运筹学基础：matlab 练习 5

1. 从弱对偶性可以得出以下结论：若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。上述结论的逆不一定成立，即：一个问题无可行解时，另一个问题可能有可行解（此时具有无界解），也可能无可行解。利用图解法求解以下两个个例子，理解这一观点。

$$\begin{aligned} &\min z = x_1 + 2x_2 \\ &-x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 2 \\ &x_1 + x_2 \geq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min z = -x_1 - x_2 \\ &x_1 - x_2 \geq 1 \\ &-x_1 + x_2 \geq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   - 写出这两个问题的对偶问题，并用图解法求解原问题、对偶问题。
   - 描述这两个问题对应的情形（原问题（对偶问题）的解是否为无界解、无可行解等）。

2. 试用对偶理论证明该线性规划问题无最优解。（提示：先求对偶问题，再判断对偶问题是否存在可行解。）

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ &-2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3. 已知下列线性规划问题对偶问题的最优解为 $Y=(0,-2)$，求原问题的最优解。(提示：利用互补松弛定理。)

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
-x_1 + x_2 - x_3 &\leq 6 \\
x_1 &\leq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\text{无约束}
\end{aligned}
$$

4. 已下列知线性规划问题对偶问题的最优解为：$y=(0.8, 0.6)$，用对偶理论、互补松弛原理找出原问题的最优解。

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 & \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &\geq 4 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &\geq 3 \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

5.（选做）了解什么是对偶单纯形法，以及和原版的单纯形法相比，有什么异同。然后利用对偶单纯形法求解下列问题：

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 3 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$