

理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 泊松括号运动方程：守恒量
- 无穷小正则变换：连续对称性
- 哈密顿力学中的对称性与守恒律

$$0 = \delta H = \varepsilon [H, G] - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = \varepsilon \left([H, G] - \frac{\partial G}{\partial t} \right) = -\varepsilon \frac{dG}{dt} = 0$$

对称性

守恒量

对称性与守恒律：拉格朗日VS哈密顿

力学体系	变换空间	不变量	守恒量
拉格朗日力学	n 维位形空间	拉格朗日 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$	诺特荷
哈密顿力学	$2n$ 维相空间	哈密顿量 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$	生成元

- 所谓对称性是指力学性质在特定“变换”下保持“不变”
- 拉格朗日力学中，“变换”在 n 维位形空间中进行，“不变”由拉格朗日量体现，“守恒量”表示为诺特荷

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \quad \underline{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}$$

点变换

$$\delta L = 0, \quad \text{or} \quad \delta L = \frac{dF(\mathbf{q}, t)}{dt}$$

$\dot{\mathbf{Q}}$ 显含 $\dot{\mathbf{q}}$, 对称性依赖于运动方程；动力学对称性；隐式对称性

- 哈密顿力学中，“变换”在 $2n$ 维相空间中进行，“不变”由哈密顿量体现，“守恒量”表示为生成元

主动正则变换

$$\delta H = 0$$

开普勒问题：角动量守恒

- 在拉格朗日力学中，拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$C_m = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} Q_j$$

- 空间旋转对应变换 (以绕 z 轴转动为例，其他轴类似)

$$\delta x = -\varepsilon y, \quad \delta y = \varepsilon x, \quad \delta z = 0$$



$$\delta L = 0$$

空间旋转对称性!

- 根据诺特定理，对称性对应的诺特荷守恒

$$C_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} Q_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} Q_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} Q_z = -m\dot{x}y + m\dot{y}x = L_z$$

- 其他方向类似，对应 L_x, L_y 守恒。(练习)

开普勒问题：LRL矢量守恒

- 考虑到角动量守恒，构造如下变换

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{L}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为无穷小常矢量 非点对称性！

- 引起的拉格朗日量的变化为

$$\delta L = m\dot{\mathbf{r}}\delta\dot{\mathbf{r}} - \frac{k}{r^2}\delta r = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{L}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r})$$

➔
$$\delta L = -\frac{mk}{r^3}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (r^2\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}) = -mk\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

相差一个规范项 dF/dt

- 上述变换生成了体系的对称性！

动力学对称性！ 隐式对称性！

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}/r)}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = \frac{r^2\dot{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{r\dot{r}\mathbf{r}}{r^3}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - F = \mathbf{p} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \mathbf{L}) + mk\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mk\hat{\mathbf{r}}]$$

non-Noether invariant

不对应点对称性

运动轨迹

- LRL 矢量垂直于角动量，故必在轨道平面内。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} &= Ar \cos \theta \\ &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mkr \\ &= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - mkr \\ &= l^2 - mkr \end{aligned}$$

$$Ar \cos \theta = l^2 - mkr$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right)$$

$$e = \frac{A}{mk} = \frac{|\mathbf{A}|}{mk}$$

θ 为 \mathbf{A} 与 \mathbf{r} 之间的夹角

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mkr}{r}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$$

A 为常数，圆锥曲线！

LRL矢量的大小与偏心率有关

运动轨迹

- LRL 矢量垂直于角动量，故必在轨道平面内。

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r} \right) \\ &= (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + m^2 k^2 - \frac{2mk\mathbf{r}}{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \\ &= p^2 l^2 + m^2 k^2 - \frac{2mk}{r} l^2 \\ &= \left(2mE + \frac{2mk}{r} \right) l^2 + m^2 k^2 - \frac{2mk}{r} l^2 \\ &= m^2 k^2 + 2mEl^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$

