理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 辛几何
- 泊松括号
- 泊松括号是正则变换不变量

相空间

力学体系	函数	坐标	维度	空间
牛顿	$F(x_i, \dot{x}_i)$	x_i	$3N$	位置空间
拉格朗日	$L(q_j, \dot{q}_j, t)$	q_j	n	位形空间
哈密顿	$H(q_j, p_j, t)$	(q_j, p_j)	$2n$	相空间

- n 维位形空间可以视为嵌入在 3N 维位置空间中的 n 维微分流形
- n 维位形空间中每一个点上都有一个 n 维切空间 (广义速度) 以及 n 维余切空间(广义动量)，二者互为对偶空间(dual space)
- n 维位形空间的所有点上的切空间 构成一个 2n 维切丛 (n个坐标表示点的位置，n个坐标 表示切矢量分量)
- n 维位形空间的所有点上的余切空间构成一个 2n 维余切丛 (n个坐标表示点的位置，n个坐标 表示余切矢量分量)，**即相空间**
- 相空间是一个具备特定结构的微分流形，称为辛流形：
  “点”对应系统的“状态”；“几何结构”对应系统的“运动规律

正则方程的结构

- 正则方程的**辛结构**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

为什么有一个负号呢?

- 从哈密顿原理来看，应该与辛势有关

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\boxed{p_i dq_i}}_{\text{辛势}} - H(q,p,t)dt = 0$$

- 辛势 Θ 是一个 1-形式, 其外微分是辛形式，也是一个2-形式，记为 ω

$$\Theta = p_i dq^i \qquad \omega = d\Theta = dp_i \wedge dq^i$$

流形上的微分形式

- 考虑一个二元函数的二重积分，坐标变换后要多乘一个雅可比行列式

$$A = \int\int f(x,y)dxdy = \int\int f(x,y)\left|M\right| dx'dy'$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix}$$

- 将积分元写为 $dx \wedge dy$，定义一种巧妙的外代数乘法 $\wedge$，即外积，满足

$$dx \wedge dy = -\,dy \wedge dx$$

交换反对称!

- 显然，

$$dx \wedge dx = -\,dx \wedge dx = 0$$

$$dy \wedge dy = -\,dy \wedge dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \int f(x,y)dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'}dx' + \frac{\partial x}{\partial y'}dy'\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial x'}dx' + \frac{\partial y}{\partial y'}dy'\right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'}dx' \wedge dy' + \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}dy' \wedge dx' \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x'}\right) dx' \wedge dy' \\ &= |M|\, dx' \wedge dy'. \end{aligned}$$

雅可比行列式!

k-形式

- 推广到 n 元函数的 n 重积分，实际上是对 n 重微分形式 ω 的积分。

$$A = \int f(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int \omega$$

简称 n-形式！

- 针对 n 个变量，推广n-形式的概念，可定义 k 重微分形式, 即 k-形式 α

$$\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} .$$

上下指标求和约定；α的k个指标能取1到n，且两两不同，代表α的一个分量；任何 $k > n$ 的k-形式都必定为零；α的k个指标两两交换反对称

以 2-形式为例

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

$$\alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j = \alpha_{ji} dx^i \wedge dx^j = -\alpha_{ji} dx^j \wedge dx^i = -\alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j = 0$$

关于i, j 对称的部分贡献为零，只有反对称的部分有贡献

$$\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$$

三维空间中的微分形式

- 三维空间有 3 个变量，所以有 0-，1-，2-，3- 形式。

$$\alpha = \frac{1}{k!}\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

- 0-形式是一个三元标量函数 $f(x, y, z)$;

  由于反称性，3-形式只有一个独立的非零分量 $f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$

- 1-形式可以写成 $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz = \boldsymbol{a}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{x}$

  3个独立分量恰好组成一个3维矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$

- 2-形式可以写成 $a = \frac{1}{2}a_{ij}dx^i \wedge dx^j = a_{12}dx \wedge dy + a_{23}dy \wedge dz + a_{31}dz \wedge dx$

  也只有3个独立非零分量，对应一个3维矢量场

  可与1-形式一一映射 （叉乘）

- k-形式和 n-k形式之间的一一映射关系：霍奇（Hodge）对偶。

外微分

- 外微分是一种巧妙地将微分运算与外代数运算结合在一起的运算。
- 对于 n 维空间的一个 k-1 形式

$$\alpha = \frac{1}{(k-1)!}\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

可以定义其外微分为

$$d\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

- 显然，$d\alpha$ 是一个 k-形式，且满足

$$d^2\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_i \partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} = 0$$

任何微分形式的两阶外微分为零！

斯托克斯公式

- 考虑2维空间的1-形式 $a = a_x dx + a_y dy$，其外微分为

$$da = da_x \wedge dx + da_y \wedge dy$$

$$d\alpha = \frac{1}{(k-1)!}(\partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

