第三章习题答案

1. 可达集 $K(t,x_0)$ 的凸性与闭性

见笔记《OC Note5》。

2. 系统的 $X(t)$、$X^{-1}(t)N$ 与最优控制一次切换结构

系统为

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) 因 $M^2=0$，有

$$X(t)=e^{tM}=I+tM=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix},\qquad X^{-1}(t)=e^{-tM}=I-tM=\begin{pmatrix}1&-t\\0&1\end{pmatrix}.$$

故

$$X^{-1}(t)N=\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}.$$

(b) 线性时间最优的极大值原理给出（存在常向量 $h=(h_1,h_2)^\top\neq 0$）

$$\alpha^*(t)\in\arg\max_{a\in[-1,1]}\,(h^\top X^{-1}(t)N)\,a=\operatorname{sgn}\big(h^\top X^{-1}(t)N\big)=\operatorname{sgn}(-t\,h_1+h_2).$$

函数 $\phi(t):=h^\top X^{-1}(t)N=-t\,h_1+h_2$ 为关于 t 的一次多项式，至多有一个零点，因此最优控制 $\alpha^*(t)=\operatorname{sgn}\phi(t)$ 至多切换一次（若 $h_1=0$ 则不切换）。

3. 简谐振子（受控）：$X^{-1}(t)N$ 与周期性切换

系统一阶化为

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) 因 M 生成平面旋转（具体推导见《OC Note5》），$X(t) = e^{tM} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$，从而

$$X^{-1}(t) = X(-t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad X^{-1}(t)N = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(b) 线性时间最优的极大值原理给出（存在常向量 $h = (h_1, h_2)^\top \neq 0$）

$$\alpha^*(t) = \operatorname{sgn}\big(h^\top X^{-1}(t)N\big) = \operatorname{sgn}\big(-h_1 \sin t + h_2 \cos t\big).$$

由于任意非零二维向量都可用幅角参数化（思考，为什么?），我们可以令 $-h_1 = \cos\delta,\ h_2 = \sin\delta$（可行，因为 $h \neq 0$），则

$$-h_1 \sin t + h_2 \cos t = \cos\delta\, \sin t + \sin\delta\, \cos t = \sin(t+\delta),$$

故

$$\alpha^*(t) = \operatorname{sgn}\big(\sin(t+\delta)\big).$$

$\sin(\cdot)$ 的零点间隔为 π，所以 bang–bang 控制每隔 π 时间切换一次（相位 δ 决定首个切换时刻）。

4. n 阶积分器链的切换函数次数与切换次数上界

系统为

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = \alpha, \qquad |\alpha| \le 1.$$

其系统矩阵 M 为上超对角线为 1 的伴随型矩阵，$N = e_n$。即：

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Hamilton 函数 $H=(Mx+Na)\cdot p$，极大值原理给伴随方程

$$\dot{p}(t)=-M^{\top}p(t).$$

写成坐标：

$$\dot{p}_1=0,\quad \dot{p}_2=-p_1,\quad \dot{p}_3=-p_2,\ \ldots,\ \dot{p}_n=-p_{n-1}.$$

由此递推：$p_1(t)\equiv c_0$ 为常数，$p_2(t)=-c_0t+c_1$ 为一次多项式，$p_3(t)=\frac{c_0}{2}t^2-c_1t+c_2$ 为二次多项式，…，最终

$$\phi(t):=p_n(t)$$

是关于 t 的次数 $\le n-1$ 的多项式（系数由初值 $p(0)$ 线性决定）。切换函数正是 $h^{\top}X^{-1}(t)N=p_n(t)=\phi(t)$，最优控制 $\alpha^*(t)=\operatorname{sgn}\phi(t)$。

(b) 一个非常值实系数多项式的不同实零点个数不超过其次数。因此 ϕ 的变号次数（可视为严格零点的个数）至多为 $n-1$，从而最优 bang–bang 控制的切换次数至多 $n-1$。