

第四章 电磁波的传播

4.1 简谐平面电磁波

4.1.1 电磁波方程

无源 Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

考虑不导电、非色散的均匀线性各向同性介质，即

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.1.2)$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$ 为常量。由(4.1.1)得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\partial_t(\nabla \times \mathbf{B}) = -\varepsilon \mu \partial_t^2 \mathbf{E}$$

根据(4.1.1)式第一个方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，得到波动方程

$$\frac{1}{v^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad (4.1.3)$$

其中

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (4.1.4)$$

类似地，根据(4.1.1)式可得

$$\frac{1}{v^2} \partial_t^2 \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (4.1.5)$$

(4.1.3)、(4.1.5)式是用电磁场强度量描述的电磁波方程。

4.1.2 单色波与单色简谐平面波解

以一定频率 ω 做简谐振动的电磁波被称为单色波（或时谐波），可以采用复形式描述

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (4.1.6)$$

其中 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 为复函数。将(4.1.6)代入(4.1.3)和(4.1.5)，则有 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.1.7)$$

将(4.1.6)代入(4.1.1)的第二、四个方程得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega \varepsilon \mu} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.1.8)$$

即单色波电磁场的空间因子可以互相求解。

无界空间中，Helmholtz 方程(4.1.7)的基本解为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.1.9)$$

其中 \mathbf{E}_0 为复振幅，常量 $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{k}}$ 为波矢，其中

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (4.1.10)$$

(4.1.9)式的解为简谐平面波解，相应

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.1.11)$$

波阵面为以 $\hat{\mathbf{k}}$ 为法向的平面，波阵面沿法向移动的速度为相速度 v_p ，由(4.1.10)得

$$v_p = v_p \hat{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon \mu} \hat{\mathbf{k}} \quad (4.1.12)$$

(4.1.10)或(4.1.12)被称为简谐平面波的色散关系，它决定了波的传播性质。显然

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4.1.13)$$

为真空光速。而对于非色散介质，折射率

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad (4.1.14)$$

不依赖于频率，这正是“非色散”一词的本意。

将(4.1.11)代入(4.1.8)的第二个方程得简谐平面波的磁场部分

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (4.1.15)$$

考虑到(4.1.1)的第一和第三个方程，得

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1.16)$$

说明简谐平面电磁波为横波。联合(4.1.15)(4.1.16)式可以看出 $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ 构成两两正交的右手系。由(4.1.15)式也可以看出电磁场振动的相位相同，且¹

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad (4.1.17)$$

也可以写作

$$\tilde{\mathbf{E}} = v\mu \cdot \tilde{\mathbf{H}} = Z \cdot \tilde{\mathbf{H}} \quad (4.1.18)$$

其中

$$Z = v\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (4.1.19)$$

为介质对电磁波的阻抗。真空电磁波的阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

4.1.3 简谐平面电磁波的能量和能流

对于平面简谐电磁波，其能量密度为

$$u = \frac{1}{2} [\epsilon (\tilde{\mathbf{E}})^2 + \mu (\tilde{\mathbf{H}})^2]$$

注意到关系(4.1.18)，有

$$u = \epsilon (\tilde{\mathbf{E}})^2 = \mu (\tilde{\mathbf{H}})^2$$

也就是说对于平面简谐电磁波，其电磁场的分布对能量的贡献是均等的。对上式时间取周期平均，则

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \quad (4.1.20)$$

其中 E_0 和 H_0 分别为电磁场的（实）振幅。

电磁场能流为

$$\mathbf{S}(\text{实}) = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}$$

对上式取周期平均，则可证明

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \quad (4.1.21)$$

对于平面简谐电磁波

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} Z H_0^2 \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2Z} E_0^2 \hat{\mathbf{k}} \quad (4.1.22)$$

另一方面，考虑到(4.1.20)式

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \langle u \rangle \hat{\mathbf{k}} \quad (4.1.23)$$

即能量传播的速度（群速度）与相速度相同，这是非色散介质的又一个特性。

对于高频电磁波，通常我们测量的是物理量的时间平均，因此可以定义复能流

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \quad (4.1.24)$$

¹ 本章采用如下约定： $\tilde{A} = \text{Re}[A]$

对它取实部，便是能流的时间平均。

4.1.4 简谐平面电磁波的偏振

作为横波的简谐平面电磁波，其振动方向有两个自由度，这方面的描述被称为电磁波的偏振性质，相应的振动方向被称为偏振方向。考虑到电磁波与通常的物质相互作用以电矢量为主，所以偏振方向一般是指电矢量的振动方向。

不失一般性，我们取 $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$ ，则电振动复振幅可以写作

$$\mathbf{E}_0 = E_{0,x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0,y}\hat{\mathbf{y}} = a_1 e^{i\varphi_1}\hat{\mathbf{x}} + a_2 e^{i\varphi_2}\hat{\mathbf{y}} \quad (4.1.25)$$

其中 $a_{1,2}$ 和 $\varphi_{1,2}$ 分别为 x, y 方向上的（实）振幅和相位。相应（实）振动函数分量为

$$\begin{cases} E_x = a_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y = a_2 \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (4.1.26)$$

其偏振状态由四个参量 $a_{1,2}$ 和 $\varphi_{1,2}$ 加以描述²。典型的偏振状态为：

1. 线偏振： $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0/\pi$ 时

$$\begin{cases} E_x = a_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y = \pm a_2 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \end{cases} \quad (4.1.27)$$

此种情形下，电场只沿一个方向振动，是为线偏振。

2. 椭圆偏振：四个参量取任意值时，在给定 z 的平面上，电矢量的方向通常会随时间变化，并在 \mathbf{E} -平面上描画出椭圆的形状，是为椭圆偏振。例如，取 $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ，则

$$\begin{cases} E_x = a_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y = \mp a_2 \sin(kz - \omega t + \varphi_1) \end{cases} \quad (4.1.28)$$

在 \mathbf{E} -平面上，其端点轨迹为椭圆

$$\frac{E_x^2}{a_1^2} + \frac{E_y^2}{a_2^2} = 1$$

3. 圆偏振：若 $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ，进一步 $a_1 = a_2 = a$ ，则在给定 z 的平面上，电矢量的端点在 \mathbf{E} -平面上描画出圆的形状，是为圆偏振。

