理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 刘维尔定理
- 庞加莱回归定理
- 守恒量的对合关系

刘维尔可积系统

$[G_a, H] = 0$ $[G_a, G_b] = 0$

$dG_1 \wedge dG_2 \wedge \ldots \wedge dG_n \neq 0$

- 对于 n 自由度的系统：

  若有 n 个独立守恒量，则称为可积系统；

  若有 n 个泊松对易的独立守恒量，则称为刘维尔可积系统（**可积！**）

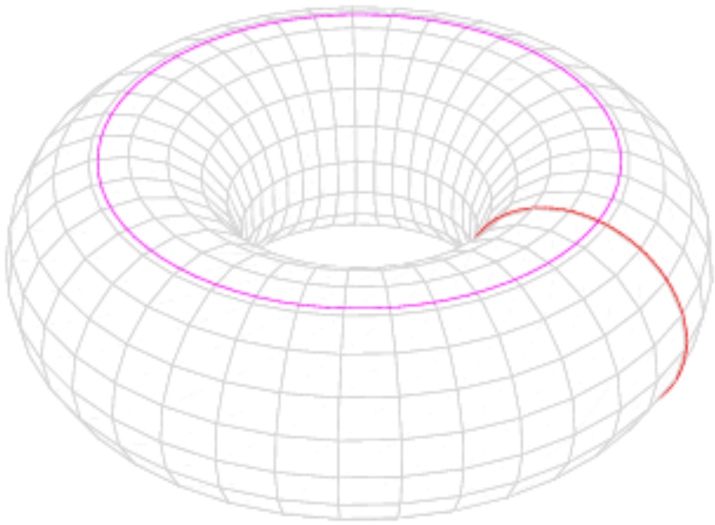
  若有 2n-1 个独立守恒量，则称为最大可积系统（一定刘维尔可积）

  2n 维相空间，最多存在 n 个泊松对易的独立守恒量（类比欧氏空间的基矢量）

  由 $[G_a, H] = 0$，$[G_a, G_b] = 0$，可知 H 不独立，是 G_a 的函数。

- 刘维尔可积的束缚系统在相空间中运动于**n维不变环面**上

系统存在n个独立的、两两泊松对易的守恒量。每个守恒量生成一个相流，由于系统束缚，相流在相空间中形成闭合的圆周相轨道。由于守恒量彼此对易，这些圆周运动方向相互独立（辛正交），共同构成了一个 n 维环面结构。**刘维尔定理保证了相流在相空间中不会收缩或发散，因此系统的运动被限制在这个环面上。**



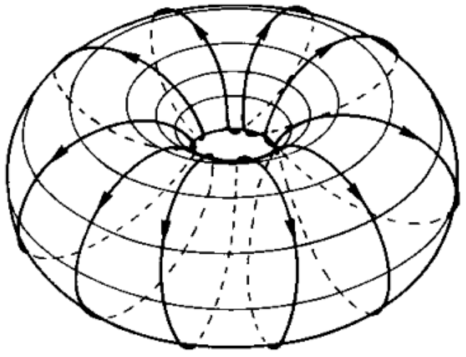
共振环面

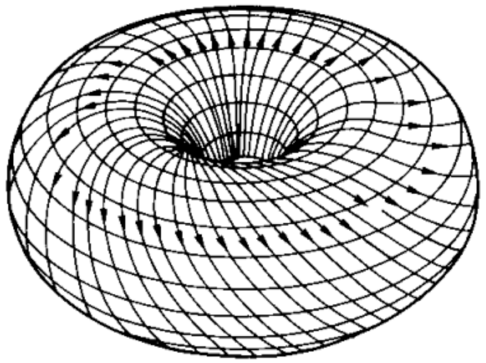
- **不变环面**由n个圆周作笛卡尔积而成，系统在n维环面上运动，则有n个独立的周期性回路方向，每个方向的角频率为 $\omega_i = 2\pi/T_i$。
- 但是，整个系统完整的相轨道却不一定是闭合轨道。
- 任意两个方向的角频率之比 ω_i/ω_j **都是整数**，则各个方向的运动一定有公共的周期，整个系统周期性运动，从而一定是闭合轨道。
- 若这些角频率之比都是无理数，则没有公共周期，也没有闭合轨道。系统的相轨道最终将布满整个环面，即**相轨道遍历整个不变环面。**
- 不变环面**不能**被相应相轨道遍历的充要条件：

