《机器学习基础》

# 循环神经网络

# 自然语言处理模型(natural language processing)

- 人工智能和语言学领域的一个分支，旨在使计算机能够理解、解释和产生人类语言的内容。

1. **语音识别**：将语音转换为文本。
2. **自然语言理解**：理解自然语言的意图、情感和语境。
3. **机器翻译**：将一种语言翻译成另一种语言。
4. **文本挖掘和文本分析**：从文本中提取有用信息和洞察。
5. **语言生成**：生成自然语言响应或文本。

# 自然语言处理模型(natural language processing)

- 自然语言处理模型一个重要的用法就是通过之前的信息来决策当前的问题。

(比如就像我们看电影，我们要根据电影之前的情节，才能理解现在的情节。)

例子1：有一朵云飘在（）

例子2：我从小生长在中国。。。我可以说一口流利的（）

# 自然语言处理模型(natural language processing)

- 词袋模型（Bag of Words，BoW）:文本（如一段话、一篇文章或一个文档）被表示为其词汇的无序集合，不考虑语法和词序，但保留词汇的多重性（即词汇出现的频率）。

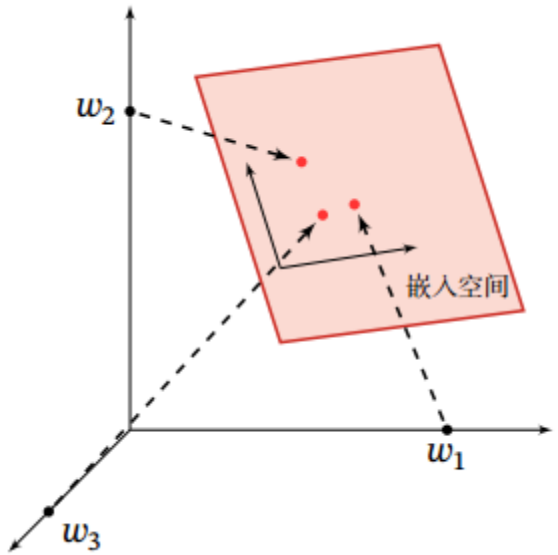
- One Hot编码（One-Hot Encoding）:每个类别值都被转换成一个二进制向量，除了表示该类别的一个位置是1之外，其余位置都是0。这种编码方式因其表示的向量中只有一个元素是"热"的（即1），其他位置都是"冷"的（即0），因此得名One Hot编码。

# 什么是Embedding

- 使用One-hot 方法编码的向量会很高维也很稀疏。假设我们在做自然语言处理（NLP）中遇到了一个包含2000个词的字典，当使用One-hot编码时，每一个词会被一个包含2000个整数的向量来表示，其中1999个数字是0，如果字典再大一点，这种方法的计算效率会大打折扣。

# 什么是Embedding

- 把高维的局部表示空间映射到一个非常低维的分布式表示空间，例如[$w_1$,0,0]，映射到一个更低维的稠密空间上。
- 在用深度学习做 NLP 任务时，通常我们会在输入层，即字ID后接入一个 Embedding Layer，将正整数转换为具有固定大小的向量。



# 什么是Embedding

- ***deep learning is very deep***
  - 使用嵌入层embedding 的第一步是通过索引对该句子进行编码，这里我们给每一个不同的单词分配一个索引，上面的句子就会变成这样:
  - 1、2、3、4、1
  - 我们要决定每一个索引需要分配多少个“潜在因子”，这大体上意味着我们想要多长的向量，通常使用的情况是长度分配为32和50。

# 什么是Embedding

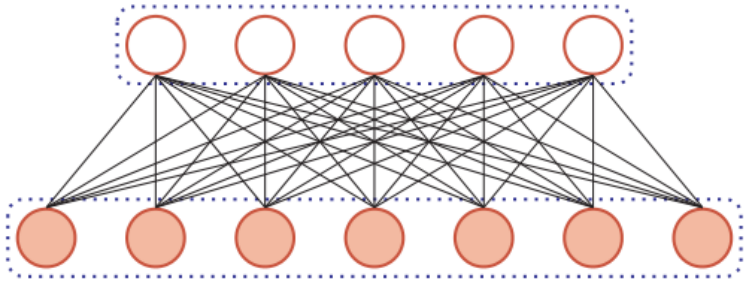
- 假设每个索引指定6个潜在因子。嵌入矩阵则为

| Indices | Latent Factors | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | .32 | .02 | .48 | .21 | .56 | .15 |
| *2* | .65 | .23 | .41 | .57 | .03 | .92 |
| *3* | .45 | .87 | .89 | .45 | .12 | .01 |
| *4* | .65 | .21 | .25 | .45 | .78 | .82 |

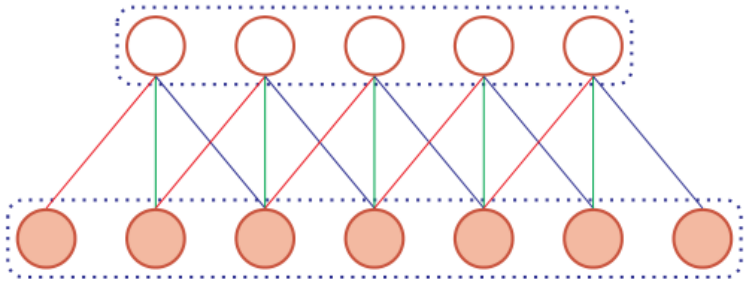
- 这可以使用嵌入矩阵而不是one-hot编码向量来保持每个向量更小。
- 单词“deep”用向量[.32, .02, .48, .21, .56, .15]来表达。
- 每一个单词都会被替换为用于查找嵌入矩阵中向量的索引。
- 大数据时也能有效计算。
- 可以探索在高维空间中哪些词语之间具有相似性

# 前馈网络

- 连接存在层与层之间，每层的节点之间是无连接的。（无循环）
  - 输入和输出的维数都是固定的，不能任意改变。无法处理变长的序列数据。



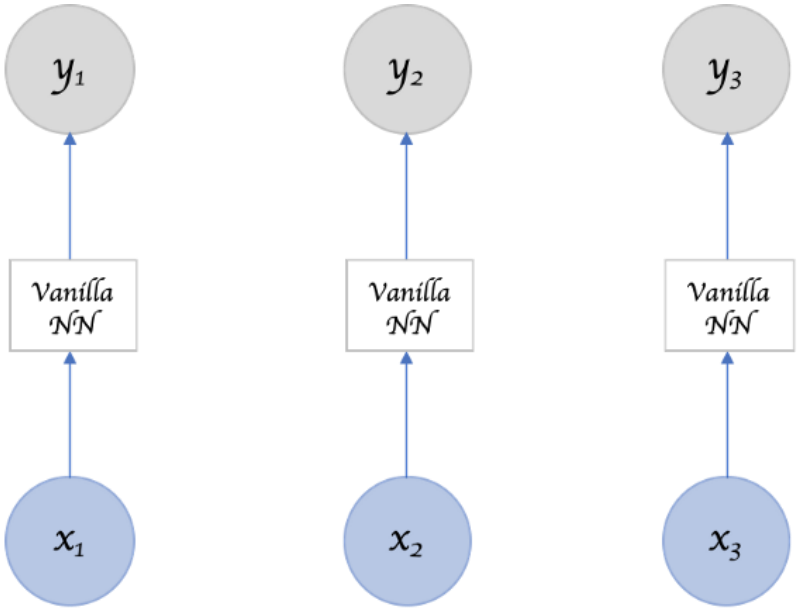
(a) 全连接层



(b) 卷积层

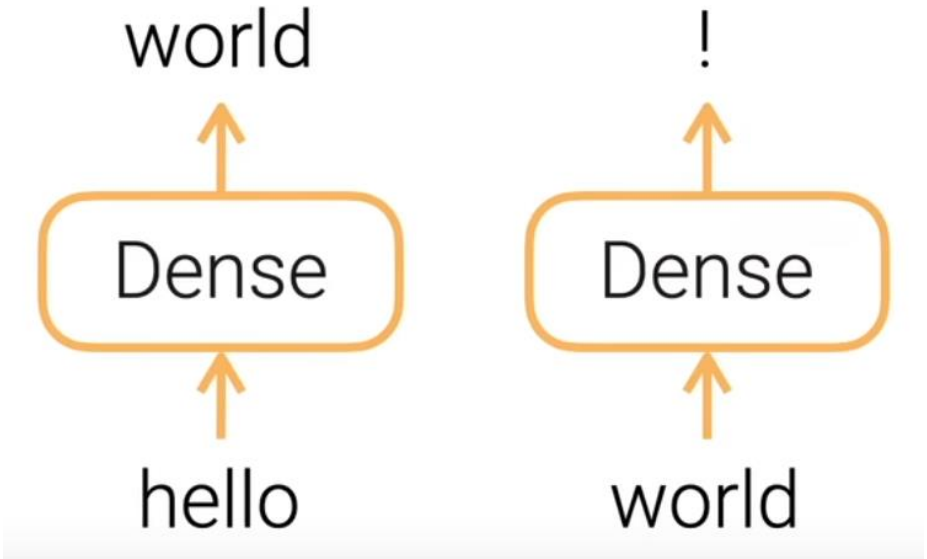
# 前馈网络

- 假设每次输入都是独立的，也就是说每次网络的输出只依赖于当前的输入。



# 自然语言处理模型(natural language processing)

- 人工智能和语言学领域的一个分支，旨在使计算机能够理解、解释和产生人类语言的内容。
- 如何预测下一个要输出的单词?
  - hello → world　　hello world → !
- MLP、CNN无法很好的处理时序数据

