https://github.com/styluck/opt_ctrl

Thm 2.8 能把 x_0 驶到 0 的控制集合中存在一个极值控制.

Krein-Milman：保证极值点存在

Thm 2.10：极值点必为 bang-bang 控制.

存在 bang-bang 控制.

Bolzano-Weierstrass 定理

有界集存在收敛子列.

Alaoglu's 定理：α_n 满足 $\|\alpha_n(\cdot)\|\le 1$

$\Rightarrow$ 存在一个弱* 收敛的子列：$\alpha_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha$

第二章：$x(t)=0$

第三章：线性时间最优控制 (Linear time-optimal control)

(ODE) $\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t) & t>0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

回报函数 (Payoff function)

$$P[\alpha(\cdot)] := \int_0^{\tau} 1\,ds = -\tau$$

其中 $\tau := \tau(\alpha(\cdot))$ 是 $x(t)=0$ 的最早时间

如果 $x(t)$ 的轨迹不经过 0，则 $\tau = +\infty$.

最优时间问题：给定初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，希望找到一个最优控制 $\alpha^*(\cdot)$

使得

$$P[\alpha^*(\cdot)] = \max_{\alpha(\cdot)\in A} P[\alpha(\cdot)] \quad , \quad A \in [-1,1]^m$$

最优时间 $\tau^* = -P[\alpha^*(\cdot)]$

$C(t)$：可达集

$= \{x_0 \mid x(t)=0\}$

Thm 3.1 (时间最优控制的存在性) 令 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，线性系统 (ODE) 存在一个时间最优的 bang-bang 控制.

Proof: $\tau^* = \inf\{t \mid x^0 \in C(t)\}$. 要证 $x_0 \in C(\tau^*)$.

取一个时间序列, $t_1 \ge t_2 \ge \cdots t_n \ge \cdots \tau^*$ 且满足 $x_0 \in C(t_n)$

由于 x_0 在时间 t_n 可达, 所以存在控制 α_n 满足

$$x_0 = -\int_0^{t_n} X^{-1}(s) N \alpha_n(s)\, ds.$$

在 $[t_n, +\infty)$ 令 $\alpha_n = 0$. 根据 Alaoglu's 定理, 存在一个子序列 $n_k \to +\infty$,

及 $\alpha^*(\cdot)$ 满足 $\alpha_{n_k} \xrightarrow{\text{弱}*} \alpha^*$

$$x^0 = -\int_0^{t_{n_k}} X^{-1}(s) N \alpha_{n_k}(s)\, ds = -\int_0^{t_1} X^{-1}(s) N \alpha_{n_k}(s)\, ds$$

由于 $\alpha_{n_k} = 0$ 在 $[t_{n_k}, +\infty)$ 上成立 令 $n_k \to +\infty$

$$x^0 = -\int_0^{t_1} X^{-1}(s) N \alpha^*(s)\, ds = -\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s) N \alpha^*(s)\, ds$$

$x^0 \in C(\tau^*)$, 根据定理 2.10, 可得 $\alpha^*(\cdot)$ 是最优 bang-bang 控制.

$C(t)$ 反向可达集: 时间 t 能被某个控制达到目标 0 的初始点集合.

$K(t, x_0)$ 前向可达集: 从初始点 x_0 出发, 在时间 t 能到达的终点集合

$$0 \in K(t, x_0) \iff x_0 \in C(t)$$

Defn: (前向可达集). 我们定义 $K(t, x_0)$ 是所有时间 t 到达的终点集合

$K(t, x^0) = \{x(t) \mid$ 存在控制 $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ 将 x_0 驶入 $x(t)\}$.

(ODE) $\begin{cases} \dot{x}(t) = M x(t) + N \alpha(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$x(t) = 0$

$\Downarrow$

$x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N \alpha(s)\, ds$

一般解: $x(t) = X(t) x_0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha(s)\, ds$

$x_1 \in K(t, x^0)$ 当且仅当 存在 $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$ 使得

$$x_1 = X(t) x_0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha(s)\, ds$$

Thm 3.2. 集合 $K(t, x_0)$ 是一个闭凸集.

