Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert

Grenzwert einer Funktion f für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} x^n$$

 # 2 *Antwort*

Nähern wir uns "von Links" (also mit größer werdenden Werten für x) der untersuchten Stelle x_0 an, so ermitteln wir den "linksseitigen Grenzwert" $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$

Nähern wir uns "von Rechts" (also mit kleiner werdenden Werten für x) der untersuchten Stelle x_0 an, so ermitteln wir den "rechtsseitigen Grenzwert" $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$

Wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, spricht man von dem Grenzwert von f in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$$

 # 1 *Antwort*

Wenn sich für $x \to x_0$ die zugehörigen Funktionswerte einem Konstanten Wert $g(\in \mathbb{R})$ immer mehr nähern, egal, auf welche Weise x gegen x_0 strebt, so sagt man,

g ist der Grenzwert von $f(x)$
bei der Annäherung von x gegen x_0;
oder

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

"Limes von $f(x)$ für x gegen x_0 gleich g"

oder "$f(x)$ *konvergiert* für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert $g(\in \mathbb{R})$"

Wenn f für $x \to x_0$ *nicht konvergiert*, so sagt man:
"f ist für $x \to x_0$ *divergent.*"

 # 4 *Antwort*

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$$

symbolische Kurzform: "∞^n" $= \infty$

 # 3 *Antwort*

Wenn für unbeschränkt wachsendes (oder analog: unbeschränkt fallendes) Argument x ($x \to \infty$ die entsprechenden Funktionswerte $f(x)$ dem Zahlenwert $g(\in \mathbb{R})$ schließlich beliebig nahe kommen, so heißt die Funktion f für $x \to \infty$ konvergent gegen den Grenzwert g.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$$

"Limes von $f(x)$ für x gegen Unendlich gleich g"

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g$$

"Limes von $f(x)$ für x gegen Minus Unendlich gleich g"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\lim_{x\to 0} x^n$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n}$$

6 *Antwort*

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

symbolische Kurzform: $"0^n" = 0$

5 *Antwort*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

symbolische Kurzform: $"\frac{1}{\infty}" = 0$

8 *Antwort*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{falls n gerade} \\ -\infty, & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

symbolische Kurzform: $"\frac{1}{0^-}" = \begin{cases} +\infty, & \text{falls n gerade} \\ -\infty, & \text{falls n ungerade} \end{cases}$

$n \in N$

7 *Antwort*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$$

symbolische Kurzform: $"\frac{1}{0^+}" = \infty$

für $n > 0$;

$$\lim_{x \to \infty} e^x$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x}$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}$$

10 *Antwort*

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0^{+}$$

symbolische Kurzform: ”$e^{-\infty}$” $= 0^{+}$

9 *Antwort*

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$$

symbolische Kurzform: ”e^{∞}” $= \infty$

12 *Antwort*

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0^{+}$$

symbolische Kurzform: ”$e^{-\infty}$” $= 0^{+}$

11 *Antwort*

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$$

symbolische Kurzform: ”e^{∞}” $= \infty$

$$\lim_{x\to 0} e^x$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-x}$$

$$\lim_{x\to \infty} a^x$$

$$\lim_{x\to \infty} a^{-x}$$

14 *Antwort*

$$\lim_{x \to 0} e^{-x} = 1$$

symbolische Kurzform: ”e^0” $= 1$

(Spezialfall von a^{-x})

13 *Antwort*

$$\lim_{x \to 0} e^{x} = 1$$

symbolische Kurzform: ”e^0” $= 1$

(Spezialfall von a^{x})

16 *Antwort*

$$\lim_{x \to \infty} a^{-x} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } a > 1 \end{cases}$$

symbolische Kurzform: ”a^{∞}” $= \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } a > 1 \end{cases}$

