ΣΕΜΦΕ: Αριθμητική Ανάλυση Ι & Εργαστήριο – Εργαστηριακή Άσκηση 2022
Ομάδα Α

Προθεσμία υποβολής: Δευτέρα 9 Ιανουαρίου 2022, 12:15 στο τέλος του μαθήματος.

Κανόνες και επισημάνσεις

Η Εργαστηριακή Άσκηση 2022-23 του μαθήματος περιλαμβάνει διαφορετικά ερωτήματα ανά εργαστηριακή Ομάδα (Α,Β,Γ,Δ) και τα ερωτήματα περιέχουν και τον Αριθμό Μητρώου ως παράμετρο. Η υποβολή των εργασιών θα γίνει αυστηρά μόνο σε μορφή τυπωμένης εργασίας.

Οι παρακάτω κανόνες πρέπει να ακολουθηθούν για την έγκυρη υποβολή Εργασίας:

- Η πρώτη σελίδα της Εργασίας σας πρέπει να περιέχει τις παρακάτω πληροφορίες: 1) Ονοματεπώνυμο, 2) Αριθμός Μητρώου 3) Ομάδα Εργαστηρίου.

- Η Εργασία σας πρέπει να συμπεριλαμβάνει τα προγράμματα, τα αποτελέσματα και όποια άλλη εξήγηση/απάντηση απαιτείται για να αξιώνει μέγιστη δυνατή βαθμολογία.

- **Βαθμός.** Ο Βαθμός της Εργασίας σας θα είναι 0-10 και θα μετράει το 12.5% του τελικού βαθμού του μαθήματος. Ο Βαθμός της Εξέτασής σας θα είναι 0-10 και θα μετράει το 12.5% του τελικού βαθμού του μαθήματος. Ο μέσος όρος των δυο παραπάνω βαθμών θα δίνει το Βαθμό Εργαστηριακού Μέρους του μαθήματος, δηλαδή το 25% του συνολικού βαθμού. Ο **Βαθμός της Εργασίας προσμετράται μόνο με τη συμμετοχή στην προφορική Εξέταση** του μαθήματος. Αν ο φοιτητής δεν προσέλθει στην Εξέταση του Εργαστηρίου, ο Βαθμός του Εργαστηριακού Μέρους του μαθήματος επιστρέφεται ως 'μηδέν'.

- **Προφορική Εξέταση.** Θα εξεταστείτε προφορικά την ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί στο `helios.ntua.gr`.(Θα υπάρξει σχετική ανακοίνωση με περισσότερες πληροφορίες τουλάχιστον μια εβδομάδα πριν την εξέταση.) Η προφορική εξέταση θα βασίζεται, ως επί το πλείστον, στην υποβληθείσα Εργασία σας αλλά και σε ερωτήσεις πλησίον την ύλης της εργασίας. Η Εξέταση του Εργαστηρίου διέπεται από τους ίδιους κανόνες εξέτασης οποιουδήποτε μαθήματος. Άρα **δεν υπάρχει δυνατότητα αναβολής ή αναπλήρωσης της εξέτασης σε άλλη ημερομηνία**, όπως ακριβώς συμβαίνει και με όλες τις γραπτές εξετάσεις.

- **Προετοιμασία για την Προφορική Εξέταση.** Για να είναι δυνατή η εξέτασή σας, υποχρεούστε να **έχετε μαζί σας και να εισάγεται στο υπολογιστή τα προγράμματα** που έχετε υποβάλλει στην Εργασία σας κατά τη διάρκεια της εξέτασής σας. Αν δεν έχετε μαζί σας τα προγράμματα, η Εξέταση σας δεν πραγματοποιείται και ο βαθμός του Εργαστηριακού μέρους επιστρέφεται ως 'μηδέν'.

- **Συνεργασία / Αντιγραφή.** Η άτυπη συνεργασία και συζήτηση είναι, προφανώς, επιτρεπτή και αναμενόμενη. Η αντιγραφή, όμως, απαγορεύεται αυστηρά. Αν διαπιστωθεί πριν ή κατά την Εξέταση ότι δεν μπορεί κάποιος/α να εξηγήσει τα λεγόμενά του/ης ή/και δυο γραπτά είναι προφανώς προϊόν αντιγραφής, το εργαστηριακό μέρος του μαθήματος (Εργασία και Εξέταση) μηδενίζεται για όλους/ες τους εμπλεκόμενους/ες και, κατά συνέπεια, αφαιρείται το δικαίωμα συμμετοχής στη γραπτή εξέταση του μαθήματος (δεδομένου ότι θα έχει διαπιστωθεί αντιγραφή σε μέρος της όλης εξέτασης του μαθήματος). Σε περίπτωση διαπιστωμένης αντιγραφής ενημερώνεται και η Σχολή σχετικά ώστε να προβεί στις προβλεπόμενες από το νόμο/κανονισμό διαδικασίες.

- **Πανδημία COVID-19.** Σε περίπτωση νόσησης από COVID-19 που καθιστά αδύνατη την παρουσία στην εξέταση, επιβάλλεται η άμεση επικοινωνία με το διδάσκοντα για περαιτέρω διευθέτηση της κατάστασης.

