理论力学

赵鹏巍

课程信息

- 教师：赵鹏巍 pwzhao@pku.edu.cn
- 时间：周一1-2节（单周）、周三7-8节、**理教310**
- 助教：黄天行

助教

课程群

黄天行

物理学院 2023 级研究生

专业：粒子物理与原子核物理

邮箱：txhuang@pku.edu.cn

教材和参考书

北京大学电子教参服务平台

- 刘川 理论力学，北京大学出版社，2019
- Herbert Goldstein, Classical Mechanics, 3rd ed.
- 戈德斯坦, 经典力学（中文版）, 2nd ed.
- Walter Greiner, Classical Mechanics, 2nd ed.
- L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, Mechanics, 1999年
- 鞠国兴，理论力学学习指导与习题解析，第二版，2018

课程表

1	2月17日	2月19日
2		2月26日
3	3月3日	3月5日
4		3月12日
5	3月17日	3月19日
6		3月26日
7	3月31日	**4月2日**
8		**4月9日**
9	4月14日	4月16日
10		4月23日
11	4月28日	4月30日
12		5月7日
13	5月12日	5月14日
14		5月21日
15	5月26日	**5月28日**
16		6月4日

24次课

- 1次放假
- 1次期中
- 2次习题?

成绩评定

- 作业：~20%

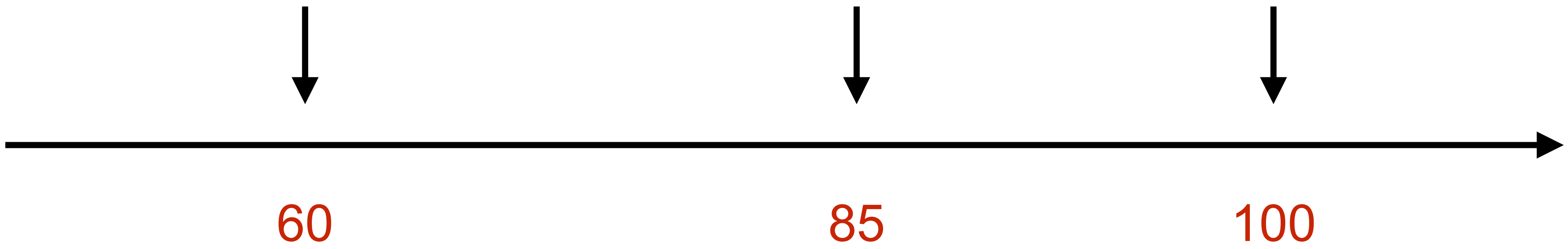
  [https://zhaopw33.github.io/teaching.html]

  一定要按时交作业！助教要批改作业！

- 期中：~30%

- 期末：~50%　（2025.06.18 下午）

成绩评定



- 务必重视作业题、例题、思考题
- 成绩预公布，在约定时间内允许查分
- 优秀率

力学

Mechanics: A branch of physical science that deals with energy and forces and their effect on bodies. (Webster's)

- 力学

  物体的运动状态：速度与加速度

  改变运动状态的原因：力与能

- 物体运动，但不改变其内禀性质

  理想质点与刚体

  质量与转动惯量

- 牛顿（Newton）三定律

  相信大家还没有忘记

《自然哲学的数学原理》1687

理论力学

- 现代物理：20世纪以来的物理

  量子力学

  相对论

- 17世纪到20世纪的物理?

  经典与量子；非相对论与相对论；力学与场论

- 为什么要学习17世纪到20世纪的 “过时”的物理?

  理论力学：非相对论（或相对论）经典力学

为什么要学习理论力学?

- 与现代物理体系的紧密相关

  掌握好理论力学可以更好地理解量子力学

- 掌握必要的数学工具

  对更进阶的理论物理学习非常重要

- 采用新的视角对已知物理定律的再诠释

  更具一般性与普适性；It’s just cool!

为什么要学习理论力学?

- 与现代物理体系的紧密相关

  掌握好理论力学可以更好地理解量子力学

- 掌握必要的数学工具

  对更进阶的理论物理学习非常重要

- 采用新的视角对已知物理定律的再诠释

  更具一般性与普适性；It’s just cool!

