第三章 蒙特卡洛定价方法

Lianghai Xiao

https://github.com/styluck/mlb

作业邮箱：alswfx@126.com

蒙特卡洛方法

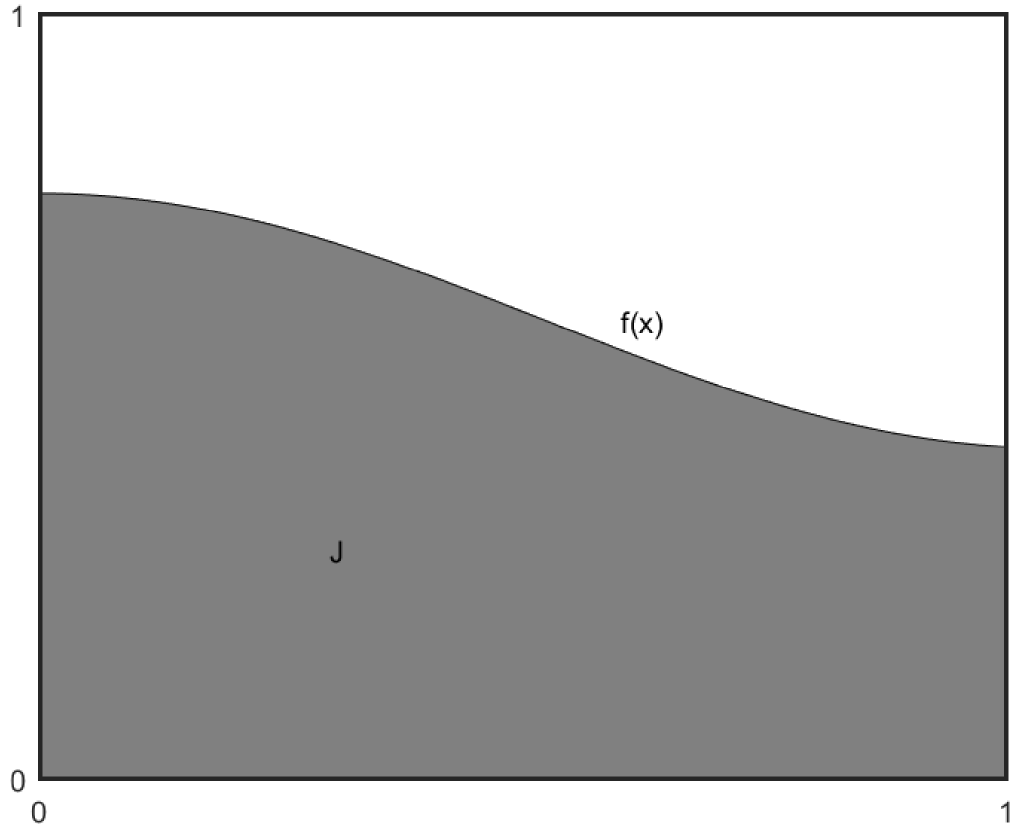
- 对一些复杂的物理问题进行数值计算，传统的数值方法在处理这些问题时遇到了很大的困难。
- 蒙特卡洛方法是一种以概率统计理论为指导的数值计算方法。
- 蒙特卡洛方法的基本思想是通过大量随机试验，利用概率论和数理统计的方法，对所求解的问题进行近似计算。
- 这一方法源于美国在第一次世界大战期间研制原子弹的“曼哈顿计划 该计划的主持人之一，数学家冯·诺伊曼用摩纳哥驰名世界的赌城 Monte Carlo来命名这种方法，因此称之为Monte Carlo方法。

蒙特卡洛方法

- 蒙特卡洛方法的工作步骤：
  - 1. 建立一个与所求解问题相关的概率模型，通常是一个随机变量或随机过程。
  - 2. 利用计算机生成大量的随机数，并根据概率模型对这些随机数进行抽样，得到一组随机样本。
  - 3. 对这些随机样本进行统计分析，得到问题的近似解。

