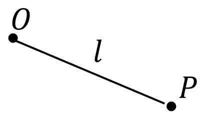
第一章　拉格朗日力学

1.1　约束、自由度和广义坐标

1.1.1　约束及其分类

- <u>位形</u>：是指物理系统在空间中的形状、分布。例如，N 质点系各质点位置的集合 $\{\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N\}$ 构成该系统的位形；而对于静电场，场函数 $\vec{E}(\vec{r})$ 给出该系统的位形。
- <u>约束</u>：约束是强加于系统上，限制其位形变化的任何事物。

☞　例 1：如右图，连接质点 P 和固定点 O 、长为 l 的轻杆构成质点运动的约束。如果取 O 为原点，建立三维笛卡尔坐标系，则质点运动满足相应的<u>约束方程</u>：



$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

- 约束的分类：
  - 可解（脱）约束和不可解约束

    <u>可解约束</u>（也被称为<u>单侧约束</u>）是可部分解脱的约束。如在例 1 中将轻杆替换为长为 l 的轻软绳，则其对 PO 距离小于 l 的运动不构成任何约束，即为可解约束，相应的约束条件可以写作不等式

    $$x^2+y^2+z^2\le l^2$$

    而例 1 中的约束为<u>不可解约束</u>（也被称为<u>双侧约束</u>）

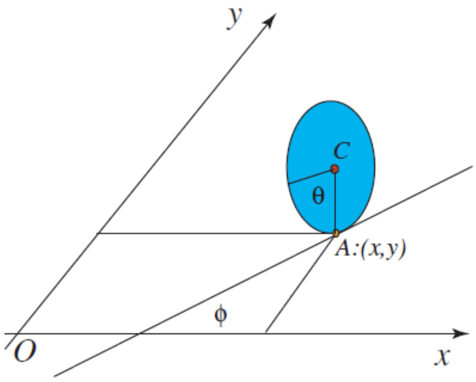
    本课程主要关注不可解约束（相应约束方程为等式）
  - 几何约束和微分约束

    <u>几何约束</u>：直接限制系统位形的约束。其约束方程中仅出现系统各个质点的位置（坐标），形如

    $$f(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,t)=0$$

    <u>微分约束</u>：限制系统速度（及其分量）的约束。

☞　讲义 5 页例 1.1，半径为 a 的圆盘在 xy 水平面上直立纯滚动，对于如图选取的位形坐标 x,y,ϕ,θ ，有如下微分约束



$$\begin{cases}\dot{x}=a\dot{\theta}\cos\phi\\ \dot{y}=a\dot{\theta}\sin\phi\end{cases}\qquad(1.1)$$

或

$$\begin{cases}dx-a\cos\phi\,d\theta=0\\ dy-a\sin\phi\,d\theta=0\end{cases}$$

在求解动力学方程之前，上式左侧不能化作“全微分”，因此被称为<u>不可积微分约束</u>。

如果盘面方向固定（ϕ 为已知常量），则 (1.1) 式中的微分方程可积分为

$$\begin{cases}x-a\cos\phi\,\theta=C_x\\ y-a\sin\phi\,\theta=C_y\end{cases}$$

变成几何约束，此类微分约束被称为<u>可积微分约束</u>。

几何约束和可积微分约束统称为完整约束（holonomic constraint）。仅存在完整约束的系统被称为完整系统。

此外，若约束方程不显含时间，则被称为稳定（定常）约束，否则为不稳定（非定常）约束。如例1中的约束是稳定的。若设想 O 点相对背景参考系沿 x 轴方向以速度 v 匀速运动，则此时的约束方程形如

$$(x-vt)^2+y^2+z^2=l^2$$

而此时的约束为不稳定约束。

1.1.2 自由度与广义坐标

- 自由度：确定系统运动状态所需的、能**独立变化**的运动参量的个数，记为 n_f .
- 广义坐标：能够**唯一确定**系统位形的**独立**坐标。通常记为

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

s 表示系统广义坐标的数目。其对时间的导数即为广义速度，记作

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$$

☞ 书上 5 页例 1.1，之前选取的位形坐标 x, y, ϕ, θ 即为系统的广义坐标，故该系统 $s=4$。约束方程 (1.1) 中的 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ 等即为广义速度。虽然该系统微分约束不可积，但仍然可提供对位形变化（无穷小位移）的限制，故该系统 $n_f=2$.

若进一步限定 ϕ 为给定常量，则此时的系统为完整系统，并有 $n_f=s=1$ ，相应广义坐标可选作 θ （此时 x, y 已不再独立）.

- 对于我们后面将主要讨论的完整系统，总有 $n_f=s$

具体地，对于 N 个质点的系统，若存在 k 个完整约束方程

$$f_m(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)=0\,, \qquad m=1,2,\dots,k$$

则 $n_f=s=3N-k$ 。而 s 个广义坐标满足坐标变换方程：

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)\,, \qquad i=1,2,\dots,N \qquad (1.2)$$

相应第 i 个质点的速度表示为

$$\dot{\vec{r}}_i=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \ \ (\text{求和约定}) \qquad (1.3)$$

- 两个重要的公式（拉格朗日关系）

1) $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$ (1.4)

可由 (1.3) 中 $\dot{\vec{r}}_i$ 的表达式直接得到（注意 $\dot{\vec{r}}_i=\dot{\vec{r}}_i(q, \dot{q}, t)$）

2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}$ (1.5)

证明：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t\partial q_\alpha}+\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta$$

将 $\dot{q}$ 看作为独立于 q 的变量，则由如上 $\dot{\vec{r}}_i$ 的表达式得

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

- 补充：对于稳定约束系统，总可以选取广义坐标，使得坐标变换方程不显含时间。但对于不稳定约束，坐标变换方程一般是显含时间的。

1.2 虚功原理、达朗伯原理和拉格朗日方程

1.2.1 虚功原理（Johhan Bernoulli' 1717）

➢ 静力平衡：牛顿力学的基本方程为

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c = 0\,, \qquad \forall i (= 1,2,\dots,N)$$

其中 $\vec{F}_i^a$ 表示作用于第 i 个质点的主动力，$\vec{F}_i^c$ 为相应的约束力。此外，通常会联立约束方程（k 个）加以求解。

➢ 虚位移：在时间 t 不变的情况下（即为瞬时的），约束所准许的虚拟位移，记为 $\delta\vec{r}_i$ 。

- 这里我们引入了变分记号“ δ ”，大多数情况它相当于对变量取微分，但需注意 $\delta t = 0$ ，因为我们应用的是所谓“等时变分”。例如，若

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

满足运动方程（及约束条件），则（实际）位移

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \tag{2.1}$$

但虚位移为

$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \tag{2.2}$$

- 对于稳定约束系统，（实际）位移必是虚位移中的一个，但对于不稳定系统，则未必（经常不是）。

➢ 稳定、理想约束系统的**虚功原理**：

考虑静力平衡，则系统主动力与约束力的虚功为零，即

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

- 一类重要的约束，可以使得约束力的虚功和（是求和！）为零，如光滑的刚性平面、不可伸长绳、刚性杆、纯滚动约束……这类约束被称为理想约束，相应仅存在理想约束的系统被称为理想系统。
- 理想系统的虚功原理：主动力虚功和为零，即

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{2.3}$$

- 进一步考虑完整、理想系统

$$0=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha \tag{2.4}$$

上式中我们交换了求和次序，并且引入了广义力

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{2.5}$$

重要的是求和式中 δq_α 各自独立，故虚功原理在引入广义坐标后的结论是

$$Q_\alpha=0\,,\ \forall\alpha(=1,2,\dots,s) \tag{2.6}$$

- 再进一步，如果系统保守，则可引入势能函数（这里仅考虑速度无关势）

$$V=V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N)=V(q_1,q_2,\dots,q_s)$$

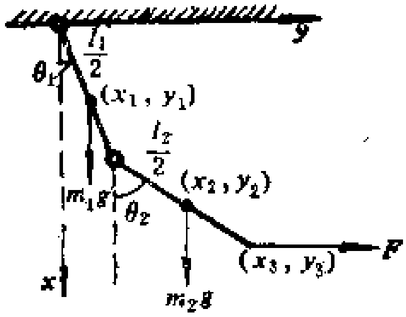
则广义力

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{2.7}$$

故对于完整、理想、保守系统，虚功原理表明**平衡位形的势能取极值**。

- 补充说明：因为这里讨论的是平衡问题，所以约束默认是稳定的，相应也并未考虑显含时间的势能函数。

☞ 例 2：两个匀质刚性杆由光滑铰链连接如右图所示。上杆长 l_1，质量 m_1；下杆长 l_2，质量 m_2。在下杆的下端施加水平力 F，试求平衡时两杆各自与竖直方向线的夹角 θ_1 和 θ_2 .



解答：可判断该系统为完整、理想系统。选取 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，则图示中位形坐标

$$x_1=\frac{l_1}{2}\cos\theta_1\,,\qquad x_2=l_1\cos\theta_1+\frac{l_2}{2}\cos\theta_2\,,\qquad y_3=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2$$

由虚功原理

$$0=m_1g\delta x_1+m_2g\delta x_2+F\delta y_3$$

$$=\left\{F\cos\theta_1-\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)g\sin\theta_1\right\}l_1\delta\theta_1+\left\{F\cos\theta_2-\frac{1}{2}m_2g\sin\theta_2\right\}l_2\delta\theta_2$$

则有

$$\begin{cases}F\cos\theta_1-\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)g\sin\theta_1=0\\ F\cos\theta_2-\frac{1}{2}m_2g\sin\theta_2=0\end{cases}$$

解得

$$\tan\theta_1=\frac{2F}{(m_1+2m_2)g}\,,\qquad \tan\theta_2=\frac{2F}{m_2g}$$

✓ 此外，把 F 看作为恒力，则此系统为保守系统，势能

$$V=-m_1gx_1-m_2gx_2-Fy_3$$

$$= -l_1\left(\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)g\cos\theta_1 + F\sin\theta_1\right) - l_2\left(\frac{1}{2}m_2 g\cos\theta_2 + F\sin\theta_2\right)$$

则，由

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial\theta_2} = 0$$

可得平衡时的 θ_1 和 θ_2 .

