理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 最小作用量原理：哈密顿原理 与 莫佩蒂原理
- 从哈密顿原理推导出哈密顿正则方程：

  修正的哈密顿原理

  额外的端点变分约束

  允许“正则变换”

今日目标

- 正则变换
- 四类生成函数的基本型

正则变换

- 目标：找到一种变换

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \qquad P_i = P_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

使得变换前后的坐标与动量均满足正则方程，即

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

K 为变换后的哈密顿量 $K = K(Q, P, t)$ “卡密顿量”

- 根据哈密顿原理，我们有

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)\right) dt = 0 \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)\right) dt = 0$$

一般变换

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)dt = 0$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right)dt = 0$$

- 要满足哈密顿原理，存在两种类型的可能变换

$$P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t) = \lambda(p_i\dot{q}_i - H)$$

标度变换

$$P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

正则变换

- 将两者结合起来，

$$P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{dF}{dt} = \lambda(p_i\dot{q}_i - H)$$

扩展的正则变换

标度变换

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)dt = 0$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right)dt = 0$$

- 我们当然总是可以改变坐标和动量的尺度，而不改变物理本质，如物理量的单位变换。

$$Q_i = \mu q_i \qquad P_i = \nu p_i$$

为了满足哈密顿原理，我们定义

$$K = \mu\nu H(p,q,t)$$

$$\Rightarrow \quad P_i\dot{Q}_i - K = \mu\nu(p_i\dot{q}_i - H)$$

标度变换！

- 当然，在物理上这样的变换太平庸了，我们接下来关注“**正则变换**”

开普勒问题的标度变换

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot{q}_i - H(q,p,t)\right)dt = 0$$

$$r \to \lambda r, \quad p_r \to \lambda^\alpha p_r, \quad \theta \to \theta, \quad p_\theta \to \lambda^\beta p_\theta, \quad t \to \lambda^\gamma t$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right)dt = 0$$

$$K = \frac{1}{2m}\left(\lambda^{2\alpha}p_r^2 + \frac{\lambda^{2\beta}p_\theta^2}{\lambda^2 r^2}\right) - \frac{k}{\lambda r} \propto H$$

$$\alpha = -1/2, \quad \beta = 1/2, \quad K = \lambda^{-1}H$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(P_i\dot{Q}_i - K\right)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\lambda^{-1/2}p_r\lambda^{1-\gamma}\dot{r} + \lambda^{1/2}p_\theta\lambda^{-\gamma}\dot{\theta} - \lambda^{-1}H\right)\lambda^\gamma dt = 0$$

$$\gamma = 3/2$$

开普勒第三定律！

正则变换

$$P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t) + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(P_i\dot{Q}_i - K\right)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot{q}_i - H - \frac{dF}{dt}\right)dt = -\,\delta\,[F]_{t_1}^{t_2} = 0$$

上式成立，要求变分在端点 t_1 和 t_2 处满足

$$\delta p = \delta q = \delta P = \delta Q = 0$$

- F 可以是关于新老坐标和新老动量 p_i, q_i, P_i , Q_i ，以及时间t 的任意函数

一个正则变换可由一个函数F 定义

因此，F 也称为正则变换的生成函数或生成元

一个简单的例子

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 尝试这样一个生成函数 $F = q_i P_i - Q_i P_i$

  由这个生成函数给出的正则变换为

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = -K + (q_i - Q_i)\dot{P}_i + P_i\dot{q}_i = p_i\dot{q}_i - H$$

$\Rightarrow$ $Q_i = q_i$ $P_i = p_i$ $K = H$ 恒等变换!

- 太简单了!

一个简单的例子

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 尝试这样一个生成函数 $F = f_i(q_1, \ldots, q_n, t)P_i - Q_iP_i$

f_i 是任意关于"老坐标"与时间的函数。

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = -K + (f_i - Q_i)\dot{P}_i + P_i\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}P_i = p_i\dot{q}_i - H$$

$\Rightarrow$ $Q_i = f_i(q_1, \ldots, q_n, t)$ 涵盖所有可能的广义坐标的变换

$$p_i = \frac{\partial f_j}{\partial q_i}P_j \qquad K = H + \frac{\partial f_i}{\partial t}P_i$$

若要求得*P*，需要将 *n* 个方程组反解！

生成函数的任意性

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 一个生成函数*F* 可以给出一个正则变换

  反过来，一个正则变换并不对应唯一的生成函数*F*

  可能有多个生成函数对应同一个正则变换。

- 例如，我们总可以在生成函数*F*上附加一个任意的关于时间*t* 的函数*g(t)*

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \longrightarrow P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} + \boxed{\frac{dg(t)}{dt}}$$

不会影响对作用量积分的变分

$$K \to K - \frac{dg(t)}{dt}$$

仅改变哈密顿量而不影响对物理的描述

- 生成函数*F* 具有附加一个仅为时间的任意函数的任意性。

  哈密顿量也具有同样的任意性。

如何构建生成函数?

