TEMA

METODE NUMERICE

Metoda lui Laguerre

Cosmin Sturzu

22.12.2020

Metoda lui Laguerre

În analiza numarică, “Metoda lui Laguerre” este un algoritm de aflare a radacinilor unui polinom, adica putem rezolva ecuatia $P(x) = 0$ pentru un polinom dat, $P(x)$. Una dintre cele mai utile proprietati ale acestei metode este ca e foarte aproape de a fi o metode “sigura”, ceea ce inseamna ca este aproape garantat sa convearga intotdeauna la o anumita radacina a polinomului, indifferent de presupunerea initiala aleasa. Cu toate acestea, pentru calculul computerizat, sunt cunoscute metode mai eficiente, cu care se garantează găsirea tuturor rădăcinilor sau a tuturor rădăcinilor reale.

Metoda lui Laguerre este de departe cea mai directa dintre aceste metode generale, complexe. Necesită aritmetică complexă, chiar și în timp ce converge la rădăcini reale; cu toate acestea, pentru polinoame cu toate rădăcinile reale, este garantat să convergă la o rădăcină din orice punct de plecare. Pentru polinoamele cu unele rădăcini complexe, puțin este demonstrat teoretic despre convergența metodei. Experienta empirica sugerează că neconvergența este extrem de neobișnuită și, în continuare, poate aproape fi aproape întotdeauna fixata printr-o schemă simplă pentru a întrerupe un ciclu de limită neconvergent. Un exemplu de polinom care necesită acest lucru schema de întrerupere a ciclului este una de grad înalt (> =20), cu toate rădăcinile sale chiar în afara cercul unitar complex, aproximativ la fel de distanțat în jurul său. Când metoda converge pe un zero complex simplu, se știe că convergența sa este de ordinul trei.

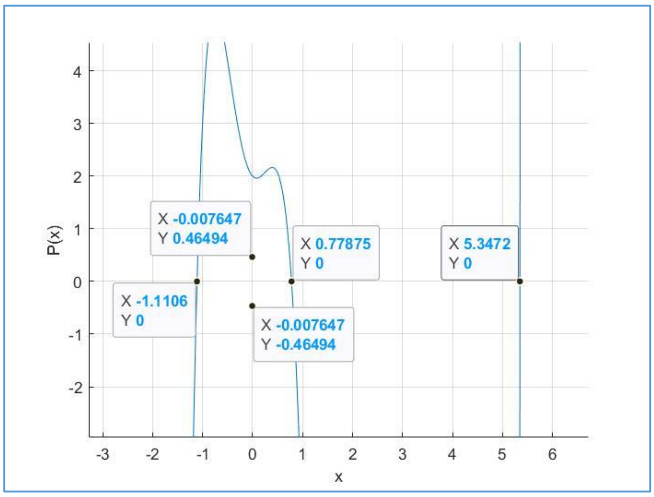
Algoritm

- Alege o valoare initiala x_0
- Pentru k = 0,1,2…
    - Daca $P(x_k)$ este foarte mic iesi din bucla
    - Calculeaza $G = \frac{P\prime(x_k)}{P(x_k)}$
    - Calculeaza $H = G^2 - \frac{P\prime\prime(x_k)}{P(x_k)}$
    - Calculeaza $a = \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}}$, unde semnul se alege astfel incat valoare numitorul in modul sa fie cat mai mare.
    - $x_{k+1} = x_k$
- Repeta pana cand a este indeajuns de mic sau pana cand s-a atins numarul maxim de iteratii

Daca s-a gasit o radacina, polinomul initial se imparte la polinomul $(x - radacina)$. Astfel se reduce gradul polinomului cu 1 si eventual se vor gasi aproximari pentru toate radacinile polinomului.