光学中，迎着光传播方向观测，若圆偏振光矢量自最上方向右侧偏转，则称为右旋圆偏振光，对应于 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ，而左旋圆偏振光对应于 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。从电矢量右旋旋进的方向³来看，若它与波矢 \mathbf{k} 方向一致，则称其螺旋度⁴为正，是为左旋圆偏振光；若它与波矢 \mathbf{k} 方向相反，则称其螺旋度为负，是为右旋圆偏振光。

对于如上圆偏振光，其（实）振幅为 $E_0 = \sqrt{2}a$ ，引入左/右旋偏振矢量

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \quad (4.1.29)$$

则左/右旋圆偏振光矢量可以表示为

$$\mathbf{E}_{\pm} = E_0 \mathbf{e}_{\pm} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \varphi)} \quad (4.1.30)$$

偏振矢量满足

$$\mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{e}_+ = \mathbf{e}_-^* \cdot \mathbf{e}_- = 1, \quad \mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{e}_- = 0 \quad (4.1.31)$$

4.2 色散介质中的电磁波

4.2.1 色散介质的本构关系

通常的介质是有色散的，对于线性且各向同性的介质，其一般性的本构关系为⁵

² 实际上是由 $a_{1,2}$ 和 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 三个参量加以描述。

³ 这其实是光子角动量的方向。

⁴ 对应于光子角动量（以 \hbar 为正向）在其动量方向的投影值。

⁵ 与第一章(1.1.23)式对照，这里 $\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 (\delta(\tau) + \chi^{(e)}(\tau))$, $\mu(\tau) = \mu_0 (\delta(\tau) + \chi^{(m)}(\tau))$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (4.2.2)$$

其中，因果性要求响应函数

$$\varepsilon(\tau) = 0 \text{ for } \tau < 0, \quad \mu(\tau) = 0 \text{ for } \tau < 0$$

因此，(4.2.1)(4.2.2)描述的是一种时间非局域响应效应，具体来说是一种推迟响应效应。这类似于受迫振动的情形，如果光场以一定频率 ω 驱动物质中的电荷（如电子），稳定后电荷将以同样的频率 ω 振动，其位相落后于光场的振动位相，表现为延迟效应，同时其响应函数（如振幅）依赖于频率 ω ，表现出介质特殊的色散性质。

如上分析表明，在频域分析色散介质的本构关系可以得到简单的表达式，为此我们考虑单色电磁波，并设

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (4.2.3)$$

将第一个式子代入(4.2.1)得

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega t} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$$

其中 $\varepsilon(\omega)$ 为 $\varepsilon(t)$ 的 Fourier 变换。如此 $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ ，相应频域中的本构关系为⁶

$$\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \quad (4.2.4)$$

其中 $\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon(\omega)/\varepsilon_0$ 。

类似地，我们有

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \mu(\omega) \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu_r(\omega) \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) \quad (4.2.5)$$

其中 $\mu(\omega)$ 为 $\mu(t)$ 的 Fourier 变换， $\mu_r(\omega) = \mu(\omega)/\mu_0$ 。

4.2.2 单色平面波在（非导电）色散介质中的传播

考虑非磁性介质（ $\mu(\omega) = \mu_0$ ），将(4.2.3)(4.2.4)代入无源的 Maxwell 方程组得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -i\omega \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (4.2.6)$$

若进一步考虑单色平面波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

则有

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}_0 \end{cases} \quad (4.2.7)$$

由此可得

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = -\mathbf{k}^2 \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}_0$$

因此

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) = k_0^2 \varepsilon_r(\omega) \quad (4.2.8)$$

其中 $k_0 = \omega/c$ 。 $\varepsilon_r(\omega)$ 一般具有虚部，即

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r \quad (4.2.9)$$

其中 ε'_r 和 ε''_r 分别为 $\varepsilon_r(\omega)$ 的实虚部。因此，平面波解的波矢量 \mathbf{k} 通常具有虚部。

考虑一种简单的情形，单色平面波沿 z 方向从真空（ $z < 0$ ）入射至半无限大的色散介质之内（ $z > 0$ ）在介质内部

$$\mathbf{k} = (k + i\beta) \hat{\mathbf{z}} \quad (4.2.10)$$

则其实部 k 和虚部 β 满足方程

⁶ 这其实便是 Fourier 变换下的卷积定理。

$$\begin{cases} k^2 - \beta^2 = k_0^2 \varepsilon'_r \\ k\beta = \frac{1}{2} k_0^2 \varepsilon''_r \end{cases} \quad (4.2.11)$$

能量守恒要求 k 与 β 均大于零，即介质中沿 z 方向传播的单色平面波应为衰减波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (4.2.12)$$

因此要求 $\varepsilon''_r > 0$ 。若进一步假定 $\varepsilon'_r > 0$ ，则有

$$\begin{cases} k = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon'_r}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r}\right)^2} + 1} \\ \beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon'_r}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r}\right)^2} - 1} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

相应 $\delta = \beta^{-1}$ 被称为透射深度，如果 β 可略，则介质对于该频率的电磁波便是完全透明的。

对于角频率为 ω 的单色波，利用复形式的 Maxwell 方程组可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) &= -\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}^* - \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \partial_t \mathbf{D} \\ &= -\frac{1}{2} i \omega \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \frac{1}{2} i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

其实部对应于单色波在介质中传播时（平均值意义上）的能量守恒及转化方程，也被称为复形式 Poynting 方程。对于非磁性介质，实部意义上(4.2.14)等价为

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \partial_t \mathbf{D} \quad (4.2.15)$$

其中 \mathbf{S} 为(4.1.24)式定义的复能流。考虑(4.2.10)式及(4.2.12)式对应的情形

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (4.2.16)$$

相应

$$\text{Re}[\mathbf{S}] = \text{Re} \left[\frac{1}{2\omega\mu_0} \mathbf{E}^* \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \right] = \frac{k}{2\omega\mu_0} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{z}}$$