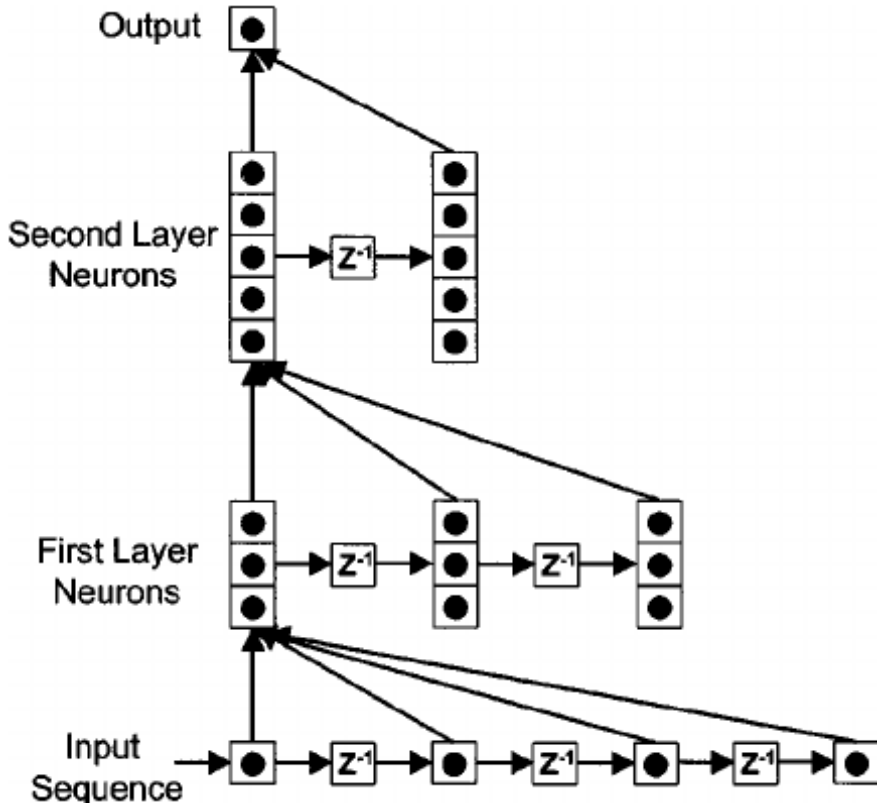


# 如何给网络增加记忆能力？

- 延时神经网络（Time Delay Neural Network，TDNN）
  - 建立一个额外的延时单元，用来存储网络的历史信息（可以包括输入、输出、隐状态等）

$$\boldsymbol{h}_t^{(l)} = f\left(\boldsymbol{h}_t^{(l-1)}, \boldsymbol{h}_{t-1}^{(l-1)}, \cdots, \boldsymbol{h}_{t-K}^{(l-1)}\right)$$

  - 这样，前馈网络就具有了短期记忆的能力。




https://www.researchgate.net/publication/12314435_Neural_system_identification_model_of_human_sound_localization

# 如何给网络增加记忆能力?

- 自回归模型（Autoregressive Model，AR）
  - 一类时间序列模型，用变量$y_t$的历史信息来预测自己

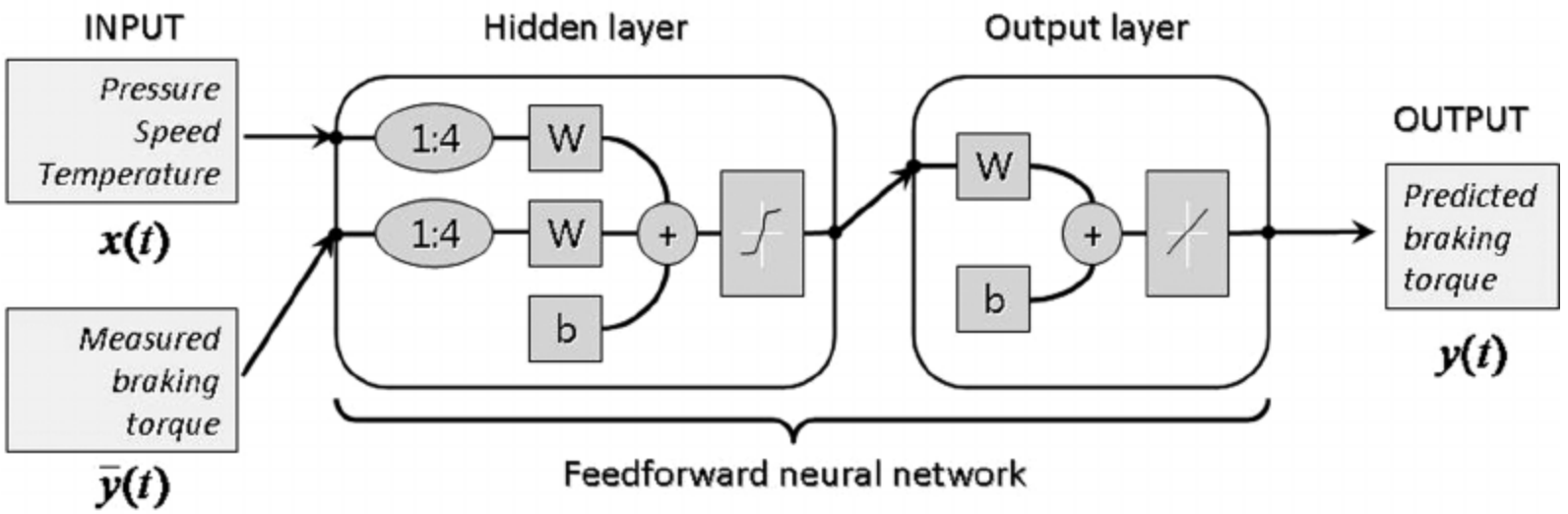
$$\boldsymbol{y}_t = w_0 + \sum_{k=1}^{K} w_k \boldsymbol{y}_{t-k} + \epsilon_t$$

  - $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$为第t个时刻的噪声
- 有外部输入的非线性自回归模型（Nonlinear Autoregressive with Exogenous Inputs Model，NARX）

$$\boldsymbol{y}_t = f(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_{t-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{t-K_x}, \boldsymbol{y}_{t-1}, \boldsymbol{y}_{t-2}, \cdots, \boldsymbol{y}_{t-K_y})$$

  - 其中 $f(\cdot)$ 表示非线性函数，可以是一个前馈网络， $K_x$ 和 $K_y$ 为超参数.

# 非线性自回归模型



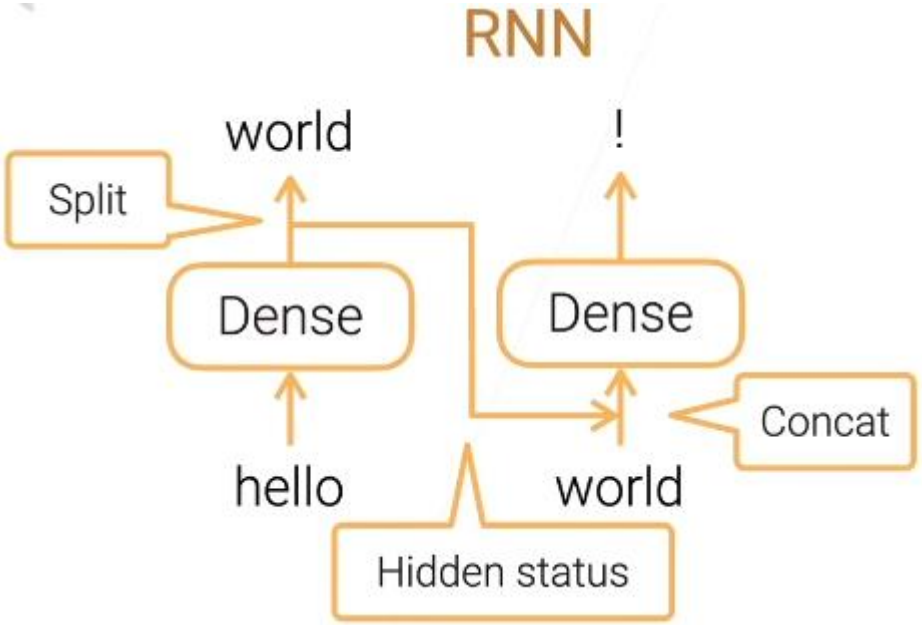

https://www.researchgate.net/publication/234052442_Braking_torque_control_using_reccurent_neural_networks

# 循环神经网络（Recurrent Neural Network，RNN）

- 循环神经网络通过使用带自反馈的神经元，能够处理任意长度的时序数据。

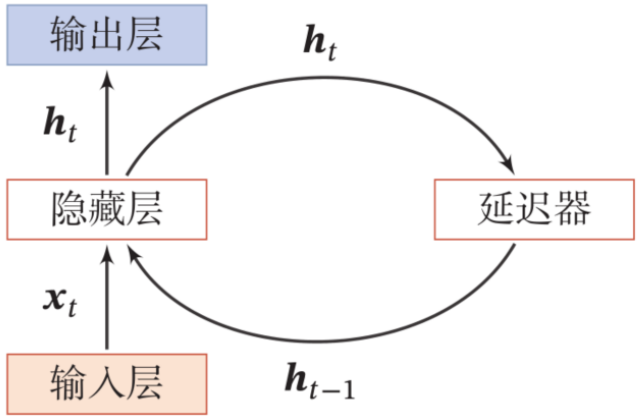
$$\boldsymbol{h}_t = f(\boldsymbol{h}_{t-1}, \boldsymbol{x}_t)$$

