北京大学

理论力学

赵鹏巍

内容回顾

- 开普勒问题的守恒量
- 开普勒问题的对称性
- 力学系统的对称群

运动常数

- 开普勒问题有三个自由度，在六维相空间中，最多只能有 5 个相互独立的运动常数。
- 我们已有 角动量守恒，LRL矢量守恒，能量守恒，共7个运动常数。
- 显然，这个7个常数不是完全独立的。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{L} = 0 \qquad A^2 = m^2k^2 + 2mEl^2$$

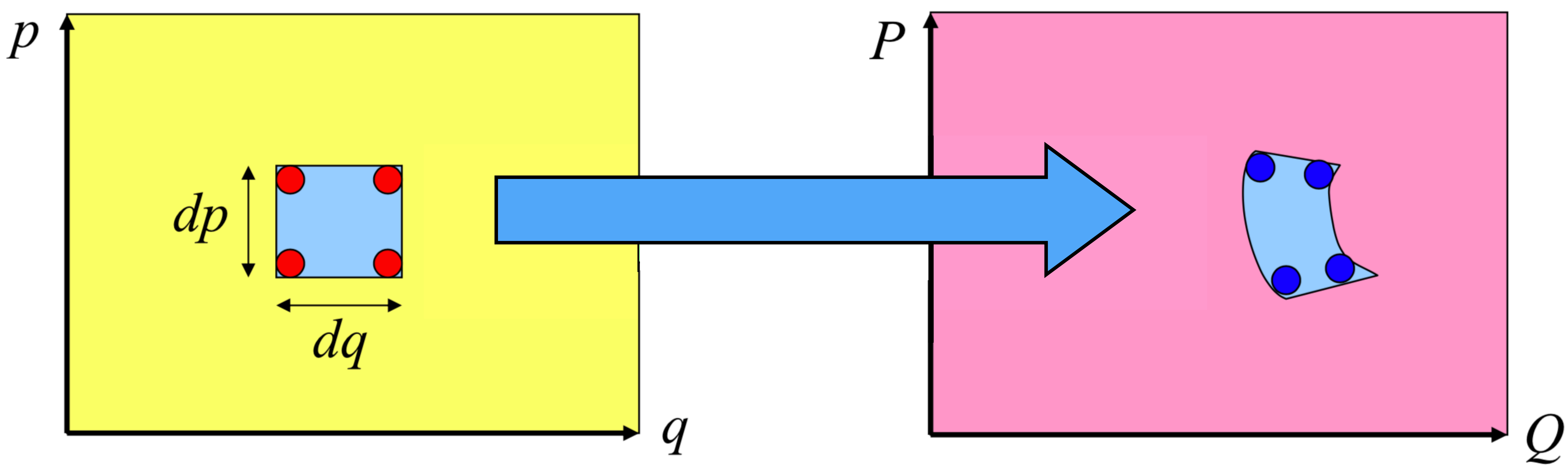
- 考虑以上两个条件，我们有 5 个独立的运动常数。
- 一个 n 自由度系统，最多有 2n-1 个相互独立的运动常数，称为最大可积系统；
- 开普勒系统是最大可积系统。

相空间体积

- 静态绘景：正则变换将一相空间中的某点变换到另一相空间中

  动态绘景：正则变换将一相空间中的某点变换到该相空间中的另一点

- 如果我们考虑一组点（独立粒子系统），正则变换将相空间中的一个体积变换为另一个体积，例如：



相空间体积

- 2×1维相空间：很容易求得雅可比行列式

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$dQdP = |\mathbf{M}|\, dqdp$$

$$|\mathbf{M}| = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = [Q, P] = 1 \Rightarrow dQdP = dqdp$$

2×1维相空间内的体积是一个正则不变量。

- 可以证明，2×n维相空间内的体积也是一个正则不变量。

刘维尔定理：相空间体积在正则变换下保持不变。

刘维尔定理证明

- 考虑一个正则变换 $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\xi}$

$$\dot{\eta}^j = \omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k},$$

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\dot{\eta}^j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\omega^{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}\omega^{jk}\frac{\partial \xi^l}{\partial \eta^k}\frac{\partial H}{\partial \xi^l} = M^i{}_j\omega^{jk}(M^T)_k{}^l\frac{\partial H}{\partial \xi^l}$$

$$M^i{}_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^j}$$

$$\Rightarrow \quad M\omega M^T = \omega$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

满足此条件的 M 为辛矩阵！ 直接条件！

- 体积元

$$d\xi^1 \ldots d\xi^{2n} = |\mathbf{M}|\, d\eta^1 \ldots d\eta^{2n}$$

雅可比矩阵的行列式： $|\mathbf{M}|^2 = 1$

得证！

刘维尔定理证明

- 相空间体积元还可用微分形式定义为

$$\Omega \equiv dp_1 \wedge dq^1 \wedge dp_2 \wedge dq^2 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq^n$$