15 *Antwort*

$$\lim_{x \to \infty} a^{x} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ \infty & \text{für } a > 1 \end{cases}$$

symbolische Kurzform: ”a^{∞}” $= \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ \infty & \text{für } a > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)$$

$$\lim_{x\to 1}(\ln x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)$$

$$\lim c$$

18 *Antwort*

$$\lim_{x\to 1}(\ln x) = 0$$

symbolische Kurzform: $"\ln 1" = 0$

17 *Antwort*

$$\lim_{x\to \infty}(\ln x) = \infty$$

symbolische Kurzform: $"\ln \infty" = \infty$

20 *Antwort*

$$\lim c = \lim c = c$$

19 *Antwort*

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$$

symbolische Kurzform: $"\ln 0^+" = -\infty$

$$\lim(f \pm h)$$

$$\lim(f \cdot h)$$

$$\lim \frac{f}{h}$$

$$\lim f^n$$

$$\lim(f \cdot h) = \lim f \cdot \lim h$$

$= g_1 \cdot g_2$

$$\lim(f \pm h) = \lim f \pm \lim h$$

$= g_1 \pm g_2$

$$\lim f^n = (\lim f)^n$$

$= {g_1}^n \ (n \in N);$

$$\lim \frac{f}{h} = \frac{\lim f}{\lim h}$$

$= \frac{g_1}{g_2}$, sofern $h, g_2 \neq 0;$

$$\lim \sqrt[n]{f}$$

$$\lim e^f$$

$$\lim (\ln f)$$

Was versteht man unter
"Stetigkeit einer Funktion" ?

26 *Antwort*

$$\lim e^f = e^{\lim f}$$

$$= e^{g_1}$$

25 *Antwort*

$$\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\lim f}$$

$$= \sqrt[n]{g_1} \;(n \in N; f, g_1 \geq 0);$$

28 *Antwort*

Eine Funktion ist (an einer Stelle x_0 oder in einem Intervall) stetig wenn folgende Voraussetzungen gegeben sind:

1. f muss in x_0 definiert sein, das haißt $f(x)$ muss existieren
2. f muss für $x \to x_0$ einen (endlichen) Grenzwert
   (und somit übereinstimmende rechts- und linksseitige Grenzwerte) besitzen.
   $$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ &= \lim_{x \to x_0^-} f(x) \\ &= g \qquad\qquad (\in R) \end{aligned}$$
3. der Grenzwert g von f für $x \to x_0$ muss nicht nur vorhanden sein, sondern er muss auch exakt mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmen
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

27 *Antwort*

$$\lim (\ln f) = \ln (\lim f)$$

$$= \ln g_1, \text{ sofern } f, g_1 \geq 0.$$

Arten der Unstetigkeit

Wann besitzt eine Funktion
einen (endlichen) Sprung?

Wann besitzt eine Funktion
einen Pol?

Wann besitzt eine Funktion
eine behebbare Unstetigkeitsstelle?

30 *Antwort*

Die Funktion f besitzt an der derelle x_0
einen (endlichen) Sprung, wenn gilt:

$$g_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = g_2$$

z.B: Sprungfixe Kosten, Portofunktion

29 *Antwort*

Es gibt folgende klassische Unstetigkeiten:

1. **Sprung**
   z.B. bei Abschnittsweise definierten Funktionen.
   Stichwort "Sprungfixe Kosten"
2. **Pol**
   z.B.
   $$f(x) = \frac{1}{x}$$
3. **Lücke**
   z.B. an Stellen x_0 bei denen der Nenner 0 wird.
   Kann evt. geschlossen werden, in dem per Definition
   $$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$
   gesetzt wird.

32 *Antwort*

f hat an der Stelle x_0 eine behebbare Unstetigkeitsstelle, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \quad (\in \mathbb{R})$$

aber $g \neq f(x_0)$ bzw. $x_0 \notin D_f$

31 *Antwort*

Einer oder beide einseitigen Grenzwerte existiert nicht,
das heißt f strebt für $x \to x_0$ gegen $\pm\infty$.
Dann sagt man:

f hat an der Stelle x_0 eine Unendlichkeitsstelle oder einen Pol,
wenn f für $x \to x_0^+$ und/oder $x \to x_0^-$
den uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$ besitzt.

z.B. Stückkosten bei Kostenfunktionen mit Grundgebühr (Stromkostenbeispiel)

Frage

Frage

Frage

Antwort

Antwort

Antwort