因此沿 $\hat{\mathbf{z}}$ 方向界面 ($z = 0^+$ 处) 单位横截面积上传入介质的功率为

$$P = \frac{k}{2\omega\mu_0} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (4.2.17)$$

而稳态时（电磁场能密度在平均意义上并不变化），单位体积介质消耗的功率为

$$p(z) = \text{Re} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \partial_t \mathbf{D} \right] = -\text{Re} \left[\frac{1}{2} i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \right] |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon''_r e^{-2\beta z} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (z > 0) \quad (4.2.18)$$

对 z 积分

$$\int_0^\infty p(z) dz = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon''_r}{4\beta} |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{k}{2\omega\mu_0} |\mathbf{E}_0|^2 = P$$

因此，稳态时电磁波输入的能量被消耗在介质中，转化为辐射或热。

4.2.3 介质色散的经典模型

一、经典的 Lorentz 振子模型

考虑(4.2.1)及(4.2.4)所对应的介质电响应关系，这通常对应于一个力学问题，而且严格来说是一个量子力学问题，但 Lorentz 基于经典原子结构模型和经典力学规律建立的经典电子论对描述介质色散和损耗方面仍与实验结果很好的符合，尽管模型中的一些参数不能由模型本身来预言，但通常可以由实验数据很好地得以拟合，所以经典的色散模型仍然有很大的实用价值和预言能力。

当介质的原子或分子处于外电场中，电子和原子核向相反方向移动，形成极化。因为原子核的质量相对来说很大，所以这种极化以电子（相对于原子核）的位移响应机制为主，被称为电子（位移）极化。对于离子晶体，如 NaCl 晶体，其离子间相对位移，可以形成离子（位移）极化。因为离子质量为电子质量的 10^4 倍以上，所以通常离子极化对介质介电性质的影响通常在红外波段，而对于近红外和可见光波段，通常介质的介电性质以电子极化机制为主。

对于处于气态或液态环境中的极性分子（具有固有极矩的分子），如 HCl、H₂O 等，它们在外电场的影响下会收到力矩，从而倾向于平行于外电场排布，形成极化，这种极化机制被称为偶极矩取向极化。取向极化对介质介电性质的影响主要集中在低频（微波波段以下）。

本节对极化机制力学模型的讨论主要针对电子位移极化，适当地调整参数，如下模型也可以用来描述离子位移极化。

对于非导电介质，有效质量为 m 、（相对于近似不动的原子核的）位矢为 $\mathbf{r}(t)$ 的经典的束缚电子的受力可以由线性束缚力 $\mathbf{F}_{\omega_0} = -m\omega_0^2\mathbf{r}$ 和阻尼力 $\mathbf{f}_\gamma = -m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ 来描述。进一步考虑单色电磁波的中电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 对束缚电子的作用（这里忽略磁场力），则有

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = -e\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (4.2.19)$$

其稳态解为

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (4.2.20)$$

设单位体积的分子数为 n ，每个分子贡献一个这样的束缚电子（这个假定可以随时被修正），则电子位移带来的极化强度为

$$\mathbf{P} = -ner = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (4.2.21)$$

其中 $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ 为介质的等离子体频率。如此便可得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \\ &= \left(1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \right) + i \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

能量守恒要求阻尼系数 $\gamma > 0$ ，因此 $\varepsilon_r'' > 0$ 。

补充说明：需要注意的是，(4.2.20)中的 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 实际上是极化原子（或分子）所在处的外场，不包含极化原子自身激发的微观场及其宏观的平均场，而按(4.2.21)式定义 $\varepsilon_r(\omega)$ 时，是将其中的 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 处理为宏观的平均场（含所有极化原子的贡献）。如果严格将(4.2.20)中的电场当作外场 $\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t)$ 来处理，则宏观平均场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) + \langle \mathbf{e} \rangle$$

其中 $\langle \mathbf{e} \rangle$ 为极化原子自身激发的微观场的平均。在包含若干个这样极化的原子的球体内取平均

$$\langle \mathbf{e} \rangle = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

因此，(4.2.21)中的外场应该代入为

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$

相应(4.2.21)被修正为

$$\mathbf{P} = -ner = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0'^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

其中

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3} = \omega_0^2 - \frac{ne^2}{3m\varepsilon_0}$$

不过，后面我们的讨论中暂时忽略这种修正。

二、介质的色散行为

对于通常的非导电介质， ω_0 可以处于红外、可见光及紫外波段， γ 原则上可以通过振动电子的辐射来估计，一般来说 $\gamma \ll \omega_0$ 。

1. 共振区： $|\omega - \omega_0| \sim \gamma \ll \omega_0$

$$\varepsilon_r' \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} \quad (4.2.23)$$

$$\varepsilon_r'' \approx \frac{\omega_p^2 \gamma}{4\omega_0} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} \quad (4.2.24)$$

以玻璃为例（下图及附注取自“王振林《现代电动力学》”）

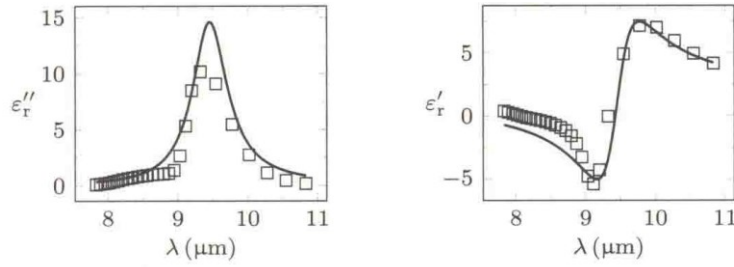


图 5-34 玻璃介电常数的实部与虚部。方形空心点代表实验测量值（取自文献 [16]），实线为 Lorentz 模型拟合结果。

[16] E. D. Palik. Handbook of Optical Constants of Solids. New York: Academic Press, 1985: 749.