我们首先从17世纪的牛顿力学谈起……

牛顿力学

- 原则上，基于受力，牛顿运动方程可以预言任意体系的运动规律

  我们仅需要一个足够强大的计算机…

- 然而，现实却很残酷

  计算机那时还没有发明

  很多情况下、受力可能是不能完全清楚的

  受力可能依赖于时间、位置，甚至速度；

  处理复杂系统时存在困难，“三体问题”

- 因此，需要利用更强大的数学工具进行描述

广义运动方程

- 牛顿力学描述物体的位置

  目标：求解 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

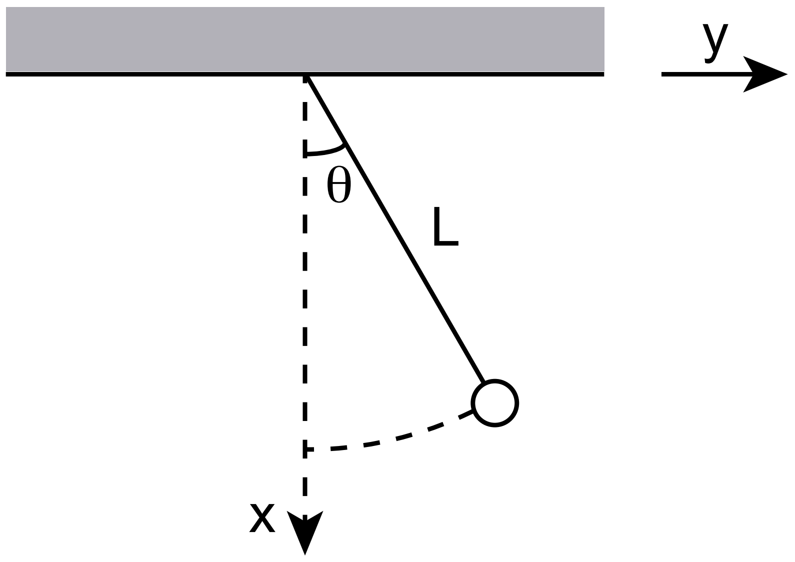
  N个物体涉及3N个坐标

- 原则上，有无穷多种描述物体运动的方法

  如，描述一个单摆 $x = L\cos\theta, y = L\sin\theta, z = 0, \theta = \theta(t)$

  自由变量的个数可能不是3N （约束）

  不妨将新变量称为**广义坐标**



- 广义坐标对应的运动方程是什么?

拉格朗日力学 Lagrangian

- 牛顿运动方程是关于力的方程 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

  从描述系统中每个物体的受力出发 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, t)$

  关于3N个坐标的3N个函数

- 引入拉格朗日量

  $$L = L(q, \dot{q})$$

  广义坐标q及其时间导数

  以及拉格朗日方程

  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

  所有关于系统运动的信息均包含在一个标量函数中

- 拉格朗日力学不依赖于坐标系的选取

哈密顿原理 Hamilton’s Principle

- 基于哈密顿原理，可导出拉格朗日方程

$$\delta \int_1^2 L dt = 0$$

一个真实物理系统选取运动路径使拉格朗日量L的时间积分为极值。

- 牛顿定律是通过大量实验观测归纳得到的

“It is so because it agrees with many observations”

从一原理中推导出牛顿定律意味着 why it is so

给出了更深层次的原因，最终会与费曼路径积分有联系

- 当然，变分法也是非常有用的数学工具

哈密顿力学 Hamiltonian

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

- 哈密顿方程

  (*p*,*q*) 是正则变量，*H* 是一个函数，称为哈密顿量

- 正则变量：位置与动量 $p = mv = m\dot{x}$ ？

- 位置与动量被作为独立变量

  比拉格朗日力学允许更广泛的变量变换

  公式更简洁、更对称、更酷

  与量子力学里的不确定关系具有相似性

失败中的成功

- 求解三体问题的尝试失败了

  除计算机数值求解之外 ....

- 副产品(Lagrangians/Hamiltonians) 却成为建立量子力学的基石

  量子力学的发展是类比拉格朗日力学和哈密顿力学建立的

  量子力学的先驱们是学习经典力学成长起来的

- 经典力学是牛顿与薛定谔之间缺失的联系

  充分领会量子力学

课程安排

- 拉格朗日力学 （回顾与延伸）

  非完整约束；诺特定理；受限三体系统

- 哈密顿力学

  正则方程

  正则变换

  对称性与守恒律

  哈密顿-雅可比 (Hamilton-Jacobi) 方程

  相对论表述

- 经典场论

拉格朗日力学的优势

- 拉格朗日量是一个标量
- 拉格朗日方程的形式不随广义坐标的选取而发生变化
- 可简便地处理约束系统
- 对称性与守恒律

约束

运动方程 $$m\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i = \sum_j \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$ 质点可以在空间内任意运动

- 这只是理想情况，真实情况下总是对运动有各种各样的约束

  铁轨对火车的约束；台球桌对台球的约束；….

