理论力学 2025春期末试题 赵鹏巍

1. （20pts）概念解释：

   （1）正则变换；

   （2）洛伦兹变换；

   （3）刘维尔定理；

   （4）刘维尔可积系统；

   （5）几何相位。

2. （20pts）Schrodinger方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

   取波函数形式为$\psi(\vec{r},t)=A(\vec{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(\vec{r},t)/\hbar}$，其中$A$为实数。在$\hbar\to 0$的极限下给出经典的对应方程。

3. （20pts）一维谐振子的哈密顿量：$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$。

   （1）使用正则变换的方法求解，将(q,p)变换为(Q,P)，使得Q为循环坐标；

   （2）使用系统随时间的无穷小变换的积分来求解；

   （3）使用Hamilton-Jacobi方程的方法求解。

4. （40pts）本题重点考虑二维谐振子问题与二维Kepler问题的等价性。

   （1）二维谐振子的动能为$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$，势能为$V=\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$，采用复数坐标：

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$$

   给出系统的Lagrange量$L(z,\dot{z},t)$，并给出系统的运动方程$z=z(t)$。

   （2）在扩展的相空间中考虑这一问题。作用量：

$$S=\int L(z,\dot{z},t)\mathrm{d}t=L_1(z,z',t,t')\mathrm{d}\tau$$

   其中$z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}$，$t'=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$，$L_1=Lt'$

   （2.1）类似通过位形空间的Lagrange量$L(z,\dot{z},t)$给出Hamilton量$H(z,p,t)$的过程，给出扩展相空间中二维谐振子的哈密顿量$H_1(z,t,p,E)$的表达式。

   （2.2）同理考虑扩展相空间中的正则变换。对于生成函数F，利用Hamilton原理，给出新旧坐标、动量、Hamilton量之间的关系，即正则变换应当满足的条件（设新的Hamilton量的形式为$\tilde{H}_1=H_1(w,T,P,\tilde{E})$。特别地，对于第二类生成函数$F_2=F_2(z,t,P,\tilde{E})$，请给出新旧坐标、动量、Hamilton量之间的具体关系。

   （2.3）取生成函数的形式为：

$$F_2=P\frac{z^2}{2}-\tilde{E}\int_0^t g(t')\mathrm{d}t'$$

   为了使得新Hamilton量变为二维Kepler问题的形式，请给出$g(T)$所满足的条件。

   （3）请给出二维谐振子系统的一组独立守恒量。分析这组守恒量所反映的系统对称性与代数结构。

   （4）利用（2）中给出的正则变换，对于二维Kepler问题，（3）中对应的守恒量分别是什么？