

合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

本页答题无效

2021~2022 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式:闭卷

专业班级 (教学班) 考试日期 2022.1.20 命题教师 集体 系 (所或教研室) 主任审批签名

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) = P(B) = 0.4, P(A|\bar{B}) = 0.5$, 则 $P(B-A) + P(A-B) =$ _____.
2. 设随机变量 $X \sim B(1, 0.5)$, $Y \sim E(1)$, 且 X, Y 相互独立, $Z = X + Y$, 则 $P\{Z > 0\} =$ _____.
3. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布, $P\{X = k\} = \frac{k+1}{3}, k = 0, 1$, 则 $P\{X = Y\} =$ _____.
4. 设随机变量 $X \sim N(1, 4)$, 则 $E[(X+3)^2] =$ _____.
5. 设随机变量 $X \sim P(5)$, 由切比雪夫不等式得 $P\{1 < X < 9\} \geq$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 (X_1, X_2, X_3) 是取自总体 $X \sim E(\frac{1}{\theta})$ 的简单随机样本, 以下 θ 的点估计中, 方差最小的的无偏估计是 ().
 (A) $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3$ (B) $\frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3$
 (C) $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$ (D) $\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$
2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X = i\} = \frac{k}{2^i}, i = 1, 2, \dots$, 则 X 取奇数的概率为 ().
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$
3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 下列结论错误的是 ().
 (A) 若 $X \sim B(1, p), Y \sim B(1, q)$, 则 $X + Y \sim B(1, p + q)$
 (B) 若 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$, 则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$
 (C) 若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
 (D) 若 $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, 则 $X + Y \sim \chi^2(m + n)$
4. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 如果 μ 已知, 则 σ^2 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 ().
 (A) $(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})$ (B) $(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)})$
 (C) $(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})$ (D) $(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)})$
5. 在假设检验中, 下列说法正确的是 ().
 (A) 一定会犯第一类错误 (B) 一定会犯第二类错误
 (C) 可能同时犯两类错误 (D) 不可能同时犯两类错误

三、(本题满分 10 分) 设有两个盒子内装有同型号的电子元件. 已知甲盒中有 5 个正品和 3 个次品; 乙盒中有 4 个正品和 3 个次品. 现从甲盒中任取 3 个元件放入乙盒中, 然后再从乙盒中任取一个元件. (1) 求从乙盒中所取出的一个元件是正品的概率; (2) 已知从乙盒中所取出的元件是正品, 求最先从甲盒中取出的 3 个元件都是正品的概率.

四、(本题满分 12 分) 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, 且 $P\{|X| = 1\} = P\{X = 0\}$.

(1) 求常数 a, b 的值; (2) 记 $Y = |X| + X$, 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

五、(本题满分 14 分) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 $X \sim U[0, 1]$, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq 2Y, \\ 0, & X > 2Y, \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1, & 2X \leq Y, \\ 0, & 2X > Y, \end{cases}$$

(1) 求 (U, V) 的分布律; (2) 求 U 和 V 的相关系数 ρ_{UV} ; (3) 求 $P\{U + V \leq \frac{3}{2} | U = 1\}$.

六、(本题满分 14 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3(x+y), & x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 分别求关于 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$; (2) 求 $P\{2X + Y \geq 1\}$;
 (3) 用分布函数法求 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

七、(本题满分 14 分) 设总体 X 的密度函数为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2\theta^2}{x^3}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零, (X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$; (2) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

八、(本题满分 6 分) 设 $(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1})$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 试求常数 c , 使得 $c \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}$ 服从 t 分布, 并指出分布的自由度.