从图上我们大致可以估计出参量拟合的结果：

$$\omega_0 \sim 2 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (\lambda_0 \sim 9.5 \mu\text{m})$$

$$\gamma \sim \frac{\omega_0}{10}, \quad \omega_p \sim \sqrt{1.5}\omega_0$$

共振区 $\varepsilon_r''(\omega)$ 的响应曲线呈现对称的尖峰结构，很大的 $\varepsilon_r''(\omega)$ 会带来很大的能量吸收，这被称为共振吸收。因此，介质对共振区频率的光 $(\omega_0 - \frac{\gamma}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\gamma}{2})$ 变得不再透明。此外，共振区的实部 $\varepsilon_r'(\omega)$ 可能为负值，且有

$$\frac{d}{d\omega} \varepsilon_r'(\omega) < 0$$

这一行为被称为反常色散。

2. 远离共振区的行为：

考虑 $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ 的情形，则 $\varepsilon_r(\omega)$ 以实部为主，且有

$$\varepsilon_r(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = n^2 \quad (4.2.25)$$

其中 n 为折射率。这时介质是透明的，且有

$$\frac{d}{d\omega} \varepsilon_r'(\omega) > 0$$

这一行为被称为正常色散。

下图取自“王振林《现代电动力学》”

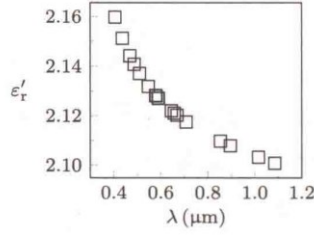


图 5-35 实验测到的玻璃介电常数在可见光区的色散特性 (取自文献 [16])。

3. 通常介质的复杂性:

通常介质可能存在多个共振频率 ω_{0i} ，这时 Lorentz 模型需要改写。例如，(4.2.22)式可以被改写为

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2) - i\omega\gamma_i} \quad (4.2.26)$$

其中 $\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i e^2}{m_i \varepsilon_0}}$ ，而 n_i, m_i, γ_i 分别为第 i 个共振频率的对应量。对于低损耗介质（如光纤的主要材料——熔凝石英），略去 γ_i ，并引入与 ω_{0i} 及 ω 对应的波长 λ_i 及 λ ，则有 Sellmeier 方程

$$\varepsilon_r(\lambda) = n^2(\lambda) = 1 + \sum_i B_i \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad (4.2.27)$$

其中 n 为光学折射率， $B_i = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2}$ 。通常(4.2.27)中求和仅取 2 到 3 项便可以很好地描述低损耗介质的色散行为。拟合出参量 B_i 和 λ_i ，便可以通过(4.2.27)式计算（远离共振区的）折射率或色散曲线。

三、 信号在色散介质中的传播速度

因为 Maxwell 方程组是线性的，所以即使对于（线性）色散介质而言，忽略耗散，无源电磁场仍然是由不同传播方向、不同频率的简谐平面波叠加而成。考虑一维波包⁷

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (4.2.28)$$

其中

$$\omega = \omega(k)$$

为介质的色散关系， $A(k)$ 可以看作为对应波矢（频率）的分振幅，它原则上可以由波包的初值确定，即

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad (4.2.29)$$

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx \quad (4.2.30)$$

例如，如果 $u(x, 0) = e^{ik_0 x}$ ，则 $A(k) = \delta(k - k_0)$ ，相应 $u(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0) t)}$ ，即该一维波包退化成单频的简谐平面波。对于电磁波，这要求该波动在全空间均匀地传播，实际

⁷ 这里采用的是标量波的形式，没有考虑电磁波的偏振。

上是无法做到的，而且这样的波动实际上也不能承载任何的信号。

考虑

$$u(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) e^{ik_0 x} \quad (4.2.31)$$

即该波包初始时为中心位于 $x_0 = 0$ ，空间展宽为 $\Delta x = \sigma_x$ 的 Gauss 波包，则

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[x + i\sigma_x^2(k - k_0)]^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\sigma_x^2(k - k_0)^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma_x^2(k - k_0)^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

即在 k -空间，该波包中心位于 k_0 处，展宽为 $\Delta k = \sigma_x^{-1}$ 。于是得到著名的不确定关系⁸

$$\Delta k \cdot \Delta x \sim 1 \quad (4.2.33)$$

考虑 k -空间中心位于 k_0 处、展宽很小的波包，即准单色波包，此时色散关系的线性近似为

$$\omega(k) \approx \omega_0 + v_g(k - k_0) \quad (4.2.34)$$

其中 $\omega_0 = \omega(k_0)$ ，而

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (4.2.35)$$

被称为波包的群速度。将线性近似(4.2.34)式代入(4.2.28)式，得

$$u(x, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(x-v_g t)(k-k_0)} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} dk = u(x - v_g t, 0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (4.2.36)$$

从中可以看出，除了一个无关紧要的、对应于中心频率 ω_0 的相因子外，波包的轮廓是以群速度 v_g 沿 x 方向移动的。从能量传输角度来看， t 时刻能量的分布 $|u(x, t)|^2 \approx |u(x - v_g t, 0)|^2$ 相对于初始时刻的能量分布 $|u(x, 0)|^2$ 而言是不断以 v_g 为速度沿 x 方向传播的，所以在(4.2.34)式的线性近似下，能流对应的速度为波包的群速度 v_g ，它自然也是波包所承载的信号传播速度。

利用 $ck = \omega n$ ，两边对 ω 求导得

$$\frac{c}{v_g} = n + \omega \frac{dn}{d\omega}$$

或

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v_p}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} \quad (4.2.37)$$

因此只要有色散，则群速度和相速度便不相等。如果正常色散 $dn/d\omega > 0$ ，相应 $v_p > v_g$ ；如果反常色散 $dn/d\omega < 0$ ，相应 $v_g > v_p$ ，甚至可能出现负的群速度，但此时(4.2.10)式的线性近似通常不再成立。

4.3 导体中的电磁波

4.3.1 金属导体中电磁波的传播

考虑金属良导体对于电磁波的响应，其主要机制为自由电子响应，即欧姆定律

$$\mathbf{j}_f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{(e)}(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (4.3.1)$$

在频域中

$$\mathbf{j}_{f,\omega}(\mathbf{r}) = \sigma(\omega) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \quad (4.3.2)$$

