理论力学

赵鹏巍

狭义相对论

- 狭义相对论是对力学结构的一种修正，不要与量子力学混为一谈
- 我们不做全面的、详细的、历史性的讨论

  只尝试讨论如何使狭义相对论纳入经典力学的范畴
- 两个基本假设：

  1. 相对性原理：物理定律在所有惯性系中都保持一致

  2. 光速不变原理：真空中的光速在所有惯性系中都相同

惯性系的定义遵循牛顿第一定律：无外力时，物体保持静止或匀速直线运动状态的参考系，即牛顿第一定律成立的参考系。

真空光速是Maxwell方程中的一个常数，光速不变原理是保持Maxwell方程正确的一个要求。

时空间隔

- 定义时空间隔 $(\Delta s)^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

- **任意两个事件间的时空间隔在所有惯性系中保持不变。**

- $(\Delta s)^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 代表光的传播

  如果一个速度小于光速的物体从事件1运动到事件2，时间 t 肯定更长 $(\Delta s)^2 > 0$

  如果 $(\Delta s)^2 < 0$，说明时间间隔短到即使是光速也不能到达。

- 两个事件之间的时空间隔可能落在三个区间

1. $(\Delta s)^2 > 0$ 类时时隔 一般物体
2. $(\Delta s)^2 < 0$ 类空时隔 快子，速度大于光速的假想粒子
3. $(\Delta s)^2 = 0$ 类光时隔 光

光锥

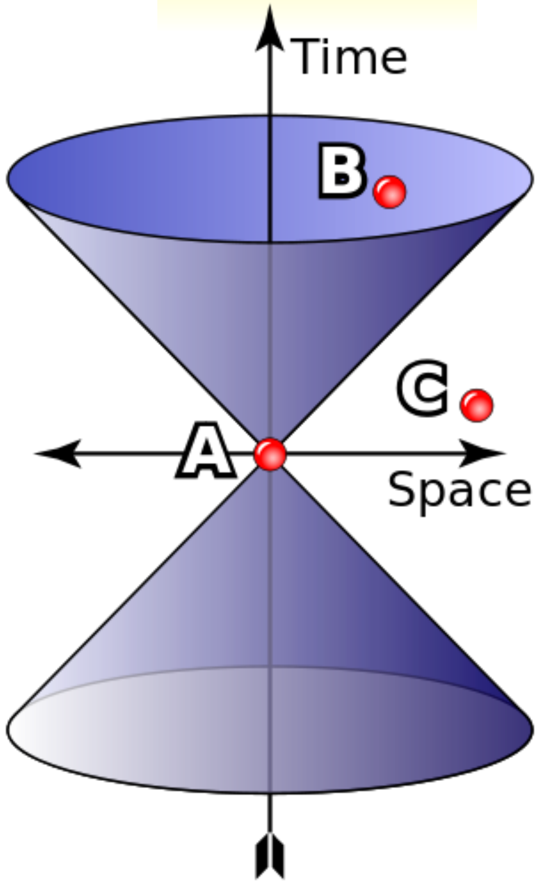
- $(\Delta s)^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 给出一个四维空间的锥面

  光锥面将时空分成了past，future 以及 eleswhere

- 这种划分是参考系无关的，因为惯性系中的间隔不变

- 因果律，过去是过去，未来是未来，无论你处于什么惯性系

$(\Delta s)^2 > 0$ 锥面以内



$(\Delta s)^2 < 0$ 锥面以外

光锥之内就是命运?

时间膨胀

- 考虑一个物体在参考系S中以速度 ***v*** 运动

$$(dx, dy, dz) = (v_x, v_y, v_z)dt$$

定义参考系S’，使得物体在S’中始终处于坐标原点

考虑在时空中从事件1到事件2的一个移动，

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= (c\Delta t')^2 \qquad \text{in } S' \\ &= (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad \text{in } S\end{aligned}$$

微分

$$(cdt')^2 = (cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (c^2 - v^2)dt^2$$

$$\Rightarrow \boxed{dt' \equiv d\tau} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt = \sqrt{1 - \beta^2}dt < dt$$

运动的时钟变慢!

