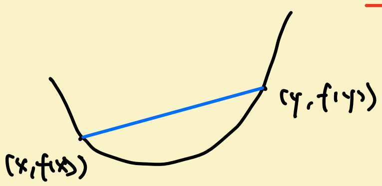
梯度： $\exists g \in \mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x) - g^T h}{\|h\|} = 0$，

则 g 是 f 在 x 点处的梯度，记 $\nabla f(x)$

Fréchet 可微 $\lim\limits_{V \to 0} \dfrac{f(X+V) - f(X) - \langle V, G \rangle}{\|V\|} = 0$，

Gâteaux 可微 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(X+tV) - f(X) - t\langle V, G \rangle}{t} = 0$

① 用定义求梯度 ② 用微分 $df = \langle \nabla f(x), dx \rangle$



Defn 凸函数 ： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为适当函数，如果 dom f 是凸集，且

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

$\forall x, y \in \text{dom} f$，$0 \le \theta \le 1$ 成立，称 f 是凸函数。

Defn 凹函数：若 f 是凸函数，则 $-f$ 是凹函数。

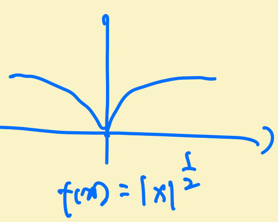
E.g. $f(x) = Ax + b$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ → 既凸又凹

Defn 严格凸函数

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为适当函数，如果 dom f 是凸集，且

$$f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

$\forall x, y \in \text{dom} f$，$0 \le \theta \le 1$ 成立，称 f 是严格凸函数。



E.g. $f(x) = ax + b$ $f(x) = e^{ax}$ $f(x) = |x|^p$ $p \ge 1$

$f(x) = x \log x$ $x \in \mathbb{R}_{++}$

E.g. $f(x) = a^T x + b$ $f(x) = \|x\|_p$ $p \ge 1$ $f(x) = \|x\|_\infty = \max\limits_k |x_k|$

$f(x) = \langle A, X \rangle + B$ $f(X) = \|X\|_2$ $f(X) = \|X\|_F$

凸函数 ⊇ 严格凸函数 ⊇ 强凸函数

Defn (强凸函数) 若存在常数 $m \geq 0$，使得

$$g(x) = f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$$

若 g 为凸函数，则称 f 为强凸函数. m 称为强凸参数.

$$f(x) \longrightarrow g(x) = f(x) + \frac{m}{2}\|x\|^2$$

Thm (凸函数的判定定理)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数，当且仅当 $\forall x \in \mathrm{dom} f$，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是关于 t 的凸函数:

$$g(t) = f(x + tv) \qquad \mathrm{dom}\, g: \{t \mid x + tv \in \mathrm{dom} f\}$$

E.g. $f(X) = -\log\det X \qquad \mathrm{dom} f = S^n_{++}$

$$\begin{aligned}
g(t) &= -\log\det(X + tV) \\
&= -\log\det\left(X^{\frac{1}{2}}\left(I + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}\right)X^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\log\det X - \log\left(I + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\log\det X - \sum_{i=1}^{n}\log(1 + t\lambda_i)
\end{aligned}$$

Proof: 设 f 是凸函数. $\forall t_1, t_2 \in \mathrm{dom}\, g \quad \forall \theta \in (0,1)$

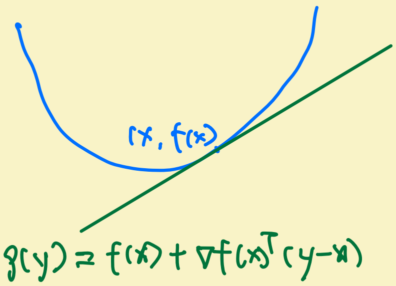
$$x + t_1 v \in \mathrm{dom} f, \quad x + t_2 v \in \mathrm{dom} f.$$

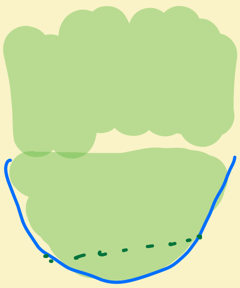
$$\Rightarrow \theta(x + t_1 v) + (1-\theta)(x + t_2 v) = x + (\theta t_1 + (1-\theta)t_2)v \in \mathrm{dom} f$$

因为 $\mathrm{dom}\, g = \{t \mid x + tv \in \mathrm{dom} f\}$，$\quad \theta t_1 + (1-\theta)t_2 \in \mathrm{dom}\, g$.

