第三章 静磁场

3.1 矢势方程及边界条件

静磁场即恒定磁场，可以认为它是由恒定电流激发的，相应需要满足恒定电流条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \qquad (3.1.1)$$

而根据欧姆定律

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E} \qquad (3.1.2)$$

导体中的恒定电流场需要恒定电场来维持，恒定电场方程等同于静电场方程(2.1.1)，如此则方程(3.1.1) (3.1.2)经常要与方程(2.1.1)联立求解，并辅以相应的边界条件。不过经常遇到的情形是给定了恒定电流分布，这样恒定磁场方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}\end{cases} \qquad (3.1.3)$$

可以独立于电场方程而单独被求解。显然，(3.1.1)是方程(3.1.3)成立的必要条件。在介质中

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_\mathrm{f}\end{cases} \qquad (3.1.4)$$

其中传导电流密度 $\boldsymbol{j}_\mathrm{f}$ 视为被给定。

3.1.1 矢势方程

引入矢势 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 来表示磁场

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (3.1.5)$$

其积分式对应于

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \qquad (3.1.6)$$

即矢势的环量即是磁通量。

对于静磁场问题，经常采用 Coulomb 规范固定条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \qquad (3.1.7)$$

如此，将(3.1.5)代入(3.1.3)中的第二个方程，并利用(3.1.7)，得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j} \qquad (3.1.8)$$

方程(3.1.7)和(3.1.8)构成静磁场用矢势描述的基本微分方程。显然

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \qquad (3.1.9)$$

为方程(3.1.8)在无界空间中的解。可以验证，(3.1.9)给出的解满足库仑规范条件(3.1.7)，这是因为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\right)-\frac{1}{R}\left(\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\right)\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。利用恒定电流条件 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$，便有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_{S_\infty}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R}=0$$

此外，将(3.1.9)式代入(3.1.5)便可以得到 Biot-Savart 定律

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \qquad (3.1.10)$$

☞ **例题 3-1** 螺线管磁矢势。

考虑半径为 R 的圆柱形无穷长直均匀密绕螺线管，匝电流为 I、匝密度为 n，求库仑

规范下的磁矢势分布。

解答：设螺线管轴线为 z，则内部圆柱区域匀强磁场为

$$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}} = \mu_0 n I \hat{\boldsymbol{z}}$$

所以待求解的场方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{cases} \boldsymbol{B}, & \rho < R \\ 0, & r > R \end{cases}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

其中 ρ 为场点到轴线的距离。这可以类比于均匀圆柱区域电流激发的磁场的结果，那里磁场满足方程

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \begin{cases} \mu_0 \boldsymbol{j}, & \rho < R \\ 0, & \rho > R \end{cases}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

所以螺线管磁矢势为

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} \dfrac{R^2}{2\rho^2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} = \dfrac{R^2}{2\rho} B \hat{\boldsymbol{\varphi}} & \rho > R \\ \dfrac{1}{2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} = \dfrac{1}{2} \rho B \hat{\boldsymbol{\varphi}} & \rho < R \end{cases}$$

其中 $B = \mu_0 n I$，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 为柱坐标的角向向量。

☞ **例题 3-2** 空间匀强磁场 $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ 对应的矢势。

解答：对于无限大区域的匀强磁场，矢势的选取具有不定性

$$\boldsymbol{A} = -By\hat{\boldsymbol{x}} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{A} = Bx\hat{\boldsymbol{y}} \qquad ②$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(Bx\hat{\boldsymbol{y}} - By\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r} \qquad ③$$

均满足(3.1.5)及(3.1.7)。如果对照(3.1.9)式，则①②分别对应沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向的无穷大均匀面电流，而③可以对应于无穷大螺线管电流。

☞ **例题 3-3** 互感的 Neumann 公式。

真空中给定两个线圈环路 K_1 和 K_2，试证它们之间的互感为

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \qquad (3.1.11)$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{1,2}$ 分别为 $K_{1,2}$ 上（沿电流方向）的线元。

