理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 转动的SU(2)表示
- 分析了重陀螺的运动

  约化为一个关于 θ 的一维问题

  定性分析 —〉进动 + 章动

  规则进动
- 磁场中的旋转带电体

  磁矩与角动量的关系：g因子

  拉摩进动

  基本粒子的g因子测量：新物理

最小作用量原理

- 最小作用量原理这一术语的用法有点混乱

  由于历史的原因，作用量的定义有不同

  事实上，很多人也将哈密顿原理称为最小作用量原理

  “最小”并不严格准确，更准确的说法是“极值”

- 这里我们采用如下“术语”，最小作用量原理包括两个版本：

  1. 莫佩蒂原理（历史上更早）

  $$\boxed{\Delta I[C]} \equiv \Delta \boxed{\int_C p_i dq_i} = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0$$

  简约作用量！

  Δ 变分，*C* 为坐标*q* 从端点q_1至q_2在位形空间所经历的路径

  2. 哈密顿原理（接受度更广）

  $$\boxed{\delta I[q(t)]} \equiv \delta \boxed{\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt} = 0$$

  δ 变分，*q(t)* 为连接端点$q_1 = q(t_1)$ 至$q_2 = q(t_2)$的函数

  作用量！

Δ 变分：更一般的变分

- δ 变分的定义：

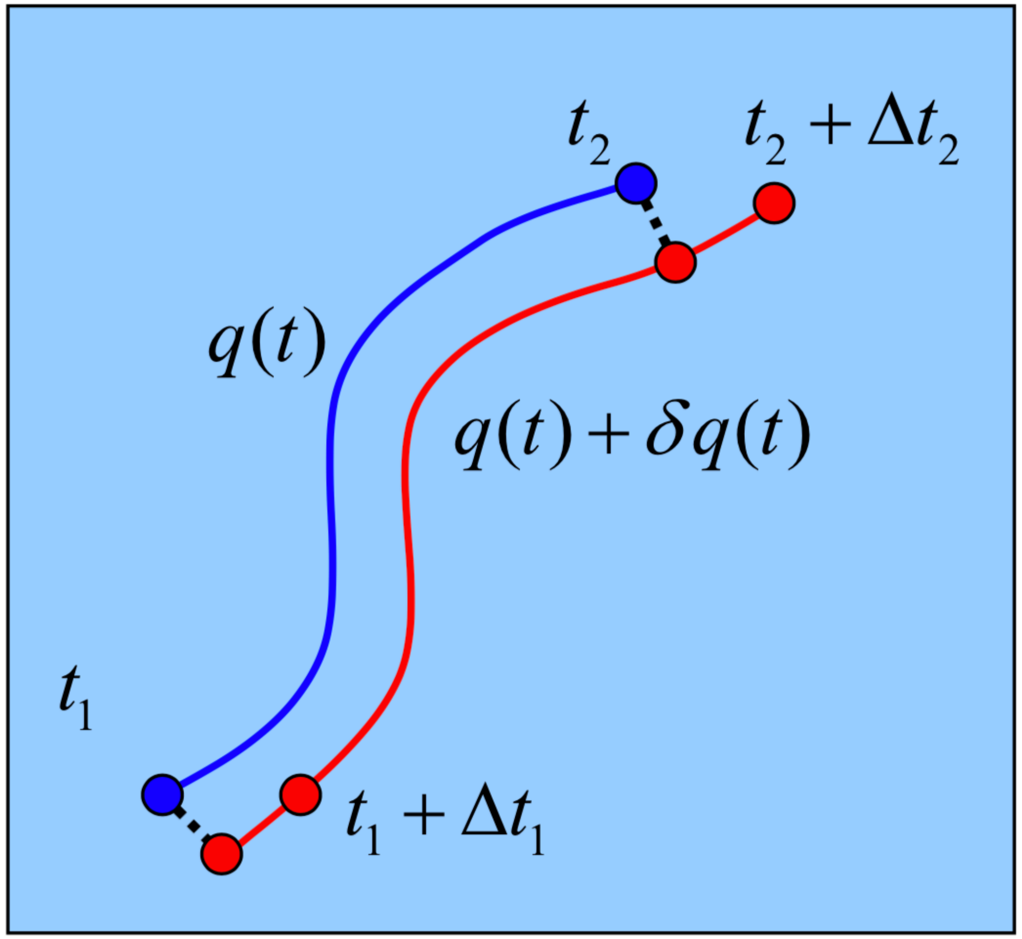
$$q(t,\alpha) \equiv q(t,0) + \alpha\eta(t) \quad \rightarrow \quad \delta q(t) = q(t,\alpha) - q(t,0) = \alpha\eta(t)$$

