Άσκηση 1

1)

Προϊόν	Εργατικό δυναμικό	Μηχανήματα	Πρώτες ύλες
A	2 ώρες	1 ώρα	3 μονάδες
B	1 ώρα	2 ώρες	2 μονάδες
C	2 ώρες	2 ώρες	1 μονάδα

x_A: ποσότητα παραγωγής από το A

x_B: ποσότητα παραγωγής από το B

x_C: ποσότητα παραγωγής από το C

$\max z = 20x_A + 15x_B + 10x_C$

1ος περιορισμός: $2x_A + x_B + 2x_C \leq 100$

2ος περιορισμός: $x_A + 2x_B + 2x_C \leq 80$

3ος περιορισμός: $3x_A + 2x_B + x_C \leq 120$

$x_A, x_B, x_C \geq 0$

2) $\max z = c^T x$ υπό περιορισμούς $Ax \leq b, x \geq 0$

Έστω $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

Θ.δ.ο. F κυρτό

Έστω $x^*, \hat{x} \in F$. Τότε $Ax^* \leq b$ και $A\hat{x} \leq b$

Ορίζω το στοιχείο $w = \lambda x^* + (1-\lambda)\hat{x}$ με $\lambda \in [0,1]$

Τότε $Aw = A(\lambda x^* + (1-\lambda)\hat{x})$

$= \lambda A x^* + (1-\lambda) A\hat{x}$

$\leq \lambda b + (1-\lambda) b = b$

$\Rightarrow w \in F \;\; \forall \lambda \in [0,1]$ και $\forall x^*, \hat{x} \in F$

$\Rightarrow F$ κυρτό

$\Rightarrow \forall x^*, \hat{x} \in F$ και $\forall \lambda \in [0,1]$ ισχύει ότι $\lambda x^* + (1-\lambda)\hat{x} \in F$

$\Rightarrow$ Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\lambda x^* + (1-\lambda)\hat{x} \in F$ με $\lambda \in [0,1]$

3) π.γ.π. $\max z = 20x_A + 15x_B + 10x_C + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

υ.π. $2x_A + x_B + 2x_C + s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3 = 100$

$x_A + 2x_B + 2x_C + 0s_1 + s_2 + 0\cdot s_3 = 80$

$3x_A + 2x_B + x_C + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + s_3 = 120$

$x_A, x_B, x_C, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

	B	C_B	b	$c_1=20$ a_1	$c_2=15$ a_2	$c_3=10$ a_3	$c_4=0$ a_4	$c_5=0$ a_5	$c_6=0$ a_6	θ
(S_1)	a_4	0	100	2	1	2	1	0	0	$\frac{100}{2}=50$
(S_2)	a_5	0	80	1	2	2	0	1	0	$\frac{80}{1}=80$
(S_3)	a_6	0	120	οδηγός 3	2	1	0	0	1	$\frac{120}{3}=40$ min
		z	0	$\boxed{20}$ max	15	10	0	0	0	

$r_3 \leftarrow r_3/3$

$r_4 \leftarrow r_4 - 20r_3$

$r_1 \leftarrow r_1 - 2r_3$

$r_2 \leftarrow r_2 - r_3$

B	C_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ
a_4	0	20	0	$-1/3$	οδηγός $4/3$	1	0	$-2/3$	$\frac{20}{4/3}=15$ min
a_5	0	40	0	$4/3$	$5/3$	0	1	$-1/3$	$\frac{40}{5/3}=24$
a_1	20	40	1	$2/3$	$1/3$	0	0	$1/3$	$\frac{40}{1/3}=120$
	z	800	0	$5/3$	$\boxed{10/3}$ max	0	0	$-20/3$	

$r_1 \leftarrow r_1 \cdot \frac{3}{4}$

$r_2 \leftarrow r_2 - \frac{5}{3}r_1$

$r_3 \leftarrow r_3 - \frac{1}{3}r_1$

$r_4 \leftarrow r_4 - \frac{10}{3}r_1$

B	C_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ
a_3	10	15	0	$-1/4$	1	$3/4$	0	$-1/2$	min
a_5	0	15	0	οδηγός $7/4$	0	$-5/4$	1	$1/2$	$\frac{15}{7/4}=\frac{60}{7}$
a_1	20	35	1	$3/4$	0	$-1/4$	0	$1/2$	$\frac{35}{3/4}=\frac{140}{3}$
	z	850	0	$\boxed{5/2}$ max	0	$-5/2$	0	-5	

