理论力学

赵鹏巍

哈密顿力学

- 牛顿力学 —〉拉格朗日力学 —〉哈密顿力学

  描述相同的物理，得到相同的结果。不同的是描述问题的角度：

  1. 对称性与守恒律更明确

  2. 坐标变换更灵活

- 哈密顿力学是一个非常基础性的理论框架

  哈密顿—雅可比理论

  经典微扰理论

  量子力学

  统计力学

拉格朗日表述 —〉哈密顿表述

- 关于 n 个坐标的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

这是一个关于n 个变量的二阶微分方程

n 个方程 —〉2n 个初始条件 $q_i(t=0)$ $\dot{q}_i(t=0)$

- 我们可以只处理一阶微分方程吗?

可以，但是方程个数变成了 2n 个！

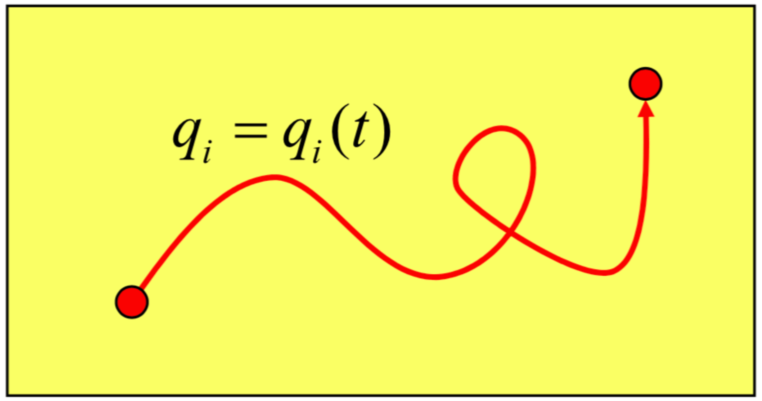
我们可以保留 q_i，但是将 $\dot{q}_i$ 作某种类似替换

取共轭动量

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

位形空间

- 我们将 $(q_1, \ldots, q_n)$ 当作一个 n-维空间的点，称为位形空间
  体系的运动即可表示为位形空间的一条曲线



- 做变分时，我们将 q_i 和 $\dot{q}_i$ 作为独立变量
  故，我们在 n-维的位形空间内有 2n 个独立变量

- 是不是可以描绘成一个 2n-维空间内的运动呢?
  你有没有觉得这样会更自然?

相空间

- 我们将广义坐标及其共轭动量当作独立变量

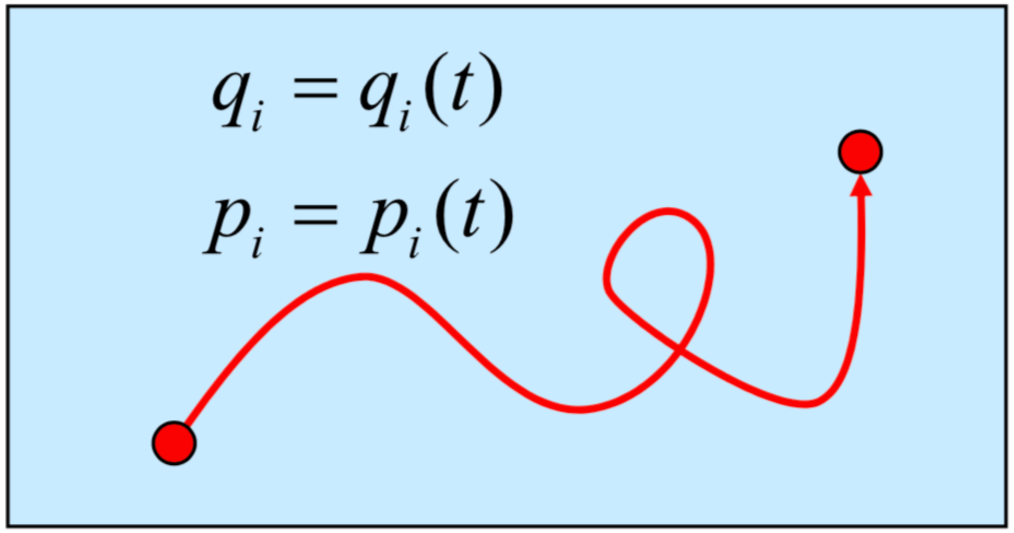
  体系在任一时刻的状态可描述为 $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$