- 约束带来的两类困难：

  1. 运动方程、约束方程联立求解；独立变量或自由度减少

  2. 问题中可能出现不能直接确定、只能根据它们对系统运动效应来确定的力

- 如何将各种各样的约束考虑到运动方程中呢?

  依赖于约束的种类…

完整约束

- 约束可以表示为 $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t) = 0$ 完整约束

  x-y平面运动的质点 z = 0

  刚体 $(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

- 所有其他的约束称为非完整约束 [可能真的只是为了不处理它们]

  可能表示为不等式 z>0

  可能依赖于导数 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ **有时可以写成积分形式，这时仍是完整约束！**

- 我们只处理完整约束的问题

独立变量

- 引入一个完整约束可以减少一个独立变量

  引入z = 0，剩下的独立变量为x和y

  可以求解约束方程 $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t) = 0$ ➡ $x_1 = g(y_1, z_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, t)$

  消去x_1

- 有时可能需要转到一组新的独立变量

  一个位于球面上的质点，$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ (θ, ϕ) 是很好的选择

- 新的独立变量 ➡ 广义坐标

广义坐标

- *N* 个质点具有 *3N* 个独立变量

  引入 *k* 个完整约束将使独立变量减至 *3N-k* 个

  利用广义坐标q_1 , q_2, … q_{3N-k}

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t) = 0$$

从 ***r*** 到 *q* 的变换方程

举例:

$$\begin{cases} x = c\sin\theta\cos\phi \\ y = c\sin\theta\sin\phi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$$

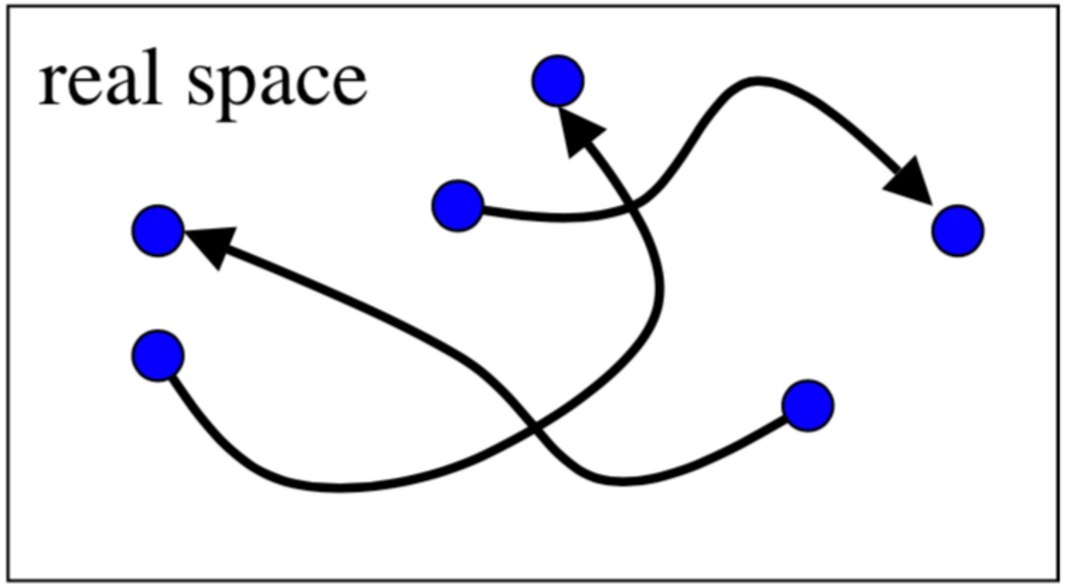
从（x, y, z）到 (θ, ϕ)

