Вебинар 3

Основы теории вероятностей

План

0. Памятка – как не убиться о математику.
1. Разбор ДЗ3 и ДЗ4.
2. Задачи по теории вероятностей:
- теоремы сложения и умножения;
- геометрическая вероятность;
- несколько задач на размещения и сочетания.

3. МНК (метод наименьших квадратов)

Видеоразбор ДЗ_3:

- Тема: аналитическая геометрия: https://uploads.hb.cldmail.ru/chaptervideo/1267355/attachment/c22ef8e791234988b59f4cd3d2eabcdf.mp4
- Тема: графики на плоскости (корректный разбор №4.1-2) далее в вебинаре:

https://uploads.hb.cldmail.ru/chaptervideo/1267367/attachment/cfeb1c789c342a0c4d09afd99c50d7a7.mp4

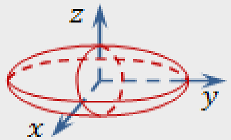
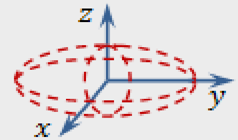
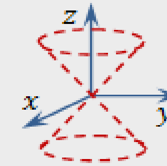
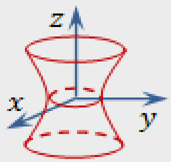
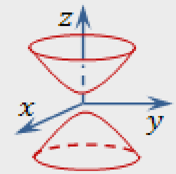
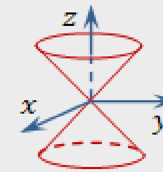
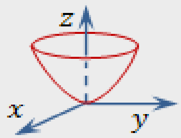
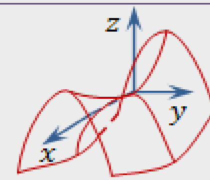
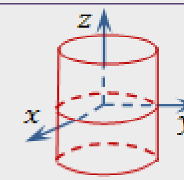
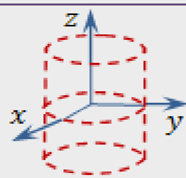
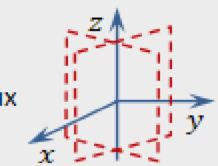
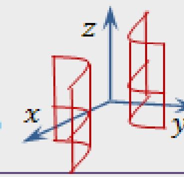
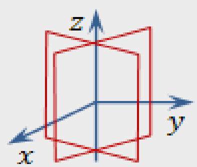
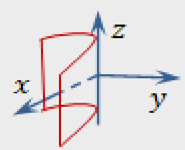
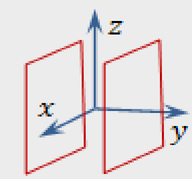
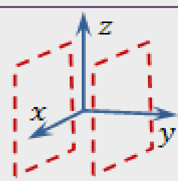
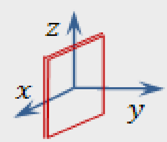
К ДЗ_3 №5 2)
Общий вид уравнения поверхности 2-го порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

$Ax^2 + By^2 + Cz^2$ - квадратичная часть

$Dx + Ey + Fz + G$ - линейная часть

Примеры поверхностей 2-го порядка

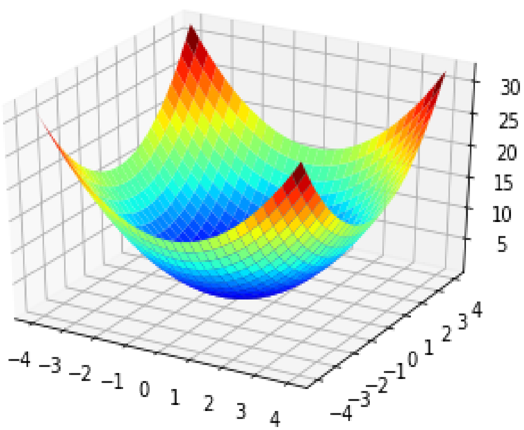
1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение эллипсоида 	2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение мнимого эллипсоида 	3.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение мнимого конуса 
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Уравнение однополостного гиперболоида 	5.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Уравнение двуполостного гиперболоида 	6.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Уравнение конуса 
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение эллиптического параболоида 	8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ Уравнение гиперболического параболоида 	9.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение эллиптического цилиндра 
10.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра 	11.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей 	12.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Уравнение гиперболического цилиндра 
13.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей 	14.	$y^2=2px$ Уравнение параболического цилиндра 	15.	$y^2-b^2=0$ Уравнение пары параллельных плоскостей 
16.	$y^2+b^2=0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей 	17.	$y^2=0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей 		Для всех уравнений $a>0,\ b>0,\ c>0,\ p>0$ Для уравнений 1 и 2 $a\geq b\geq c$ Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 $a\geq b$

+

Изобразим параболоид

In [224]:
```
x = np.outer(np.ones(30,), np.linspace(-4, 4, 30))
y = x.copy().T

z = x ** 2 + y ** 2

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')

ax.plot_surface(x, y, z, cmap=plt.cm.jet)
```

Out[224]: <mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x1f0ead6ab00>



Изобразим эллипсоид ¶

Фрагмент работы Максима Аласкарова

ДЗ№3 #4.1)

Решите систему уравнений:

- $y = x^2 - 1$ (1)
- $\exp(x) + x \cdot (1 - y) = 1$ (2)

!Область допустимых значений исследуется по исходной задаче.

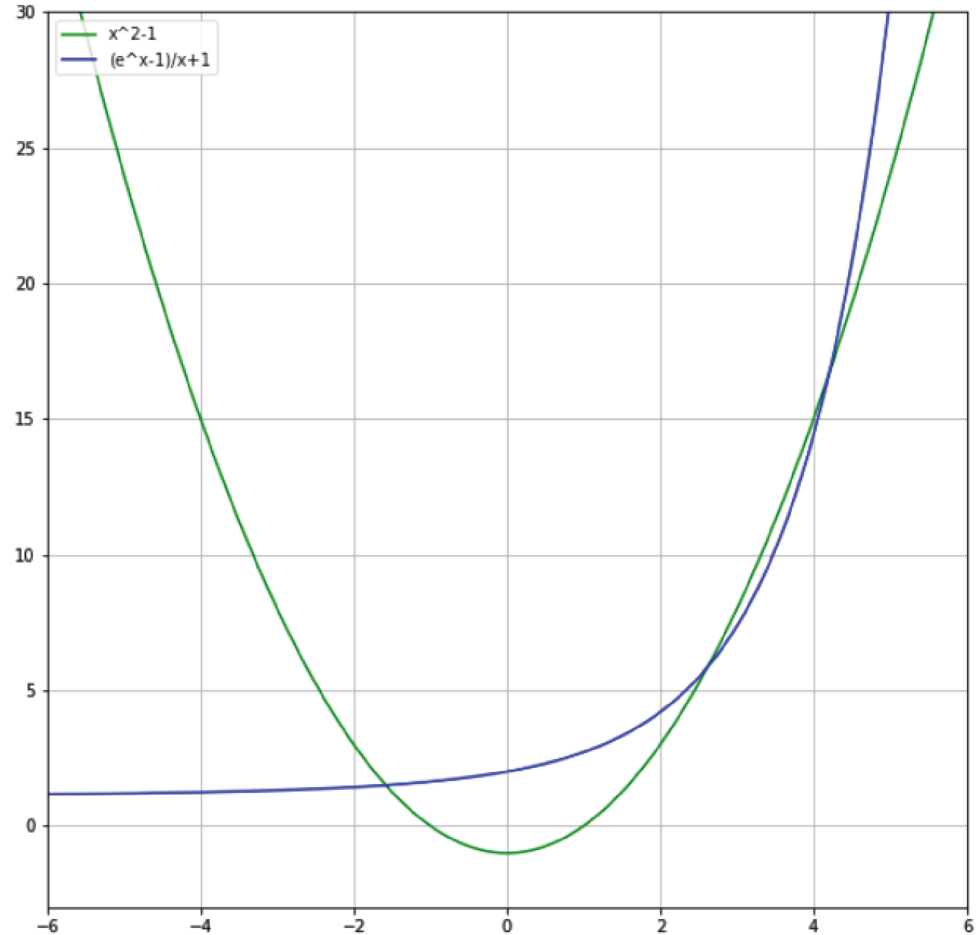
ДЗ№3 #4.2)