原时 (Proper Time) 与事件位于同处的时钟所测时间

四矢量与闵氏空间

- 我们可以用四矢量来表示时空中的一个事件（*t, x, y, z*）

  光速 *c* 的引入是为了让四个分量的量纲一致

  在一般的四维欧氏空间中，这一矢量的长度为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

物理上不使用！

- 在闵可夫斯基（Minkowski）空间，定义矢量的长度为，

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^T \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \boldsymbol{x} = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

时空间隔！

- 定义度规 ***g***

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{g} \boldsymbol{x} = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

  欧氏空间 ***g* = *1***

<u>闵氏空间任意四矢量的长度在所有惯性系下保持不变！</u>

惯性系间的线性变换

- 两个不同的惯性系 S 和 S' 是怎样联系在一起的呢?

  非相对论情况下，通过伽利略变换联系

  在三维欧氏空间，伽利略变换保持三矢量长度不变。

- 在相对论情况下，

  我们需要一种变换保持时空间隔 $(\Delta s)^2$ 不变

  我们需要这种变换保持闵氏空间的四矢量长度不变

- 这种变换当然一定是线性变换

  因为，两个这种变换相继作用，依然得到这种变换

$$(ct, x, y, z) \xrightarrow{L} (ct', x', y', z') \xrightarrow{L'} (ct'', x'', y'', z'')$$

惯性系1　　惯性系2　　惯性系3

庞加莱变换

- 任意一个线性变换均可写为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$$

庞加莱变换

$\boldsymbol{a}$ 代表参考系原点的平移，当然不会涉及物理后果。

- 我们忽略平移部分，只考虑 ***L*** 变换

即洛伦兹变换或齐次洛伦兹变换

两个“洛伦兹”

H. Lorentz 洛伦兹变换

L. Lorenz 洛伦兹规范

洛伦兹变换

- 现在，我们考虑 $x' = Lx$

L 是一个4×4的矩阵

- L 变换保持四矢量的长度不变

$$|x|^2 = x^T g x \equiv |x'|^2 = x'^T g x' = x^T L^T g L x \Rightarrow L^T g L = g$$

写成分量形式

$$L_{ji} g_{jk} L_{kl} = g_{il}$$

对应16个实数方程

对应 L 的行列式为 ±1

g 是对称阵 —〉16个方程中有6个方程是重复的 —〉10个约束

$\Rightarrow$ L 变换有6个自由度

空间转动

- 空间转动 ***A*** 保持三维矢量的长度不变

- 很容易看出当 ***L*** 仅对应一个空间转动时，也能保持四矢量的长度不变

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}|^2 = = \underbrace{c^2t^2}_{\text{不作用}} - \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\text{保持不变}} = \text{const}$$

三维空间转动是齐次洛伦兹变换的一个子集

三维转动具有3个自由度（欧拉角）

⇒ 齐次洛伦兹变换 ***L*** 一定还有另外 3个自由度

洛伦兹推促 (Boost)

- 考虑两个惯性系 *S* 和 *S'*

  在*S* 中观察，*S'* 的原点以常速度 ***v*** 运动

  $(x', y', z') = 0$ ➡ $x = v_x t$ $y = v_y t$ $z = v_z t$

- **总可以**将*S* 和 *S'* 进行转动，使它们的*x* 和 *x'* 轴与常数速度 ***v*** 平行，此时，*y* 与*y'*，*z*与*z'*都是相互平行的

  “总可以” 这样做，因为空间转动是齐次洛伦兹变换的一个子集

只涉及*x*方向与时间*t*的混合；*y*，*z* 保持不变

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & 0 & 0 \\ L_{10} & L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

洛伦兹推促 (Boost)

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & 0 & 0 \\ L_{10} & L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 作为洛伦兹变换，必须满足 $\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{g} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}$

$\Rightarrow$ $L_{00}^2 - L_{10}^2 = 1$ $\quad L_{01}^2 - L_{11}^2 = -1$ $\quad L_{00}L_{01} - L_{10}L_{11} = 0$

- 在参考系*S’*中观察，*S’*的原点当然满足 $x' = 0$ $\Rightarrow$ $0 = L_{10}ct + L_{11}x$

  在参考系*S* 中观察，*S’*的原点当然满足 $x = vt$ $\Rightarrow$ $\beta \equiv \dfrac{v}{c} = -\dfrac{L_{10}}{L_{11}}$

符号的不确定性?

