运筹学：对象：最优化问题

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \quad x \in \mathcal{X}$$

方法：① 发现和定义问题

② 构造数学模型求解.

③ 应用结果，改善系统运行效率.

最优化问题 ① 解析解（闭式解）

② 数值解 ← 算法

$$0_{n\times 1} = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} n个0.$$

范数 norm

Defn: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 非负函数.

① 正定性 Positive definite: $\forall v \in \mathbb{R}^n, \ \|v\| \geq 0$

$\|v\| = 0 \iff v = 0_{n\times 1}$

② 齐次性 Homogeneity: $\forall v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

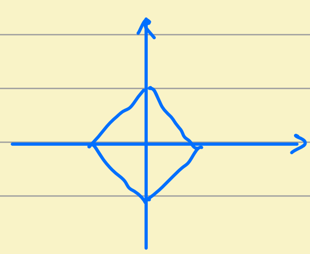
③ 三角不等式 triangle inequality: $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

则称 $\|\cdot\|$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的范数.

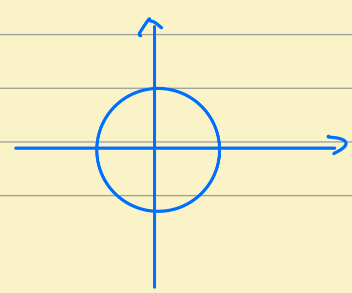
E.g. $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ $\quad \|v\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |v_j|$

$\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \cdots < \|v\|_\infty$

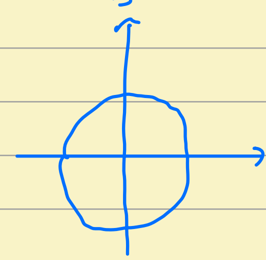
$\|v\|_1 = 1 \quad v \in \mathbb{R}^2$



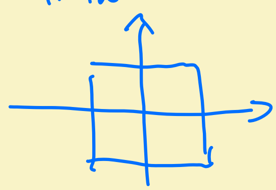
$\|v\|_2 = 1$



$\|v\|_3 = 1$



$\|v\|_\infty = 1$

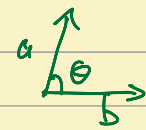


Prop: (Cauchy inequality): $\forall a, b \in \mathbb{R}^n \quad |a^T b| \le \|a\|_2 \|b\|_2$

Proof: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |a^T b| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos\theta|$

$= \|a\|_2 \cdot \|b\|_2 |\cos\theta|$

$\le \|a\|_2 \|b\|_2$



$\min \; f(x) + g(x) \leftarrow$ 正则项 regularizer

$s.t \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad g(x) = \|x\|_1$

矩阵范数

$\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$ Frobenius 范数

迹

$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2} = \sqrt{Tr(AA^T)} = \sqrt{Tr(A^TA)}$

$tr(A) = \sum A_{ii} \qquad tr(A) = tr(A^T) \qquad tr(AB) = tr(BA)$

induced 诱导范数. p范数, 算子范数

$$\|A\|_{(m,n)} = \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{(n)} = 1} \|Ax\|_{(m)}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$p=1$: $\|A\|_{(1)} = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|$

$p=2$: $\|A\|_{(2)} = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ 谱范数

A^TA 的特征值

$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^T(Ax) = x^TA^TAx \qquad A^TAv = \lambda v \leftarrow$ 特征向量

$\|x\|_2 = 1 \qquad \|Ax\|_2^2 \le \lambda_{max} x^Tx \qquad \|Ax\|_2^2 = \lambda_{max} x^Tx \text{ iff } x = v_{max}$

$\max_{\|x\|_2 = 1} = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

$p=\infty$: $\|A\|_{(\infty)} = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i| \qquad x \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} - A_1 - \\ - A_2 - \\ - A_3 - \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix}$$

$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} \left| \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_j \right| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$

$= \max_{1 \le j \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

核范数 nuclear norm $\|A\|_* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$

矩阵内积. $\langle A, B\rangle = tr(AB^T) = tr(B^TA) = tr(A^TB) = tr(BA^T)$
$= \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$

柯西不等式 $|\langle A, B\rangle| \le \|A\|_F \cdot \|B\|_F$

Proof: $f(x) = tr((xA+B)^T(xA+B))$ $x \in \mathbb{R}$ $tr(M^TM) \ge 0$

$= tr(x^2A^TA + xA^TB + xB^TA + B^TB)$

$= x^2 tr(A^TA) + 2x\, tr(A^TB) + tr(B^TB)$

since $f(x) \ge 0$, $\Delta \le 0$

ax^2+bx+c $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (\cancel{2} tr(A^TB))^2 - \cancel{4} tr(A^TA)\, tr(B^TB) \le 0$