Решите систему уравнений и неравенств:

- $y = x^2 – 1$ (1)
- $\exp(x) + x\cdot(1 – y) > 1$ (2)

- Подставить (1) в (2), получить функцию одной переменной.

```python
# 1) Система уравнений
plt.figure(figsize=(10,10))
x = np.linspace(-6, 6, 1001)
ind = np.where(x == 0.)
x = np.delete(x, ind)
y1 = x**2 - 1
y2 = (np.exp(x) - 1) / x + 1
plt.plot(x, y1, label='x^2-1', c='g')
plt.plot(x, y2, label='(e^x-1)/x+1', c='b')
plt.axis([-6, 6, -3, 30])
plt.legend(loc='upper left')
plt.grid()
plt.show()
```



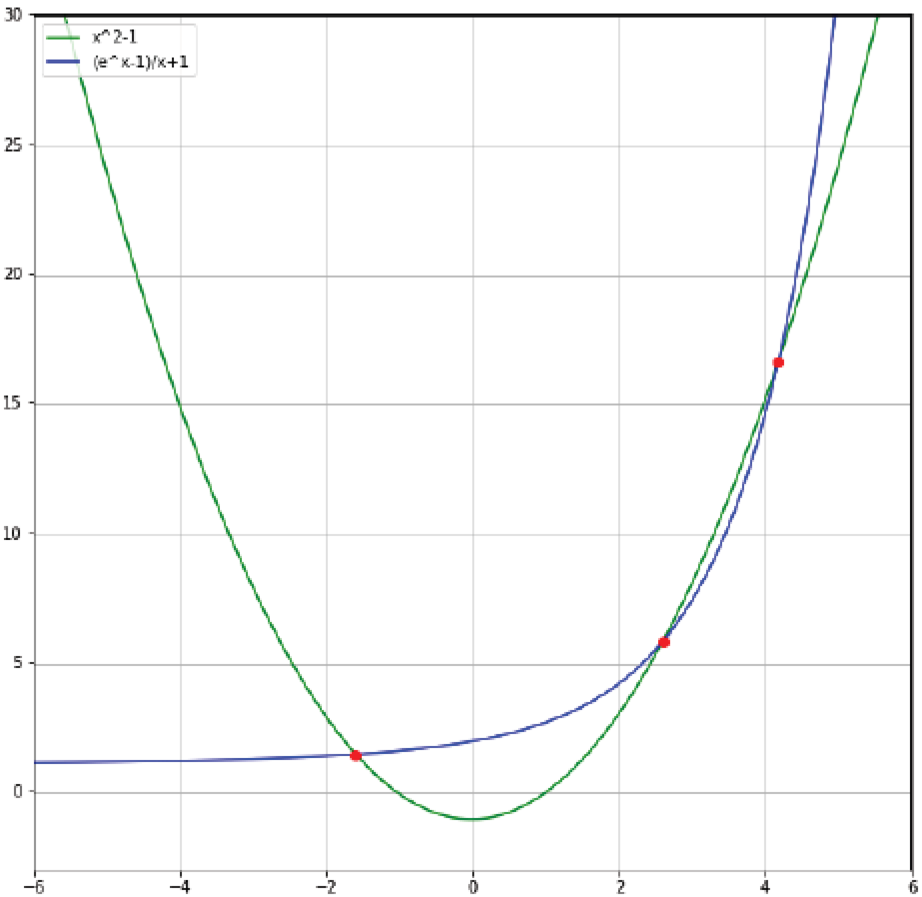
По графикам видно, что система имеет 3 решения:

1. $x \in (-2, -1)$
2. $x \in (2, 3)$
3. $x \in (4, 5)$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ e^x + x(1-y) = 1 \end{cases}$$

```
def equations(p):
    x, y = p
    return (y - x**2 + 1, np.exp(x) + x * (1 - y) - 1)

x_1, y_1 = fsolve(equations, (-2, 5))
x_2, y_2 = fsolve(equations, (3, 6))
x_3, y_3 = fsolve(equations, (5, 20))

print(x_1, y_1)
print(x_2, y_2)
print(x_3, y_3)
```

```
-1.5818353528958997 1.5022030836712943
2.618145573086073 5.8546862418707315
4.200105840743156 16.640889073515883
```



$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ e^x + x(1-y) > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y < \frac{e^x - 1}{x} + 1 \end{cases}$$

x>0 => при делении на x знак неравенства не меняется, т.е. парабола ниже.

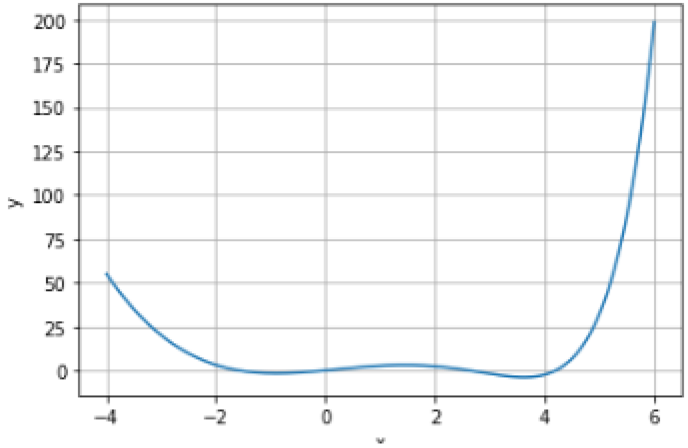
$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ e^x + x(1-y) > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y > \frac{e^x - 1}{x} + 1 \end{cases}$$

X<0 => при делении на x знак неравенства меняется, т.е. парабола выше.