其中

⁸ 如果考虑能量的分布（即振幅模方水平上的分布），则不确定关系被修正为 $\Delta k \cdot \Delta x \sim 1/2$ 。

$$\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{(e)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (4.3.3)$$

考虑到电荷守恒，频域中

$$\rho_f(\mathbf{r}, t) = \rho_{f,\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

则

$$\rho_{f,\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,\omega}(\mathbf{r}) = -i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \quad (4.3.4)$$

此外，若忽略金属原子中束缚电子对电磁波的响应，则

$$\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \quad (4.3.5)$$

对于非磁性金属导体 $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$ 。

对于频率为 ω 的单色电磁波，将(4.3.2)(4.3.4)(4.3.5)代入无源的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \rho_f(\mathbf{r}) = \varepsilon(\omega) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (4.3.6)$$

其中金属的有效（复）介电常量为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \quad (4.3.7)$$

引入有效介电常量后，对比(4.3.6)和(4.2.6)可以发现，金属传播单色电磁波的性质完全可以类比于通常的色散介质，不过复形式的 Poynting 方程需要被改写为

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}_f + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{B}^* - \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \partial_t \mathbf{D} \quad (4.3.8)$$

其实部代表单色电磁波在金属中传播（平均值意义上）的能量守恒及转化方程。例如

$$\text{Re} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}_f \right]$$

代表焦耳热功率体密度的平均值。对于非磁性金属，考虑到(4.3.5)式，稳态时(4.3.8)等价于

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}_f + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = 0 \quad (4.3.9)$$

此时，随电磁波能流传递进入金属的能量全部被转化为焦耳热。

若进一步考虑单色平面波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

则（类似于通常的色散介质）有

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E}_0 \end{cases} \quad (4.3.9)$$

这里引入的金属的（有效）相对介电常量

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r \quad (4.3.10)$$

进一步得

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) = k_0^2 \varepsilon_r(\omega) \quad (4.3.11)$$

4.3.2 金属色散的 Lorentz-Drude 模型

在 Lorentz 经典电子论的基础上，Drude 引入了金属导电的自由电子气模型。在这个模型中，对于自由电子，可以完全不考虑（线性）束缚力，但是因为存在电子与异种粒子的散射，所以等效地受到阻尼力 $\mathbf{f}_\gamma = -m\gamma \dot{\mathbf{r}}$ 。需要注意的是，与非导电介质不同，这个阻尼力主要不是来自于辐射，而是来自于自由电子散射，其中阻尼力系数的倒数 $\tau = \gamma^{-1}$ ，相当于自由电子与异种粒子散射的平均碰撞时间间隔。

考虑单色电磁波中的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ 对自由电子的作用，则有

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma \dot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (4.3.12)$$

其稳态解为

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

设单位体积的自由电子数为 n ，则自由电流密度为

$$\mathbf{j}_f = -ne\dot{\mathbf{r}} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

这样便有

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} = \frac{\sigma_c}{1 - i\omega\tau} \quad (4.3.13)$$

其中

$$\sigma_c = \sigma(\omega \rightarrow 0) = \frac{ne^2}{m\gamma} \quad (4.3.14)$$

为金属的直流电导。（下表数据取至 “Griffiths 《电动力学导论》”）

1atm / 20°C	Cu	Ag	Au
$\sigma_c \cdot \Omega\text{m}$	5.95×10^7	6.23×10^7	4.52×10^7

将(4.3.13)代入(4.3.10)便得⁹

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i\frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (4.3.15)$$

其中 $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\gamma\sigma_c}{\varepsilon_0}}$ 为金属的等离子体频率，通常在紫外区，原则上可以通过拟合确定。

确定了 ω_p 和 σ_c ，便可以估计 γ 。对于金属良导体 $\gamma \sim 10^{14} \text{ Hz} \ll \omega_p \sim 10^{16} \text{ Hz}$ 。

4.3.3 金属导体的色散特性

为了考查不同频段金属的色散特性，我们考虑一个实例，单色平面波沿 z 方向从真空 ($z < 0$) 入射至半无限大的金属导体之内 ($z > 0$)，在金属内部

$$\mathbf{k} = (k + i\beta)\hat{\mathbf{z}} \quad (4.3.16)$$

相应电场为衰减波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{i(kz - \omega t)}$$

磁场为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

一、低频及微波波段 ($\omega \ll \gamma$)

在此情形下，近似有

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2} + i\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2} + i\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \quad (4.3.17)$$

其实部为负 $\varepsilon_r' \sim -10^4$ ，且有很大的正虚部 $\varepsilon_r'' \gg |\varepsilon_r'|$ 。相应，

$$k \approx \beta \approx k_0 \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma_c}{2}} \gg k_0 \quad (4.3.18)$$

相应衰减波的趋肤深度（透射深度）为

$$\delta = \frac{1}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma_c}} \quad (4.3.19)$$

此时，磁场为

⁹ 下式相当于令(4.2.22)式中 $\omega_0 = 0$ ，但需要注意这里的 γ 与非导电介质的 γ 来源不同。

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega\mu_0\delta} (1+i)(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0) e^{-\beta z} e^{i(kz-\omega t)} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_c}{\mu_0\omega}} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0) e^{-\beta z} e^{i(kz-\omega t+\frac{\pi}{4})} \quad (4.3.20)
\end{aligned}$$

此时，金属内部的磁场与电场之间有 $\frac{\pi}{4}$ 的相位差。可以证明此时从真空入射至金属表面的能流几乎是被全反射的。

二、近红外及可见光波段 ($\gamma \ll \omega \ll \omega_p$)

在此波段，近似有

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i \frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^3} \quad (4.3.21)$$

此时，如果忽略损耗，则金属有一个负值的相对介电常量，相应

$$k \approx 0, \quad \beta \approx k_0 \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \quad (4.3.22)$$

附注：下图取至“王振林《现代电动力学》”