  体系在任一状态可描述为在2n-维相空间的一点

  体系的运动可描述为在2n-维相空间的曲线

- 这样，我们实际上变换了独立变量

$$(q_i, \dot{q}_i, t) \to (q_i, p_i, t)$$

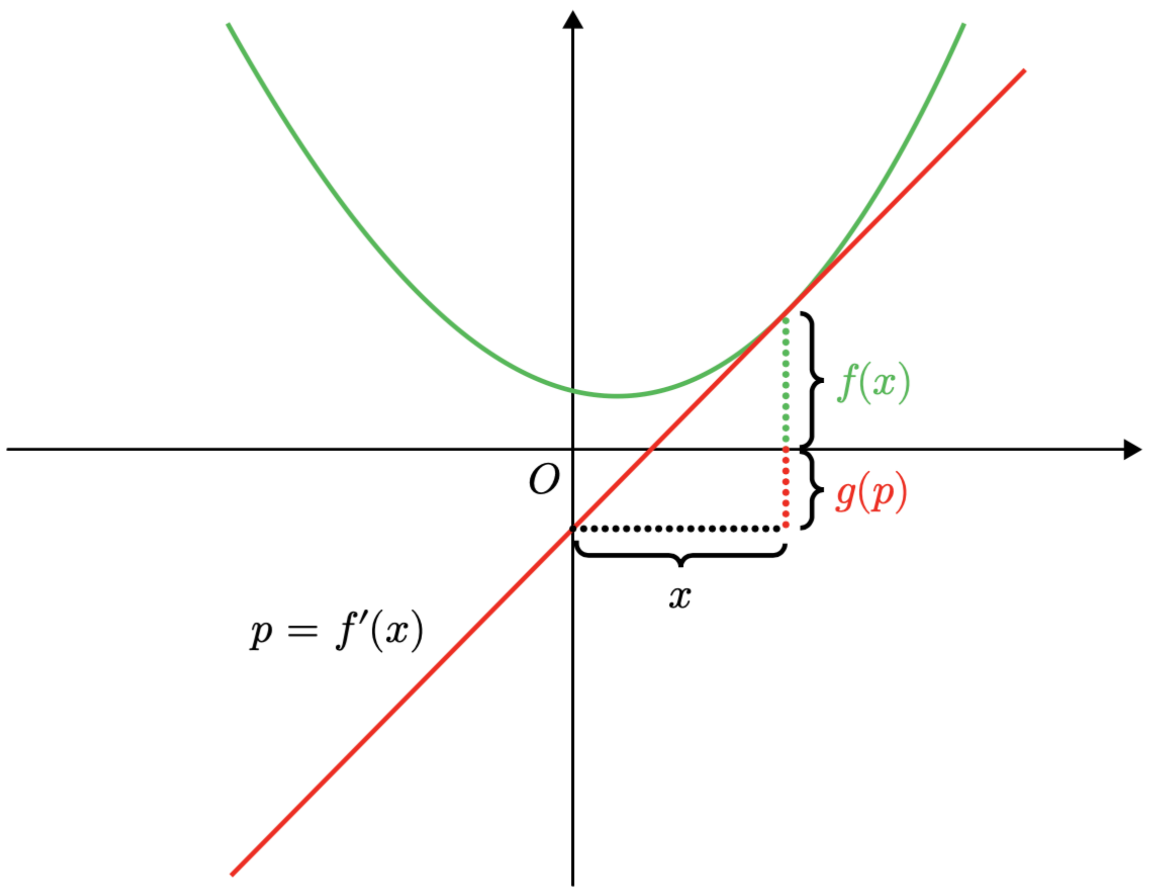


- 接下来，需要一点数学推演！

勒让德变换

- 令 $f(x)$ 为一个凸函数 (因为 L 通常为 $\dot{q}$ 的凸函数)，即导数函数 $f'(x)$ 单调
- 在任意 x 处做切线，切线的截距 g 可以表示为其斜率 p 的函数 $g = g(p)$
- 两个函数 $f(x)$ 和 $g(p)$ 必然满足几何关系: $g(p) = xp - f(x), \quad p = f'(x)$

从 *f(x)* 到 *g(p)* 的勒让德变换



1. $f'(x)$ 的单调性保证 *x* 和 *p* 一一映射。
2. 勒让德变换是可逆的，*f(x)* 和 *g(p)* 实际上是完全等价的两个函数，包含相同的信息
3. *f(x)* 和 *g(p)* 区别在于二者分别采用“坐标”和 “切线” 进行编码。

勒让德变换

- 考虑一个依赖于两个变量的函数 $f(x, y)$

全微商: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy \equiv udx + vdy$

- 定义函数 $g \equiv f - ux$

全微商: $dg = df - d(ux) = udx + vdy - udx - xdu = vdy - xdu$

$\Rightarrow$ g 是 u 和 y 的函数

$$\frac{\partial g}{\partial y} = v \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = -x$$

令 $f = L$ $(x, y) = (\dot{q}, q)$

$$L(\dot{q}, q) \rightarrow \boxed{g(p, q)} = L - p\dot{q}$$

正是我们所需要的!