Или

4.2 Решите систему уравнений и неравенств: y = x2 – 1 exp(x) + x·(1 – y) > 1

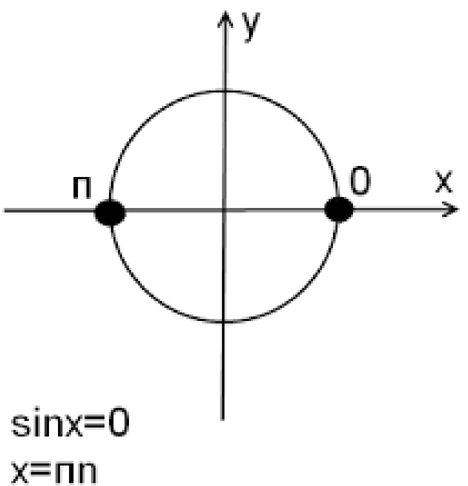
```
from scipy.optimize import fsolve

x = np.linspace(-4,6,201)
plt.plot(x, np.exp(x)+x*(2-x**2)-1)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.show()
```



$\boxed{\text{np.exp(x)+x*(2-x**2)-1>0}}$

ДЗ№4, #1

- sinx=0

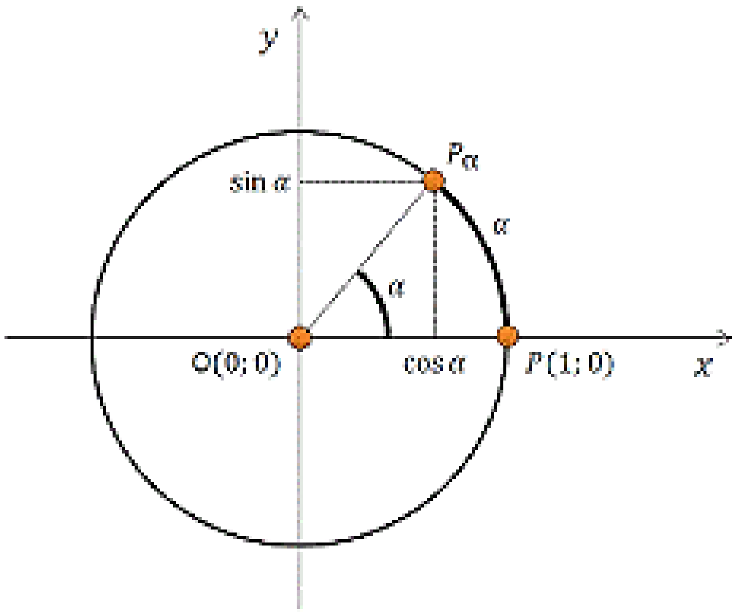


- x≠0 <=> πn ≠0 => n≠0
- Ответ: x= πn, n≠0.

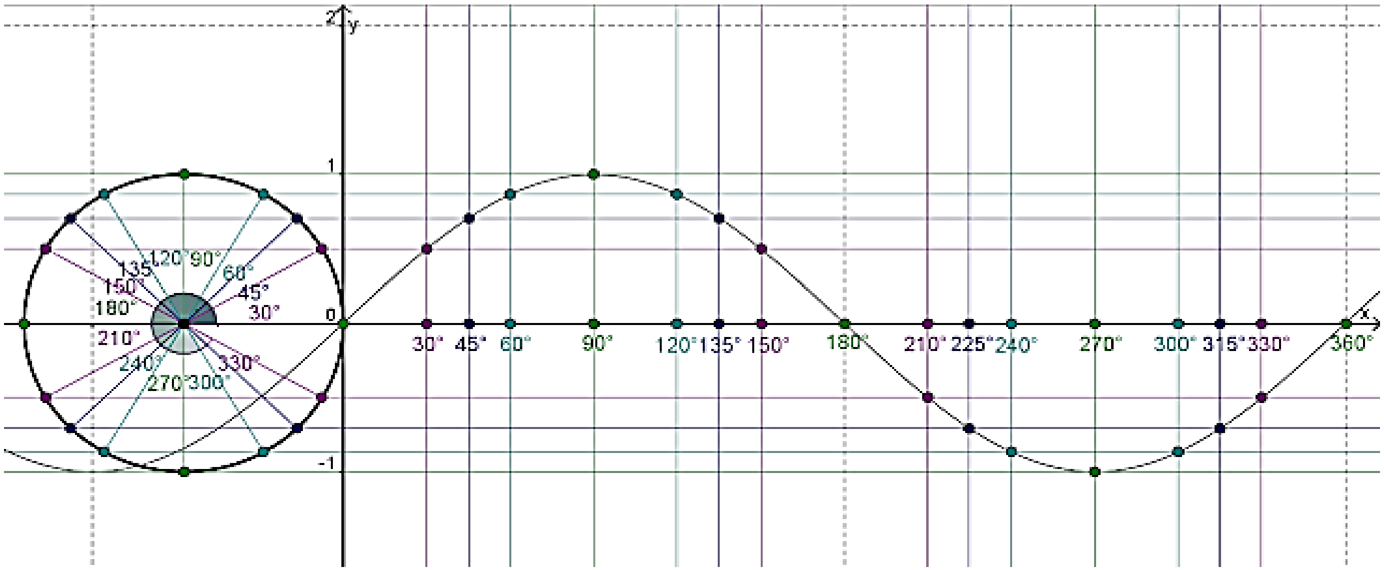
По мотивам проверки ДЗ № 3-4: тригонометрическая окружность

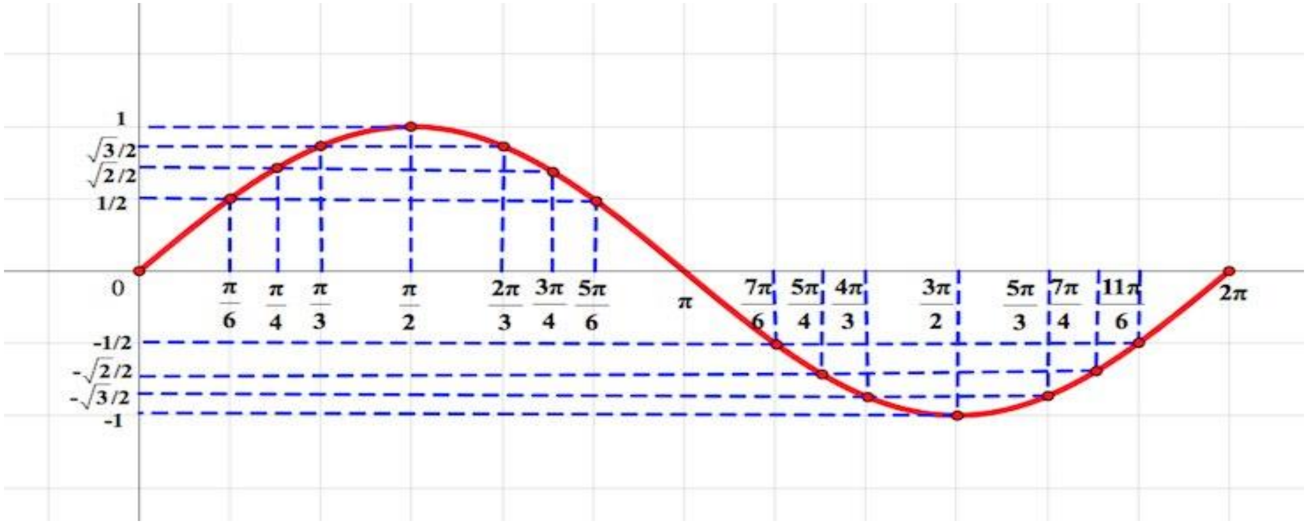
cos(x)=0

Градусы и радианы



По мотивам проверки ДЗ № 3-4: тригонометрическая окружность и синусоида





Даны три прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$. Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?