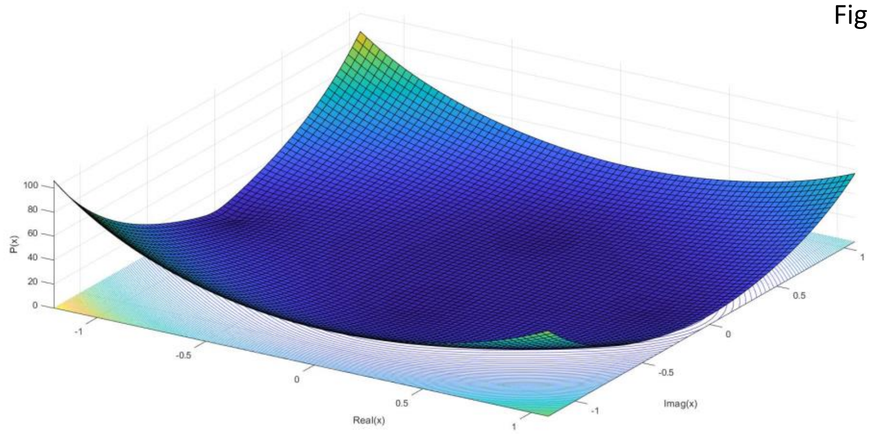
Exemplu numeric 1

```
Command Window
>> test_ex_numeric_1

P =

2*X^5 - 10*X^4 - 5*X^3 + 7*X^2 - X + 2

Radacinile polinomului calculate cu functia "roots()" pentru verificare solutie

r =

   5.3472 + 0.0000i
  -1.1106 + 0.0000i
   0.7788 + 0.0000i
  -0.0076 + 0.4649i
  -0.0076 - 0.4649i

Afisare din functie:
Radacina: x = 0.778751942536738+0.000000000000000i ---> P(x) = 2.22045e-16+0i
Radacina: x = -0.007646994846276+0.464937580371424i ---> P(x) = 2.22045e-16+2.63678e-16i
Radacina: x = -0.007646994846276-0.464937580371424i ---> P(x) = 1.55431e-15+4.71845e-16i
Radacina: x = -1.110631120151334-0.000000000000000i ---> P(x) = 9.54792e-15-5.82243e-15i
Radacina: x = 5.347173167307147+0.000000000000000i ---> P(x) = -1.49214e-12+9.46265e-14i

Afisare vector returnat de functie cu radacinile polinomului

rez =

   5.3472 + 0.0000i  -1.1106 - 0.0000i  -0.0076 - 0.4649i  -0.0076 + 0.4649i   0.7788 + 0.0000i
```



In Fig.1 observam radacinile reale la intersectia polinomului P(x) cu axa reala Ox.
Pentru a putea vizualiza radacinile complexe trebuie sa reprezentam si axa imaginara, astfel putem observa punctele in care polinomul este tangent la planul determinat de axa reala si cea imaginara. Fig.2.
2 reale: -1.1106, 0.7788
2 complexe: -0.0076 + 0.4649i, -0.0076 - 0.4649i

Fig.2



Observam punctele in care polinomul este tangent la planul determinat de axa reala si cea imaginara in Fig.3