哈密顿量

注意采用了求和规则！！

- 定义哈密顿量 $H(p,q,t) = \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$ 与前述勒让德变换仅差一个无关紧要的负号

全微商: $$dH = \cancel{p_i d\dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

- 拉格朗日方程 $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$

$$\Rightarrow \quad dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

另一方面，

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

哈密顿运动方程，也称为哈密顿正则方程

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

哈密顿正则方程

- 哈密顿正则方程 $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$

  2n 个方程取代了n 个拉格朗日方程

  一阶微商取代了二阶微商

  广义坐标及其共轭动量（亦称正则动量）的 “对称性” 显而易见

- 正则方程并没有提供关于体系运动规律的任何新的信息

  第一个方程将动量与速度联系在一起

  第二个方程等价于拉格朗日方程/牛顿运动方程

一个简单的例子

- 一个简谐振子：一个系于弹性系数为 k 的弹簧上的质点，受力满足胡克定律 $F=-kx$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2 \;\Rightarrow\; p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \;\Rightarrow\; \dot{x}=\frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{aligned} H&=\dot{x}p-L\\ &=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\\ &=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

将 $\dot{x}$ 替换 p/m

- 正则方程

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-kx$$

简谐振子！

能量函数

- 能量函数的定义与哈密顿量的定义是相同的

$$h(q,\dot{q},t)=\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L(q,\dot{q},t)$$

差别在于哈密顿量是 *(q,p,t)* 的函数

- 能量函数与体系总能量相等的条件：

1. 拉格朗日量： $L=L_0(q,t)+L_1(q,t)\dot{q}_i+L_2(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k$
2. 时间无关的约束： $T=L_2(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k$
3. 保守力： $V=-L_0(q)$

前面讲过的…

哈密顿量与总能量

- 如果能量函数与总能量相等，我们可以不写出拉格朗日量而直接给出体系的哈密顿量

  对于简谐振子

$$H = E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

- 这种做法很多时候是可行的，但也有不可行的情况

  1. 当参考系是时间依赖的，如转动参考系（非惯性系）

  2. 当势场是速度依赖的，如电磁场中的带电粒子

电磁场中的带电粒子

- 考虑一个电磁场中的带电粒子

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - q\phi + qA_i\dot{x}_i$$

由于最后一项的存在，我们不能直接利用 *H=T+V*

$$\Rightarrow \quad p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$\Rightarrow \quad h = (m\dot{x}_i + qA_i)\dot{x}_i - L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + q\phi$$

这就是总能量 *E*

- 这里求出了能量函数 h，要写出哈密顿量，还需要利用 $p_i = m\dot{x}_i + qA_i$

$$H(x_i, p_i) = \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\phi$$

- 注意：这里 H = E, 但 H ≠ T + V， 因为粒子的势能只依赖于电势 ϕ

电磁场中的带电粒子

$$H(x_i, p_i) = \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\phi$$

- 哈密顿正则方程

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i - qA_i}{m}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = q\frac{p_j - qA_j}{m}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- 洛伦兹力？我们可以从正则方程得到

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + qA_i) = q\dot{x}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

经过一些运算 $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = qE_i + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_i$$

$$E_i = -\nabla\phi - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_i = (\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}))_i$$

哈密顿量守恒

- 考虑哈密顿量的时间微商

$$\frac{dH(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$= \cancel{-\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p}} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

- 若哈密顿量不显含时间，则哈密顿量是守恒的。注意：哈密顿量不一定等于总能量。如果等于总能量，表明能量守恒，如果不等于能量，哈密顿量仍然是守恒的。

$$L(q,\dot{q},t) = T - V$$

广义坐标的变换会改变 L 的形式，但不改变其量值

$$H(p,q,t) = \dot{q}_i p_i - L$$

广义坐标的变换会改变 H 的形式，也会改变其量值，因此，H 可以是能量，也可以不是，可以守恒，也可以不守恒，描述同样的物理。

循环坐标

- 循环坐标是在拉格朗日量中不出现的广义坐标

- 所以，在哈密顿量中也不会出现

$$H(p,\cancel{q},t) = \dot{q}_i p_i - L(\cancel{q},\dot{q},t)$$

- 根据哈密顿正则方程

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

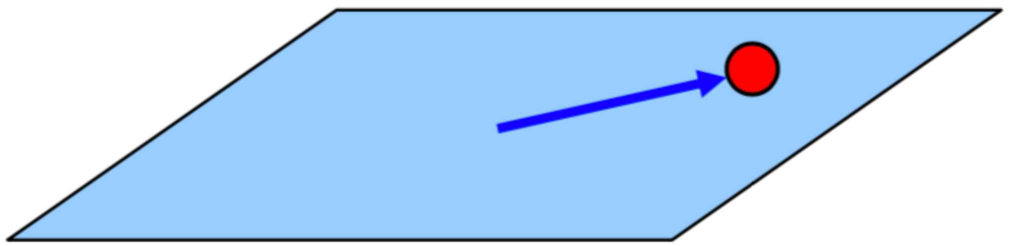
循环坐标的共轭动量是守恒的！

这与拉格朗日力学中的表述是一致的！

循环坐标的一个示例

- 二维的有心力问题

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$



$$\Rightarrow \quad p_r = m\dot{r} \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) + V(r)$$