Решение:
Чтобы все три прямые пересекались в одной точке, все они должны удовлетворять одному уравнению пучка прямых: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где (x_0, y_0)-координаты точки пересечения.

Также, чтобы узнать, пересекаются ли все три прямые в одной точке, можно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \\ y = k_3x + b_3 \end{cases}$$

Если система имеет единственное решение - то все три прямые пересекаются в одной точке.

Из данной системы уравнений можно вывести следующую закономерность:

$$k_1x + b_1 = k_2x + b_2 = k_3x + b_3 \Rightarrow x = \frac{b_2-b_1}{k_1-k_2} = \frac{b_1-b_3}{k_3-k_1} = \frac{b_3-b_2}{k_2-k_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_3}$$

Ответ: если параметры прямых удовлетворяют выражению $\frac{b_1-b_2}{b_1-b_3} = \frac{k_1-k_2}{k_1-k_3}$, то прямые пересекаются в одной точке.

ДЗ№4, #3
Задача Бюффона о бросании иглы

- Статья в википедии
- Краткий видеоразбор: https://www.youtube.com/watch?v=qhJbSOnImpg
- Разбор без двойного интеграла (школьный вариант): http://www.e-osnova.ru/PDF/osnova_3_47_9914.pdf

ДЗ№4, #4* (алгоритм)

Решите аналитически и потом численно (в программе) уравнение, зависящее от параметра a:

$\sin(a*x)=0$ при условии: $0.01<a<0.02$, $100<x<500$.

1. Решить уравнения;
2. Учесть ограничения по x – и, таким образом, найти допустимые значения n.
3. Для допустимых n найти возможные значения a.

$$\sin \alpha x = 0, \quad \begin{cases} 0{,}01 < \alpha < 0{,}02 \\ 100 < x < 500 \end{cases}$$

1. Просто решим ур-е

$$\sin \alpha x = 0$$

$$\alpha x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{\alpha}, \ n \in \mathbb{Z}$$

2. Ограничения: во-первых, $100 < x < 500$. Найдём подходящие n

- $n < 0 \Rightarrow x < 100$
- $n = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi \cdot 1}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}$

157 314

$$0{,}01 < \alpha < 0{,}02 \Rightarrow \frac{\pi}{0{,}02} < x < \frac{\pi}{0{,}01} \Leftrightarrow 50\pi < x < 100\pi$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in (0{,}01; 0{,}02) \quad x = \frac{\pi}{\alpha}$$

• $n = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{\alpha}$

$$\underbrace{\frac{3\pi}{0{,}02}}_{=\,150\pi} < \frac{3\pi}{\alpha} < \underbrace{\frac{3\pi}{0{,}01}}_{=\,300\pi\,>\,500}$$

$100 < \approx 450 < 500$!

$$\frac{3\pi}{\alpha} < 500 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3\pi}{500}$$

$$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{500} ; 0{,}02\right)$$

- $n = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{\alpha}$

$$\frac{2\pi}{0{,}02} < x < \frac{2\pi}{0{,}01} \Leftrightarrow \underset{314}{100\pi} < x < \underset{628}{200\pi}$$

$$\frac{2\pi}{\alpha} < 500 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{500}{2\pi} = \frac{250}{\pi} \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{250}$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \left(\frac{\pi}{250}; 0{,}02\right) \; x = \frac{2\pi}{\alpha}$$

$\bullet\ n = 4 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{\alpha}$

$$200\pi = \frac{4\pi}{0{,}02} < \frac{4\pi}{\alpha} < \frac{4\pi}{0{,}01}$$

$\vee$

500

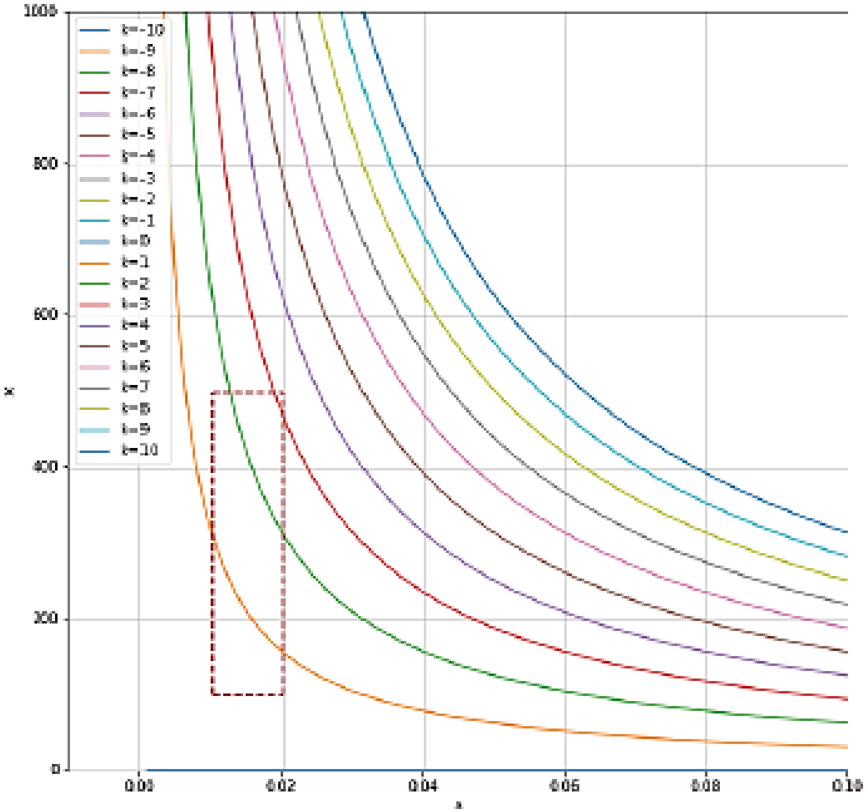
$\Rightarrow \underline{n \leq 3}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{\alpha}$

$x = \frac{2\pi}{\alpha}$ при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{250}; 0{,}02\right)$

$x = \frac{3\pi}{\alpha}$ при $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{500}; 0{,}02\right)$

```
# Построим график функции x=x(a)
plt.figure(figsize=(10,10))
a = np.linspace(0.001,0.1, 1001)
for k in range(-10,11):
    plt.plot(a, k*np.pi / a, label=f'k={k}')
# рассматриваемый диапазон
plt.plot([0.01, 0.01], [100, 500], color='DarkRed', linestyle='--', alpha=1)
plt.plot([0.02, 0.02], [100, 500], color='DarkRed', linestyle='--', alpha=1)
plt.plot([0.01, 0.02], [100, 100], color='DarkRed', linestyle='--', alpha=1)
plt.plot([0.01, 0.02], [500, 500], color='DarkRed', linestyle='--', alpha=1)

plt.axis([-0.01, 0.1, -1, 1000])
plt.legend(loc='upper left')
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('x')
plt.grid()
plt.show()
```



Задание 17.6.2.