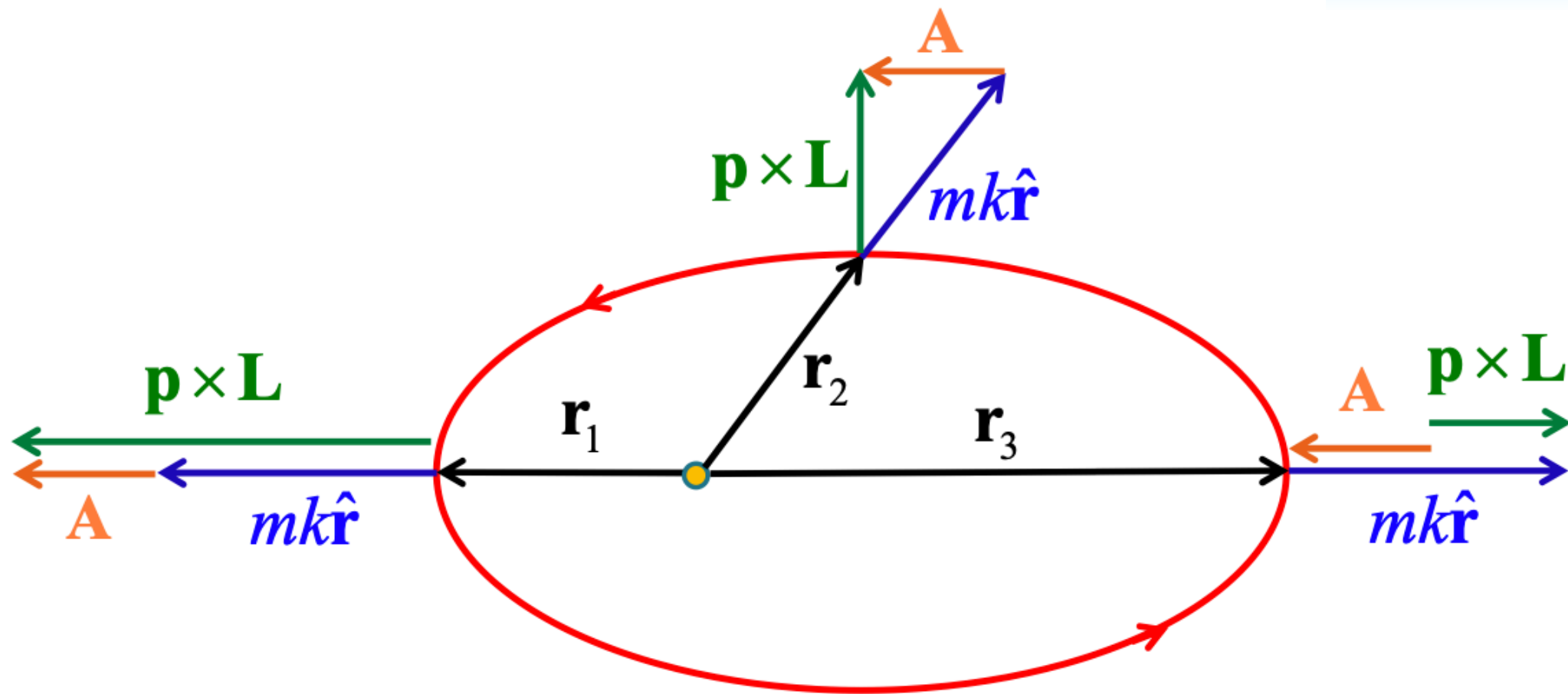
$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$e = \frac{A}{mk} = \frac{|\mathbf{A}|}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