- 具体地，

$$\begin{aligned} da &= da_x \wedge dx + da_y \wedge dy \\ &= (\partial_x a_x dx + \partial_y a_x dy) \wedge dx + (\partial_x a_y dx + \partial_y a_y dy) \wedge dy \\ &= \partial_y a_x dy \wedge dx + \partial_x a_y dx \wedge dy \\ &= (\partial_x a_y - \partial_y a_x) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

- 显然，da 只有一个分量，刚好是两维矢量 **a** 的旋度。

二维旋度定理：格林公式

闭合环路积分等于旋度的区域面积积分！

$$\oint_{\partial D} \left(a_x dx + a_y dy\right) = \int_D \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right) dx\, dy$$

斯托克斯公式:

可推广至 n维空间

$$\int_{\partial D} a = \int_D da$$

微分形式的语言理解保守力

- 保守力是一个1-形式，且是另一个微分形式（0-形式）的外微分

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i = -\,dV \qquad F_\mu dx^\mu = -\,dV(x^1, \ldots, x^{3N})$$

- 两阶外微分为零，可知

$$dF = 0 = (\partial_\mu F_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \left[\frac{1}{2}\underline{(\partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu)} + \cancel{\frac{1}{2}(\partial_\mu F_\nu + \partial_\nu F_\mu)}\right] dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}}$$

旋度为零

- 根据斯托克斯公式，

$$\int_{\partial D} F = \int_D dF = 0$$

保守力1-形式在坐标空间任何闭合回路上的积分都为零！

保守力做功与路径无关！

正则方程的辛结构

- 正则方程的**辛结构**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

为什么有一个负号呢?

- 从哈密顿原理来看，应该与辛势有关

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\boxed{p_i dq_i}}_{\text{辛势}} - H(q,p,t)dt = 0$$

- 辛势 Θ 是一个 1-形式, 其外微分是2-形式，亦称辛形式，记为 ω

$$\Theta = p_i dq^i \qquad \omega = d\Theta = dp_i \wedge dq^i$$

交换 p, q 出一个负号!

相空间的辛结构

- 将 q 和 p 集合在一个变量中：

$$\eta^j = q^j, \quad j = 1, \cdots, n,$$
$$\eta^j = p_{j-n}, \quad j = n+1, \cdots, 2n\,.$$

$$\boldsymbol{\omega} = dp_a \wedge dq^a \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j$$

- 这时正则方程可写为： **一列 = 矩阵 * 一列**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{\eta}^j = \omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$\omega^{-1} = \{\omega_{jk}\} = -\omega = \omega^T$$

故，亦可表为

$$\omega_{jk}\dot{\eta}^k = \frac{\partial H}{\partial \eta^j},$$

正则变换作为相空间坐标变换

- 考虑一个正则变换 $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\xi}$

$$\dot{\eta}^j = \omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k},$$

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\dot{\eta}^j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\omega^{jk}\frac{\partial \xi^l}{\partial \eta^k}\frac{\partial H}{\partial \xi^l} = M^i{}_j\omega^{jk}(M^T)_k{}^l\frac{\partial H}{\partial \xi^l}$$

$$M^i{}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}$$

$$\Rightarrow \quad M\omega M^T = \omega$$

验证：这实际上就是直接条件！

正则变换是一个保辛的坐标变换

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

正则变换作为相空间的微分同胚映射

- 微分同胚意味着微分流形之间可通过光滑函数建立一一映射。
- 正则变换是相空间映射到其自身的、保持辛结构的微分同胚。
- 考虑一个自同胚映射 g，将相空间的 $\boldsymbol{\eta}$ 点映射到 $\boldsymbol{\xi}$ 点

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j \quad \overset{\text{保辛}}{\underset{\omega' = \omega}{\Longleftrightarrow}} \quad \boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j$$

ω_{ij} 是常系数，不变

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{ij} d\eta^i \wedge d\eta^j = \boldsymbol{\omega}_{mn} d\xi^m \wedge d\xi^n = \boldsymbol{\omega}_{mn} \frac{\partial \xi^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^n}{\partial \eta^j} d\eta^i \wedge d\eta^j$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{ij} = \boldsymbol{\omega}_{mn} \frac{\partial \xi^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^n}{\partial \eta^j}$$

这就是直接条件！

$$\omega^{ij} = \omega^{mn} \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^n}$$

泊松括号

- 定义两个函数 *u, v* 关于正则变量 *(q, p)* 的泊松括号

$$[u,v]_{q,p} \equiv \frac{\partial u}{\partial q^i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q^i}$$