容易验证

$$dp_1 \wedge dq^1 \wedge dp_2 \wedge dq^2 = \frac{1}{2}\left(dp_1 \wedge dq^1 + dp_2 \wedge dq^2\right) \wedge \left(dp_1 \wedge dq^1 + dp_2 \wedge dq^2\right)$$
$$= \frac{1}{2!}\omega^{\wedge 2}$$

$$\omega = dp_a \wedge dq^a$$

于是，

$$\Omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$$

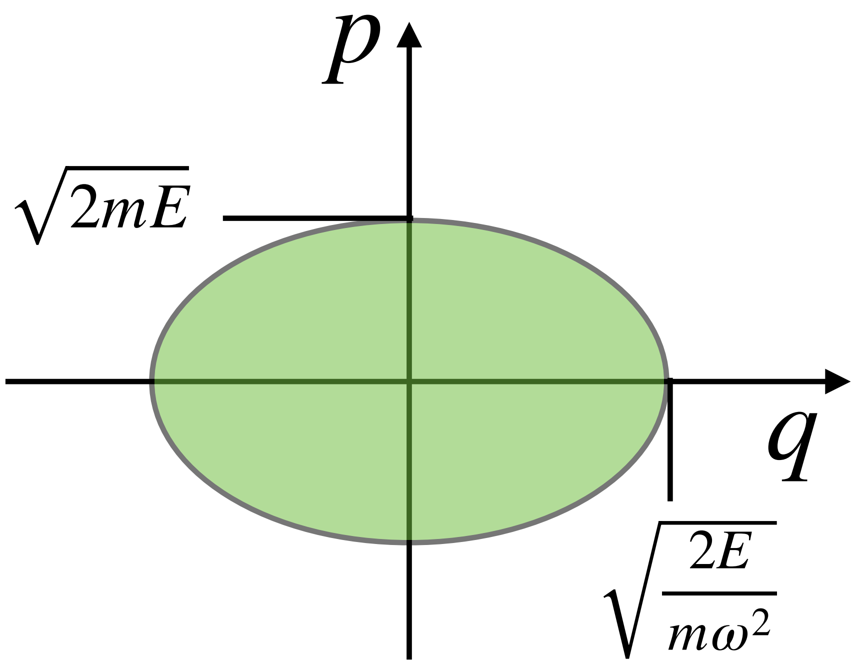
相空间体积元唯一地由辛形式决定

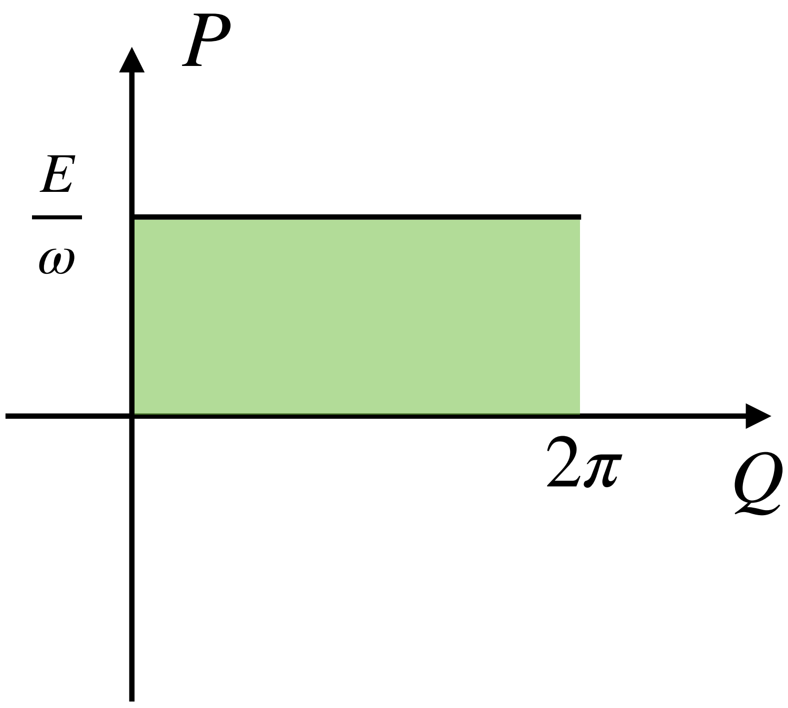
辛形式在正则变换下保持不变！

得证！

静态绘景

- 我们已经在谐振子中看到了这一点：





- 谐振子运动一个周期在两个相空间描绘出的面积相等 $\frac{2\pi E}{\omega}$