  存在一组整数 $\boldsymbol{m} \neq 0$，使得

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{m} = 0$$

共振条件、共振环面





不变环面上的辛势积分

- 不变环面的切空间由守恒量 G_i 生成的哈密顿矢量场 X_{G_i} 给出，且满足

$$\omega(X_{G_i}, X_{G_j}) = 0$$

辛正交

- 不变环面上的任意切向量 $u = u_i X_{G_i}$，$v = v_i X_{G_i}$ 均属于切空间，故满足

$$\omega(u, v) = 0$$

- 所以，辛形式在**不变环面**上限制为零。

- 我们已知，相空间沿任一闭合路径对辛势 Θ 的积分不随时间变化。若将闭合路径（平凡回路）取在不变环面上，则这一积分恒为零。积分与路径无关！

$$I_c = \oint_C \Theta = \int_{S_2} d\Theta = \int_{S_2} \omega = 0$$

$$I_c = \oint_C \Theta = \int_{S_2} d\Theta = \int_{S_2} \omega$$

刘维尔–阿诺尔德定理

- 刘维尔–阿诺尔德定理：刘维尔可积系统的相空间运动可以通过积分法求解。

- 证明的关键在于确 标均为循环坐标。

$$\eta^j=(q^j,p_j)\to\xi^j=(\theta^j,G_j)$$

- 考虑到系统的运动总是限制在 $G_j(q,p)=c_j$ 的超曲面上，可以反解出 p_j 作为 c,q 的函数。

$$p_j=p_j(c,q)$$

- 考察不变环面上的一条路径，并对辛势 Θ 积分，显然积分与路径无关，

$$\int_{q_0}^{q}p_j(c,q)dq^j=F(G,q)$$

$$p_j=\frac{\partial F}{\partial q^j}\qquad\theta^j=\frac{\partial F}{\partial G_j}$$