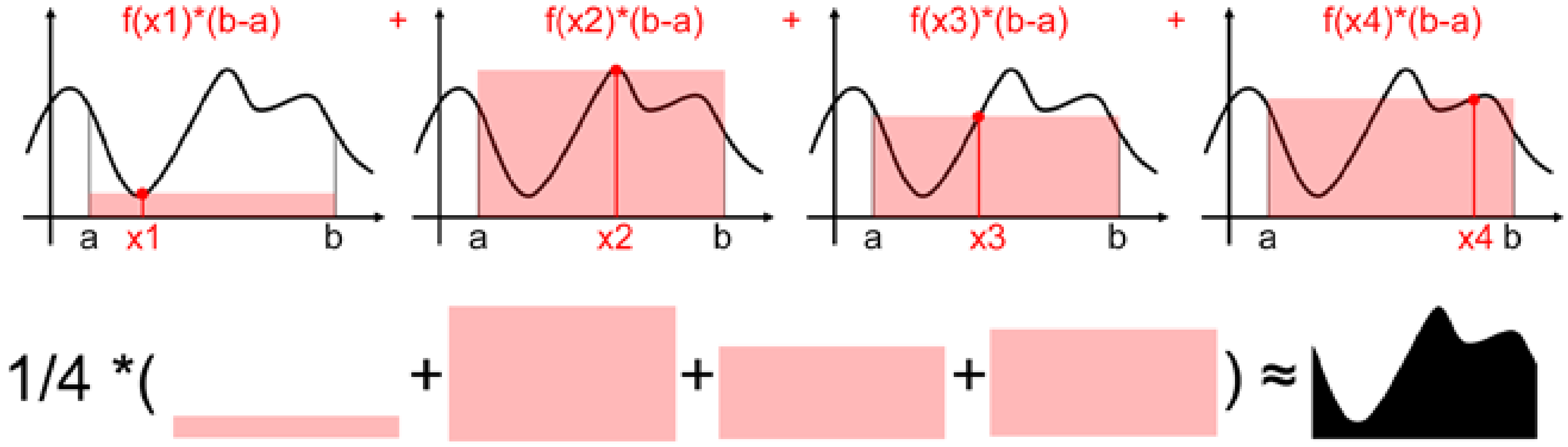
用蒙特卡洛投点法求定积分

- 求解定积分实际上是在求面积，将其设为J，
- 通过在包含定积分的面积为S的区域（通常为矩形）内随机产生一些随机数，其数量为N
- 统计在积分区域内的随机数，其数量为i
- 则产生的随机数在积分区域内的概率为$\frac{i}{N}$，这与积分区域与总区域面积的比值应该是近似相等的，即
$$\frac{J}{S} \approx \frac{i}{N}$$
- 最后即得所求定积分算式为：$J = \frac{i}{N} S$



