

凸函数:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  凸函数. ①  $\text{dom } f$  是凸集.

$$\textcircled{2} f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \quad \theta \in [0,1] \\ \forall x, y \in \text{dom } f$$

称  $f$  为凸函数

凸函数判定定理

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数.  $g(t) = f(x + tv) \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \text{dom } f \quad \text{dom } g = \{t \mid x + tv \in \text{dom } f\}$   
 $g(t)$  也是凸函数

线性规划

$x_1$ : 生产桌的数量

工厂获利最大:  $z = 50x_1 + 30x_2$

$x_2$ : 生产椅子数量

木工:  $4x_1 + 3x_2 \leq 120$

漆工:  $2x_1 + x_2 \leq 50$

线性规划问题

$\Rightarrow \max \quad z = 50x_1 + 30x_2 \rightarrow$  目标函数 objective function

s.t.  $4x_1 + 3x_2 \leq 120$

$2x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

} 约束条件 constraints.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\max \quad c^T x$

s.t.  $Ax \leq b \Rightarrow$

$x \geq 0$

线性规划的一般形式

$\min \quad c^T x$

s.t.  $Ax = b$

$x \geq 0$   $\rightarrow$  有时  $x$  无符号限制.

E.x .

$$\begin{array}{ll}
 \max & Z = 50x_1 + 30x_2 \\
 \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 50 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \min & -(50x_1 + 30x_2) + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\
 \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 120 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_4 = 50 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_3 \geq 0 \\
 & x_4 \geq 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \min \quad c^T x \quad c = \begin{bmatrix} -50 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

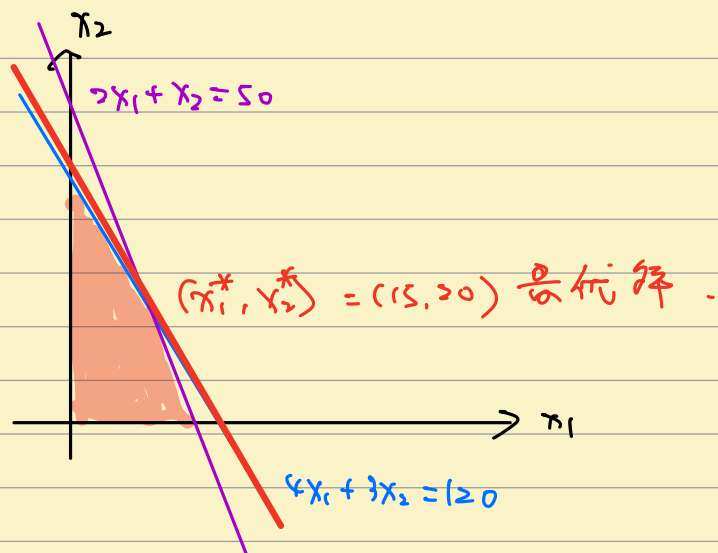
$$\begin{array}{ll}
 \text{E.x} & \min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\
 & -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_6 + 0x_7 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 7 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 - x_7 = 2 \\
 & -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_6 \geq 0 \\
 & x_7 \geq 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \min & -x_1 + 2x_2 - 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\
 & x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\
 & -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_4 \geq 0 \\
 & x_5 \geq 0 \\
 & x_6 \geq 0 \\
 & x_7 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 50x_1 + 30x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 50 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= 50x_1 + 30x_2 \\
 \Rightarrow x_2 &= \frac{Z}{30} - \frac{5}{3}x_1
 \end{aligned}$$

① 图解法



- ① 线性规划问题，满足约束条件的可行域为多边形。
- ② 最优解必定在多边形的某一个顶点取得

求解结果：

① 无穷多最优解

② 无界解

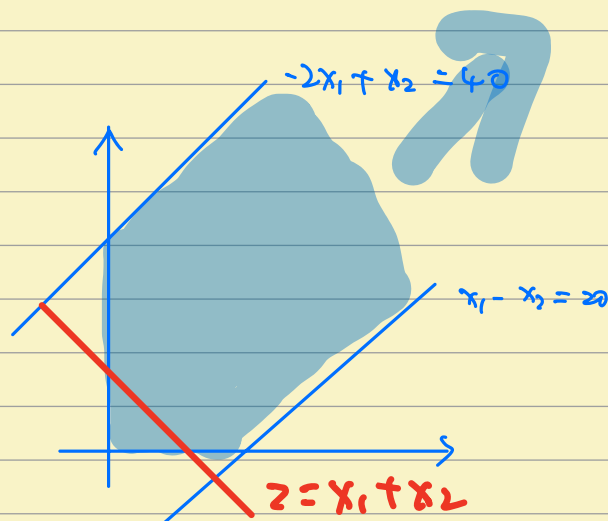
$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 - x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