Найти угол α между прямыми:

$4y - 3x + 12 = 0$ и $7y + x - 14 = 0$

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

$tg(\alpha) = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$

$\Downarrow$

$tg(\alpha) = \frac{4+21}{-3+28} = \frac{25}{25} = 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Задание 17.6.4.

Найти угол α между прямыми:

$x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$

Задание 17.6.х.

Выяснить тип кривых второго порядка, порожденных следующими у

17.6.5. $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

17.6.6. $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$

17.6.7. $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$

17.6.8. $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$

Классификация кривых второго порядка:

1. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. Точка(пара мнимых пересекающихся прямых) $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$
3. Мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
4. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. Пара пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0$
6. Парабола $y^2 = 2px$
7. Пара параллельных прямых $x^2 - d^2 = 0$
8. Прямая $x^2 = 0$
9. Пара мнимых параллельных прямых $x^2 + d^2 = 0$

Решение 17.6.5.:

Выделим полные квадраты:

$y^2 - 2x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 - 2(x+3) = 0 \Rightarrow (y-1)^2 - 2(x+3) = 0$

Получили уравнение параболы: $(y-1)^2 = 2(x+3)$.

Решение 17.6.6.:

Выделим полные квадраты:

$3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 12 + 5y^2 - 30y + 45 - 15 = 0 \Rightarrow 3(x+2)^2 + 5(y-3)^2 = 15$

Получили уравнение эллипса: $\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{3} = 1$.

Решение 17.6.7.:

Выделим полные квадраты:

$2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow 2x^2 - (y^2 - 6y + 9) + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - (y-3)^2 = -2$

Получили уравнение гиперболы: $\frac{(y-3)^2}{2} - \frac{x^2}{1} = 1$.

Решение 17.6.8.:

Выделим полные квадраты:

$2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 28x + 98 - 3y^2 - 42y - 147 - 6 = 0 \Rightarrow 2(x-7)^2 - 3(y+7)^2 - 6 = 0$

Получили уравнение гиперболы: $\frac{(x-7)^2}{3} - \frac{(y+7)^2}{2} = 1$.

Переходим к теории вероятностей

Формула вероятности (реализация данного события в одном испытании)

Предположим, что проводится испытание, которое имеет N равновозможных исходов. Пусть n из них благоприятствуют некоторому событию A (событие реализуется), а $N-n$ исходов не благоприятствуют ему (событие не реализуется). Тогда ***вероятностью*** $P(A)$ события A называется отношение

$$P(A) = \frac{n}{N}. \qquad (16.2.1)$$

Это определение называется ***классическим определением вероятности.***

Пример

- Есть урна со 100 разноцветными шарами, среди них 7 оранжевых.
- Вероятность (вслепую) извлечь оранжевый шар:
- $P=n/N=7/100$
- Где n – число способов извлечь оранжевый шар; N – число способов извлечь любой шар.

Теорема сложения: P (A+B) = P (B+A) = P(A)+P(B)-P(AB) – ИЛИ –

Теорема умножения: $P(AB) = P(BA) = P(B)P(A|B)$

- И -

Для независимых событий

16.7.1. Найти вероятность извлечения дамы или короля из колоды, содержащей 36 карт.

#1 #2

16.7.8. Найти вероятность извлечения дамы и короля из колоды, содержащей 36 карт, если первая извлеченная карта возвращается на место, колода тасуется, а затем извлекается вторая карта.

P (A+B) = P (B+A) = P(A)+P(B)-P(AB) – ИЛИ – Теорема сложения

$$P(AB) = P(BA) = P(B)P(A|B)$$

- И -Теорема умножения

16.7.1. Найти вероятность извлечения дамы или короля из колоды, содержащей 36 карт.

В колоде по 4 дамы и короля =>
P=4/36+4/36 = 2/9

16.7.8. Найти вероятность извлечения дамы и короля из колоды, содержащей 36 карт, если первая извлеченная карта возвращается на место, колода тасуется, а затем извлекается вторая карта.

А если не вернули?

P=(4/36)*(4/36)

16.7.2. Найти вероятность извлечения синего или зеленого шара из ящика, содержащего 20 красных, 30 синих и 50 зеленых шаров.

#1 #2

16.7.4. Найти вероятность извлечения синего и зеленого шаров из ящика, содержащего 20 красных, 30 синих и 50 зеленых шаров, если сначала извлекается один шар, выясняется его цвет, затем шар кладется на место, шары перемешиваются, а затем извлекается второй шар.

16.7.2. Найти вероятность извлечения синего или зеленого шара из ящика, содержащего 20 красных, 30 синих и 50 зеленых шаров.

P=30/100+50/100=0.8

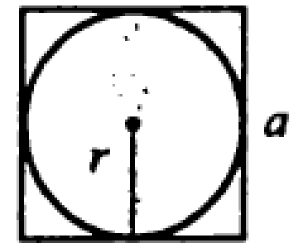
16.7.4. Найти вероятность извлечения синего и зеленого шаров из ящика, содержащего 20 красных, 30 синих и 50 зеленых шаров, если сначала извлекается один шар, выясняется его цвет, затем шар кладется на место, шары перемешиваются, а затем извлекается второй шар.

P=(30/100)*(50/100)

Геометрическая вероятность

В квадрат со стороной, равной a, вписан круг. Найти вероятность того, что произвольно взятая в квадрате точка попадёт и в круг.

В квадрат со стороной, равной а, вписан круг. Найти вероятность того, что произвольно взятая в квадрате точка попадёт и в круг.



$$P(\text{круг}) = \frac{S(\text{круг})}{S(\text{квадрат})} = \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi (\frac{a}{2})^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\approx 0{,}7854$$

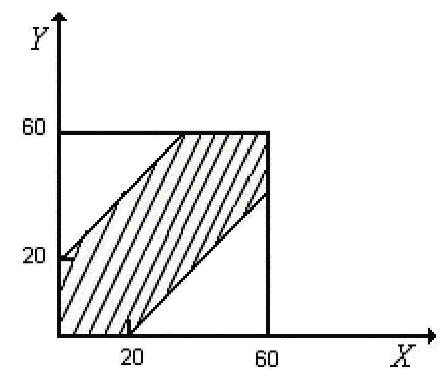
Два человека условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждёт другого 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если каждый из них может прийти наудачу независимо от другого в течение указанного часа?