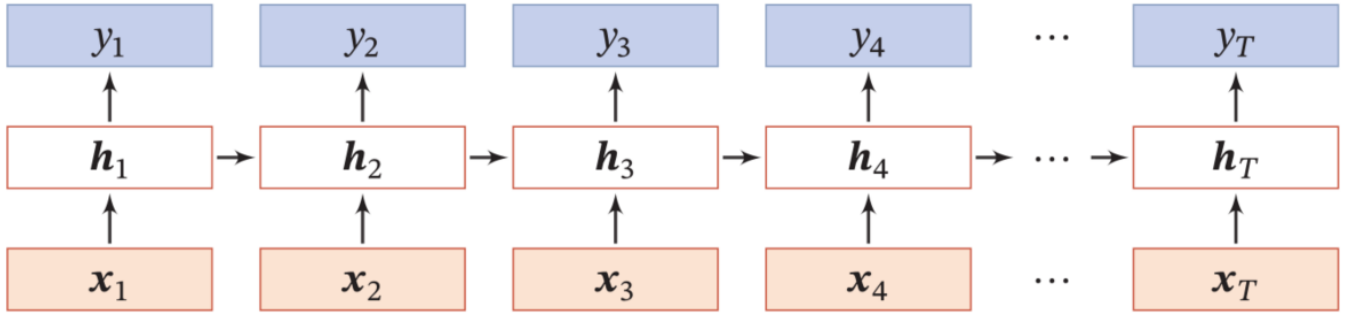
活性值
状态




- 循环神经网络比前馈神经网络更加符合生物神经网络的结构。
- 循环神经网络已经被广泛应用在语音识别、语言模型以及自然语言生成等任务上

# 按时间展开


输出层
$h_t$
$h_t$
隐藏层
延迟器
$x_t$
输入层
$h_{t-1}$


$y_1$
$y_2$
$y_3$
$y_4$
$y_T$
$h_1$
$h_2$
$h_3$
$h_4$
$h_T$
$x_1$
$x_2$
$x_3$
$x_4$
$x_T$

# 简单循环网络（Simple Recurrent Network， SRN）

- 完全连接的循环神经网络

$$\boldsymbol{h}_t = f(\boldsymbol{U}\boldsymbol{h}_{t-1} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{V}\boldsymbol{h}_t,$$

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{U}\boldsymbol{h}_{t-1} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b},$$

- 一个完全连接的循环网络是任何非线性动力系统的近似器。

**定理 6.1 – 循环神经网络的通用近似定理 [Haykin, 2009]**：如果一个完全连接的循环神经网络有足够数量的 sigmoid 型隐藏神经元，它可以以任意的准确率去近似任何一个非线性动力系统

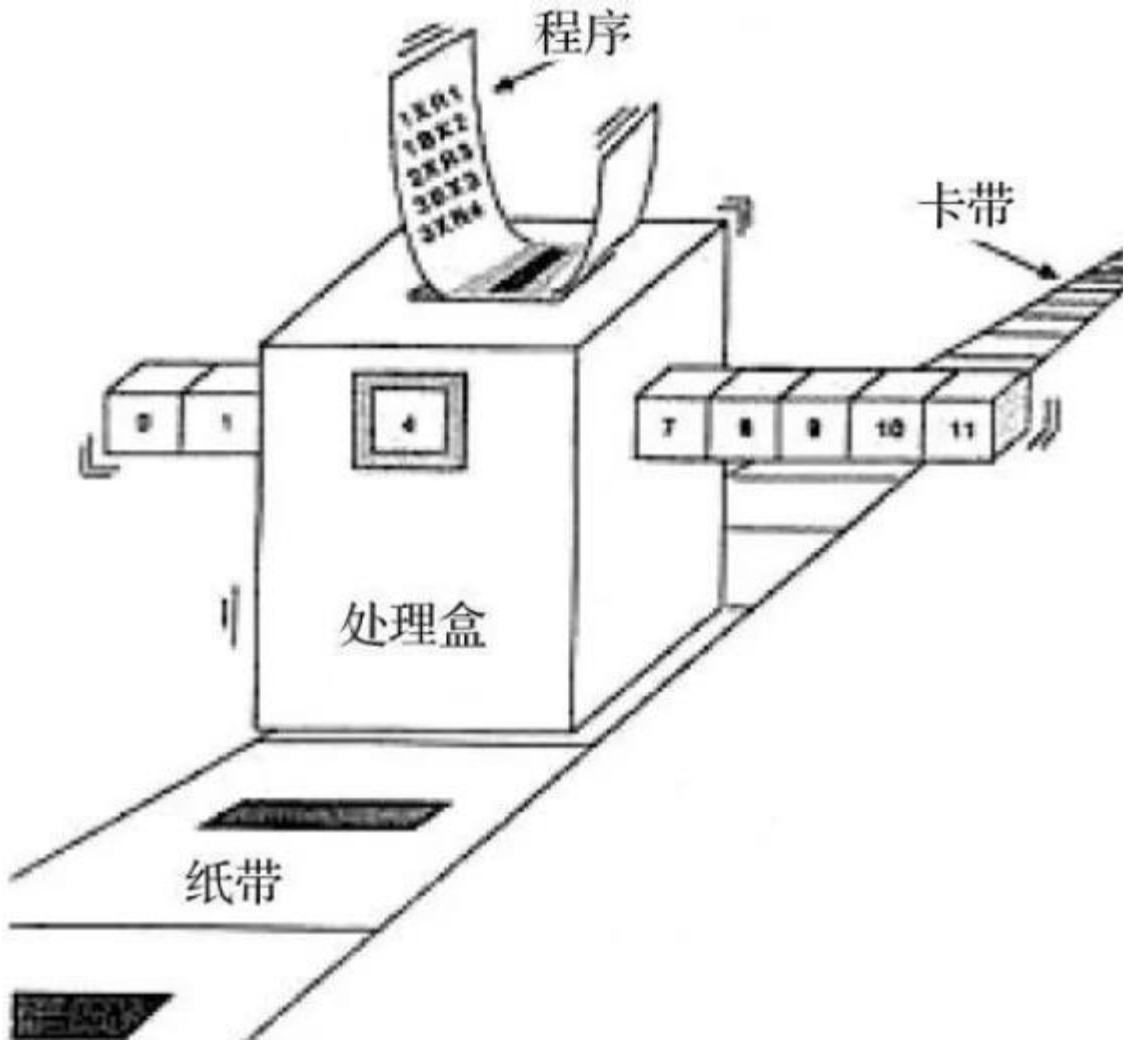
$$\boldsymbol{s}_t = g(\boldsymbol{s}_{t-1}, \boldsymbol{x}_t), \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{y}_t = o(\boldsymbol{s}_t), \tag{6.11}$$

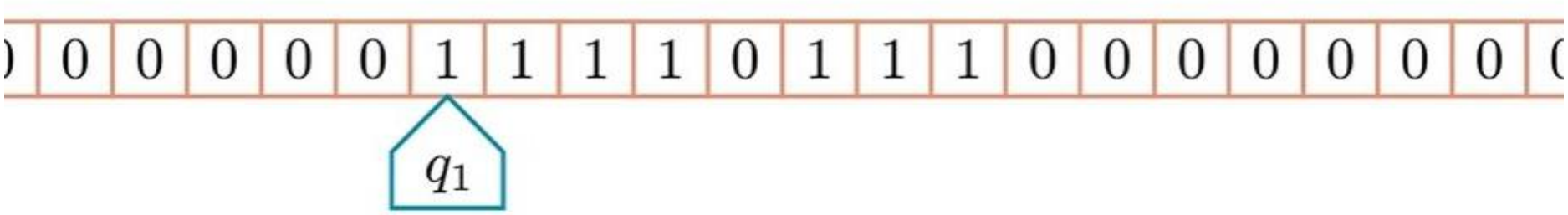
其中 $\boldsymbol{s}_t$ 为每个时刻的隐状态，$\boldsymbol{x}_t$ 是外部输入，$g(\cdot)$ 是可测的状态转换函数，$o(\cdot)$ 是连续输出函数，并且对状态空间的紧致性没有限制.

# 图灵机

- 用纸笔进行数学运算的过程进行抽象，由一个虚拟的机器替代人类进行数学运算。
- 图灵机可以通过简单的读单元格、查指令集表、改变单元格状态、移动纸带这些非常简单、基本的操作来进行非常复杂的数学运算。
- 图灵机为确定哪些问题是可计算的提供了一个标准。如果一个问题可以用图灵机解决，那么这个问题就是可计算的；否则，它是不可计算的。

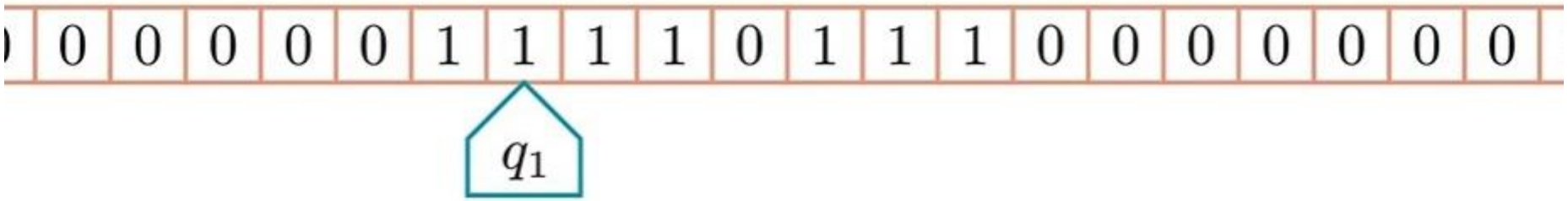


# 图灵机



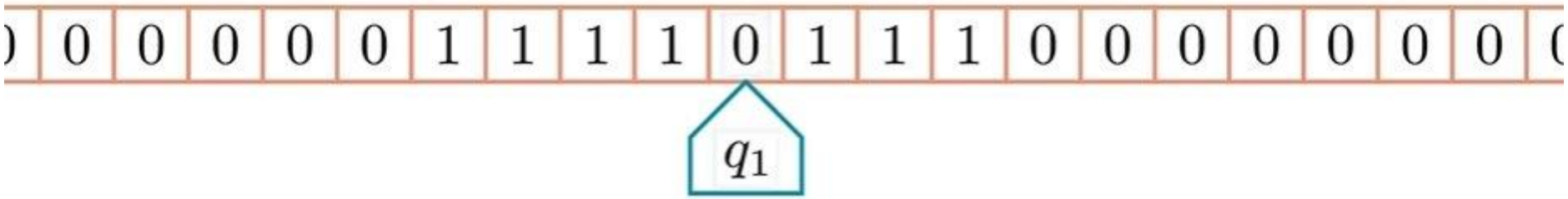

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $1\,R\,q_2$ | $1\,R\,q_1$ |
| $q_2$ | $0\,L\,q_3$ | $1\,R\,q_2$ |
| $q_3$ | $0\,H\,q_3$ | $0\,H\,q_3$ |

