# 高等数学 (A、B)<br>试卷合集

Edit by **Drizzling Rain**

2025.04.15

访问链接以获取最新版本
https://disk.pku.edu.cn/link/AAA89EDB470B834E43AEA3C3758743DEC2

# 目录

# 2024-2025 学年高等数学 A(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【20 分】**

计算积分

(1) $\iint_D = \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是矩形区域 $[-1,1]\times[0,2]$；

(2) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

**2. 【10 分】**

计算曲线积分

$$I=\int_\Gamma \frac{(x-\frac{1}{2}-y)\,\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{2}+y)\,\mathrm{d}y}{(x-\frac{1}{2})^2+y^2}$$

其中 $\Gamma$ 为从 $(0,-1)$ 沿着抛物线 $y^2=1-x$ 到 $(0,1)$ 曲线段。

**3. 【10 分】**

计算曲面积分

$$I=\int_\Sigma 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma$ 是抛物面 $x^2+y^2=z$ 位于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分取外侧。

**4. 【10 分】**

求曲线 $x^3+y^3=xy$ 所围成的区域面积。

**5. 【10 分】**

求旋转抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积。

**6. 【20 分】**

求以下方程的通解

(1) $y'-y=xy^5$;

(2) $y''+y'=4\sin x+x\cos 2x$。

**7. 【10 分】**

设 $\Gamma$ 是取逆时针方向的圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$f(x)$ 是正的连续函数。证明：

$$\oint_\Gamma xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geq 2\pi$$

**8. 【10 分】**

假设 $f(t)$ 为连续的正函数。证明：$t>0$ 时，

$$F(t)=\frac{\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iint_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

是严格单调递减函数。

# 2024-2025 学年高等数学 B(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1. 【12 分】**

计算二重积分

$$\iint_D (|x| + y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

其中 $D$ 是闭圆域：$x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)$。

**2. 【12 分】**

求由三个圆柱面

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad y^2 + z^2 = R^2, \quad z^2 + x^2 = R^2$$

所围立体的表面积 $(R > 0)$。

**3. 【12 分】**

计算第一型曲线积分

$$\int_C (x + y + 1) \, \mathrm{d}s$$

其中 $C$ 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界。

**4. 【14 分】**

计算第二型曲线积分

$$I = \oint_{C^+} y \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}y + x \,\mathrm{d}z$$

其中 $C$ 为圆周：$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$，$x + y + z = 0$，从 $x$ 轴正向看去 $C^+$ 为逆时针方向。

**5. 【14 分】**

求第二型曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} (x^2 + x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + (y^2 + y) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + (z^2 + z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

$S^+$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ 的外侧。

**6. 【15 分】**

求解方程

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{y}$$

**7. 【15 分】**

求微分方程

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2 + \mathrm{e}^x}$$

的通解。

**8. 【6 分】**

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导数，且对以任意点 $(x_0,y_0)$ 为中心，以任意 $R>0$ 为半径的上半圆 $L: y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ 恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \quad \text{（对曲线的两个方向都成立）}$$

证明：$P(x,y)\equiv 0$，$\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$，对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$。

# 2023-2024 学年高等数学 A(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1. 【20 分】**

计算二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

其中积分区域 $D$ 为 $D=\{(r,\theta)|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\}$。
计算中可以直接使用定积分公式：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=\text{正奇数},\\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=\text{正偶数}.\end{cases}$$

**2. 【20 分】**

计算曲线积分

$$I=\oint_{L^+}\frac{-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z,$$

其中曲线 $L$ 是由曲面 $4x^2+y^2=1$ 与平面 $2x+y+z=1$ 所截得到的曲线，其正向 $L^+$ 规定为从 $z$ 轴正向看是逆时针方向。

**3. 【20 分】**

设 $f(x)$ 为一元连续函数，计算曲面积分

$$I=\iint_S[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲面 $S$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在平面 $z=1$, $z=2$ 之间的部分，方向取下侧。