Два человека условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждёт другого 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если каждый из них может прийти наудачу независимо от другого в течение указанного часа?

- Пусть x – момент, когда пришёл 1-й человек; y – 2-й.
- $|x-y| \leq 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-20 \\ y \leq x+20 \end{cases}$
- Изображаем на графике 2 прямые: y=x-20;

y=x+20.

- Заштриховываем область, обозначенную неравенствами. Это S’, соответствующая встрече. S показывает все возможные ситуации (всреча+невстреча)



- $P(\text{встречи}) = \frac{S\prime}{S} = \frac{3600-2\cdot\frac{1}{2}\cdot40\cdot40}{3600} = \frac{5}{9}$

Телефонный номер состоит из 7 цифр, он не может начинаться с 0. Найти вероятность того, что все цифры в телефоне а) одинаковые б) разные.

Телефонный номер состоит из 7 цифр, он не может начинаться с 0. Найти вероятность того, что все цифры в телефоне а) одинаковые б) разные.

Всего способов составить номер: 9*(10)^6

- А) Способов составить номер из одинаковых цифр: 9
- Б) Способов составить номер из разных цифр: 9*9*8*7*6*5*4

P(одинаковые) = 9/9*(10)^6

P (разные) = 9*9*8*7*6*5*4/9*(10)^6

В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Наугад вынуты 2 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы окажутся одноцветными?

В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Наугад вынуты 2 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы окажутся одноцветными?

$$P(\text{одного цвета}) = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{11}{21}$$

C(n,k)=n! /((n-k)!k!) – число сочетаний из n элементов по k (порядок не важен – (0;1;2) и (1;2;0) – один и тот же набор:
C(10;2) = 10!/((10-2)!2!)=10!/8!2!=45.

A(n,k)=n!/(n-k)! – число размещений из n элементов по k
(0;1;2) и (1;2;0) – разные наборы:
A(10;2) = 10!/((10-2)!) = 10!/8! = 9*10=90

N!=1*2*3*…*(N-1)!*N
5! = 1*2*3*4*5=120.

Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы на 95% быть уверенным в том, чтобы хотя бы в одном бросании появится 3-ка?

Сколько раз надо бросить игральную кость, чтобы на 95% быть уверенным в том, чтобы хотя бы в одном бросании появится 3-ка?

Вероятность «не 3» = 5/6.

Пусть мы бросаем кубик n раз и «3» не появляется:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}05$$

$$n \geq \log_{\frac{5}{6}} 0{,}05 = \frac{\ln 0{,}05}{\ln \frac{5}{6}} = \frac{-1{,}3010}{-0{,}0798} = 16{,}3$$

=>n=17

Фирма участвует в 4-х проектах, каждый из которых может окончиться неудачей с вероятностью 0,1. В случае неудачи в одном проекте, вероятность разорения фирмы равна 20%, двух – 50%, трёх – 70%, четырёх – 90%. Определите вероятность разорения фирмы.

Формула Бернулли

Вероятность того что в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна **P** , событие наступит ровно **К** раз, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

где **q**- вероятность противоположного события

q=1-p

Фирма участвует в 4-х проектах, каждый из которых может окончиться неудачей с вероятностью 0,1. В случае неудачи в одном проекте, вероятность разорения фирмы равна
20%, двух – 50%, трёх – 70%, четырёх – 90%. Определите вероятность разорения фирмы.

	1	2	3	4
Вероятность неудачи в проекте (формула Бернулли) $P_n^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$C_4^1 0{,}1^1 0{,}9^3 = 4 * 0{,}1 * 0{,}729$=0,2916	$C_4^2 0{,}1^2 0{,}9^2 = 6 * 0{,}01 * 0{,}81$=0,0486	$C_4^3 0{,}1^3 0{,}9 = 4 * 0{,}001 * 0{,}9$=0,0036	$0{,}0001$
Вероятность разорения фирмы	0,2	0,5	0,7	0,9

P = 0,2916*0,2+0,0486*0,5+0,0036*0,7+0,0001*0,9=0,0860

Пусть A, B, C – три произвольных события. Их вероятности A, B, C. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть A, B, C – три произвольных события. Их вероятности A, B, C. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости P(A) = a; P(B) = b; P(C)=c

А) a*b*c

Пусть А, В, С – три произвольных события. Их вероятности А, В, С. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости P(A) = a; P(B) = b; P(C)=c

А) a*b*c

Б) a+b+c-ab-bc-ac+abc или 1-(1-a)(1-b)(1-c)

Пусть А, В, С – три произвольных события. Их вероятности А, В, С. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости P(A) = a; P(B) = b; P(C)=c

А) a*b*c

Б) a+b+c-ab-bc-ac+abc или 1-(1-a)(1-b)(1-c)

В) ab+ac+bc-2abc

Пусть A, B, C – три произвольных события. Их вероятности A, B, C. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости P(A) = a; P(B) = b; P(C)=c

А) a*b*c

Б) a+b+c-ab-bc-ac+abc или 1-(1-a)(1-b)(1-c)

В) ab+ac+bc-2abc

Г) ab(1-c) + bc(1-a) + ac(1-b)

Пусть A, B, C – три произвольных события. Их вероятности A, B, C. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(C)=c$

Д) $a(1-b)(1-c)+(1-a)b(1-c)+(1-a)(1-b)c$

Пусть А, В, С – три произвольных события. Их вероятности А, В, С. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(C)=c$

Д) $a(1-b)(1-c)+(1-a)b(1-c)+(1-a)(1-b)c$

Е) $(1-a)(1-b)(1-c)$

Пусть A, B, C – три произвольных события. Их вероятности A, B, C. Найти выражение для событий, состоящих в том, что произошли: а) все три события, б) хотя бы одно из событий, в) хотя бы два из событий, г) два и только два события; д) ровно одно событие, е) ни одно событие не произошло, ж) не более двух событий.

Пусть для краткости $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(C)=c$

Д) $a(1-b)(1-c)+(1-a)b(1-c)+(1-a)(1-b)c$

Е) $(1-a)(1-b)(1-c)$

Ж) $1 - abc$

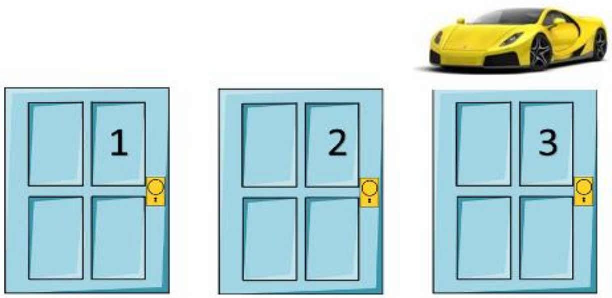
Бросают две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма очков, выпавших на обеих костях, не превзойдёт 5?