1.2.2 达朗伯原理（d'Alembert' 1743）和拉格朗日方程

➢ **达朗伯原理**：达朗伯将牛顿力学方程 $\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c = m_i\ddot{\vec{r}}_i$ 改写为

$$\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c - m_i\ddot{\vec{r}}_i = 0 \tag{2.8}$$

这被称为"达朗伯原理"，其方程具有平衡方程的形式，其中"$-m_i\ddot{\vec{r}}_i$"被称为达朗伯惯性力。

- **拉格朗日-达朗伯方程**：对于理想系统

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^a - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0 \tag{2.9}$$

这是理想系统的**动力学普遍方程**。

➢ **拉格朗日方程**（Lagrange 1860's）

- 对于完整、理想系统，引入广义坐标，则

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^a\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$$

- 我们将证明

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha$$

其中，总动能 $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = T(q,\dot{q},t)$.

证明：$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$ ，故我们只需考查

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\end{aligned}$$

如上等式的第二行，我们用到了拉格朗日关系：(1.4) 和 (1.5) 式

- 综上，得到拉格朗日-达朗伯方程的广义坐标形式

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha\right]\delta q_\alpha = 0$$

及（第二类）**拉格朗日方程**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\,,\qquad \alpha=1,2,\dots,s \tag{2.10}$$

从而一劳永逸地甩掉了虚位移。

- 若主动力均为保守力，即

$$\vec{F}_i^a=-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$$

其中，势能函数

$$V=V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N,t)=V(q_1,q_2,\dots,q_s,t) \tag{2.11}$$

则广义力

$$Q_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

而相应拉格朗日方程可以写作

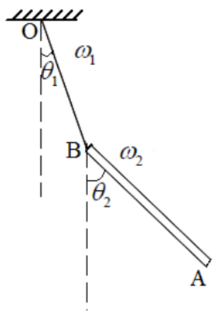
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \tag{2.12}$$

其中

$$L=T-V=L(q_1,q_2,\dots,q_s;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots,\dot{q}_s;t) \tag{2.13}$$

被称为系统的<u>拉格朗日函数</u>，简称<u>拉氏量</u>（Lagrangian）。

☞ 例 3：如图， 长为 l_1 的轻绳 OA 连接长 l_2 、质量 m 的匀质刚性杆，某时刻 A 绕 O 点、B 绕 A 点的角位置分别为 θ_1 、θ_2 ，角速度分别为 ω_1 、ω_2 ，试求相应角加速度 β_1 和 β_2 .



解答：取水平向右为 x 轴，竖直向上为为 y 轴，建立 Oxy 坐标框架，则杆质心c坐标

$$\begin{cases} x_c=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2/2 \\ y_c=-l_1\cos\theta_1-l_2\cos\theta_2/2 \end{cases}$$

求导得

$$\begin{cases} \dot{x}_c=l_1\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1+l_2\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2/2 \\ \dot{y}_c=l_1\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1+l_2\sin\theta_2\,\dot{\theta}_2/2 \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml_2^2\dot{\theta}_2^2 \\ &=\frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{6}ml_2^2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}ml_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ V&=mgy_c=-mg\left(l_1\cos\theta_1+\frac{1}{2}l_2\cos\theta_2\right) \\ L&=T-V \end{aligned}$$

相应

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}=ml_1^2\dot{\theta}_1+\frac{1}{2}ml_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\,\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=-\frac{1}{2}ml_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2-mgl_1\sin\theta_1$$

代入拉格朗日方程得

$$ml_1^2\beta_1+\frac{1}{2}ml_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\,\beta_2=-\frac{1}{2}ml_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\,\omega_2^2-mgl_1\sin\theta_1$$

类似地，有

$$\frac{1}{3}ml_2^2\beta_2+\frac{1}{2}ml_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\,\beta_1=\frac{1}{2}ml_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\,\omega_1^2-\frac{1}{2}mgl_2\sin\theta_2$$

解得

$$\beta_1=-\frac{2g[\sin\theta_1+3\cos\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)]+3l_1\omega_1^2\sin(2\theta_1-2\theta_2)+4l_2\omega_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)}{l_1[5-3\cos(2\theta_1-2\theta_2)]}$$

$$\beta_2=\frac{6\sin(\theta_1-\theta_2)\,[2g\cos\theta_1+2l_1\omega_1^2+l_2\omega_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)]}{l_1[5-3\cos(2\theta_1-2\theta_2)]}$$

1.3 哈密顿原理（Hamilton’ 1833）

1.3.1 变分法的简要历史回顾

- 变分法是从 17 世纪末期，伴随着微积分的出现而发展起来的数学分支。其处理的一类主要问题为泛函极值问题。这里“泛函”是指函数到实数的映射，或者可以称为“函数的函数”。早期的也是较为著名的泛函极值问题是最速降线（branchistochrone curve）问题。

☞ 例 4：最速降线（Johann Bernoulli’ 1896）

考虑重力场中给定两点 $A(0,0)$ 和 $B(x_B,y_B)$，求连接两点的光滑曲线 $y=y(x)$，使得质点沿该轨道的下滑时间最短。（y 轴竖直向下）

时间作为轨道的泛函，形式为

$$I=\int_A^B\frac{ds}{v}=\int_{x_A=0}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

我们要通过极值条件，确定期望函数 $y=y(x)$，即为最速降线的轨道方程。

- Johann Bernoulli 采用“力光类比”的方式巧妙地解决这一问题

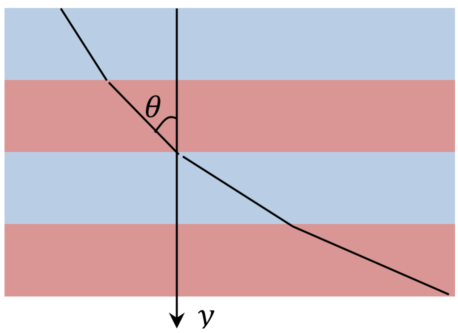
考虑几何光学中的费马原理（Fermat’1662），要求光传播路径的光程

$$L=\int_A^B nds$$

取极值，其中 n 为折射率。因为 $n=c/v$，故光程极值对应传播时间取极值。

如右图，y 方向分薄层，用折线逼近最速降线 $y(x)$，薄层间路径应满足“光的折射定律”，即

$$\frac{\sin\theta}{v}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}}=\text{const.}\quad(3.1)$$



$$\therefore\ y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}}$$

其中 R 为大于零的积分常量。进一步，取参量 $\phi \in [0,\pi)$，并设

$$y = R(1-\cos\phi)$$

则

$$x - x_0 = \int \sqrt{\frac{y}{2R-y}}\,dy = \int 2R\sin^2\frac{\phi}{2}\,d\phi = R(\phi - \sin\phi)$$

对应滚轮线的一段，其中 x_0 和 R 可由固定点条件确定。

- 思考：对于上例，验证 $\phi = 2\theta$

- **欧拉-拉格朗日方程**（Euler' 1744）：

泛函极值的一般性问题是（我们暂时仅考虑一个自由度 y）：泛函积分

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(y,y',x)\,dx \qquad (3.2)$$

对于固定

$$y_A = y(x_A)\,,\qquad y_B = y(x_B)\,,$$

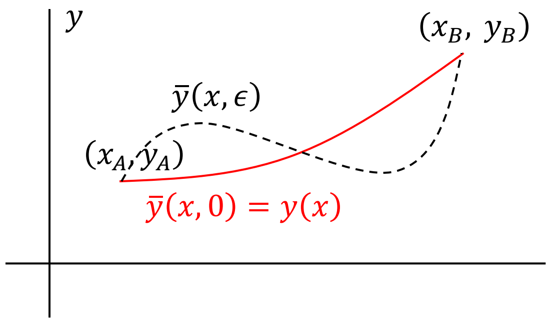
的极值问题。

- 取试探函数族 $\bar{y} = \bar{y}(x,\epsilon)$ 满足

a) $\bar{y}(x_A,\epsilon) = y_A$，$\bar{y}(x_B,\epsilon) = y_B$，$\forall\ \epsilon$

b) $\bar{y}(x,0) = y(x)$ 为极值对应的期望函数

c) $\bar{y}(x,\epsilon) \in C^2$（含义是“直到二阶偏导数存在且连续”）



其示意如右图。如此，积分

$$I(\epsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f(\bar{y},\bar{y}',x)\,dx$$

作为 ϵ 的可微函数，在 $\epsilon = 0$ 处取极值的必要条件是

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

其中（注意 x 不是 ϵ 的函数）

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\epsilon} &= \int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right)\right]dx \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right|_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}'}\right)\right]\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\,dx\end{aligned}$$

第二行第一项为零（条件(a)），故极值条件为

$$0 = \left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\left(\left.\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right)dx$$

其中，$\eta(x) = \left.\frac{d\bar{y}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$ 为 x 的任意函数，故有

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{3.3}$$

这是期望函数满足的二阶微分方程，被称为**欧拉-拉格朗日方程**。

- 得到欧拉-拉格朗日方程的等 x 变分方法：

    我们试着把如上推导改成变分的形式。首先，我们把试探函数族记为

$$\bar{y}(x,\epsilon)=y(x)+\delta y(x)$$

其中 δy 为函数的等 x 变分，满足

a) $\delta(dy)=d(\delta y)$ ，其中 d 表示与 dx 对应的微分算符。（试证明之）

b) $\delta y(x_A)=\delta y(x_B)=0$ （可以称为“固定端点”变分条件）

    极值条件为

$$\begin{aligned}0=\delta I&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)\right]dx\\&=\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y(x)\Big|_{x_A}^{x_B}+\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx\\&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx\end{aligned}$$

对任意的 δy 如上等式都成立，故有欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

- 推广到多变量（多自由度）情形，考虑如下泛函积分

$$I=\int_{x_A}^{x_B}f(y_1,\dots y_s;\ y_1',\dots,y_s';\ x)\,dx$$

我们希望确定函数 $y_\alpha(x)\,,\alpha=1,2,\dots,s$ ，使得 I 取极值，并保证端点固定：

$$y_\alpha(x_A)=y_{\alpha A}\,,\qquad y_\alpha(x_B)=y_{\alpha B}$$

    可以采用固定端点的等 x 变分，相应

$$\delta y_\alpha(x_A)=\delta y_\alpha(x_B)=0\,,\quad \alpha=1,2,\dots,s$$

极值条件为（采用求和约定）

$$\begin{aligned}0=\delta I&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\delta y_\alpha+\frac{\partial f}{\partial y_\alpha'}\frac{d}{dx}(\delta y_\alpha)\right]dx\\&=\frac{\partial f}{\partial y_\alpha'}\delta y_\alpha(x)\Big|_{x_A}^{x_B}+\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha'}\right)\right]\delta y_\alpha dx\\&=\int_{x_A}^{x_B}\left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha'}\right)\right]\delta y_\alpha dx\end{aligned}$$