$\therefore$ $\mathrm{dom}\, g$ 是凸集.

$$\begin{aligned}
g(\theta t_1 + (1-\theta)t_2) &= f(x + (\theta t_1 + (1-\theta)t_2)v) \\
&\leq \theta f(x + t_1 v) + (1-\theta) f(x + t_2 v) \\
&= \theta g(t_1) + (1-\theta) g(t_2)
\end{aligned}$$





Thm (一阶条件) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续函数，$\mathrm{dom} f$ 是凸集. f 是凸函数当且仅当, f 可微

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) \quad \forall x, y \in \mathrm{dom} f$$

Thm (梯度的单调性) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续函数，$\mathrm{dom} f$ 是凸集，f 可微，则 f 是凸函数当且仅当 ∇f 为单调映射.

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x-y) \geq 0$$

Proof:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x)$$
$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x-y)$$

Thm (上图) 函数 f 为凸函数，当且仅当 其上图 $\mathrm{epi} f$ 为凸集

Thm (二阶条件) 函数 f 是凸函数当且仅当

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom} f.$$

如果 $\nabla^2 f(x) \succ 0, \forall x \in \mathrm{dom} f$，则 f 是严格凸函数

Ex. $f(x) = \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r \quad P \in S^n \quad x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ 什么情况下，$f(x)$ 为凸函数

$\nabla f(x) = Px + q \qquad \nabla^2 f(x) = P \qquad P \succeq 0 \Rightarrow f$ 为凸

Ex. 利用二阶条件判断 $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ 是否为凸函数.

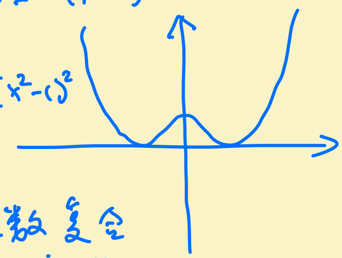
$f(x) = (Ax-b)^T (Ax-b) = x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b$

$\nabla f(x) = 2A^T A x - 2A^T b \qquad \nabla^2 f(x) = 2A^T A \qquad f$ 是凸函数

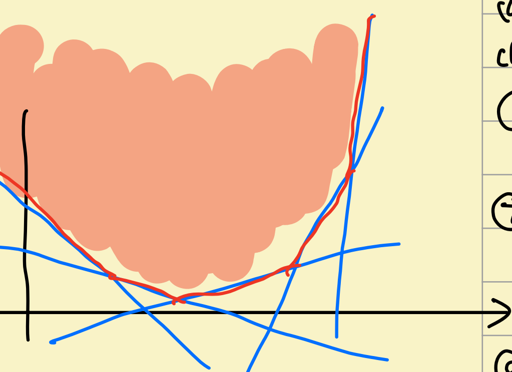
$f(x) = x^2$

$f(x) = (x-1)^2$

$g(x) = (x^2-1)^2$



凸函数复合并不一定凸



保凸的运算:

① f 是凸函数 $\Rightarrow$ $\forall \alpha \geq 0$, αf 是凸函数

② f_1, f_2 是凸函数 $\Rightarrow$ $f_1 + f_2$ 是凸函数

③ f 是凸函数 $\Rightarrow$ $f(Ax+b)$ 是凸函数

④ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 令 $f(x) = h(g(x))$

(a). g 是凸函数, h 是凸函数且单调不减

(b) g 是凹函数, h 是凸函数且单调不增

$\Rightarrow$ f 是凸函数

⑤ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $h: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, 令 $f(x) = h(g(x))$