- 这是一个神奇的括号，对应于量子力学中算符的对易子

$$\frac{1}{i\hbar}[u,v] \equiv \frac{1}{i\hbar}(uv - vu)$$

- 若*u, v, w* 为正则变量的函数，*a, b* 为常数，有以下恒等式：

$$[u,u] = 0 \qquad [u,v] = -[v,u]$$

证明 这些恒等式！

$$\left[au + bv, w\right] = a[u,w] + b[v,w]$$

$$[uv,w] = [u,w]v + u[v,w]$$

莱布尼兹法则

$$\left[u,[v,w]\right] + \left[v,[w,u]\right] + \left[w,[u,v]\right] = 0$$

雅可比恒等式！

泊松括号

- 利用统一的正则变量，泊松括号可写为

$$\eta^j = q^j, \quad j = 1, \cdots, n,$$
$$\eta^j = p_{j-n}, \quad j = n+1, \cdots, 2n.$$

$$[u, v]_{q,p} \equiv \frac{\partial u}{\partial q^i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q^i}$$

$$[u, v] \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta^i}\omega^{ij}\frac{\partial v}{\partial \eta^j} = (\partial_i u)\omega^{ij}(\partial_j v)$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

- 若*u, v, w* 为正则变量的函数，*a, b* 为常数，有以下恒等式：

$$[uv, w] = [u, w]\, v + u\, [v, w]$$

[A, B] 具有 $(A^i\partial_i)B$ 的形式，可看作对*B*的特定偏导运算

$$\left[u, [v, w]\right] + \left[v, [w, u]\right] + \left[w, [u, v]\right] = 0$$

证明练习！

基本泊松括号

- 考虑正则变量 (q, p)本身的泊松括号

$$\omega = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$\left[q^j, q^k\right] = \frac{\partial q^j}{\partial q^i}\frac{\partial q^k}{\partial p_i} - \frac{\partial q^j}{\partial p_i}\frac{\partial q^k}{\partial q^i} = 0$$

$$\left[p_j, p_k\right] = 0$$

称为基本泊松括号

$$\left[q^j, p_k\right] = \frac{\partial q^j}{\partial q^i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q^j}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial q^i} = \delta^j_k$$

$$\left[p_k, q^j\right] = -\,\delta^j_k$$

$$\left[\eta^j, \eta^k\right] = \omega^{jk}$$

- 我们考虑一个正则变换，相应的基本泊松括号怎样变换呢?

$$q, p \longrightarrow Q, P$$

$$[q, p]_{q,p} \longrightarrow [Q, P]_{q,p}$$

$$\omega^{ij} = \omega^{mn}\frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^n}$$

正则变换是保辛的!
所以应该也是保持基
本泊松括号不变的!

基本泊松括号和正则变换

$$\left[Q_j, Q_k\right]_{q,p} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_j}{\partial P_k} = 0$$

$$\left[P_j, P_k\right]_{q,p} = \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_j}{\partial Q_k} = 0$$

$$\left[Q_j, P_k\right]_{q,p} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} = \delta_{jk}$$

$$\left[P_j, Q_k\right]_{q,p} = -\left[Q_k, P_j\right]_{q,p} = -\delta_{jk}$$

利用了直接条件

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)_{Q,P}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P} \qquad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)_{Q,P}$$

- **基本泊松括号在正则变换下是不变的！**

泊松括号和正则变换

- 任意两个函数之间的泊松括号在正则变换下如何变换呢?

$$
\begin{aligned}
[u,v]_{Q,P} &\equiv \frac{\partial u}{\partial Q_i}\frac{\partial v}{\partial P_i} - \frac{\partial u}{\partial P_i}\frac{\partial v}{\partial Q_i} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial P_i} + \frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial q_k}\left[q_j, q_k\right]_{Q,P} + \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\left[q_j, p_k\right]_{Q,P} + \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_k}\left[p_j, q_k\right]_{Q,P} + \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\left[p_j, p_k\right]_{Q,P} \\
&= \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_k}\delta_{jk} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_k}\delta_{jk} \\
&= [u,v]_{q,p}
\end{aligned}
$$

所有泊松括号都是正则变换不变量

如果我们总是使用正则变量，则没必要指明定义泊松括号时所用的变量组

$$[u,v]_{q,p} \rightarrow [u,v]$$

泊松括号和正则变换

- 任意两个函数之间的泊松括号在正则变换下如何变换呢?

$$[u,v] = (\partial_i u)\omega^{ij}(\partial_j v)$$

$$[u,v]_{q,p} = (\partial_j u)(\partial_k v)\left[\eta^j,\eta^k\right]_{q,p}$$

$$\omega^{ij} = \omega^{mn}\frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^m}\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^n}$$

$$[u,v]_{Q,P} \equiv \frac{\partial u}{\partial \xi^j}\frac{\partial v}{\partial \xi^k}\left[\xi^j,\xi^k\right]_{Q,P} = \frac{\partial u}{\partial \xi^j}\frac{\partial v}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^m}\frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^n}\left[\eta^m,\eta^n\right]_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial \eta^m}\frac{\partial v}{\partial \eta^n}\left[\eta^m,\eta^n\right]_{q,p} = [u,v]_{q,p}$$

所有泊松括号都是正则变换不变量

如果我们总是使用正则变量，则没必要指明定义泊松括号时所用的变量组

$$[u,v]_{q,p} \rightarrow [u,v]$$

总结

- 辛几何

  正则变换保辛

- 泊松括号

  正则变换保泊松括号