因为 δy_α 间相互独立，故有欧拉-拉格朗日方程（组）

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha'}\right)=0\,,\qquad \forall\,\alpha=1,2,\dots,s \tag{3.4}$$

➢ 如上我们仅做了一阶变分，极值的存在及其属性（极大还是极小）还取决于二阶变分的符号，这一般会对应复杂的计算。

    很多情形我们可以由物理情况判断极值的属性，比如最速降线，时间积

分泛函必取极值，而且是极小值（极大值是不存在的）。此时（去掉因子$\frac{1}{\sqrt{2g}}$）

$$f(y,y',x)=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \tag{3.5}$$

带入欧拉-拉格朗日方程，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

对于这个 $y(x)$ 满足的二阶微分方程，通常寻找初积分的办法如下：

首先，注意到 f 不显含 x （即 $\partial_x f=0$），故有

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y}y'-\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)$$

于是得到运动积分

$$f-\frac{\partial f}{\partial y'}y'=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}}=\text{const.} \tag{3.6}$$

这与 Johann Bernoulli 的方法给出的结果 (3.1) 是一致的。

1.3.2 哈密顿原理（最小作用量原理）

现在，让我们暂时忘掉牛顿力学，而试着对力学原理加以重新表述

➢ 每个（完整理想）力学系统都可以由一个特征函数——拉格朗日函数

$$L(q_1,q_2,\dots,q_s;\ \dot q_1,\dot q_2,\dots,\dot q_s;t)\xrightarrow{\text{简记为}}L(q,\dot q,t)$$

来表征，真实的运动使得给定初、末态位形 $\left(t_1,q^{(1)}\right)$ 和 $\left(t_2,q^{(2)}\right)$的作用量（action）泛函积分

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q,t)\,dt \tag{3.7}$$

取极值。

- 通常情况该极值是极小值（对于足够小的区段总是极小），所以上述原理被称为**最小作用量原理**，也被称为**哈密顿原理**（Hamilton’ 1834）.
- 力学体系的运动方程为欧拉-拉格朗日方程（组）

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)=0\,,\qquad \alpha=1,2,\dots,s \tag{3.8}$$

在力学中，通常简称为拉格朗日方程。

如果我们可以指认保守系统的拉格朗日函数为（如何做到，见 1.4 节）

$$L=T-V$$

则可以给出牛顿力学的运动方程。（当然，限于惯性系）

- 拉氏量是广义坐标及广义速度的函数，而相应的运动方程是时间相关的二阶微分方程，这反映的事实是：
  经典力学系统的运动状态由 q 和 $\dot q$ 来描述，而其可预言性在于，给定某时刻运动状态（拉氏量），便可唯一确定该时刻的加速度 $\ddot q$ ，从而可以预言系统

的时间演化。

- 从最小作用量原理得到拉格朗日方程的过程来看，时间仅仅作为一个参量，选取其他参量，如 $\tilde{t}=\tilde{t}(t)$ ，仍可以建立等价的拉格朗日方程。
  此外，选取另外一组广义坐标，同样可以建立等价的拉格朗日方程。

1.3.3 非完整约束系统的最小作用量原理

➢ 对于非完整约束系统，其广义坐标数目多于自由度数目，因此最小作用量原理不能直接给出形如 (3.8) 式的拉格朗日方程。

- 一类特殊的微分约束可以表示为广义坐标及时间微分的线性关系：

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{l\alpha} dq_\alpha + a_{lt} dt = 0\,, \qquad l = 1,2,\dots,m \tag{3.9}$$

其中约束数目 $m<s$ ，相应系统自由度 $n_f = s-m$. 等时变分满足

$$\sum_{\alpha=1}^{s} a_{l\alpha} \delta q_\alpha = 0, \qquad l = 1,2,\dots,m$$

这时最小作用量原理可以被改写为

$$\int \sum_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \sum_l \lambda_l a_{l\alpha}\right] \delta q_\alpha \, dt = 0 \tag{3.10}$$

这里引入了 m 个拉格朗日乘子 λ_l 。选取适当的一组拉格朗日乘子，可以使得 $\delta q_\alpha (\alpha = 1,2,..,s)$ 前面的系数均为零，即有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \sum_l \lambda_l a_{l\alpha} = 0\,, \qquad \alpha = 1,2,\dots,s$$

在给定初值的情况下，上式联立 (3.9) 式，便可以求解 λ_l ，并给出体系的轨道函数 $q_\alpha(t)$ 。

1.4 拉氏量的性质和形式

1.4.1 拉氏量的性质

➢ 保证运动方程不变的前提下，拉氏量具有如下任意性：

1) 可相差任意的常数乘积因子，相当于拉氏量（能量）单位选取的任意性。这一点也对应于运动方程关于 L 是线性齐次的。
2) 可相差任意作为时间全导数的求和项，即作变换

$$L \to L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t) \tag{4.1}$$

运动方程是不变的。这一点可以直接由作用量的变换结果看出：

$$S \to S' = S + f\left(q^{(2)}, t_2\right) - f\left(q^{(1)}, t_1\right)$$

而多出来的项是不贡献到固定端点变分的，故运动方程不变。这种不变性通常也称为体系在规范（gauge）变换 (4.1) 下的规范不变性。

✍ 思考：直接验证 L' 和 L 给出的拉格朗日方程是等价的。

➢ 此外，拉氏量具有“可加性”。这里指两个封闭体系 A 和 B，各自孤立时拉氏量分别为 L_A 和 L_B 。若相距足够远，以至于其间的相互作用可略，则体系拉氏量

$$L = L_A + L_B$$

这反映的是每个独立部分的运动方程不可能包含与另一部分相关的物理量。

1.4.2 自由质点的拉氏量

有一种说法：如果让物理学家在一张餐巾纸上写下世界的全部奥秘，那么第一条应该是最小作用量原理，第二条应该是对称和守恒......

接下来我们可以根据对称性写下自由质点的拉氏量，而对称性和守恒量之间的关系将会放在 1.5 节加以讨论。

➢ 对于力学体系的运动，存在着一类特殊的参考系——惯性参考系：

1) 空间是均匀且各向同性的，时间是均匀的；
2) 力学规律满足“伽利略相对性原理”，即在伽利略变换下不变。

➢ 自由质点的拉氏量：

- 惯性系 S 中，选择笛卡尔坐标为广义坐标。时空的均匀性要求拉氏量仅依赖于质点速度 $\vec{v}$ ，而空间的各向同性要求拉氏量仅会依赖于速度大小 v ，即
$$L = L(v^2)$$
- 考虑另一个惯性系 S' ，相对 S 以无穷小速度 $\vec{\epsilon}$ 运动，则 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\epsilon}$ ，于是
$$L' = L(v'^2) = L(v^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{\epsilon} + \epsilon^2) \Rightarrow L(v^2) - 2\frac{\partial L}{\partial (v^2)}\vec{v}\cdot\vec{\epsilon}$$
根据伽利略相对性原理，L' 与 $L(v^2)$ 等价，故有
$$L' - L(v^2) = \frac{d}{dt}f(\vec{r},t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\cdot\vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t}$$
故如上微分展开对 $\vec{v}$ 的依赖是线性的，即
$$\frac{\partial L}{\partial (v^2)} = \text{const.} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{m}{2}v^2 \qquad (4.2)$$
其中 m 被定义为<u>质点质量</u>。因为 v^2 正定，因此（无穷小段）最小作用量原理告诉我们 $m > 0$ 。

✍ 思考：验证当参考系间的变换速度有限时，按如上方式写出的自由质点拉氏量确实相差一个时间的全导数。

- 将(4.2)式代入拉格朗日方程，便有
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \text{const.}$$
此即**惯性定律**（牛顿第一定律）。

☞ 例 5：自由质点在非惯性参考系中的运动方程

1) 先考虑惯性系 S_0 ，质点速度记为 $\vec{v}_0$ ，则
$$L = \frac{m}{2}v_0^2$$

2) 考虑平动非惯性系 S'，其相对 S_0 的速度为 $\vec{V}(t)$，则 $\vec{v}'=\vec{v}_0-\vec{V}$，于是

$$L=\frac{m}{2}\left(v'^2+2\vec{v}'\cdot\vec{V}+V^2\right)\quad\cong\quad\frac{m}{2}v'^2-m\dot{\vec{V}}\cdot\vec{r}'\qquad(4.3)$$

等价式中我们去掉了时间全导数项 $\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}'\cdot\vec{V}+\int^t\frac{1}{2}mV^2dt\right)$。现在，以打"撇"参量为广义坐标及广义速度，拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}')=-m\dot{\vec{V}}$$

而 $-m\dot{\vec{V}}$ 即为平移惯性力。

3) 考虑相对于 S' 以角速度 $\vec{\Omega}(t)$ 做定点转动的非惯性参考系 S，两个参考系的公共参考点可以选在转轴上，则有 $\vec{v}'=\vec{v}+\vec{\Omega}\times\vec{r}$. 代入 (4.3) 式得

$$L=\frac{m}{2}v'^2-m\dot{\vec{V}}\cdot\vec{r}'=\frac{m}{2}v^2+m\vec{v}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)+\frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2-m\dot{\vec{V}}\cdot\vec{r}$$

于是得到

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=m\vec{v}+m\vec{\Omega}\times\vec{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=m\vec{v}\times\vec{\Omega}+m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}-m\dot{\vec{V}}$$

以 $\vec{r}$ 为广义坐标，则拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=2m\vec{v}\times\vec{\Omega}+m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}+m\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}-m\dot{\vec{V}}$$

方程右边的四项分别为：科氏力、惯性离心力、切向惯性力和平移惯性力。

1.4.3 质点系的拉氏量

- 自由质点系：若不存在相互作用，则根据拉氏量的可加性，

$$L=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2$$

其中 m_i 为各个质点的质量。

- 相互作用质点系：对于存在内部相互作用的孤立质点系，可以引入仅依赖于位置的函数（其实就是牛顿力学的势能函数）来描述相互作用，则拉氏量为

$$L=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2-V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots)\qquad(4.4)$$

