

## Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

### Ασκήσεις:

- 1) (α) Έστω  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ , η λύση του συστήματος  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  με  $A$  αντιστρέψιμο. Έστω  $y \in \mathbb{R}^n$  μία προσέγγιση της λύσης και  $r = b - Ay$  το αντίστοιχο υπόλοιπο. Να δείξετε ότι,  $\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$  όπου  $k(A)$  συμβολίζει τον δείκτη κατάστασης.

(β) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Να δοθεί μία εκτίμηση του σφάλματος, με βάση τον τύπο της άσκησης 1(α), για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος  $Ax = b$ , με  $b = [9, 2, 9]^T$ , εκτελώντας 2 επαναλήψεις της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel με αρχικό διάνυσμα  $x_0 = [0, 0, 0]^T$ .

(γ) Δίνεται ο τριδιαγώνιος πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ , με στοιχεία

$$a_{ii} = 12, \text{ για } 1 \leq i \leq 100, \quad a_{i,i+1} = -1, \text{ για } 1 \leq i \leq 99, \quad a_{i,i-1} = -1, \text{ για } 2 \leq i \leq 100$$

και διάνυσμα  $b \in \mathbb{R}^{100}$  με στοιχεία,  $b_1 = 11, 2 \leq i \leq 99, b_i = 10, b_{100} = 11$ .

Να δοθεί μία εκτίμηση του σφάλματος για τη λύση του συστήματος μετά από 8 επαναλήψεις της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel, με αρχικό διάνυσμα  $x_0 = [0, \dots, 0]^T$ . (Λύση:  $x = [1, \dots, 1]^T$ ).

- 2) Έστω συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, με  $b \in (1, 2)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -b & 0 \\ -b & 8 & -b \\ 0 & -b & 10 \end{pmatrix}.$$

(α) Να μελετήσετε τη σύγκλιση των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel.

(β) Να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης JOR. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης  $\omega$ , για τις οποίες η JOR συγκλίνει. Υπάρχει τιμή της παραμέτρου  $\omega$ , ώστε η JOR να συγκλίνει ταχύτερα από την Jacobi;

- 3) (α) Για τον πίνακα της άσκησης 1(β), να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης  $\omega$ , για τις οποίες η SOR συγκλίνει. Μπορείτε να εξασφαλίσετε ταχύτερη σύγκλιση από την Gauss-Seidel με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;

(β) Να προγραμματίσετε την μέθοδο SOR και να λύσετε το σύστημα της άσκησης 1(γ), χρησιμοποιώντας ως προσεγγιστική τιμή της παραμέτρου χαλάρωσης την

προσεγγιστική τιμή που δίνει το αντίστοιχο ομογενές σύστημα (με αρχική συνθήκη  $x_0 = [0.5, 0.25, \dots, 0.25, 0.5]^T$  για 5 επαναλήψεις).

4) Δίνεται ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10^{-5} & 5 & 1 \\ 0 & 10^{-5} & 5 \end{pmatrix}.$$

Για την επαναληπτική διαδικασία Gauss-Seidel για τη λύση του συστήματος  $Ax=b$ , με  $b=[7,6.00001,5.00001]^T$ , να υπολογίσετε προσέγγιση της νόρμας του επαναληπτικού πίνακα  $B_{GS}$  μετά από 10 επαναλήψεις με τη βοήθεια των διαφορών  $\delta_j = \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|$ . Στη συνέχεια, να υπολογίσετε μία a-posteriori εκτίμηση για το σφάλμα με βάση τις διαφορές  $\delta_j$  μετά από 10 επαναλήψεις, και να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από  $Tol := 10^{-8}$ .

5) (α) Να εφαρμόσετε την μέθοδο των κλίσεων και των συζυγών κλίσεων για το πρόβλημα της άσκησης 1(γ). Να υπολογίσετε μία εκτίμηση σφάλματος μετά από 12 επαναλήψεις.

(β) Για το πρόβλημα του ερωτήματος της άσκησης 1(γ) να υπολογιστεί το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου των κλίσεων και της μεθόδου των συζυγών κλίσεων που χρειάζονται ώστε το σφάλμα – σε κατάλληλη νόρμα – να είναι μικρότερο από  $Tol=10^{-10}$ .

6) (α) Να υπολογίσετε τον πίνακα του ερωτήματος 1(γ) να υπολογίσετε τη μέγιστη κατά μέτρο ιδιοτιμή, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυνάμεων (με πηλίκο Rayleigh). με αρχικό διάνυσμα το  $x_0 = [0.5, 0.25, \dots, 0.25, 0.5]^T$ .

(β) Να υπολογίσετε την ιδιοτιμή που βρίσκεται εγγύτερα στο 4, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυνάμεων με αρχικό διάνυσμα το  $x_0 = [0.5, 0.25, \dots, 0.25, 0.5]^T$ .

(γ) Κατασκευάστε αλγόριθμο της μορφής QR για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών / ιδιοδιανυσμάτων ενός συμμετρικού πίνακα. Για την παραγοντοποίηση QR των πινάκων που προκύπτουν κατά την εκτέλεση των επαναλήψεων, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `QR_factor(A)` που περιέχεται στη βιβλιοθήκη προγραμμάτων του Matlab. Να χρησιμοποιήσετε τον παραπάνω αλγόριθμο για την εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2/3 & -4/3 & 4/3 \\ 2/3 & 4 & 0 & 0 \\ -4/3 & 0 & 6 & 2 \\ 4/3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$