- 静态绘景

动态绘景

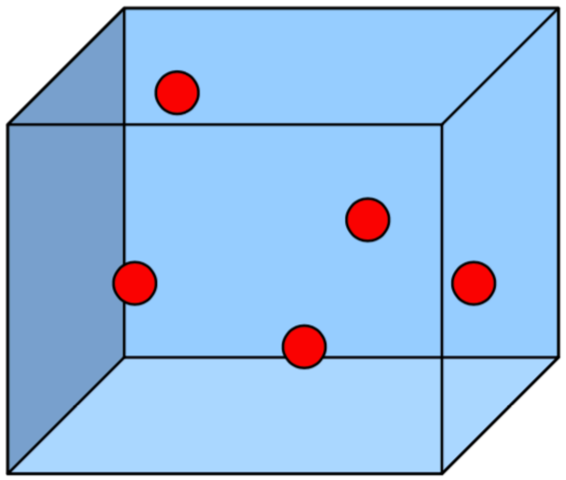
- 考虑许多粒子进行独立运动

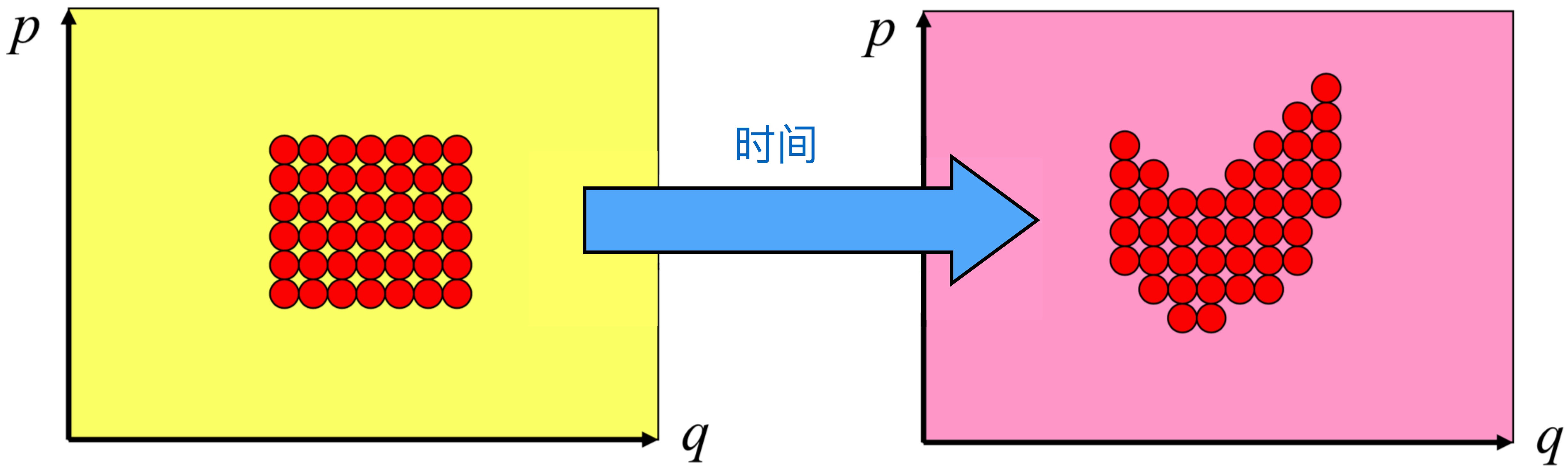
  如约束在一个盒子中的理想气体分子

  它们各自独立满足相同的运动方程

  可以被表述为在一个相空间内的多点

  它们随时间的演化构成一个正则变换





刘维尔方程

- 考虑 N 个具有相同哈密顿量的系统组成一个集合（统计力学中对应系综），并在相空间中形成一个状态分布，分布函数为 $\rho(q,p,t)$

$$\int \rho(q,p,t)\,dV = N$$

- 当描述“大量”这样的系统时，相空间分布可认为是连续的！
- 系统总数 N 守恒，体积元 dV 守恒（动态绘景），所以有

刘维尔方程

$$\frac{d\rho}{dt} = [\rho, H] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