$r_2 \leftarrow r_2 \cdot \frac{4}{7}$

$r_1 \leftarrow r_1 + \frac{1}{4}r_2$

$r_3 \leftarrow r_3 - \frac{3}{4}r_2$

$r_4 \leftarrow r_4 - \frac{5}{2}r_2$

B	C_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	θ
a_3	10	120/7	0	0	1	4/7	1/7	-3/7	
a_2	15	60/7	0	1	0	-5/7	4/7	2/7	
a_1	20	200/7	1	0	0	2/7	-3/7	2/7	
	z	$\frac{6100}{7}$	0	0	0	-5/7	-10/7	-40/7	

αρνητικές μη βασικές

μηδέν βασικές μεταβλητές

⇒ Βέλτιστη λύση

$\Rightarrow x^* = \left(\frac{200}{7}, \frac{60}{7}, \frac{120}{7}, 0, 0, 0\right)$

$z_{opt} = \frac{6100}{7} = 871,4285714$

4) Excel Ασκ.1 _ Ερ.4

5) Αν η εταιρεία δεν μπορεί να παράγει κλασματικές ποσότητες προϊόντων τότε προστίθεται ακόμη ένας περιορισμός ότι οι μεταβλητές x_A, x_B και x_C πρέπει να είναι ακέραιες. Επομένως, το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Branch and Bound

$\max z = 20x_A + 15x_B + 10x_C$

υ.π. $2x_A + x_B + 2x_C \leq 100$

$x_A + 2x_B + 2x_C \leq 80$

$3x_A + 2x_B + x_C \leq 120$

$x_A, x_B, x_C \geq 0$ ακέραιοι

Από το ερώτημα (3) παρατηρούμε ότι οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών είναι $x_A = \frac{200}{7}$, $x_B = \frac{60}{7}$, $x_C = \frac{120}{7}$ και δεν είναι ακέραιες. Θεωρούμε, τυχαία, ως μεταβλητή διακλάδωσης τη $x_A = \frac{200}{7}$

Ακολουθεί σχεδιάγραμμα στην επόμενη σελίδα

Π:

$$\max z = 20x_A + 15x_B + 10x_C$$
$$\text{υπ.}\quad 2x_A + x_B + 2x_C \le 100$$
$$x_A + 2x_B + 2x_C \le 80$$
$$3x_A + 2x_B + x_C \le 120$$
$$x_A, x_B, x_C \ge 0$$

$x_A = 200/7$
$x_B = 60/7$
$x_C = 120/7$
$z = 6100/7$

$Π_1$

$$\max z = 20x_A + 15x_B + 10x_C$$
$$\text{υπ.}\quad 2x_A + x_B + 2x_C \le 100$$
$$x_A + 2x_B + 2x_C \le 80$$
$$3x_A + 2x_B + x_C \le 120$$
$$x_A \le 28$$
$$x_A, x_B, x_C \ge 0$$

$x_A = 28$
$x_B = 10$
$x_C = 16$
$x_z = 870$

$Π_2$

$$\max z = 20x_A + 15x_B + 10x_C$$
$$\text{υπ.}\quad 2x_A + x_B + 2x_C \le 100$$
$$x_A + 2x_B + 2x_C \le 80$$
$$3x_A + 2x_B + x_C \le 120$$
$$x_A \ge 29$$
$$x_A, x_B, x_C \ge 0$$

$x_A = 29$
$x_B = 8$
$x_C = 17$
$x_z = 870$

Οι λύσεις των προβλημάτων $Π_1$ και $Π_2$ είναι ισοδύναμες αφού και στις δύο $x_z = 870$ και έχουν και οι δύο ακέραιες λύσεις. Επομένως, είναι και οι δύο λύσεις του προβλήματος

