最优控制理论第 2 章习题参考答案

题 1. 可控性矩阵为：

$$G = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

秩为 2，满秩，故系统可控。

题 2. 系统矩阵 M 的特征值为 $-1, -2$，满足 $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$。因此零解 $x(t) \equiv 0$ 是渐近稳定的，即系统的自然响应会收敛到原点。

题 3. 可观测性矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(Q) = 1 \neq 0.$$

系统是满秩的，所以可观测。

题 4. (b) 是 bang–bang 控制，因为它只取 ± 1 两个值。其他函数值连续或非离散，不属于 bang–bang 控制。

题 5. 若可控性矩阵满秩，则系统可控。Theorem 2.3 保证可达集 $C(t)$ 包含原点邻域。由于凸集无法与原点通过超平面分离，故原点在其内部。

题 6. (a) 状态空间形式：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $G = [N, MN] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 满秩，所以可控。

(c) 控制值域为区间 [-1,1]，系统线性可控，存在 bang–bang 控制。

题 7. (a) 可观测性矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{秩为 } 1 \Rightarrow \text{不可观测}.$$

(b) 由于无法测量 $x_2(t)$，无法重构其初值。

题 8. 系统线性可控，控制值域为紧凸集 $[-1,1]$，由 Krein–Milman 定理知其极点上存在最优控制，即 bang–bang 控制存在。

题 9. (a) $G = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 满秩 $\Rightarrow$ 可控

(b) 控制可达任意状态。

(c) 控制受限在 [-1,1]，线性系统可控，存在 bang–bang 控制。

题 10. 我们考虑系统

$$\dot{x}(t) = Mx(t), \quad y(t) = Nx(t),$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对偶系统为：

$$\dot{z}(t) = M^\top z(t) + \beta(t), \quad \beta(t) = N^\top z(t).$$

即：

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.3 \end{bmatrix} z(t), \quad \beta(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^\top z(t).$$

根据 Theorem 2.7，原系统可观测 $\iff$ 对偶系统可控。只要我们能够证明对偶系统可控，就可推出原系统可观测（略）。