**4. 【20 分】**

解答下列问题:

(1) 求微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = \mathrm{e}^3$ 的解。

(2) 给定常微分方程 $y' + y = f(x)$，其中 $f(x)$ 为整个实数轴上的连续函数。

(i) 若 $f(x) = x$，请给出方程的通解；

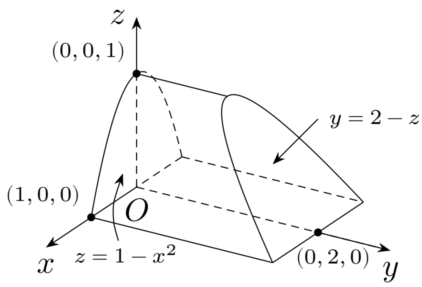
(ii) 若 $f(x)$ 以 $T$ 为周期，证明方程有唯一以 $T$ 为周期的解。

**5. 【10 分】**

计算下面积分

$$I = \oint\!\!\!\!\iint_S xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(y^2 + \mathrm{e}^{z^2}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲面 $S$ 为柱面 $z = 1 - x^2$ 与平面 $z = 0, y = 0, y + z = 2$ 围成区域 $\Omega$ 的外表面 (见下图)。




**6. 【10 分】**

设 $L$ 为平面上的一条分段光滑的简单闭曲线，试计算曲线积分

$$I = \oint_L \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\vec{r}=(x,y), r=\sqrt{x^2+y^2}, \vec{n}$ 为 $L$ 的单位外法向量。

# 2023-2024 学年高等数学 B(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【10 分】**

设 $L$ 是 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1, y\geq 0\}$，求第一型曲线积分

$$\int_L (3+x)\,\mathrm{d}s$$

**2. 【10 分】**

设 $E$ 是 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+\frac{y^2}{4}=1\}$ 取逆时针方向，求第二型曲线积分

$$\int_E \frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

**3. 【10 分】**

设 $D$ 是由直线 $y=0, y=2, y=x, y=x+2$ 所围成的 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域。求二重积分

$$\iint_D \left(\frac{1}{2}x-y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**4. 【10 分】**

设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+z^2=1, x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，求第一型曲面积分

$$\iint_M x\,\mathrm{d}S$$

**5. 【10 分】**

求出一阶常微分方程初值问题 $y' = x + y^2, y(0) = 0$ 的皮卡序列的前两项 $y_1, y_2$。

**6. 【10 分】**

求出二阶常微分方程 $y'' - 2y' + y' = \mathrm{e}^x$ 的通解。

**7. 【10 分】**

设 $\mathbb{R}^3$ 中有界闭区域

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 \le z \le 3 - 2x^2 - y^2\}$$

$S^-$ 是 $V$ 的边界曲面的内侧，求第二型曲面积分

$$\iint_{S^-} (x^2 + y\sin z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - (2y + z\cos x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (-2zx + x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**8. 【15 分】**

设 $r$ 是正实数，$f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ 连续，$f(0) = 0, f$ 在 0 点可导，对于每个 $t > 0$，定义

$$V(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \le t^2\}$$

证明

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^5} \iiint_{V(t)} f\left(x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pi f'(0)$$

**9. 【15 分】**

求出所有的可导函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

$$f'(x) = xf(x) + x\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$

# 2022-2023 学年高等数学 A(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【32 分】**

指出下列各积分的积分类型，并计算其积分值，其中

$$D_1 = [0,1] \subset \mathbb{R}, \quad D_2 = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2, \quad D_3 = [0,1]\times[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^3$$

记 $S_1 = \partial D_2, S_2 = \partial D_3$（$\partial\Omega$ 表示区域 $\Omega$ 的边界），$S_1^+$ 为逆时针方向的 $S_1$，$S_2^+$ 为外法线方向的 $S_2$。

(1) $\displaystyle\int_{D_1} x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\oint_{S_1} xy\,\mathrm{d}s$