6) $\min w = 100y_1 + 80y_2 + 120y_3$

$$2y_1 + 1y_2 + 3y_3 \ge 20$$
$$1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 15$$
$$2y_1 + 2y_2 + 1y_3 \ge 10$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\min w = -\max(-w) = -100y_1 - 80y_2 - 120y_3 - MR_1 - MR_2 - MR_3$$
$$\text{υπ.}\quad 2y_1 + y_2 + 3y_3 - S_1 + 0S_2 + 0S_3 + R_1 + 0R_2 + 0R_3 = 20$$
$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 0S_1 - S_2 + 0S_3 + 0R_1 + R_2 + 0R_3 = 15$$
$$2y_1 + 2y_2 + y_3 + 0S_1 + 0S_2 - S_3 + 0R_1 + 0R_2 + R_3 = 10$$
$$y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3 \ge 0$$

$Q = -w$

			-100	-80	-120	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	
B	c_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ
a_7	$-M$	20	2	1	οδηγός 3	-1	0	0	1	0	0	$20/3$
a_8	$-M$	15	1	2	2	0	-1	0	0	1	0	$15/2$
a_9	$-M$	10	2	2	1	0	0	-1	0	0	1	10
	Q	$-45M$	$5M-100$	$5M-80$	$6M-120$ max	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	

$\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_1 \cdot \frac{1}{3}$

$\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1$

$\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - \Gamma_1$

B	c_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ
a_3	-120	$20/3$	$2/3$	$1/3$	1	$-1/3$	0	0	$1/3$	0	0	$\frac{20/3}{1/3}=20$
a_8	$-M$	$5/3$	$-1/3$	οδηγός $4/3$	0	$2/3$	-1	0	$-2/3$	1	0	$\frac{5/3}{4/3}=\frac{5}{4}$ min
a_9	$-M$	$10/3$	$4/3$	$5/3$	0	$1/3$	0	-1	$-1/3$	0	1	$\frac{10/3}{5/3}=2$
	Q	$-800-5M$	$-20+M$	$40+3M$ max	0	$-40+M$	$-M$	$-M$	$40-2M$	0	0	

$\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 \cdot \frac{3}{4}$

$\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_1 - \frac{1}{3}\Gamma_2$

$\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 - \frac{5}{3}\Gamma_2$

B	c_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ
a_3	-120	$25/4$	$3/4$	0	1	$-1/2$	$1/4$	0	$1/2$	$-1/4$	0	$\frac{25/4}{3/4}=\frac{25}{3}$
a_2	-80	$5/4$	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-3/4$	0	$-1/2$	$3/4$	0	
a_9	$-M$	$5/4$	οδηγός $7/4$	0	0	$-1/2$	$5/4$	-1	$1/2$	$-5/4$	1	$\frac{5/4}{7/4}=\frac{5}{7}$ min
	Q	$-850-\frac{5M}{4}$	$-30+\frac{7M}{4}$ max	0	0	$-20-\frac{M}{2}$	$-30+\frac{5M}{4}$	$-M$	$20-\frac{M}{2}$	$30-\frac{9}{4}M$	0	

$\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3 \cdot \frac{4}{7}$

$\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_2 + \frac{1}{4}\Gamma_3$

$\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_1 - \frac{3}{4}\Gamma_3$

B	c_B	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	θ
a_3	-120	$40/7$	0	0	1	$-2/7$	$-2/7$	$3/7$	$2/7$	$2/7$	$-3/7$	
a_2	-80	$10/7$	0	1	0	$3/7$	$-4/7$	$-1/7$	$-3/7$	$4/7$	$1/7$	
a_1	-100	$3/7$	1	0	0	$-2/7$	$5/7$	$-4/7$	$2/7$	$-5/7$	$4/7$	
	Q	$-\frac{6100}{7}$	0	0	0	$-\frac{200}{7}$	$-\frac{60}{7}$	$-\frac{120}{7}$	$\frac{200}{7}-M$	$\frac{20}{7}-M$	$\frac{120}{7}-M$	

μηδέν βασικές μεταβλητές   αρνητικές μη βασικές

$\Rightarrow$ Λύση Δυϊκού: $w_{opt} = -Q = -\left(-\frac{6100}{7}\right) = \frac{6100}{7}$

$$y^* = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{40}{7}\right)$$

7) Excel Ασκ.1_Ερ.7

Η άριστη λύση του δυϊκού προβλήματος είναι η: $y^* = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{40}{7}\right)$ με $w_{opt} = \frac{6100}{7}$

Στο "solver" του πρωτεύον προβλήματος η λύση αυτή φαίνεται στο Sensitivity Report Ασκ.1_Ερ.4 στην στήλη Shadow Price. Επίσης, από το Sensitivity Report Ασκ.1 Ερ.7 του δυϊκού προβλήματος στη στήλη Shadow Price μπορούμε να δούμε τη λύση του πρωτεύον προβλήματος που βρήκαμε στο ερώτημα (3).