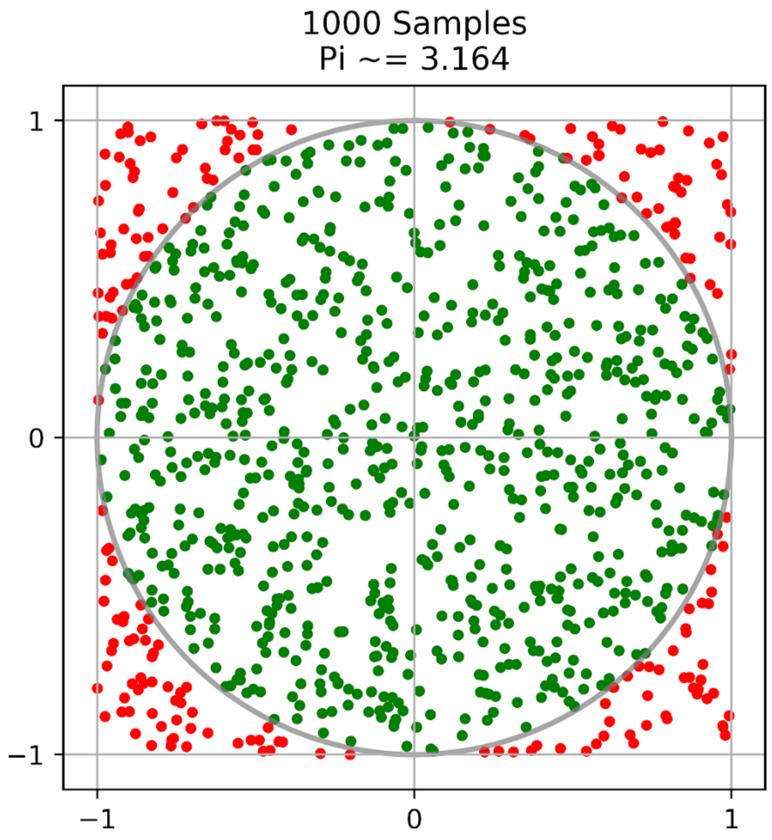
蒙特卡洛平均法求积分

- 在$[a,b]$之间随机取一系列点x_i时（x_i满足均匀分布），把估算出来的面积取平均来作为积分估计，这样的采样点越来越多，那么估计也就越来越接近真实值。



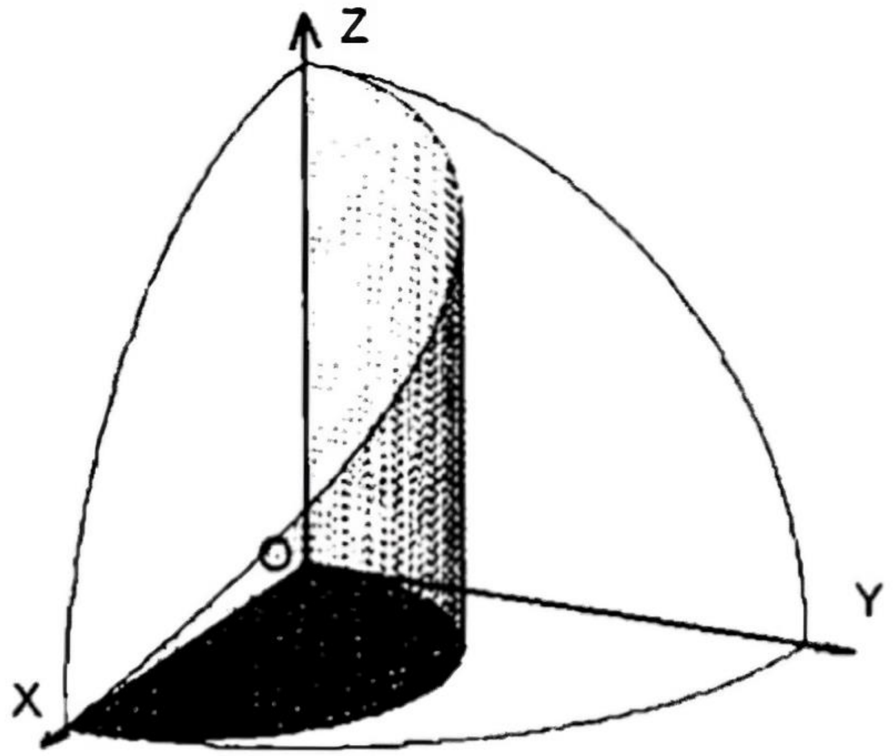
估计π的值

- 利用蒙特卡洛方法估计π的值。



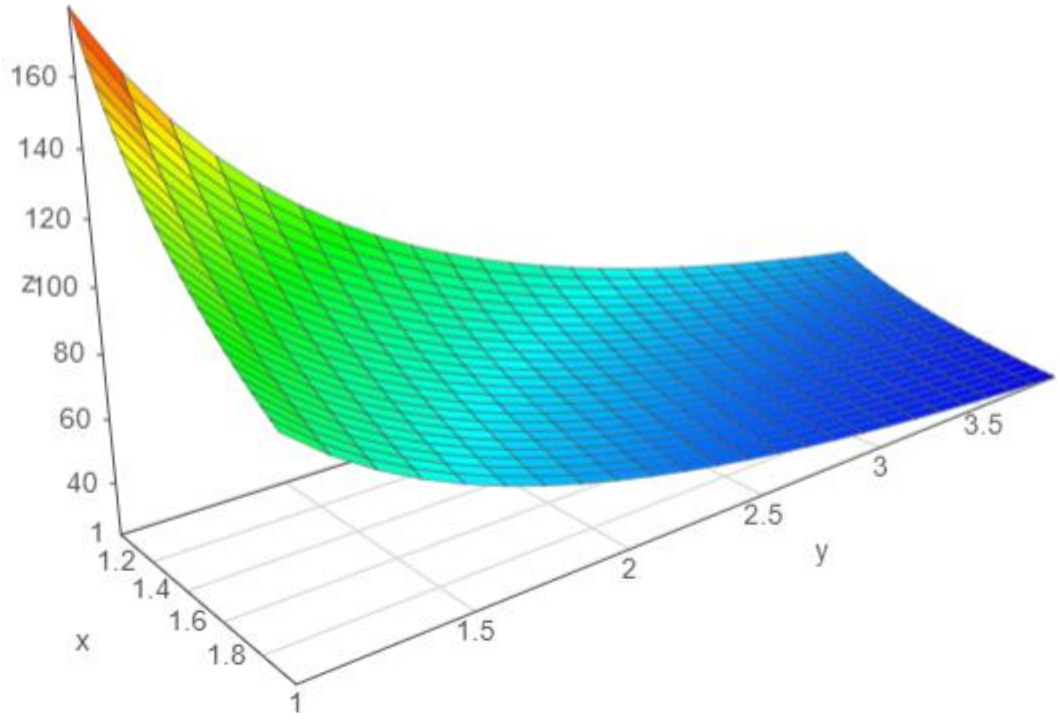
二重积分

- 求球体$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$被圆柱面$x^2 + y^2 = 2x$所截得立体面积。