证明：设 1 线圈的电流为 I_1，它在 2 线圈上激发的磁场和矢势分别为

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla \times \boldsymbol{A}_1, \qquad \boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

相应的互感磁通量为

$$\Phi_{12} = \oint_{K_2} \boldsymbol{A}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

因此

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

3.1.2 静磁场能量

线性介质中，静磁场能量为

$$W_m = \iiint \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V \qquad (3.1.12)$$

利用

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}$$

得

$$W_m = \frac{1}{2}\oiint_{S_\infty}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \iiint\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\,\mathrm{d}V = \iiint\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\,\mathrm{d}V \qquad (3.1.13)$$

如上选取了库仑规范，故对于有限电流分布体系，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在无穷远处快速衰减，以至于表面项积分为零。

对于空间 N 个电流分别为 I_i 的恒定电流线圈 K_i $(i=1,2,\dots,n)$ 相应电流元 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\,\mathrm{d}V \to I_i\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$，而其感受的矢势为

$$\boldsymbol{A}_i = \sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{K_j}\frac{I_j\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|}$$

因此，系统磁能为

$$W_m = \sum_{i.j=1}^{N} L_{ij}I_iI_j \qquad (3.1.14)$$

其中电感系数

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{K_i}\oint_{K_j}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} = L_{ji} \qquad (3.1.15)$$

其中 $L_{ii}=L_i$ 为线圈 i 的自感系数。

3.1.3 边值关系

考虑 1 和 2 的介质分界面上场的边值关系（$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{1\to2}$）

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \qquad (3.1.16)$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K}_{\mathrm{f}} \qquad (3.1.17)$$

如果用矢势场书写，则

$$\boldsymbol{n}\cdot((\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_2-(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_1)=0 \qquad (3.1.18)$$

$$\boldsymbol{n}\times\left(\frac{1}{\mu_2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_2-\frac{1}{\mu_1}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_1\right)=\boldsymbol{K}_{\mathrm{f}} \qquad (3.1.19)$$

这里我们假定 1 和 2 均为线性介质，它们的磁导率分别为 μ_1 和 μ_2。考虑到(3.1.6)和(3.1.7)，在跨越边界面时，矢势的切向分量和法向分量分别连续，即有边界面上

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2 \qquad (3.1.20)$$

(3.1.20)已经涵盖了(3.1.18)，因此(3.1.19)和(3.1.20)构成了一组静磁场中矢势满足的边值关系。

3.1.4 静磁场的唯一性定理

静磁场方程组(3.1.4)或矢势方程组(3.1.7)(3.1.8)是完备的，对应有静磁场的唯一性定理。对于给定解域 V 及其边界 $\partial V=S$，如下均为唯一磁场解对应的唯一性边界条件

1) 给定 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_S$
2) 给定 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}|_S$

证明：设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 分别为满足场方程和相应的边界条件的解。则差值分布 $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2$ 及其对应的 $\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$ 及 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2$ 满足

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_0|_S=\boldsymbol{0} \quad 或 \quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_0|_S=\boldsymbol{0}$$

因此[1]

$$0=\oiint_S(\boldsymbol{A}_0\times\boldsymbol{H}_0)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}=\iiint_V\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}_0\times\boldsymbol{H}_0)\mathrm{d}V=\iiint_V[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_0)\cdot\boldsymbol{H}_0-\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}_0]\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_V\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{H}_0\mathrm{d}V$$

最后一个等式利用了解域内 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}_0\equiv 0$。因此 $\boldsymbol{B}_0\equiv 0$，即磁场解唯一。