# 图灵机



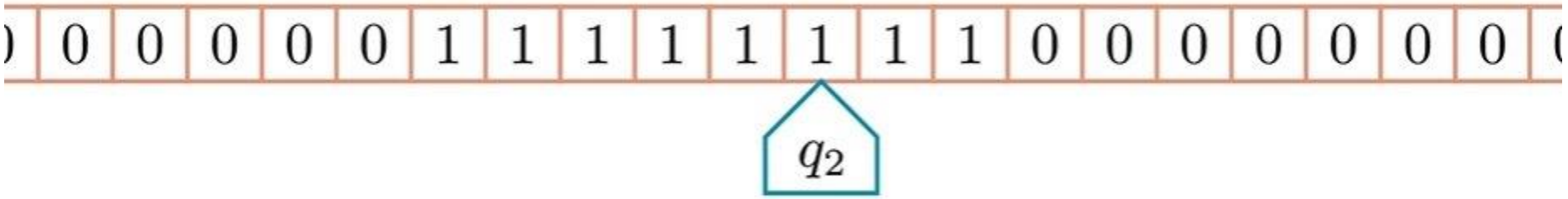

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $1\,R\,q_2$ | $1\,R\,q_1$ |
| $q_2$ | $0\,L\,q_3$ | $1\,R\,q_2$ |
| $q_3$ | $0\,H\,q_3$ | $0\,H\,q_3$ |

# 图灵机




| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $1\,R\,q_2$ | $1\,R\,q_1$ |
| $q_2$ | $0\,L\,q_3$ | $1\,R\,q_2$ |
| $q_3$ | $0\,H\,q_3$ | $0\,H\,q_3$ |

# 图灵机




| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $1\,R\,q_2$ | $1\,R\,q_1$ |
| $q_2$ | $0\,L\,q_3$ | $1\,R\,q_2$ |
| $q_3$ | $0\,H\,q_3$ | $0\,H\,q_3$ |

# 图灵完备

- 图灵完备（Turing Completeness）是指一种数据操作规则，比如一种计算机编程语言，可以实现图灵机的所有功能，解决所有的可计算问题。

> **定理 6.2**–**图灵完备 [Siegelmann et al., 1991]**： 所有的图灵机都可以被一个由使用 Sigmoid 型激活函数的神经元构成的全连接循环网络来进行模拟.

- 一个完全连接的循环神经网络可以近似解决所有的可计算问题。

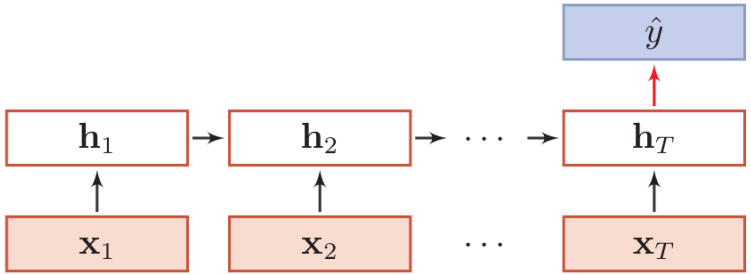
# 应用到机器学习

# 应用到机器学习

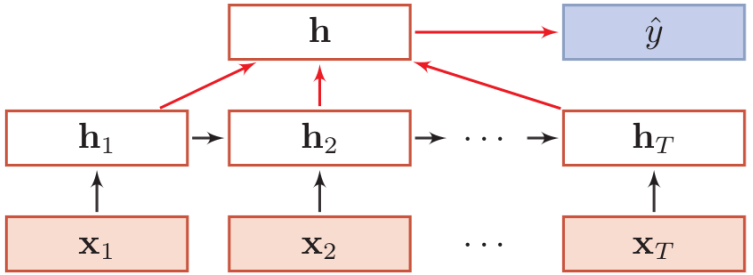
- 序列到类别模式
- 同步的序列到序列模式
- 异步的序列到序列模式

# 应用到机器学习

## 序列到类别




(a) 正常模式



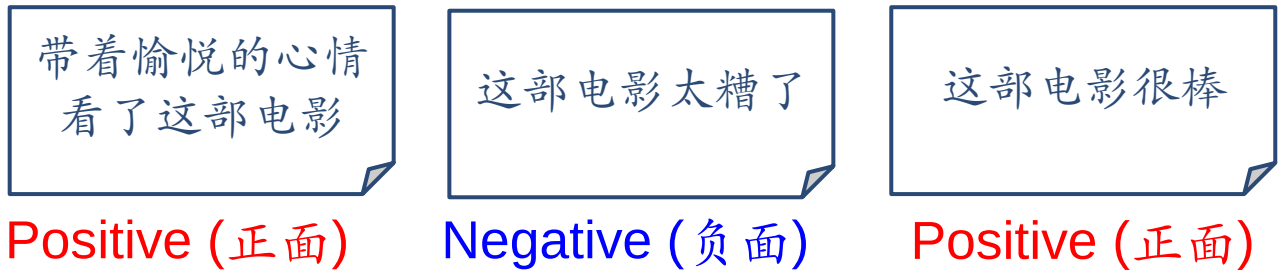

(b) 按时间进行平均采样模式

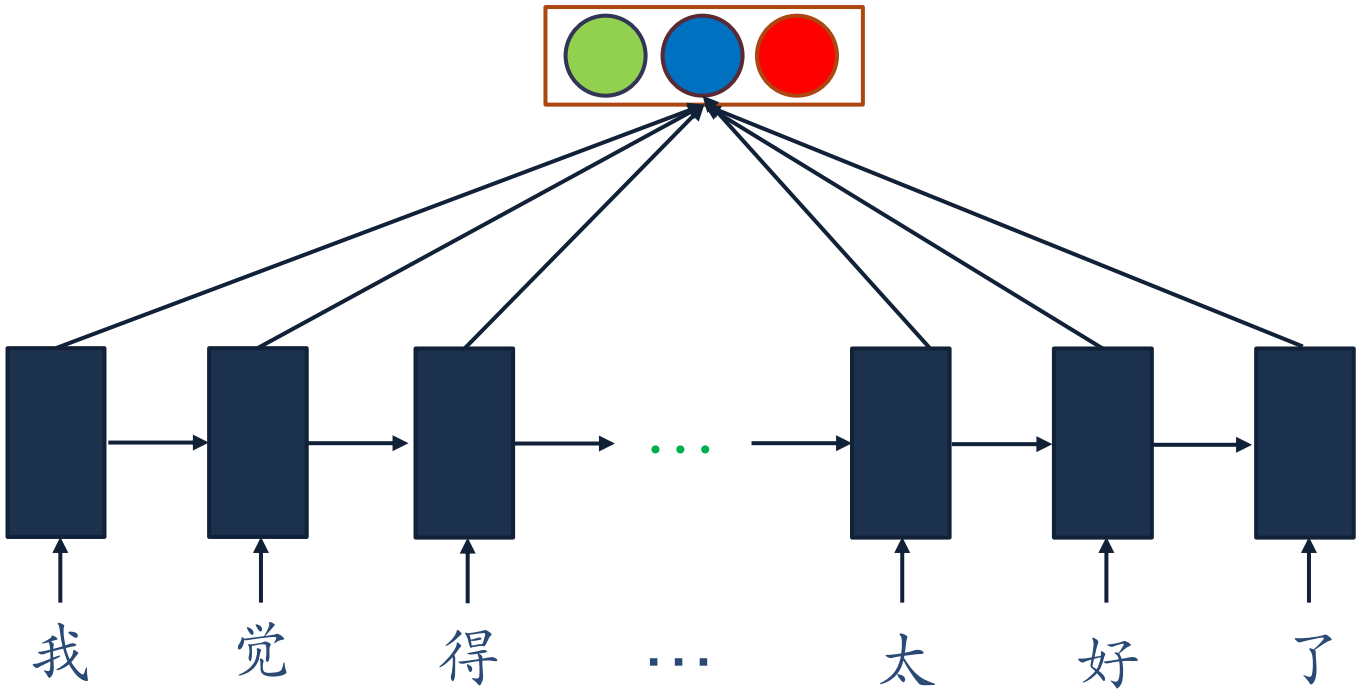
$$\hat{y} = g(\boldsymbol{h}_T),$$

$$\hat{y} = g\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{h}_t\Big).$$

# 序列到类别

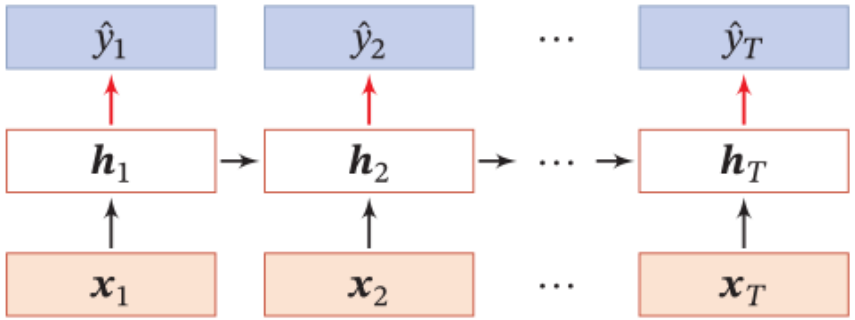
- 情感分类


带着愉悦的心情
看了这部电影
这部电影太糟了
这部电影很棒
Positive (正面)
Negative (负面)
Positive (正面)