图 5-36 给出了银的相对等效介电常数在紫外/可见光区的实验测量结果，以及采用 Drude 模型拟合的曲线，这里拟合所采用的参量为 $\hbar\omega_p = 9.2$ eV, $\hbar\gamma = 0.2$ eV。对比可以看到，Drude 模型很好地符合介电常数的实验测量结果（实部）。

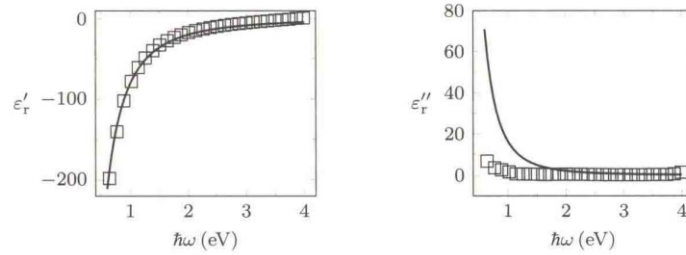


图 5-36 方形空点对应于实验测量结果 [17]。

[17] P. B. Johnson and R. W. Christy, *Optical Constants of Noble Metals*, Phys. Rev. B **6**, 4370 (1972).

此情形下，忽略损耗，金属中的电磁波为无振荡的纯粹衰减波，电磁场能流被全反射。这一点也可以由磁场与电场存在 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差看出，此时金属内电磁波的能量平均值几乎为零。

三、深紫外及 X 射线波段 ($\omega > \omega_p$)

$$\varepsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.3.23)$$

此时金属对电磁波来说是完全透明的，并伴随有强烈的色散。根据(4.3.23)，可以通过金属的透射光谱测定其等离子体频率 ω_p 。其实，如果忽略损耗，金属的色散关系也适用于与描述无散射的经典等离子体的介电特征。

4.3.4 一般导电介质中的电磁波

对于非金属导电介质，(4.3.5)的假定不够准确，通常将式中的 ε_0 替换为 $\varepsilon_b (> \varepsilon_0)$ 来反映束缚电子的介电特征，相应

$$\varepsilon_r(\omega) = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega} \quad (4.3.24)$$

低频下 ($\omega \ll \gamma$, 并假定 $\frac{\sigma_c}{\varepsilon_b \gamma} \ll 1$)

$$\varepsilon_r(\omega) \approx \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} \left(1 + i \frac{\sigma_c}{\varepsilon_b \omega} \right) \quad (4.3.25)$$

其中 σ_c 为介质的直流电导。此时, 对于满足(4.2.16)式的单色平面波可解得

$$\begin{cases} k = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{2\varepsilon_0}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_c}{\varepsilon_b \omega}\right)^2} + 1} \\ \beta = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{2\varepsilon_0}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_c}{\varepsilon_b \omega}\right)^2} - 1} \end{cases} \quad (4.3.26)$$

参量

$$r = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_b \omega} \sim \frac{J_f}{J_D}$$

实际反映的是导电介质中自由电流和位移电流的峰值比。

1) 若 $r \ll 1$, 则称介质为此频段下的不良导电介质, 相应

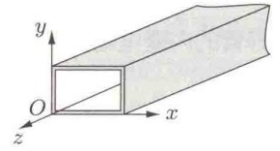
$$\beta \approx \frac{k_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\sigma_c}{\varepsilon_b \omega} \right) = \sigma_c \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_b}}, \quad \delta = \beta^{-1} \approx \frac{1}{\sigma_c} \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\mu_0}}$$

2) 若 $r \gg 1$, 则称介质为此频段下的良导电介质, 相应

$$\beta \approx k_0 \sqrt{\frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0 \omega}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \sigma_c}{2}}, \quad \delta = \beta^{-1} \approx \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma_c}}$$

4.4 波导与谐振腔

波导 (waveguide) 为引导电磁波传播的装置, 按制作材料的属性, 可分为金属波导和介质波导。对于极低频电磁波, 通常的金属导线便是金属波导。对于高频 (如微波) 的电磁波, 通常选用的是如图所示中空的金属波导管作为导波的装置。其他如闭路电视的同轴电缆传输线、网线等均为金属波导。常见的介质波导便是光纤, 通常用一束光纤集成光缆进行长距离的电磁波传输。本节主要讨论金属波导。



4.4.1 横向场与纵向场的分离

设波导沿 z 方向无限延伸, 相应 z 方向被称为纵向, x, y 方向被称为横向 (用下标 t 表示), 相应场和微商算符的分解式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_t + B_z \mathbf{e}_3, \quad \nabla = \nabla_t + \mathbf{e}_3 \partial_z \quad (4.4.1)$$

考虑波导管内传播的是频率为 ω 的单色电磁波, 并考虑到 z 方向的平移不变性, 故可设

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (4.4.2)$$

再设波导管内充满均匀的无色散线性介质, 则波动方程变为二维的 Helmholtz 方程

$$(\nabla_t^2 + k_t^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E}(x, y) \\ \mathbf{B}(x, y) \end{pmatrix} = 0, \quad k_t^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 \quad (4.4.3)$$

Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \partial_t \mathbf{E} = -i\omega \mu \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$$

引入横向、纵向分量后, 利用

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) &= \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) \\ \mathbf{e}_3 \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \mathbf{E} = \nabla_t E_z - \partial_z \mathbf{E}_t \end{aligned}$$

可以将 Maxwell 方程组改写为

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = -\partial_z E_z = -ik_z E_z, \quad \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = -\partial_z B_z = -ik_z B_z \quad (4.4.4)$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z, \quad \mathbf{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -i\omega\mu\epsilon E_z \quad (4.4.5)$$

$$ik_z \mathbf{E}_t + i\omega(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_t) = \nabla_t E_z, \quad ik_z \mathbf{B}_t - i\omega\mu\epsilon(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t) = \nabla_t B_z \quad (4.4.6)$$

由(4.4.6)式可解得（引入 \mathbf{H} ）

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \frac{i}{k_t^2} (k_z \nabla_t E_z - \omega\mu\mathbf{e}_3 \times \nabla_t H_z) \\ \mathbf{H}_t = \frac{i}{k_t^2} (k_z \nabla_t H_z + \omega\epsilon\mathbf{e}_3 \times \nabla_t E_z) \end{cases} \quad (4.4.7)$$