- Δ 变分的定义：

$$q(t,\alpha) \equiv q(t,0) + \alpha\eta(t)$$

取 *1* 阶近似

$$\begin{aligned}
\Delta q(t) &= q(t+\Delta t,\alpha) - q(t,0) \\
&= q(t+\Delta t,0) + \alpha\eta(t+\Delta t) - q(t,0) \\
&= q(t,0) + \dot{q}(t,0)\Delta t + \alpha\eta(t+\Delta t) - q(t,0) \\
&= \dot{q}(t,0)\Delta t + \alpha\eta(t) + \alpha\dot{\eta}(t)\Delta t \\
&= \dot{q}(t,0)\Delta t + \alpha\eta(t) \\
&= \dot{q}(t,0)\Delta t + \delta q(t)
\end{aligned}$$



作用量的 Δ 变分

- 我们对作用量做 Δ 变分

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L[t, q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha)]dt - \int_{t_1}^{t_2} L[t, q(t,0), \dot{q}(t,0)]dt$$

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} = \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1}$$

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} L[t,\alpha]dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} L[t,\alpha]dt + \boxed{\int_{t_1}^{t_2}\{L[t,\alpha]-L[t,0]\}\,dt} \longrightarrow \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

取 1 阶近似

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = L[t_2,\alpha]\Delta t_2 - L[t_1,\alpha]\Delta t_1 + \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

$$= L[t_2,0]\Delta t_2 - L[t_1,0]\Delta t_1 + \boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt}$$

$$L[t_2,\alpha]\Delta t_2 = L[t_2,0]\Delta t_2 + \cancel{\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_0 \alpha\Delta t_2}$$

$$\longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\}\delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\}\delta q_i dt + \left[p_i\delta q_i + L[t,0]\Delta t\right]_{t_1}^{t_2}$$

作用量的 Δ 变分

$$\Delta q(t) = \dot{q}(t,0)\Delta t + \delta q(t)$$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \delta q_i dt + \left[p_i \delta q_i + L[t,0]\Delta t \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \delta q_i dt + \left[-p_i \dot{q}_i \Delta t + p_i \Delta q_i + L\Delta t \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \delta q_i dt + \left[p_i \Delta q_i - H\Delta t \right]_{t_1}^{t_2}$$

- 哈密顿原理

$$\Delta t = 0 \qquad \delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \Delta q_i(t_2) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right\} \delta q_i dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

拉格朗日方程!

作用量的 Δ 变分

利用拉格朗日方程，可得

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[p_i \Delta q_i - H\Delta t\right]_{t_1}^{t_2}$$

- 莫佩蒂原理：我们额外加入以下限制：

  1. 考虑系统只限于 H 不显含时间 t , 即 H 守恒
  2. 所取变分应使 H 在变化路径上也守恒
  3. 所取变化路径在初末态端点的 Δ 变分为零 $\Delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_2) = 0$

注意 Δt 不一定为零

$$\Rightarrow \quad \Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[p_i \Delta q_i - H\Delta t\right]_{t_1}^{t_2} = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

另根据哈密顿量的定义，有

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H\right) dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta I[C] \equiv \Delta\int_C p_i dq_i = \Delta\int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0$$

等能不等时!

莫佩蒂原理

很多教科书也称为“最小作用量原理”!