我
觉
得
…
太
好
了

# 应用到机器学习

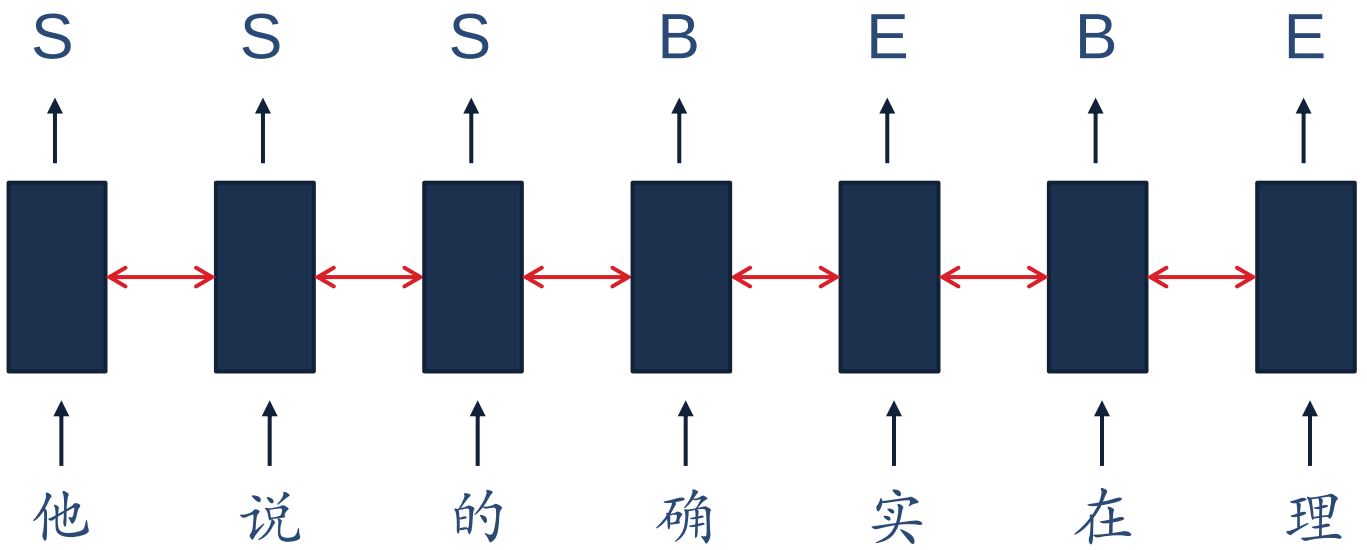
- 同步的序列到序列模式




$$\hat{y}_t = g(\boldsymbol{h}_t), \qquad \forall t \in [1, T].$$

# 同步的序列到序列模式

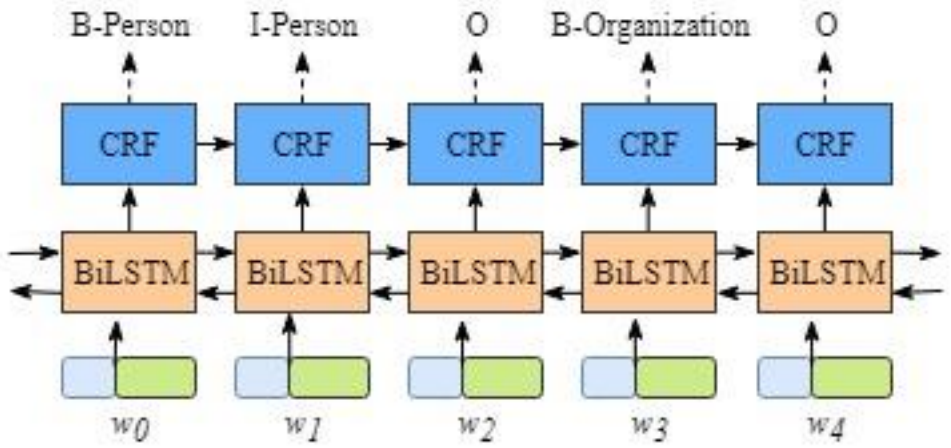
- 中文分词



# 同步的序列到序列模式

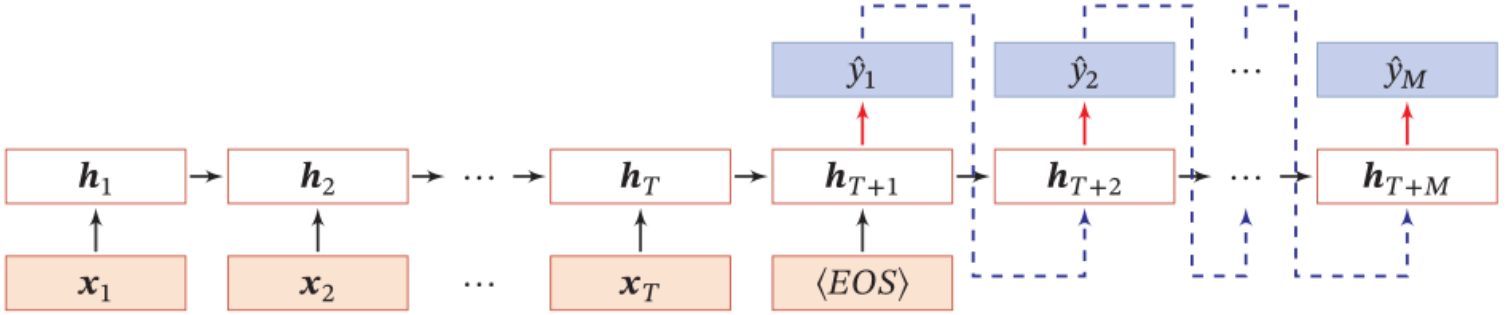
- 信息抽取(Information Extraction，IE)
  - 从无结构的文本中抽取结构化的信息，形成知识

小米创始人雷军表示，该公司2015年营收达到780亿元人民币，较2014年的743亿元人民币增长了5%。



# 应用到机器学习

- 异步的序列到序列模式



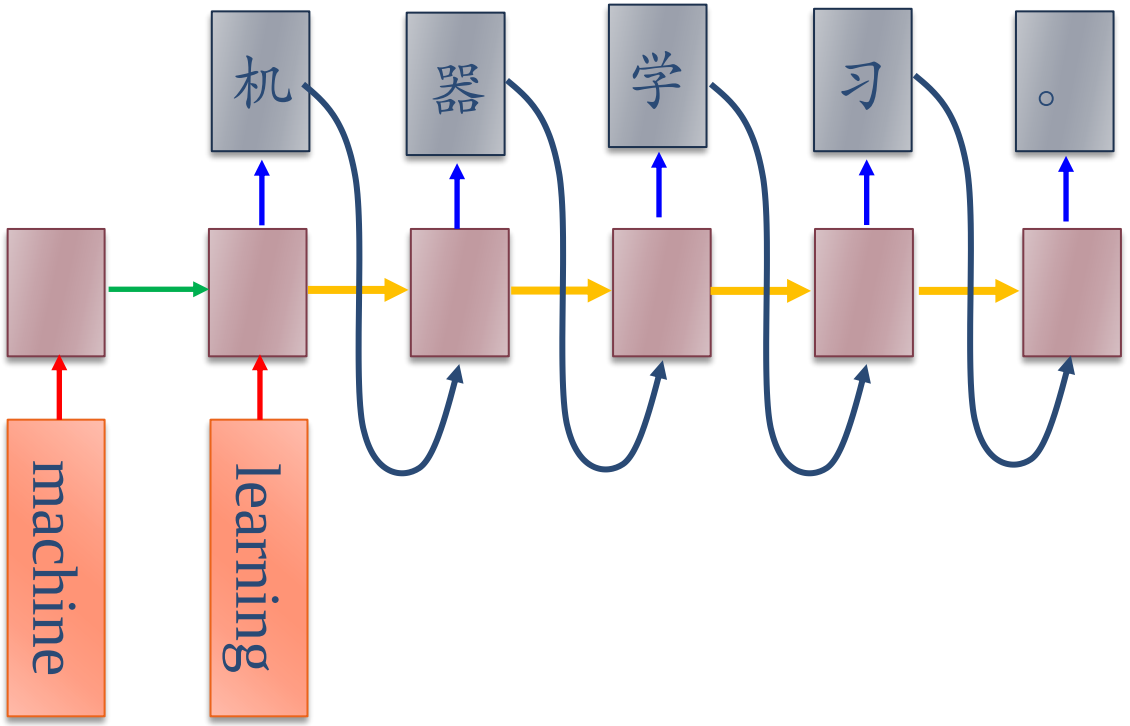

$$\boldsymbol{h}_t = f_1(\boldsymbol{h}_{t-1}, \boldsymbol{x}_t), \qquad \forall t \in [1, T]$$

$$\boldsymbol{h}_{T+t} = f_2(\boldsymbol{h}_{T+t-1}, \hat{\boldsymbol{y}}_{t-1}), \qquad \forall t \in [1, M]$$

$$\hat{y}_t = g(\boldsymbol{h}_{T+t}), \qquad \forall t \in [1, M]$$

# 异步的序列到序列模式

- 机器翻译



# 参数学习

- 机器学习
  - 给定一个训练样本(x,y)，其中
    - $x = (x_1, \ldots, x_T)$为长度是T 的输入序列，
    - $y = (y_1, \ldots, y_T)$是长度为T 的标签序列。

$$\boldsymbol{h}_t = f(\boldsymbol{U}\boldsymbol{h}_{t-1} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{V}\boldsymbol{h}_t,$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{U}\boldsymbol{h}_{k-1} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}$$