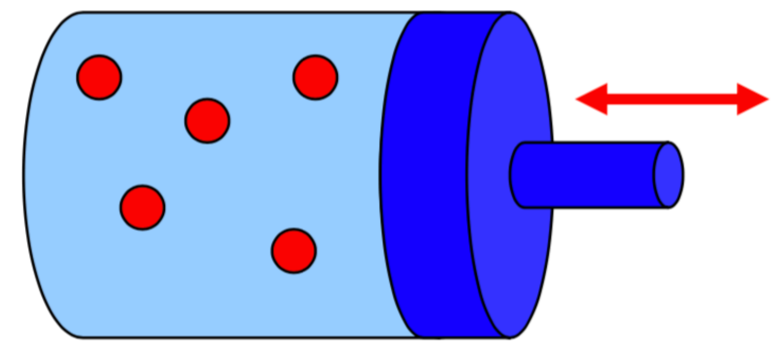
相空间中的密度随着时间演化保持不变！

理想气体动力学

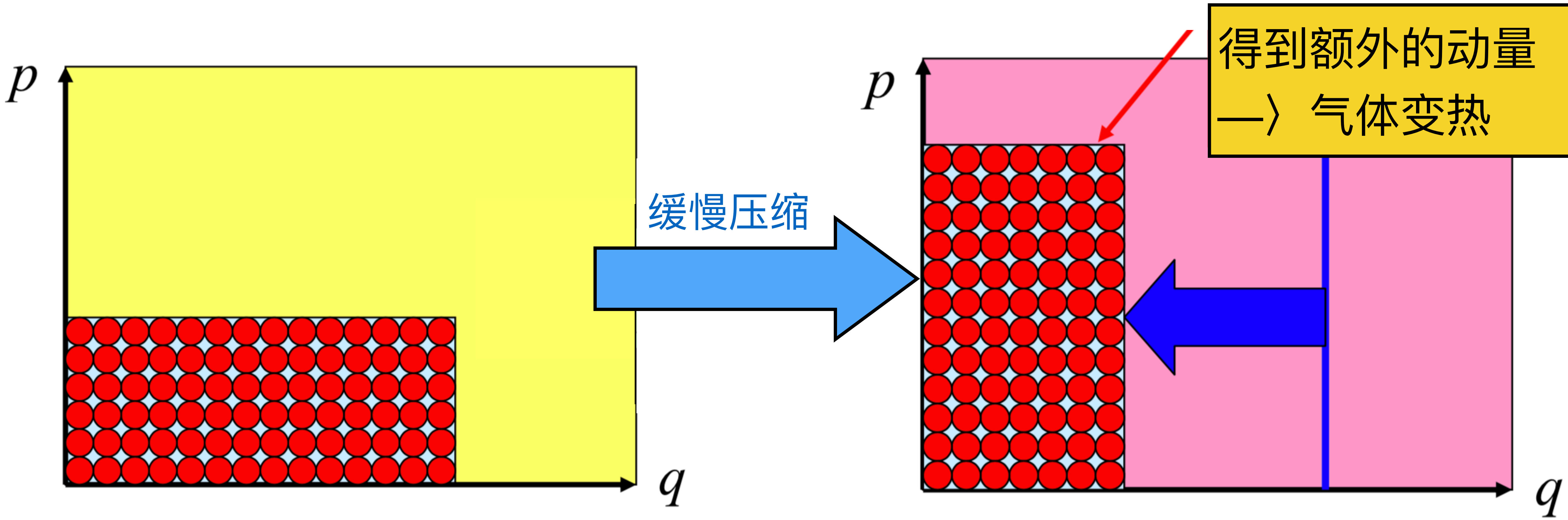
- 想像理想气体由一活动活塞限制在一个圆柱形容器内

  每个气体分子均有其自身的位置与动量

  —〉它们在相空间中占据一定体积

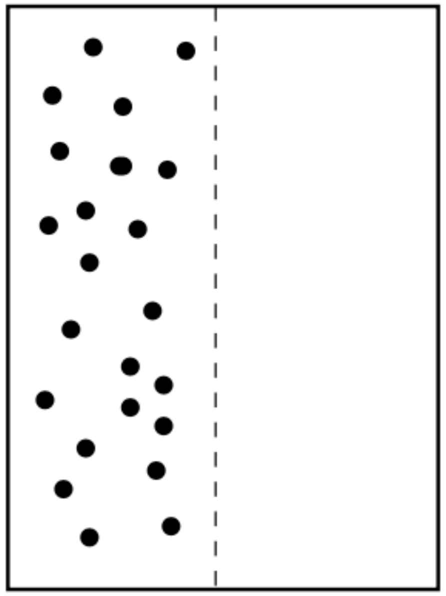
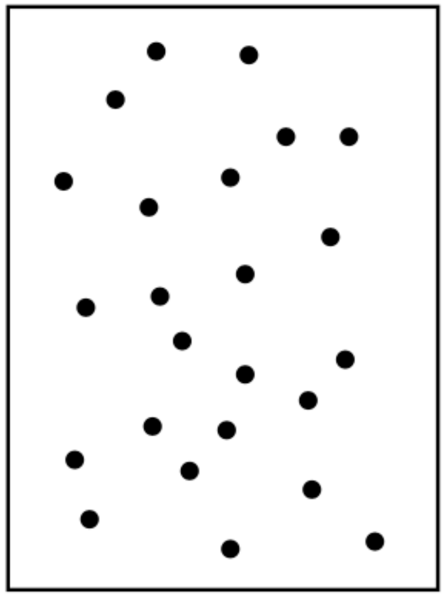
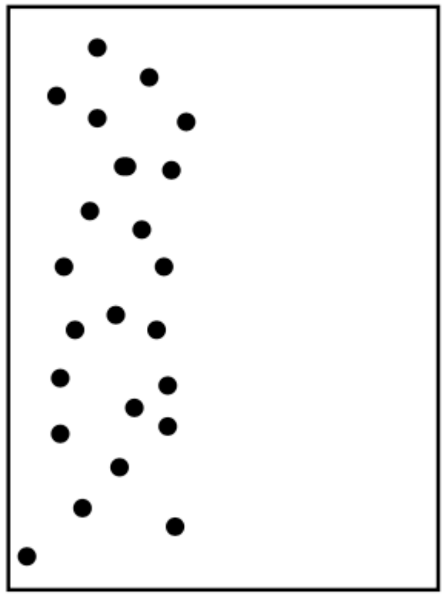