由拉格朗日方程得

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}$$

故可以定义力

$$\vec{F}_i=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}$$

这和牛顿力学定义力的方式是一致的。

- 如上引入势能函数及定义力的方式，显然对应于"相互作用是瞬时超距的"，

这是“伽利略相对性原理”及“绝对时间假设”的内在要求。

- 考虑约束的存在，引入坐标变换方程

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

则势能函数

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = V(q, t)$$

动能函数

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(q,t)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \sum_\alpha a_\alpha(q,t)\dot{q}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\partial_t\vec{r}_i)^2 \\ &= T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \sum_i m_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}, \qquad a_\alpha = \sum_i m_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$$

动能连等式的中间三项分别为广义速度的二次、一次和零次齐次函数，故分别记为$T^{(2)}$、$T^{(1)}$和$T^{(0)}$。

- 外场中的质点系：考虑稳定约束下整体封闭的系统$A+B$，拉氏量可写作

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - V(q_A, q_B)$$

若已知B系统的运动$q_B(t)$，A系统在给定外场的拉氏量可以写作

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - V(q_A, t)$$

  - 对于单质点在外场中的运动

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}, t) \quad \Rightarrow \quad m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$$

这正是牛顿力学所经常处理的情况。

☞ 例 6：球坐标系中的加速度分解

考虑单质点在外场中的运动

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - V(r, \theta, \phi) \tag{4.6}$$

代入拉格朗日方程

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 - \partial_r V \\ 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - \partial_\theta V \\ mr^2\sin^2\theta\,\ddot{\phi} + 2mr\sin^2\theta\,\dot{r}\dot{\phi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi} = -\partial_\phi V \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} F_r = -\partial_r V = ma_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) \\ F_\theta = -\dfrac{1}{r}\partial_\theta V = ma_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right) \\ F_\phi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi V = ma_\phi = m\left(r\sin\theta\,\ddot{\phi} + 2\sin\theta\,\dot{r}\dot{\phi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi}\right) \end{cases}$$

由此可以读出球坐标系中的加速度分解式。

1.5 对称性与守恒律

1.5.1 广义动量与广义动量守恒

- 定义广义动量为

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\,, \qquad \alpha = 1,2,\dots,s \tag{5.1}$$

则拉格朗日方程可以写作

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

因此，如果拉氏量不显含某个广义坐标 q_α ，则称 q_α 为循环坐标，此时对应的广义动量守恒： $p_\alpha = \text{const.}$

- 广义动量不必具有动量的量纲，比如球坐标系中单质点的拉氏量如 (4.6) 式所示，相应广义动量为

$$p_r = m\dot{r}\,, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}\,, \qquad p_\phi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \tag{5.2}$$

其中 p_r 具有（线）动量的量纲，而 p_θ 和 p_ϕ 其实对应于角动量的分量。

- 循环坐标的存在一般是与一定对称性相联系的。例如，如果外场具有轴对称，则 $V = V(r,\theta)$ ，ϕ 为循环坐标，相应角动量的极轴方向的分量 $J_z = p_\phi$ 守恒。
- 如果外场具有球对称，则角动量 $\vec{J}$ 守恒（各个固定方向的分量均守恒）。
- 在有对称性存在时，可以根据对称性选取广义坐标，使得循环坐标尽可能多，方便给出运动积分。

1.5.2 能量守恒

- 若体系具有时间平移不变性，则拉氏量中不显含时间，即 $\partial_t L = 0$ ，故有（求和约定）

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)$$

即存在守恒量——能量

$$E = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = \text{const.} \tag{5.3}$$

- E 对 L 线性依赖，由 L 的可加性，可知能量具有可加性
- 对于稳定约束下的保守系的拉氏量，动能项只包含广义速度的二次齐次项，即 $T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$ 。由欧拉齐次函数定理

$$\sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = 2T$$

故此时

$$E = 2T - (T - V) = T + V$$

即是牛顿力学中的机械能。

- 对于不稳定约束下的保守系 $T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}$ ，相应

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha = 2T^{(2)} + T^{(1)}$$

守恒量

$$E = 2T^{(2)} + T^{(1)} - (T - V) = T^{(2)} - T^{(0)} + V \qquad (5.4)$$

通常被称为广义能量。

- 若把广义动量 $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 和广义坐标看作独立变量，则函数

$$H = \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = H(p, q, t)$$

被称为体系的哈密顿函数，或称为哈密顿量。对上式取微分并应用拉格朗日方程，便有（求和约定）

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_\alpha dp_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha - (p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \partial_t L dt) \\ &= \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \partial_t L dt \end{aligned}$$

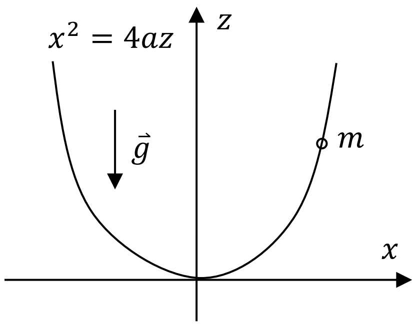
故有

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad \partial_t H = -\partial_t L$$

这是一组我们将在第二章着重讨论的方程。

引入哈密顿量后，体系的能量守恒定律可以表述为：若哈密顿量不显含时间，则其本身为体系的运动积分，称为能量。

☞ 例 7：如图所示，一个以匀角速 ω 绕 z 轴转动的光滑金属丝，其在转动系中的方程为 $x^2 = 4az$。一质量为 m 的小环套在金属丝上，求小环在转动系中的坐标 x 满足的运动方程。



解答：系统为完整、理想系统，自由度为 1，可以选 x 为广义坐标，则动能（仍为惯性系动能！）

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - mg\frac{x^2}{4a}$$

广义动量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)\dot{x}$$

因为拉氏量不显含时间，故有广义能量守恒

$$E = p_x\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + mg\frac{x^2}{4a}$$

此即 x 满足的运动方程。

- 附注：此例中，广义能量具有 $T^{(2)}-T^{(0)}+V$ 的形式，如 (5.4) 式的形式。其中 $-T^{(0)}=-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 即是我们曾经在牛顿力学中讨论过的离心势能。

1.5.3 动量守恒和角动量守恒

空间的均匀性和各向同性会分别导致动力学体系的动量守恒和角动量守恒。其中，空间的均匀性是指体系在空间平移变换下的不变性，而空间的各向同性是指体系在空间转动变换下的不变性。 “不变性”的自然要求是在如上变换下体系的运动方程不变，这里对应于拉氏量不变。

➢ 空间平移和转动的无穷小变换：可以统一写作

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$$

其中

$$(\delta\vec{r}_i)_{\text{平移}} = \delta\vec{r}_0\,, \qquad (\delta\vec{r}_i)_{\text{转动}} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i \tag{5.5}$$

式中 $\delta\vec{r}_0$ 与 $\delta\vec{\varphi}$ 分别是与 $\vec{r}_i$ 无关的全局性无穷小平移量和无穷小转角。如上两个变换都对应有 $\delta t=0$，于是

$$\delta\vec{r}_i = \sum_\alpha \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\,, \qquad \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}$$

- 以广义坐标及广义速度表示，相应真实轨道拉氏量的变分为

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha \\ &= \sum_\alpha \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

对于速度无关势 $V=V(q,t)$ 情形，

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

于是有

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\sum_\alpha\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)$$

- 无穷小平移变换下，拉氏量不变，对应于

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_0 = 0$$

故有系统总动量守恒，即

$$\vec{P} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.} \tag{5.7}$$

显然，$\vec{P}$ 具有“可加性”。

• 无穷小转动变换下，拉氏量不变，对应于

$$\delta L=\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_i)\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{\varphi}=0$$

故有系统总角动量守恒，即

$$\vec{J}=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i=\text{const.}\qquad(5.8)$$

显然，$\vec{J}$ 具有“可加性”。

1.5.4 得到能、动量守恒的另一种方式

➢ 我们首先把真实轨道（满足运动方程）的作用量看作是末态时空坐标的函数 $S=S(t,q)$，其中 $t=t_2,q=q^{(2)}$。

固定 $(t_1,q^{(1)})$ 及 t，采用等时变分可以得到

$$\delta S=\left(\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)\Bigg|_1^2+\int_{t_1}^{t}\sum_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\right]\delta q_\alpha\,dt$$

$$=\left(\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)\Bigg|_1^2=\left(\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)\Bigg|_1^2=\left(\sum_i\vec{p}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right)\Bigg|_1^2$$

故有

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=p_\alpha,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{dS}{dt}-\sum_\alpha\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=L-\sum_\alpha\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=-E$$

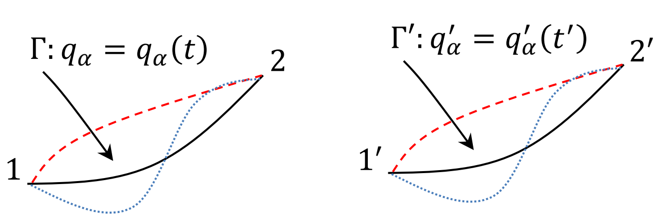
• 若体系具有时间平移不变性，意味着 S 随时间均匀地增长，即

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-E=\text{const.}$$

• 类似地，若体系具有空间平移不变性，则

$$\sum_i\vec{p}_i=\text{const.}$$

1.5.5 诺特定理



如图，考虑将 1、2 间曲线 Γ 及其周围曲线“平移”为$1'$、$2'$ 间曲线 Γ'及其周围曲线，这诱导了相应的时空坐标变换[1]

$$q'_\alpha=q'_\alpha(q,t),\qquad t'=t'(q,t)\qquad(5.9)$$

原坐标系统的作用量为

[1] 这被称为坐标变换的主动观点

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, \mathrm{d}t \qquad (5.10)$$

新坐标系统的作用量为

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')\, \mathrm{d}t' = \int_{t_1}^{t_2} L(q', \dot{q}', t') \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \qquad (5.11)$$