开普勒问题 $E < 0$, $e < 1$

LRL 矢量守恒

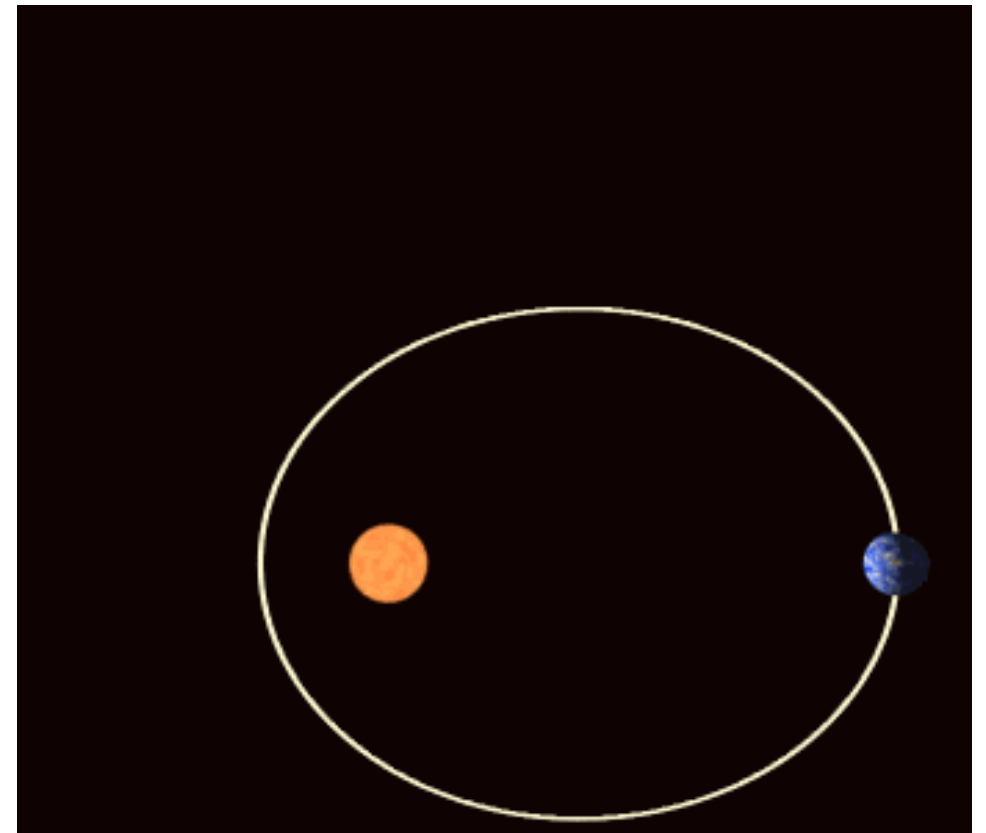
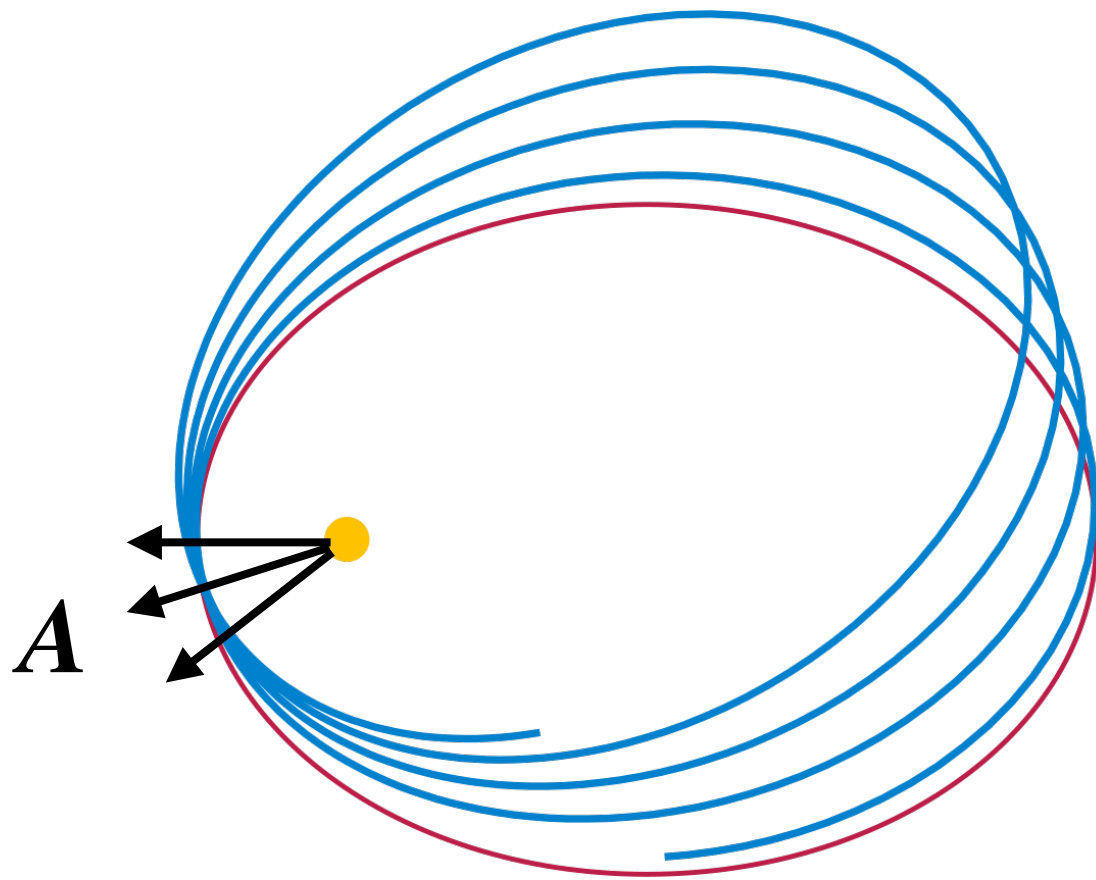
$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}$$