1	2	3	4
1	1	1	1
2	2	2	
3	3		
4			

Бросают две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма очков, выпавших на обеих костях, не превзойдёт 5? 36 – всего. P=10/36

1	2	3	4
1	1	1	1
2	2	2	
3	3		
4			

Парадокс Монти Холла



Три двери: за одной машина, за двумя – козы. Ведущий знает, где кто.

1. Игрок выбирает любую дверь (но не открывает)
2. Ведущий открывает дверь, за которой коза.
3. Остаются 2 двери. Игрок решает, менять свой выбор или нет.

Автомобиль	Выбор игрока	Победа, если не менять выбор	Победа, если менять выбор
	1	1	0
1	2	0	1
	3	0	1
	1	0	1
2	2	1	0
	3	0	1
	1	0	1
3	2	0	1
	3	1	0
		3/9	6/9

1 – машина;
0 – коза.

Про дискретный закон распределения

Пусть в денежной лотерее продано 1000 билетов, из которых на 10 билетов падает выигрыш 1000 руб., на 20 билетов — 100 руб., на 100 билетов — 10 руб., а 870 билетов — без выигрыша. Здесь случайная величина x представляет собой выигрыш, приходящийся на один билет. Ее закон распределения имеет вид

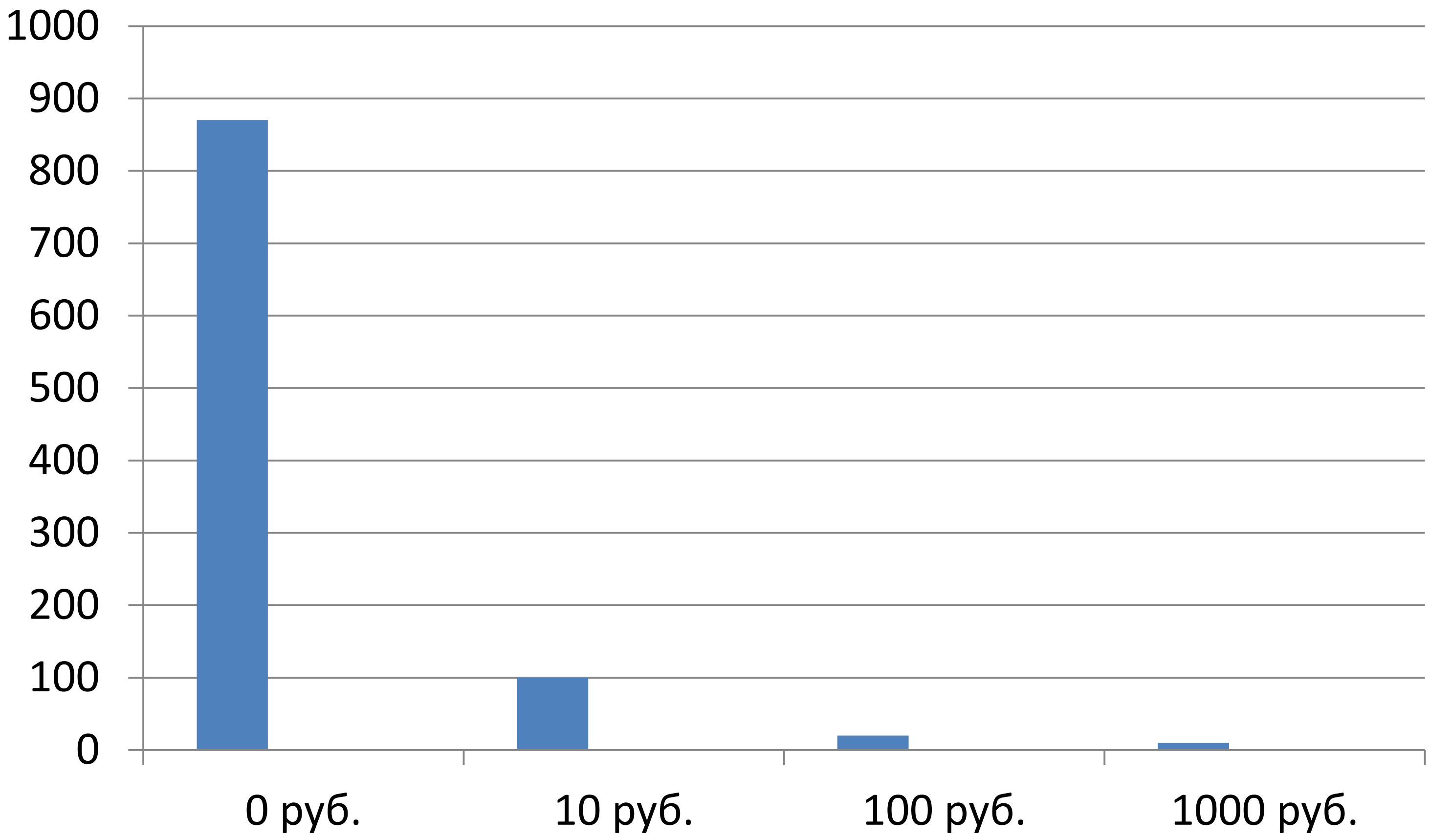
x_k	1000 руб.	100 руб.	10 руб.	0 руб.
p_k	$\frac{10}{1000}$	$\frac{20}{1000}$	$\frac{100}{1000}$	$\frac{870}{1000}$

x_k	1000 руб.	100 руб.	10 руб.	0 руб.
p_k	$\frac{10}{1000}$	$\frac{20}{1000}$	$\frac{100}{1000}$	$\frac{870}{1000}$

$$Mx = \frac{10}{1000} \cdot 1000 + \frac{20}{1000} \cdot 100 + \frac{100}{1000} \cdot 10 + \frac{870}{1000} \cdot 0 = 13 \quad \text{руб.}$$

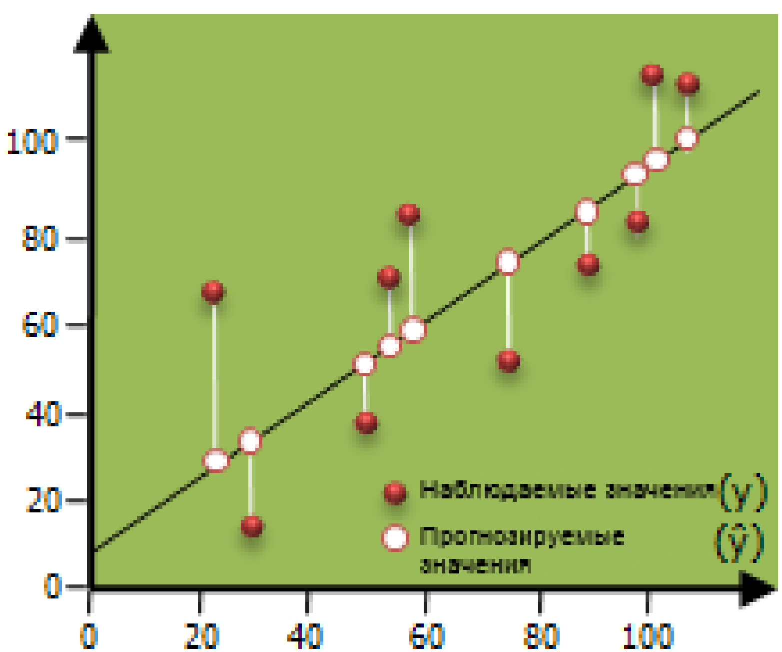
Средний выигрыш = 13 руб.
Самый вероятный выигрыш = 0 руб.
Гистограмма!!

