运筹学基础：课后练习 2 答案

1. 证明：考虑非线性约束优化原问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \le 0, \quad i = 1,2,\ldots,m & \text{（不等式约束）} \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,p & \text{（等式约束）} \end{cases}$$

其中 f, g_i, h_j 为任意实值函数，无需假设凸性。

拉格朗日函数：引入乘子 $\lambda \ge 0$（对应不等式约束）和 $\nu \in \mathbb{R}^p$（对应等式约束），构造：

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \nu_j h_j(x).$$

对偶函数：

$$g(\lambda,\nu) = \inf_x \mathcal{L}(x,\lambda,\nu) \quad \text{（关于 } x \text{ 的下确界）}.$$

对偶问题：

$$\max_{\lambda,\nu} g(\lambda,\nu)$$

$$\text{s.t.}\, \lambda \ge 0,\, \nu \in \mathbb{R}^p.$$

证明:(1) 对偶函数 $g(\lambda,\nu)$ 是凹函数。由于 g 是关于 λ,ν 的线性函数，易得 $g(\lambda,\nu)$ 是凹函数。

证明约束集是凸集：

1. $\lambda \ge 0$ 定义非负象限，是凸集。

2. $\nu \in \mathbb{R}^p$ 是全空间，为凸集。

因此对偶问题是凸优化问题。

2. (a) 原问题:

$$\max 5x_1+8x_2+6x_3+7x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3+4x_4\le 500 \quad (y_1\ge 0)\\ 4x_1+5x_2+3x_3+6x_4\le 800 \quad (y_2\ge 0)\\ x_1+x_2\le 200 \quad (y_3\ge 0)\\ -x_4+1.5x_3\le 0 \quad (y_4\ge 0)\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

对偶问题：

$$\min 500y_1+800y_2+200y_3+0\cdot y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2y_1+4y_2+y_3\ge 5 \quad (x_1\ge 0)\\ 3y_1+5y_2+y_3\ge 8 \quad (x_2\ge 0)\\ 2y_1+3y_2+1.5y_4\ge 6 \quad (x_3\ge 0)\\ 4y_1+6y_2-y_4\ge 7 \quad (x_4\ge 0)\\ y_1,y_2,y_3,y_4\ge 0\end{cases}$$

(b) 原问题标准形式:

$$\min 2x_1+5x_2+8x_3+1.5x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-0.17x_1+0.2x_2+0.35x_3-0.1x_4\ge 0 \quad (y_1\ge 0)\\ -0.01x_1+0.15x_2+0.05x_3-0.03x_4\le 0 \quad (y_2\le 0)\\ 0.01x_1-0.02x_2+0\cdot x_3-0.07x_4\ge 0 \quad (y_3\ge 0)\\ -0.06x_1-0.03x_2-0.05x_3+0.02x_4\ge 0 \quad (y_4\ge 0)\\ -x_2+2x_3\le 0 \quad (y_5\ge 0)\\ x_4-1.5x_1\le 0 \quad (y_6\ge 0)\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

对偶问题：

$$\max 0\cdot y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3+0\cdot y_4+0\cdot y_5+0\cdot y_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-0.17y_1-0.01y_2+0.01y_3-0.06y_4-1.5y_6\le 2 \quad (x_1\ge 0)\\ 0.2y_1+0.15y_2-0.02y_3-0.03y_4-y_5\le 5 \quad (x_2\ge 0)\\ 0.35y_1+0.05y_2+0\cdot y_3+0\cdot y_4+2y_5\le 8 \quad (x_3\ge 0)\\ -0.1y_1-0.03y_2-0.07y_3+0.02y_4+y_6\le 1.5 \quad (x_4\ge 0)\\ y_1,y_3,y_4,y_5,y_6\ge 0,\ y_2\le 0\end{cases}$$

(c) 原问题标准形式：

$$\max 0.12x_1+0.15x_2+0.06x_3+0.08x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4\le 200 \quad (y_1\ge 0)\\ 0.4x_1+0.4x_2-0.6x_3-0.6x_4\le 0 \quad (y_2\ge 0)\\ -0.3x_1-0.3x_2+0.7x_3+0.7x_4\ge 0 \quad (y_3\ge 0)\\ -x_2+1.2x_1\ge 0 \quad (y_4\ge 0)\\ -x_4+0.5x_3\le 0 \quad (y_5\ge 0)\\ -0.7x_1-0.7x_2+x_3+0.8x_4\ge 0 \quad (y_6\ge 0)\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{cases}$$

