所有稳定衰变产物的三动量，由于产物的质量已知，可计算其四动量
进而计算不变质量 —> 检验是否与期待的新粒子质量一致？

超重核合成

超重元素 119? 120? ...

The Periodic Table of Elements

1

H

HYDROGEN

1.0079

3

Li

LITHIUM

6.941

4

Be

BERYLLIUM

9.0122

11

Na

SODIUM

22.990

12

Mg

MAGNESIUM

24.305

19

K

POTASSIUM

39.0983

20

Ca

CALCIUM

40.078

21

Sc

SCANDIUM

44.956

22

Ti

TITANIUM

47.867

23

V

VANADIUM

50.942

24

Cr

CHROMIUM

51.996

25

Mn

MANGANESE

54.938

26

Fe

IRON

55.845

27

Co

COBALT

58.933

28

Ni

NICKEL

58.693

29

Cu

COPPER

63.546

30

Zn

ZINC

65.38

31

Ga

GALLIUM

69.723

32

Ge

GERMANIUM

72.630

33

As

ARSENIC

74.922

34

Se

SELENIUM

78.971

35

Br

BROMINE

79.904

36

Kr

KRYPTON

83.798

37

Rb

RUBIDIUM

85.468

38

Sr

STRONTIUM

87.62

39

Y

YTTRIUM

88.906

40

Zr

ZIRCONIUM

91.224

41

Nb

NIوبيUM

92.906

42

Mo

MOLYBDENUM

95.95

43

Tc

TECHNETIUM

[98]

44

Ru

RUTHENIUM

101.07

45

Rh

RHODIUM

102.91

46

Pd

PALLADIUM

106.42

47

Ag

SILVER

107.87

48

Cd

CADMIUM

112.41

49

In

INDIUM

114.82

50

Sn

TIN

118.71

51

Sb

ANTIMONY

121.76

52

Te

TELLURIUM

127.60

53

I

IODINE

126.90

54

Xe

XENON

131.29

55

Cs

CESIUM

132.91

56

Ba

BARIUM

137.33

57

La

LANTHANUM

138.91

58

Ce

CERIUM

140.12

59

Pr

PRASEODYMIUM

140.91

60

Nd

NEODYMIUM

144.24

61

Pm

PROMETHIUM

[145]

62

Sm

SAMARIUM

150.36

63

Eu

EUROPIUM

151.96

64

Gd

GADOLINIUM

157.25

65

Tb

TERBIUM

158.93

66

Dy

DYSPROSIUM

162.50

67

Ho

HOLMIUM

164.93

68

Er

ERBIUM

167.26

69

Tm

THULIUM

168.93

70

Yb

YTTERBIUM

173.05

71

Lu

LUTETIUM

174.97

87

Fr

FRANCIUM

[223]

88

Ra

RADIUM

[226]

89

Ac

ACTINIUM

[227]

90

Th

THORIUM

232.04

91

Pa

PROTACTINIUM

231.04

92

U

URANIUM

238.03

93

Np

NEPTUNIUM

[237]

94

Pu

PLUTONIUM

[244]

95

Am

AMERICIUM

[243]

96

Cm

CURIUM

[247]

97

Bk

BERKELIUM

[247]

98

Cf

CALIFORNIUM

[251]

99

Es

EINSTEINIUM

[252]

100

Fm

FERMIUM

[257]

101

Md

MENDELEVIUM

[258]

102

No

NOBELIUM

[259]

103

Lr

LAWRENCIUM

[262]

104

Rf

RUTHERFORDIUM

[263]

105

Db

DUBNIUM

[268]

106

Sg

SEABORGIUM

[271]

107

Bh

BOHRNIUM

[270]

108

Hs

HASSIUM

[270]

109

Mt

MEITNERIUM

[278]

110

Ds

DARMSTADIUM

[281]

111

Rg

ROENTGENIUM

[281]

112

Cn

COPERNICIUM

[285]

113

Nh

NIHONIUM

[286]

114

Fl

FLEROVIUM

[289]

115

Mc

MOSCOVIUM

[289]

116

Lv

LIVERMORIUM

[293]

117

Ts

TENNESSINE

[294]

118

Og

OGANESSON

[294]

