

第2章: 终点可达性/可控性 \Leftrightarrow 可观测性.

第3章: 在可达的前提下, 讨论时间最优控制.

① 线性模型 $\dot{x}(t) = Mx(t) + Na(t)$. $A = [-1, 1]^n$

② Pontryagin 极大值原理 (PMP)

第4章: 扩展到一般非线性, 一般型收益的最优控制问题

变分法 (Variational method)

Defn: (Lagrangian 函数) 给定一光滑 $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L = L(x, v)$.

其中 $T > 0$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. 我们称 L 为 Lagrangian 函数

基本变分问题: $\min_{x(\cdot)} J(x(\cdot)) := \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$ (1)

其中, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, L 为光滑的 Lagrangian 函数.

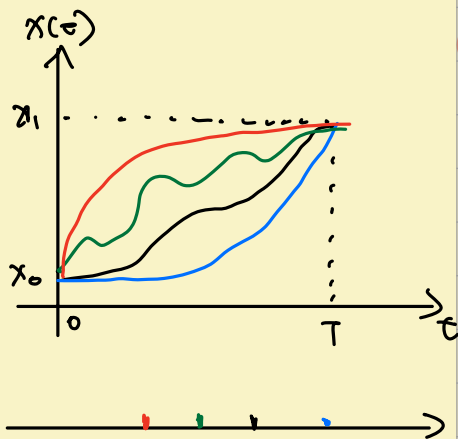
目标: 假设存在 $x^*(\cdot)$ 使得 $J(x(\cdot))$ 最小, 如何刻画 $x^*(\cdot)$?

令 $L = L(x, v)$ x : 位置 v : 速度 ($v = \dot{x}$) $x \in \mathbb{R}^n$ $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$
偏导: $L_{x_i} := \frac{\partial L}{\partial x_i}$ $L_{v_i} := \frac{\partial L}{\partial v_i}$ $v \in \mathbb{R}^n$ $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$
梯度: $\nabla_x L = \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ \vdots \\ L_{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\nabla_v L = \begin{pmatrix} L_{v_1} \\ \vdots \\ L_{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

链式法则: $\frac{dL}{dt} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^T \nabla_x L + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^T \nabla_v L$

Thm (Euler-Lagrangian 方程) 若 $x^*(\cdot)$ 使得 (1) 目标值最小, 则.

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x^*(t), \dot{x}^*(t)) = \nabla_x L(x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad t \in [0, T]$$



$$\min_x f(x)$$

$$y = x^2$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = 0$$

∇ : nabla

Proof: 令 $x^*(t)$ 最优, 构造一个光滑扰动 $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 满足 $y(0) = y(T) = 0$ (端点零扰动). 定义一个路径:

$$x_z(t) := x^*(t) + z y(t) \quad z \in \mathbb{R}$$

由于基本变分问题:

$$I(x(\cdot)) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

则 $x_z(t)$ 对于所有 $z \in \mathbb{R}$ 满足端点条件 $x_z(0) = x_0$, $x_z(T) = x_1$ 记

$$i(z) := I(x_z(\cdot)) = \int_0^T L(x_z(t), \dot{x}_z(t)) dt$$

则 i 关于 z 可导

$$i'(z) = \frac{d}{dz} \int_0^T L(x_z(t), \dot{x}_z(t)) dt$$

由于 L 光滑

$$i'(z) = \int_0^T \frac{d}{dz} L(x_z(t), \dot{x}_z(t)) dt$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^n (L_{x_i} y_i(t) + L_{\dot{x}_i} \dot{y}_i(t)) dt$$

证明 $i'(z)$ 在 $z=0$ 时, 为局部极小,

对于所有 z , 有 $x_z(t) \geq x_0 = x^*(0)$. 由于 $x^*(t)$ 为最优解, 存在 $\delta > 0$, 使得 $z \in (0, \delta)$ 都有

$$i(z) \geq i(0)$$

因此 $i(0)$ 为一个局部极小点. 由于 y 和 L 是光滑的, 必有一必要条件

$$i'(0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^T \sum_{i=1}^n (L_{x_i} y_i(t) + L_{\dot{x}_i} \dot{y}_i(t)) dt$$

任取一个分量 $j \in [n]$, 令 $y_j = \varphi$, $y_i = 0 \quad \forall i \neq j$, φ 是在 $[0, T]$ 上的光滑函数. 且 $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$, 则

分部积分

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^T L_{v_j} \cdot \dot{\psi}_j(t) dt$$

$$= \cancel{L\psi} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{d}{dt} L_{v_j} \psi(t) dt$$

几乎处处:

almost everywhere

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \int_0^T (L_{x_j} \psi_j(t) + L_{v_j} \dot{\psi}_j(t)) dt \\ &= \int_0^T (L_{x_j} \psi_j(t) - \frac{d}{dt} L_{v_j} \psi_j(t)) dt \\ &= \int_0^T (L_{x_j} - \frac{d}{dt} L_{v_j}) \psi_j(t) dt \end{aligned}$$

Lemma (变分基本引理) 若对于 $\phi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数, 如果

$$\int_0^T \phi(t) \psi(t) dt = 0$$

则 $\phi = 0$ 几乎处处于 $(0, T)$

根据变分基本引理, 可得

$$L_{x_j} - \frac{d}{dt} L_{v_j} = 0 \quad \leftarrow \text{第 } j \text{ 个分量}$$

记号, 可得

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x^*, \dot{x}^*) = \nabla_x L(x^*, \dot{x}^*)$$

$$\begin{aligned} H(x, p, \alpha) &= (Mx + N\alpha)p \\ &= \dot{x}p \end{aligned}$$

$$\dot{x} = Mx + N\alpha$$

与 Hamilton's 方程的联系

Defn. (广义动量 generalized momentum) 给定路径 $x(\cdot)$, 定义

$$p(t) := \nabla_v L(x(t), \dot{x}(t))$$

称 $p(\cdot)$ 为 广义动量

Assumption (Legendre 可逆假设) 对于固定的 x , 映射

$$v \rightarrow p := \nabla_v L(x, v)$$

是可逆的, 则有解为 $v = v(x, p)$.