8) Έστω $\hat{c}_1$ το νέο κέρδος του προϊόντος Α

Χρησιμοποιώντας το τελικό ταμπλό του ερωτήματος (3) εκτελούμε ξανά τις πράξεις για τα $c_4 - z_4$, $c_5 - z_5$, $c_6 - z_6$ έχοντας όμως τώρα τα $\hat{c}_1$ για κέρδος του a_1 (στη θέση του 20)

$$c_4 - z_4 = 0 - \left(10 \cdot \frac{4}{7} - 15 \cdot \frac{5}{7} + \hat{c}_1 \cdot \frac{2}{7}\right) = -\left(-5 + \hat{c}_1 \cdot \frac{2}{7}\right)$$

$$-5 + \hat{c}_1 \cdot \frac{2}{7} \geq 0 \Leftrightarrow \hat{c}_1 \geq 5 \cdot \frac{7}{2} \Leftrightarrow \hat{c}_1 \geq \frac{35}{2}$$

$$c_5 - z_5 = 0 - \left(10 \cdot \frac{1}{7} + 15 \cdot \frac{4}{7} - \hat{c}_1 \cdot \frac{3}{7}\right) = -\left(10 - \hat{c}_1 \cdot \frac{3}{7}\right)$$

$$10 - \hat{c}_1 \cdot \frac{3}{7} \geq 0 \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{7}{3} \geq \hat{c}_1 \Leftrightarrow \hat{c}_1 \leq \frac{70}{3}$$

$$c_6 - z_6 = 0 - \left(-10 \cdot \frac{3}{7} + 15 \cdot \frac{2}{7} + \hat{c}_1 \cdot \frac{2}{7}\right) = -\hat{c}_1 \cdot \frac{2}{7}$$

$$\hat{c}_1 \cdot \frac{2}{7} \geq 0 \Leftrightarrow \hat{c}_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{35}{2} \leq \hat{c}_1 \leq \frac{70}{3}$$

Επομένως, το κέρδος του προϊόντος Α μπορεί να αυξηθεί μέχρι $\hat{c}_1 = \frac{70}{3}$ χωρίς αυτό να επηρεάσει την ήδη υπάρχουσα παραγωγή

Το παραπάνω αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται και με το "solver" από το Sensitivity Report Ασκ.1 Ερ.4 του προηγούμενου προβλήματος στο οποίο βλέπουμε ότι για το κελί C4 το maximum objective είναι 23,33 και το minimum 17,5 αυτό μας δείχνει ότι το κέρδος του προϊόντος Α μπορεί να πάρει τιμές από 17,5 μέχρι 23,33 χωρίς να επηρεαστεί η ήδη υπάρχουσα παραγωγή.

9) Για να βρούμε ποιος πρέπει να είναι ο συντελεστής κέρδους του προϊόντος D ώστε η τελική λύση, ως προς το ποια προϊόντα θα παράγει η εταιρεία, να μην αλλάξει θα χρησιμοποιήσουμε τη στήλη Shadow Price από το Sensitivity Report Ασκ.1 Ερ.4. Οι τιμές αυτές αντιπροσωπεύουν την αύξηση του συνολικού κέρδους όταν αυξάνεται η διαθέσιμη ποσότητα ενός περιορισμού κατά 1 μονάδα. Το νέο προϊόν D θα δεσμεύσει πόρους από τους περιορισμούς και επομένως θα δημιουργήσει ένα κόστος ευκαιρίας για την υπάρχουσα παραγωγή. Το κέρδος του D πρέπει να αντισταθμίσει το κόστος ευκαιρίας αυτών των δεσμεύσεων για να μην μεταβληθεί η βέλτιστη λύση.

