



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Η/Υ, 2022-23

Επιμέλεια ασκήσεων: Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής, Π. Ποτίκας, Α. Χαλκή

1η σειρά γραπτών ασκήσεων

(υπολογισμοί – αυτόματα – τυπικές γλώσσες)

Άσκηση 1.

Η αναπαράσταση του αριθμού 2^{29} στο δεκαδικό σύστημα αποτελείται από ακριβώς εννιά διαφορετικά ψηφία. Χωρίς να υπολογίσετε τον αριθμό, βρείτε το ψηφίο $\{0, \dots, 9\}$ που λείπει.

Υπόδειξη: Για οποιουδήποτε $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$, ισχύει $ab \bmod n = (a \bmod n)(b \bmod n) \bmod n$.
Θυμηθείτε και το κριτήριο διαιρετότητας αριθμού με το 9.

Άσκηση 2.

Ένα κοινωνικό δίκτυο αποτελείται από n φίλους οι οποίοι μπορούν να επικοινωνήσουν ένας-προς-έναν, π.χ. μέσω τηλεφώνου. Στην αρχή ο καθένας έχει ένα μυστικό που θέλει να το μοιραστεί με τους υπόλοιπους. Πόσες ένας-προς-έναν κλήσεις πρέπει να γίνουν ώστε να ανταλλάξουν όλα τα μυστικά; Σχεδιάστε μία σειρά κλήσεων ώστε να ελαχιστοποιείται ο συνολικός αριθμός.

Μπορείτε να βρείτε λύση καλύτερη από $2n - 3$ κλήσεις; Μπορείτε να αποδείξετε ότι η λύση σας είναι η βέλτιστη;

Υπόδειξη: ξεκινήστε αποδεικνύοντας ότι για 5 φίλους αρκούν και χρειάζονται 6 κλήσεις.

Άσκηση 3.

(i) Σχεδιάστε πεπερασμένο αυτόματο με αλφάβητο $\{0, \dots, 9\}$ που να διαβάζει τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (από αριστερά προς τα δεξιά) και να αποδέχεται αν $n \bmod 5 = 0$.

(ii) Σχεδιάστε πεπερασμένο αυτόματο με αλφάβητο $\{0, \dots, 9\}$ που να διαβάζει τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (από αριστερά προς τα δεξιά) και να αποδέχεται αν $n \bmod 6 = 2$.

Άσκηση 4.

Κατασκευάστε DFA και κανονικές παραστάσεις για κάθε μία από τις γλώσσες:

α) Σύνολο συμβολοσειρών του $\{x, y\}$ των οποίων το πλήθος των $'x'$ mod 3 είναι ίσο με 2.

β) Σύνολο συμβολοσειρών του $\{x, y\}$ που δεν έχουν δύο συνεχόμενα $'yx'$.

Άσκηση 5.

(i) Κατασκευάστε NFA για τις παρακάτω γλώσσες:

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{η } w \text{ έχει περιττό αριθμό από } a \text{ ή περιέχει τη συμβολοσειρά } 'abab'\}$

$L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{η } w \text{ τελειώνει σε } 'a', 'bb' \text{ ή } 'ccc'\}.$

Υπόδειξη: όπου βοηθάει, σχεδιάστε και συνδυάστε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες.

(ii) Κατασκευάστε ισοδύναμο DFA. Είναι το ελάχιστο; Αποδείξτε. Αν όχι, βρείτε το.

(iii) Δώστε κανονική παράσταση για κάθε μια από τις παραπάνω γλώσσες.

Άσκηση 6.

Γράψτε κανονικές παραστάσεις για τις παρακάτω γλώσσες επί του $\Sigma = \{0, 1\}$. Δικαιολογήστε την ορθότητα των κανονικών σας παραστάσεων.

α) Το σύνολο των string που δεν περιέχουν το 010 ως substring.

β) Το σύνολο των string με ίσο πλήθος εμφανίσεων «0» και «1», έτσι ώστε δεν υπάρχει πρόθεμα που να περιέχει δύο περισσότερα «0» από ότι «1», ούτε δύο περισσότερα «1» από ότι «0».

Υπόδειξη: θυμηθείτε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε πρώτα αυτόματο και να φτιάξετε την κανονική παράσταση από αυτό.

Εξάσκηση

Εξασκηθείτε στο σχεδιασμό και κατανόηση λειτουργίας των DFA, NFA και NFAs χρησιμοποιώντας το εργαλείο που θα βρείτε στη σελίδα <http://automata.discrete.gr/> (Ευχαριστίες στους δημιουργούς, απόφοιτους της ΣΗΜΜΥ, Μανόλη Ζαμπετάκη και Διονύση Ζήνδρο). Επαληθεύστε την ορθή λειτουργία των αυτομάτων που σχεδιάσατε στις προηγούμενες ασκήσεις (όπου γίνεται) με χρήση του εργαλείου αυτού. Προαιρετικά: ελάτε σε επαφή με τους δημιουργούς της εφαρμογής για να συμβάλετε στην ανάπτυξη νέων λειτουργιών ή/και βελτίωση του interface.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 9/11/2022, στις 23:59, σε ηλεκτρονική μορφή, helios (τα σχήματα μπορεί να είναι σκαναρισμένα – φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους < 10MB συνολικά).

Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητές). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές (δηλαδή όχι ‘copy-paste’).

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση pprotik@cs.ntua.gr.