③ 无可行解  $\rightarrow$  可行域为空集

④ 唯一最优解。

## ② 单纯形法 simplex method

$$\max c^T x$$

$\Leftarrow$  可行解  $x$  满足目标  $\Leftarrow$  最优解

$$\text{s.t. } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow x$  满足约束条件  $\Leftarrow$  可行解

基:  $A$  是  $m \times n$  的矩阵,  $m \leq n$ ,  $A$  的秩 (rank) 为  $m$ ,

$B$  是  $A$  中的  $m \times m$  的非奇异矩阵 (nonsingular  $|B| \neq 0$ ), 则称  $B$  是线性规划问题的一组基。

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4} \quad \begin{matrix} m=2 \\ n=4 \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B'' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

基向量: 矩阵  $B$  是由  $m$  个线性独立的列向量组成,  $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$   
 $P_i$  为  $B$  的基向量。

$$B''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基变量: 与基向量  $P_i$  对应的变量  $x_i$ , 就称为基变量。

非基变量: 其余的就称为非基变量。

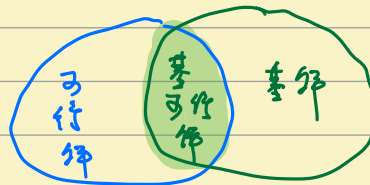
$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{基变量: } x_3, x_4 \\ \text{非基变量: } x_1, x_2 \end{matrix}$$

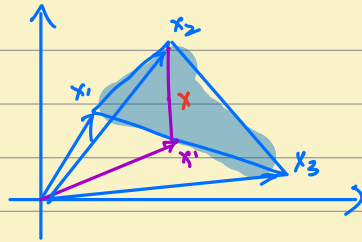
基解: 对于某一特定的基  $B$ , 非基变量取 0 值得到的解

$$x = [0, 0, 0, 0] \rightarrow \text{基解}$$

基可行解: 满足非负约束条件的基解。



引理: 若  $K = \{x \mid Ax=b, x \geq 0\}$ , 则任一点  $x \in K$ , 可表示为  $K$  的顶点的凸组合.



引理: 线性规划问题的可行解  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为基可行解的充要条件, 是  $x$  的非零分量所对应的系数列向量是线性独立的.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x = (0 \ 0 \ 1 \ 1)^T \\ x = (0 \ 0 \ 3 \ 3)^T \end{matrix}$$

定理: 线性规划问题的基可行解  $x$  对应于可行域的顶点

定理: 若可行域有界, 线性规划问题的目标函数一定可以在其顶点上达到最优

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16 \Rightarrow$$

$$4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$C = [2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$4x_1 + x_4 = 16$$

$$4x_2 + x_5 = 12$$

$$x_1 \sim x_5 \geq 0$$

$$x_3 \ x_4 \ x_5$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 8 - x_1 - 2x_2$$

$$x_4 = 16 - 4x_1$$

$$x_5 = 12 - 4x_2$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \leftarrow \text{非基变量 } x_1, x_2 \text{ 的系数是正数, 因此}$$

可将非基变量变换成基变量, 目标值就可以增大

$$x_0 = (0, 0, 8, 16, 12)$$

$$C = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline [2 & 3 & 0 & 0 & 0] \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 \end{aligned}$$

$z = 2x_1 + 3x_2$  ← 非基变量  $x_1, x_2$  的系数是正数, 因此  
 可将非基变量变换成基变量, 目标值就可以增大  
 $x_0 = (0, 0, 8, 16, 12)$

$$\begin{aligned} \text{令 } x_1 = 0 \quad x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 & x_3 &= 8 - 2x_2 \geq 0 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 & \Rightarrow x_4 &= 16 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 & x_5 &= 12 - 4x_2 \geq 0 \\ x_2 &= \min\left(\frac{8}{2}, \frac{12}{4}\right) = 3 & \Rightarrow x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - x_1 - 2x_2 & x_3 + 2x_2 &= 8 - x_1 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 & \Rightarrow x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_5 &= 12 - 4x_2 & 4x_2 &= 12 - x_5 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{基可行解: } (0, 3, 2, 16, 0) \\ &\text{代入目标值 } z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5 \end{aligned}$$