如此，通过求解纵向分量满足的二维 Helmholtz 方程(4.4.3)式，便可由(4.4.7)式给出横向分量。

4.4.2 金属波导

一、边界条件与模式

金属良导体对于微波及红外波段，可以近似看作为理想导体（趋肤深度趋于零），边界面（法向向量为 \mathbf{n} ）上的边界条件为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.4.8)$$

在如上近似下，趋肤深度薄层的电流和电荷可以被看作为面电流和面电荷，相应有

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad \sigma_f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$$

利用(4.4.6)中的第二式，边界上

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_t B_z = ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) + i\omega\mu\epsilon\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t) = 0$$

因此，纵向分量的边界条件为

$$E_z = 0, \quad \partial_n B_z = 0 \quad (4.4.9)$$

即电场/磁场的纵向分量分别满足第一类/第二类齐次边界条件。

我们可以将金属波导中传播的电磁波分成横电、横磁及横电磁模式。

1) 横电模式（TE 模式）： $E_z \equiv 0$

2) 横磁模式（TM 模式）： $B_z \equiv 0$

3) 横电磁模式（TEM 模式）： $E_z \equiv 0$ 且 $B_z \equiv 0$

由(4.4.7)式可知，金属波导的横电磁模式对应于 $k_t = 0$ 或 $k_z = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ，此情形下

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y) = i\omega B_z(x, y)\hat{\mathbf{z}} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y) = 0$$

因此可以引入标量势 $\phi(x, y)$ ，使得 $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla\phi(x, y)$ ，而相应标量势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0$$

对于单一边界的中空金属波导，(4.4.8)表明边界面等势，因此中空金属波导内部也等势，故不存在电场。也就是说对于中空金属波导内传播的电磁波，不存在 TEM 模式。但对于双边界金属波导（如同轴电缆），原则上可以以 TEM 模式导波。

二、矩形波导管的横电模式

对于右图所示的矩形中空波导管，横电模式满足

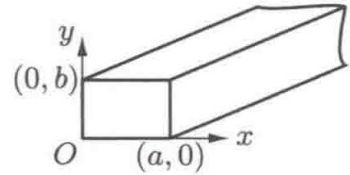
$$\begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_t^2)H_z(x, y) = 0 \\ \partial_n H_z|_{\text{边界}} = 0 \end{cases} \quad (4.4.10)$$

分离变量法解得

$$H_z(x, y) = H_0 \cos k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y = H_0 \cos \frac{m\pi}{a}x \cdot \cos \frac{n\pi}{b}y, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.11)$$

$$k_{x,m}^2 + k_{y,n}^2 = k_t^2 \quad (4.4.12)$$

对应的横场为（省去因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$ ）



$$\mathbf{E}_t = -\frac{i}{k_t^2} \omega \mu \mathbf{e}_3 \times \nabla_t H_z \Rightarrow \begin{cases} E_x = -iH_0 \frac{\omega \mu k_{y,n}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \\ E_y = iH_0 \frac{\omega \mu k_{x,m}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \end{cases} \quad (4.4.13)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{i}{k_t^2} k_z \nabla_t H_z \Rightarrow \begin{cases} H_x = -iH_0 \frac{k_z k_{x,m}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \\ H_y = -iH_0 \frac{k_z k_{y,n}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \end{cases} \quad (4.4.14)$$

由(4.4.13)可知, (4.4.11)式中 m, n 不能同时为零, 否则 $\mathbf{E} = 0$, 电磁波不能传播。

不同的 (m, n) 对应于不同的横电模式 TE_{mn} , 其对应的波矢 k_z 满足

$$k_{z,mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (4.4.15)$$

上式带来 TE_{mn} 模式的色散关系, 这种非线性的色散关系来源于波导管特殊的边界条件, 而不是来源于介质色散, 因此这种色散被称为结构色散。

三、 矩形波导管的横磁模式

如上波导管传播电磁波的横磁模式满足

$$\begin{cases} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_t^2) E_z(x, y) = 0 \\ E_z|_{\text{边界}} = 0 \end{cases} \quad (4.4.16)$$

分离变量法解得¹⁰

$$E_z(x, y) = E_0 \sin k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y = E_0 \sin \frac{m\pi}{a}x \cdot \sin \frac{n\pi}{b}y, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (4.4.17)$$

对应的横场为 (省去因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$)

$$\mathbf{E}_t = \frac{i}{k_t^2} k_z \nabla_t E_z \Rightarrow \begin{cases} E_x = iE_0 \frac{k_z k_{x,m}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \\ E_y = iE_0 \frac{k_z k_{y,n}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \end{cases} \quad (4.4.18)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{i}{k_t^2} \omega \varepsilon \mathbf{e}_3 \times \nabla_t E_z \Rightarrow \begin{cases} H_x = -iE_0 \frac{\omega \varepsilon k_{y,n}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \\ H_y = iE_0 \frac{\omega \varepsilon k_{x,m}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \end{cases} \quad (4.4.19)$$

对于横磁模式 TM_{mn} , (4.4.12)和(4.4.15)仍成立。

四、 矩形波导管的截止频率和单模频段

由(4.4.15)可知, 矩形波导管的 mn 模式存在截止频率 (对应于 $k_{z,mn} = 0$)

$$\omega_{mn,\text{cut}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (4.4.20)$$

也即是说当 $\omega > \omega_{mn,\text{cut}}$ 时才会有相应的 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式被激发出来。不失一般性, 我们设 $a > b$, 则有如下结论:

1) 波导管中可以传递的最低频率为

$$\omega_{\min} = \omega_{10,\text{cut}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{\pi}{a} \quad (4.4.21)$$

它对应于 TE_{10} 。

2) 如果称截止频率相同的模式为简并模式, 则当 m, n 均不为零时 TE_{mn} 与 TM_{mn} 模式简并

¹⁰ 因为中空波导管不存在横电磁模式, 故下式中 m, n 均不为零。

(但它们的场结构是不同的), 而 TE_{m0} 或 TE_{0n} 不与其他模式简并¹¹, 称为单频模式。
3) 工程上, 为了避免接收时存在多模干扰或信号失真, 通常要求波导传输工作在单模区, 即要求电磁波的频率仅能激发 TE_{10} 模式, 这等价于要求

$$\omega_{10,\text{cut}} < \omega < \min[\omega_{20,\text{cut}}, \omega_{01,\text{cut}}] \quad (4.4.22)$$

