

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις:

- 1) (α) Έστω $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, η λύση του συστήματος $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ με A αντιστρέψιμο. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ μία προσέγγιση της λύσης και $r = b - Ay$ το αντίστοιχο υπόλοιπο. Να δείξετε ότι, $\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$ όπου $k(A)$ συμβολίζει τον δείκτη κατάστασης.
(β) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Να δοθεί μία εκτίμηση του σφάλματος (με βάση τον τύπο του ερωτήματος (α)) για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος $Ax = b$, με $b = [8, -10, 8]^T$ εκτελώντας 2 επαναλήψεις της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel με αρχικό διάνυσμα $x_0 = [0, 0, 0]^T$.

- (γ) Δίνεται ο τριδιαγώνιος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$, με στοιχεία $a_{ii} = 9$, για $1 \leq i \leq 100$, $a_{i,i+1} = -2$, για $1 \leq i \leq 99$, $a_{i,i-1} = -2$, για $2 \leq i \leq 100$ και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{100}$ με στοιχεία, $b_i = 7$, $2 \leq i \leq 99$, $b_1 = 5$, $b_{100} = 7$.

Να δοθεί μία εκτίμηση του σφάλματος για τη λύση του συστήματος μετά από 8 επαναλήψεις της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel, με αρχικό διάνυσμα $x_0 = [0, \dots, 0]^T$.

- 2) Έστω ο συμμετρικός πίνακας, με $b \in (1, 2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -b & 0 \\ -b & 8 & -b \\ 0 & -b & 8 \end{pmatrix}$$

- (α) Να μελετήσετε τη σύγκλιση των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel.
(β) Να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης JOR. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης ω , για τις οποίες η JOR συγκλίνει. Υπάρχει τιμή της παραμέτρου ω , ώστε η JOR να συγκλίνει ταχύτερα από την Jacobi;

- 3) (α) Για τον πίνακα της άσκησης 1(β), να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης ω , για τις οποίες η SOR συγκλίνει. Μπορείτε να εξασφαλίσετε ταχύτερη σύγκλιση από την Gauss-Seidel με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;
(β) Να προγραμματίσετε την μέθοδο SOR και να λύσετε το σύστημα της άσκησης 1(γ), χρησιμοποιώντας ως προσεγγιστική τιμή της παραμέτρου χαλάρωσης την προσεγγιστική τιμή που δίνει το αντίστοιχο ομογενές σύστημα (με αρχική συνθήκη $x_0 = [0.5, 0.25, \dots, 0.25, 0.5]^T$ για 5 επαναλήψεις).

4) Δίνεται ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10^{-5} & 5 & 1 \\ 0 & 10^{-5} & 5 \end{pmatrix}$$

Για την επαναληπτική διαδικασία Gauss-Seidel για τη λύση του συστήματος $Ax=b$, με $b=[7,6.00001,5.00001]^T$, να υπολογίσετε μια προσέγγιση της νόρμας του επαναληπτικού πίνακα B_{GS} μετά από 10 επαναλήψεις με τη βοήθεια των διαφορών $\delta_j = \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|$. Να υπολογίσετε μία a-posteriori εκτίμηση για το σφάλμα με βάση τις διαφορές δ_j μετά από 10 επαναλήψεις και να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από $Tol := 10^{-5}$.

5) (α) Να εφαρμόσετε τη μέθοδο των κλίσεων και τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων με δύο επαναλήψεις για το σύστημα της άσκησης 1(β) και να υπολογίσετε μία εκτίμηση σφάλματος.

(β) Να εφαρμόσετε την μέθοδο των κλίσεων και των συζυγών κλίσεων για το πρόβλημα της άσκησης 1(γ). Να υπολογίσετε μία εκτίμηση σφάλματος μετά από 12 επαναλήψεις.

(δ) Να βρεθεί (αναλυτικά) το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου των κλίσεων και της μεθόδου των συζυγών κλίσεων που χρειάζονται ώστε το σφάλμα – σε κατάλληλη νόρμα – να είναι μικρότερο από 10^{-10} .

6) (α) Αν για ένα πίνακα $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ισχύει $UU^T = I_n$ να δείξετε ότι

$$\|U^T A U\|_2 = \|A\|_2 \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(β) Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας της άσκησης 1(γ) A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ένα άνω φράγμα για την νόρμα $\|A^{-1}\|_\infty$ καθώς και για τη φασματική ακτίνα του A^{-1} . Να υπολογιστεί επίσης ένα άνω και κάτω φράγμα για το μέτρο των ιδιοτιμών του A .