3.1.5 二维静磁场问题

矢势的方程及边值关系（如(3.1.19)式），比静电势的要复杂，但两者之间也有很大的相似之处。接下来，我们来考查几何位形比较简单的二维磁场问题。

考虑电流沿 z 方向流动且沿 z 方向具有平移不变性

$$\boldsymbol{j}_\mathrm{f}=j_\mathrm{f}(x,y)\hat{\boldsymbol{z}}$$

库仑规范下，自然有

$$\boldsymbol{A}=A(x,y)\hat{\boldsymbol{z}}$$

相应

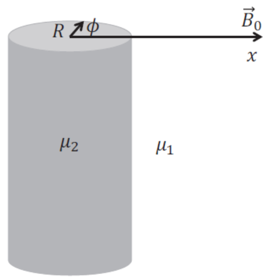
$$\boldsymbol{\nabla}^2A=-\mu j_\mathrm{f}(x,y) \qquad (3.1.20)$$

在 1 和 2 介质的边界面上（边界面的法向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\_1$ 与 z 方向垂直），$A(x,y)$ 满足的边值关系为

$$A_1=A_2 \qquad (3.1.21)$$
$$\frac{1}{\mu_2}\partial_nA_2-\frac{1}{\mu_1}\partial_nA_1=-K_\mathrm{f} \qquad (3.1.22)$$

其中 K_f 为（沿 z 方向的）面电流密度[2]。

☞ **例题 3-4** 如图，半径为 R 的无穷长圆柱面将空间分成内外两个区域，外部磁导率为 μ_1，内部磁导率为 μ_2。空间有垂直于圆柱轴线的匀强背景磁场 $\boldsymbol{B}_0=B_0\hat{\boldsymbol{x}}$，求空间的磁场分布及磁化电流分布。



解答：采用柱坐标，设

$$\boldsymbol{A}=A(r,\varphi)\hat{\boldsymbol{z}}$$

在圆柱内外矢势满足拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_rA)+\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2A=0$$

其由（角向）本征函数构造的一般解形式为

$$A(r,\varphi)=(a_0+b_0\ln r)+\sum_{m=1}^{\infty}[r^m(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)+r^{-m}(c_m\cos m\varphi+d_m\sin m\varphi)]$$

渐进条件为

$$A_2(0,\varphi)\ 有限$$

---

[1] 如果解域内存在介质分界面，跨越界面时 $\boldsymbol{H}$ 切向连续，则 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})$ 法向连续，这保证了下式中高斯积分公式是成立的。

[2] 可以认为(3.1.22)来自于泊松方程(3.1.20)，也可以认为它等价于(3.1.19)。因为此时

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{\nabla}A\times\hat{\boldsymbol{z}}$$

因此

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=-\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}A)\hat{\boldsymbol{z}}=-\frac{1}{\mu}\partial_nA\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$A_1(r,\varphi) \xrightarrow{r\to\infty} B_0 r\sin\varphi \ (= B_0 y)$$

由此得

$$A_1(r,\varphi) = B_0 r\sin\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} r^{-m}(c_{1m}\cos m\varphi + d_{1m}\sin m\varphi)$$

$$A_2(r,\varphi) = a_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{m}(a_{2m}\cos m\varphi + b_{2m}\sin m\varphi)$$

代入界面上的边值关系

$$A_2(R^-,\varphi) = A_1(R^+,\varphi)$$

$$\frac{1}{\mu_2}\partial_r A_2(R^-,\varphi) = \frac{1}{\mu_1}\partial_r A_1(R^+,\varphi)$$

得到

$$a_{20} = 0$$

$$\begin{cases} B_0 R + \dfrac{d_{11}}{R} = R b_{21} \\ \dfrac{1}{\mu_1}\left(B_0 - \dfrac{d_{11}}{R^2}\right) = b_{21}\dfrac{1}{\mu_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{c_{1m}}{R^m} = a_{2m}R^m\,, \qquad -m\dfrac{c_{1m}}{R^{m+1}} = m a_{2m} R^{m-1}\,, \qquad m = 1,2,\ldots \\ \dfrac{d_{1m}}{R^m} = b_{2m}R^m\,, \qquad -m\dfrac{d_{1m}}{R^{m+1}} = m b_{2m} R^{m-1}\,, \qquad m = 2,3,\ldots \end{cases}$$