五、 矩形波导管中电磁波的相速度与群速度

矩形波导管中模式 TE_{mn} 或 TM_{mn} 的相速度为

$$v_{p,mn} = \frac{\omega}{k_{z,mn}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn,\text{cut}}^2}{\omega^2}}} > \frac{c}{n} \quad (4.4.23)$$

甚至有可能大于光速 c , 但其群速度不会。考虑到

$$\omega^2 - k_{z,mn}^2 \frac{c^2}{n^2} = \omega_{mn,\text{cut}}^2$$

则

$$v_{g,mn} = \frac{d\omega}{dk_{z,mn}} = \frac{c^2}{n^2} \frac{1}{v_{p,mn}} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \frac{\omega_{mn,\text{cut}}^2}{\omega^2}} < \frac{c}{n} \quad (4.4.24)$$

六、 同轴圆柱波导管的 TEM 模式

对于右图所示的同轴圆柱波导管, 沿 z 方向传播电磁波为



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, \varphi) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \varphi) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

考虑其中的 TEM 模式

$$E_z \equiv 0, \quad B_z \equiv 0, \quad k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = k_z$$

无结构色散, 因此无(下限)截止频率, 且有

$$v_p = v_g = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

前面已经论证, 此情形下

$$\mathbf{E}(r, \varphi) = -\nabla\phi(r, \varphi), \quad \nabla^2\phi(r, \varphi) = 0$$

且内外壁均为等势面。体系的轴对称可以确定

$$\phi = a_0 + b_0 \ln r$$

相应

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, \varphi) e^{i(kz - \omega t)} = -\frac{b_0}{r} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{r}} = \frac{E_0}{r} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{i\omega} \partial_z E_r \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{E_0}{r} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

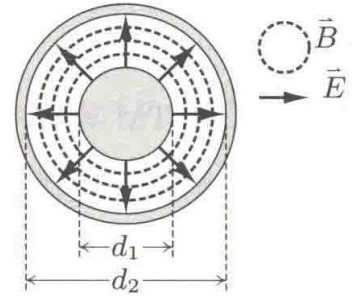
电磁场同相位。

TEM 模式能流密度的平均值为

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \right\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{E_0^2}{r^2} \hat{\mathbf{z}}$$

波导管内横截面上的传输功率为

$$P = \int_{d_1/2}^{d_2/2} (\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}}) 2\pi r dr = \pi \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2$$

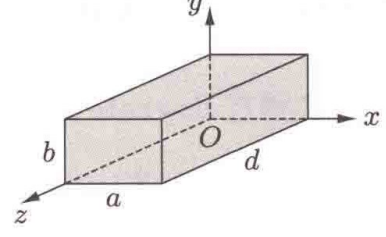


同轴圆柱波导管存在 TE 或 TM 模式, 但因为存在结构色散, 故除了 TEM 模式外, 其他模式均存在截止频率, 因此只要使得频率足够低, 就可以保证同轴圆柱波导管的单模传输。

¹¹ 除非 a 为 b 的整数倍。

4.4.3 谐振腔

图示的矩形金属导体谐振腔的模式可以由矩形金属导体波导管的沿 $-z/z$ 对向传播的模式叠加来构造，也可以由分离变量法直接求解。相对于 z 方向，可以分为 TE 模式和 TM 模式。



一、TE 模式 ($E_z = 0$)

边界条件 $H_z|_{z=0,d} = 0$ 可确定

$$H_z = H_0 \cos k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \cdot \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t}$$

其中

$$k_{z,l} = \frac{l\pi}{d}, \quad l = 1, 2, \dots$$

模式频率

$$\omega_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

其中 m, n 不全为零。若 $a > b$ ，则最低频模式为 TE_{101} 。

TE_{mnl} 模式的横场为

$$\begin{cases} E_x = -iH_0 \frac{\omega_{mnl}\mu k_{y,n}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \cdot \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ E_y = iH_0 \frac{\omega_{mnl}\mu k_{x,m}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \cdot \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ H_x = -H_0 \frac{k_{z,l}k_{x,m}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \cdot \cos k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ H_y = -H_0 \frac{k_{z,l}k_{y,n}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \cdot \cos k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \end{cases}$$

其中 $k_t^2 = k_{x,m}^2 + k_{y,n}^2$ 。这相当于在(4.4.13)(4.4.14)中补全因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$ ，然后做如下替换

$$\begin{aligned} H_0 e^{i(k_z z - \omega t)} &\rightarrow H_0 \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ ik_z H_0 e^{i(k_z z - \omega t)} &\rightarrow \partial_z (H_0 \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t}) \end{aligned}$$

二、TM 模式 ($H_z = 0$)

考虑到 $z = 0, d$ 的边界面上 $E_{x,y} = 0$ ，因此 $\partial_z E_z|_{z=0,d} = 0$ ，由此可以确定

$$E_z(x, y) = E_0 \sin k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \cdot \cos k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t}$$

其中 m, n 均不为零。模式频率仍为

$$\omega_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

最低频模式为 TM_{110} 。

TM_{mnl} 模式的横场为

$$\begin{cases} E_x = -E_0 \frac{k_{z,l}k_{x,m}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \cdot \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ E_y = -E_0 \frac{k_{z,l}k_{y,n}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \cdot \sin k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ H_x = -iE_0 \frac{\omega\epsilon k_{y,n}}{k_t^2} \sin k_{x,m}x \cdot \cos k_{y,n}y \cdot \cos k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \\ H_y = iE_0 \frac{\omega\epsilon k_{x,m}}{k_t^2} \cos k_{x,m}x \cdot \sin k_{y,n}y \cdot \cos k_{z,l}z e^{-i\omega_{mnl}t} \end{cases}$$