刘维尔可积定理

- 刘维尔可积定理：刘维尔可积系统的相空间运动可以通过积分法求解。

- 既然以下变换为正则变换，

$$\eta^j = (q^j, p_j) \to \xi^j = (\theta^j, G_j)$$

- 考虑守恒量 G_j，易知

$$[H, G_j] = \frac{\partial H}{\partial \theta^j} = 0$$

θ^j 为循环坐标

- 系统运动的解：

$$\dot{G}_j = [G_j, H] = 0$$

$$\dot{\theta}^j = [\theta^j, H] = \frac{\partial H}{\partial G_j} = \Omega_j$$

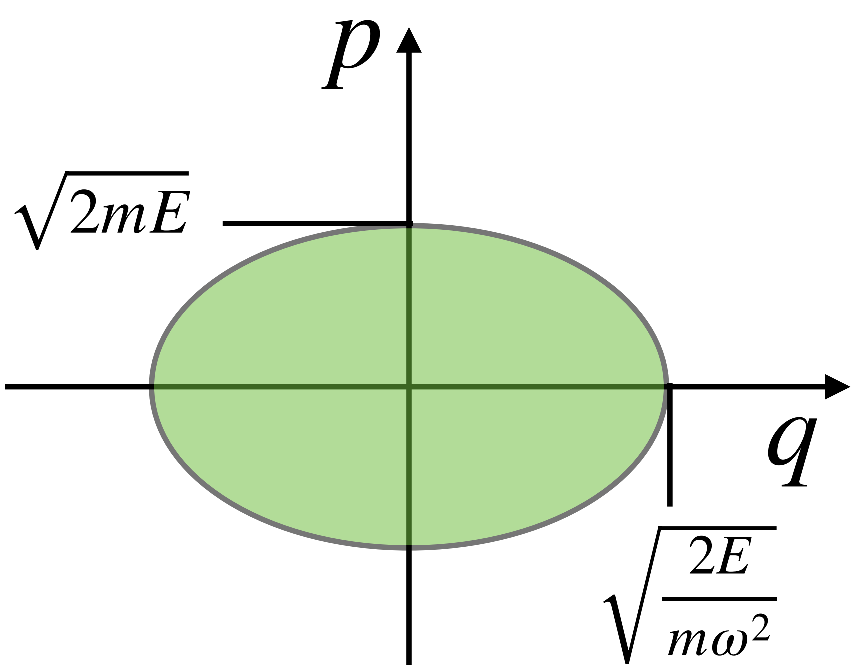
仅依赖于G

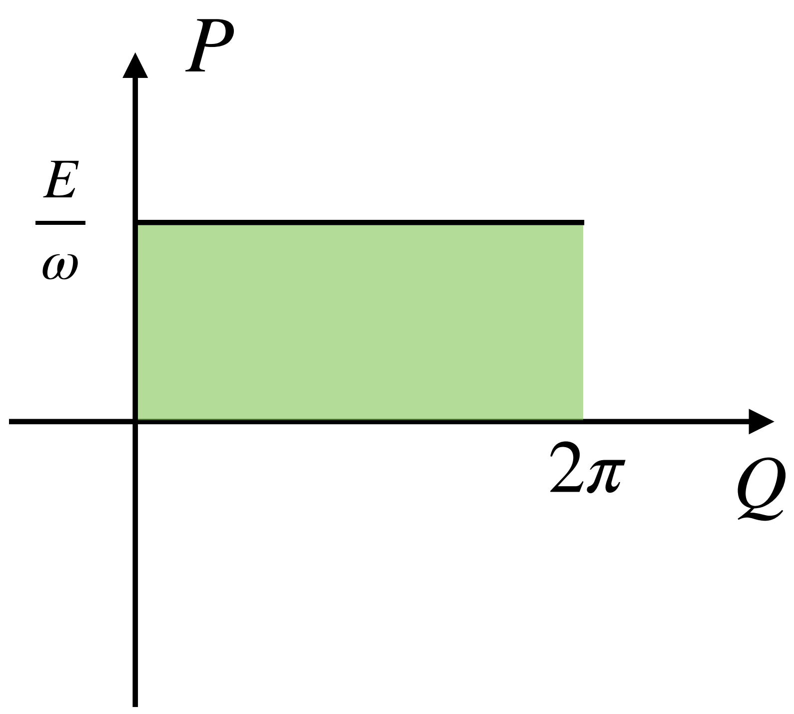
$$\Rightarrow \quad G_j(t) = G_j(0) \qquad \theta_j(t) = \theta_j(0) + t\Omega_j$$

是不是似曾相识?

一维谐振子

- 我们已经在谐振子中看到了这一点：





- 谐振子运动一个周期在两个相空间描绘出的面积相等 $\frac{2\pi E}{\omega}$

作用—角变量

- 对于刘维尔可积系统，可以在不变环面上取得一组非常有用的正则变量，即**作用-角变量**，包括作用变量 I_j 和角变量 θ^j。
- 取不变环面上的一个独立非平凡回路 C_j，可定义作用变量 I_j：

$$I_j = \oint_{C_j} \frac{\Theta}{2\pi} = \oint_{C_j} \frac{p_i(c,q)\, dq^i}{2\pi}$$

I_j 显然是守恒量 $G = c$ 的函数

辛面积!