多重积分

- 计算$\int_1^2 \int_x^{2x} \int_{xy}^{2xy} xyz dz\, dy\, dx$。



最优进货方案

- 你是一家报刊亭老板，只能在早上**一次性进货 Q 份报纸**；
- 当天的实际需求是随机的，有时人多有时人少，这里假设需求 D服从正态分布 $N(\mu = 50\ \sigma = 10)$，即，每天平均 50 份，波动程度 10 份；
- 经济参数：
  - 售价：$p = 10$ 元（报纸卖给顾客的价格）
  - 进价：$c = 6$ 元（你进一份报纸的成本）
  - 剩余报纸回收价：$v = 2$ 元（卖不掉的报纸按废纸回收）
- 你的问题是：**到底今天早上进多少份报纸最合适?**

蒙特卡洛方法进行期权定价

期权

- **期权**是一种金融衍生品合同，赋予持有人在约定的期限内，按照事先确定的价格（执行价格）买入或卖出一定数量某种特定标的物的权利。
- 标的物：即期权买方行权的指向对象，一般为某种商品资产。
- 选择权：包括买权和卖权。买权指买入某标的资产的权利，也称为看涨期权；卖权则是卖出某标的资产的权利，也称为看跌期权。期权持有者可以根据市场情况决定是否行使这一权利，这是期权的核心特点。
- 期权价格：期权买方获得权利是以支付期权费为对价的，购买权利的价格即为期权价格，也称为权利金、保险费。

