

## Εργασία στο μάθημα της «Επιχειρησιακής Έρευνας»

### Οδηγίες

1. Οι χειρόγραφες λύσεις σας να αποσταλούν σκαναρισμένες σε ένα αρχείο pdf. Θα χρειαστεί μαζί με το αρχείο pdf να μου αποστείλετε και ένα αρχείο excel όπου θα περιέχει τις λύσεις των ερωτημάτων που έχουν γίνει με το πακέτο “Solver” όπου κάθε διαφορετικό φύλλο του excel θα πρέπει να έχει ως όνομα, τον αριθμό της άσκησης και του ερωτήματος στο οποίο αντιστοιχεί. Προτιμήστε να είναι όλα αυτά σε ένα αρχείο zip.

**Μην ξεχάσετε να αναγράψετε το όνομα σας και τον αριθμό μητρώου σας.**

2. Η εργασία έχει χρονική διάρκεια 3 εβδομάδων, συγκεκριμένα από τη Δευτέρα 18/11 μέχρι και τη Δευτέρα 9/12 23:59 το βράδυ. Εργασίες που αποστέλλονται μετά την αναγραφόμενη ώρα και ημερομηνία δεν θα γίνονται δεκτές.

3. Το email στο οποίο θα στείλετε την εργασία είναι: [apasiouras@mail.ntua.gr](mailto:apasiouras@mail.ntua.gr)

Επιπλέον, οποιαδήποτε απορία ή πρόβλημα σας παρουσιαστεί σχετικά με την εργασία, επικοινωνήστε μαζί μου μέσω του παραπάνω email.

## Άσκηση 1

Μια εταιρεία κατασκευάζει τρία προϊόντα A,B και C. Προκειμένου να παραχθούν αυτά τα προϊόντα, η εταιρεία χρησιμοποιεί εργατικό δυναμικό, μηχανήματα αλλά και πρώτες ύλες.

Το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου A είναι 20€, από το προϊόν B είναι 15€ και από το προϊόν C είναι 10€.

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τους πόρους που απαιτούνται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντα για κάθε ένα από τα προϊόντα A,B,C.

Προϊόν	Εργατικό Δυναμικό	Μηχανήματα	Πρώτες ύλες
A	2 ώρες	1 ώρα	3 μονάδες
B	1 ώρα	2 ώρες	2 μονάδες
C	2 ώρες	2 ώρες	1 μονάδα

Η εταιρεία μπορεί ημερησίως να διαθέσει μέχρι 100 ώρες απασχόλησης του εργατικού δυναμικού της. Επιπλέον, τα μηχανήματα της εταιρείας μπορούν να δουλέψουν μέχρι 80 ώρες την ημέρα. Τέλος το σύνολο των πρώτων υλών είναι 120 μονάδες.

1) Να διατυπώσετε το πρόβλημα, ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, αν ο αντικειμενικός στόχος της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους.

2) Πριν επιλύσετε το πρόβλημα, αποδείξτε ότι αν υπάρχουν δυο άριστες λύσεις  $x^*$  και  $\hat{x}$  οι οποίες επιτυγχάνουν την ίδια βέλτιστη τιμή  $z$ , τότε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει άπειρες λύσεις της μορφής  $x = \lambda \cdot x^* + (1 - \lambda) \cdot \hat{x}$  με  $\lambda \in [0,1]$ .

3) Υποθέτοντας ότι η εταιρεία μπορεί να παράξει και κλασματικά προϊόντα από τον κάθε τύπο, να επιλύσετε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο simplex.

4) Να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα σας με το πακέτο “solver” του Excel το αποτέλεσμα που βρήκατε στη ερώτηση β).

5) Τι αλλάζει αν η εταιρεία δεν μπορεί να παράγει κλασματικά προϊόντα; Να βρεθεί η άριστη λύση υπό τον νέο αυτό περιορισμό και να επιλυθεί με κατάλληλη μέθοδο. Επιπρόσθετα, να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα σας με το πακέτο “solver” του Excel.

6) Να διατυπώσετε το δυικό πρόβλημα του ερωτήματος α). Να επιλύσετε το δυικό πρόβλημα, ως ένα νέο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο M.