Ασκήσεις στην επόμενη σελίδα ⇝

Ομάδα Α

Ασκήσεις

1. Η ενέργεια φυσικού συστήματος σε κάθε σημείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ του χώρου δίνεται από τη συνάρτηση
$$E(x_1, x_2) = \big((x_1 - a)^4 + (x_2 - a)^4 - \cos((x_1 - a)^4 + (x_2 - a)^4) + 2\big)^{-1}$$
για $a = 1 + (A+1)^{-1}$ όπου A είναι το τελευταίο ψηφίου του αριθμού μητρώου σας. Ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι η προσέγγιση των σημείων ακρότατων της παραπάνω συνάρτησης κάνοντας χρήση της μεθόδου του Νεύτωνα (Newton-Raphson) και παραλλαγών της.

    - Κατασκευάστε μια συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε τα κρίσιμα σημεία της E να δίνονται από την εξίσωση $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, για $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$. Στη συνέχεια, κατασκευάστε μια συνάρτηση $\mathbf{J_F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ που να υλοποιεί τον Ιακωβιανό πίνακα της $\mathbf{F}$ σε κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του χώρου. [Μπορείτε να παραγωγίσετε κάθε όρο της $\mathbf{F}$ στο χαρτί; η χρήση συμβολικών πακέτων δεν ενδείκνυται.]

      Έπειτα, κατασκευάστε μια συνάρτηση που να υλοποιεί τη μέθοδο του Νεύτωνα (Newton-Raphson) για την προσέγγιση των κρίσιμων σημείων. Η συνάρτηση να έχει ως εισαγόμενα το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}_0$ και το πλήθος των επαναλήψεων. [Αποφύγετε την εντολή `inv` για την υλοποίηση της μεθόδου του Νεύτωνα.]

      Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση που κατασκευάσατε για 2 διαφορετικά αρχικά διανύσματα $\mathbf{x}_{[0]}$ της αρεσκείας σας (τα οποία πρέπει να αναφέρετε στην εργασία) και για $k = 4, 6, 20, 200$ επαναλήψεις σε κάθε περίπτωση. Αναφέρετε τις προσεγγίσεις $\mathbf{x}_{[k]}$ μετά από $k = 4, 6, 20, 200$ επαναλήψεις. Επαναλάβετε για $\mathbf{x}_{[0]}$ που να κατασκευάζεται από την εντολή `rand(2,1)`.

    - Έστω $\tilde{\mathbf{x}}_{[0]}$ ένα από τα παραπάνω τρία αρχικά διανύσματα της αρέσκειά σας. Υλοποιείστε την τροποποιημένη μέθοδο του Νεύτωνα (Newton-Raphson) για $k = 4, 6, 20, 200$ επαναλήψεις. (Υπενθυμίζουμε ότι η τροποποιημένη μέθοδος του Νεύτωνα χρησιμοποιεί τον Ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο $\tilde{\mathbf{x}}_{[0]}$ σε κάθε επανάληψη.) Τί παρατηρείτε;

2. Έστω ότι η ενέργεια φυσικού συστήματος με n μεταβλητές σε κάθε σημείο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ δίνεται από τη συνάρτηση
$$E(\mathbf{x}) = \Big(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_4^4 - \cos(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_4^4) + n\Big)^{-1}$$
όπου $\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ η p-νόρμα που ορίσαμε στο μάθημα (στην παραπάνω εξίσωση έχουμε $p = 4$) και $\mathbf{a} := a(1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$, όπου όπου $a = 1 + (A + 1)^{-1}$ όπου A είναι το τελευταίο ψηφίου του αριθμού μητρώου σας. Επαναλάβετε την Άσκηση 1 (για αντίστοιχο n-διάστατο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$) για αρχικά διανύσματα:

    (a) $\mathbf{x}_{[0]} = a(0.5, 1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ (b) $\mathbf{x}_{[0]}$ που να ορίζεται από την εντολή `randn(n,1)`

    και για $n = 4, 6, 20, 200$. Για $n = 4, 6$ αναφέρετε την προσέγγιση $\mathbf{x}_{[k]}$ στα αποτελέσματά σας και για τις περιπτώσεις $n = 20, 200$ αναφέρετε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\mathbf{x}_{[k]}\|_2$.

3. Επαναλάβετε την Άσκηση 2, βελτιώνοντας το πρόγραμμά σας έτσι ώστε να εκτελούνται όσο το δυνατό λιγότερες πράξεις κινητής υποδιαστολής. Αν το πρόγραμμα που κατασκευάσατε στην Άσκηση 2 είναι ήδη όσο το δυνατόν οικονομικότερο όσον αφορά πράξεις κινητής υποδιαστολής, απλά περιγράψτε το σκεπτικό του προγράμματός σας από τη σκοπιά της οικονομίας πράξεων.

Εκτός από τα ζητούμενα αποτελέσματα, η εργασία σας πρέπει να περιέχει και τα προγράμματα / συναρτήσεις που γράψατε για την παραγωγή των αποτελεσμάτων αυτών.