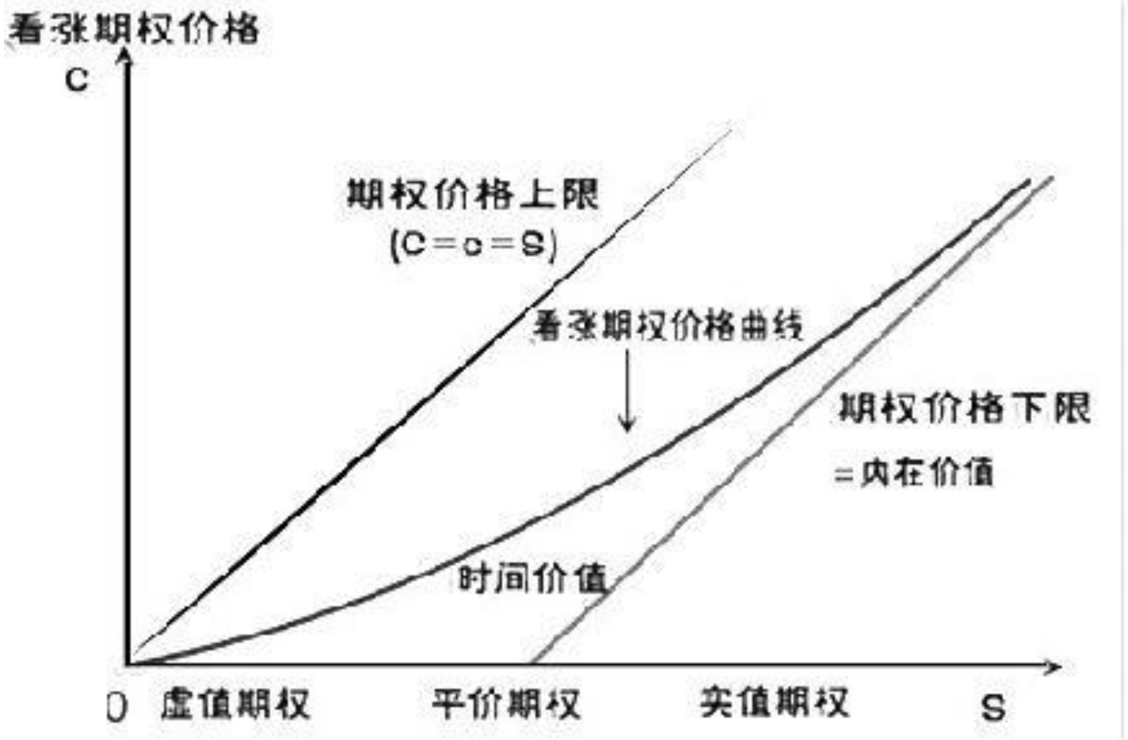
期权

- 行权方向：当买方行使权利时，交易标的资产的操作方向，即买入标的资产或者卖出标的资产。
- 行权价（执行价格）：是合同中约定的执行价，到期日买方可以以该价格执行合同。
- 行权日（到期日）：每个期权合约都有一个对应的行权日，即合同履行日。投资者可以选择在到期日履行合同（行权交割），也可以在到期日之前将合同转让出去（平仓）。
- 期权的定价方式主要有3种：布莱克-舒尔斯期权定价模型、二叉树期权定价模型、**蒙特卡洛模拟定价方法**

看涨期权

- 期权的买方有权在约定的期限内，按照事先确定的价格（行权价格），买入一定数量的某种特定标的物的权利。
- 当期权买方预期标的物价格在未来会上涨时，会选择买入看涨期权。看涨期权价格的蒙特卡洛估计值为：

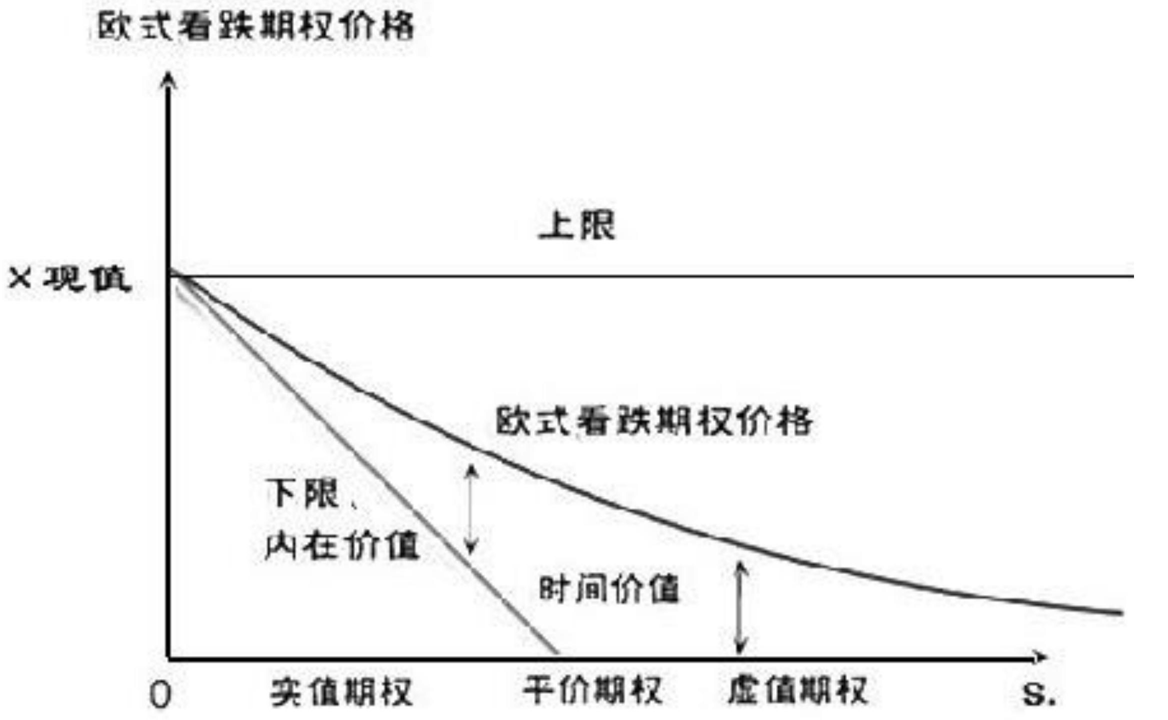
$$C = e^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\max(S_T^i - K, 0)$$



看跌期权

- 期权的买方有权在约定的期限内，按照事先确定的价格（行权价格），卖出一定数量的某种特定标的物的权利。
- 当期权买方预期标的物价格在未来会下跌时，会选择买入看跌期权。看跌期权价格的蒙特卡洛估计值为：

$$P = e^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\max(K - S_T^i, 0)$$