(3) $\displaystyle\oiint_{S_2} xyz\,\mathrm{d}S$

(4) $\displaystyle\iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(5) $\displaystyle\oint_{S_1^+} 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$

(6) $\displaystyle\iiint_{D_3} x^6y^{16}z^{16}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

(7) $\displaystyle\oiint_{S_2^+} \left(\frac{x}{2}+z^3\sin y^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{y}{3}+\mathrm{e}^{x\cos z}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{z}{6}+\arctan(xy)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(8) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma^+$ 是由 $(0,0,0)$ 出发，先后经过点 $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1),(0,1,0)$ 又回到 $(0,0,0)$ 的直线段构成。

**2. 【12 分】**

计算二重积分

$$I = \iint_D |y-x^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

**3. 【12 分】**

计算由封闭曲面 $\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)^2\le x$ 围成区域的体积。

**4. 【12 分】**

记 $S^+$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，试计算曲面积分

$$I=\oiint_{S^+}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+4y^2+9z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**5. 【12 分】**

设 $f(t)$ 是区间 $[0,1]$ 上的可积函数，满足

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1,\quad \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t=2,\quad \int_0^1 t^2f(t)\,\mathrm{d}t=3$$

试计算数值积分

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z.$$

**6. 【10 分】**

设

$$F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $f(s)$ 是连续函数，在 $s=0$ 处可导，$f(0)=0, f'(0)=10$。求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^5}$。

**7. 【10 分】**

设 $f(x,y)$ 是定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数。对于 $r>0,\rho>0$，令

$$I_r=\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\qquad J_\rho=\iint_{-\rho\le x,y\le\rho} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

证明：当极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_r$ 与极限 $\lim\limits_{p\to+\infty} J_\rho$ 之一存在且为有限时，则另一个极限也必然存在且为有限，并且两者值相等。

# 2022-2023 学年高等数学 B(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1.【10 分】**

求方程
$$(xy - x^3y^3)\,\mathrm{d}x + (1 + x^2)\,\mathrm{d}y = 0$$
满足条件 $y(0) = 1$ 的解。

**2.【10 分】**

求方程
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0(x > 0)$$
满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解，其中 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

**3.【10 分】**

求方程
$$y'' + y' - 2y = x + \mathrm{e}^x + \sin x$$
满足条件 $y(0) = -\dfrac{7}{20}$，$y'(0) = \dfrac{38}{15}$ 的解，其中 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

**4.【10 分】**

设 $I(R) = \displaystyle\oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{(x^2 + xy + y^2)^2}$，证明 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0$。

**5. 【10 分】**

设 $L$ 为空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+z=1 \end{cases}$，其正向为自 $z$ 轴正向看下来的逆时针方向。计算积分

$$I=\int_L (y-z+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x+(z-x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}y+(x-y+\sin^2 z)\,\mathrm{d}z.$$

**6. 【10 分】**

计算积分

$$I=\iint_D (x+y+xy)^2\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\}$。

**7. 【10 分】**

计算积分

$$I=\iint_D \left(\frac{3x^2\sin y}{y}+2\mathrm{e}^{x^2}\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D$ 由 $y=x$，$y=x^3$ 围成。

**8. 【10 分】**

计算积分

$$I=\iiint_\Omega \frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}V$$

其中 $\mathrm{d}V$ 即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，$\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$，$z=\sqrt{3}(1+x^2+y^2)$，$x^2+y^2=1$ 所围成的区域。

**9. 【10 分】**

计算积分

$$I=\oint_{\Gamma}\left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin x^2\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin y^2\right)\mathrm{d}y$$

其中 $\Gamma$ 是 $x^2+y^2=9(y\geq 0)$，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1(y\leq 0)$ 所围成的闭曲线的逆时针方向。

**10. 【10 分】**

设曲面 $S$ 是柱体 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 1\}$ 的表面的外侧。计算下列积分：

(1) $I_1=\iint_S(y-z)|x|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)|y|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

