GitHub.com/styluck/oper_res

考核方式：平时 10%，期末大作业 30%，期末考试 60%

运筹学是什么？

1938年，英国皇家空军，Operational research

运筹帷幄之中，决胜千里之外

定义：① 一种科学的决策方法
② 依据给定目标和条件，选择最优的方案
③ 在给定资源的条件下，如何设计和运行一个系统的科学决策方法

特点：科学性：一系列规范化步骤进行：建立 → 求解 → 决策
系统性：着眼于整个系统，而不是局部
综合性：多学科知识进行研究。
实践性：以实际问题为分析对象，能被实践检验。

主要分析步骤：
① 发现和定义待研究的问题
② 构建数学模型求解。 → 最优化
③ 应用结果，改善系统的运行效率。

模型：对客观现实，抽象化后描述所认识到的客观对象。

运筹学的分支:

数学规划 → 线性规划, 非线性规划, 整数规划

图论 ← 具体形式

排队论 ← 最优化：解决问题的核心手段.

博弈论

决策论

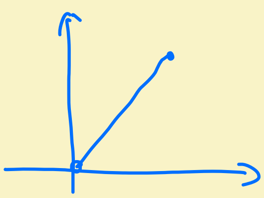
研究对象：最优化问题

什么是最优化问题?

目标函数 objective function.

待求解变量 → $\min_{x} f(x)$

s.t $x \in \mathcal{X}$ → 约束条件.



① 为什么不是 max

② $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i(x) \le 0 \quad i=1,2,\cdots,m, \quad c_j(x)=0 \quad j=m+1, m+2, \dots, m+l\}$

③ $\inf f(x) > -\infty$

④ 最小值 $\min f(x)$ 不一定存在 $\inf f(x)$

$f(x) = 2x$

$\mathcal{X} = (0, 3]$

最优化问题的应用:

家具厂：生产桌子、椅子.

桌子产量, 椅子产量.

决策变量: x_1 x_2

		木工	油漆工
桌子:	50币	4hr	2hr
椅子:	30币	3hr	1hr
		120hr	50hr

目标函数: $\max \ 50x_1 + 30x_2$

约束条件: s.t $4x_1 + 3x_2 \le 120$

$2x_1 + x_2 \le 50$

$x_1 \ge 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

$x_2 \ge 0$

资产：股票，债券，不动产，现金。

x_1 x_2 x_3 x_4 ← 权重

r_1 r_2 r_3 r_4 ← 期望收益。

σ_1 σ_2 σ_3 σ_4 ← 标准差

① 最大化利润，控制风险 ✓

② 控制利润，最小化风险。

Σ ← 协方差矩阵。

①
$$\max \sum_{i=1}^{n=4} r_i \cdot x_i$$

s.t.
$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \\ & \sigma_2^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \sigma_3^2 & \\ \cdot & \cdot & & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \le \theta$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1 \qquad x_i \ge 0 \quad i=1,2,3,4$$

② $\min \ x^T \Sigma x$

s.t. $x^T r \ge R$

$x^T \mathbf{1} = 1$

$x \ge 0$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ $l(f(x), y)$ $\qquad l(a,b) = \|a-b\|_2^2$

$l(a,b) = a \log b$

$x \in \mathbb{R}^n$

$\min \ l(f(x,w), y)$

s.t. $w \in \mathbb{R}^n$

最优化问题的分类：

是否有约束：无约束 $x \in \mathbb{R}^n$ vs 带约束

问题是否线性：线性 vs 非线性。

凸性：凸规划 vs 非凸规划。

解析性质：光滑 vs 非光滑

可行点集：连续 vs 离散

参数确定性：确定 vs 随机。

易 ⟶ 难。

最优化的概念

① 解析解（闭式解）　　　$\min_{x} f(x) = \|Ax-b\|_2^2$

$$(Ax-b)^T(Ax-b)$$

$$\Rightarrow x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb \qquad f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \cancel{2}A^TAx - \cancel{2}A^Tb = 0 \qquad \Rightarrow A^TAx = A^Tb$$

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$\min \|\sigma(Ax) - b\|_2^2 \qquad \sigma(x) = \frac{1}{\exp(x)}$$ ← 机器学习模型.

② 数值解 ← 算法 Algorithm.

③ 算法：从一个初始点出发，按某给定规则进行迭代，并希望最后一个点就是最优化问题的解.

④ 收敛准则.　　　$x \in \mathbb{R}^n$　$\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{f(x^k) - f^*}{\max\{|f^*|, 1\}} \le \varepsilon_1 \qquad \|\nabla f(x^k)\| \le \varepsilon_2$$

停机准则

a. 最大迭代步

b. $\dfrac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\max\{\|x^k\|, 1\}} \le \varepsilon_1$　　　$x \in \mathbb{R}^n$

c. $\dfrac{|f(x^{k+1}) - f(x^k)|}{\max\{f(x^k), 1\}} \le \varepsilon_2$

⑤ 收敛速率

a. Q收敛速度　　　　　　　　　　Q: quotient.

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}=0 \Rightarrow \text{Q超线性收敛}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}\le a \quad \alpha\in(0,1) \Rightarrow \text{Q线性收敛}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|}=1 \Rightarrow \text{Q次线性收敛}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|x^{k+1}-x^*\|}{\|x^k-x^*\|^2}\le \alpha \Rightarrow \text{二次收敛}$$

牛顿法

b. R-收敛速度 ← 当前后迭代点关系不明确时.

R-线性收敛　$\|x^k-x^*\|\le t_k$　　t_k: Q线性收敛

R-二次收敛　$\|x^k-x^*\|\le t_k$　　t_k: Q二次收敛

⋮

⑥ 复杂度: 计算出给定精度所需的迭代次数.

$$f(x^k)-f(x^*)\le\frac{c}{\sqrt{k}} \quad \forall k>0$$

如果算法满足

$$f(x^k)-f(x^*)\le\varepsilon \qquad f(x^*)\le f(x^k)\ \forall k>0$$

只需要令

$$\frac{c}{\sqrt{k}}\le\varepsilon \Rightarrow k\ge\frac{c^2}{\varepsilon^2}$$

复杂度为　$N(\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$