θ 是循环坐标 $\quad p_\theta = \mathrm{const} = l$

哈密顿正则方程

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

关于循环坐标 θ 的正则方程可自动略去，因此，θ 也称为可遗坐标

哈密顿正则方程 VS 拉格朗日方程

- 拉氏量的可遗坐标也是哈密顿量的可遗坐标；拉氏量不显含时间，则哈密顿量也不显含时间。
- 可遗坐标会对应一个运动积分常数。在哈密顿表述中，可先将该坐标对应的广义动量常数代入哈密顿量中消去该广义动量，这样实际上减少了独立变量；但在拉格朗日表述中，不能先将广义动量常数代入到拉氏量中，再列拉格朗日方程求解。
- 非完整约束、非保守力的情况：

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0$$

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_k + \sum_l^{m'} \lambda_l a_{lk}$$

Qk：非保守力对应的广义力

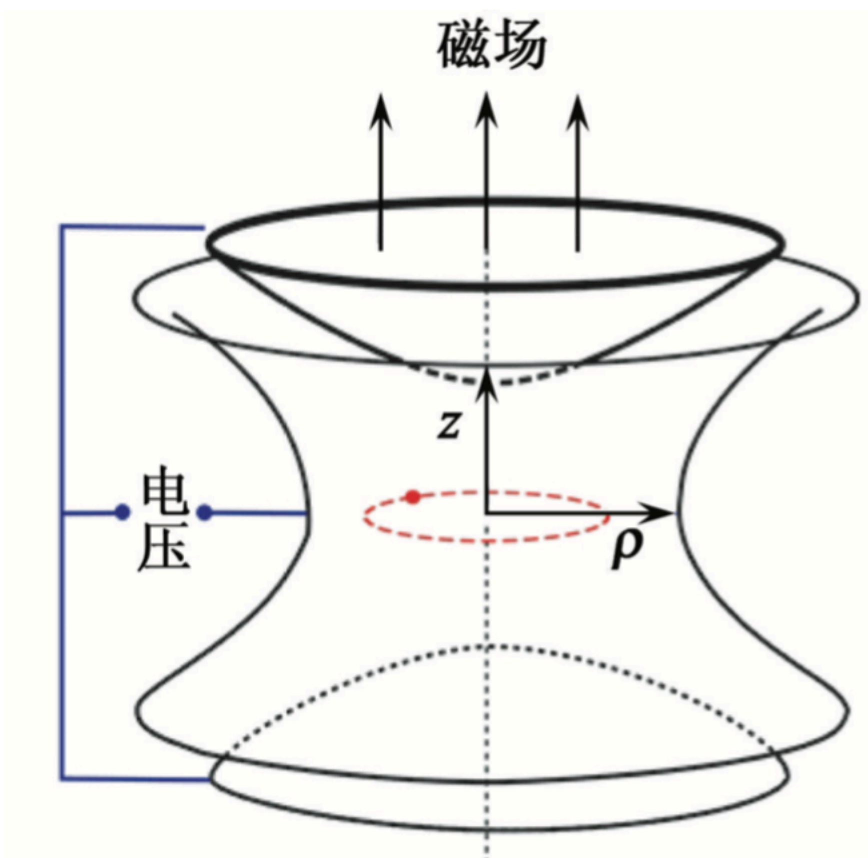
相空间

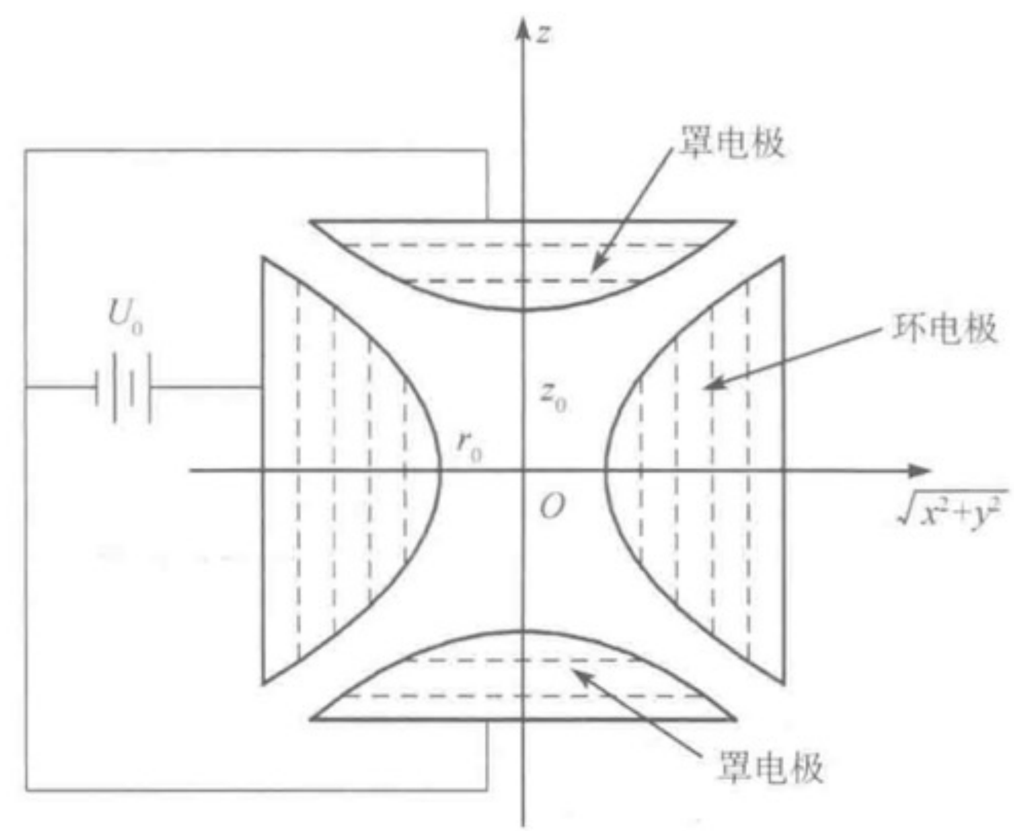