Proof: 证凸性. 令 $x_1, x_2 \in K(t, x_0)$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ 满足

$$x_1 = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha_1(s)ds$$

$$x_2 = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha_2(s)ds$$

令 $\lambda \in [0,1]$，有

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N(\lambda\alpha_1(s) + (1-\lambda)\alpha_2(s))ds$$

$A = [-1,1]^m$ 是一个凸集，有 $\lambda\alpha_1(s) + (1-\lambda)\alpha_2(s) \in A$.

因此有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in K(t, x^0)$

证明是闭集. 构造 $x_k \in K(t, x_0)$ 且 $x_k \to y$ as $k \to +\infty$.

因为 $x_k \in K(t, x_0)$ 存在 $\alpha_k(\cdot) \in A$ 使得

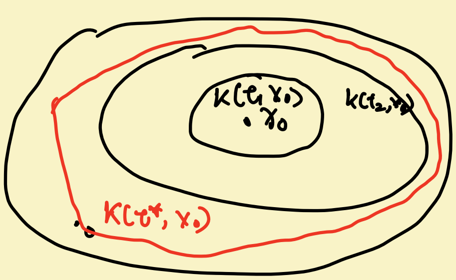
$$x_k = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha_k(s)ds. \quad \forall k$$

根据 Alaoglu's 定理, 存在一个子列 $k_j \to \infty$ 有 $\alpha_k \overset{弱}{\to} \alpha \in A$. 因此

$$y := X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

由于上式满足一般解, 有 $y \in K(t, x_0)$. 因此 $K(t, x_0)$ 是闭集.

$t_1 \le t_2 \le t_3 \cdots$



Notation: 集合 S, S°: 集合 S 的内点 ∂S: 集合 S 的边界点.

$S = S^\circ \cup \partial S$ $S^\circ \cap \partial S = \emptyset$.

若 τ^* 是将 x 驱入 0 点的最优时间, 有 α^* 是该最优控制, 则

$$0 \in \partial K(\tau^*, x_0)$$

Thm (Pontryagin 极大值原理) 存在一个非零向量 h 使得

$$h^T X^{-1}(t)N\alpha^*(t) = \max_{a \in A}\{h^T X^{-1}(t)Na\}$$

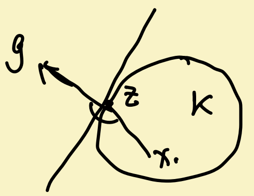
$X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$

对于所有的 $0 \le t \le \tau^*$.

$$\alpha^*(t) = \arg\max_{a \in A}\{h^T X^{-1}(t)Na\}.$$

$(g-z)^T(x_1-z) \le 0$

$z=0 \Rightarrow g^T x_1 \le 0$



$\forall x_1 \in K$

Proof 由 $0\in\partial K(\tau^*, x_0)$ 因 $K(\tau^*, x_0)$ 是一个凸集，则存在一个过0点的支撑超平面，即存在 $g\neq 0$，满足

$$g^T x_1 \le 0 \qquad \forall x_1 \in K(\tau^*, x_0) \qquad ①$$

由于 $x_1 \in K(\tau^*, x_0)$，则存在 $\alpha(\cdot)\in A$ 使得

$$x_1 = X(\tau^*)x_0 + X(\tau^*)\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha(s)ds$$

由于 $0\in K(\tau^*, x_0)$，则存在 $\alpha^*(\cdot)\in A$ 使得

$$0 = X(\tau^*)x_0 + X(\tau^*)\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha^*(s)ds$$

由 ① 得

$$g^T\left(X(\tau^*)x_0 + X(\tau^*)\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha(s)ds\right)$$

$$\le 0 = g^T\underbrace{\left(X(\tau^*)x_0 + X(\tau^*)\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha^*(s)ds\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow g^T X(\tau^*)\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha(s)ds \le g^T X(\tau^*)\int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha^*(s)ds$$