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$L_{00}L_{01} - L_{10}L_{11} = 0 \Rightarrow L_{00}^2 L_{01}^2 = L_{10}^2 L_{11}^2 \Rightarrow (1+\beta^2 L_{11}^2)(L_{11}^2 - 1) = \beta^2 L_{11}^4$

符号的确定

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- 符号不确定性

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta \\ \mp\gamma\beta & \pm\gamma \end{pmatrix}$$

ct' 的符号不确定性

x' 的符号不确定性

- 取低速极限 $\beta \to 0, \quad \gamma \to 1$

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gamma & \mp\gamma\beta \\ \mp\gamma\beta & \pm\gamma \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

应该是一个单位矩阵

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

时空反演

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

- 其它符号的物理含义

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ \gamma\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

对应空间反射

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

对应时间反演

- 这两个变换将时空取反向

  物理定律应当保持不变

  变换不是连续变换，是离散变换

  行列式为 -1 （非恰当洛伦兹变换，暂不考虑）

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-\gamma\beta) \begin{vmatrix} \gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\gamma^2 + \gamma^2\beta^2 = -1$$

洛伦兹推促的一般形式

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 我们得到了沿 *x* 方向的洛伦兹推促的形式
- 可以通过旋转参考系 *S* 和 *S*'，得到其他任意方向的推促
- 也可以通过矢量运算得到

我们将一个三维矢量 ***r*** 分解为两部分：平行于速度***v***的部分+垂直于速度***v***的部分

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = \frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} \qquad \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\parallel}$$

平行方向的推促变换与*x* 方向类似，而垂直方向不变

$$ct' = \gamma ct - \gamma\beta|\boldsymbol{r}_{\parallel}| = \gamma ct - \gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{r}' = -\gamma\boldsymbol{\beta}ct + \gamma\boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp} = -\gamma\boldsymbol{\beta}ct + \boldsymbol{r} + \frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}(\gamma-1)}{\beta^2}$$

恰当洛伦兹变换

- 显式的写为矩阵形式

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

3个自由度 $(\beta_x,\beta_y,\beta_z)$

纯推促洛伦兹变换的一般形式

洛伦兹变换的小结

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

- 恰当洛伦兹变换 ***L***

  3 个自由度 ***β***,

  纯推促、无空间转动

- 齐次洛伦兹变换 ***LA***

  A 是一个三维空间转动

  3 + 3 = 6 个自由度

  参考系原点保持不变

- 庞加莱变换 ***x'*** = ***LAx*** + ***a***

  a 平移坐标原点

  6 + 4 = 10 个自由度

  满足狭义相对论的惯性系变换的最一般形式。

纯推促洛伦兹变换的性质

$$
\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}
\gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\
-\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\
-\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\
-\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2}
\end{pmatrix}
$$

- 当 $\boldsymbol{\beta}$ —> 0 时，***L* —> *1***
- 当 $\boldsymbol{\beta}$ —> -$\boldsymbol{\beta}$ 时，***L* —> *L*$^{-1}$**

$$
\begin{pmatrix}
\gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\
-\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\gamma & \gamma\boldsymbol{\beta}^T \\
\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbf{1}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T}{\beta^2}
\end{pmatrix}
=\mathbf{1}
$$

验证！

- ***L*** 矩阵是对称的

  我们知道，空间转动 ***A*** 不是对称的

- 所以齐次洛伦兹变换 ***LA*** 矩阵并无对称性可言

两次变换：速度叠加

- 两个纯推促变换 ***L*** 和 ***L'*** 相继操作

  如果 ***β*** 和 ***β***' 的方向是平行的，我们总可以定义其方向为 *x* 方向

$$\boldsymbol{L'L} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma'\beta' \\ -\gamma'\beta' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'\gamma(1+\beta'\beta) & -\gamma'\gamma(\beta+\beta') \\ -\gamma'\gamma(\beta+\beta') & \gamma'\gamma(1+\beta'\beta) \end{pmatrix}$$