- 作用变量 I_j 也是一组相互泊松对易的守恒量，也可以刻画不变环面。
- 根据刘维尔可积定理，可确定作用变量 I_j 对应的正则坐标 θ^j 为循环坐标
- 反解超曲面 $I_j(q,p) = f_j$，给出 p_j 作为 f, q 的函数 $p_j = p_j(f,q)$
- 引入第二类生成函数 $F(I,q)$

$$F(I,q) = \int_{q_0}^{q} p_j(I,q)dq^j$$

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q^j} \quad \theta^j = \frac{\partial F}{\partial I_j}$$

作用—角变量

- 取独立非平凡回路 C_i，经历一整周后，θ^j 的变化

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q^j} \quad \theta^j = \frac{\partial F}{\partial I_j}$$

$$\oint_{C_i} d\theta^j = \oint_{C_i} \frac{\partial^2 F}{\partial q^c \partial I_j} dq^c = \frac{\partial}{\partial I_j} \oint_{C_i} \frac{\partial F}{\partial q^c} dq^c = \frac{\partial}{\partial I_j} \oint_{C_i} p_c\, dq^c = (2\pi) \frac{\partial I_i}{\partial I_j} = (2\pi) \delta^j{}_i$$

- θ^j 在回路 C_j 上以 2π 为周期，故称角变量

$$\oint_{C_i} \frac{d\theta^j}{2\pi} = \delta^j{}_i$$

- 作用变量和角变量满足正则方程

$$I_j = \oint_{C_j} \frac{p_i(c, q)\, dq^i}{2\pi}$$

$$\dot{I}_j = [I_j, H] = 0 \qquad \dot{\theta}^j = [\theta^j, H] = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j(I)$$

系统在 C_j 方向上运动的角频率

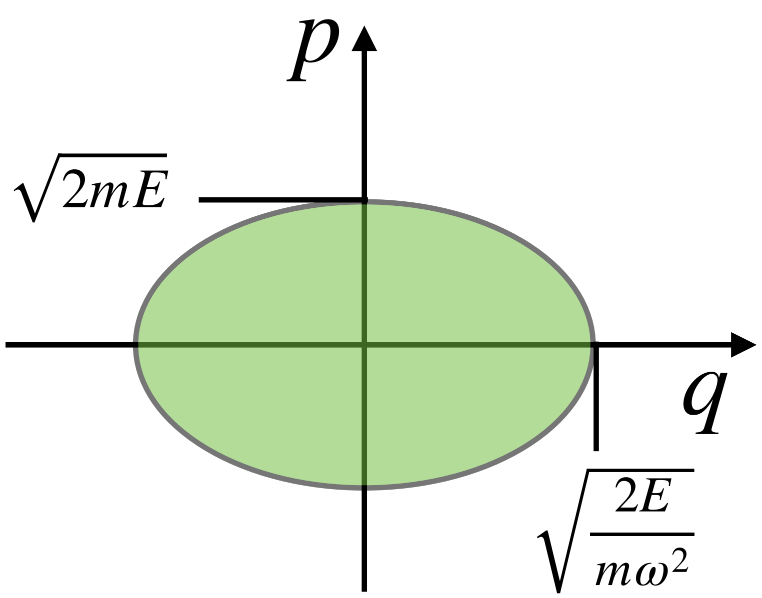
谐振子的作用—角变量

$$I_j = \oint_{C_j} \frac{p_i\, dq^i}{2\pi}$$

- 考虑一维简谐振子

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$



- 作用变量

$$I = \oint_C \frac{p\, dq}{2\pi} = \frac{\pi ab}{2\pi} = \frac{E}{\omega}$$

面积!