(2) $I_2=\iint_S(y-z)x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

(3) $I_3=\iint_S(y-z)x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

# 2021-2022 学年高等数学 B(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1. 【* 分】**

设 $D$ 是由直线 $y=0, y=1, y=x, y=x+1$ 围成的区域内部，求

$$\iint_D (4y-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**2. 【* 分】**

设 $V:\{(x,y,z)|x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$，求

$$\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\,\mathrm{d}V$$

**3. 【* 分】**

求第一类曲线积分：

$$\int_L |xy|\,\mathrm{d}s$$

其中 $L:\{(x,y)|x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\}$

**4. 【* 分】**

设 $L_n:\{(x,|\sin x|)|x\in[0,n\pi]\}$，求

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,\mathrm{d}y$$

**5. 【* 分】**

求第一类曲面积分：

$$\iint_S x\,\mathrm{d}S$$

其中 $S:\{(x,y,z)|x^2+z^2=1,x\geq 0,z\geq 0,0\leq y\leq 1\}$

**6. 【* 分】**

求第二类曲面积分：

$$\oiint_{S^+} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $S:\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$

**7. 【* 分】**

已知曲线 $L:\{(x,y(x))\}$，$y$ 满足恒正、严格单调递减、连续的条件。$M$ 为曲线上一点，过 $M$ 作 $L$ 切线交 $x$ 轴于 $A$，已知任意点均满足 $|MA|=1$。

(1) 求 $y$ 满足的常微分方程；

(2) 在 (1) 的条件下解柯西问题 $y(0)=1$。

**8. 【* 分】**

求 $y''+4y=\sin 3x$ 的通解。

**9. 【* 分】**

(1) 找出定义在 $\Omega : \mathbb{R}^2 - \{(x,0)|x \geq 0\}$ 上连续可微的函数 $\Gamma$，满足

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(2) 定义在 $\Omega : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上是否存在连续可微函数 $U$，使得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

证明之。

# 2020-2021 学年高等数学 B(II) 期中考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【10 分】**

计算二重积分：

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

**2. 【10 分】**

计算三重积分：

$$\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,\mathrm{d}V, \quad \Omega: 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 1$$

**3. 【10 分】**

设曲线 $C$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 沿逆时针方向。计算曲线积分：

$$\int_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

**4. 【10 分】**

计算曲面积分：

$$\iint_S (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,\mathrm{d}S$$

其中 $S$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下的部分。

**5. 【15 分】**

计算曲面积分：

$$\oiint_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中 $S$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=4$ 所截部分的外侧。

**6. 【10 分】**

求下面常微分方程的所有解：

$$y'=xy+3x+2y+6$$

**7. 【15 分】**

求下面常微分方程的通解：

$$y''-4y'+3y-4\mathrm{e}^x=0$$

**8. 【10 分】**

设平面有界闭区域 $D$ 为

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\},\quad a,b>0$$

设曲线 $L$ 为曲线 $D$ 的边界,函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 $D$ 上有连续的一阶偏导数。记 $\mathbf{F}=(P,Q)$,$\mathbf{n}$ 为曲线 $L$ 的单位外法向量。证明:

$$\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**9. 【10 分】**

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。证明:

$$\iint_S f(x+y+z)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{3}\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

其中 $S$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。

# 2023-2024 学年高等数学 A(II) 期末考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1. 【5+5+5=15 分】**

回答下列问题，并简述理由 (答案正确 1 分，除去理由 4 分)

(1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一给定数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性如何：

(a) 一定收敛， (b) 一定发散， (c) 敛散性不确定

(2) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一给定数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$ 不存在，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性如何：

(a) 一定收敛， (b) 一定发散， (c) 敛散性不确定

(3) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一给定数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} |na_n| = +\infty$，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性如何：

(a) 一定收敛， (b) 一定发散， (c) 敛散性不确定

**2. 【5+5=10 分】**

试求幂级数的收敛半径

$$(1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^n + 3^n}{n(n+1)(n+2)} x^n$$