只显示了 *ct* 和 *x* 方向

- 令 $\beta'' = \dfrac{\beta+\beta'}{1+\beta'\beta}$ 速度叠加

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{L'L} = \begin{pmatrix} \gamma'' & -\gamma''\beta'' \\ -\gamma''\beta' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

当然，也可证明对于任意***β*** 和 ***β***'， $|\beta''| < 1$

两次变换：速度叠加

- 两个纯推促变换 ***L*** 和 ***L'*** 相继操作

  如果 ***β*** 和 ***β***' 的方向**不是平行的**，例如，***β*** 方向为 *x* 方向，***β***' 方向为 *y* 方向

$$
\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -\gamma'\beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma'\beta' & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'\gamma & -\gamma'\gamma\beta & -\gamma'\beta' \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ -\gamma'\gamma\beta' & \gamma'\gamma\beta'\beta & \gamma' \end{pmatrix}
$$

只显示了 *ct* 和 *x*, *y* 方向

- 这个矩阵是非对称的，显然，不能写成一个纯推促变换 ***L''***
- 显然，$\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$ 方向不同的纯推促变换是非对易的。

两次变换：速度叠加

- 一般地，***LL’*** 是非对称性矩阵

  两个恰当纯推促洛伦兹变换相乘不等于一个恰当纯推促洛伦兹变换

- 我们知道，齐次洛伦兹变换是保持四维矢量长度不变且不移动原点的线性变换

  两个齐次洛伦兹变换相乘自动满足上述条件

  所以，两个齐次洛伦兹变换相乘等于一个齐次洛伦兹变换

- 所以，两个恰当纯推促洛伦兹变换相乘**必须等于**一个齐次洛伦兹变换

  即，*LL’* = *L” A*

  亦即，纯推促 + 纯推促 = 纯推促 + 3D 空间转动

洛伦兹群

- 所有齐次洛伦兹变换构成一个闭合的群 （洛伦兹群）

  任意两个群元的乘积仍然是群元

- 所有三维空间转动变换构成一个闭合的群（转动群）[欧拉定理证明！]

  是洛伦兹群的一个子群

- 所有纯推促变换不能构成一个群!

四矢量

- 我们在四维时空中构造一个四维矢量 x^μ

$x^0 = ct$ $x^1 = x$ $x^2 = y$ $x^3 = z$

- 考虑一个在四维时空中运动的粒子

运动轨迹可以写为 $x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda)$

λ 是一个沿着运动轨迹单调变化的参数

例如，原时 τ 通常可选取为一个方便的λ

- 于是，在运动轨迹上的任意一点，都可以定义切向四动量，

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

称之为四速度

四速度

$\tau = \sqrt{1 - \beta^2} t$

- 设*S* 为观察者所在参考系，*S'* 为粒子的静止参考系，

  设*S* 中粒子运动的三速度为***v***，于是有

  $$x^0 = ct = \gamma c\tau \qquad x^i = v^i t = \gamma\beta^i c\tau = \gamma v^i \tau$$

  i = 1, 2, 3

- 定义四速度

  $$u^0 = \frac{\partial x^0}{\partial \tau} = \gamma c \qquad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tau} = \gamma v^i$$

  空间分量与三速度成正比

  四速度的长度

  $$u^0 u^0 - u^i u^i = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$$

  洛伦兹不变量！

  四速度是三速度***v*** 的相对论推广

  *c*² > *0*, 四速度是类时的。

四动量

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$$

- 将四速度乘以质量给出四动量

$$p^0 = mu^0 = m\gamma c \qquad p^i = mu^i = m\gamma v^i$$

空间分量是三动量的自然推广 $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$

时间分量对应能量 $E/c = p^0 = m\gamma c$ We will see …

- 四动量的长度是一个洛伦兹不变量

$$p^0p^0 - p^ip^i = m^2c^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2$$

- 定义动能

$$T = E - E_{v=0} = mc^2(\gamma - 1) = \sqrt{m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2} - mc^2 \quad \Rightarrow \quad T = mc^2(\gamma - 1) \to \infty$$

β —> 1

不可能通过加速的手段从某一低于光速的速度达到或超过光速！所需能量无穷大！

$$\Rightarrow \quad T = mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2}mv^2 + O(\beta^4)$$

