运筹学基础：课后练习 1

Due Date: 2025-03-24

1. 尝试给出以下点列的 Q-收敛速度：

   (a) $x^k = \frac{1}{k!}$，$k = 1, 2, \cdots$

   (b) $x^k = \begin{cases} (\frac{1}{4})^{2^k}, & \text{k is even} \\ \frac{x^{k-1}}{k}, & \text{k is odd} \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots$

2. 考虑函数 $f(x) = x_1^2 + x_2^2$，其中 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，以及迭代点列 $x^k = (1 + \frac{1}{2^k})(\cos k, \sin k)^T$，$k = 1, 2, \cdots$。请说明：

   (a) $\{f(x^{k+1})\}$ 是否收敛？若收敛，给出 Q - 收敛速度。

   (b) $\{x^{k+1}\}$ 是否收敛？若收敛，给出 Q - 收敛速度。

3. 证明矩阵 A 的 ℓ_2 范数等于其最大奇异值，即

$$\sigma_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

4. 证明以下与矩阵范数相关的不等式：

   (a) $\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F$

   (b) $\langle A, B \rangle \leq \|A\|_2 \|B\|_*$

5. 设矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I \end{bmatrix}$$

   其中 $\|B\|_2 < 1$，I 是单位矩阵。证明：A 可逆且

$$\|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2}$$

6. 假设 A 和 B 均为半正定矩阵。证明：$\langle A, B\rangle \geq 0$。提示：利用对称矩阵的特征值分解。

7. 计算以下矩阵变量函数的导数：

   (a) $f(X) = a^T X b$，其中 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$a \in \mathbb{R}^m$，$b \in \mathbb{R}^n$ 是给定的向量。

   (b) $f(X) = \mathrm{tr}(X^T A X)$，其中 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是长方阵，A 是方阵（但不一定对称）。

   (c) $f(X) = \ln(\det(X))$，其中 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$，定义域为 $\{X|\det(X) > 0\}$。

8. 证明以下集合是凸集：

   (a) 超平面：$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$

   (b) 半空间：$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq b\}$

   (c) 对称矩阵集合：$\{X \in \mathbb{S}^n \mid X = X^T\}$

   (d) 半正定矩阵集合：$\{X \in \mathbb{S}^n \mid x^T X x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

   (e) 二阶锥：$= \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq x^T x, t \geq 0\}$

9. 考虑二次不等式

$$x^T A x + b^T x + c \leq 0$$

   其中 A 是 n 阶对称矩阵。设 C 是上述不等式的解集。

   (a) 证明：当 A 正定时，C 是凸集。

   (b) 设 C' 是 C 与超平面 $g^T x + h = 0$（$g \neq 0$）的交集。若存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $A + \lambda g g^T$ 是半正定的，证明：C' 是凸集。

10. 判断以下函数是否为凸函数，并求它们的共轭函数：

   (a) 负熵：$\sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$

   (b) 矩阵对数：$f(x) = -\ln\det(X)$

   (c) 最大值函数：$f(x) = \max_i x_i$

   (d) 二次锥上的对数函数：$f(x, t) = -\ln(t^2 - x^T x)$，注意 f 的自变量是 (x, t)