运筹学基础：课后练习 2

Due Date: 2025-05-12

1. 证明：对偶问题是一个凸优化问题。即，证明其目标函数是凸函数（最小化问题），约束集是凸集。

2. 写出下列线性规划问题的对偶问题

   (a)

$$\max 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 7x_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 500 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \le 800 \\ x_1 + x_2 \le 200 \\ x_4 \ge 1.5x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

   (b)

$$\min 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 1.5x_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 0.08x_1 + 0.45x_2 + 0.6x_3 + 0.15x_4 \ge 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ 0.04x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.02x_4 \le 0.05(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ 0.03(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \le 0.02x_1 + 0.05x_2 + 0.03x_3 + 0.1x_4 \\ 0.02x_1 + 0.05x_2 + 0.03x_3 + 0.1x_4 \le 0.08(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 \ge 2x_3 \\ x_4 \le 1.5x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

(c)

$$\max 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.06x_3 + 0.08x_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 200 \\ x_1 + x_2 \leq 0.6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_3 + x_4 \geq 0.3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 \leq 1.2x_1 \\ x_4 \geq 0.5x_3 \\ x_3 + 0.8x_4 \geq 0.7(x_1 + x_2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

3. 利用拉格朗日方法求下列非线性规划问题的对偶问题

(a)

$$\max c^\top x$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ A_3 x \geq b_3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(b) 范数最小化问题。这里是范数 $\|\cdot\|$ 是任意范数。（提示：利用柯西不等式的推广 $x^\top y \leq \|x\|_p \|y\|_q$，$\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ 互为对偶范数。）

$$\max \|x\|$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$

(c)

$$\begin{aligned} \max \quad & x^\top W x \\ \text{s.t.} \quad & x_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2} x^\top P x + q^\top x + r \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

这里的 $P \succeq 0$。

(e)

$$\begin{aligned} \min \quad & x^\top A x + 2b^\top x \\ \text{s.t.} \quad & x^\top x \leq 1. \end{aligned}$$