- 时刻t的瞬时损失函数为

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}(\mathbf{y}_t, g(\mathbf{h}_t)),$$

- 总损失函数

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \mathcal{L}_t.$$

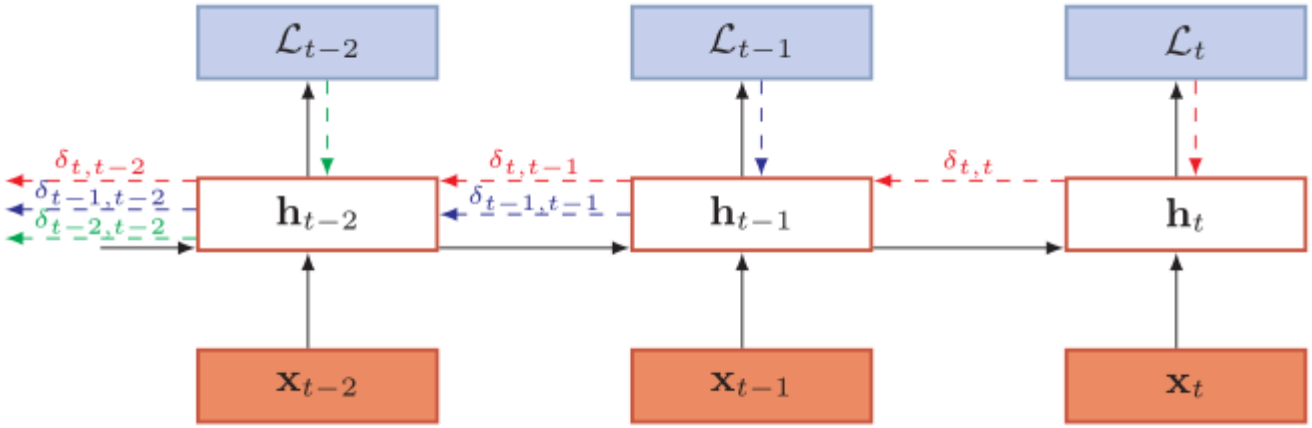
- 梯度

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{U}} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \boldsymbol{U}}, \quad \longleftarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial u_{ij}} = \sum_{k=1}^{t} \frac{\partial^+ \boldsymbol{z}_k}{\partial u_{ij}} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \boldsymbol{z}_k},$$

# 梯度

- 随时间反向传播算法

$$\mathbf{h}_{t+1} = f(\mathbf{z}_{t+1}) = f(U\mathbf{h}_t + W\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{b})$$




$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{t} \delta_{t,k}\mathbf{h}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

$$\delta_{t,k} = \prod_{\tau=k}^{t-1}\Big(\mathrm{diag}(f'(\mathbf{z}_\tau))U^{\mathrm{T}}\Big)\delta_{t,t}$$

$\delta_{t,k}$为第t时刻的损失对第k步隐藏神经元的净输入$z_k$的导数

# 梯度消失/爆炸

- 梯度

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{t} \delta_{t,k}\mathbf{h}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{W}} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{t} \delta_{t,k}\boldsymbol{x}_{k}^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{b}} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{t} \delta_{t,k}.$$

- 其中

$$\delta_{t,k} = \prod_{\tau=k}^{t-1}\left(\frac{\mathrm{diag}(f'(\mathbf{z}_\tau))U^{\mathrm{T}}}{\lambda}\right)\delta_{t,t}$$

由于梯度爆炸或消失问题，实际上只能学习到短周期的依赖关系。这就是所谓的长程依赖问题。

# 梯度

- 反向传播的长程依赖问题
  - 需要在内存中保留很多中间值
  - 梯度消失或梯度爆炸

- 裁剪梯度以防止发散

$$\mathbf{g} \leftarrow \min\left(1, \frac{\theta}{\|\mathbf{g}\|}\right)\mathbf{g}$$

- 重新缩放到最大尺寸为 $\theta$ 的梯度

# 长程依赖问题

- 循环神经网络在时间维度上非常深!
  - 梯度消失或梯度爆炸

- 如何改进?
  - 梯度爆炸问题
    - 权重衰减
    - 梯度截断
  - 梯度消失问题
    - 改进模型

# 长程依赖问题

- 改进方法
  - 循环边改为线性依赖关系

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_{t-1} + g(\mathbf{x}_t; \theta),$$

  - 增加非线性

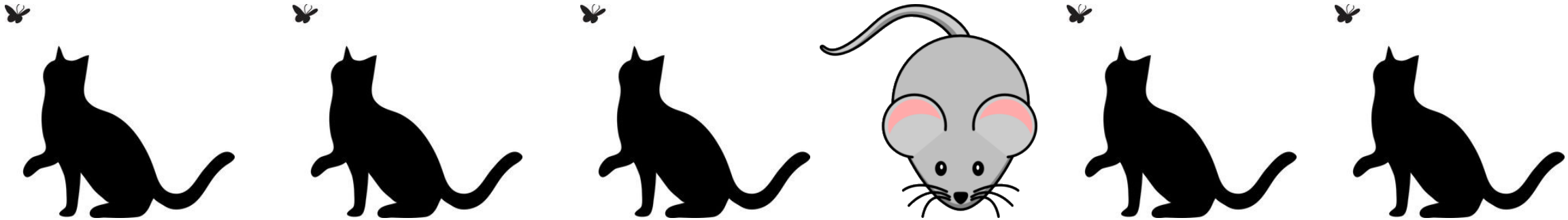
$$\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_{t-1} + g(\mathbf{x}_t, \mathbf{h}_{t-1}; \theta),$$

# 长程依赖问题

1. **长短期记忆网络（LSTM）**：通过引入门控机制，LSTM可以学习控制信息的流动，从而更好地捕捉长期依赖关系。
2. **门控循环单元（GRU）**：GRU是LSTM的一个变种，它将LSTM中的遗忘门和输入门合并为一个更新门，简化了模型结构。
3. **深度循环网络（Deep RNN）**：通过堆叠多个RNN层，可以增加模型的容量，帮助捕捉更高层次的依赖关系。
4. **注意力机制（Attention Mechanism）**：注意力机制允许模型在每个时间步动态地聚焦于序列中的不同部分，从而更好地处理长期依赖。

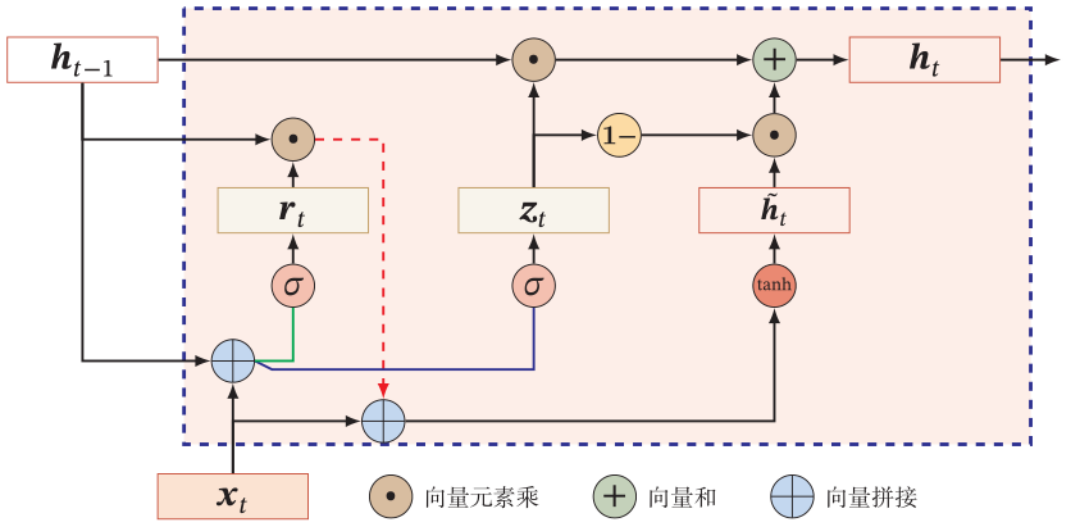
# 长短期记忆神经网络
# 门控循环单元

- 并非所有元素都具有同等意义



- 只记住相关的元素
  - 需要注意的机制（更新门）
  - 需要忘记的机制（重置门）

# 门控循环单元 GRU




$$\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{h}_{t-1} + g(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{h}_{t-1}; \theta),$$

$$\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{z}_t \odot \boldsymbol{h}_{t-1} + (1 - \boldsymbol{z}_t) \odot g(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{h}_{t-1}; \theta),$$

重置门

$$\mathbf{r}_t = \sigma(\mathbf{W}_r \mathbf{x}_t + \mathbf{U}_r \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_r),$$

$$\mathbf{z}_t = \sigma(\mathbf{W}_z \mathbf{x}_t + \mathbf{U}_z \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_z),$$