Taylor 展开 β << 1 You see … 动能！

度规张量

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 一个坐标系总是建立在一组基矢量上的

$$u = u^\mu \boldsymbol{e}_\mu = u^0 \boldsymbol{e}_0 + u^1 \boldsymbol{e}_1 + u^2 \boldsymbol{e}_2 + u^3 \boldsymbol{e}_3$$

- 标量积 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ 可以写为

$$u \cdot v = u^\mu \boldsymbol{e}_\mu \cdot v^\nu \boldsymbol{e}_\nu \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$$

- 度规张量其实对应着基矢量的标量乘积

  故与基矢量的长度以及夹角有关

- 闵氏空间的度规是对角的，坐标轴总是相互正交的

  在弯曲时空中，度规可以有更复杂的形式，广义相对论。

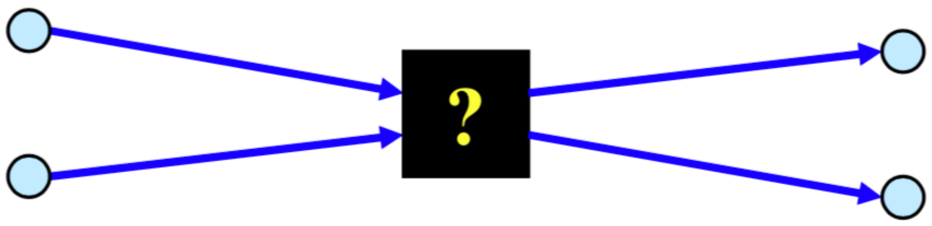
粒子碰撞

- 考虑两个粒子发生碰撞

  力的作用在仅碰撞时发生

  在碰撞前后均为自由运动

- 将碰撞过程当做一个黑箱子



- 我们不去研究黑箱子里发生了什么 （通常不是经典力学过程）

  我们只关注黑箱子外面的事情 ——〉 相对论运动学

  我们可以利用碰撞前后的四动量守恒原理

- 在不打开黑箱子的情况下，能了解多少物理呢?

动量中心系 （CoM）

- 考虑体系的总四动量，即总能量、总动量

$$p^{\mu}=\sum_{s=1}^{n}p_s^{\mu}=\left(\frac{E}{c},\boldsymbol{p}\right) \quad \Rightarrow \quad E=\sum_{s=1}^{n}E_s \qquad \boldsymbol{p}=\sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{p}_s$$

总四动量作为一个洛伦兹矢量，也满足洛伦兹变换

$$p'^{\mu}=\sum_s p_s'^{\mu}=\sum_s L^{\mu}_{\nu}p_s^{\nu}=L^{\mu}_{\nu}p^{\nu}$$

- 引入**动量中心系**

在这一参考系下，总四动量的空间部分 $\boldsymbol{p}=0$

在这一参考系下，“质心”是静止的

通常也称为 “质心系”

动量中心系（CoM）

- $$p^{\mu} = \sum_{s=1}^{n} p_s^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \rightarrow p'^{\mu} = \left(\frac{E'}{c}, \boldsymbol{0}\right)$$

  我们引入两个非常重要的物理量

- 动量中心系下的能量 *E'*

  根据洛伦兹不变性 $$p'^{\mu} p'_{\mu} = p^{\mu} p_{\mu} \rightarrow \frac{E'^2}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2$$

  E' 是体系可能的最小的 *E*

- 从实验室系到动量中心系的推促 ***β***

  $$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

  根据洛伦兹逆变换 （***β*** —> -***β***）

  $$p^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} p'^{\nu} = \left(\frac{\gamma E'}{c}, \frac{\gamma \boldsymbol{\beta} E'}{c}\right) \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{p}c}{E} \quad \gamma = \frac{E}{E'}$$

两粒子碰撞

- 考虑将粒子1（炮弹）打到粒子2 （固定靶）的情形

$$p_1 = (E_1/c, \boldsymbol{p}_1) \qquad p_2 = (m_2 c, \boldsymbol{0})$$

- 总四动量： $p = (E_1/c + m_2 c, \boldsymbol{p}_1)$

- 总 CoM 能量

$$m^2c^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2$$

$$E'^2 = p^\mu p_\mu c^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1 m_2 c^2$$