- LRL 矢量始终由力心指向近拱点方向 —> 近拱点固定 —> 有界轨道闭合

偏离平方反比力

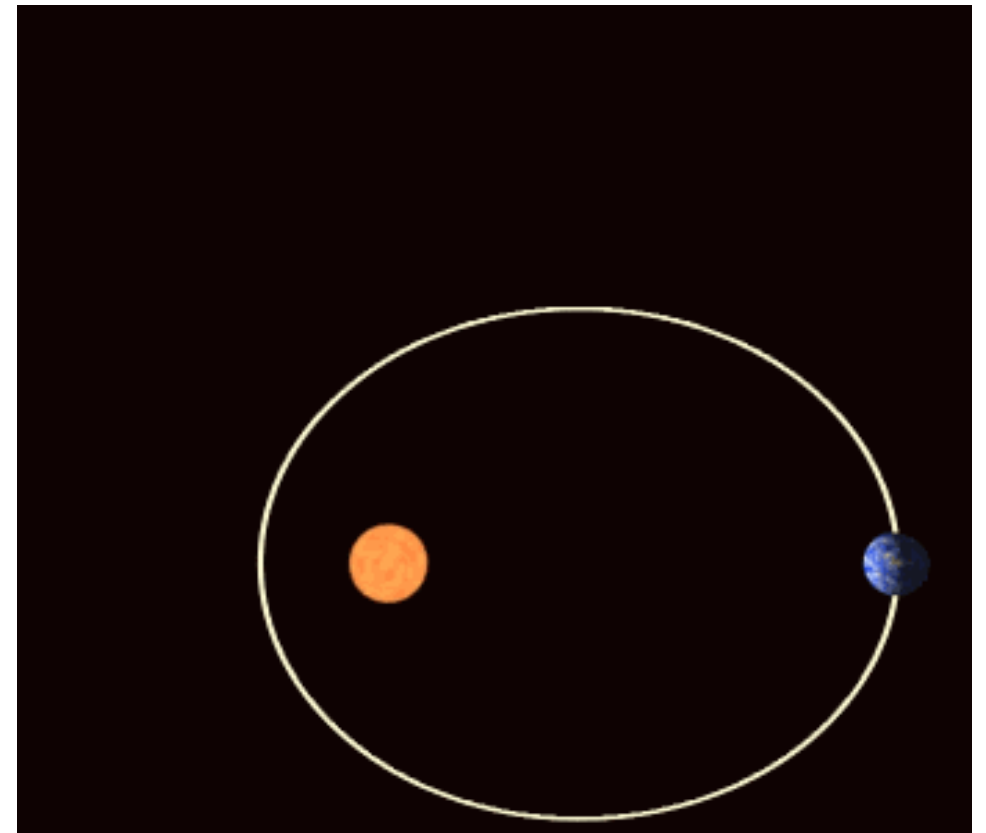
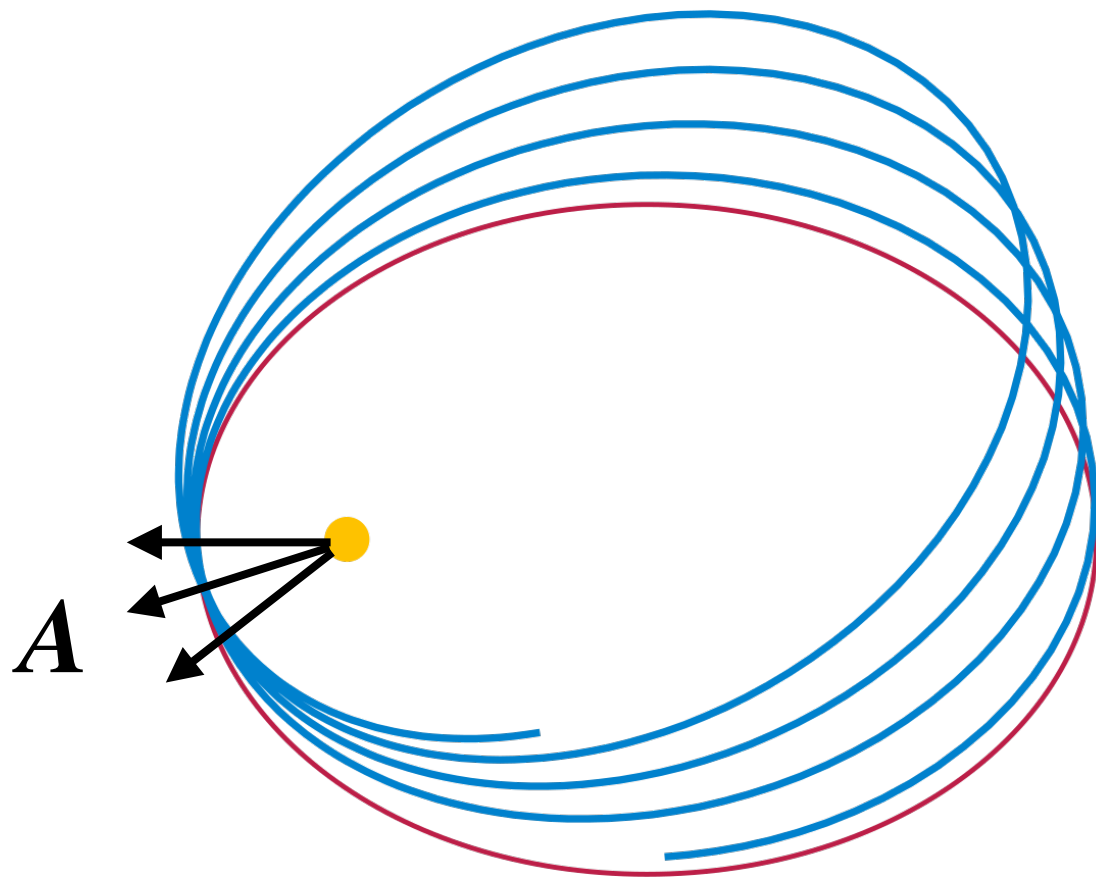
- LRL 矢量不再守恒，近拱点移动 \rightarrow 轨道不再闭合 行星轨道的进动