莫佩蒂原理：一个简单的例子

$$\Delta I[C] \equiv \Delta \int_C p_i dq_i = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0$$

- 考虑一个质点在保守势下运动

$$L = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 - V(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad p_i \dot{q}_i = m\boldsymbol{v}^2 = 2T$$

- 莫佩蒂原理等价于 $\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0$

  质点"倾向于"以小的"动能乘以时间"从位置 1 运动到位置 2。

  "速度越慢越好"、"时间越短越好"

- 对于一个自由粒子，动能 T 是常数 $\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = T\Delta(t_2 - t_1) = 0$ 最短时间原理！

- 在两点间保持能量守恒的所有可能路径中，一个自由粒子将沿着运动时间为最短的特定路径运动。

- 费马原理：在两点之间，光线将沿着传输时间为最短的路径传输。

雅可比形式的最小作用量原理

$$\Delta I[C] \equiv \Delta \int_C p_i dq_i = \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0$$

- 约束与时间无关、势场与速度无关时，动能可表为

$$2T = 2(E - V) = \sum_{ij} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_i p_i\dot{q}_i$$

- 在位形空间定义路径长度 $(ds)^2 = A_{ij}dq_i dq_j$

$$\Rightarrow \quad 2T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

- 于是有

$$\Delta \int_C p_i dq_i = \Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2(E-V)}\, ds = 0$$

最短路径原理!

- 系统的运动沿着位形空间的短程线进行!
- 可以用于求解路径。

重力场中的轨迹方程

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2(E-V)}\, ds = 0$$

- 求质量为 m 的质点在均匀重力场中运动的轨迹

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = mgy$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_{ks} \dot{q}_k \dot{q}_s$$

$$m_{11} = m_{22} = m, \quad m_{12} = 0.$$

位形空间的弧长

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= m_{11}(dx)^2 + 2m_{12}dxdy + m_{22}(dy)^2 \\ &= m\left[(dx)^2 + (dy)^2\right] \\ &= m\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2\end{aligned}$$

重力场中的轨迹方程

$$(ds)^2 = m\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2$$

$$\Delta\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{2(E-V)}\,ds = 0$$

- 由雅可比最小作用量原理：

$$\Delta\int\sqrt{2(E-V)}ds = \Delta\int\sqrt{2(E-mgy)}\sqrt{m(1+y'^2)}dx = 0.$$

- 由于上式中不显含时间，于是该非等时变分问题对应拉格朗日方程：

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \xrightarrow{\text{经过一些运算}} 2(E-mgy)y''+mg(1+y'^2)=0$$

$$f-y'\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=C \xrightarrow{\text{经过运算}} 1+y'^2=C(E-mgy)$$

重力场中的轨迹方程

$$1+y'^2=C(E-mgy)$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C(E-mgy)-1}}=dx$$

积分

$$\Rightarrow \sqrt{C(E-mgy)-1}=-\frac{1}{2}Cmgx+C_1$$

可见轨迹为抛物线！

哈密顿原理

- 拉格朗日方程可通过哈密顿原理得到

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$

在哈密顿力学中，哈密顿原理可以直接导出正则方程吗?

- 我们首先回顾一下在拉格朗日力学中，哈密顿原理是怎样导出拉格朗日方程的?

考虑路径 $q = q(t)$，并定义作用量关于路径的变分如下：

$$q(t, \alpha) \equiv q(t) + \alpha\eta(t)$$

$$I(\alpha) \equiv \int_{t_1}^{t_2} f(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t)dt$$

$$\delta I[q(t)] \equiv \left(\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

哈密顿原理

$$q(t,\alpha) \equiv q(t) + \alpha\eta(t)$$

$$I(\alpha) \equiv \int_{t_1}^{t_2} f(q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t)dt$$

$$\delta I[q(t)] \equiv \left(\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

- 一些运算之后

$$\left(\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \eta(t)dt + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \boxed{\eta(t)}\right]_{t_1}^{t_2}$$

在 t_1 和 t_2 处为零！

- 要求作用量关于路径的变分为零，给出

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

哈密顿原理

- 利用哈密顿量可将作用量积分重写，

$$\delta I \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right) dt$$

相空间的变分原理，亦称“修正的哈密顿原理”

现在，δ 表示在相空间的变分，即对 *p(t)* 和 *q(t)* 分别独立变分

$$q_i(t,\alpha) \equiv q_i(t) + \alpha\eta_i(t) \qquad p_i(t,\alpha) \equiv p_i(t) + \alpha\zeta_i(t)$$

- 利用同样的方法，可以计算作用量的变分，只不过现在考虑 2n个独立变量 p_i 和 q_i，而不是 *n* 个 q_i

$$f(q,\dot{q},p,\dot{p},t) = p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)$$

实际运算中，可以略去！

修正的哈密顿原理

$$f(q,\dot{q},p,t)=p_i\dot{q}_i-H(q,p,t)$$

- 作用量积分 *δI =0* 等价于

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_i}+\dot{p}_i=0 \qquad \dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}=0$$

哈密顿正则方程!