令  $x_5 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 & x_3 &= 2 - x_1 \geq 0 \\ x_4 &= 16 - 4x_1 & \Rightarrow x_4 &= 16 - 4x_1 \geq 0 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 & x_2 &= 3 \geq 0 \\ x_1 &= \min\left(\frac{2}{1}, \frac{16}{4}\right) = 2 & \Rightarrow x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 &= 16 - 4(2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5) = 8 + 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{aligned}$$

$$z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5 = 13 - 2x_3 + \frac{1}{4}x_5 \quad x_3, x_5 = 0$$

$$x = (2, 3, 0, 8, 0)$$

取  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$  中  $x_1, x_5$  令  $x_3 = 0$

$$x_1 = 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_5 \geq 0$$

$$x_4 = 8 + 4x_3 - 2x_5$$

$$x_4 = 8 - 2x_5 \geq 0$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{6}x_5$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{6}x_5 \geq 0$$

$$x_5 = \min\left(\frac{8}{2}, \frac{3}{\frac{1}{6}}\right) = 4 \Rightarrow x_4 = 0$$

$$x_1 = 2 - x_3 + \frac{1}{2}(4 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4) = 4 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_5 = 4 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{6}(4 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4) = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{12}x_4$$

$$(4, 2, 0, 0, 4)$$

$$z = 14 - 1.5x_3 - \frac{1}{8}x_4$$

单纯形表

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$s.t. \quad 8 \geq x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$16 = 4x_1 + x_4$$

$$12 = 6x_2 + x_5$$

|       | b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\theta_i$       |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|
| $z$   | 0  | 2     | 3     | 0     | 0     | 0     |                  |
| $x_3$ | 8  | 1     | 2     | 1     | 0     | 0     | $\frac{4}{2}$    |
| $x_4$ | 16 | 4     | 0     | 0     | 1     | 0     | -                |
| $x_5$ | 12 | 0     | [6]   | 0     | 0     | 1     | $\frac{12}{4}$ ② |

|       | b.              | $x_1$ | $x_2$            | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$           |   |
|-------|-----------------|-------|------------------|-------|-------|-----------------|---|
| $z$   | 0 <sup>-9</sup> | 2     | 3 <sup>0</sup>   | 0     | 0     | 0 <sup>-3</sup> | ③ |
| $x_3$ | 8 <sub>2</sub>  | 1     | 2 <sup>0</sup>   | 1     | 0     | 0 <sup>-1</sup> | ② |
| $x_4$ | 16              | 4     | 0                | 0     | 1     | 0               |   |
| $x_2$ | 12 <sub>3</sub> | 0     | [6] <sub>1</sub> | 0     | 0     | 1 <sub>1</sub>  | ① |

|       | b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$          | $\theta_i$      |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|----------------|-----------------|
| $z$   | -9 | 2     | 0     | 0     | 0     | $-\frac{3}{4}$ |                 |
| $x_3$ | 2  | [1]   | 0     | 1     | 0     | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{1}$ ② |
| $x_4$ | 16 | 4     | 0     | 0     | 1     | 0              | $16/4$          |
| $x_2$ | 3  | 0     | 1     | 0     | 0     | $\frac{1}{4}$  | —               |

|       | b.  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$           | $\theta_i$      |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|
| $z$   | -13 | 0     | 0     | -2    | 0     | $-\frac{1}{4}$  |                 |
| $x_1$ | 2   | 1     | 0     | 1     | 0     | $-\frac{1}{2}$  |                 |
| $x_4$ | 8   | 0     | 0     | -4    | 1     | $[\frac{2}{1}]$ | $\frac{8}{2}$   |
| $x_2$ | 3   | 0     | 1     | 0     | 0     | $\frac{1}{4}$   | $\frac{3}{1/4}$ |

|       | b.  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$         | $x_5$          |  |
|-------|-----|-------|-------|-------|---------------|----------------|--|
| $z$   | -13 | 0     | 0     | -2    | 0             | $\frac{1}{4}$  |  |
| $x_1$ | 2   | 1     | 0     | 1     | 0             | $-\frac{1}{2}$ |  |
| $x_5$ | 4   | 0     | 0     | -2    | $\frac{1}{2}$ | 1              |  |
| $x_2$ | 3   | 0     | 1     | 0     | 0             | $\frac{1}{4}$  |  |

|       | b.  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$          | $x_5$ |  |
|-------|-----|-------|-------|----------------|----------------|-------|--|
| $z$   | -14 | 0     | 0     | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{8}$ | 0     |  |
| $x_1$ | 4   | 1     | 0     | 0              | $\frac{1}{4}$  | 0     |  |
| $x_5$ | 4   | 0     | 0     | -2             | $\frac{1}{2}$  | 1     |  |
| $x_2$ | 2   | 0     | 1     | $\frac{1}{2}$  | $-\frac{1}{8}$ | 0     |  |

→ 最优值

$(4, 2, 0, 0, 4)$

最优解