Fig.3

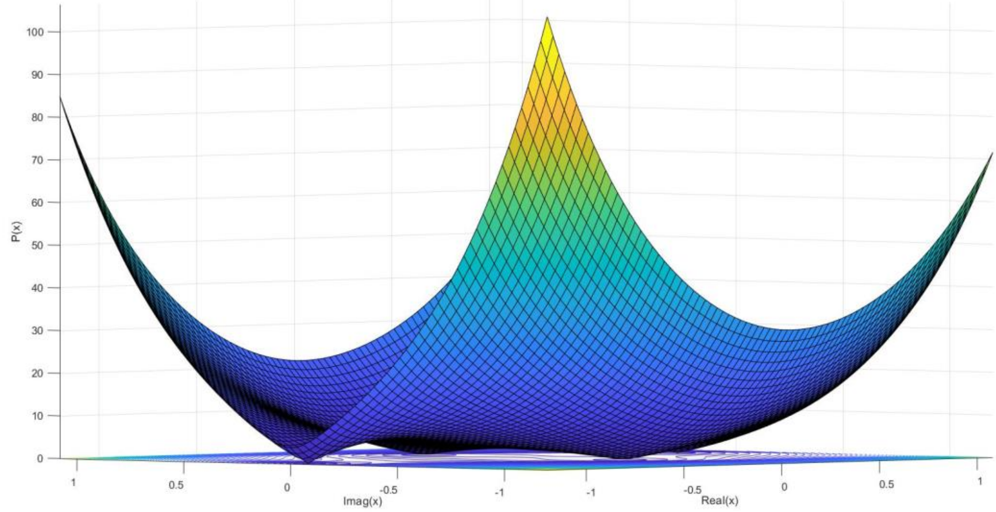


Fig.4

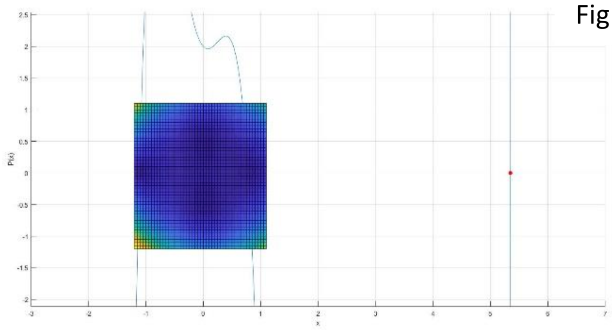
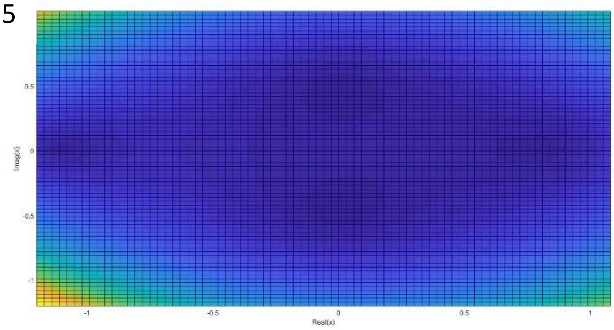
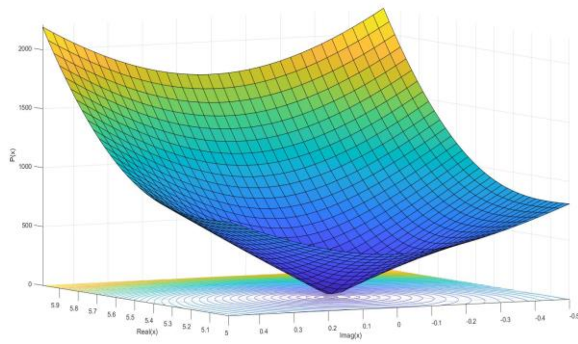


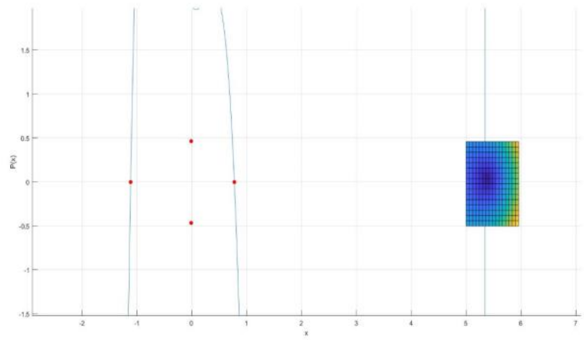
Fig.5



Zonele mai inchise de pe graficele din Fig4 si Fig5 sunt zonele in care polinomul converge catre radacini, acesta fiind tangent la planul dat de axa reala si cea imaginara.

Mai sus putem vedea 4 dintre cele 5 radacini. Graficele pentru ultima radacina “5.3472 + 0.0000i” sunt urmatoarele:





Exemplu numeric 2

```
Command Window

P =

- X^6 + X^5 + 2*X^4 - 2*X^3 + X^2 + 2*X - 1

Radacinile polinomului calculate cu functia "roots()" pentru verificare solutie

r =

   1.8019 + 0.0000i
  -1.2470 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
   0.5000 + 0.8660i
   0.5000 - 0.8660i
   0.4450 + 0.0000i

Afisare din functie:
Radacina: x = 0.445041867912629+0.000000000000000i ---> P(x) = -1.11022e-16+0i
Radacina: x = 0.500000000000000+0.866025403784439i ---> P(x) = 0+0i
Radacina: x = -1.000000000000000-0.000000000000000i ---> P(x) = -5.55112e-16+5.228e-16i
Radacina: x = -1.246979603717467+0.000000000000000i ---> P(x) = -1.11022e-16+7.65255e-16i
Radacina: x = 0.500000000000000-0.866025403784438i ---> P(x) = -7.77156e-16-2.22045e-15i
Radacina: x = 1.801937735804838-0.000000000000000i ---> P(x) = -1.11022e-16+9.43992e-15i

Afisare vector returnat de functie cu radacinile polinomului

rez =

   1.8019 - 0.0000i   0.5000 - 0.8660i  -1.2470 + 0.0000i  -1.0000 - 0.0000i   0.5000 + 0.8660i   0.4450 + 0.0000i
```

In Fig.1 observam radacinile reale la intersectia polinomului P(x) cu axa reala Ox.