若(5.9)式为系统的对称性变换，则要求运动方程在变换下不变，例如真实轨道 Γ 应变换为新的真实轨道 Γ' 。这潜在地要求作用量不变或者至多相差一个表面项

$$\Delta S = S' - S = F(q, t)\big|_{t_1}^{t_2} \qquad (5.12)$$

若变换(5.9)式为连续性对称变换，即该变换可以用连续性参量加以表征，则可以定义无穷小变换

$$\begin{cases} q_\alpha'(t') = q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t) = q_\alpha(t) + \epsilon \cdot \xi_\alpha(q, t) \\ \qquad\quad t' = t + \delta t = t + \epsilon \cdot \eta(q, t) \end{cases} \qquad (5.13)$$

其中 ϵ 为无穷小的变换参数，$\delta q_\alpha(t) = q_\alpha'(t') - q_\alpha(t)$被称为诺特变分。我们要求 ϵ 不依赖于时空坐标，则该变换被称为是整体的。

在无穷小对称变换(5.13)下，(5.12)式要求

$$L(q', \dot{q}', t') \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t) \qquad (5.14)$$

其中右侧的全微分项是无穷小变换诱导出来的，所以可以预期

$$F(q, t) = \epsilon \cdot \phi(q, t) \qquad (5.15)$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta t$$

方程(5.14)左边在微分近似下可以化为

$$L(q', \dot{q}', t') - L(q, \dot{q}, t) + L(q, \dot{q}, t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta t$$

注意到

$$\dot{q}_\alpha' = \frac{\mathrm{d}q_\alpha'(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}q_\alpha'(t')}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \left(\dot{q}_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_\alpha\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta t\right) = \dot{q}_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_\alpha - \dot{q}_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta t$$

因此（采用求和约定）

$$L(q', \dot{q}', t') - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t$$

综上，有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t) \qquad (5.16)$$

注意到

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha\right) = -\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \dot{q}_\alpha$$

则(5.16)式可以被变形为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)(\delta q_\alpha-\dot{q}_\alpha\delta t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\delta t\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q,t)$$

或

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)(\delta q_\alpha-\dot{q}_\alpha\delta t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{Q} \qquad (5.17)$$

其中

$$\mathcal{Q}=p_\alpha\delta q_\alpha-E\delta t-F \qquad (5.18)$$

(5.16)式被称为诺特条件，它可以用来判断无穷小变换是否为对称性变换，并进一步确定 $F(q,t)$ 的形式。而利用运动方程，可以通过(5.17)式读出守恒量。因为变换(5.13)是整体的，故守恒量为

$$Q=\frac{1}{\epsilon}\,\mathcal{Q}=p_\alpha\xi_\alpha-E\eta-\phi \qquad (5.19)$$

如上的结论便是诺特定理，它可以被表述为：若(5.13)为体系的无穷小、整体、对称性变换，则相应存在形如(5.19)式的守恒量。如下是几个例子：

- 考虑存在循环坐标 q_γ，其对应的无穷小整体对称性变换为

  $$\delta q_\alpha=\epsilon\cdot\delta_{\alpha\gamma}\,,\qquad \delta t=0 \qquad (5.20)$$

  代入(5.16)式，并注意到 $\frac{\partial L}{\partial q_\gamma}=0$，可以确定 $F=0$。故 (5.20) 可确定为体系的对称性变换，其相应的守恒量为

  $$Q=p_\alpha\delta_{\alpha\gamma}=p_\gamma$$

- 定义无穷小整体时间平移变换

  $$\delta t=\epsilon\,,\qquad \delta q_\alpha=0 \qquad (5.21)$$

  若体系拉氏量不显含时间，由(5.16)式可知，(5.21)为体系的对称性变换，且有 $F=0$。相应守恒量为

  $$Q=E=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L$$

- 对于 N 个相互作用的粒子组成的孤立保守系，选取笛卡尔坐标为广义坐标

  $$L=\sum_i\frac{1}{2}m_i v_i^2-V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N) \qquad (5.22)$$

  其中势能函数只依赖于各个粒子之间的距离

  $$r_{ij}=\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|$$

  定义空间无穷小整体平移变换为

  $$\delta_{\vec{\tau}}\vec{r}_i=\epsilon\cdot\vec{\tau}\,,\qquad \delta t=0 \qquad (5.23)$$

  其中 $\vec{\tau}$ 为给定的方向向量。在变换(5.23)下，拉氏量不变，故有 $F=0$，相应守恒量为

  $$Q=\left(\sum_i\vec{p}_i\right)\cdot\vec{\tau}$$

  由 $\vec{\tau}$ 方向的任意性可知该系统的总动量是守恒的。

- 定义空间无穷小整体转动变换为

$$\delta_{\vec{n}}\vec{r}_i = \epsilon\cdot(\vec{n}\times\vec{r}_i)\,,\qquad \delta t = 0 \qquad\qquad (5.24)$$

其中 $\vec{n}$ 为给定的（转轴）方向向量。在变换(5.24)下，拉氏量不变，故有 $F=0$，相应守恒量为

$$Q=\sum_i \vec{p}_i\cdot(\vec{n}\times\vec{r}_i)=\left(\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i\right)\cdot\vec{n}$$

由 $\vec{n}$ 方向的任意性可知该系统的总角动量是守恒的。

- 考虑无穷小伽利略变换

$$\delta_{\vec{\tau}}\vec{r}_i = -\epsilon\cdot\vec{\tau}t\,,\qquad \delta t = 0 \qquad\qquad (5.25)$$

$\vec{\tau}$ 为参考系变换速度的方向向量。在如上变换下，势能函数是不变的，故

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta_{\vec{\tau}}\vec{r}_i = 0$$

但动能会发生变化，相应（求和约定）

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta_{\vec{\tau}}\vec{r}_i = -m_i\vec{v}_i\cdot\epsilon\vec{\tau}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\cdot\epsilon\vec{\tau}\right)$$

因此 $\phi=-(\sum_i m_i\vec{r}_i)\cdot\vec{\tau}$，代入(5.19)式，可得守恒量

$$Q=p_\alpha\xi_\alpha-\phi=\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\,t-\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\cdot\vec{\tau}$$

引入质点系质心 C，则上式括弧里的守恒量为

$$\sum_i m_i\vec{v}_i\,t-\sum_i m_i\vec{r}_i = m\vec{v}_C t - m\vec{r}_C = \text{const.} \qquad\qquad (5.26)$$

其中 $m=\sum_i m_i$ 为质点系的总质量，而 (5.26) 正是孤立质点系的特征。即

$$\vec{v}_C=\dot{\vec{r}}_C=\text{const.}$$

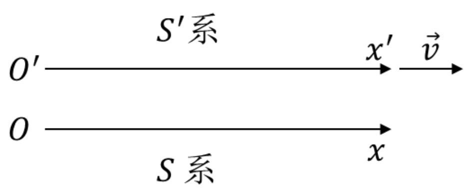
其积分式便是(5.26)。

1.6 狭义相对论时空观

1.6.1 Lorentz 变换与间隔不变性

➢ 记号、约定：

$$\beta=\frac{v}{\mathrm{c}}\ ,\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



➢ 取四维时空坐标：

$$x^\mu=(\mathrm{c}t,x,y,z)\ ,\qquad \mu=0,1,2,3 \qquad\qquad (6.1)$$

即，$x^0=\mathrm{c}t$，$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$，根据狭义相对论，有变换：

$$\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta x)\\ x'=\gamma(x-\beta ct)\\ y'=y\\ z'=z \end{cases}$$

从而 Lorentz 变换可以看作为“x^0-x^1”间的“转动”变换（求和约定）：

$$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \qquad (6.2)$$

其中 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 写成矩阵形式为：

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (6.3)$$

因有 $\gamma^2-(-\gamma\beta)^2\equiv 1$，如上“转动”使得如下四维“距离-间隔”不变：

$$(s_0)^2=(x^0)^2-[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2]=(x'^0)^2-[(x'^1)^2+(x'^2)^2+(x'^3)^2]$$

显然，普通 3 维转动仍保持如上定义的四维“距离”不变.

➢ 无穷小间隔与度规：

无穷小间隔 $\mathrm{d}s$ 的定义为

$$\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}=(c\mathrm{d}t)^2-(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2) \qquad (6.4)$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 被称为闵可夫斯基时空的度规矩阵元，其对应的度规矩阵为

$$(\eta_{\mu\nu})=\mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$$

显然，(6.4)式在 Lorentz 变换下形式不变，即有

$$\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}=\eta_{\rho\sigma}\mathrm{d}x'^{\rho}\mathrm{d}x'^{\sigma}=\eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$$

因此，

$$\eta_{\mu\nu}=\eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}$$

或者，按照矩阵乘法规则

$$\eta=\Lambda^{T}\eta\Lambda \qquad (6.5)$$

其中，η 为度规矩阵，Λ 为 Lorentz 变换矩阵，Λ^{T} 为 Λ 的转置。其实，满足(6.5)式的变换还包括三维空间转动和时空反演，它们都保证(6.3)式的形式不变性。因此，我们将“01”间的“转动”变换称为狭义的洛伦兹变换，而一般性的洛伦兹变换包含

$$\begin{cases}\text{空时转动（狭义的洛伦兹变换）}\\ \text{3 维空间转动}\\ \text{时间或空间反演}\end{cases}$$

1.6.2 四矢量与四维时空的张量

➢ 线元四矢量：

我们将无穷小线元 $\mathrm{d}x^{\mu}=(c\mathrm{d}t,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ 称为四矢量，利用度规可以定义与其对偶的四矢量

$$\mathrm{d}x_{\mu}=\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\nu}=(c\mathrm{d}t,-\mathrm{d}x,-\mathrm{d}y,-\mathrm{d}z) \qquad (6.6)$$

对偶的含义是，$\mathrm{d}x_\mu$ 可以将四矢量 $\mathrm{d}x^\mu$ 映射为一个实数（标量），也就是说我们可以定义四矢量的“点积”

$$\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x_\mu=\mathrm{d}s^2 \qquad (6.7)$$

为 Lorentz 标量。

- 通常我们称上指标为逆变指标，下指标为协变指标，因此 $\mathrm{d}x^\mu$ 为逆变四矢量，$\mathrm{d}x_\mu$ 为与之对偶的协变四矢量。

  协变四矢量 $\mathrm{d}x_\mu$ 的 Lorentz 变换形式为

$$\mathrm{d}x'_\mu=\Lambda_\mu{}^\nu\mathrm{d}x_\nu \qquad (6.8)$$

  其变换矩阵为

$$\left(\Lambda_\mu{}^\nu\right)=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (6.9)$$

