随机过程第四章课后题答案

4.1 解：令表示时间周期n时的随机需求，则是独立的随机变量且与相互独立，

依赖于，故为Markov链。

假定

4.2 证明：

4.3 解：若状态i可达状态j，则存在一条路径。

若路径中有重复状态，则存在更短路径从i可达j。如，则存在路径。

因此存在一条从i可达j的路径，且路径中无任何重复状态。由于状态数为n，状态j在n步或者更少步数内可达。

4.4 证明：令Y表示0时刻从状态i首次经过状态j的时刻

4.5解：

（a）0时刻从状态i开始，n时刻在状态j，并且不经过状态k的概率。

（b）令Y为最后一次离开i的时刻

4.6 解：设质点在平面的整数格点上做随机游动，每次以1/4的概率向邻近的4个状态转移。容易得出平面上的对称随机徘徊是周期为2的马氏链，各状态互通，仅考虑状态0.

因此，状态0是常返态，对称随机徘徊在二维是常返的。

设质点在三维空间中的整数格点上做随机游动，每次以1/6的概率向邻近的6个状态转移。容易得出三维空间中的对称随机徘徊是周期为2的马氏链，各状态互通，仅考虑状态0。

因此，状态0是非常返态，对称随机徘徊在三维空间中是非常返的。

4.7 解：（a）

（b）注意到2n步返回的期望次数等价于由1到n的2k步返回的概率和，所以

（c）如果，有

由Stirling近似

因此

4.8 解：（a）

（b）不是Markov链，是Markov链

（c）若，则第n+1个记录值在时刻j产生，下一个记录值在时刻k产生，k>j的概率为

故是一条Markov链

4.9 证明：

4.10 解：（a）

（b）不是

（c）不是

（d）是，转移概率为

4.11 解：（a）

（b）由于，由（a）即得

4.12 解：该双随机链所有状态都是遍历态，则它是不可约非周期正常返的马氏链，存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布。设平稳分布为。

，可得

，

又因为，可得。则极限分布为：

4.13 证明：假设而i是正常返的，令m使，以记这个链第k次处在i的时刻，且令

由强大数定律

因此

其中是两次访问i之间的时间，因此j也是正常返的。若i是零常返的，则因为，而常返是类的性质，j也是常返的。若假设j是常返的，则由上面的论证i将是正常返的，这个矛盾导致j也是零常返的。

4.14 解：假设状态i是零常返的且以C记i所在的互通类，则C中的一切状态都是零常返的蕴含对一切C中j有，但是这与和C是有限集有矛盾，由于相同的原因，在一个有限状态链中，不能一切状态都是暂态的。

4.15 解：

4.16 解：（a）取在她当前所在地点的雨伞数为状态，转移概率是

（b）极限概率方程是

易验证他们满足

其中

（c）

4.17 解：令，则

4.18 解：(a)设 为1天内到达j个工作的概率。则：

(b) 该马氏链所有状态互通，且每个状态都是非周期的。由于不可约有限马氏链只有正常返态，该马氏链是遍历链。

(c) 平稳分布满足，即：

4.19 解：（a）从状态i到状态j

（b）从A中一个状态到中一个状态

（c）由于任意两个从A中一个状态到中一个状态的转移中，必定会有一个从中一个状态转移到A中一个状态的转移，反之亦然。

（d）由（c）知从A中一个状态到中一个状态的极限转移概率等价于从中一个状态转移到A中一个状态的极限转移概率，即证。

4.20 解：若从状态i出发的第n次转移是进入状态j，则令等于1，否则令它为0。再者，以记这个链在回到0以前处在状态i的时间单位数，则对j>0有

但是由Wald方程

对于第二个证明，注意将访问状态0看做循环，由此推出处在状态j的时间的长程比例满足

因此我们由平稳方程得到，对j>0有

4.21 解：设，由题目，该马氏链的转移矩阵如下：

该马氏链所有状态为正常返态等价于存在平稳分布满足，且即

存在解满足，且。上式等价于：

可得：

，且,则使马氏链正常返的充要条件是：

且极限分布为:

4.23 证明：根据例子4.4(a)，

如果p≠1/2，所求概率 =

如果p=1/2，所求概率 =

4.30 解：。只考虑时的，可将看作以概率p向正向走，q=1-p向负向走的简单随机徘徊。

N是停时，由Wald方程可得：

4.31 解：令状态0为蜘蛛和苍蝇在同一个位置，状态1为蜘蛛在位置1而苍蝇在位置2，状态2为蜘蛛在位置2而苍蝇在位置1.



（a）



（b）因为N服从参数几何分布，所以

4.32 证明：(1)吸收的概率为1，令是当马尔可夫链从状态n开始时的吸收的概率,，，对于

所以

由于，所以

所以

由递推，

令 和

由于 ,

得到

所以 ,

(2)令 是当马尔可夫链从状态n开始时的吸收的步数，.

显然 对于

因为

由递推，

令

令

因为

所以

,

因为 满足上面的递推公式（对），所以

4.33 解：(a)，则0是常返态；若，则,其他有限状态都是瞬时态。任意瞬时态只能有限次地被访问，因此或区域0，或区域无穷大。

(b)

4.34 解：(a)如果，注定灭绝。考虑，令是后代数量分布，

灭绝概率

令

令

令;令

灭绝概率=

(b)令是第1代的后代的数量，令是第2代的后代的数量.

(c)对于灭绝概率是

4.35 解：

(a)

所以

令

当时，单调递增；当时，单调递减，

所以 至多有两个解，一个大于1，一个小于1。显然一个解是，所以另一个解是.

由于所以小于1的解是，即

4.39 解：设

4.41 解：(a) 显然

(b)由于，所以当时，不是time reversible，当时，是time reversible。

4.42 解：显然vertice数量.因为，所以此马尔可夫链是不可约的。所以它符合命题4.7.1的条件，所以它time reversible。

因为，所以

令则以此类推，

所以

,

4.44 解：由于原马尔可夫链time reversible，所以由于 所以

题目里假设所以

下面证明是平稳分布。显然，还要证明，即

由于是原马尔可夫链的平稳分布，所以，第k列满足 即.