

# 最优控制理论第 2 章习题

Date due: 2025-10-22

1. 给定线性系统：

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

判断该系统是否可控，并说明理由。

2. 对于系统  $\dot{x}(t) = Mx(t)$ ，其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

计算  $e^{tM}$ ，并判断系统的零解是否渐近稳定。

3. 可观测性判断

考虑系统：

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

判断该系统是否可观测。

4. 指出下列哪一个控制函数是 bang-bang 控制：

(a)  $\alpha(t) = \sin(t)$

(b)  $\alpha(t) = \text{sign}(\cos(t))$

(c)  $\alpha(t) = e^{-t}$

(d)  $\alpha(t) = t$

5. 解释为什么在可控系统中, 可达集  $C(t)$  在有限时间内包含原点邻域。结合 Evans 中的可控性矩阵与超平面分离定理简述理由。

6. 考虑一辆沿直线运动的小车, 其状态为位置  $x_1(t)$  和速度  $x_2(t)$ , 满足:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(t), \quad u(t) \in [-1, 1].$$

(a) 写出状态空间形式;

(b) 判断系统是否可控;

(c) 是否可以用 bang-bang 控制从任意初始状态驱动至原点? 说明理由。

7. 某房间温度由下列系统描述:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

(a) 写出可观测性矩阵, 判断是否可观测;

(b) 若只测量  $x_1(t)$ , 能否恢复  $x_2(0)$ ?

8. 考虑系统:

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), \quad \alpha(t) \in [-1, 1],$$

已知系统可控, 终端时间为  $T$ , 初始状态为  $x_0$ 。

使用 Krein–Milman 理论说明存在 bang-bang 控制将系统在  $T$  时刻驱动至原点。

9. 考虑系统:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) 写出可控性矩阵;

(b) 判断系统是否可控;

(c) 若  $u(t) \in [-1, 1]$ , 是否存在 bang-bang 控制将任意  $x_0$  驱动至原点?