  因为

$$\mathrm{d}x^\nu\mathrm{d}x_\nu=\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'_\mu=\Lambda^\mu{}_\nu\Lambda_\mu{}^\rho\mathrm{d}x^\nu\mathrm{d}x_\rho$$

  因此

$$\Lambda^\mu{}_\nu\Lambda_\mu{}^\rho=\delta_\nu^\rho \qquad (6.10)$$

- 我们可以定义上指标的度规矩阵元为

$$\eta^{\mu\nu}=(\eta^{-1})_{\mu\nu} \qquad (6.11)$$

  即有

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}=\delta_\rho^\mu \qquad (6.12)$$

  这样，由(6.6)式便有

$$\mathrm{d}x^\mu=(\eta^{-1})_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\nu=\eta^{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\nu$$

➢ 对于一般的逆变四矢量，$A^\mu=\left(A^0,\vec{A}\right)$ 或 $B^\mu=\left(B^0,\vec{B}\right)$，它们在 Lorentz 变化下的分量变换式与(6.2)式类同。而它们的对偶矢量，可以类似 (6.6)式的方式加以定义

$$A_\mu=\eta_{\mu\nu}\,A^\nu=\left(A^0,-\vec{A}\right),\qquad B_\mu=\eta_{\mu\nu}\,B^\nu=\left(B^0,-\vec{B}\right)$$

显然，四矢量之间的点积

$$A\cdot B=A_\mu B^\mu=A^\mu B_\mu=A^0B^0-\vec{A}\cdot\vec{B} \qquad (6.13)$$

上式在三维转动下的不变性要求四矢量的空间分量为三维欧氏空间中的矢量（即为 3-矢量），而上式右侧的 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 便是普通的 3-矢量之间的点积。

➢ 我们可以定义一个二阶协变张量 $\xi_{\mu\nu}$，它可以把任意两个四矢量 A^μ 和 B^μ 映射为一个标量

$$\xi_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$$

这样的张量在 Lorentz 变换下的变换规则是

$$\xi'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \xi_{\rho\sigma}$$

类似地，可以定义二阶混合张量 $\xi^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}\xi_{\rho\nu}$ 和二阶逆变张量 $\xi^{\mu\nu} = \eta^{\nu\rho}\xi^\mu{}_\rho$，可以证明它们在 Lorentz 变换下的变换规则分别为

$$\xi'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \xi^\rho{}_\sigma$$

$$\xi'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \xi^{\rho\sigma}$$

- 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 本身便是二阶协变张量

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \eta_{\rho\sigma}$$

相应，$\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ 分别为二阶逆变张量和二阶混合张量。

1.6.3 粒子的四速度

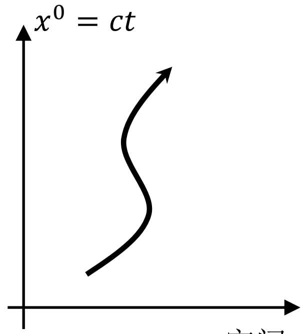
➢ 粒子**世界线**：

四维时空坐标下的粒子运动线（如右图）

其上无穷小间隔（interval）不变量

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$$
$$= (cd\tau)^2$$

其中 $d\tau$ 为“**故有时**”，即粒子“随动惯性系[2]”中的时间间隔.



➢ 通常粒子速度（3 速度）定义为

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ \ (u_x = \frac{dx}{dt}, \dots)$$

则有“钟慢”效应：

$$dt = \gamma_u d\tau\,, \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-{\beta_u}^2}}\,, \qquad \beta_u = \frac{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}{\mathrm{c}}$$

➢ 定义粒子 **4 速度**：

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

[2] 引入随动惯性系不需要粒子做匀速运动，对于非匀速运动粒子，可以每时每刻引入随粒子运动的惯性系.

按定义，$d\tau = ds/c$，为 Lorentz 不变量，则 η^μ 为 4 矢量

综上，得：

$$u^\mu = \gamma_u(c, \vec{u})$$

可以直接验证 $\eta_\mu \eta^\mu$ 为不变量：

$$u_\mu u^\mu = (\gamma_u c)^2 - (\gamma_u)^2 \vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{c^2 - \vec{u}\cdot\vec{u}}{1-{\beta_u}^2} = c^2$$

1.7 相对论性粒子及其与外场的相互作用

1.7.1 相对论性自由粒子

- 根据相对性原理，“最小作用量原理”应该在任意的惯性参考系都是成立的，故相对论性粒子的作用量为洛伦兹标量。

  和相对论性自由粒子运动关联的洛伦兹标量只是其（静）质量 m 及“世界线”的“长度”

$$\int ds$$

  其中无穷小间隔 $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$. 故可设作用量形式为

$$S = -\alpha \int ds \xrightarrow{\text{指定参考系}} -\int \alpha c \sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}\, dt$$

  其中 $\alpha(>0)$ 为洛伦兹标量，$\vec{v}$ 是粒子在指定参考系中的速度.

  - 其拉氏量为

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} = -\alpha c + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}\vec{v}^2 + \cdots$$

  我们要求在低速极限下回到非相对论自由粒子的拉氏量形式（可以相差相加性常量 $-mc^2$），由此可以确认 $\alpha = mc$ ，即

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} \qquad (7.1)$$

$$S = \int L dt = -mc\int ds \qquad (7.2)$$

- 动量、能量及运动方程
  - 由拉格朗日方程得运动方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const.} \qquad (7.3)$$

  其中 $\beta = v/c$.

  - 质点的相对论性动量为

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.4}$$

- 因 $\partial_t L = 0$，故能量守恒，其形式为

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.5}$$

➢ 四维协变形式：

- 运动方程：我们也可以采用对标量形式的作用量直接变分的方式，由最小作用量原理得到运动方程。其中关键的数学处理在于

$$\delta(ds) = \delta\left(\sqrt{dx_\mu dx^\mu}\right) = \frac{dx^\mu}{ds}\delta(dx_\mu) = u^\mu d(\delta x_\mu)$$

其中 $u^\mu = dx^\mu/ds$ 为无量纲的 4 速度（与我们 1.6 节定义的 4 速度相差 c^{-1} 因子）。如上应用了 $\delta(dx_\mu) = d(\delta x_\mu)$，相当于我们把 s 看作是轨道参量，并采用了等 s 变分。相应地，

$$\delta S = \int_1^2 -mcu^\mu d(\delta x_\mu) = -mcu^\mu \delta x_\mu\Big|_1^2 + \int_1^2 mc\frac{du^\mu}{ds}\delta x_\mu ds$$

应用最小作用量原理

$$0 = \delta S = \int_1^2 mc\frac{du^\mu}{ds}\delta x_\mu ds$$

故得到协变形式的运动方程

$$\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = 0 \tag{7.6}$$

这与三维形式 (7.3) 式等价。

- 四动量：将真实轨道的 S 看作是末态时空坐标 x_μ 的函数，则有（等 s 变分下），

$$\delta S = -mcu^\mu \delta x_\mu\Big|_1^2$$

故有四动量

$$p^\mu = -\partial^\mu S = mcu^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{7.7}$$

其中四维（逆变）梯度算符

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla}\right)$$

1.7.2 相对论性粒子在电磁场中的运动

➢ 相对论性的矢量场 $A^\mu = A^\mu(ct,\vec{r}) = A^\mu(x)$，这里 x 代表 4 位矢（不是笛卡尔坐标），在洛伦兹变换 $x \to x' = \Lambda x$ 下，矢量场变换如下：

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

我们称 $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ 为四维电磁势，并将指认 ϕ 和 $\vec{A}$ 分别为标势和矢势。

➢ 考虑相对论性带电粒子与电磁场的耦合，相应的作用量应为洛伦兹标量. 最简单的耦合方式（称为“最小耦合”或“规范耦合”）对应的作用量形式为

$$S = -mc\int ds - q\int A^{\mu} dx_{\mu} \qquad (7.8)$$

其中洛伦兹标量 q 被称为带电粒子的电量（其含义很快就可以被看到）。

- 指定参考系中，拉氏量为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - \left(q\phi(x) - q\vec{v}\cdot\vec{A}(x)\right) \qquad (7.9)$$

故有

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + q\vec{A}(x)\,, \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + q\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

注意到

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \partial_t\vec{A} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

代入拉格朗日方程得

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}\,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \qquad (7.10)$$

- 规范对称性：作规范变换

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi \qquad (7.11)$$

其中 $\chi = \chi(x)$ 是任意的标量场。相应

$$\begin{cases} \phi \to \phi' = \phi + \partial_t\chi \\ \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \end{cases} \qquad (7.12)$$

则有

$$S_{12} \to S'_{12} = S_{12} - [q\chi(x)]|_1^2$$

并不改变运动方程。这一点也可以直接在运动方程中加以验证，相应

$$\vec{E}' = \vec{E}\,, \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$

这种不变性，也被称为电磁相互作用的**规范对称性**。

- 笛卡尔坐标对应的广义动量

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + q\vec{A}(x) \qquad (7.13)$$

被称为<u>正则动量</u>，以区分于<u>机械动量</u> $\vec{p}$.