水星进动的解释：来自所有其他行星（大部分）以及广义相对论的修正（小部分）

偏离平方反比力

- LRL 矢量不再守恒，近拱点移动 \rightarrow 轨道不再闭合 行星轨道的进动



水星进动的解释：来自所有其他行星（大部分）以及广义相对论的修正（小部分）

开普勒问题：角动量守恒

- 在哈密顿力学中，哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

- 角动量与哈密顿量的泊松括号

$$\delta H = \varepsilon [H, G] - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

$$[L_i, H] = [H, L_i] = 0$$

角动量守恒！ 空间旋转对称性！

- 鉴于角动量的重要性，我们展开分析角动量相关的泊松括号。

无穷小转动

$$\delta u = \varepsilon [u, G] + \frac{\partial u}{\partial t} \delta t$$

- 转动的无穷小正则变换生成元为

$$G = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$$

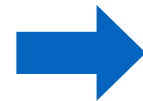
我们之前已经学过无穷小转动

将矢量 \mathbf{r} 绕 \mathbf{n} 轴转 $d\theta$ 可得

$$d\mathbf{r} = d\theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

比较两式可得：

$$d\mathbf{r} = d\theta [\mathbf{r}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = d\theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$



$$[\mathbf{r}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

此式对任意随系统转动的 \mathbf{r} 均成立！
非常有用的一个表达式！

标量积

- 考虑两矢量的标量积 $a \cdot b$

$$[r, L \cdot n] = n \times r$$

将之转动

$$\begin{aligned}[a \cdot b, L \cdot n] &= a \cdot [b, L \cdot n] + b \cdot [a, L \cdot n] \\ &= a \cdot (n \times b) + b \cdot (n \times a) \\ &= a \cdot (n \times b) + a \cdot (b \times n) \\ &= 0\end{aligned}$$

显然，转动不改变标量积；

显然，转动也不改变任一矢量的长度

$$\delta u = \varepsilon [u, G] + \frac{\partial u}{\partial t} \delta t$$

角动量

- 考虑角动量 $L \rightarrow [L, L \cdot n] = n \times L$

$$[r, L \cdot n] = n \times r$$

各分量为

$$[L_x, L_x] = 0$$

$$[L_x, L_y] = L_z$$

$$[L_x, L_z] = -L_y$$

$$[L_y, L_x] = -L_z$$

$$[L_y, L_y] = 0$$

$$[L_y, L_z] = L_x$$

$$[L_z, L_x] = L_y$$

$$[L_z, L_y] = -L_x$$

$$[L_z, L_z] = 0$$

推导要注意“矢量 = 矢量”!