$tr(A^TA) = \|A\|_F^2$ $tr(B^TB) = \|B\|_F^2$ $tr(A^TB) = \langle A, B\rangle$

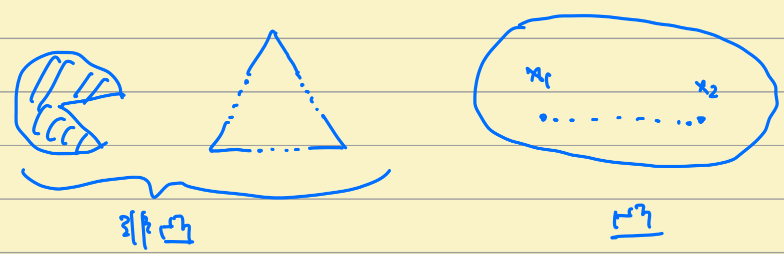
$\Rightarrow |\langle A, B\rangle| \le \|A\|_F \cdot \|B\|_F$

凸集: convex set

定义: C是一个集合, $\forall x_1, x_2 \in C$ 如果有

$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$ $\forall\ 0 \le \theta \le 1$

则, C是一个凸集.

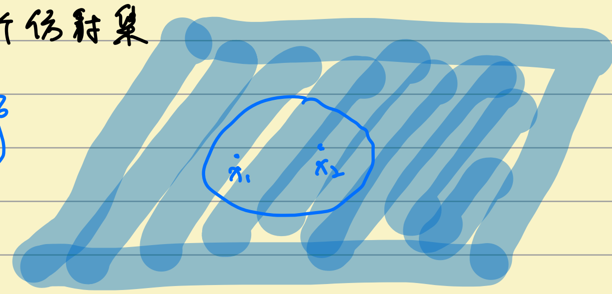


仿射集 affine set

定义：C是一个集合，$x_1, x_2 \in C$，如果有

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

则C被称为是一个仿射集



$C = \{x \mid Ax = b\}$

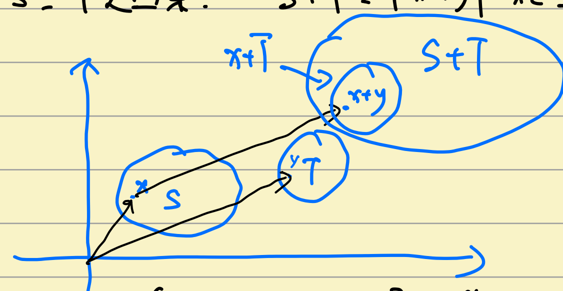
$x_1, x_2 \in C$

$Ax_1 = b \quad Ax_2 = b$

$\theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 = b \quad \Rightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$

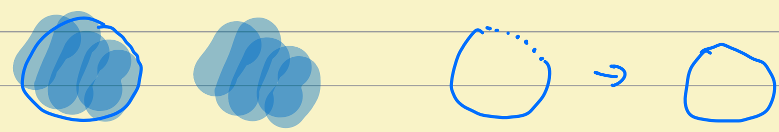
定理：① 若S是凸集：$\forall k \in \mathbb{R}$，$kS = \{kx \mid x \in S\}$ 是凸集

② 若S、T是凸集：$S+T = \{x+y \mid x \in S, y \in T\}$ 是凸集



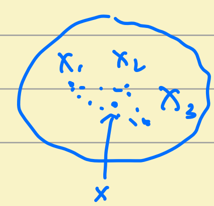
③ 若S、T是凸集，则 $S \cap T$ 是凸集 → 任意多凸集的交集是凸集

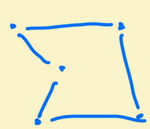
④ 凸集的内部和闭包都是凸集

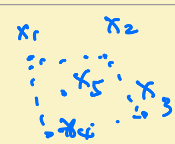


凸组合：$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_k x_k$

$\theta_1 + \cdots \theta_k = 1 \qquad \theta_i \geq 0$

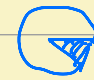






$x = \theta_1 x_1 + \cdots \theta_5 x_5$

凸包：集合 C 所有点的凸组合构成的点集 $\mathrm{conv}\,C$



Thm (凸集与凸包) 集合 C 是一个凸集，当且仅当 $\mathrm{conv}\,C \subseteq C$.

Thm (凸包)：$\mathrm{conv}\,C$ 是包含 C 的最小凸集