- 当压缩气体时，会发生什么?



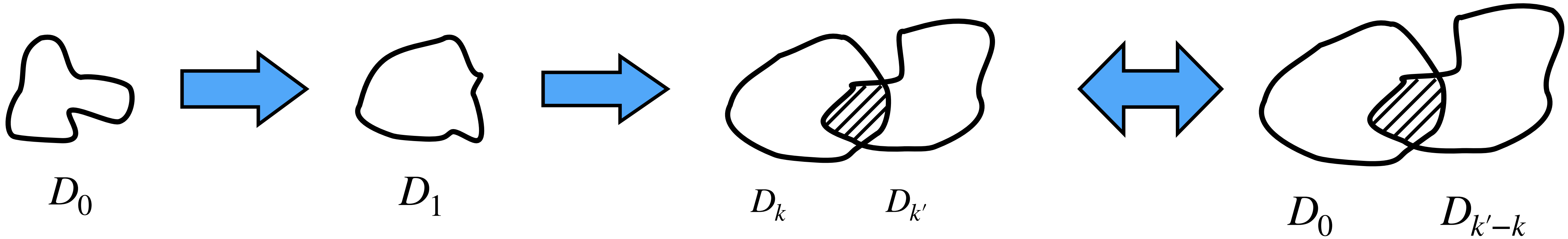
庞加莱回归定理

- 设想有一盒气体，初始时气体分子处于盒子的左侧，右侧是真空，中间用挡板隔开，撤去中间的挡板，气体当然扩散到右边。
- 气体能自动回归到左侧吗?
- 根据热力学第二定律，显然不可以!
- 但根据庞加莱回归定理，可以!

庞加莱回归定理

- **庞加莱回归定理：**
  对于**相空间有限**的哈密顿正则系统，任意取定一个相空间初始点 $\boldsymbol{q}_0$，则对于它的任意邻域 D_0，必定存在一个点 $\boldsymbol{q}_0' \in D_0$，它将在有限时间内回归 D_0。
  只要等待时间足够长，系统总可以回归到和初态任意接近的状态。



刘维尔定理表明： 从 D_0 到 D_1 到 D_k 进行等体积演化；

由于相空间有界，一定存在 D_k 和 $D_{k'}$ 有交集，记为$D_{k',k} = D_k \cap D_{k'} \neq 0$，否则 $\bigcup_{k=0}^{\infty} D_k \rightarrow \infty$