**3. 【10 分】**

求微分方程 $y'' + y' = x^2 + x$ 的通解。

**4. 【10 分】**

利用下列级数数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

**5. 【10 分】**

证明函数

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x\sin x}{\ln n}\right)^n$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。

**6. 【10 分】**

已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，试计算

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}x\ (-\infty<t<+\infty)$$

**7. 【2+5+5=12 分】**

(1) 写出 $\Gamma(s)$ 函数的表达式。

(2) 证明 $\Gamma(s)$ 函数在 $s\in(0,+\infty)$ 上单调递增。

(3) 用 $\Gamma$ 函数表示积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$ 并求极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$。

**8. 【7+6=13 分】**

设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

计算 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 区间的 Fourier 展开式，并利用用展开式证明：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**9. 【5 分】**

证明：$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$。

# 2023-2024 学年高等数学 B(II) 期末考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1. 【10 分】**

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域。

**2. 【10 分】**

在 $(-1,1)$ 上展开函数 $\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为幂级数。

**3. 【10 分】**

求瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ 的值。（本题可用 $B$ 函数和 $\Gamma$ 函数）

**4. 【10 分】**

判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性。

**5. 【5+5=10 分】**

设 $E$ 为实数。

(1) 求出所有的实数 $E$ 使得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) 求出所有的实数 $E$ 使得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 收敛。(本题可用 $\Gamma$ 函数)

**6. 【10 分】**

对于每个 $x\in[0,1]$，$n=1,2,\cdots$，定义

$$f_1(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t,\quad f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

**7. 【5+10=15 分】**

设 $b$ 是实数。

(1) 证明含参变量 $b$ 的无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

(2) 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

**8. 【10+5=15 分】**

(1) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 $\mathrm{e}^x$，求出 $f(x)$ 的傅里叶级数，并且求出 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处的和。

(2) 求出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和。

**9. 【2+8=10 分】**

设级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，每项 $a_n>0$，$T$ 是序列 $\{a_n\}$ 中最大项。对于每个实数 $x>0$，定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 $x$ 的项的个数。

(1) 证明 0 是 $L(x)$ 的瑕点。

(2) 证明：瑕积分 $\displaystyle\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并且 $\displaystyle\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$。

# 2022-2023 学年高等数学 A(II) 期末考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【10+10+10=30 分】**

(1) 求微分方程 $y'-y=\mathrm{e}^x$，$y(0)=0$，初值问题的解。

(2) 求微分方程 $y'=y^{\frac{1}{3}}$，$y(0)=0$，初值问题的解。

(2) 求微分方程 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^{\alpha x}$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，初值问题的解，其中 $\alpha$ 是常数。

**2. 【10 分】**

试计算函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ $(p>0)$ 在区间 $[1,2]$ 内是否一致收敛。

**3. 【10 分】**

求 $f(x)=\sin^2 x$，$-\pi\leq x\leq\pi$ 的傅里叶级数。

**4. 【10 分】**

试讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+n}$ 的收敛域。

**5. 【15 分】**

设 $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$。

(1) 试求函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的幂级数展开 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$。

(2) 确定上面得到的幂级数的收敛域。

(3) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的值。

**6. 【10 分】**

(1) 设 $0 \le a < b$，试计算含参变量积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{y^2 + x^2}\,\mathrm{d}y$，$x > 0$。

(2) 计算极限 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n^2 + x^2}\right)$。

**7. 【5 分】**

设 $a \neq 0$，$p > 0$，试讨论下列级数的敛散性。若收敛，问该级数是绝对收敛还是条件收敛?