力学体系	函数	坐标	维度	空间
牛顿	$F(x_i, \dot{x}_i)$	x_i	$3N$	位置空间
拉格朗日	$L(q_j, \dot{q}_j, t)$	q_j	n	位形空间
哈密顿	$H(q_j, p_j, t)$	(q_j, p_j)	$2n$	相空间

- n 维位形空间可以视为嵌入在 3N 维位置空间中的 n 维微分流形
- n 维位形空间中每一个点上都有一个 n 维切空间 (广义速度) 以及 n 维余切空间(广义动量)，二者互为对偶空间(dual space)
- n 维位形空间的所有点上的切空间 构成一个 2n 维切丛 (n个坐标表示点的位置，n个坐标 表示切矢量分量)
- n 维位形空间的所有点上的余切空间构成一个 2n 维余切丛 (n个坐标表示点的位置，n个坐标 表示余切矢量分量)，**即相空间**
- 相空间是一个具备特定结构的微分流形，称为辛流形：**“点”对应系统的“状态”；“几何结构”对应系统的“运动规律**

潘宁阱

- 潘宁阱是一种用来将带电粒子、离子等约束在空间的一个特定区域中，进而研究它们的物理性质或进行其他相关高精度实验的一种装置。
- 由一对罩电极和一个环电极组成，电极表面为关于 z 轴的旋转双曲面。
- 考虑一带正电的粒子，在罩电极和环电极上分别施加正负电压，在 z 方向施加磁场，带电粒子如何运动?