更新门

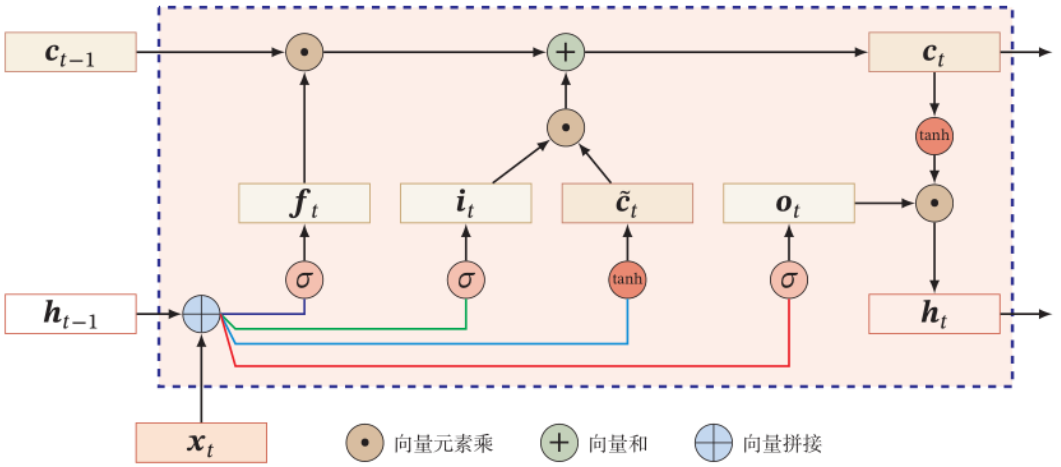
$$\tilde{\mathbf{h}}_t = \tanh(\mathbf{W}_c \mathbf{x}_t + \mathbf{U}(\mathbf{r}_t \odot \mathbf{h}_{t-1}))$$

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{z}_t \odot \mathbf{h}_{t-1} + (1 - \mathbf{z}_t) \odot \tilde{\mathbf{h}}_t,$$

# 长短期记忆神经网络（Long Short-Term Memory, LSTM ）

# 长短期记忆神经网络（Long Short-Term Memory, LSTM ）

$$\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{h}_{t-1} + g(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{h}_{t-1}; \theta),$$




$$\mathbf{i}_t = \sigma(W_i \mathbf{x}_t + U_i \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_i),$$

$$\mathbf{f}_t = \sigma(W_f \mathbf{x}_t + U_f \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_f),$$

$$\mathbf{o}_t = \sigma(W_o \mathbf{x}_t + U_o \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_o),$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_t = \tanh(W_c \mathbf{x}_t + U_c \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_c)$$

$$\mathbf{c}_t = \mathbf{f}_t \odot \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{i}_t \odot \tilde{\mathbf{c}}_t,$$

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{o}_t \odot \tanh(\mathbf{c}_t),$$

# 长短期记忆（LSTM）

- 遗忘门
  - 将每个值尽可能收缩为零
- 输入门
  - 决定是否应忽略输入数据
- 输出门
  - 决定隐含状态是否用于 LSTM 生成的输出
- 隐含状态
- 隐含状态和候选记忆

# LSTM的各种变体

- 没有遗忘门

$$\mathbf{c}_t = \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{i}_t \odot \tilde{\mathbf{c}}_t.$$

- 耦合输入门和遗忘门

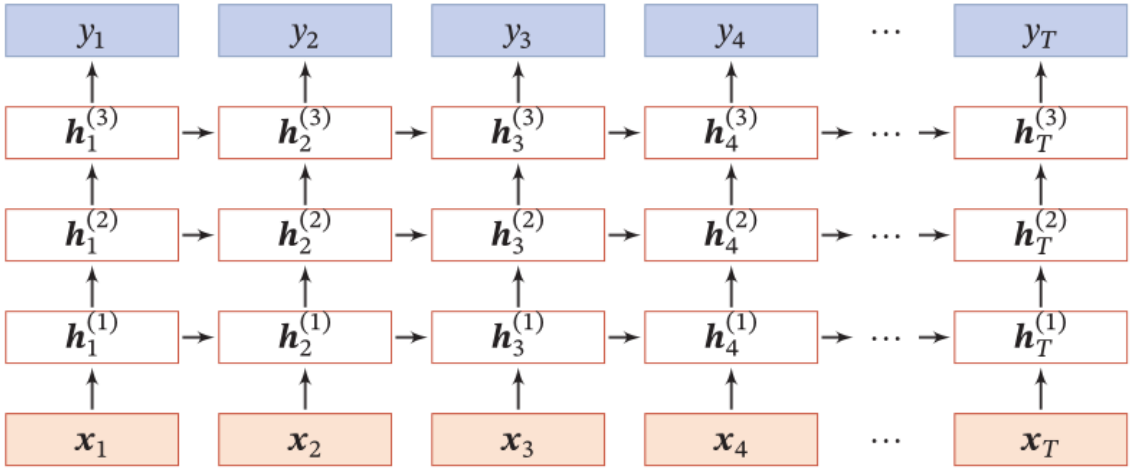
$$\mathbf{f}_t + \mathbf{i}_t = \mathbf{1}. \qquad \boldsymbol{c}_t = (1 - \boldsymbol{i}_t) \odot \boldsymbol{c}_{t-1} + \boldsymbol{i}_t \odot \tilde{\boldsymbol{c}}_t.$$

- peephole连接

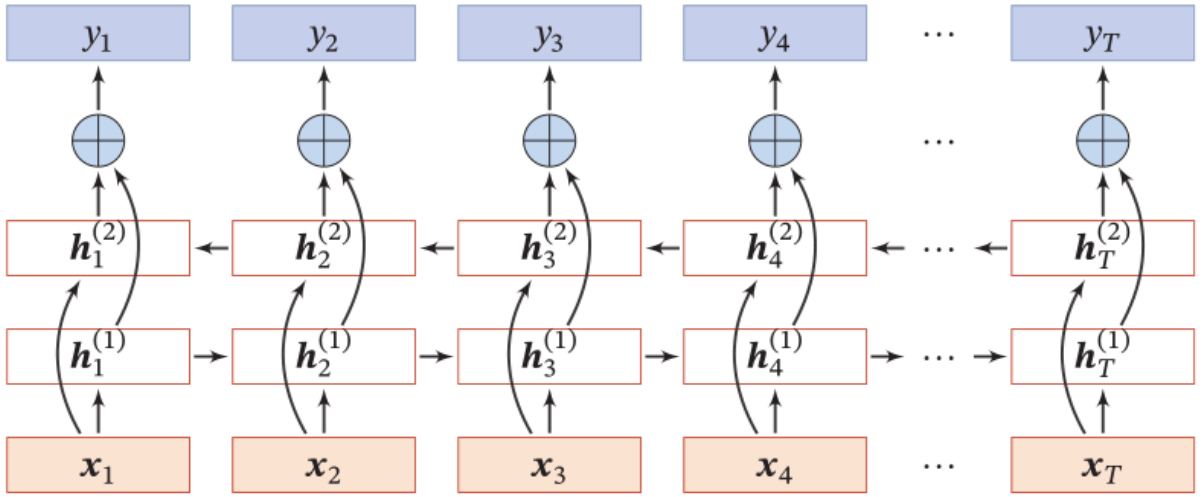
$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_t &= \sigma(W_i \mathbf{x}_t + U_i \mathbf{h}_{t-1} + V_i \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{b}_i), \\
\mathbf{f}_t &= \sigma(W_f \mathbf{x}_t + U_f \mathbf{h}_{t-1} + V_f \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{b}_f), \\
\mathbf{o}_t &= \sigma(W_o \mathbf{x}_t + U_o \mathbf{h}_{t-1} + V_o \mathbf{c}_t + \mathbf{b}_o),
\end{aligned}$$

# 深层循环神经网络

# 堆叠循环神经网络


$y_1$ $y_2$ $y_3$ $y_4$ ⋯ $y_T$
$\boldsymbol{h}_1^{(3)}$ $\boldsymbol{h}_2^{(3)}$ $\boldsymbol{h}_3^{(3)}$ $\boldsymbol{h}_4^{(3)}$ ⋯ $\boldsymbol{h}_T^{(3)}$
$\boldsymbol{h}_1^{(2)}$ $\boldsymbol{h}_2^{(2)}$ $\boldsymbol{h}_3^{(2)}$ $\boldsymbol{h}_4^{(2)}$ ⋯ $\boldsymbol{h}_T^{(2)}$
$\boldsymbol{h}_1^{(1)}$ $\boldsymbol{h}_2^{(1)}$ $\boldsymbol{h}_3^{(1)}$ $\boldsymbol{h}_4^{(1)}$ ⋯ $\boldsymbol{h}_T^{(1)}$
$\boldsymbol{x}_1$ $\boldsymbol{x}_2$ $\boldsymbol{x}_3$ $\boldsymbol{x}_4$ ⋯ $\boldsymbol{x}_T$