E’ 随着 E_1 缓慢增加！

- 从实验室系到COM的推促

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{p}_1}{E_1/c + m_2 c} = \frac{m_1\gamma_1\boldsymbol{v}_1}{m_1\gamma_1 c + m_2 c}$$

E_1 很大时，$\boldsymbol{\beta}$ —> $\boldsymbol{v_1}/c$

生成阈值

- 假设我们要通过两个粒子的碰撞来产生一种新粒子

粒子1 + 粒子2 —〉 粒子3

- 总四动量 $p = p_1 + p_2 = p_3$

$m^2c^2 = p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2$

- 总 CoM 能量 $E'^2/c^2 = p_3^\mu p_{3\mu} = m_3^2c^2$ → $E' = m_3c^2$

质心系下的能量 E' 必须达到新粒子3的质能!

- 我们需要给粒子1提供多少能量呢?

$$E'^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1m_2c^2 = m_3^2c^4 \rightarrow E_1 = \frac{(m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2}$$

在 m_3 很大的情况下，E_1 几乎随 m_3 的平方增加!

固定靶 VS 对撞机

- 考虑将一个质子加速去轰击另一个质子，来产生 Higgs 粒子

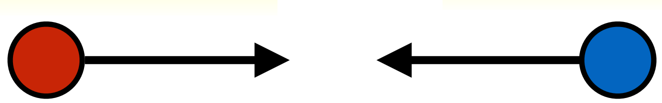
设Higgs 粒子比质子重 *X* 倍

$$E_1 = \frac{(m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2} \approx \frac{X^2}{2} m_p c^2$$