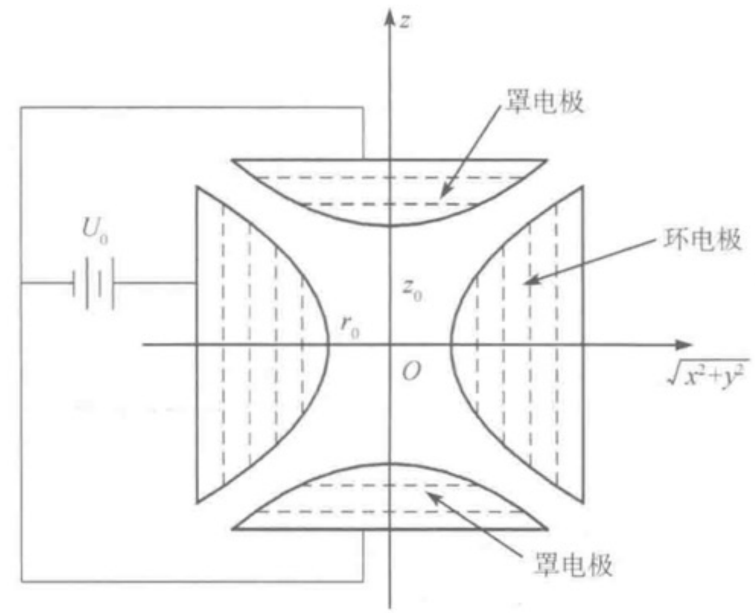


电势

- 罩电极和环电极的曲面方程：

  罩电极：$2z^2 - x^2 - y^2 = 2z_0^2$

  环电极：$2z^2 - x^2 - y^2 = -r_0^2$



- 电极表面是等势面：罩电极电势为U_0，环电极为零。

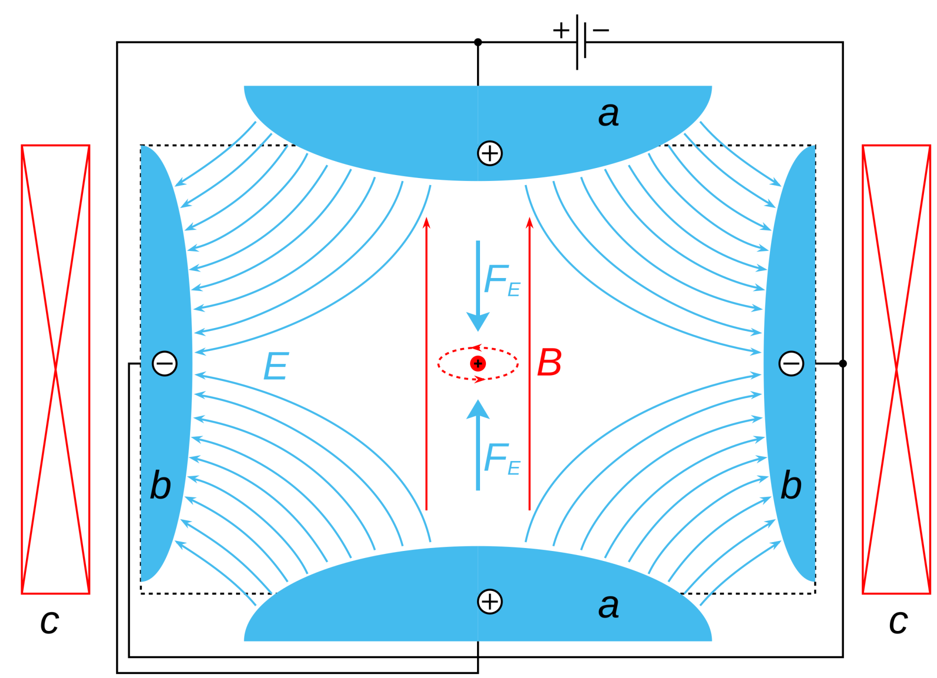
- 阱中电势满足拉普拉斯方程：$\nabla^2\Phi(x,y,z) = 0$

- 易知 $\nabla^2(2z^2 - x^2 - y^2) = 0$

  不妨设，$\Phi = A(2z^2 - x^2 - y^2) + B$

  代入边界条件，可知

$$A = \frac{U_0}{2z_0^2 + r_0^2}, \quad B = Ar_0^2$$



拉氏量

- 电势：

$$\Phi = \frac{U_0}{2z_0^2 + r_0^2}(2z^2 - x^2 - y^2)$$

- 磁矢势不唯一，由于阱关于z轴对称，选取对称的磁矢势

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = (0,\ 0,\ B)$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx,\ 0)$$

- 拉氏量

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\Phi + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{4}m\omega_z^2(2z^2 - x^2 - y^2) - \frac{1}{2}m\omega_c(\dot{x}y - \dot{y}x) \end{aligned}$$

$$\omega_z = \left(\frac{4qU_0}{m(2z_0^2 + r_0^2)}\right)^{1/2}$$

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

哈密顿量

- 广义动量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_y, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + qA_z$$

- 哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\Phi \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \underline{\frac{1}{2}\omega_c(xp_y - yp_x)} + \underline{\frac{1}{8}}m(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{m}q\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} \qquad \frac{1}{2m}q^2\boldsymbol{A}^2$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$$

$$\omega_z = \left(\frac{4qU_0}{m(2z_0^2 + r_0^2)}\right)^{1/2}$$

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

运动方程

- 正则方程

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\frac{1}{2}\omega_c(xp_y-yp_x)+\frac{1}{8}m(\omega_c^2-2\omega_z^2)(x^2+y^2)+\frac{1}{2}m\omega_z^2z^2$$

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}+\frac{1}{2}\omega_c y$$

$$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}-\frac{1}{2}\omega_c x$$

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{2}\omega_c p_y-\frac{1}{4}m(\omega_c^2-2\omega_z^2)x$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{1}{2}\omega_c p_x-\frac{1}{4}m(\omega_c^2-2\omega_z^2)y$$

$$\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-m\omega_z^2 z$$

- 运动方程

$$\ddot{x}=\frac{\dot{p}_x}{m}+\frac{1}{2}\omega_c\dot{y}=\frac{1}{2}\omega_c p_y/m-\frac{1}{4}(\omega_c^2-2\omega_z^2)x+\frac{1}{2}\omega_c\dot{y}=\omega_c\dot{y}+\frac{1}{2}\omega_z^2 x$$

$$\ddot{y}=\frac{\dot{p}_y}{m}-\frac{1}{2}\omega_c\dot{x}=-\frac{1}{2}\omega_c p_x/m-\frac{1}{4}(\omega_c^2-2\omega_z^2)y-\frac{1}{2}\omega_c\dot{x}=-\omega_c\dot{x}+\frac{1}{2}\omega_z^2 y$$