- 角变量

$$\theta = \frac{\partial}{\partial I}\int_{q_0}^{q} p(I,q')dq' = \arcsin\left(q\cdot\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\right)$$

$$\theta(t) = \omega t + \alpha$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$F(I,q) = \int_{q_0}^{q} p_j(I,q)dq^j$$

$$\theta^j = \frac{\partial F}{\partial I_j}$$

谐振子的作用—角变量

另一种简洁的方法

- 考虑一维简谐振子

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}=\frac{1}{2m}\left(p^2+m^2\omega^2q^2\right)=E$$

- 定义坐标变换 $p=A\cos\theta,\quad m\omega q=A\sin\theta$ ➡ $H(q,p)=\frac{1}{2m}A^2=E$

- A 守恒，但不一定是作用变量，要求满足正则变换

$$\omega=dp\wedge dq=\frac{1}{m\omega}d(A\cos\theta)\wedge d(A\sin\theta)=\frac{A}{m\omega}dA\wedge d\theta=d\left(\frac{A^2}{2m\omega}\right)\wedge d\theta$$

辛形式

➡ $$I=\frac{A^2}{2m\omega}=\frac{E}{\omega}$$

绝热不变量

- 考虑系统在外参数缓慢变化下的行为：如果外参数变化的时间尺度，相对于系统本身的运动时间尺度**非常缓慢**，则称这样的变化是**绝热**的。
- 在绝热条件下，力学体系的某些量不变，则称为**绝热不变量**。
- 考虑一个一维周期运动系统，则其不变环面为一个闭合圆周。进一步假设势能函数依赖于某个**缓慢变化**的控制参数 λ，则有

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(q;\lambda(t))$$

$$T\dot{\lambda}\ll\lambda$$

- 显然能量将随时间缓慢变化，系统将近似作周期运动，在每个瞬时有

$$p=\sqrt{2m[E-V(q;\lambda)]}=p(q;E,\lambda)$$

给定 E,λ 下，p 是 q 的函数。

作用变量是一个绝热不变量

- 作用变量可看作是两个独立变量 E, λ 的函数。

$$I = \oint_C \frac{p(q;E,\lambda)\,dq}{2\pi} = I(E,\lambda)$$

$$p = p(q;E,\lambda)$$

- 为了证明作用变量是绝热不变量，我们计算

$$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$$

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial I}{\partial \lambda}\dot{\lambda} = \left(\frac{\partial I}{\partial E}\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)\dot{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial E}\oint p\,dq = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial p}{\partial E}\,dq = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial E}\,dt = \frac{T}{2\pi}}$$

作用变量是一个绝热不变量

- 作用变量可看作是两个独立变量 E, λ 的函数。

$$I = \oint_C \frac{p(q;E,\lambda)\,dq}{2\pi} = I(E,\lambda)$$

$$p = p(q;E,\lambda)$$

- 为了证明作用变量是绝热不变量，我们计算

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial I}{\partial \lambda}\dot{\lambda} = \left(\frac{T}{2\pi}\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)\dot{\lambda}$$

固定能量E的轨道上进行积分

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\oint p\,dq = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}dq$$

将 $p(q;\lambda)$ 写成 $H(q,p;\lambda) = E$ 的隐函数，

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

在固定能量，固定 q 下，λ 的变化如何影响 p

作用变量是一个绝热不变量

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda}=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial p}{\partial \lambda}dq$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda}=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial p}{\partial \lambda}dq=\frac{1}{2\pi}\int_0^T\frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{\partial H}{\partial p}dt=-\frac{1}{2\pi}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial \lambda}dt$$

- 为了证明作用变量是绝热不变量，我们计算

$$\dot{I}=\left(\frac{T}{2\pi}\frac{\partial H}{\partial \lambda}+\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)\dot{\lambda}=\left(\underline{T\frac{\partial H}{\partial \lambda}}-\underline{\int_0^T\frac{\partial H}{\partial \lambda}dt}\right)\frac{\dot{\lambda}}{2\pi}$$

是不是很像要抵消的样子?