解得

$$A_1(r,\varphi) = B_0 r\sin\varphi + \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{B_0R^2}{r}\sin\varphi$$

$$A_2(r,\varphi) = \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}B_0 r\sin\varphi$$

相应内外磁场为

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{B}_0 \ (r<R)$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{\nabla}A_1\times\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{B}_0 + \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{B_0R^2}{r^2}(\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}})\ (r<R)$$

圆柱内为被部分屏蔽（如果圆柱内介质相对“抗磁” $\mu_2<\mu_1$）的匀强场，圆柱外为匀强外场叠加上二维的偶极场[3]。相应磁化面电流密度为

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\boldsymbol{B}_1^{R^+} - \boldsymbol{B}_2^{R^-}\right) = \frac{2B_0}{\mu_0}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{Z}}$$

3.2 磁标势 等效磁荷

3.2.1 磁标势的引入

如果存在一个区域 V，使得对于区域内任何闭合有向曲线 L，均有

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad (3.2.1)$$

则在 V 内，$\boldsymbol{H}$ 的路径积分仅依赖于初末位置，而与中间路径无关，如此便可以引入磁标势

[3] 二维偶极场的典型例子为偶极线（相互平行的等量异号均匀带电线系统）在垂直平面上激发的远场，它正比于

$$-\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = -\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\frac{\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - 2\hat{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r^2}$$

ϕ_m，使得

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi_m \qquad (3.2.2)$$

如果全空间没有自由电流，如永磁体问题，自然满足方程(3.2.1)。此外，如果用包含自由电流环的薄层将自由电流部分从空间中切除，则剩余的空间部分[4]满足方程(3.2.1)。

考虑到

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) \qquad (3.2.3)$$

及 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，因此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = -\nabla\cdot\boldsymbol{M}$$

即磁标势满足泊松方程

$$\nabla^2\phi_m = \nabla\cdot\boldsymbol{M} = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \qquad (3.2.4)$$

其中

$$\rho_m = -\mu_0\,\nabla\cdot\boldsymbol{M} \qquad (3.2.5)$$

为等效磁荷密度。考虑永磁体问题，可以取无穷远处为磁标势的零点，则(3.2.4)的解为

$$\phi_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\int\frac{\rho_m(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \qquad (3.2.6)$$

因此等效点磁荷（磁单极子）q_m 在空间激发的磁场强度满足磁库仑定律[5]

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (3.2.7)$$

3.2.2 磁标势的边值关系

类似于静电势，跨越 1、2 介质分界面时，磁标势是连续的

$$\phi_{m1} = \phi_{m2} \qquad (3.2.8)$$

而由方程(3.2.4)的积分形式可知（$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{1\to2}$）

$$\partial_n\phi_{m2} - \partial_n\phi_{m1} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1) = -\frac{\sigma_m}{\mu_0} \qquad (3.2.9)$$

其中 σ_m 为边界面上的等效磁荷面密度。此外，对于线性介质分界面，磁感应强度法向连续可以得到

$$\mu_2\partial_n\phi_{m2} = \mu_1\partial_n\phi_{m1} \qquad (3.2.10)$$

☞ ***例题 3-5*** 对半径为 R、磁化强度为 $\boldsymbol{M}=M\hat{\boldsymbol{z}}$ 的均匀磁化球，求磁化电流激发的磁场。

解答：以 z 方向为极轴建立球坐标，等效磁荷体密度 $\rho_m=-\mu_0\,\nabla\cdot\boldsymbol{M}=0$，磁荷仅分布于球面，其面密度为

$$\sigma_m = \mu_0\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{M} = \mu_0 M\cos\theta$$

这样球内外的磁标势可以分离变量法加以求解（$x=\cos\theta$）

$$\phi_m = \begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(x) & r<R\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}P_l(x) & r>R\end{cases}$$