Κόστος ευκαιρίας $= 3 \cdot 0,7142857\text{1} + 1,42857143 + 2 \cdot 5,7142857\text{1}$
$= 15$

$\Rightarrow$ Συντελεστής κέρδους του προϊόντος θα πρέπει να είναι <15

Άσκηση 2

$z(x,y) = x^4 y^2$

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} \leq 100$

$\frac{y^4}{x} \leq 10000$

$\frac{x}{y} \geq 10$

$x \geq 1$

$y \geq 1$

α) Δεν είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού διότι η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι γραμμική (πολυώνυμο 6ου βαθμού) και οι περιορισμοί περιλαμβάνουν μη γραμμικές σχέσεις που περιέχουν ρίζες, κλάσματα και μη γραμμικές εξισώσεις

β) Μετασχηματισμός: $u = \log(x)$ και $v = \log(y)$

$\max z(x,y) = x^4 y^2 \rightarrow \max z(u,v) = 4u + 2v$

υ.π. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y} \leq 100 \rightarrow \frac{1}{3}\log(x) + \frac{1}{2}\log(y) \leq \log(100)$

$\rightarrow \frac{1}{3}u + \frac{1}{2}v \leq 2$

$\frac{y^4}{x} \leq 10000 \rightarrow 4\log(y) - \log(x) \leq \log(10000)$

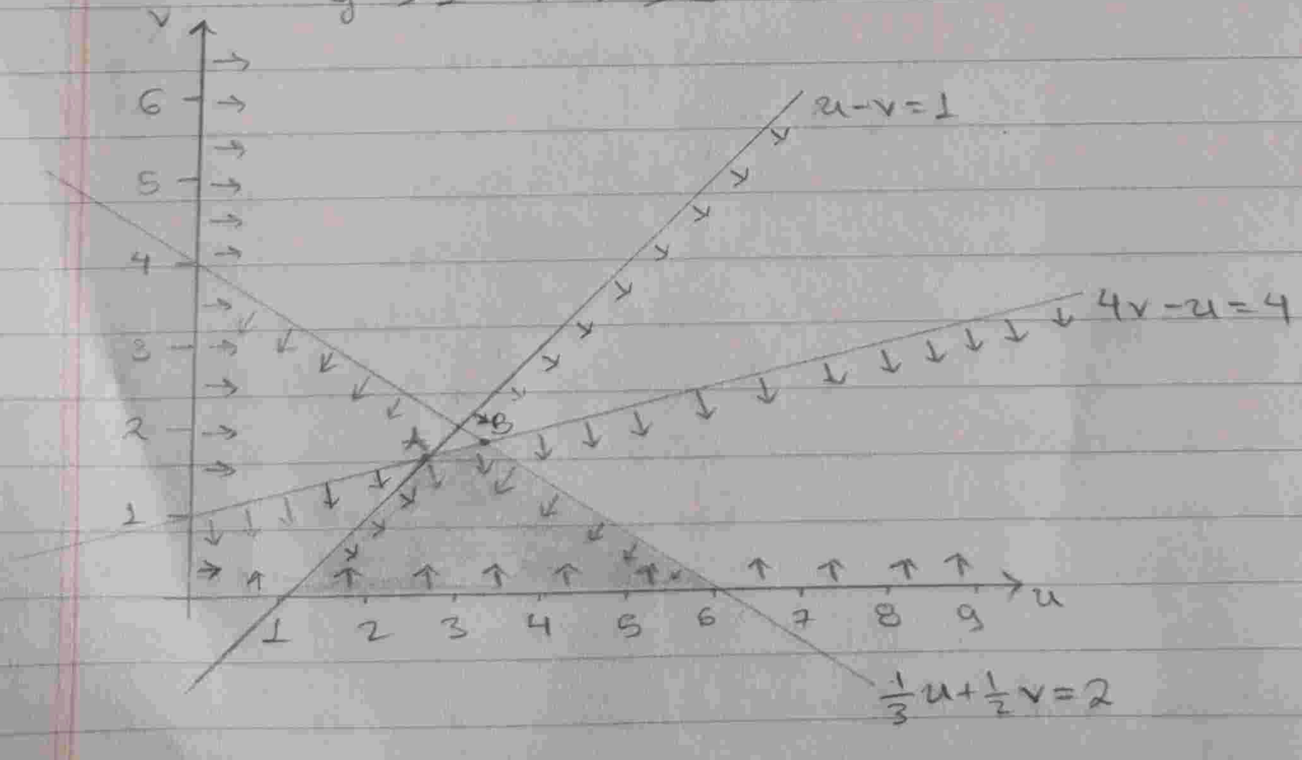
$\rightarrow 4v - u \leq 4$

$\frac{x}{y} \geq 10 \rightarrow \log(x) - \log(y) \geq \log(10)$

$\rightarrow u - v \geq 1$

$x \geq 1 \rightarrow u \geq 0$

$y \geq 1 \rightarrow v \geq 0$



A: $u-v=1 \Rightarrow u=1+v$
$4v-u=4$
$\Big\}\ 4v-1-v=4 \Rightarrow 3v=5 \Rightarrow v=5/3$
$u=8/3$

$\rightarrow A\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$

B: $4v-u=4 \Rightarrow u=4v-4$
$\frac{1}{3}u+\frac{1}{2}v=2$
$\Big\}\ \frac{4}{3}v-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}v=2 \Rightarrow \frac{11}{6}v=\frac{10}{3} \Rightarrow v=\frac{20}{11}$
$u=\frac{36}{11}$

$\rightarrow B\left(\frac{36}{11}, \frac{20}{11}\right)$

Σημεία	Z
$(1,0)$	$4\cdot 1+2\cdot 0=4$