$$\ddot{z}=\frac{\dot{p}_z}{m}=-\omega_z^2 z$$

简谐振动 $z=A\cos(\omega_z t+\alpha_0)$

求解运动方程

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} + \frac{1}{2}\omega_z^2 x$$

$$\ddot{y} = -\omega_c \dot{x} + \frac{1}{2}\omega_z^2 y$$

- 在 x, y 平面，令 $u = x + \mathrm{i}y$，可得

$$\ddot{u} + \mathrm{i}\omega_c \dot{u} - \frac{1}{2}\omega_z^2 u = 0$$

令 $u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，可得

$$\omega^2 - \omega_c \omega + \frac{1}{2}\omega_z^2 = 0$$

$$\omega_\pm = \frac{1}{2}\left(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}\right)$$

- 如果要求粒子局限在阱中做周期运动，则

$$\omega_c^2 - 2\omega_z^2 > 0$$

求解运动方程

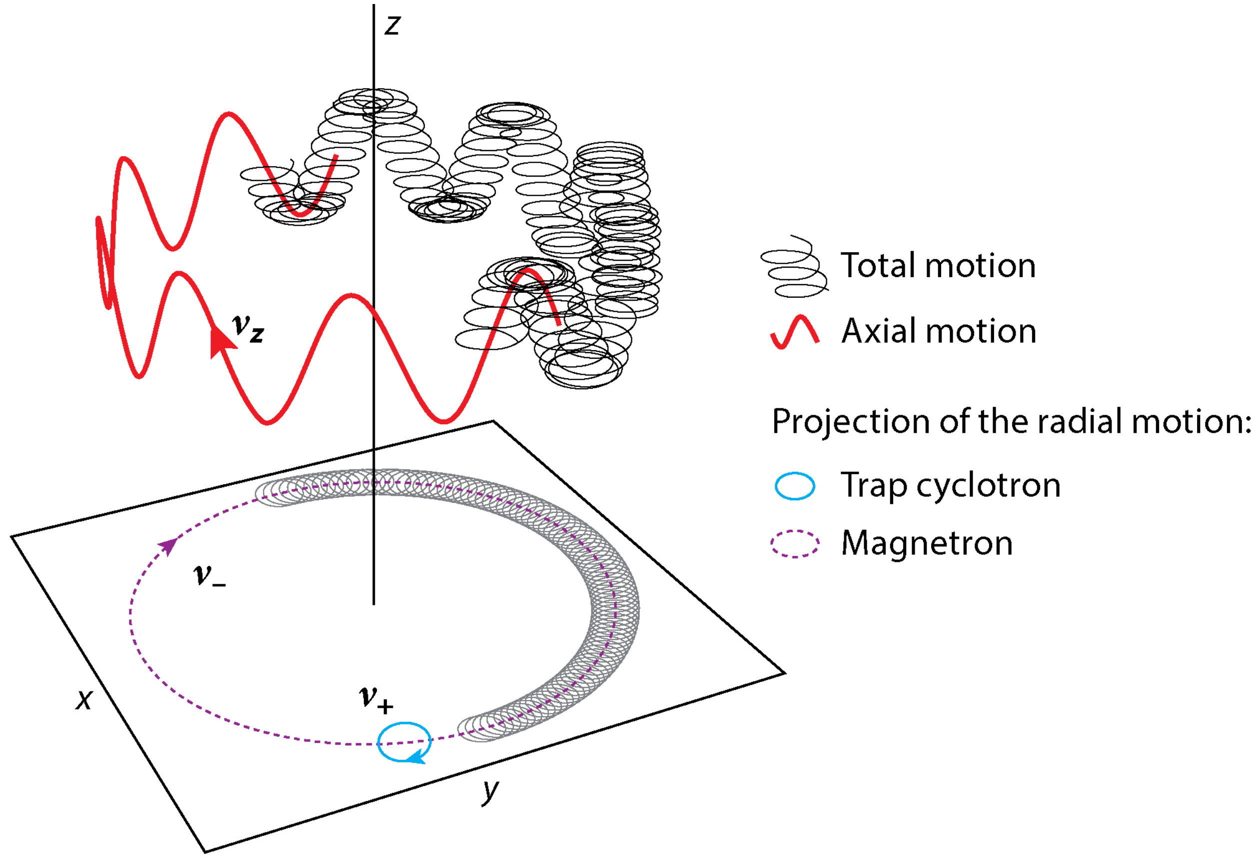
- 粒子在 x-y 平面的运动通解

$$u = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} = R_+ e^{-i(\omega_+ t + \alpha_+)} + R_- e^{-i(\omega_- t + \alpha_-)}$$

- $R_\pm$, $\alpha_\pm$ 均为实数，粒子局限在 $|R_+ - R_-| < r < R_+ + R_-$ 的圆环形区域内，两种频率振动的合成

$$x = R_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+) + R_- \cos(\omega_- t + \alpha_-)$$
$$y = R_+ \sin(\omega_+ t + \alpha_+) + R_- \sin(\omega_- t + \alpha_-)$$