- 整个推导过程与拉格朗日表述下的推导非常类似，但是，要注意到，在端点处变分的条件有些许不同!

对端点的变分约束

- 在拉格朗日表述下，要求变分在端点满足，

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

两端点在位形空间内是固定的

在哈密顿表述下，要求变分在端点满足，

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$$

条件似乎更严格了?

- 事实上，我们在实际推导中，只需要

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\eta(t)\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\boxed{\frac{\partial f}{\partial \dot{p}}}\zeta(t)\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

为零，因为f并不依赖于$\dot{p}$

$$f(q,\dot{q},p,t) = p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)$$

- 因此，我们事实上仍仅需要 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ 与拉格朗日表述一致！

对端点的变分约束

- 当然，我们还是可以强行要求更加严格的变分约束

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$$

这样使 p 和 q 看起来更加对称

这样做是有益的，因为给被变分的作用量积分提供更多的自由度

- 事实上，在不影响变分原理的情况下，可以给作用量积分的被积函数附加任意函数的时间全微商

$$I(\alpha) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) + \frac{dF(q,p,t)}{dt} \right) dt$$

- 引入项的贡献

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dF(q,p,t)}{dt} \right) dt = \left[F(q(t),p(t),t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

$\delta = 0$，变分为零

对端点的变分约束

$$I(\alpha) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H(q,p,t) + \frac{dF(q,p,t)}{dt} \right) dt$$

- 令 $F = -q_i p_i$ ➡ $\dfrac{dF}{dt} = -\dot{q}_i p_i - q_i \dot{p}_i$

$$I(\alpha) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(-q_i \dot{p}_i - H(q,p,t) \right) dt$$

可以看到，被积函数已经不是拉格朗日量了

- 修正的哈密顿原理提供一条建立哈密顿正则方程的独立途径，而不必依赖于拉格朗日表述。如果必要，也可避免将哈密顿正则变量与拉格朗日广义坐标、广义速度建立联系。因此，多组正则变量之间的坐标变换成为可能。**正则变换！**

- 修正的哈密顿原理是相空间的变分，要求正则动量 q 与正则坐标 p 的变分是独立的。这是哈密顿表述与拉格朗日表述的根本差别。

- 哈密顿表述下，坐标不是“坐标”，动量不是“动量”，它们只是两组描述运动的独立变量，通过正则方程相互间建立近乎对称的关系，它们具有同等地位，都不应被看作是更基本的变量。

正则变换

- 拉格朗日表述 —〉哈密顿表述，我们从位形空间变换至相空间

$$(q_1, \ldots, q_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

- 拉格朗日方程在广义坐标变换下保持不变 $Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, t)$
- 哈密顿正则方程能否在相空间内相应坐标变换下保持不变?

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \qquad P_i = P_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

正则变换

- 拉格朗日表述 —〉哈密顿表述，我们从位形空间变换至相空间

$$(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

- 拉格朗日方程在广义坐标变换下保持不变 $Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, t)$

- 哈密顿正则方程能否在相空间内相应坐标变换下保持不变?

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \qquad P_i = P_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

- 不能！这些变换的范围太广了，但其中某些变换下正则方程可以保持不变，即正则变换。

- 哈密顿表述赋予"坐标"和"动量"同等独立变量的地位，使我们在选择"坐标"和"动量"的描述系统运动时具有更大的自由。

<u>**目标：寻找使问题最大程度简化的"坐标变换"！**</u>　　　如变换成循环坐标！

总结

- 最小作用量原理

  全变分

  莫佩蒂原理、雅可比原理

- 从哈密顿原理推导出哈密顿正则方程：

  修正的哈密顿原理

  额外的端点变分约束

  允许“正则变换”

- 下一讲：正则变换