当 *X* >*100* 时，我们需要一个 >*5000* GeV 的加速器

- 对撞机会更加有效率

$$p_1 = (E_1/c, \boldsymbol{p}_1) \qquad p_2 = (E_2/c, \boldsymbol{p}_2)$$



$$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$$

实验室系正是动量中心系

$$p = \left(\frac{E_1 + E_2}{c}, \boldsymbol{0} \right)$$

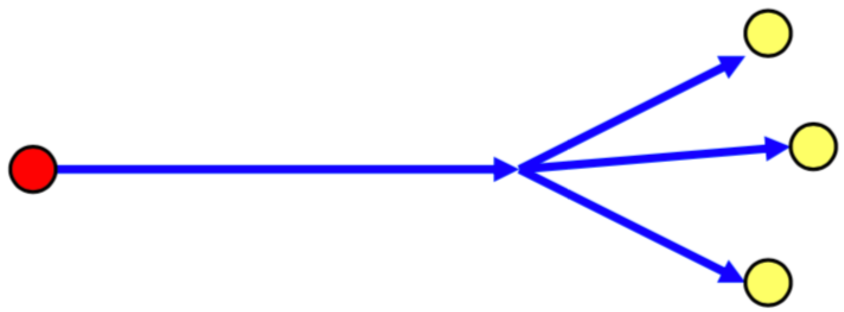
需要能量

$$E_1 + E_2 = m_3 c^2 = X m_p c^2$$

50 GeV + 50 GeV

粒子衰变

- 许多微观粒子是不能稳定存在的，会在一定时间内衰变



$$p^\mu = \sum_i p_i^\mu$$

- 通过计算动量中心系下的总能量，可以从衰变产物的四动量推出母粒子的质量

$$p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu = E'^2/c^2 = m^2c^2$$

也称为体系的“**不变质量**”！

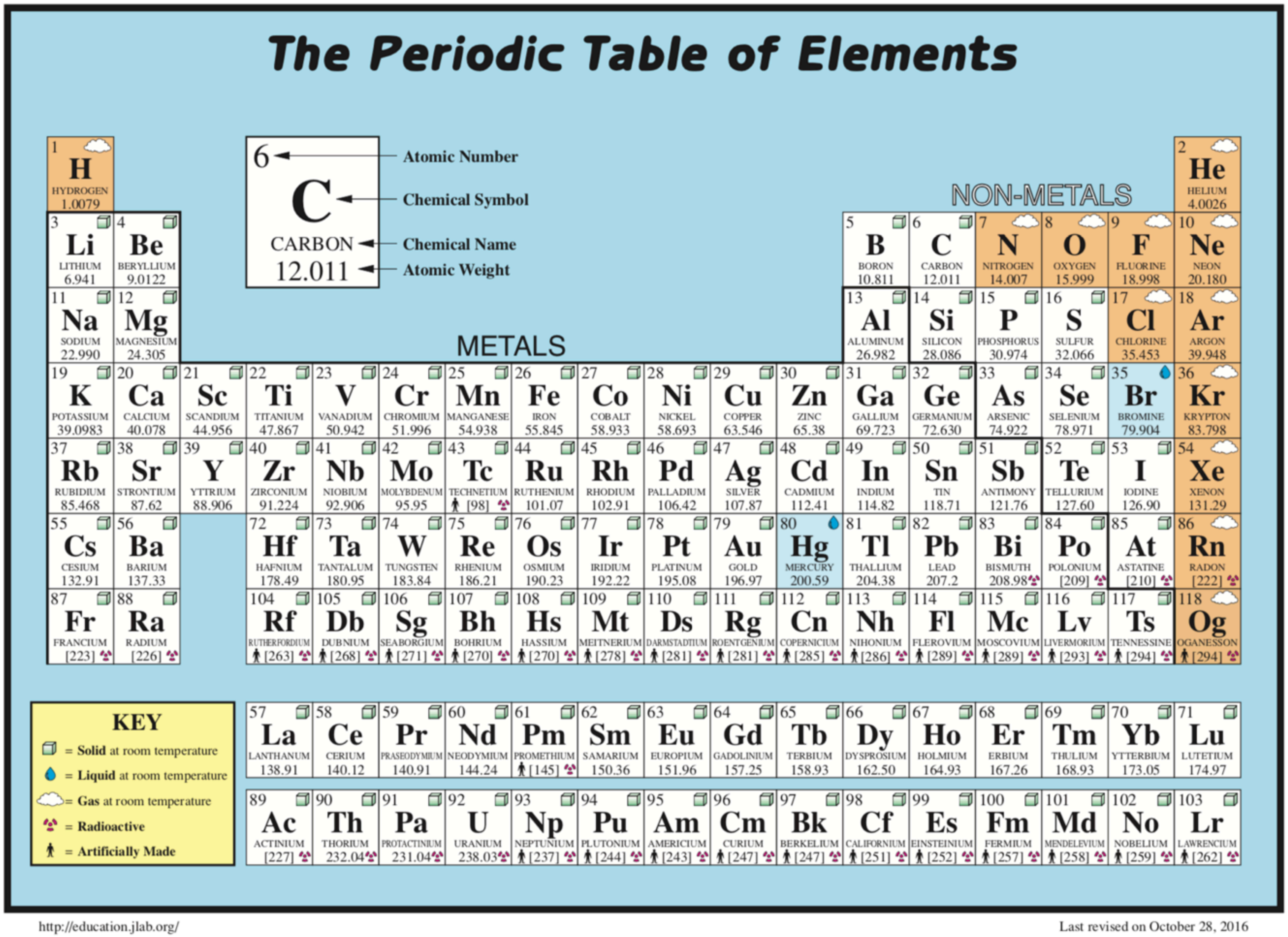
- 在实验上，经常用来确定发现的新粒子，这些粒子寿命很短，无法进行直接测量

  测量所有稳定衰变产物的三动量，由于产物的质量已知，可计算其四动量

  进而计算不变质量 —〉检验是否与期待的新粒子质量一致?

