① 图解法

② 单纯形法.

线性规划

Linear programming (LP)

Thm 1: 若LP的可行域D非空，则D凸集

Lem 1: LP可行解 $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ 为基可行解

⟺ 正的基变量对应的基向量之间线性独立

Thm 2: LP的基可行解 x 对应可行域D的一个顶点.

Lem 2: LP的可行域D中的任意点可表示为D的顶点的凸组合 $(0<\theta<1)$

Thm 3: LP的目标函数一定在D的顶点上达到最优，若D非空且有界.

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 2x_1+3x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5\\
\text{s.t.}\quad & 8 = x_1+2x_2+x_3\\
& 16 = 4x_1 + x_4\\
& 12 = 4x_2 + x_5\\
& x_{1-5}\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

P_{3-5} 线性独立，且 P_{3-5} 是基向量

⇒ 取 x_{3-5} 基变量，令 $x_{1-2}=0$，$x_{3-5}>0$

⇒ 得到一组可行解

例1.

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z=4x_1+3x_2\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2\le 10\\
& 3x_1+2x_2\le 18\\
& x_1, x_2\ge 0
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\max\quad & z=4x_1+3x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4\\
\text{s.t.}\quad & 10=2x_1+x_2+x_3\\
& 18=3x_1+2x_2+x_4\\
& x_{1-4}\ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\quad & c^T x\\
\text{s.t.}\quad & Ax=b\\
& x\ge 0
\end{aligned}
$$

非基变量

基变量

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
z	0	4	3	0	0	
x_3	10	2	1	1	0	$10/2=5$
x_4	18	3	2	0	1	$18/3=6$

① 非基变量系数存在正数，目标值就有增大的可能

② 一般选择正系数最大的非基变量

取最小

$x_{1-4} \geq 0$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
z	-20	0	1	-2	0	
x_1	5	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$5/\frac{1}{2}=10$
x_4	3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$3/\frac{1}{2}=6$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
z	-26	0	0	1	-2	
x_1	2	1	0	2	-1	$2/2=1$
x_2	6	0	1	-3	2	$-$

θ值只考虑非负数

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
z	-27	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	
x_3	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$1/2=$
x_2	9	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-$

所有非基变量的系数非正
目标值已达到最优

$X^* = (0, 9, 1, 0)$ $\qquad z_{max} = 27$

例2: $\max \; z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\max \; z = 3x_1 + 5x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \\ &8 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &10 = 2x_1 + x_2 + x_4 \\ &x_{1-4} \geq 0 \end{aligned}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z	0	3	5	0	0	
x_3	8	1	2	1	0	$8/2=4$
x_4	10	2	1	0	1	$10/1=10$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
z	-20	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	
x_2	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$4/\frac{1}{2}=8$
x_4	6	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$6/\frac{3}{2}=4$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4
z	-22	0	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	4	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$x^* = (4, 2, 0, 0)$ $\quad z_{max} = 22$

大M法

$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \le 8$

$4x_1 \ge 16$

$4x_2 = 12$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\max\ 2x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4$

s.t. $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$4x_1 - x_4 = 16$

$4x_2 = 12$

$x_{1\sim4} \ge 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

①构建人工变量的方式得到一组初始解.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x_5, x_6: 人工变量

① 加入人工变量，马上可以得到初始基可行解.

$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \underbrace{- M(x_5 + x_6)}$

s.t. $8 = x_1 + x_2 + x_3$

$16 = 4x_1 - x_4 + x_5$

$12 = 4x_2 + x_6$

$x_{1-6} \ge 0$

② 为保证人工变量最终为0，须在目标函数加入罚项

罚项，M: 罚系数

C	z	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_j
	z		$2+4M$	$3+4M$	0	$-M$	0	0	
0	x_3	8	1	1	1	0	0	0	$8/1=8$
$-M$	x_5	16	4	0	0	-1	1	0	—
$-M$	x_6	12	0	4	0	0	0	1	$12/4=3$

计算σ系数

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_j
z	$-9-12M$	$2+4M$	0	0	$-M$	0	$-1-\frac{4}{3}M$	
x_3	5	1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$5/1=5$
x_5	16	4	0	0	-1	1	0	$16/4=4$
x_2	3	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	—

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
z	$-9-12M$	$2+4M$	0	0	$-M$	0	$-1-\frac{4}{3}M$	
x_3	5	1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$5/1=5$
x_5	16	4	0	0	-1	1	0	$16/4=4$
x_2	3	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	—

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
z	$-17-28M$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-M$	$-1-\frac{4}{3}M$	
x_3	1	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	4
x_1	4	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	-
x_2	3	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	—

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
z	$-19-28M$	0	0	-2	0	$-M$	$-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}M$	
x_4	4	0	0	4	1	-1	$-\frac{4}{3}$	4
x_1	5	1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	-
x_2	3	0	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	—

$x^* = (5, 3, 0\ 4, 0, 0)$ $\qquad$ $z_{max} = 2\times5+3\times3 = 19$