- 若为恒定场，则 $\partial_t L = 0$ ，故广义能量守恒，其形式为

$$E = \vec{P}\cdot\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\phi(\vec{r}) \qquad (7.14)$$

可以看作是相对论性带电粒子在恒定电磁场中运动的”机械能”。

对于一般情形，体系的哈密顿量为

$$H = H\left(\vec{P},\vec{r},t\right) = \vec{P}\cdot\vec{v} - L = \sqrt{\left(\vec{P}-q\vec{A}\right)^2 c^2 + m^2c^4} + q\phi$$

- 若采取高斯单位制，需做替换

$$\vec{B} \to \frac{\vec{B}}{c}, \qquad \vec{A} \to \frac{\vec{A}}{c}, \qquad A^\mu \to \frac{A^\mu}{c} = \frac{1}{c}(\phi, \vec{A})$$

相应一些方程的形式变为

$$S = -mc\int ds - \frac{q}{c}\int A^\mu dx_\mu$$

$$L = -mc\sqrt{1-\beta^2} - \left(q\phi(x) - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(x)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases}$$

- 非相对论极限：$v \ll c$ 时，去掉无关常量 $-mc^2$，我们有

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \left(q\phi(x) - q\vec{v}\cdot\vec{A}(x)\right)$$

电磁场耦合部分的形式没有变，反映的是电磁场及电磁相互作用本质上是相对论性的。

- 正则动量

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial\vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}(t,\vec{r}\,)$$

- 运动方程：仍可由拉格朗日方程给出

$$\begin{cases} m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{7.15}$$

- 速度相关势：若形式上将拉氏量写作 $L = T - V$，则

$$V = q\phi(t,\vec{r}\,) - q\vec{v}\cdot\vec{A}(t,\vec{r}\,)$$

为速度相关势，若将拉格朗日方程写作

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

则此处广义力

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)$$

- 运动方程的四维协变形式：

数学上

$$\begin{aligned} \delta\left(A^\mu dx_\mu\right) &= \delta(A^\mu)dx_\mu + A^\mu\delta\left(dx_\mu\right) \\ &= \partial^\nu A^\mu\delta x_\nu dx_\mu + d\left(A^\mu\delta x_\mu\right) - \partial^\nu A^\mu\delta x_\mu dx_\nu \\ &= F^{\mu\nu}\delta x_\mu dx_\nu + d\left(A^\mu\delta x_\mu\right) \\ &= F^{\mu\nu}u_\nu\delta x_\mu ds + d\left(A^\mu\delta x_\mu\right) \end{aligned}$$

其中<u>电磁场张量</u>

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{7.16}$$

直接对作用量做等 s 变分，得

$$0 = \delta S = \int_1^2 \left(mc\frac{du^\mu}{ds} - qF^{\mu\nu}u_\nu \right) \delta x_\mu ds$$

故协变形式的运动方程为

$$m\frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{c}qF^{\mu\nu}u_\nu \qquad (7.17)$$

✍ 思考：验证如上形式的运动方程与之前得到的三维形式 (7.15) 等价。

提示：先验证 $F^{i0} = \frac{E^i}{c}, F^{ij} = -\sum_k \epsilon^{ijk}B^k \quad (i,j,k = 1,2,3)$

1.7.3 相对论性粒子与标量场的耦合

相对论性的标量场 $\Phi = \Phi(ct,\vec{r}) = \Phi(x)$，在洛伦兹变换 $x \to x' = \Lambda x$ 下，其变换如下：

$$\Phi(x) \to \Phi'(x') = \Phi(x)$$

不考虑偏导数耦合，相对论性粒子与标量外场的耦合作用量可以写作

$$S = -mc\int e^{\Phi(x)}ds \qquad (7.18)$$

其协变形式的运动方程为（请自行证明）

$$\frac{du^\mu}{ds} + u^\mu u^\nu \partial_\nu \Phi = \partial^\mu \Phi \qquad (7.19)$$

其拉氏量为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}e^{\Phi(x)} \qquad (7.20)$$

➢ 非相对论极限：

记 $\Phi(t,\vec{r}) = \frac{V(t,\vec{r})}{mc^2}$，显然 V 对应于能量量纲，若 $V(t,\vec{r}) \ll mc^2$，则

$$e^{\Phi(t,\vec{r})} \approx 1 + \frac{V(t,\vec{r})}{mc^2}$$

进一步 $v \ll c$ 时，

$$L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - V(t,\vec{r}) \qquad (7.21)$$

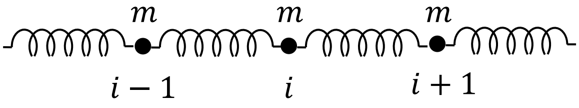
故 $V(t,\vec{r})$ 对应于非相对论情形的外场势能，这与之前应用的展开条件$V \ll mc^2$ 是一致的。

1.8 经典场论

经典场是一个具有无穷多、连续不可数自由度的动力学系统，我们可以设想每个时空点上的场都对应为场系统的广义坐标。

1.8.1 标量场

➢ 一维悬珠链的连续情形



考虑一维无限长悬珠链（如右图所示），珠质量为 m，平衡

位形间距均为弹簧原长 a 、弹簧弹性系数为 k 。以振动量 q_i 为广义坐标，系统拉氏量为

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m\dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} k(q_{i+1} - q_i)^2 - \sum_i v_i(q_i)$$
$$= \sum_i a\left[\frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}ka\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a}\right)^2 - \frac{v_i}{a}\right] \qquad (8.1)$$

考虑到一般性，我们这里引入了仅依赖于各个 q_i 的势能项 $v_i(q_i)$ 。

过渡到连续极限（$a \to 0$），需同时进行如下操作

$$q_i \to q(t,x)\,, \qquad \dot{q}_i \to \partial_t q\,, \qquad \frac{q_{i+1} - q_i}{a} \to \partial_x q\,, \qquad \sum_i a \to \int dx$$

$$\frac{m}{a} \to \lambda\,, \qquad ka \to \kappa\,, \qquad \frac{v_i(q_i)}{a} \to \lambda_v(q)$$

其中 λ 为（无形变时的）质量线密度，κ 为杨氏模量与横截面积的乘积，而 λ_v 为仅依赖于 q 的能量线密度。如此

$$L = \int \mathcal{L}\,(q, \partial_t q, \partial_x q) dx \qquad (8.2)$$

其中，拉氏密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\lambda(\partial_t q)^2 - \frac{1}{2}\,\kappa(\partial_x q)^2 - \lambda_v(q) \qquad (8.3)$$

- 四维时空的标量场： $\phi(t, \vec{r})$

考虑到协变性，拉氏量的一般形式为

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) d^3\,\vec{r} \qquad (8.4)$$

其中，拉式密度 $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$ 为洛伦兹标量，其一般形式是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \qquad (8.5)$$

✍ 思考：对于协变的标量场论，证明 $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$ 是洛伦兹标量。

提示：可以先证明作用量积分中的四维体元是洛伦兹标量。

1.8.2 场的运动方程

➢ 对于一维悬珠链

$$L = \sum_i a\left[\frac{1}{2}\frac{m}{a}\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}ka\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a}\right)^2 - \frac{v_i}{a}\right]$$
$$\to \int dx \left[\frac{1}{2}\lambda(\partial_t q)^2 - \frac{1}{2}\,\kappa(\partial_x q)^2 - \lambda_v(q)\right]$$

相应

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = a\frac{m}{a}\ddot{q}_i \quad \to \quad dx\lambda\partial_t^2 q = dx \cdot \partial_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\,\partial_t q)}\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -a\frac{\partial v_i/\partial q_i}{a} - a \cdot ka\frac{(q_i - q_{i-1}) - (q_{i+1} - q_i)}{a^2}$$

$$\to -dx\frac{\partial\lambda_v}{\partial q}+dx\cdot\kappa\partial_x^2 q=dx\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}-\partial_x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)}\right)\right]$$

故拉格朗日方程，过渡到连续情形为

$$\partial_t\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)}\right)+\partial_x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$$

对于四维时空中的标量场 ϕ 及相应的拉式密度 $\mathcal{L}(\phi,\partial^\mu\phi)$，其运动方程的形式可以类比于一维的情形（$\partial_x\to\vec{\nabla}$）给出：

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\qquad(8.6)$$

如上为经典场论中的欧拉-拉格朗日方程。例如，若拉式密度为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2\qquad(8.7)$$

则运动方程为

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi+\mu^2\phi=0\qquad(8.8)$$

这就是著名的克莱因-高登方程，其中 μ 是具有长度倒数量纲的常量。

- 场的欧拉-拉格朗日方程可以基于连续场论的最小作用量原理得到，其推导在此处从略。

1.8.3 电磁场

➢ 我们已经看到，从洛伦兹变换角度，电磁场 $A^\mu(x)$ 是一个矢量场，其场方程（类比于标量场）为

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\nu},\qquad \nu=0,1,2,3\qquad(8.9)$$

其中，拉式密度 $\mathcal{L}$ 应该满足如下条件：

1） 洛伦兹标量

2） 规范不变（注意 A^μ 本身不是规范不变的）

3） 对 A^μ 及 $\partial^\nu A^\mu$ 的依赖最高到二次，保证场方程是线性的（故有叠加原理）

- 自由电磁场（真空电磁场）：无源的情形，满足如上条件的拉式密度的一般形式为

$$\mathcal{L}=\alpha F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2\alpha\left(\vec{B}^2-\vec{E}^2/c^2\right)\qquad(8.10)$$

注意到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}=2\alpha F_{\rho\sigma}\frac{\partial F^{\rho\sigma}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)}=2\alpha F_{\rho\sigma}\left(\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma-\delta_\nu^\rho\delta_\mu^\sigma\right)=4\alpha F_{\mu\nu}$$

故真空电磁场的场方程为

$$4\alpha\partial^\mu F_{\mu\nu}=0$$

- 含源电磁场：

先考虑单个运动点电荷作为源，则耦合部分的作用量

$$S_{fm}=-\int qA^{\mu}dx_{\mu}$$

在洛伦兹变换及规范变换下是不变量。引入电荷随动惯性系中的原时间隔 $d\tau(=ds/c)$，则

$$S_{fm}=-\int qu_{\mu}A^{\mu}d\tau \xrightarrow{\text{体分布}} -\int \rho_0 u_{\mu}A^{\mu}dV_0 d\tau$$

其中，ρ_0 为随动惯性系中的电荷密度（洛伦兹标量），dV_0 为随动惯性系中的电荷体元。引入电流密度四矢量

$$J^{\mu}=\rho_0 u^{\mu} \xrightarrow{S\text{ 系}} \left(\frac{\rho_0 c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}},\frac{\rho_0\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}\right)=(c\rho,\vec{j}) \qquad (8.11)$$

其中，$\vec{v}$ 、ρ 和 $\vec{j}$ 分别为电荷源在 S 系中的速度、电荷密度和电流密度 3 矢量。因此，一般情形

$$S_{fm}=-\int J_{\mu}A^{\mu}d^3\vec{r}dt \qquad (8.12)$$

其中，我们已经利用了四维时空体元的洛伦兹不变性，将其替换为任意参考系中的形式。S_{fm} 的表达式中可以直接读出耦合项的拉式密度

$$\mathcal{L}_{fm}=-J_{\mu}A^{\mu}$$

综上，含源电磁场的拉式密度为

$$\mathcal{L}=\alpha F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-J_{\mu}A^{\mu} \qquad (8.13)$$