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- 我们先假设 $K(Q,P,t) = H(q,p,t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - P_i\dot{Q}_i$$

- 满足这一点的最简单形式为

$$F = F(q,Q) \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \qquad -P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}$$

- 我们可以有一个很简单的例子，$F(q,Q) = q_iQ_i$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\Rightarrow \quad p_i = Q_i \qquad P_i = -q_i$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

这再次体现了正则坐标与正则动量的独立地位，你可以任意交换它们的名称。

从正则方程也可看出，要交换坐标和动量，需要如上符号变换，才能满足正则方程的形式。

第一类生成函数

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

- $F = F(q, Q)$ 不能生成时间依赖的正则变换

因此，我们将之拓展为 $F = F_1(q, Q, t)$ 第一类生成函数！

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i}$$

- 此类生成函数对哈密顿量的影响为

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} = p_i\dot{q}_i - P_i\dot{Q}_i + K - H$$

$$\Rightarrow \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

谐振子

- 考虑一维简谐振子

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}=\frac{1}{2m}\left(p^2+m^2\omega^2q^2\right)$$

$$\omega^2\equiv\frac{k}{m}$$

我们可以将平方和转化为三角函数吗?

- 令 $p=f(P)\cos Q$ $\quad q=\dfrac{f(P)}{m\omega}\sin Q$

$$\Rightarrow\quad K=H=\frac{\{f(P)\}^2}{2m}$$

Q 是循环坐标 —〉 P 是常数

所以，问题转化为如何确定 *f(P)* 使得坐标变换为正则变换?

谐振子

- 我们试试第一类生成函数 $F = F_1(q, Q, t)$

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i}$$

- 将 *p* 表示为 *q* 和 Q 的函数

$$p = f(P)\cos Q \qquad q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q \quad \Rightarrow \quad p = m\omega q \cot Q$$

- 对 *q* 积分 $\Rightarrow$ $F_1 = \dfrac{m\omega q^2}{2}\cot Q$ $\Rightarrow$ $P = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = \dfrac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$

- 我们需要将 *H(q,p)* 转换为 *K(Q,P)*，故用 *P, Q*表示 *p, q*

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \qquad p = \sqrt{2Pm\omega}\cos Q$$

$$\cot'\theta = -\frac{1}{\sin^2\theta}$$

谐振子

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \qquad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q$$

- 现在，我们可以计算新的哈密顿量了 （卡密顿量）

$$K = H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = \omega P = E$$

是不是超简单?

- 代入相应的正则方程并求解

$$P = \text{const} = \frac{E}{\omega} \qquad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \qquad Q = \omega t + \alpha$$

- 最终

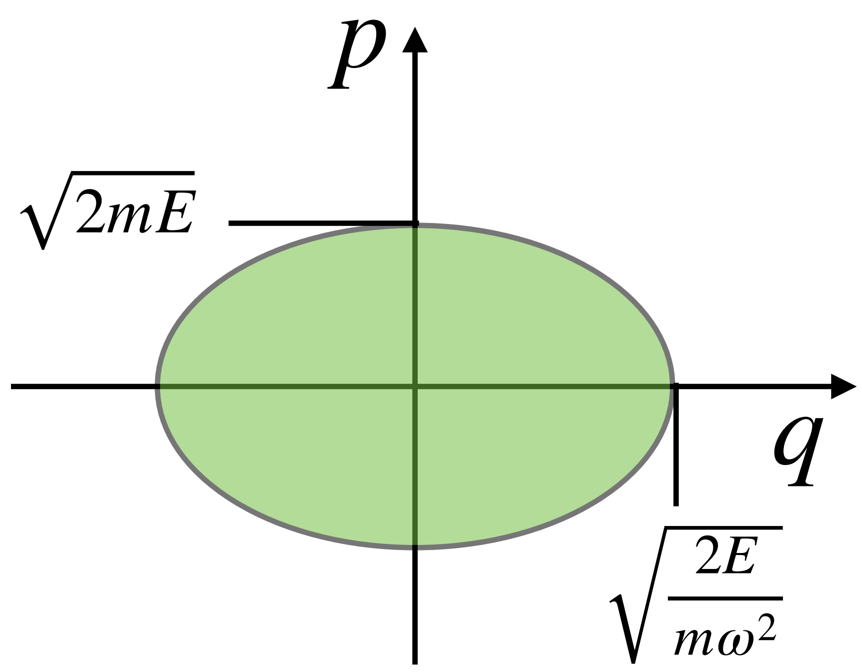
$$p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha)$$

