最优控制理论第 4 章习题 (1)

Date due: 2025-11-19

1. 固定时长 $T > 0$，考虑系统与约束：

$$x = (x_1, x_2)^\top, \quad a \in [-1, 1], \qquad \dot{x}_1 = x_1 + a, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + a^2.$$

收益函数为：

$$P = \int_0^T r(x, a)\, dt + g(x(T)),$$

其中，$r(x, u) = -(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}a^2$，$g(x) = \frac{1}{2}(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2)$，$q_1, q_2 \geq 0$.

(a) 写出 $H(x, p, a)$，给出 PMP 三件套：$\dot{x} = H_p,\ \dot{p} = -H_x,\ a \in \arg\max H$。

(b) 推导最优控制 $a^*(t)$ 的表达式（提示：先解 $H_a = 0$，再将 a 投影到 $[-1, 1]$）。

(c) 写出终端横截条件 $p(T)$ 的表达式。

(d) 说明固定 T 情形下 H 为常数。

2. 固定时长 $T > 0$，考虑系统与约束：

$$\dot{x} = Ax + Ba, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

收益函数为：

$$P = \int_0^T r(x, a)\, dt + g(x(T)), \quad r(x, u) = -(x^\top Q x + a^2) - 2x^\top N x,$$

其中，$g(x) = c^\top x, \quad c = (1, -1)^\top$，

$$Q = \mathrm{diag}(1, 0.5),\ N = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(a) 写出 $H(x,p,a)$，给出 PMP 三件套，并推出 $a^*(t)$ 的表达式。

(b) 写出终端横截条件 $p(T)$ 的表达式。

(c) 说明固定 T 情形下 H 为常数。

3. 考虑系统与约束：

$$\dot{x} = a, \quad a \in [-1,1], \quad x(0) = x_0 > 0, \quad x(\tau) = 0\ .$$

收益函数为：

$$P = \int_0^\tau r(x,a)\,dt, \qquad r(x,a) = -1 - \varepsilon x^2,\ \varepsilon \geq 0.$$

(a) 写出 $H(x,p,a)$，给出 PMP 三件套并说明 $H \equiv 0$。

(b) 求解 τ^* 与 $p(t)$ 。

(c) 讨论 $\varepsilon > 0$ 和 $\varepsilon = 0$ 情形下，对最短时间 τ^* 的影响。

(d) 若要求切换次数 ≤ 1，讨论解的结构是否变化及原因。

4. 考虑系统与约束：

$$x = (x_1, x_2)^\top, \quad \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = a, \quad a \in [-\bar{a}, \bar{a}],\ \bar{a} > 0,$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(\tau) = 0.$$

收益函数为：

$$P = \int_0^\tau r(x,a)\,dt, \qquad r(x,a) = -(1 + \tfrac{\beta}{2}a^2),\ \alpha > 0.$$

(a) 写出 $H(x,p,a)$，给出 PMP 三件套并说明 $H \equiv 0$。

(b) 求出 $a^*(t)$。

(c)（* 选做）分析 $a^*(t)$ 何时为饱和、何时为非饱和。

(d)（* 选做）求 τ^*。