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

三维转动群

这与量子力学中角动量的对易关系完全一致!

$$[p_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} p_k$$

$$[x_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} x_k$$

练习证明

$$[p_i, L_j] = \varepsilon_{lmj} [p_i, x_l p_m] = \varepsilon_{lmj} [p_i, x_l] p_m = -\varepsilon_{lmj} \delta_{il} p_m = \varepsilon_{ijm} p_m$$

角动量

- 考虑两个守恒量 A 和 B

$$[A, H] = [B, H] = 0$$

$[A, B]$ 如何随时间变化呢?

$$[[A, B], H] = -[[B, H], A] - [[H, A], B] = 0$$

推导用到 Jacobi 恒等式!

两个守恒量的泊松括号也是守恒量!

泊松定理

- 考虑 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

如果角动量 \mathbf{L} 的两个分量是守恒的, 则第三个分量必然也守恒

—> 总角动量 \mathbf{L} 是守恒的!

角动量

- 回想一下基本泊松括号

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$$

$$[q_i, p_j] = -[p_i, q_j] = \delta_{ij}$$

两个正则动量的泊松括号始终为零

现在，我们有 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

角动量 L 的任意两个分量之间的泊松括号均是非零的

角动量三个分量之中只有一个分量可作为正则动量！

或者说 角动量任意两个分量都不可能同时作为正则变量！

标量积

- 然而，注意到 $[L^2, L_i] = 0$ ，故 $|L|$ 可以为正则变量，或者说 L 的任何一个分量及其量值 L 可同时选作正则变量。

- 量子力学中，可以同时测量 $|L|$ 和如 L_z ，但不能同时测量 L_x 和 L_y ！

共同本征态！

开普勒问题的守恒量

- 哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$[a \cdot b, L \cdot n] = 0$$

- 角动量守恒

$$[L, H] = 0$$

$$[V(r), L] = 0$$

转动不影响径向函数

- 分析如下变换，易知其不满足正则变换

$$r \rightarrow r + \epsilon \times L, \quad p \rightarrow p$$

$$[r', p'] = [r, p] + [\epsilon \times L, p] = [r, p] + \epsilon \times [L, p] + [\epsilon, p] \times L \neq [r, p]$$

- 哈密顿力学中可用无穷小正则变换生成正则变换
需要给出一个生成元 G

$$\delta q_i = \epsilon [q_i, G]$$

$$\delta p_i = \epsilon [p_i, G]$$

开普勒问题的守恒量

- 分析 LRL 矢量, 取其为生成元, 易得

$$A = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mkr}{r}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$[L, H] = 0$$

$$\begin{aligned} [A_k, H] &= \left[\varepsilon_{ijk} p_i L_j - \frac{mkx_k}{r}, H \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} [p_i L_j, H] - mk \left[\frac{x_k}{r}, H \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} [p_i, H] L_j - mk \left[\frac{x_k}{r}, H \right] \\ &= -k \varepsilon_{ijk} \left[p_i, \frac{1}{r} \right] L_j - \frac{k}{2} \left[\frac{x_k}{r}, p_i p_i \right] \\ &= -k \varepsilon_{ijk} \left[p_i, \frac{1}{r} \right] L_j - k \left[\frac{x_k}{r}, p_i \right] p_i \\ &= k \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{lmj} \frac{x_i}{r^3} x_l p_m + k \left(\frac{x_i x_k}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{ik} \right) p_i \\ &= k (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) \frac{x_i}{r^3} x_l p_m + k \left(\frac{x_i x_k}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{ik} \right) p_i \\ &= k \left(\cancel{\frac{x_i x_i}{r^3} p_k} - \cancel{\frac{x_i x_k}{r^3} p_i} \right) + k \left(\cancel{\frac{x_i x_k}{r^3} p_i} - \cancel{\frac{1}{r} p_k} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[p_i, \frac{1}{r} \right] = - \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x_i} = r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r^3}$$

$$\left[p_i, \frac{x_k}{r} \right] = \left[p_i, \frac{1}{r} \right] x_k + [p_i, x_k] \frac{1}{r} = \frac{x_i x_k}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$[A, H] = 0$$