时间演化对应的正则变换是可逆的！

将 $D_{k',k}$ 往回映射 k 步，有 $D_{k'-k,0} = D_0 \cap D_{k'-k} \neq 0$；**得证！**

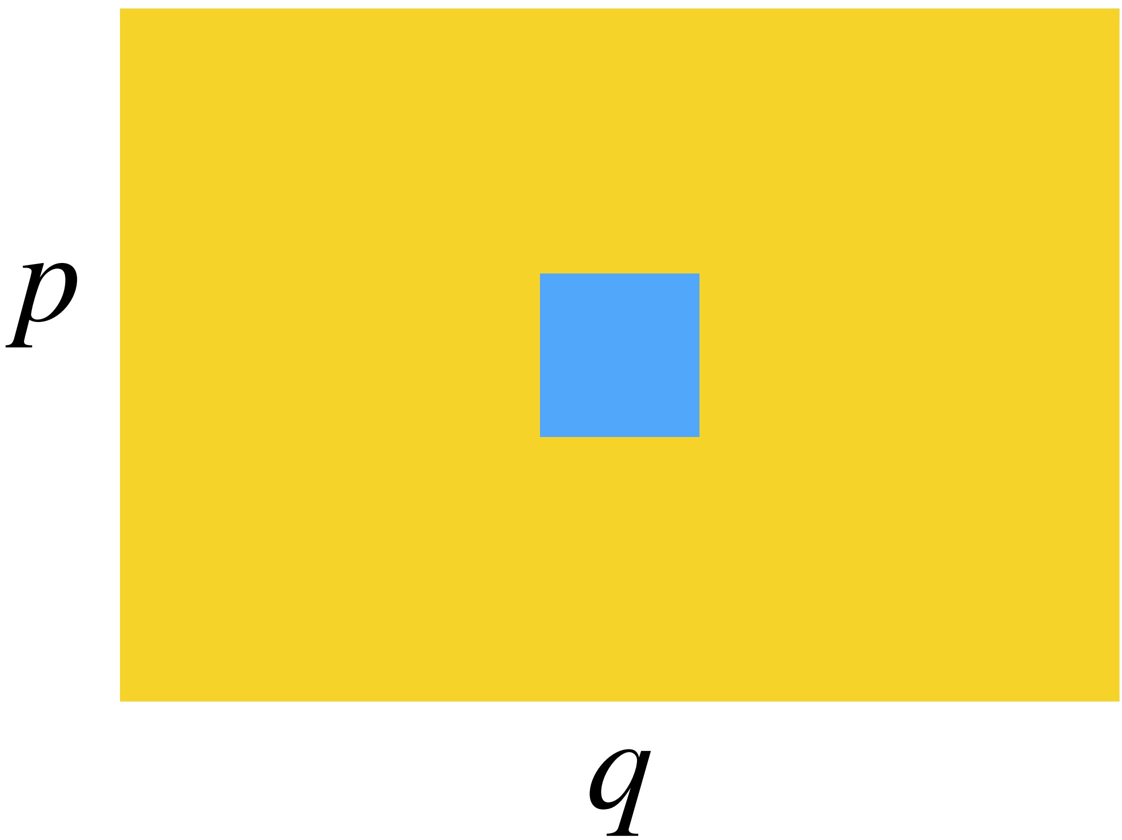
庞加莱回归定理与热力学第二定律

- 显然气体所处的相空间是有限的。
  盒子尺寸限制了坐标，能量守恒限制了动量。
- 所以根据庞加莱回归定理，**只要等待时间足够长，气体总会自动回归到左侧的。**
- 这似乎违反了热二定律。但是，热二定律要取热力学极限，即气体分子数目 $N \to \infty$。
- 庞加莱回归的时间随着N呈指数增长，热力学极限下趋于无穷大。
  相空间的维度随 N 增加，其体积呈指数膨胀；**维数灾难**
- 庞加莱回归不违反热二定律。对一个宏观系统，它的庞加莱回归时间远比宇宙年龄更长，所以实际上观测不到。

刘维尔定理 VS 海森堡不确定关系

$$\Delta q \Delta p = \text{const}$$

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$$



1984年诺贝尔奖：范德梅尔：随机冷却技术

- 经典力学：不能同时减小坐标和动量不确定度，来源于我们对系统的不了解。
  原则上可以回避刘维尔定理。
- 量子力学：不能同时减小坐标和动量不确定度，来源于内在的不确定性。
  原则上不可能回避海森堡不确定关系。
- 经典力学相空间允许无限精细的分割，而量子力学在此基础上引入了最小尺度。
- 从经典到量子的过渡中，刘维尔定理可看作是海森堡不确定关系的经典极限表现。

原则上无论系统是否能量守恒（H可显含t），刘维尔定理都成立，但系统必须由哈密顿量描述，其本质是哈密顿流的不可压缩性。耗散系统通常不是哈密顿系统，因此不会保持相空间体积。

刘维尔方程与连续性方程

- 相空间中的密度随着时间流动显然要满足连续性方程。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= [\rho, H] + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho - \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \\
&= -\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

连续性方程

$$\frac{\partial \overset{\rho}{\text{密度}}}{\partial t} + \nabla\cdot\overset{\rho\boldsymbol{v}}{\text{流}} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = [\rho, H] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

相空间流速的散度为零！

哈密顿系统的相空间流无源无汇！

相空间流

- 考虑一维谐振子

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -kq$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0 + 0 = 0$$

刘维尔定理成立!

- 考虑一维受迫谐振子，哈密顿量显含时间，能量不守恒

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} - qA_0\cos(\omega t)$$

外力!

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -kq + A_0\cos(\omega t)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0 + 0 = 0$$

刘维尔定理成立!

相空间流

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i$$

- 考虑一维阻尼谐振子 (阻尼力$-\gamma\dot{q}$)

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -kq - \frac{\gamma}{m}p$$

阻尼力!

- 能量显然不守恒!

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2\right)}{dt} = \dot{q}\dot{p} + kq\dot{q} = -\gamma\dot{q}^2 < 0$$

- 刘维尔定理不成立!

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\dot{p}}{\partial p} = 0 - \frac{\gamma}{m} = -\frac{\gamma}{m} < 0$$

这是一个耗散系统，不仅能量不守恒，相空间体积也不守恒!