6

C

CARBON

12.011

Atomic Number

Chemical Symbol

Chemical Name

Atomic Weight

5

B

BORON

10.811

6

C

CARBON

12.011

7

N

NITROGEN

14.007

8

O

OXYGEN

15.999

9

F

FLUORINE

18.998

10

Ne

NEON

20.180

13

Al

ALUMINUM

26.982

14

Si

SILICON

28.086

15

P

PHOSPHORUS

30.974

16

S

SULFUR

32.066

17

Cl

CHLORINE

35.453

18

Ar

ARGON

39.948

31

Ga

GALLIUM

69.723

32

Ge

GERMANIUM

72.630

33

As

ARSENIC

74.922

34

Se

SELENIUM

78.971

35

Br

BROMINE

79.904

36

Kr

KRYPTON

83.798

49

In

INDIUM

114.82

50

Sn

TIN

118.71

51

Sb

ANTIMONY

121.76

52

Te

TELLURIUM

127.60

53

I

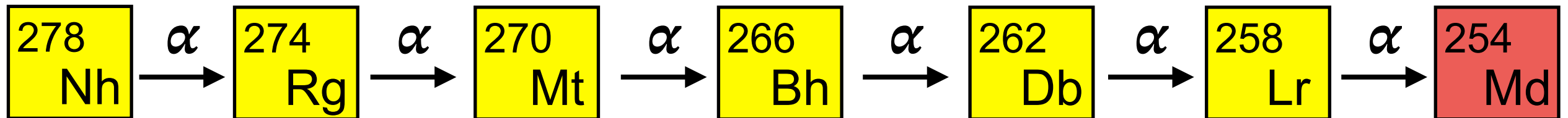
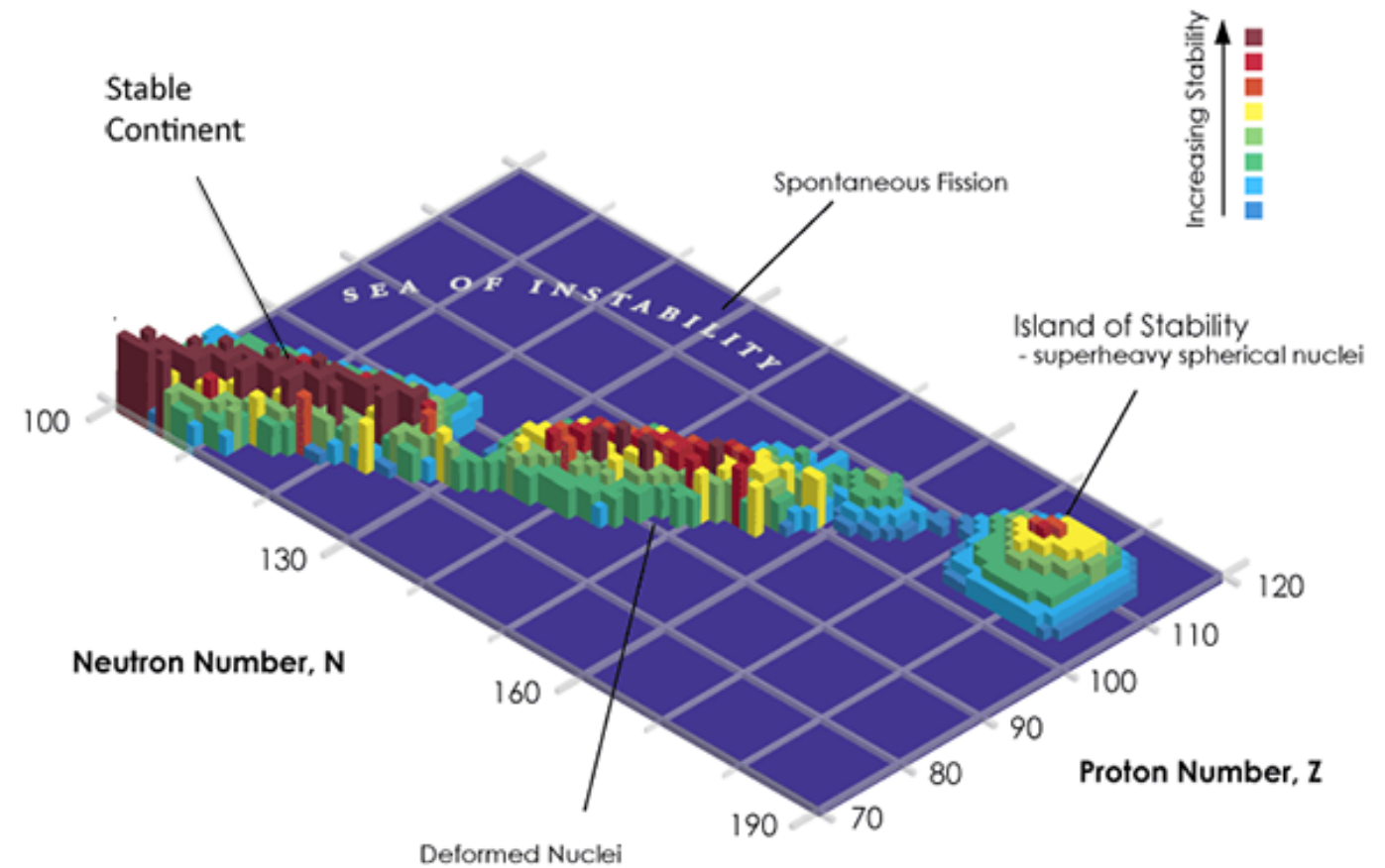
IODINE

126.90

5

超重核合成

- 超重原子核的实验观测
可以存在的最重元素是什么？
- 玻尔模型：
电子速度 $v \sim Z\alpha c \rightarrow Z \sim 137$
- 量子电动力学： $Z \sim 173$
- 超重核合成实验



总结

- 洛伦兹变换：一个在闵氏空间保持4维矢量长度不变的线性变换
- 物理量的协变形式： 四速度、四动量、度规张量
- 相对论运动学：
 - 动量中心系，动量中心能量，不变质量
 - 新粒子的产生阈值，对撞实验
 - 粒子衰变