运动方程（场方程）为

$$4\alpha\partial^{\mu}F_{\mu\nu}=-J_{\nu}$$

- 国际单位制中，我们取 $\alpha=-\frac{1}{4\mu_0}$，即

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu}=\mu_0 J_{\nu} \qquad (8.14)$$

其三维形式是

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\mathrm{c}^2\mu_0\rho=\rho/\epsilon_0\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}\end{cases} \qquad (8.15)$$

即为麦克斯韦方程组中的含源方程组。

- 高斯单位制中

$$F_{\mu\nu}\to\frac{F_{\mu\nu}}{c},\qquad \epsilon_0\to\frac{1}{4\pi},\qquad \mu_0\to\frac{4\pi}{c^2},\qquad \vec{B}\to\frac{\vec{B}}{c},\ldots$$

相应取 $\alpha=-\frac{1}{16\pi}$，场方程为

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}J_{\nu}$$

其三维形式为

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

✍ 思考：证明电荷守恒方程 $\partial^{\mu}J_{\mu}=0$（其三维形式为$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\partial_t\rho=0$）

✍ 思考：麦克斯韦方程组中的另一对方程（本构方程组）可以直接由电磁场张量的性质得到。试证明：

$$\partial_\rho F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\rho\mu}+\partial_\mu F_{\nu\rho}=0$$ 注意是下标还是上标，注意度规

并验证其三维形式为（SI）

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\end{cases}$$

1.9 一维波动

1.9.1 一维波动方程和它的通解

➢ 一维弦的拉氏量与波动方程：

考虑一维弦，其无形变时的质量线密度为λ，张力系数为κ，并且不存在外场的作用，则其拉氏量为

$$L=\int\mathcal{L}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}\lambda(\partial_t q)^2-\frac{1}{2}\kappa(\partial_x q)^2\right]$$

其中 $q=q(x,t)$ 为弦上的振动量。

• 波动方程：应用 E-L 方程

$$\partial_t\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)}\right)+\partial_x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$$

得到

$$\partial_t^2 q-u^2\partial_x^2 q=0\qquad(9.1)$$

我们已经假定λ与κ均为常量，相应

$$u=\sqrt{\kappa/\lambda}\qquad(9.2)$$

➢ 波动方程的通解（通积分）：

(9.1)式中左侧作用于 $q(x,t)$ 的微商算符可以“分解因式”，即

$$(\partial_t^2-u^2\partial_x^2)q=(\partial_t-u\partial_x)(\partial_t+u\partial_x)q=0$$

取坐标变换

$$\begin{cases}\xi=x-ut\\ \eta=x+ut\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta)\\ t=\dfrac{1}{2u}(\eta-\xi)\end{cases}$$

则有

$$\partial_\xi q(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))=\partial_t q\cdot\partial_\xi t+\partial_x q\cdot\partial_\xi x=-\frac{1}{2u}(\partial_t-u\partial_x)q$$

$$\partial_\eta q(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))=\partial_t q\cdot\partial_\eta t+\partial_x q\cdot\partial_\eta x=\frac{1}{2u}(\partial_t+u\partial_x)q$$

因此

$$\partial_\xi\partial_\eta\,q(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))=0\qquad(9.3)$$

对上式依次完成两步不定积分便可得

$$q(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))=f(\xi)+g(\eta)$$

其中 f 和 g 表示两个任意的函数。如果用时空坐标来表示，(9.1)式的通解为

$$q(x,t)=f(x-ut)+g(x+ut) \qquad (9.4)$$

上式右侧第一项表示携带振动函数 f 以速度 u 沿着 x 正向传播的一列波动，而第二项表示携带振动函数 g 以速度 u 沿着 x 负向传播的一列波动。

- 达朗伯解：

波动方程的定解问题需要一定的边界条件和初始条件。考虑一条无界的弦（$x\in(-\infty,\infty)$），则定解问题仅需要如下初始条件

$$q(x,0)=\varphi(x)\,, \qquad \partial_t q(x,0)=\psi(x) \qquad (9.5)$$

将(9.4)代入(9.5)得

$$f(x)+g(x)=\varphi(x) \qquad (9.6)$$

$$g'(x)-f'(x)=\frac{1}{u}\,\psi(x) \qquad (9.7)$$

对(9.7)积分得

$$g(x)-f(x)=\frac{1}{u}\int_0^x \psi(x')\,\mathrm{d}x'+c$$

解得

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\frac{1}{u}\int_0^x \psi(x')\,\mathrm{d}x'-c\right]$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\frac{1}{u}\int_0^x \psi(x')\,\mathrm{d}x'+c\right]$$

代入(9.4)式便得

$$q(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ut)+\varphi(x+ut)]+\frac{1}{u}\int_{x-ut}^{x+ut}\psi(x')\,\mathrm{d}x' \qquad (9.8)$$

这便是一维波动方程得达朗伯解。

- 能量密度与能流密度：
  - 能量线密度：

$$\lambda_e=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\lambda(\partial_t q)^2+\frac{1}{2}\,\kappa(\partial_x q)^2 \qquad (9.9)$$

如果引入弦线的横截面积 S，则可引入弦线的质量密度 $\rho=\frac{\lambda}{S}$ 及杨氏模量 $K=\frac{\kappa}{S}$，相应能量体密度为

$$\epsilon=\frac{\lambda_e}{S}=\frac{1}{2}\rho(\partial_t q)^2+\frac{1}{2}K(\partial_x q)^2=\frac{1}{2}\rho(\partial_t q)^2+\frac{1}{2}\,P\cdot\partial_x q \qquad (9.10)$$

其中

$$P=K\cdot\partial_x q \qquad (9.11)$$

为单位横截面积上（相对于 κ 而言）的附加的力，也被称为（附加）应力，相应形变率 $\partial_x q$ 也被称为应变。

  - 考虑向右（x 轴正向）传播的弦波，左侧对右侧施加的力为 $-\kappa\cdot\partial_x q$，相应向右传播的功率为

$$p=-\kappa\cdot\partial_x q\cdot\partial_t q$$

能流为

$$S = -P\partial_t q = -Pv \qquad (9.12)$$

这里我们记质元的振动速度为 $v = \partial_t q$ 。

➢ 单频简谐波解[3]：取试探解

$$q(x,t) = \tilde{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \qquad (9.13)$$

其中$\tilde{A} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 为复振幅。

- 色散关系：频率与波矢的函数关系 $\omega = \omega(k)$ 被称为色散关系。
  将(9.13)代入 (9.1) 中，可得

$$\omega = uk \qquad (9.14)$$

  相应频率与波矢呈线性关系，这是一种最为简单的色散关系。
- 波阻抗：
  压强波（应力波）为

$$P(x,t) = K\cdot\partial_x q = \mathrm{i}kK\, q(x,t)$$

  速度波

$$v(x,t) = \partial_t q = -\mathrm{i}\omega\, q(x,t)$$

  定义波的（复）阻抗为

$$Z = -\frac{P(x,t)}{v(x,t)} = \frac{kK}{\omega} = \frac{K}{u} = \rho u \qquad (9.15)$$

  这里利用了 $u = \sqrt{\kappa/\lambda} = \sqrt{K/\lambda}$ 。相应（实）能流为

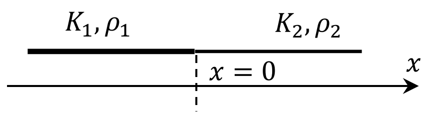
$$S(x,t) = \mathrm{Re}\, v\cdot \mathrm{Re}(Zv) = Z(\mathrm{Re}\, v)^2 = \omega^2 A^2 Z\cos^2(kx-\omega t+\varphi)$$

  其平均值即为波的强度

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z \qquad (9.16)$$

1.9.2 反射与透射

考虑两根半无限长弦线，设想它们具有相同的横截面积 S，但具有不同的质量密度 $\rho_{1,2}$ 和杨氏模量 $K_{1,2}$，即有不同的波速 $u_{1,2}$ 及波阻抗 $Z_{1,2}$ 。将它们在 $x=0$ 处相连接，1 在左，2 在右。从左侧入射的简谐波会在界面上受到反射。



我们设弦上的叠加波场为

$$q(x,t) = \begin{cases} \tilde{A}_I\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)} + \tilde{A}_R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1x-\omega t)} & x<0 \\ \tilde{A}_T\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega t)} & x>0 \end{cases} \qquad (9.17)$$

其中 I、R 和 T 分别代表入射波、反射波和透射波，$k_{1,2} = \omega/u_{1,2}$ 。界面上的边界条件（也被称为衔接条件）分别为

$$q(0^-,t) = q(0^+,t) \qquad (9.18)$$

$$K_1\partial_x q(0^-,t) = K_2\partial_x q(0^+,t) \qquad (9.19)$$

[3] 这里采用了简谐波的复表式，其实部代表真正的波函数。

其中(9.19)来自于界面薄层的体元质量可略，因此两侧的附加应力是相等的。

将(9.17)分别代入(9.18)和(9.19)得

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T$$

$$\mathrm{i}K_1 k_1\left(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R\right) = \mathrm{i}K_2 k_2 \tilde{A}_T \quad \Rightarrow \quad Z_1\left(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R\right) = Z_2 \tilde{A}_T$$

解得

$$\begin{cases} \tilde{A}_R = r_R \tilde{A}_I = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tilde{A}_I \\ \tilde{A}_T = r_T \tilde{A}_I = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tilde{A}_I \end{cases} \tag{9.20}$$

其中，r_R和r_T分别为（复）振幅反射率和（复）振幅透射率。当 $Z_2 > Z_1$ 时，我们称 2 为波密介质，1 为波疏介质，相应 $r_R < 0$ ，反射波相对入射波在界面上出现大小为 π 的位相突变，这种现象被称为半波损失。

由(9.16)和(9.20)，可得强度水平的反射率和透射率

$$R = \frac{Z_1\left(\mathrm{Re}\,\tilde{A}_R\right)^2}{Z_1\left(\mathrm{Re}\,\tilde{A}_I\right)^2} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \tag{9.21}$$

$$T = \frac{Z_2\left(\mathrm{Re}\,\tilde{A}_T\right)^2}{Z_1\left(\mathrm{Re}\,\tilde{A}_I\right)^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{9.22}$$

显然，能量守恒表现为

$$R + T = 1 \tag{9.23}$$

此外，根据(9.22)，无论是 $Z_1 \gg Z_2$ 还是 $Z_2 \gg Z_1$, 都对应于全反射。