凸函数：$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 这个函数. ① dom f 是凸集.

② $f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$ $\theta \in [0,1]$

$\forall x, y \in \text{dom} f$

称 f 凸函数

凸函数判定定理

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数, $g(t) = f(x+tv)$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\forall x \in \text{dom} f$ $\text{dom}\, g: \{t \mid x+tv \in \text{dom} f\}$

$g(x)$ 也是凸函数

线性规划

x_1: 生产桌子数量 木工厂获利最大：$z = 50x_1 + 30x_2$

x_2: 生产椅子数量

木工：$4x_1 + 3x_2 \le 120$

漆工：$2x_1 + x_2 \le 50$

线性规划问题

$$\Rightarrow \max \quad z = 50x_1 + 30x_2$$ → 目标函数 objective function

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ & 2x_1 + x_2 \le 50 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$ → 约束条件 constraints.

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$ $\Rightarrow$

线性规划的一般形式

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t} \quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$ → 有时 x 无符号限制.

E.x .

$$\max \quad z = 50x_1 + 30x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 \le 120$$
$$2x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

$$\min \quad -(50x_1 + 30x_2) + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 120$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 50$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$
$$x_4 \ge 0$$

$$\Rightarrow \min \quad c^T x$$
$$\text{s.t} \quad Ax = b$$
$$x \ge 0$$

$$c = \begin{bmatrix} -50 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \end{bmatrix}$$

E.x $\min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2$$
$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min \quad -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_6 + 0 \cdot x_7$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 7$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_7 = 2$$
$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_6 \ge 0$$
$$x_7 \ge 0$$

$$\underline{x_3 = x_4 - x_5}$$

$$\min \quad -x_1 + 2x_2 - 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0 \cdot x_7$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7$$
$$x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2$$
$$-3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_4 \ge 0$$
$$x_5 \ge 0$$
$$x_6 \ge 0$$
$$x_7 \ge 0$$

$\max \quad z = 50x_1 + 30x_2$

s.t. $\quad 4x_1 + 3x_2 \le 120$

$\quad 2x_1 + x_2 \le 50$

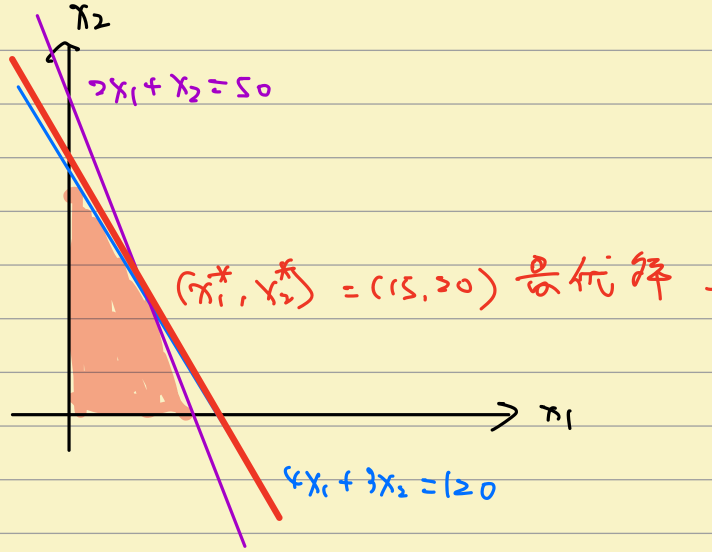
$\quad x_1 \ge 0$

$\quad x_2 \ge 0$

$z = 50x_1 + 30x_2$

$\Rightarrow x_2 = \frac{z}{30} - \frac{5}{3}x_1$

① 图解法



① 线性规划问题，满足约束条件的可行域为多边形。

② 最优解必定在多边形的某一个顶点取得

求解结果：

① 无穷多最优解

② 无界解

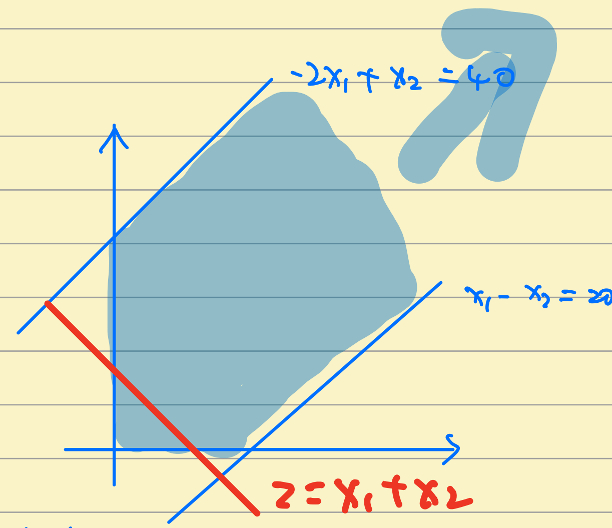
$\max \quad z = x_1 + x_2$

s.t. $\quad -2x_1 + x_2 \le 40$

$\quad x_1 - x_2 \le 20$

$\quad x_1 \ge 0$

$\quad x_2 \ge 0$



③ 无可行解 → 可行域为空集

④ 唯一最优解.