7) Ποια είναι η άριστη λύση του δυικού; Σε ποιο σημείο του “solver” φαίνεται αυτό; Να επισυνάψετε και το αντίστοιχο Report.

8) Υπάρχει η δυνατότητα το κέρδος του προϊόντος A να αυξηθεί, χωρίς αυτό να επηρεάσει την ήδη υπάρχουσα παραγωγή; Να εξηγηθεί αναλυτικά(με πράξεις) και στη συνέχεια να επιβεβαιωθεί το αποτέλεσμα και με το “solver”.

9) Υποθέστε τώρα η εταιρεία λανσάρει και ένα νέο προϊόν D το οποίο απαιτεί 2 μονάδες πρώτης ύλης, 3 ώρες από το εργατικό δυναμικό, 1 ώρα από τα μηχανήματα. Ποιος πρέπει να είναι ο συντελεστής κέρδους του προϊόντος D ώστε η τελική λύση, ως προς το ποια προϊόντα θα παράγει η εταιρεία, να μην αλλάζουν καθόλου;

## Άσκηση 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $z(x, y) = x^4 y^2$  και θεωρούμε το εξής πρόβλημα μεγιστοποίησης.

$$\max z(x, y) = x^4 y^2$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} \leq 100$$

$$\frac{y^4}{x} \leq 10000$$

$$\frac{x}{y} \geq 10$$

$$x \geq 1$$

$$y \geq 1$$

α) Να εξηγήσετε γιατί το πρόβλημα αυτό, δεν είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

β) Βρείτε μετασχηματισμό, το οποίο μετατρέπει το παραπάνω πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο και να επιλύσετε με τη γραφική μέθοδο.

γ) Ποια είναι η ισοδύναμη άριστη λύση του αρχικού προβλήματος;

δ) Αν ο 3<sup>ος</sup> περιορισμός του προβλήματος ήταν της μορφής  $\frac{x}{y} \geq m$  με  $m > 0$ , από ποια τιμή του  $m$  και έπειτα η εφικτή περιοχή είναι το κενό σύνολο;

## Άσκηση 3

Μια κατασκευαστική εταιρεία επιθυμεί να αναλάβει την διεκπεραίωση κάποιων εκ των παρακάτω έργων. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τόσο το κόστος που απαιτείται για το κάθε έργο αλλά και τι αναμένεται να αποδώσει το κάθε έργο.

Έργο	Κατηγορία	Κόστος(χιλιάδες €)	Απόδοση Επένδυσης(χιλιάδες €)
1	Τεχνολογία	14	43
2	Τεχνολογία	17	61
3	Περιβάλλον	20	50
4	Τεχνολογία	50	90
5	Περιβάλλον	30	65

Ωστόσο, οι περιορισμοί έχουν ως εξής:

A. Αν επιλεγεί ένα περιβαλλοντικό έργο, τότε πρέπει να επιλεγεί τουλάχιστον ένα τεχνολογικό έργο.

B. Αν επιλεγεί ένα έργο υψηλού κόστους( έργο 4 ή έργο 5), τότε πρέπει να επιλεγεί ένα έργο χαμηλού κόστους( έργο 1 ή έργο 2)

Γ. Μπορούν να επιλεγούν το πολύ τρία έργα συνολικά.

Δ. Πρέπει να επιλεγεί τουλάχιστον ένα έργο από την κάθε κατηγορία.

Ε. Ο συνολικός προϋπολογισμός που υπάρχει είναι 130 χιλιάδες €.

1) Να μοντελοποιήσετε το παραπάνω πρόβλημα ως ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Τι πρέπει να ισχύει για τις μεταβλητές

2) Να εξετάσετε μέσω του πακέτου “solver” αν υπάρχει άριστη λύση στο πρόβλημα αυτό. Σε περίπτωση που υπάρχει άριστη λύση, να τη γράψετε και στη συνέχεια να περιγράψετε ποια έργα θα αναλάβει η κατασκευαστική, ποιο είναι το συνολικό κόστος της επένδυσης και ποια είναι η συνολική απόδοση της επένδυσης.