Defn (Hamiltonian 动力系统) $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(x, p) = \langle p, v(x, p) \rangle - L(x, v(x, p))$$

Thm (Hamiltonian dynamics). 若 $x(\cdot)$ 为 Euler-Lagrangian 方程

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x(t), \dot{x}(t)) = \nabla_x L(x(t), \dot{x}(t))$$

的解. 令 $p(t) = \nabla_v L(x(t), \dot{x}(t))$ 满足 Legendre 可逆假设. 则

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t)) \end{cases}$$

且 $H(x(t), p(t))$ 是关于时间的常数.

Proof: 由定义

$$H(x, p) = \langle p, v(x, p) \rangle - L(x, v(x, p))$$

对 x 求偏导,

$$\nabla_x H = p \cdot \nabla_x v - \nabla_x L(x, v(x, p)) - \overbrace{\nabla_v L(x, v(x, p))}^p \nabla_x v$$

根据定义 $p = \nabla_v L(x, v(x, p))$, 可得

$$\nabla_x H(x, p) = -\nabla_x L(x, v(x, p))$$

根据 Euler-Lagrangian 方程.

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, \dot{x})$$

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{d}{dt} \nabla_v L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, v(x, p)) \\ &= -\nabla_x H(x, p) \end{aligned}$$

第二条得证.

同理对 p 求偏导

$$\nabla_p H = v(x, p) + p \cdot \nabla_p v - \overbrace{\nabla_v L(x, v(x, p))}^p \nabla_p v$$

有

$$\nabla_p H(x, p) = v(x, p) = \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t))$$

第一条得证.

证 Hamilton 量守恒.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) &= \nabla_x H \dot{x} + \nabla_p H \cdot \dot{p} \\ &= \nabla_x H \cdot \nabla_p H + \nabla_p H \cdot (-\nabla_x H) \\ &= 0\end{aligned}$$

因此 $H(x(t), p(t))$ 为关于时间 t 的常数.

E.g.: 牛顿第2定律. $F = m\ddot{x}$ m : 质量 a : 加速度
 x : 位置 $a = \ddot{x}$

考虑 Lagrangian 函数 \rightarrow 动能 \rightarrow 势能

$$\begin{aligned}L(x, \dot{x}) &= T(\dot{x}) - V(x) \\ &= \frac{m}{2} \|\dot{x}\|^2 - V(x)\end{aligned}$$

Euler-Lagrangian

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}} L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, \dot{x})$$

$$\text{可得 } \nabla_{\dot{x}} L(x, \dot{x}) = m\dot{x}, \quad \nabla_x L(x, \dot{x}) = -\nabla V(x)$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = -\nabla V(x)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\nabla V(x) \rightarrow \text{保守力场中的牛顿第2定律.}$$

$$F = -\nabla V$$

4.2. 最优化, Lagrangian 乘子.

考虑最优化问题 $\min_x f(x)$ \leftarrow 无约束优化问题

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数.

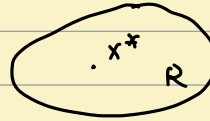
Thm (Fermat's 定理) x^* 是最优解的必要条件: $\nabla f(x^*) = 0$

考虑约束优化问题

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t. } x \in R := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$$

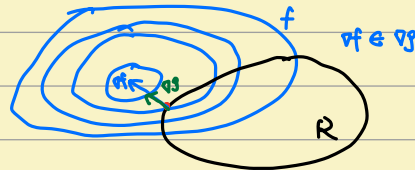
Case 1. $x^* \in \mathbb{R}^0$

$$\nabla f(x^*) = 0$$



Case 2. $x^* \in \partial R$

$$\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)$$



$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x)$$

$$\text{最优性条件: } \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \lambda^* \nabla g(x^*) = 0$$

第3章习题4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & \dot{x}_2 = x_3 & \dot{x}_3 = x_4 & \dots & \dot{x}_{n-1} = x_n & \dot{x}_n = \alpha \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$$

$$\dot{x}_2 = \alpha$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha(t)$$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$N = \begin{matrix} & \alpha \\ \begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

问题: 最优时间问题 \rightarrow PMP \rightarrow Thm 3.4

$$\text{Hamilton: } H(x, p, \alpha) = (Mx + N\alpha) \cdot p$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \nabla_p H$$

$$\dot{p} = -\nabla_x H$$

$$\arg \max \alpha N^T p(t) = \operatorname{sgn}(\underbrace{N^T p(t)}_{\text{切换函数}})$$

(a) 切换函数: $\phi(t) := N^T p(t) = p_n(t)$

(b) $\dot{p} = -\nabla_x H = -M^T p$ $M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{p}_1 = -p_2 \quad \dot{p}_2 = -p_1 \quad \dot{p}_3 = -p_2 \dots$$

$$\Rightarrow p_1 \leq 0, \quad \dot{p}_2 \leq -c_0, \quad \dot{p}_3 = c_0 t - c_1 \dots$$

$$p_2 = -c_0 t + c_1 \quad p_3 = c_0 t^2 - c_1 t + c_2$$

p_n 是一个关于 t 的 $n-1$ 次多项式

一个实值多项式的不同零点个数不超过其次数。

$\therefore \phi$ 的变号次数至多 $n-1$ 次