Введение в математический анализ

Математическая логика. Последовательность.

Для чего нужен курс:

› Научится читать научную литературу.

› Овладеть инструментами математического анализа.

› Применять полученные инструменты на практике.

Математическая логика

Пример 1. Предложение «Сдать зачет по математике можно, зная блестяще теорию или решив все примеры» можно представить так $A \vee B$, где A: «Сдать зачет можно, зная блестяще теорию», B: «Сдать зачет можно, решив все примеры»

Математическая логика

Пример 2. Предложение «Если Сувар или Таиф проиграют, а Феникс выиграет тендер, то Альбатрос упрочит свое положение и мы понесем убытки» представляет собой импликацию $A \rightarrow B$, где посылка A составлена из трех элементарных высказываний: P: «Сувар проиграет», Q: «Таиф проиграет», R: «Феникс выиграет», а заключение B есть конъюнкция высказываний: D: «Альбатрос упрочит свое положение» и C: «Мы понесем убытки». С помощью введенных символов первоначальное предложение записывается в виде формулы: $((P \vee Q) \wedge R) \rightarrow (D \wedge C)$.

Математическая логика

Если истинностные значения простых переменных *P, Q, R, D, C* соответственно равны *“И”, “Л”, “Л”, “И”, “Л”*, то истинностное значение сложного высказывания может быть определено механически, используя таблицы истинности логических операций, следующим образом

$$((P \vee Q) \wedge R) \to (D \wedge C)$$

$$((\text{“И”} \vee \text{“Л”}) \wedge \text{“Л”}) \to (\text{“И”} \wedge \text{“Л”})$$

$$(\text{“И”} \wedge \text{“Л”}) \to \text{“Л”}$$

$$\text{“Л”} \to \text{“Л”}$$

$$\text{“И”}$$

Способы работы с выражениями

- С помощью таблицы истинности.
- С помощью основных законов логики высказываний.

Таблица истинности

Пример 3. Доказать, что при любых значениях P и Q справедлива формула: $(P \to Q) \leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$.

P	Q	$P \to Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$
"И"	"И"	"И"	"Л"	"И"	"И"
"И"	"Л"	"Л"	"Л"	"Л"	"И"
"Л"	"И"	"И"	"И"	"И"	"И"
"Л"	"Л"	"И"	"И"	"И"	"И"

Высказывание, истинное при любых значениях входящих в нее простых высказываний, называется ***тавтологией****.*

Основные законы логики высказываний

1. Коммутативность конъюнкции: $A \wedge B = B \wedge A$.

2. Коммутативность дизъюнкции: $A \vee B = B \vee A$.

3. Ассоциативность конъюнкции: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

4. Ассоциативность дизъюнкции: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

5. Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

6. Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Основные законы логики высказываний

7. Закон де Моргана относительно конъюнкции:

$$\overline{(A \wedge B)} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

8. Закон де Моргана относительно дизъюнкции:

$$\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

9. Закон поглощения для дизъюнкции: $A \vee (A \wedge B) = A$.

10. Закон поглощения для конъюнкции: $A \wedge (A \vee B) = A$.

11. Закон идемпотентности для конъюнкции: $A \wedge A = A$.

12. Закон идемпотентности для дизъюнкции: $A \vee A = A$.

Основные законы логики высказываний

13. Закон противоречия: $A \wedge \bar{A} = "Л"$.

14. Закон исключения третьего: $A \vee \bar{A} = “И”$.

15. Закон двойного отрицания: $\overline{(\bar{A})} = A$.

16. $A \wedge “Л” = “Л”, \ \ A \wedge “И” = A$.

17. $A \vee “Л” = \ A, \ A \vee “И” = “И”$.

Основные законы логики высказываний

Пример 4. Упростить высказывание:

$$\overline{(A \vee (A \wedge B))} \vee \big(A \vee (C \wedge \bar{A})\big).$$

$$\overline{(A \vee (A \wedge B))} \vee \big(A \vee (C \wedge \bar{A})\big) =$$
$$= \big(\bar{A} \wedge \overline{(A \wedge B)}\big) \vee \big((A \vee C) \wedge (A \vee \bar{A})\big) =$$
$$= \big(\bar{A} \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})\big) \vee \big((A \vee C) \wedge \text{“}И\text{”}\big) =$$
$$= \bar{A} \vee (A \vee C) =$$
$$= (\bar{A} \vee A) \vee C =$$
$$= \text{“}И\text{”} \vee C =$$
$$= \text{“}И\text{”}$$

Математическая логика

Пример 5. Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения:

Афродита: «Я самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Афродита: «Гера не самая прекрасная».

Афина: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны.

Гипотетические вопросы

Пример 6. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Представьте, что все лжецы острова живут в одном городе, а рыцари – в другом. Как выяснить у аборигена, куда ведет интересующая нас дорога – в город рыцарей или в город лжецов?

Гипотетические вопросы

Пример 6. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Представьте, что все лжецы острова живут в одном городе, а рыцари – в другом. Как выяснить у аборигена, куда ведет интересующая нас дорога – в город рыцарей или в город лжецов?

Если … , то … ?

“++” = “+”

“--”=“+”

Гипотетические вопросы

Пример 6. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Представьте, что все лжецы острова живут в одном городе, а рыцари – в другом. Как выяснить у аборигена, куда ведет интересующая нас дорога – в город рыцарей или в город лжецов?