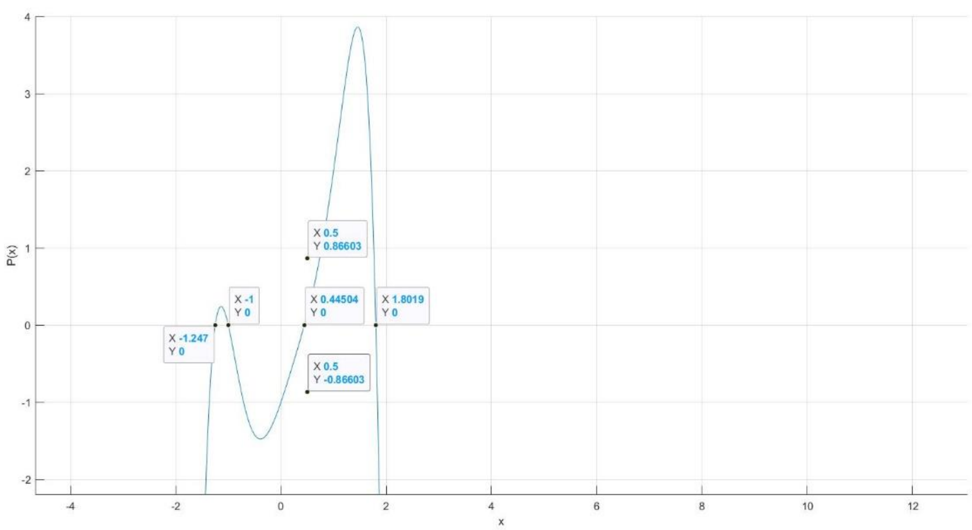


Fig.1

Pentru a putea vizualiza radacinile complexe trbuie sa reprezentam si axa imaginara, astfel putem observa punctele in care polinomul este tangent la planul determinat de axa reala si cea imaginara. Fig.2 (In **Fig**.2 si Fig3 se vad 3 radacini din cele 6, si anume: 0.5000 + 0.8660i, 0.5000 - 0.8660i, 0.4450 + 0.0000i)

Fig.2

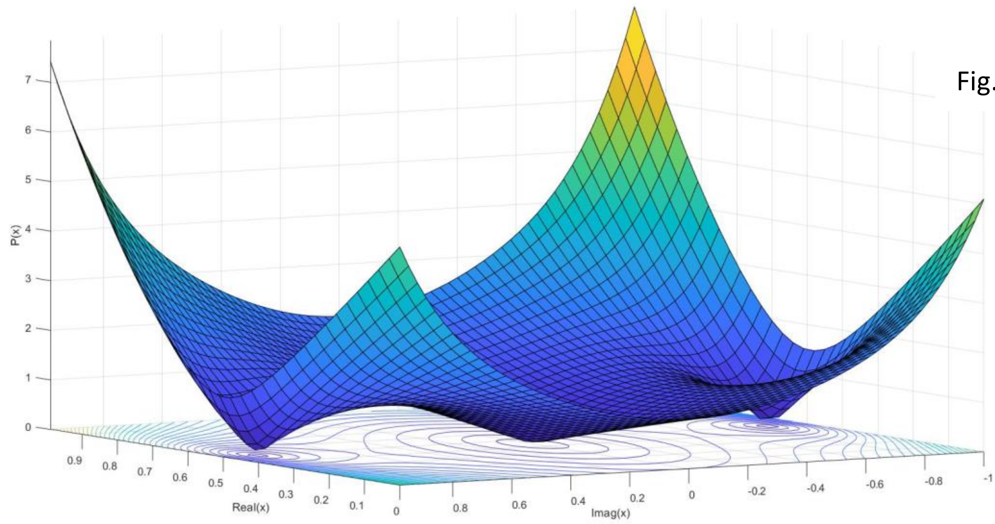
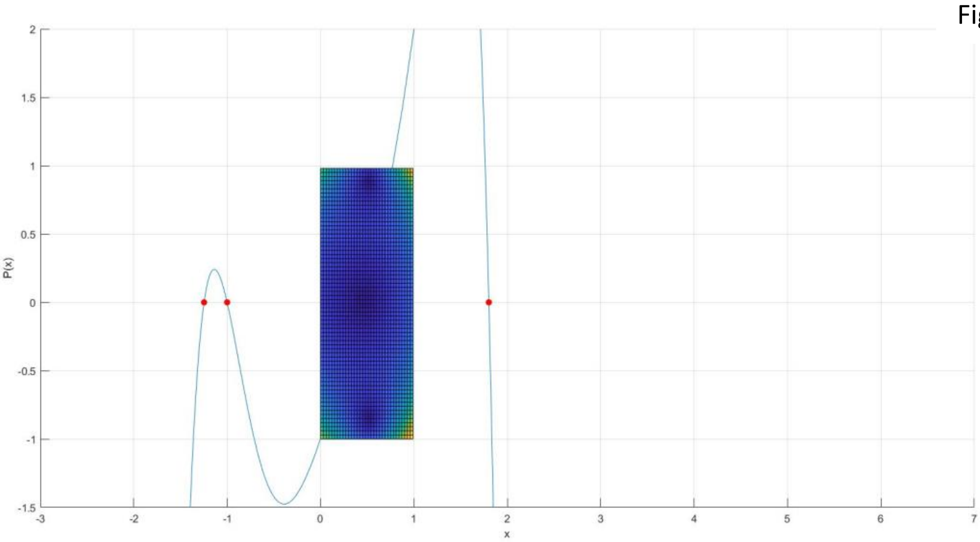