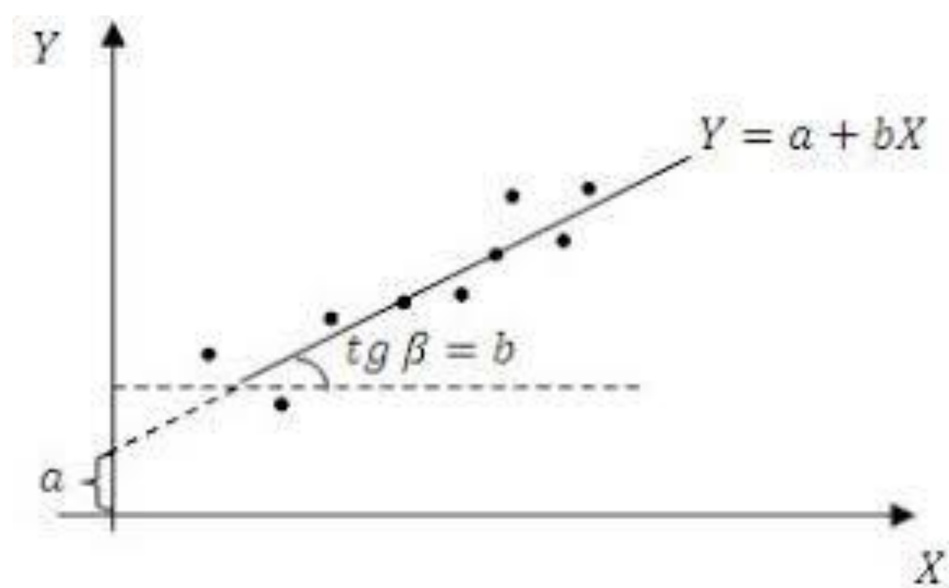
Распределение числа выигрышных билетов

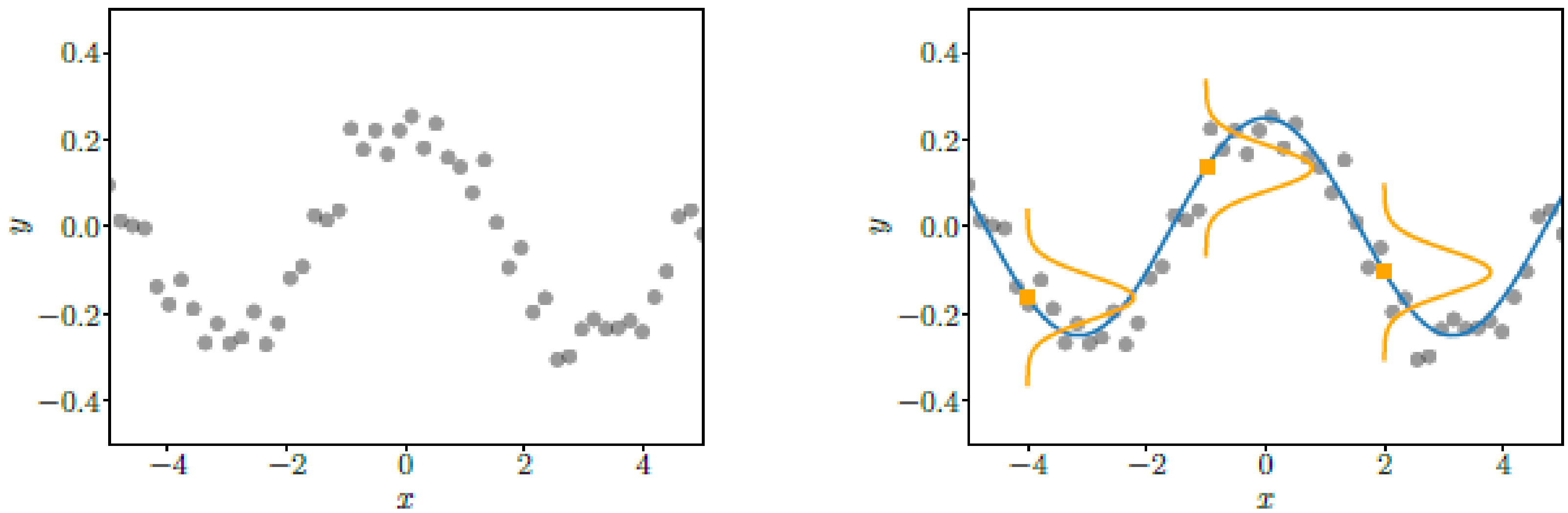


Метод наименьших квадратов (МНК), линейная регрессия

- Жизнь: Y, X (наблюдаемая величина, собрали данные).
- Хотим оценить, как Y зависит от X (например, почасовой доход от числа лет обучения) $Y = a + bX$
- Задача – найти коэффициенты a, b.
- Y в модели и «в жизни» будут различаться.






0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
y
−4
−2
0
2
4
x
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
y
−4
−2
0
2
4
x

Коэффициент детерминации – для оценки качества модели

Для оценки качества подбора регрессионной модели, адекватности ее экспериментальным данным рассчитывается характеристика прогностической силы анализируемой регрессионной модели – коэффициент детерминации (R^2 – статистика).

Коэффициент детерминации характеризует долю дисперсии результативной переменной Y, объясненную регрессией, в общей дисперсии результативной переменной Y, рассчитывается по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} = \frac{S_{\text{факт}}}{S_{\text{общ}}} = \frac{\Sigma(\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2} \qquad (2.20)$$

Соответственно величина $1 - R^2$ характеризует долю дисперсии переменной Y, вызванную влиянием остальных, не учтенных в модели, факторов.

Свойства коэффициента детерминации (R^2 - статистики)

$$0 \le R^2 \le 1 \qquad (2.21)$$

– Если $R^2 = 1$, между Y и X существует функциональная зависимость, эмпирические значения переменных лежат на линии регрессии;

– Если $R^2 = 0$, то вариация зависимой переменной полностью обусловлена воздействием неучтенных в модели переменных, линия регрессии параллельна оси абсцисс.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!