② 单纯形法 simplex method

max c^Tx <= 可行解 x 满足目标 <- 最优解.

s.t. $\left.\begin{aligned}Ax&=b\\ x&\ge 0\end{aligned}\right\}$ <= x 满足约束条件 <- 可行解

基: A 是 $m\times n$ 的矩阵, $m\le n$, A的秩 (rank) 为 m, B 是 A 中的 $m\times m$ 的非奇异矩阵 (nonsingular $|B|\ne0$), 则称 B 是线性规划问题的一组基.

$A=\begin{bmatrix}4&3&1&0\\2&1&0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times4}$ $m=2$, $n=4$ $B=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ $B'=\begin{bmatrix}3&1\\1&0\end{bmatrix}$ $B''=\begin{bmatrix}3&0\\1&1\end{bmatrix}$

基向量: 矩阵 B 是由 m 个线性独立的列向量组成, $B=[P_1\ P_2\ \cdots\ P_m]$. P_j 为 B 的基向量.

$B'''=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $P_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $P_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

基变量: 与基向量 P_j 对应的变量 x_j, 就称为基变量.

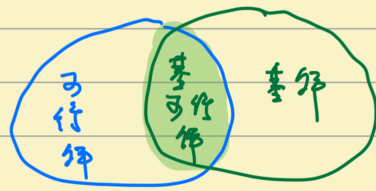
非基变量: 其余的就称为非基变量.

$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}4&3&1&0\\2&1&0&1\end{bmatrix}\end{array}$ $B'''=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 基变量: x_3, x_4 非基变量: x_1, x_2

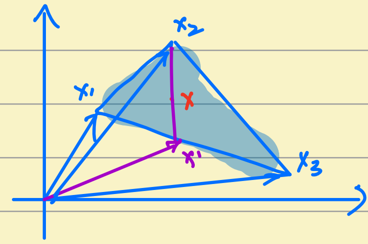
基解: 对于某一特定的基 B, 非基变量取0值得到的解

$x=[0,0,b,0]$ → 基解

基可行解: 满足非负约束条件的基解.



引理：若 $K=\{x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$，则任何一点 $x\in K$，可表示为K的顶点的凸组合。



引理：线性规划问题的可行解 $x=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$ 为基可行解的充要条件，是x的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x=(0\ 0\ 1\ 1) \qquad x=(0\ 0\ 3\ 3)$$

定理：线性规划问题的基可行解 x 对应于可行域的顶点

定理：若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其顶点上达到最优

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+3x_2 \\ s.t.\ & x_1+2x_2\leq 8 \\ & 4x_1\leq 16 \\ & 4x_2\leq 12 \\ & x_1\geq 0 \\ & x_2\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \max\ & 2x_1+3x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5 \\ s.t.\ & x_1+2x_2+x_3=8 \\ & 4x_1+x_4=16 \\ & 4x_2+x_5=12 \\ & x_1\sim x_5\geq 0 \end{aligned}$$

$$C=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8-x_1-2x_2 \\ x_4 &= 16-4x_1 \\ x_5 &= 12-4x_2 \end{aligned}$$

$z=2x_1+3x_2 \longleftarrow$ 非基变量 x_1 x_2 的系数是正数，因此可将非基变量变换成基变量，目标值就可以增大

$X_0=(0,0,8,16,12)$

$$C = \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$C = [\,2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \end{aligned}$$

$z = 2x_1 + 3x_2 \longleftarrow$ 非基变量 x_1 x_2 的系数是正数，因此可将非基变量变换成基变量，目标值就可以增大

$X_0 = (0, 0, 8, 16, 12)$

令 $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 8 - 2x_2 \geq 0 \\ x_4 &= 16 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_2 = \min\left(\frac{8}{2}, \frac{12}{4}\right) = 3 \quad \Rightarrow x_5 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 + 2x_2 &= 8 - x_1 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ 4x_2 &= 12 - x_5 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_2 &= 3 - \tfrac{1}{4}x_5 \end{aligned}\right\}$$

基可行解：$(0, 3, 2, 16, 0)$

代入目标值 $z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5$

令 $x_5 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_2 &= 3 - \tfrac{1}{4}x_5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 \geq 0 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \geq 0 \\ x_2 &= 3 \geq 0 \end{aligned}$$

$x_1 = \min\left(\frac{2}{1}, \frac{16}{4}\right) = 2 \quad \Rightarrow x_3 = 0$