相空间的辛面积

- 类似刘维尔定理，相空间的2k (k<n)维曲面积元也可用微分形式定义

$$S = \frac{1}{k!}\omega^{\wedge k}$$

$$\omega = dp_a \wedge dq^a$$

$$\Omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$$

- 故在相空间中的任意维**辛曲面**，其**辛面积**也在正则变换下保持不变。

- 在相空间任取一条闭合路径 C，路径C可随时间演化，沿着这条闭合回路对辛势 Θ 的积分不随时间变化。

$$\int_{\partial D} a = \int_D da$$

$$I_c = \oint_C \Theta = \int_{S_2} d\Theta = \int_{S_2} \omega$$

$$\Theta = p_i dq^i$$

$$\omega = d\Theta = dp_i \wedge dq^i$$

这是分析一些规则的哈密顿系统的基础!

相互对合的守恒量

- 哈密顿系统的相空间具有辛结构，系统的运动遵循辛动力学演化。
- 系统的守恒量将运动限制在守恒量对应的等值超曲面上。
  要保持运动的辛性质，等值超曲面必须能够继承相空间的辛结构。
- 若系统有两个**独立且泊松对易**的守恒量A和B，则运动被约束在A和B两个等值面的交集上，形成一个 2n-2 维的子空间。 （**A和B对合**！）
- **独立性：** 保证两个约束的独立性（不会出现一个守恒量是另一个的函数
- **泊松对易性：** 保证子空间仍具有辛结构（泊松对易的守恒量不一定独立）
- 简单来说，泊松对易性保证在施加两个独立的运动约束后，剩余自由度仍然保持着良好的辛结构，使得动力学演化继续保持原有的性质。**WHY?**

哈密顿矢量场

- 考虑哈密顿正则方程的解 $\dot{\eta}^j$ 是相空间的某一点的流速

$$\dot{\eta}^j = \omega^{jk}\partial_k H$$

- 相空间中每一点的流速都是一个2n维矢量，故哈密顿正则方程的解构成一个矢量场，其意义在于 “可视化系统的演化性质”。

$$X_H = \underbrace{\dot{\eta}^j}_{\text{流速}}\underbrace{\partial_j}_{\text{切方向}} = (\omega^{jk}\partial_k H)\partial_j$$

$$\boldsymbol{v}^j = \dot{\eta}^j$$

相流的速度场

- 以一维谐振子为例

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -kq$$

$$X_H = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} - kq\frac{\partial}{\partial p}$$

哈密顿矢量场

- 以一维谐振子为例

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{kq^2}{2}$$

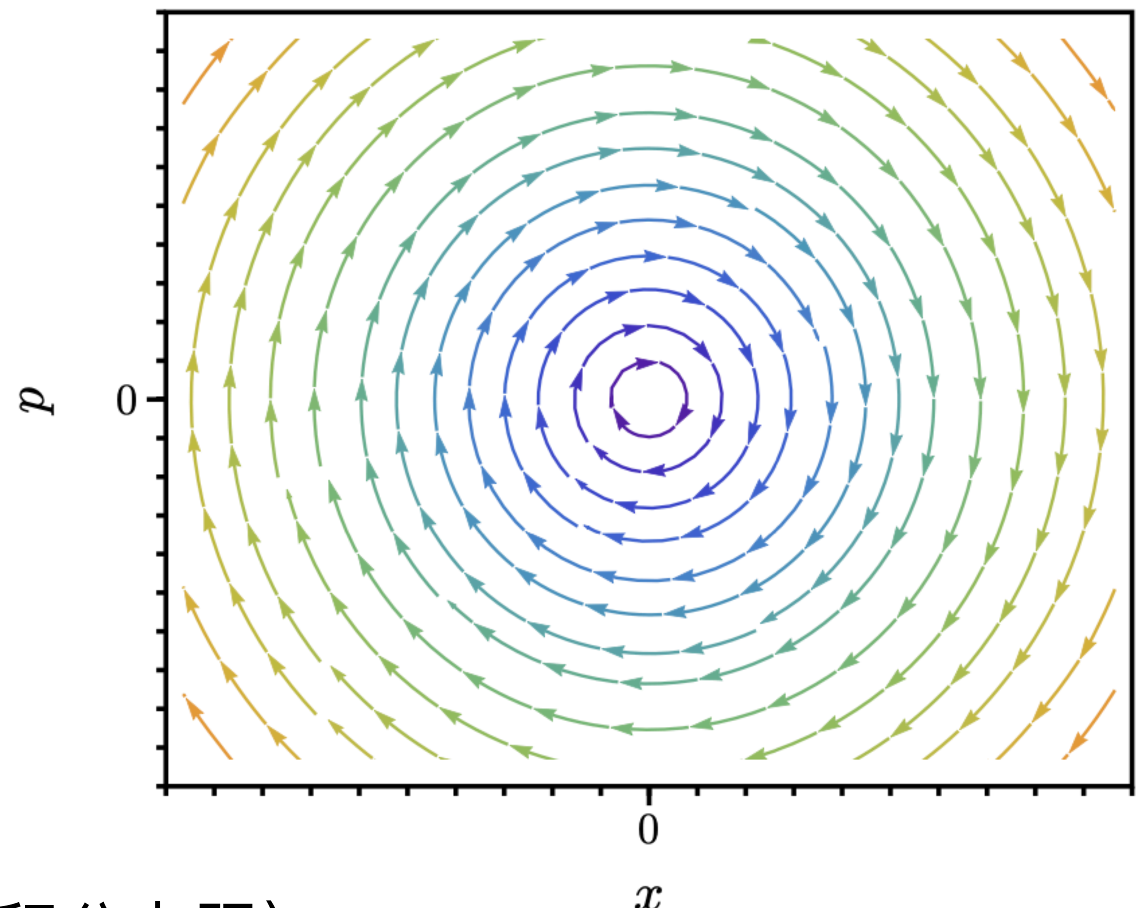
$$\dot{q}=\frac{p}{m} \qquad \dot{p}=-kq$$