# 双向循环神经网络

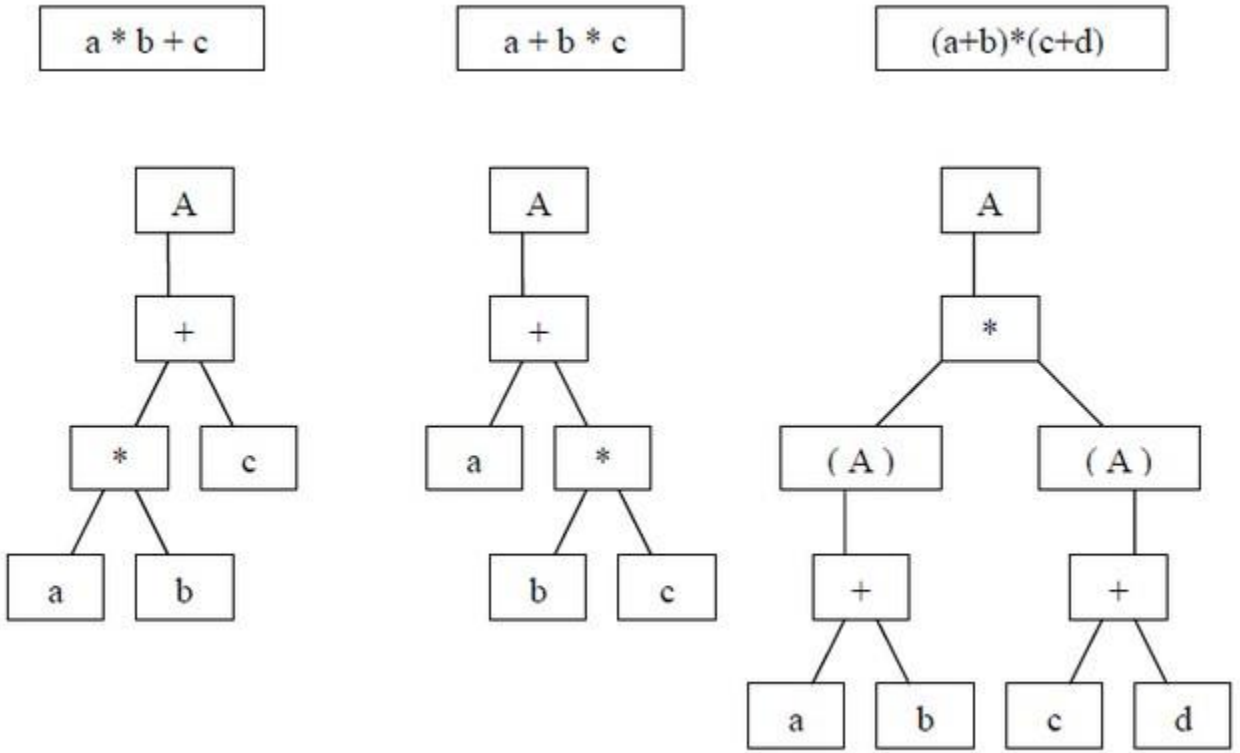

$y_1$
$y_2$
$y_3$
$y_4$
$y_T$
$h_1^{(2)}$
$h_2^{(2)}$
$h_3^{(2)}$
$h_4^{(2)}$
$h_T^{(2)}$
$h_1^{(1)}$
$h_2^{(1)}$
$h_3^{(1)}$
$h_4^{(1)}$
$h_T^{(1)}$
$x_1$
$x_2$
$x_3$
$x_4$
$x_T$

# 扩展到图结构

# 扩展到图结构

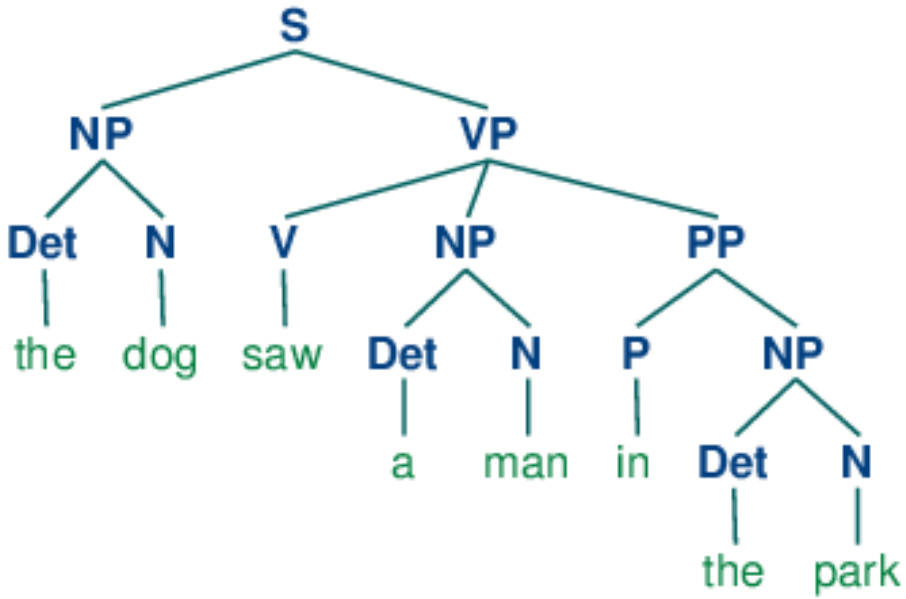
# 树结构

- 程序语言的句法结构



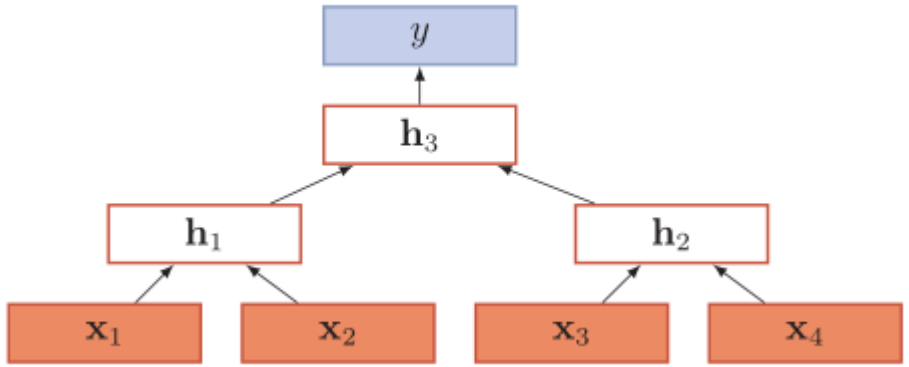
# 树结构

- 自然语言的句法结构



# 递归神经网络Recursive Neural Network

- 递归神经网络实在一个有向图无循环图上共享一个组合函数




$$\mathbf{h}_i = f(\mathbf{h}_{\pi_i})$$

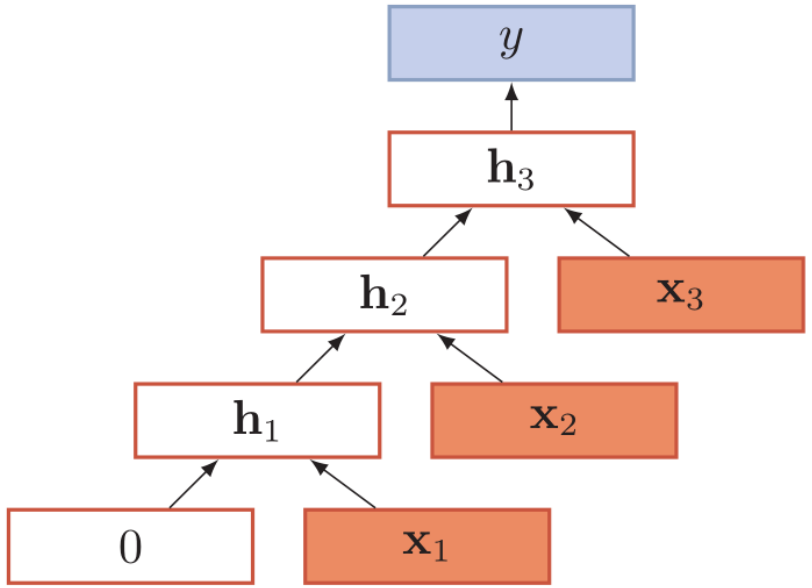
$$\mathbf{h}_1 = f(W \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{h}_2 = f(W \begin{bmatrix} \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{h}_3 = f(W \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{b}),$$

# 递归神经网络

- 退化为循环神经网络



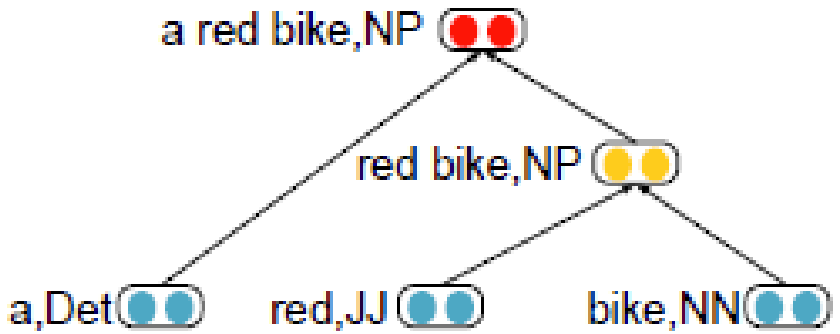

$$\mathbf{h}_t = f(\mathbf{h}_{t-1}, \mathbf{x}_t),$$

# 递归神经网络

给定一个语法树，

$p_2 \rightarrow ap_1$,

$p_1 \rightarrow bc$.




$$\mathbf{p}_1 = f(\mathbf{W}\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{c}\end{bmatrix}),$$

$$\mathbf{p}_2 = f(\mathbf{W}\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{p}_1\end{bmatrix}).$$

# 图网络

- 在实际应用中，很多数据是图结构的，比如知识图谱、社交网络、分子网络等。而前馈网络和循环网络很难处理图结构的数据。

# 图网络

- 对于一个任意的图结构G(V,E)
  - 更新函数

$$\mathbf{m}_t^{(v)} = \sum_{u \in N(v)} f\left(\mathbf{h}_{t-1}^{(v)}, \mathbf{h}_{t-1}^{(u)}, \mathbf{e}^{(u,v)}\right)$$

$$\mathbf{h}_t^{(v)} = g\left(\mathbf{h}_{t-1}^{(v)}, \mathbf{m}_t^{(v)}\right)$$

  - 读出函数

$$\mathbf{y}_t = g\left(\{\mathbf{h}_T^{(v)} | v \in \mathcal{V}\}\right)$$

# 图网络

https://arxiv.org/pdf/1806.01261.pdf