超重核合成

超重元素 119? 120? …



超重核合成

- 超重原子核的实验观测

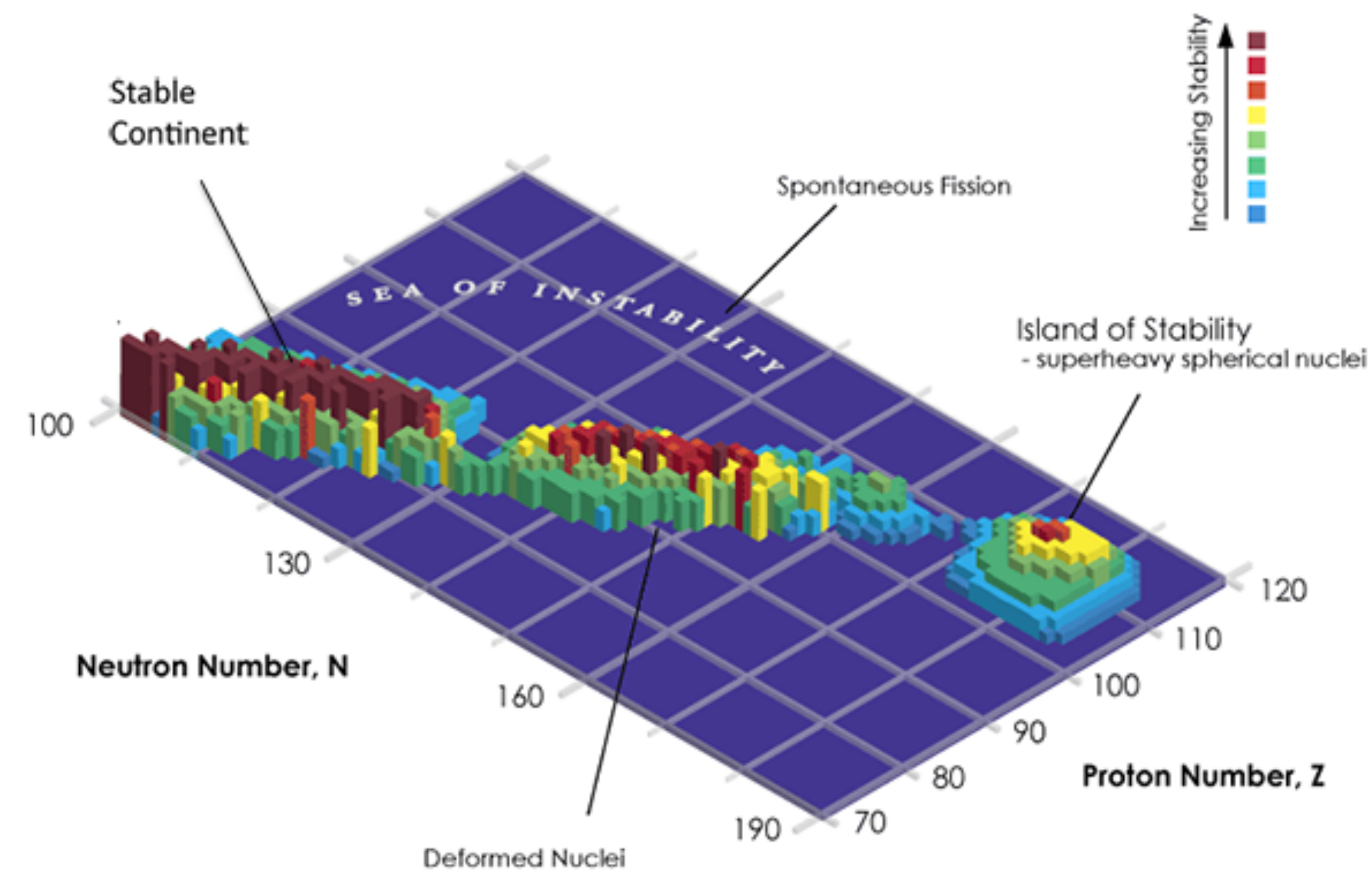
  可以存在的最重元素是什么?

- 玻尔模型:

  电子速度 $v \sim Z\alpha c$ —〉 $Z \sim 137$

- 量子电动力学:$Z \sim 173$

- 超重核合成实验



$^{278}\text{Nh} \xrightarrow{\alpha} {}^{274}\text{Rg} \xrightarrow{\alpha} {}^{270}\text{Mt} \xrightarrow{\alpha} {}^{266}\text{Bh} \xrightarrow{\alpha} {}^{262}\text{Db} \xrightarrow{\alpha} {}^{258}\text{Lr} \xrightarrow{\alpha} {}^{254}\text{Md}$

总结

- 洛伦兹变换：一个在闵氏空间保持4维矢量长度不变的线性变换
- 物理量的协变形式： 四速度、四动量、度规张量
- 相对论运动学：

  动量中心系，动量中心能量，不变质量

  新粒子的产生阈值，对撞实验

  粒子衰变