令 $h^T = g^T X(\tau^*)$

$$\Rightarrow \int_0^{\tau^*} h^T X^{-1}(s)N\alpha(s)ds \le \int_0^{\tau^*} X^{-1}(s)N\alpha^*(s)ds$$

$$\Rightarrow \int_0^{\tau^*} h^T X^{-1}(s)N(\alpha^*(s)-\alpha(s))ds \ge 0 \qquad \forall \alpha\in A$$

接着证明 $h^T X^{-1}(s)N\alpha^*(s) = \max_{a\in A}\{h^T X^{-1}(s)Na\}$，对于任意 $s\in[0,\tau^*]$

假设不成立，则存在一个区间 $E\subset[0,\tau^*]$ 且 $|E|>0$ 使得

$$h^T X^{-1}(s)N\alpha^*(s) < \max_{a\in A}\{h^T X^{-1}(s)Na\}$$

定义一个控制 $\hat{\alpha}(\cdot)$.
$$\hat{\alpha}(s) = \begin{cases} \alpha^*(s) & s\notin E \\ \alpha(s) & s\in E \end{cases}$$

其中令 $\alpha(s)$ 满足 $\alpha(s) = \arg\max_{a\in A} \{h^T X^{-1}(s) N a\}$ 在 $s\in E$ 上成立.

有
$$\int_0^{\tau^*} h^T X^{-1}(s) N (\alpha^*(s) - \alpha(s))\,ds = \int_E \underbrace{h^T X^{-1}(s) N (\alpha^*(s) - \alpha(s))}_{<0} ds \geq 0$$

与前式矛盾。因此得证.

Hamiltonian 系统

$$H(x,p,a) := (Mx + Na)\cdot p$$

Thm 3.4 (Pontryagin 极大值原理的 Hamiltonian 系统表述)

引入 Hamiltonian 函数, Pontryagin 原理重写为. 存在变量 $p^*(\cdot):[0,\tau^*]\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$\dot{x}^*(t) = \nabla_p H(x^*(t), p^*(t), \alpha^*(t))$$
$$= M x^*(t) + N\alpha^*(t)$$

协态方程
伴随方程
adjoint equation

(ADJ)
$$\dot{p}^*(t) = -\nabla_x H(x^*(t), p^*(t), \alpha^*(t)).$$
$$= -M^T p^*(t)$$

$p^*(\cdot)$: 协态变量
伴随变量
costate.

且

$$H(x^*(t), p^*(t), \alpha^*(t)) = \max_{a\in A} H(x^*(t), p^*(t), a)$$

Proof: 定义 $h = p^T X(\tau^*)$. 考虑如下的系统

$$\begin{cases} \dot{p}^*(t) = -M^T p^*(t) \\ p^*(0) = h \end{cases}$$

有基本解 $p^*(t) = \exp(-tM^T)h$. 因此 $[\exp(-tM^T)]^T = \exp(-tM)$

$$p^*(t)^T = h^T X^{-1}(t)$$

由 Thm 3.3 可得

$$h^T X^{-1}(t) N\alpha^*(t) = \max_{a\in A}\{h^T X^{-1}(t) N a\}.$$

因为 $p^*(t)^T = h^T X^{-1}(t)$ 代入可得

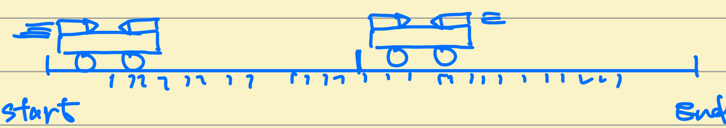
$$\underline{p^*(t)^T}(Mx^*(t)+N\alpha^*(t)) = \underline{p^*(t)^T}Mx^*(t) + \max_{a\in A}\{p^*(t)^T N a\}$$

$$= \max_{a\in A}\{p^*(t)^T(Mx^*(t)+Na)\}$$

整理可得

$$\Rightarrow H(x^*(t),p^*(t),\alpha^*(t)) = \max_{a\in A} H(x^*(t),p^*(t),a)$$

E.g. 1



设 $q(t)$ 为位置，$v(t)=\dot{q}(t)$ 为速度. $\alpha(t)\in[-1,1]$ 为推力

根据力学方程，有加速度 $\dot{v}(t) = \ddot{q}(t) = \alpha(t)$

写成线性系统

$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = \begin{pmatrix}\dot{q}(t)\\ \dot{v}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v(t)\\ \alpha(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\alpha(t) & t>0\\ x(0) = x_0\end{cases}$$