$\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$4\cdot 8/3+2\cdot 5/3=14$
$\left(\frac{36}{11}, \frac{20}{11}\right)$	$4\cdot 36/11+2\cdot 20/11=184/11$
$(6,0)$	$4\cdot 6+2\cdot 0=24$ → Optimal solution

$\Rightarrow$ Βέλτιστη λύση: $(u,v)=(6,0)$

$Z_{opt}(u,v)=24$

γ) $u=6 \Rightarrow x=10^u=10^6$

$v=0 \Rightarrow y=10^v=10^0=1$

$Z_{opt}(x,y)=(10^6)^4\cdot 1^2=10^{24}$

δ) $\frac{x}{y}\geq m$, $m>0$

Μετασχηματισμός: $u-v=\log m$

Καθώς το m αυξάνεται η ευθεία $u-v=\log m$ θα μετακινείται προς τα δεξιά. Επομένως, η εφικτή περιοχή θα είναι το κενό σύνολο όταν το σημείο τομής της $u-v=\log m$ με την $\frac{1}{3}u+\frac{1}{2}v=2$ γίνει το $(6,0)$ και μετά

$\Rightarrow \log m\geq 6$

$\Rightarrow m\geq 10^6$ η εφικτή περιοχή θα είναι το κενό σύνολο

Άσκηση 3

1) x_i: Δυαδική μεταβλητή (0 ή 1) που υποδηλώνει αν επιλέγεται το έργο i, για $i=1,2,3,4,5$

Μέγιστο καθαρό κέρδος:

$\max z = (43-14)x_1 + (61-17)x_2 + (50-20)x_3 + (90-50)x_4 + (65-30)x_5$

υ.π. Α) $x_3 + x_5 \le x_1 + x_2 + x_4$

Β) $x_4 \le x_1 + x_2$, $x_5 \le x_1 + x_2$

Γ) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 3$

Δ) $x_1 + x_2 + x_4 \ge 1$, $x_3 + x_5 \ge 1$

Ε) $14x_1 + 17x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 30x_5 \le 120$

$x_i \in \{0,1\} \ \forall \ i=1,2,3,4,5$

2) Από τον solver έχουμε ότι η άριστη λύση του προβλήματος είναι:

$x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = x_5 = 1$

$z_{opt} = 119$

Επομένως, η κατασκευαστική εταιρεία θα αναλάβει τα έργα 2, 4 και 5, με συνολικό κόστος επένδυσης 97 χιλιάδες € και συνολική απόδοση της επένδυσης $61+90+65=216$ χιλιάδες €.

Το συνολικό κόστος είτε υπολογίζεται με πρόσθεση $17+50+30=97$ είτε το βλέπουμε από τον solver στον τελευταίο περιορισμό.