Fig.3



In Fig.4 si Fig.5 se observa alte 2 radacini ale polinomului: -1.2470 + 0.0000i, -1.0000 + 0.0000i

Fig.4

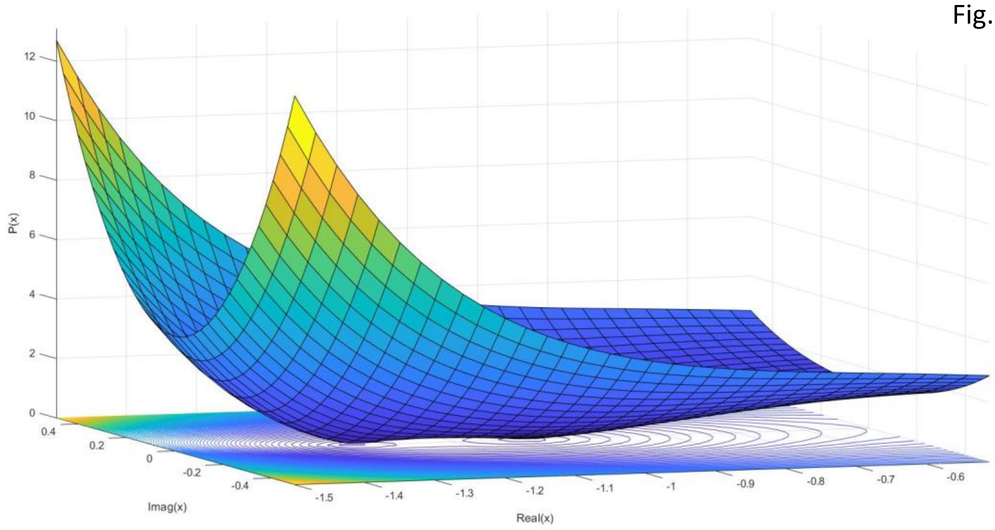
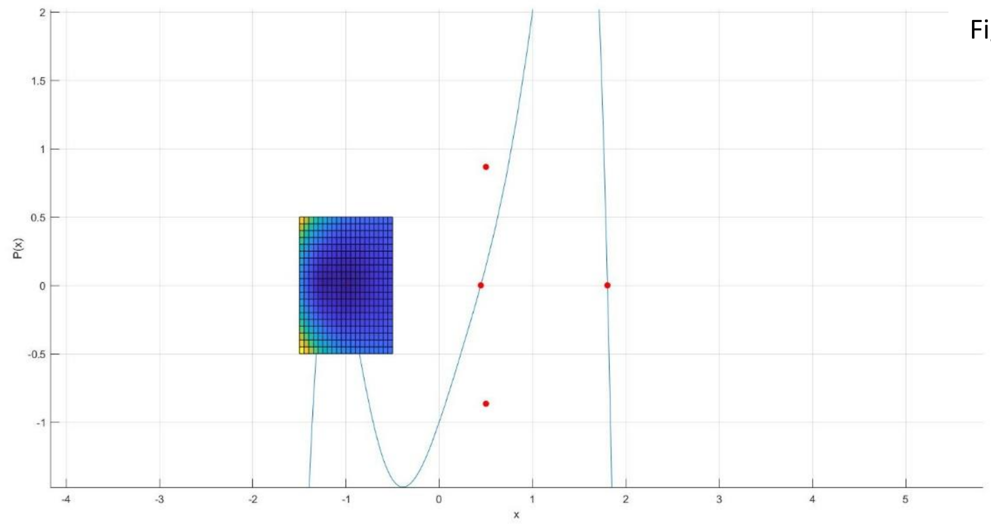