$x(t) = \begin{pmatrix}q(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 时，到达稳定

根据 Pontryagin 原理，存在 $h\neq 0$，使得

$h = \begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$

$$h^T X^{-1}(t) N\alpha^*(t) = \max_{a\in A}\{h^T X^{-1}(t) N a\}$$

根据表达式 $M = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ 此时须计算 $X^{-1}(t)$

$$X^{-1}(t) = X(-t) = \exp(-tM)$$

$$\exp(tM) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k M^k}{k!} = I + tM + \frac{1}{2}t^2M^2 + \frac{1}{6}t^3M^3 \cdots$$

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad M^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore \exp(tM)=I+tM$$

$$\Rightarrow \exp(-tM)=I+-tM=\begin{pmatrix}1&-t\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore X^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1&-t\\0&1\end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(t)N=\begin{pmatrix}1&-t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}$$

代入: $h^TX^{-1}(t)N\alpha^*(t)=\max\limits_{a\in A}\{h^TX^{-1}(t)Na\}$ $\quad a\in A \Rightarrow |a|\le 1$

$h=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$ $\quad h^T\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}\alpha^*(t)=\max\limits_{|a|\le 1}\{h^T\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}a\}$

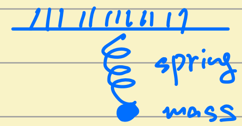
$$\Rightarrow (-th_1+h_2)\alpha^*(t)=\max_{|a|\le 1}\{(-th_1+h_2)a\}.$$

$$\Rightarrow \alpha^*(t)=\frac{\max\limits_{|a|\le 1}\{(-th_1+h_2)a\}}{(-th_1+h_2)}$$

$$\alpha^*(t)=\mathrm{sgn}(-th_1+h_2)$$

spring: 春天
泉
弹簧

E.g. 振动弹簧,
考虑动力系统



$$\ddot{x}_1+x_1=\alpha$$

令 $x_2(t)=\dot{x}_1(t)$, 则 $\dot{x}_2(t)=\ddot{x}_1(t)$

$$\begin{cases}\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)+\alpha(t)\end{cases} & t>0\\ \begin{cases}x_1(0)=x_{10}\\ x_2(0)=x_{20}\end{cases}\end{cases}$$

$\dot{x}(t)=Mx(t)+N\alpha(t)$

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\alpha(t)$$

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

应用 Pontryagin 原理

$$h^TX^{-1}(t)N\alpha^*(t)=\max_{a\in A}\{h^TX^{-1}(t)Na\}$$

需求 $X^{-1}(t)$

$$X^{-1}(t) = X(-t) = \exp(-tM)$$

$$\exp(tM) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} = I + tM + \frac{1}{2}t^2 M^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \quad M^3 = -IM = -M \quad M^4 = I$$

$M^k = I \quad k = 0, 4, 8 \cdots$

$M^k = M \quad k = 1, 5, 9 \cdots$

$M^k = -I \quad k = 2, 6, 10 \cdots$

$M^k = -M \quad k = 3, 7, 11 \cdots$

$$\exp(tM) = I + tM - \frac{t^2}{2} I - \frac{t^3}{6} M + \frac{t^4}{4!} I \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{t}{2!} + \frac{t}{4!} - \cdots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) M$$

$$= \cos t \, I + \sin t \, M$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(t) N = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad h^T X^{-1}(t) N = (-h_1 \sin t + h_2 \cos t)$ by Pontryagin

$$\Rightarrow \quad (-h_1 \sin t + h_2 \cos t)\, \alpha^*(t) = \max_{|a| \le 1} \{ (-h_1 \sin t + h_2 \cos t) a \}$$

$$\alpha^*(t) = \operatorname{sgn}(-h_1 \sin t + h_2 \cos t)$$