对偶问题：

$$\min 200y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3+0\cdot y_4+0\cdot y_5+0\cdot y_6$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}y_1+0.4y_2-0.3y_3+1.2y_4-0.7y_6\ge 0.12 \quad (x_1\ge 0)\\ y_1+0.4y_2-0.3y_3-y_4-0.7y_6\ge 0.15 \quad (x_2\ge 0)\\ y_1-0.6y_2+0.7y_3+0.5y_5+y_6\ge 0.06 \quad (x_3\ge 0)\\ y_1-0.6y_2+0.7y_3-y_5+0.8y_6\ge 0.08 \quad (x_4\ge 0)\\ y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\ge 0\end{cases}$$

3. 利用拉格朗日方法求非线性规划的对偶问题

(a) 原问题

$$\max c^\top x$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} A_1 x = b_1 \quad (\lambda_1 \in \mathbb{R}^m) \\ A_2 x \le b_2 \quad (\lambda_2 \ge 0) \\ -A_3 x \le -b_3 \quad (\lambda_3 \ge 0) \\ -x \le 0 \quad (\lambda_4 \ge 0) \end{cases}$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = c^\top x + \lambda_1^\top (b_1 - A_1 x) + \lambda_2^\top (b_2 - A_2 x) + \lambda_3^\top (A_3 x - b_3) - \lambda_4^\top x$$

对偶函数：

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \max_x \mathcal{L}(x, \lambda)$$

令梯度为零：

$$c - A_1^\top \lambda_1 - A_2^\top \lambda_2 + A_3^\top \lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

代入后对偶问题为：

$$\min_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \ \lambda_1^\top b_1 + \lambda_2^\top b_2 - \lambda_3^\top b_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} A_1^\top \lambda_1 + A_2^\top \lambda_2 - A_3^\top \lambda_3 + \lambda_4 = c \\ \lambda_2 \ge 0, \ \lambda_3 \ge 0, \ \lambda_4 \ge 0 \, (\lambda_1 \text{ 无约束}) \end{cases}$$

(b) 范数最小化问题

$$\min \|x\| \quad \text{s.t.}\, Ax = b$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \|x\| + \lambda^\top (b - Ax)$$

对偶函数：

$$g(\lambda) = \min_x \left\{ \|x\| + \lambda^\top (b - Ax) \right\} = b^\top \lambda + \min_x \left\{ \|x\| - (A^\top \lambda)^\top x \right\}$$

利用对偶范数性质：

$$\min_x \left\{ \|x\| - y^\top x \right\} = \begin{cases} 0, & \|y\|_* \le 1 \\ -\infty, & \text{否则} \end{cases}$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 是对偶范数。因此对偶问题为：

$$\max\ b^\top \lambda \quad \text{s.t.}\, \|A^\top \lambda\|_* \le 1$$

(c) 原问题（假设为 $\min \frac{1}{2}x^\top Px + q^\top x + r$，$Px \succeq 0$）

$$\min \frac{1}{2}x^\top Px + q^\top x + r$$

$$\text{s.t.}\, Ax = b$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^\top Px + q^\top x + r + \lambda^\top(b - Ax)$$

对偶函数：

$$g(\lambda) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda)$$

对 x 求导并令梯度为零：

$$Px + q - A^\top\lambda = 0 \implies x = P^{-1}(A^\top\lambda - q)\, (\text{若} P \succ 0)$$

代入得对偶问题：

$$\max\, -\frac{1}{2}(A^\top\lambda - q)^\top P^{-1}(A^\top\lambda - q) + b^\top\lambda + r$$

$$\text{s.t.}\, \lambda \in \mathbb{R}^m\, (\text{无约束})$$

(d) 原问题

$$\min x^\top Ax + 2b^\top x$$

$$\text{s.t.}\, x^\top x \leq 1$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x^\top Ax + 2b^\top x + \lambda(x^\top x - 1),\, \lambda \geq 0$$

对偶函数：

$$g(\lambda) = \min_x \left\{x^\top(A + \lambda I)x + 2b^\top x - \lambda\right\}$$

对 x 求导并令梯度为零：

$$2(A + \lambda I)x + 2b = 0 \implies x = -(A + \lambda I)^{-1}b\, (\text{若} A + \lambda I \succ 0)$$

代入得对偶问题：

$$\max\, -b^\top(A + \lambda I)^{-1}b - \lambda$$

$$\text{s.t.}\, \lambda \geq 0,\, A + \lambda I \succ 0$$