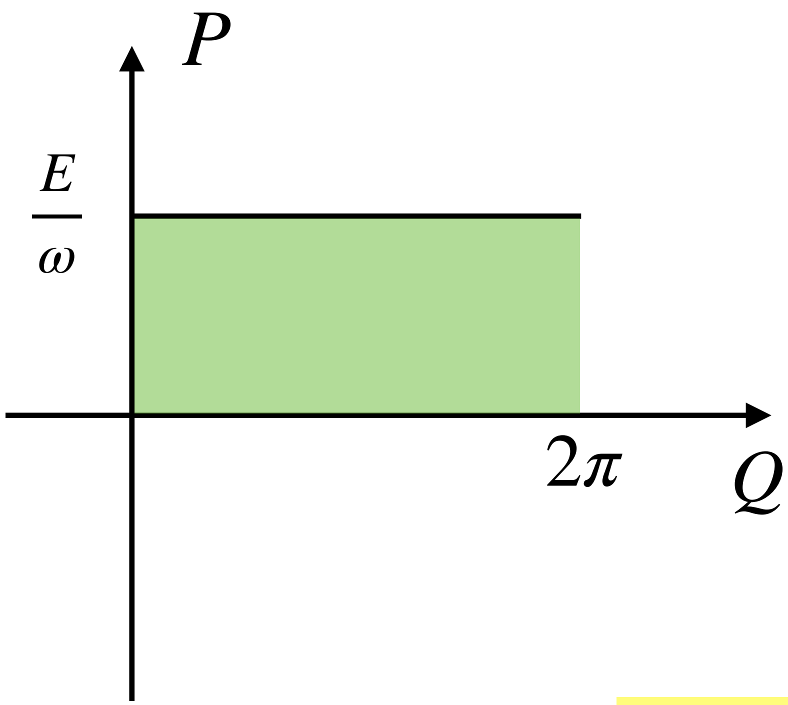
$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

解毕!

相空间

- 我们可以分别在 *p-q* 和 *P-Q* 两个相空间下考察谐振运动





- 谐振子运动一个周期在两个相空间描绘出的面积相等 $\frac{2\pi E}{\omega}$

- 循环运动系统在相空间内描绘的面积不变!

$Q = \omega t + \alpha$ $\quad$ $P = \text{const} = \frac{E}{\omega}$ $\quad$ $p = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \alpha)$ $\quad$ $q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha)$

其他类型的生成函数

- 第一类生成函数 $F = F_1(q, Q, t)$ 仍然不是最一般化的生成函数

  比如，恒等正则变换就不能由其得到 $Q_i = q_i$ $P_i = p_i$

- 我们需要依赖于不同变量组的生成函数

  事实上，可以有以下 *4* 种生成函数的基本型

  $F_1(q, Q, t)$ $F_2(q, P, t)$ $F_3(p, Q, t)$ $F_4(p, P, t)$ 自变量总是一新一旧

- 我们接下来推导它们的形式

  记住，我们总是可以在作用量积分中附加一个函数的时间全导数

第二类生成函数

- 首先，我们认识这样一个事实, 利用 $F=-q_ip_i$ 可得到如下变换

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot{q}_i-H(q,p,t)\right)dt=0 \Rightarrow \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(-\dot{p}_iq_i-H(q,p,t)\right)dt=0$$

- 于是，我们可将正则变换的定义相应地写为

$$P_i\dot{Q}_i-K+\frac{dF}{dt}=p_i\dot{q}_i-H \Rightarrow -\dot{P}_iQ_i-K+\frac{dF}{dt}=p_i\dot{q}_i-H$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt}=p_i\dot{q}_i+Q_i\dot{P}_i+K-H$$

- 为了满足这一条件

$$F=F_2(q,P,t) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial q_i}=p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_i}=Q_i \qquad K=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

第二类生成函数

- 如果我们还是回到原本对正则变换及其生成函数的定义

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

- 一个平庸的例子 $F_2 = q_i P_i$

$\Rightarrow$ $p_i = P_i$ $\quad q_i = Q_i$ 恒等变换!

- 同样的思路可以得到第三、四类生成函数

正则变换的四类基本生成函数

生成函数	微商	示例
$F_1(q, Q, t)$	$p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i \quad Q_i = p_i,\ P_i = -q_i$
$F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i \quad Q_i = q_i,\ P_i = p_i$
$F_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = p_i Q_i \quad Q_i = -q_i,\ P_i = -p_i$
$F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = p_i P_i \quad Q_i = p_i,\ P_i = -q_i$

四类生成函数

- 必须强调，四类生成函数“几乎”是等价的

虽然看起来，第一类生成函数要“基本”一点…

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

$$-\dot{P}_iQ_i - K + \frac{dF_2}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

$$P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_3}{dt} = -\dot{p}_iq_i - H$$

$$-\dot{P}_iQ_i - K + \frac{dF_4}{dt} = -\dot{p}_iq_i - H$$

四类生成函数任何一类都
不比其他三类更基本！

我们只是“任意”地从第一类出发进行了推导，因为第一类形式恰好对应之前学过的拉格朗日形式。

四类生成函数

- 是不是任何一个正则变换都有四类生成函数对应呢？ （既然等价）

  不是！如恒等变换就只能通过 F_2 和 F_3 得到！

- 但是，这不应该影响四类生成函数的“等价性”

  我们总是可以交换正则坐标和正则动量

  $$Q_i = p_i \qquad P_i = -q_i$$

  我们总是可以引入平庸的标度变换来改变符号

  $$Q_i = \pm q_i \qquad P_i = \pm p_i$$

- 这样，四类生成函数在实际应用层面就等价了。

正则变换构成一个群

- 存在恒等变换
- 正则变换的逆变换也是正则变换
- 两个相继的正则变换给出一个新的正则变换
- 正则变换满足结合律

总结

- 正则变换
- 标度变换
- 四类生成函数的基本型