利用边界条件

$$\phi_m^{R^-} = \phi_m^{R^+},\qquad \partial_r\phi_m^{R^-} - \partial_r\phi_m^{R^+} = M\cos\theta$$

---

[4] 这里重要的是要保证任何环路不能和自由电流环嵌套。比如用包围自由电流环的一个环面切除自由电流，剩余的空间里虽然处处 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$，但仍然不能保证方程(3.2.1)的成立。

[5] 事实上，无法用(3.2.4)式的等效磁荷密度构造等效点磁荷（Dirac 弦除外）。

得到

$$A_l R^l = B_l R^{-(l+1)}\,, \qquad l = 0,1,2,\ldots$$

$$A_1 + 2\frac{B_1}{R^3} = M\,, \qquad lA_l R^{l-1} + (l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}} = 0\,, \qquad l = 0,2,3,\ldots$$

解得

$$\phi_m = \begin{cases} \dfrac{M}{3} r\cos\theta & r < R \\ \dfrac{M}{3}\dfrac{R^3}{r^2}\cos\theta & r > R \end{cases}$$

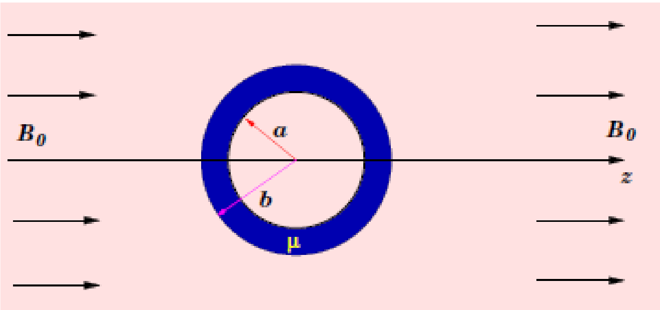
此外，因为有磁库仑定律(3.2.6)式，所以此时如果你熟悉余弦型球面电荷的结论，也可以直接写出

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} -\dfrac{\boldsymbol{M}}{3} & r < R \\ \dfrac{M}{3}\dfrac{R^3}{r^3}(2\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) & r > R \end{cases}$$

相应，磁感应强度

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \begin{cases} \dfrac{2\mu_0 \boldsymbol{M}}{3} & r < R \\ \dfrac{\mu_0 M}{3}\dfrac{R^3}{r^3}(2\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) & r > R \end{cases}$$

☞ **例题 3-6** 磁屏蔽效应：如图内外半径分别为 a 和 b 、磁导率为 $\mu = \mu_r\mu_0$ 的介质球壳位于匀强外场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ 中，求空间磁场分布。



解答：以 z 方向为极轴建立球坐标，磁标势在无穷远处渐进行为

$$\phi_m(r,\theta) \xrightarrow{r\to\infty} -\frac{B_0}{\mu_0} r\cos\theta = -H_0 r\cos\theta$$

因此

$$\phi_m = \begin{cases} -H_2 r\cos\theta & r < a \\ \left(-H_1 r + \dfrac{C}{r^2}\right)\cos\theta & a < r < b \\ \left(-H_0 r + \dfrac{A}{r^2}\right)\cos\theta & r > b \end{cases}$$

利用边值关系(3.2.8)(3.2.10)得

$$-H_2 = -H_1 + \frac{C}{a^3}$$

$$-H_1 + \frac{C}{b^3} = -H_0 + \frac{A}{b^3}$$

$$H_2 = \mu_r\left(H_1 + \frac{2C}{a^2}\right)$$

$$\mu_r\left(H_1 + \frac{2C}{b^3}\right) = \mu_0 H_0 + \frac{2A}{b^3}$$

解得

$$A = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(b^3 - a^3)H_0}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu_r - 1)^2}$$

$$H_1=\frac{3(2\mu_r+1)H_0}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)-2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2}$$
$$C=\frac{-3(\mu_r-1)a^3H_0}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)-2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2}$$
$$H_2=\frac{9\mu_rH_0}{(2\mu_r+1)(\mu_r+2)-2\frac{a^3}{b^3}(\mu_r-1)^2}$$
对于软铁磁球壳，$\mu_r\gg1$，相应
$$H_2\approx\frac{9H_0}{2\mu_r\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)}\to0$$
这种现象被称为磁屏蔽。