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})}{(\ln n)^p}.$$

**8. 【5 分】**

设 $y=y(x)$ 是如下初值问题的解

$$y'=\sqrt{1-y^2},\quad y(0)=1$$

试计算 $y'(1)$ 的值。

**9. 【5 分】**

求下面微分方程初值问题的解:

$$y'=\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}},\quad y(1)=1$$

# 2022-2023 学年高等数学 B(II) 期末考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【5+5+5=15 分】**

判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2}{n \ln \sqrt[2]{n}}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \dfrac{4 \cdot 3^n}{5^n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+2} \right)$

**2. 【10 分】**

讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$，$n = 1, 2, \cdots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 的一致收敛性。

**3. 【15 分】**

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

的收敛半径、收敛域、和函数。

**4. 【10 分】**

求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 于 $x=1$ 处的泰勒展开式，并计算 $f^{(2022)}(1)$，$f^{(2023)}(1)$ 的值。

**5. 【10 分】**

讨论无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\,\mathrm{d}x$ 的敛散性。

**6. 【10 分】**

讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n}x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性。

**7. 【20 分】**

设 $2\pi$ 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$，求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数，并给出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

的值。

**8. 【10 分】**

证明和计算下列各题:

(1) 证明 $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛;

(2) 证明 $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间上可导,即在 $(0,+\infty)$ 可导;

(3) 求出函数 $I(t)$, $t\in(0,+\infty)$;

(4) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值。

# 2021-2022 学年高等数学 B(II) 期末考试

**考试时间：120 分钟　总分：100 分**

**1. 【10 分】**

求函数
$$\frac{\sqrt{|x|}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}$$
在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并指出此幂级数的收敛域。

**2. 【15 分】**

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 $2\pi$ 的函数，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 $\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$ 的傅里叶级数，以及此傅里叶级数在 $x=\pi$ 处的收敛值。

**3. 【10 分】**

求无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的值，和瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ 的值。

**4. 【10 分】**

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ 的收敛区间，以及此幂级数的和函数。

**5. 【10 分】**

任意给定常数 $r>0$，证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-nx}$$

在 $[r,+\infty)$ 上一致收敛。

**6. 【15 分】**

求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x+2n}$$

的收敛域，绝对收敛点 $x$ 的全体，条件收敛点 $x$ 的全体。

**7. 【15 分】**

定义函数 $\theta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为

$$\theta(x)=\int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t$$

证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$$

收敛。（注：本题要求写出**详细过程和根据**）

**8. 【5+10=15 分】**

设 $n$ 是正整数。

(1) 任给常数 $a > 0$。证明含参变量 $t$ 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛。

(2) 对于每个 $t \in (0, +\infty)$，求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

的值。

（注：本大题要求写出**详细过程和根据**）

# 2020-2021 学年高等数学 B(II) 期末考试

**考试时间：120 分钟　　总分：100 分**

**1. 【15 分】**

求出函数

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

在 $x=0$ 处的泰勒展开式。

**2. 【8+7=15 分】**

两小题。

(1) 求出无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的值。

(2) 求出瑕积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ 的值。

**3. 【15 分】**

求出幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

的收敛区间，及其和函数。

**4. 【15 分】**

任意取定 $r>0$。证明含参变量 $y$ 的无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\,\mathrm{d}x$ 对于 $y\in[r,+\infty)$ 是一致收敛的。

**5. 【10 分】**

求出函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+n}$$

的收敛域。

**6. 【10+3+7=20 分】**

贯通三小题。

(1) 设 $p$ 是非整数的实数，$(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期，它在 $[-\pi,\pi)$ 等于 $\cos(px)$。求出 $f(x)$ 的傅里叶级数，及其和函数。

(2) 明确写出从上面 (1) 中 $\cos(px)$ 的傅里叶展开式推出下面等式的详细推导过程：当 $t\in\mathbb{R}$，$\dfrac{t}{\pi}$ 不是整数时，有

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)$$

(3) 明确写出从上面 (2) 中 $\dfrac{1}{\sin t}$ 的展开式推出下面等式的详细推导过程：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

**7. 【10 分】**

设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是单调下降的连续函数（没有假定 $(0,+\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在），$C$ 和 $D$ 都是实数，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=C$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=D$，$0<a<b$。求出广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

的值。