蒙特卡洛期权定价

- 假设基础资产价格服从几何布朗运动，其数学表达式为：
  - $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$
- 其中S_t是基础资产在时刻t的价格，μ是预期收益率，σ是波动率，W_t是标准布朗运动。
- 为了在计算机上进行模拟，我们将连续的随机过程离散化。用欧拉离散法得到离散形式的递推公式：
  - $S_{t+\Delta t} = S_t + \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} \epsilon$
- 其中Δt是时间步长，ϵ是服从N(0,1)标准正态分布的随机数。

蒙特卡洛期权定价

- 从当前时刻的基础资产价格S_0开始，生成一系列的随机数ϵ，逐步计算出未来一段时间内基础资产价格的一系列值，从而得到一条基础资产价格的随机路径。
- 例如，要模拟未来T时刻的价格路径，将$[0, T]$划分为n个时间间隔，即$\Delta t\ =\ T/n$，然后重复使用上述离散公式计算$S_{t+\Delta t}$，直到得到S_T。
- 重复上述过程多次，生成数千甚至数万条路径。

蒙特卡洛期权定价

- 计算期权到期收益：对于每条生成的随机价格路径，在期权到期日T，根据期权的类型和行权条件计算期权的到期收益。
  - 看涨期权的到期收益为：$max(S_T - K, 0)$
  - 看跌期权的到期收益为：$max(K - S_T, 0)$
- 贴现到期收益：
  - 将每条路径下计算得到的期权到期收益贴现到当前时刻。假设无风险利率为r，则贴现因子为e^{-rT}，贴现后的期权收益为$PV = e^{-rT}$到期收益。
- 最后，对所有贴现后的期权收益求平均值，得到期权的估计价格。

习题1：用蒙特卡洛方法求下列定积分

- $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x$ 在$[2, 3]$区间的积分
- $f(x) = cos5x$ 在$[0, \pi]$区间的积分

习题2：用平均法+蒙特卡洛方法求积分

- $f(x) = \frac{1}{x}$在$(0,1]$区间的积分

- $f(x) = \ln x$ 在$[1, 5]$区间的积分

实验：蒙特卡洛价格路径预测实验

- **目标**
  - 使用维纳过程离散化生成随机路径；
  - 构造市场、规模（SMB）、价值（HML≈由BP构造）三因子；
  - 估计个股的三因子 β 并用蒙特卡洛模拟未来收益与价格路径。

- 步骤1：
  - 基于上个实验的$\widehat{\alpha}_i$，$\widehat{\beta_{i,M}}$，$\widehat{\beta_{i,S}}$，$\widehat{\beta_{i,H}}$ 数据，进行蒙特卡洛模拟实验

实验：蒙特卡洛价格路径预测实验

- 步骤4：
  - 估计因子收益均值向量 $\mu = (\mu_M, \mu_S, \mu_H)$ 和协方差矩阵 Σ
  - 假设

$$\begin{bmatrix} \mathrm{MKT}_{t+\Delta} \\ \mathrm{SMB}_{t+\Delta} \\ \mathrm{HML}_{t+\Delta} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}\,\Delta,\ \Sigma\,\Delta),$$

  - 设定仿真步长 Δ（与数据频率一致），终止时点 T，路径数 N（如 $N = 1{,}000$）
  - 对 $n = 1, \ldots, N$ 与每个步长，按分布抽样得到$(\mathrm{MKT}, \mathrm{SMB}, \mathrm{HML})$ 的整条路径。

实验：蒙特卡洛价格路径预测实验

- 步骤5：
  - 在每条路径上，用估计的 β 将因子映射为股票超额收益：
  - $r_{i,t+\Delta} = R_{f,t+\Delta} + \widehat{\alpha_i} + \widehat{\beta_{i,M}},\mathrm{MKT}_{t+\Delta} + \widehat{\beta_{i,S}},\mathrm{SMB}_{t+\Delta} + \widehat{\beta_{i,H}},\mathrm{HML}_{t+\Delta} + \varepsilon_{i,t+\Delta},$
  - 其中 $\varepsilon_{i,t+\Delta} \sim N\left(0,\ \sigma_{\varepsilon,i}^2\right)$ 独立抽样。
  - 然后用对数收益更新价格：
    - $S_{t+\Delta} = S_t \cdot exp\left(r_{i,t+\Delta}\right).$
  - 产出N条未来价格路径；给出S_T的均值/中位数/置信区间（例如 5%–95%），并与历史波动对比。

实验：蒙特卡洛价格路径预测实验

- 步骤6：
- 结果汇报：
  - 因子样本统计与相关矩阵热力图；
  - 目标股票 β 的估计值及置信区间；
  - 模拟的价格扇形图（fan chart）与终值直方图；