- 取一个运动周期内的平均值

$$\langle A\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T dtA(t;\lambda)$$

作用变量是一个绝热不变量

- 为了证明作用变量是绝热不变量，我们计算

$$\langle A\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dtA(t;\lambda)$$

$$\langle \dot{I}\rangle = \left(T\left\langle\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right\rangle - T\left\langle\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right\rangle\right)\frac{\dot{\lambda}}{2\pi} = 0$$

$$\dot{I} = \left(T\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \int_0^T \frac{\partial H}{\partial\lambda}dt\right)\frac{\dot{\lambda}}{2\pi}$$

- 显然，对于缓慢的参数调节，**作用变量在一个周期之内的平均变化率为零**

- 也就是说，作用变量是以运动周期为周期的函数

$$I(t+T) = I(t)$$

- 注意到相对于参数变化的时间尺度，运动周期 T 是很短的。因此，作用变量在参数变化的时间尺度上**近似不变**。(量子化)

- 这就是所谓“**作用变量是绝热不变量**”的含义。

谐振子的量子化

- 考虑一维简谐振子

$$H(q,p)=\frac{1}{2m}\left(p^2+m^2\tilde{\omega}^2q^2\right)$$

$\tilde{\omega}$ 随时间缓慢变化，相当于λ

- 作用变量是绝热不变量

$$I=\oint_C\frac{p\,dq}{2\pi}=\frac{E}{\tilde{\omega}}$$

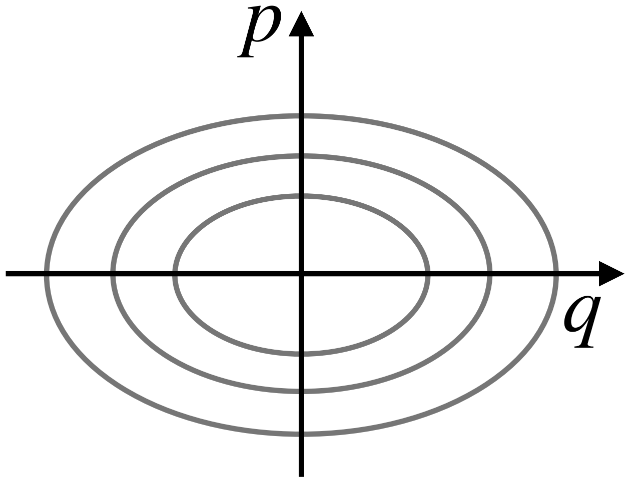
$\tilde{\omega}$ 变化后，相应的能量 E 也变化，但其比值近似不变

- 考虑到作用变量在外参数的缓慢变化下保持不变，
  而一个量子化的量不能连续变化，自然在参数的连续变化下保持不变
  故假设作用变量是一个量子化的量 （从经典力学过渡到量子力学）

$$I=\frac{E}{\tilde{\omega}}=n\hbar$$

$$E_n=n\hbar\tilde{\omega}$$

能量离散化；缺乏零点能！



绝热过程的几何图像

- 对于刘维尔可积系统，可以构建如下正则变换，给出作用变量和角变量，并以它们作为局部坐标系，在相空间中构造稳定的不变环面。

$$(q,p) \xrightarrow{F(q,I;\lambda)} (\theta,I) \qquad H(q,p;\lambda) \xrightarrow{F(q,I;\lambda)} K(\theta,I;\lambda)=H(I;\lambda)$$

- 在绝热过程中，哈密顿量 $H(q,p;\lambda(t))$ 依赖于一组随时间缓慢变化的外参量
- 在每一时刻 t，都可以定义一组新的作用—角变量，相应的正则变换生成函数 $F(q,I;\lambda(t))$ 是显含时的，因此，变换后的哈密顿量必须加一项：

$$H(q,p;\lambda(t)) \to K(\theta,I;\lambda(t))=H(I;\lambda(t))+\frac{\partial F}{\partial t}$$

- 在慢参量演化过程中，不仅哈密顿量本身变化，局部的作用—角变量坐标系也随之变化，因此不变环面在相空间中的“形状”和“位置”会随时间缓慢演变。

总结

- 刘维尔可积系统
- 作用—角变量
- 绝热不变量