(a). g 是凸函数, h 是凸函数且对每个分量单调不减

(b) g 是凹函数, h 是凸函数且对每个分量单调不增

$\Rightarrow$ f 是凸函数

⑥ 若 $f_1, f_2 \cdots f_k$ 是凸函数, 则 $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots f_m(x)\}$ 是凸函数

⑦ 若对于每个 $y \in A$, $f(x,y)$ 是关于 x 的凸函数, 则

$$g(x) = \sup_{y \in A} f(x,y) \quad \text{是凸函数}$$

⑧ 若 $f(x,y)$ 关于 (x,y) 整体是凸函数, C 是凸集, 则

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x,y) \quad \text{是凸函数}$$

⑨ 若 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数, $g(x,t) = t f(\frac{x}{t})$, $\mathrm{dom}\, g = \{(x,t) \mid \frac{x}{t} \in \mathrm{dom} f, t>0\}$

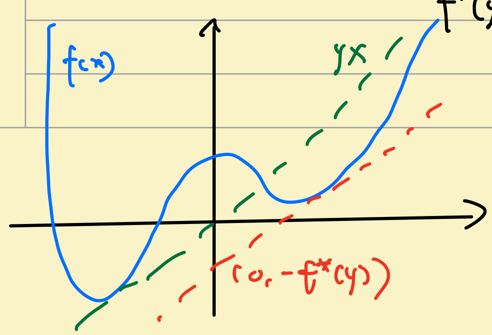
g: f 的透视函数 是凸函数.

E.g. $f(x) = x^T x = \|x\|_2^2$ $\quad g(x,t) = \frac{x^T x}{t}$ $\quad g(x,t)$ 在 $\{(x,t), t>0\}$ 为凸函数.

共轭函数

Defn (共轭函数)

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} (y^T x - f(x))$$



Prop (Fenchel 不等式)

$$f(x) + f^*(y) \geq x^T y$$

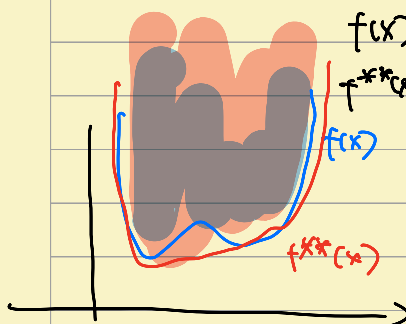
Proof:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \{ y^T x - f(x) \} \geq y^T x - f(x)$$

Defn (二次共轭函数)

$$f^{**}(x) = \sup_{y \in \mathrm{dom} f^*} \{ x^T y - f^*(y) \}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) + f^*(y) &\geq x^T y \\ f^{**}(x) + f^*(y) &\geq x^T y \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^{**}(x) \leq f(x)$$



$$\mathrm{epi} f \leq \mathrm{epi} f^{**}$$

Thm: 若 f 为闭凸函数，则

$$f^{**}(x) = f(x), \ \forall x.$$

E.g. $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} (y^T x - f(x)) \qquad A \succ 0$$

$$= \sup_{x \in \mathrm{dom} f} (y^T x - \tfrac{1}{2} x^T A x - b^T x - c)$$

$$g(x) = x^T y - \tfrac{1}{2} x^T A x - b^T x - c \qquad \nabla g(x) = y - Ax - b = 0$$

$$x^* = A^{-1}(y - b)$$

$$f^*(y) = (x^*)^T y - \tfrac{1}{2}(x^*)^T A x^* - b^T x^* - c$$

$$= (y-b)^T A^{-1} y - \left(\tfrac{1}{2}(y-b)^T A^{-1} A A^{-1} (y-b) + b^T A^{-1} (y-b) + c\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} (y-b)^T A^{-1} (y-b) - c$$

$f(x) = \|x\|_2$ $\quad f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \{ y^T x - f(x) \}$

$g(x) = y^T x - \|x\|_2$