Если … , то … ?

“++” = “+”

“--”=“+”

Например. Если я спрошу тебя, что “2+2=4?”, то ты ответишь мне “да”?

Законы де Моргана

Каждого человека посещает мысль о том, что либо он должен поместить все деньги в банк, либо приобрести акции нефтяных компаний.

∀ человека посещает мысль ((∀ деньги положить в банк) ∨ (приобрести акции нефтяных компаний))

∃ человек не посещает мысль ((∃ деньги, не положенные в банк) ∧ (не приобретать акции нефтяных компаний))

Есть человек, которого не посещает мысль о том, что найдутся деньги, которые не следует доверять банкам и что нельзя покупать акции нефтяных компаний

Множества

Натуральные числа:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$$

Целые числа:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$$

Рациональные числа:

$$\frac{m}{n}, \text{где } n - \text{натуральное}, m \ - \text{целое}$$

Множества. Рациональные числа

$$\frac{m}{n}, \text{где } n - \text{натуральное}, m\ - \text{целое}$$

$$2 = \frac{2}{1}$$

$$3.5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$-2.8 = \frac{-28}{10} = \frac{-14}{5}$$

$$0.3333333\ldots = 0.(3) =?$$

Множества. Рациональные числа

$$\mathrm{a} = 0.(3)$$

$$10\mathrm{a} = 3.(3)$$

$$10\mathrm{a} = 3 + 0.(3)$$

$$10\mathrm{a} = 3 + a$$

$$9\mathrm{a} = 3$$

$$\mathrm{a} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 0.(3) = \frac{1}{3}$$

Множества. Рациональные числа

$$\mathrm{a} = 0.(18)$$

$$100\mathrm{a} = 18.(18)$$

$$100\mathrm{a} = 18 + 0.(18)$$

$$100\mathrm{a} = 18 + a$$

$$99\mathrm{a} = 18$$

$$\mathrm{a} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11} \quad \Rightarrow \quad 0.(18) = \frac{2}{11}$$

Множества. Рациональные числа

$$a = 1.32(18)$$

$$100a = 132.(18)$$

$$100a = 132 + 0.(18)$$

$$100a = 132 + \frac{2}{11}$$

$$a = \frac{1454}{1100} = \frac{727}{550} \Rightarrow \quad 1.32(18) = \frac{727}{550}$$

Множества. Рациональные числа

$$a = 0.(9)$$

Множества. Рациональные числа

$$a = 0.(9)$$

$$10a = 9.(9)$$

$$10a = 9 + 0.(9)$$

$$10a = 9 + a$$

$$9a = 9$$

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.(9) \stackrel{?}{=} 1$$

Последовательности.

$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \ldots$

$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad \ldots$

$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad \ldots$

Последовательности.

$1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad (-1)^{n-1}$

$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad (2n-1)$

$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad n^2$

Предел последовательности.

Обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Пример 9:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Предел последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Определение:

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon)$ верно $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon.$$

Критерий Коши:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall\ n > N(\varepsilon), k > 0: |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Критерий Коши.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon), k > 0$ верно $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{2^n}$$

Критерий Коши.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что, для любого $n > N(\varepsilon), k > 0$ верно $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{2^n}$$

$$|a_n - a_{n+k}| = \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+k}}\right| = \frac{1}{2^n}\left|1 - \frac{1}{2^k}\right| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} = \varepsilon \;\Rightarrow\; 2^{N(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N(\varepsilon) = -\log_2 \varepsilon}$$

Критерий Коши.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{2^n}$$

$$N(\varepsilon) = -\log_2 \varepsilon$$

$$N(10^{-3}) = -\log_2(10^{-3}) \approx 9.97$$

$$\mathrm{a}_{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.0009765625 < 10^{-3}$$

Замечания

Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N(\varepsilon), k > 0: |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

Отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists n, k > 0: |a_n - a_{n+k}| \geq \varepsilon$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-9}{3n^2+n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-9}{3n^2+n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2n)^2}{(2-n)(5n-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(1000000n)}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-9}{3n^2+n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2n)^2}{(2-n)(5n-1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{(-2)^2}{-1\cdot 5}=-\frac{4}{5}$$

Предел последовательности. Степени

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

Предел последовательности. Показатели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{3^n\left(-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3\right)} = \frac{1}{3}$$

Небольшие замечания

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \;\; (a > 1)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0 \;\; (|q| < 1)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \;\; (a > 1)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0 \;\; (a > 1)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Теорема о двух милиционерах

Дано: $\{a_n\}$, $\{b_n\}, \{c_n\}$, причем:

$$\text{существует } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\text{существует } \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$
$$a_n \le b_n \le c_n,$$

$$\text{тогда существует } \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

Теорема о двух милиционерах

Пример 10. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

Теорема о двух милиционерах

Пример 10. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n}\le 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\underset{n\to\infty}{=}0$$

Второй замечательный предел

Пример 11. Доказать ограниченность сверху и снизу $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n \cdot n} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot n \cdot n} + \cdots \underset{n\to\infty}{=} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \leq$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 + 1 = 3$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1)^\infty = e$$

$$2 \le e \le 3$$

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$