1989诺贝尔奖



柱坐标求解

- 拉氏量

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \underbrace{\boxed{\frac{1}{4}m\omega_z^2(2z^2 - r^2)}}_{q\Phi} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}m\omega_c r^2\dot{\varphi}}}_{q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}}$$

- 正则动量

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m\omega_c r^2 = Const$$

φ 为循环坐标

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$$

$$\Phi = \frac{U_0}{2z_0^2 + r_0^2}(2z^2 - x^2 - y^2)$$

$$\omega_z = \left(\frac{4qU_0}{m(2z_0^2 + r_0^2)}\right)^{1/2}$$

柱坐标下的哈密顿量

- 哈密顿量

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{z}p_z - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}p_\varphi\omega_c + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{8}m(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)r^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{4}m\omega_z^2(2z^2 - r^2) + \frac{1}{2}m\omega_c r^2\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{1}{2}\omega_c$$

$$\dot{\varphi}p_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \frac{1}{2}p_\varphi\omega_c$$

$$-\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = -\frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}p_\varphi\omega_c - \frac{1}{8}mr^2\omega_c^2$$

$$-\frac{1}{2}m\omega_c r^2\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}p_\varphi\omega_c + \frac{1}{4}mr^2\omega_c^2$$

柱坐标下的运动方程

- 正则方程

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}p_\varphi\omega_c + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{8}m(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)r^2$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{1}{4}m(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)r$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -m\omega_z^2 z$$

- 运动方程

$$\ddot{r} + \frac{1}{4}(\omega_c^2 - 2\omega_z^2)r = \frac{p_\varphi^2}{m^2r^3}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{1}{2}\omega_c$$

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m} = -\omega_z^2 z$$

简谐振动 $z = A\cos(\omega_z t + \alpha_0)$

柱坐标下的运动方程求解

$$\ddot{r}+\frac{1}{4}(\omega_c^2-2\omega_z^2)r=\frac{p_\varphi^2}{m^2r^3}\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}-\frac{1}{2}\omega_c$$

- 径向与角向的运动是分离的，当 $\omega_c^2-2\omega_z^2>0$ 时

令 $\omega_r=\frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2-2\omega_z^2}$ $\qquad \ddot{r}+\omega_r^2r=\frac{p_\varphi^2}{m^2r^3}$

$$\ddot{r}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{r}^2}{\mathrm{d}r}\quad\Rightarrow\quad \dot{r}^2+\omega_r^2r^2=-\frac{p_\varphi^2}{m^2r^2}+C$$

- 令 $\xi=r^2$

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{-\left(\frac{C}{2\omega_r^2}-\xi\right)^2+\frac{C^2}{4\omega_r^4}-\frac{p_\varphi^2}{\omega_r^2m^2}}}=2\omega_r\mathrm{d}t\quad\longleftarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{C-\omega_r^2r^2-\frac{p_\varphi^2}{m^2r^2}}}=\mathrm{d}t$$

柱坐标下的运动方程求解

- 径向积分

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{-\left(\frac{C}{2\omega_r^2}-\xi\right)^2+\frac{C^2}{4\omega_r^4}-\frac{p_\varphi^2}{\omega_r^2 m^2}}}=2\omega_r\mathrm{d}t$$

$$-\arcsin\frac{\frac{C}{2\omega_r^2}-\xi}{\sqrt{\frac{C^2}{4\omega_r^4}-\frac{p_\varphi^2}{\omega_r^2 m^2}}}=2\omega_r t+\beta$$

验证与直角坐标一致性！

$$\xi=r^2=\frac{C}{2\omega_r^2}+\sqrt{\frac{C^2}{4\omega_r^4}-\frac{p_\varphi^2}{\omega_r^2 m^2}}\sin(2\omega_r t+\beta)$$

- 角向积分

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mr^2}-\frac{1}{2}\omega_c$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}},\quad a>b$$

$$\begin{aligned}\varphi&=\varphi_0-\frac{1}{2}\omega_c t+\frac{p_\varphi}{2m}\int\frac{\mathrm{d}t}{r(t)^2}\\&=\varphi_0-\frac{1}{2}\omega_c t+\arctan\left(\frac{mC}{2\omega_r p_\varphi}\tan\left(\omega_r t+\frac{\beta}{2}\right)+\frac{m}{p_\varphi}\sqrt{\frac{C^2}{4\omega_r^2}-\frac{p_\varphi^2}{m^2}}\right)\end{aligned}$$

总结

- 构建了哈密顿表述、与拉格朗日表述等价，更简洁，但方程的数目变为2倍
- 哈密顿量可以守恒、可以不守恒、可以等于总能量、可以不等于总能量
- 关于循环坐标的正则方程可自动略去
- 下一讲：自由陀螺与对称重陀螺