LRL 矢量守恒

开普勒问题的对称性

- LRL矢量守恒和角动量守恒可以统一用正则变换给出
- 这时，我们还可以通过计算泊松括号来理解体系的对称性

由

$$[\mathbf{r}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

易证

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[A_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} A_k$$

练习证明


$$[A_i, A_j] = -2mE\varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= [X_i - Y_i, X_j - Y_j] \\ &= [X_i, X_j] - [X_i, Y_j] - [Y_i, X_j] \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mkr}{r} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$

龙格楞次矢量变换的生成函数不属于基本型，事实上也不是点变换。
只有在扩展的相空间才可能将之写为点变换。

LRL 矢量的泊松括号

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= [X_i - Y_i, X_j - Y_j] \\ &= [X_i, X_j] - [X_i, Y_j] - [Y_i, X_j] \end{aligned}$$


$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mkr}{r} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$

$$[X_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} X_k$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \varepsilon_{lmj} [X_i, p_l L_m] \\ &= \varepsilon_{lmj} (p_l [X_i, L_m] + [X_i, p_l] L_m) \\ &= \varepsilon_{lmj} (p_l \varepsilon_{imn} X_n + (\delta_{il} p^2 - p_i p_l) L_m) \\ &= \varepsilon_{ljm} \varepsilon_{inm} p_l X_n + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - \varepsilon_{lmj} p_i p_l L_m \\ &= (\delta_{li} \delta_{jn} - \delta_{ln} \delta_{ji}) p_l X_n + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - \varepsilon_{lmj} p_i p_l L_m \\ &= p_i X_j - \delta_{ji} \mathbf{p} \cdot \mathbf{X} + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - \varepsilon_{lmj} p_i p_l L_m \\ &= p_i X_j + \varepsilon_{imj} p^2 L_m - p_i X_j \\ &= -\varepsilon_{ijm} p^2 L_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X_i, p_j] &= \varepsilon_{lmi} [p_l L_m, p_j] \\ &= \varepsilon_{lmi} p_l [L_m, p_j] \\ &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jkm} p_l p_k \\ &= \delta_{ij} \delta_{lk} p_l p_k - \delta_{ik} \delta_{lj} p_l p_k \\ &= \delta_{ij} p^2 - p_i p_j \end{aligned}$$

LRL 矢量的泊松括号

$$\begin{aligned}[A_i, A_j] &= [X_i - Y_i, X_j - Y_j] \\ &= [X_i, X_j] - [X_i, Y_j] - [Y_i, X_j]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}[X_i, Y_j] + [Y_i, X_j] &= \varepsilon_{lmi} [p_l L_m, Y_j] + \varepsilon_{lmj} [Y_i, p_l L_m] \\ &= \varepsilon_{lmi} \varepsilon_{mjk} Y_k p_l + \varepsilon_{lmi} [p_l, Y_j] L_m - (i \leftrightarrow j) \\ &= (\delta_{lk} \delta_{ij} - \delta_{lj} \delta_{ik}) Y_k p_l + mk \varepsilon_{lmi} \left(\frac{x_l x_j}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{lj} \right) L_m - (i \leftrightarrow j) \\ &= \delta_{ij} Y_k p_k - Y_i p_j + mk \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{osm} \frac{x_l x_j}{r^3} x_o p_s - mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\ &= \delta_{ij} Y_k p_k - Y_i p_j + mk (\delta_{io} \delta_{ls} - \delta_{is} \delta_{lo}) \frac{x_l x_j}{r^3} x_o p_s - mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\ &= \delta_{ij} Y_k p_k - Y_i p_j + mk \frac{x_l x_j}{r^3} x_i p_l - mk \frac{x_l x_j}{r^3} x_l p_i - mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\ &= \cancel{\delta_{ij} Y_k p_k} - \cancel{Y_i p_j} + \cancel{mk \frac{x_l x_j}{r^3} x_i p_l} - \cancel{Y_j p_i} - mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m - (i \leftrightarrow j) \\ &= -2mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m\end{aligned}$$

$$A = p \times L - \frac{mkr}{r} = X - Y$$

$$[L_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k$$

$$\left[p_i, \frac{x_k}{r} \right] = \left[p_i, \frac{1}{r} \right] x_k + [p_i, x_k] \frac{1}{r} = \frac{x_i x_k}{r^3} - \frac{1}{r} \delta_{ik}$$