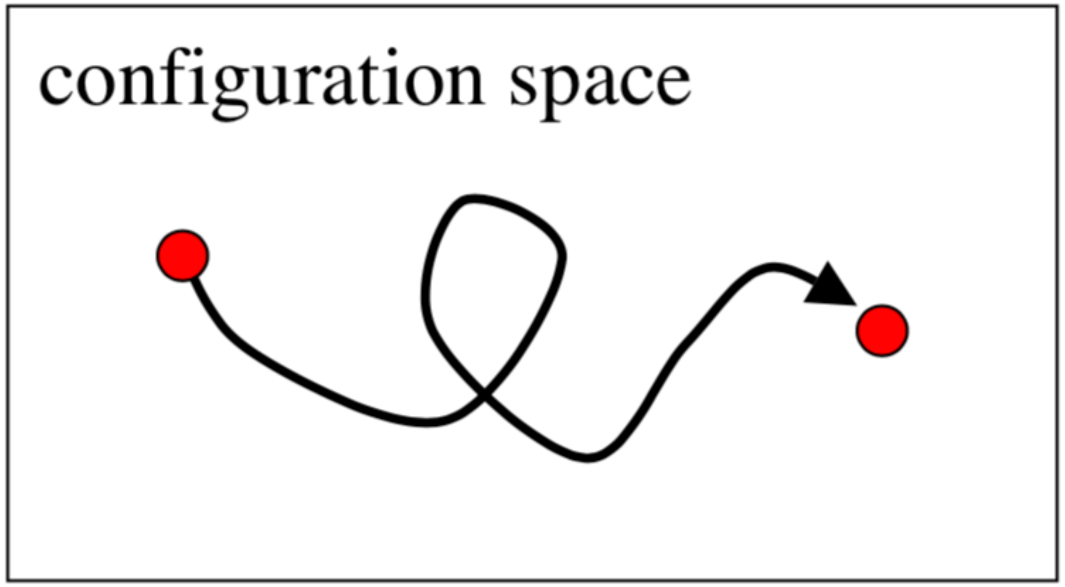
位形空间

- 广义坐标 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ 完全描述系统在任一时刻的**位形**
- 想像一个 n 维空间，即**位形空间**（**微分流形**）

  空间内的每一点（$q_1, q_2, \ldots, q_n$）均代表一个位形

  体系随时间的演化 —-> 位形空间内的一条曲线

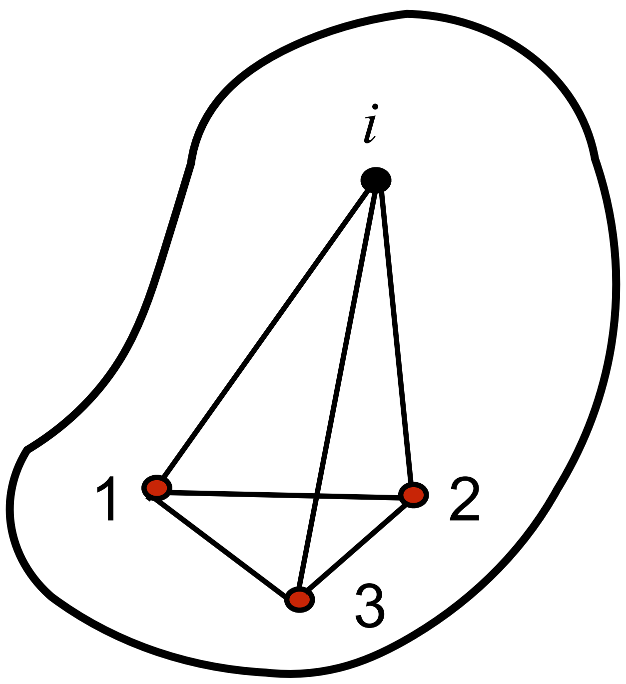




完整约束举例：刚体

- 质点间距离固定的多质点体系

  约束： $r_{ij}=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|=\text{const}$



- 独立自由度个数?

  3N个自由度减去约束的个数

  并不是所有的约束都是独立的!

$$3N-\frac{N(N-1)}{2}=\frac{7N-N^2}{2} \qquad \le 0 \text{ when } N\ge 7$$

- 只要确定刚体中三个非共线点的位置，则其他任意点均可由约束直接确定

- 9 - 3 = 6个独立自由度，3个平动、3个转动

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

$$\underbrace{L}_{\text{拉氏量}}(q,\dot{q},t)\equiv \underbrace{T}_{\text{动能}}-\underbrace{V}_{\text{势能}}$$

- 将 *L = T - V* 用广义坐标，广义坐标的时间导数以及时间表示

  势能 *V=V(q,t)* 必须存在，即**有势力**

- 由 哈密顿原理 / 达朗伯原理 给出

拉格朗日量的非唯一性

- 如果 *L* 是描述一个体系的拉格朗日量，则

$$L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$$

也是体系的拉格朗日量，其中 *F* 是广义坐标和时间的任何可微函数。

证明：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

约束与力

- 约束是一种宏观的概念，量子力学下没有什么是完全约束的 （不确定关系）
- 完整约束可以理解为一种无限大的力
- 没有受力的情况下，所有坐标系均是同等的，直角坐标系是最简单的
- 受力会破坏对称性，所以有些坐标系会可能会更适合描述物理
- 广义坐标提供了一种自然的处理受力系统的方法