最优控制理论第 2 章习题

1. 给定线性系统：

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

   判断该系统是否可控，并说明理由。

2. 对于系统 $\dot{x}(t) = Mx(t)$，其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

   计算 e^{tM}，并判断系统的零解是否渐近稳定。

3. **可观测性判断**

   考虑系统：

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

   判断该系统是否可观测。

4. 指出下列哪一个控制函数是 bang–bang 控制：

   (a) $\alpha(t) = \sin(t)$

   (b) $\alpha(t) = \text{sign}(\cos(t))$

   (c) $\alpha(t) = e^{-t}$

   (d) $\alpha(t) = t$

5. 解释为什么在可控系统中，可达集 $C(t)$ 在有限时间内包含原点邻域。结合 Evans 中的可控性矩阵与超平面分离定理简述理由。

6. 考虑一辆沿直线运动的小车，其状态为位置 $x_1(t)$ 和速度 $x_2(t)$，满足：

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(t), \quad u(t) \in [-1, 1].$$

   (a) 写出状态空间形式；

   (b) 判断系统是否可控；

   (c) 是否可以用 bang–bang 控制从任意初始状态驱动至原点？说明理由。

7. 某房间温度由下列系统描述：

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

   (a) 写出可观测性矩阵，判断是否可观测；

   (b) 若只测量 $x_1(t)$，能否恢复 $x_2(0)$？

8. 考虑系统：

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), \quad \alpha(t) \in [-1, 1],$$

   已知系统可控，终端时间为 T，初始状态为 x_0。

   使用 Krein–Milman 理论说明存在 bang–bang 控制将系统在 T 时刻驱动至原点。

9. 考虑系统：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) 写出可控性矩阵；

   (b) 判断系统是否可控；

   (c) 若 $u(t) \in [-1, 1]$，是否存在 bang–bang 控制将任意 x_0 驱动至原点？