Fig.5



In Fig.6 si Fig.7 se observa ultima radacina a polinomului: 1.8019 + 0.0000i

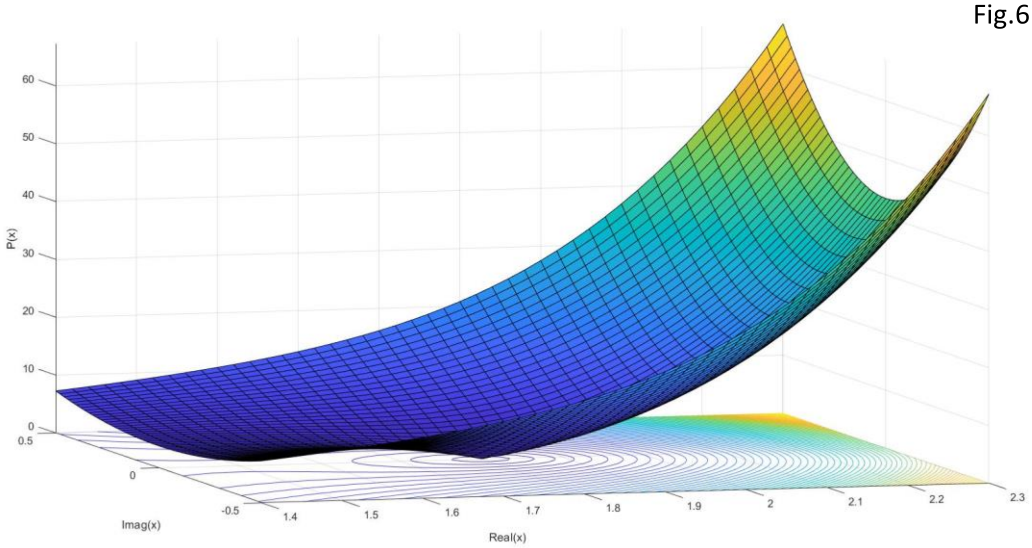


Fig.6

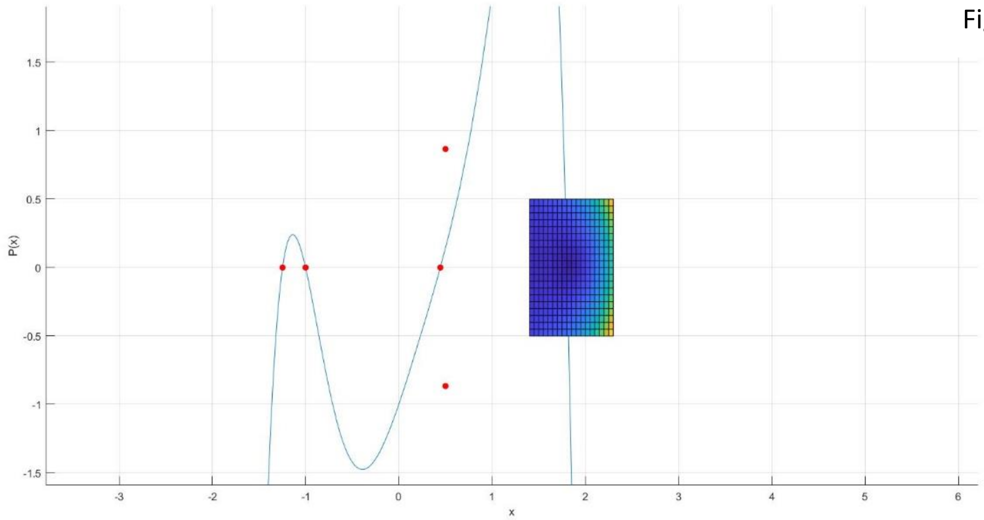


Fig.7