LRL 矢量的泊松括号

$$\begin{aligned}
 [A_i, A_j] &= [X_i - Y_i, X_j - Y_j] \\
 &= [X_i, X_j] - [X_i, Y_j] - [Y_i, X_j] \\
 &= -\varepsilon_{ijm} p^2 L_m + 2mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m \\
 &= -\varepsilon_{ijm} \left(p^2 - \frac{2mk}{r} \right) L_m
 \end{aligned}$$

$$A = p \times L - \frac{mkr}{r} = X - Y$$

$$[X_i, X_j] = -\varepsilon_{ijm} p^2 L_m$$

$$[X_i, Y_j] + [Y_i, X_j] = -2mk \varepsilon_{ijm} \frac{1}{r} L_m$$

$$\begin{aligned}
 [D_i, D_j] &= -\varepsilon_{ijm} L_m \left(p^2 - \frac{2mk}{r} \right) \frac{1}{2m|E|} \\
 &= -\varepsilon_{ijm} L_m \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) \frac{1}{|E|} \\
 &= -\varepsilon_{ijm} L_m \frac{E}{|E|}
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{A}{\sqrt{2m|E|}}$$

$$E < 0$$

$$[D_i, D_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$E > 0$$

$$[D_i, D_j] = -\varepsilon_{ijk} L_k$$

开普勒问题的对称性

- LRL矢量守恒和角动量守恒可以统一用正则变换给出
- 这时，我们还可以通过计算泊松括号来理解体系的对称性

由

$$[\mathbf{r}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

易证

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[A_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} A_k$$

练习证明

$$[A_i, A_j] = -2mE\varepsilon_{ijk} L_k$$

- 角动量 \mathbf{L} 的泊松括号，形成封闭的代数，LRL矢量自身不封闭，但与角动量 \mathbf{L} 一起构成一个封闭的代数。

龙格楞次矢量变换的生成函数不属于基本型，事实上也不是点变换。

只有在扩展的相空间才可能将之写为点变换。

对称性与守恒律

- 对称性对应守恒量，守恒量也对应对称性。
- 在有心力系统中，三维空间旋转对称性 对应角动量守恒。
- 所有三维空间旋转操作构成一个对称群SO(3)，保持三维向量的长度不变。
- 其生成元为角动量，其各分量满足代数 $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$
- LRL矢量守恒呢？

对称性与守恒律

- **LRL矢量守恒** 只对平方反比力系统成立，这意味着该系统满足更高的对称性。
- 事实上，**LRL矢量守恒**对应**四维空间的旋转对称性**。在束缚系统中，对应对称群SO(4)，保持欧氏四维向量的长度不变。定义 LRL矢量 \mathbf{D} ，可得SO(4)的生成元，满足代数

练习证明

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[D_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} D_k$$

$$[D_i, D_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2m|E|}}$$

- 对于非束缚系统，对应对称群SO(1, 3)，保持闵氏四维向量的长度不变。

练习证明

$$[D_i, D_j] = -\varepsilon_{ijk} L_k$$

与洛伦兹群相同，但与相对论无关！！

- 这些对称群是**六维相空间内保持哈密顿量不变的正则变换**组成的群。

对称性与守恒律

- 对于束缚轨道，将角动量与LRL矢量线性组合，可得

$$A^{\pm} = \frac{L \pm D}{2}$$

$$[D_i, D_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[D_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} D_k$$

- 相应的泊松括号为

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[A_i^{\pm}, A_j^{\pm}] = \varepsilon_{ijk} A_k^{\pm}$$

$$[A_i^{+}, A_j^{-}] = 0$$

类似角动量 L 的SO(3) 代数

- 很明显，这是两个独立的SO(3)代数，组合在一起，对应SO(4)群。
- 四维转动对称性在三维空间中不易理解，但容易在六维相空间中理解。

A^{\pm} 构成了 SO(4) 群在六维相空间中的四维表示。

$$[A_i^{+}, A_j^{-}] = \frac{1}{4} \left([L_i, L_j] - [L_i, D_j] + [D_i, L_j] - [D_i, D_j] \right) = 0$$

$$[A_i^{\pm}, A_j^{\pm}] = \frac{1}{4} \left([L_i, L_j] \pm [L_i, D_j] \pm [D_i, L_j] + [D_i, D_j] \right) = \frac{1}{4} \left(2\varepsilon_{ijk} L_k \pm 2\varepsilon_{ijk} D_k \right) = \varepsilon_{ijk} A_k^{\pm}$$

总结

- 开普勒问题的守恒量
- 开普勒问题的对称性
- 力学系统的对称群