相空间运动方向

$$X_H=\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}-kq\frac{\partial}{\partial p}$$

位置变化率　q方向　p方向

动量变化率



X_H 的积分曲线是相空间的相流 $\boldsymbol{v}$（时间为积分上限）

其切线方向由 $\dot{\eta}^j$ 决定，流线密度反映演化速率。

$$\phi_t(q(0),p(0))=(q(0),p(0))+\int_0^t X_H(\phi_\tau(q(0),p(0)))d\tau$$

练习

$$\nabla\cdot X_H=0$$

刘维尔定理的另一表述！

对合与辛结构

- 为什么我们要关注守恒量之间的泊松对易性呢?

$$[u, v] = (\partial_i u)\omega^{ij}(\partial_j v)$$

- 在守恒量 A 和 B 约束的超曲面上，B 沿 X_A 方向的流应不变，同时A 沿 X_B 方向的流也应不变，即两个守恒量要同时保持。

$$X_A(B) = \omega^{jk}(\partial_k A)\partial_j B = [B, A] = 0 \qquad X_B(A) = [A, B] = 0$$

- 这意味着 A 和 B 对应的运动方向（由它们的哈密顿向量场X_A和X_B给出）必须满足辛正交条件 $\omega(X_A, X_B) = 0$, 等价于 $[A, B] = 0$。
- 泊松对易性确保了这两个运动方向在辛结构下是”垂直”的，这样在约束后的子空间中就不会破坏原有的辛性质。
- 守恒量A和B泊松对易意味着相应的哈密顿向量场辛正交，系统在动力学演化中互不干扰。

刘维尔可积系统

$$[G_a, G_b] = 0$$

- 对于 n 自由度的系统：

  若有 n 个独立守恒量，则称为可积系统；

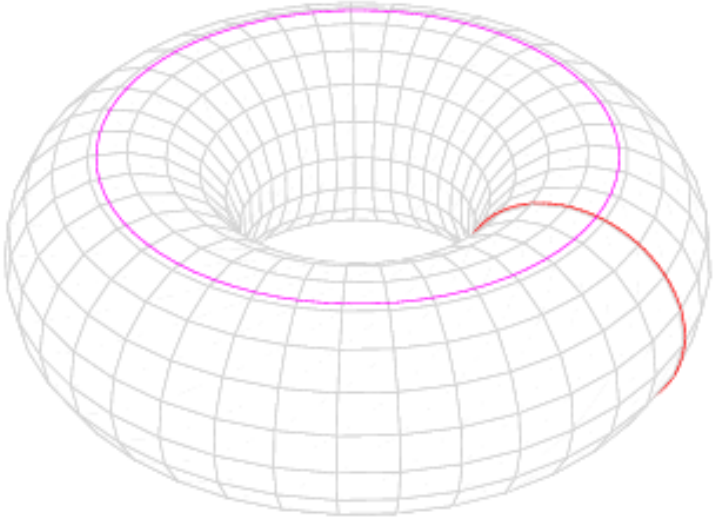
$$dG_1 \wedge dG_2 \wedge \ldots \wedge dG_n \neq 0$$

  若有 n 个泊松对易的独立守恒量，则称为刘维尔可积系统（**可积！**）

  若有 2n-1 个独立守恒量，则称为最大可积系统（一定刘维尔可积）

- 刘维尔可积的束缚系统在相空间中运动于**n维不变环面**上。

系统存在n个独立的、两两泊松对易的守恒量。每个守恒量生成一个相流，由于系统束缚，相流在相空间中形成闭合的圆周相轨道。由于守恒量彼此对易，这些圆周运动方向相互独立（辛正交），共同构成了一个 n **维环面结构。刘维尔定理保证了相流在相空间中不会收缩或发散，因此系统的运动被限制在这个环面上。**



总结

- 刘维尔定理
- 庞加莱回归定理
- 刘维尔可积系统