3.3 静磁场多极展开

3.3.1 矢势多极展开及磁矩

原点附近的一小团电流在远场激发的矢势为
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$
做如下展开
$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{r}+\boldsymbol{r}'\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}+\cdots$$
相应
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'+\cdots\qquad(3.3.1)$$
引入公式
$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}')=(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'))\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\qquad(3.3.2)$$
上式利用了恒定电流条件。因此，对于恒定电流情形，“磁单极矩”为零，即
$$\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=\oiint_{S_\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}'=0\qquad(3.3.3)$$
展开式(3.3.1)中第二项为磁偶极项。将并矢 $\boldsymbol{jr}'$ 分解为对称部分和反对称部分
$$\boldsymbol{jr}'=[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{s}}+[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{as}}\qquad(3.3.4)$$
其中
$$[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{s}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(j_ir_j'+j_jr_i'\right),\qquad[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{as}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(j_ir_j'-j_jr_i'\right)=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}')_k\qquad(3.3.5)$$
$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}')=(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'))\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{jr}'+\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}\qquad(3.3.6)$$
可知，
$$\int[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{s}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=0$$
而
$$[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{as}}_{ij}r_j=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}r_j(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}')_k=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{r}]_i\qquad(3.3.7)$$
因此，矢势的磁偶极贡献为
$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int[\boldsymbol{jr}']^{\mathrm{as}}\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})\qquad(3.3.8)$$
其中磁偶极矩
$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\qquad(3.3.9)$$

也被称为磁矩。对于电流强度为 I 的恒定电流线圈 L，其磁矩为

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\oint_{L}\boldsymbol{r}'\times I\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=I\boldsymbol{S} \qquad (3.3.10)$$

其中 $\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\oint_{L}\boldsymbol{r}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ 为线圈所围成的矢量面元。

磁偶极矩贡献的磁场为偶极场，利用（$r\neq 0$）

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\boldsymbol{m}\cdot\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{m}}{r^3}$$

可得偶极磁场为

$$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{m}] \qquad (3.3.11)$$

如果电流分布区域的线度趋于零，则磁场偶极项绝对占主，这样便形成理想磁偶极子模型，但需要注意的是，考虑到场强体平均的效果，对于磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的微观分子磁偶极子，其场强需被改写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{m}]+\frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{m}\delta^3(\boldsymbol{r}) \qquad (3.3.12)$$

3.3.2 磁偶极子在外场中的受力与力矩

原点附近、磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的一小团（恒定）电流在外场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 中所受安培力展开为

$$\boldsymbol{F}=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\times[\,\boldsymbol{B}(0)+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{B}(0)+\cdots]=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\times[\,\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{B}(0)+\cdots]$$

因此对于理想磁偶极子，利用公式

$$\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}j_jr_n=\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}]_{jn}^{\mathrm{as}}=\epsilon_{njl}(\boldsymbol{m})_l \qquad (3.3.13)$$

得外场受力为

$$F_i=\epsilon_{ijk}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}j_j(r_n\nabla_n)B_k=\epsilon_{ijk}\epsilon_{njl}m_l\nabla_nB_k=[(\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}]_i$$

利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，对于理想磁偶极子可得

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}) \qquad (3.3.14)$$

这相当于磁偶极在外场中感受到了有效势能

$$W_m=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (3.3.15)$$

利用虚功原理，或者直接展开法，可得磁偶极子所受的外场力矩（对自身参考点）

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \qquad (3.3.16)$$