OG Note 2   17-09-2025

https://github.com/styluck/opt_ctrl

控制

最优控制论：如何让一个动态系统按照我们希望的方式运行

状态　　　　时间

动力系统：
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(t)), \quad t>0 \\ x(0) = x_0\end{cases}$$

控制　　初始点

状态的演化　　演化函数

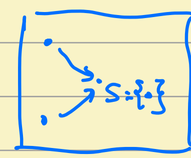
functional

收益函数： $P[\alpha(\cdot)] = \int_0^T r(x(t),\alpha(t))\,dt + g(x(T))$ ← 终端时间已知

function

τ: 达到终端状态所需时间

固定终点，自由时间　　$P[\alpha(\cdot)] = g(\tau)$



Chp 2：可控性和 bang-bang 原理

本章前提假设：目标是达到最终状态 $S=\{0\}$

初始点

Defn：时间 t 的可达集　$C(t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha(\cdot) \in A, \ s.t.\ x(t) = 0\}$

总可达集：　$C = \bigcup_{t\ge 0} C(t)$

若 $t_1 \le t_2$，则 $C(t_1) \subseteq C(t_2)$

线性化系统：
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = M x(t) + N\alpha(t) \qquad t>0 \\ x(0) = x^0\end{cases}$$

控制参数集是一个超立方体：　$A = [-1,1]^m$

Defn: (基本解矩阵 fundamental solution)

$X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为矩阵方程的唯一解

一个解

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t), & t>0 \\ X(0) = I \end{cases}$$

称 $X(\cdot)$ 是一个基本解. 且

$$X(t) = \exp(tM) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} \Rightarrow X^{-1}(t) = X(-t)$$

Thm 2.1 (ODE 线性系统的解)

(i) 齐次的 ODE 系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

的唯一解是 $x(t) = X(t)x^0 = \exp(tM)\,x^0$

(ii) 非齐次的 ODE 系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

的唯一解是 $x(t) = X(t)x^0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$

参数变易法 Variation of Parameter Formula

Proof:

(i) $e^{tM} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}e^{tM} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k M^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k t^{k-1} M^k}{k!} = M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}\cdot M^{k-1}}{(k-1)!} = Me^{tM}$$

令 $X(t) := e^{tM}X_0 \Rightarrow$

$$\dot{X}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tM}X_0\right) = Me^{tM}X_0 = MX(t)$$

同时: $X(0) = e^{0M}X_0 = IX_0 = X_0$

$\therefore$ $\boxed{X(t) = e^{tM} X_0}$ 是 ODE 的解.

依据 Picard - Lindelöf 定理，由于 线性 ODE 系数连续，其解唯一.

(ii)

考虑 $\dot{X}(t) = M(t) X(t) + f(t)$, $X(t_0) = X_0$

对应齐次系统为 $\dot{X}_h(t) = M(t) X(t)$, $X_h(t) = X_0$

它的一个解为 $X_h(t) = \Phi(t) C$ 是一个基本解，$\therefore$ 满足

$$\dot{\Phi}(t) = M(t) \Phi(t) \qquad \Phi(t_0) = I.$$

设非齐次 ODE 解的形式为

$$X(t) = \Phi(t) C(t) \rightarrow \begin{cases} \dot{X}(t) = M(t) X(t) + f(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \dot{\Phi}(t) C(t) + \Phi(t) \cdot \dot{C}(t) \\ &= M(t) \Phi(t) C(t) + \Phi(t) \cdot \dot{C}(t) \\ &= M(t) X(t) + \Phi(t) \dot{C}(t) \end{aligned}$$

代入可得

$$\Phi(t) \dot{C}(t) = f(t)$$

因为 $\Phi(t)$ 可逆，有

$$\dot{C}(t) = \Phi(t)^{-1} f(t)$$

求积分，可得

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds$$

由初始条件 $X(t_0) = X_0$, $\Phi(t_0) = I$ 可得

$$X_0 = \Phi(t_0) C(t_0) = C(t_0)$$

因此，非齐次 ODE 的解为

$$X(t) = \Phi(t) X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds$$

若 $M(t) \equiv M$ 为常矩阵，$\Phi(t) = e^{(t-t_0)M}$，代入得

$$X(t) = e^{(t-t_0)M} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)M} f(s)\, ds$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = M X(t) \\ X(0) = X^0 \end{cases}$$

$$X(t) = e^{tM} X^0$$

目标: $x_0 \longrightarrow S=\{0\}$

线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Mx(t)+N\alpha(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

非齐次 ODE

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Mx(t)+f(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

2.3 线性系统的可控性分析

线性系统的解满足

$$x(t)=e^{tM}x_0+e^{tM}\int_0^t e^{-sM}N\alpha(s)\,ds$$

若系统达到原点时，有 $x(t)=0$，故

$$0=e^{tM}x_0+e^{tM}\int_0^t e^{-sM}N\alpha(s)\,ds$$

即

$$x_0=-\int_0^t e^{-sM}N\alpha(s)\,ds$$

$X(t)=e^{tM}x_0$

Defn:

(i) 如果 $\forall x\in S \Rightarrow -x\in S$，则称集合 S 是对称的

(ii) 如果 $\forall x,x'\in S \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)x'\in S$，$\lambda\in[0,1]$
则称 S 是凸的

C: 总可达集

$C(t)$: 时间 t 的可达集

$A=[-1,1]^m$

Thm 2.2 (可达集结构) 对于线性系统 $\dot{x}(t)=Mx(t)+N\alpha(t)$
可达集 C 满足

(i) C 是对称，且凸的，

(ii) 如果某初始点 $x_0\in C(\bar{t})$，那么对于 $t\geq\bar{t}$，有 $x_0\in C(t)$

Proof: 对称性. 令 $t\geq 0$，且 $x^0\in C(t)$，则

$$x_0=-\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)\,ds \qquad \alpha\in A$$

$$\Rightarrow -x_0=-\int_0^t X^{-1}(s)N(-\alpha(s))\,ds \qquad -\alpha\in A$$

$$\Rightarrow -x_0\in C(t) \qquad \square$$

凸性: $x_0, x_0'\in C$，有 $x_0\in C(t)$，$x_0'\in C(t')$

假设 $t\leq t'$，则

$0 \quad t \quad t'$

$$x_0=-\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)\,ds \qquad \text{for some } \alpha\in A$$

$$x_0'=-\int_0^{t'} X^{-1}(s)N\alpha'(s)\,ds \qquad \text{for some } \alpha'\in A$$

定义控制 $\tilde{\alpha}(s) := \begin{cases} \alpha(s) & \text{if } 0 \le s \le t \\ 0 & \text{if } s > t \end{cases}$

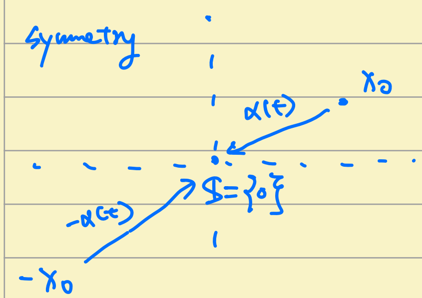
$$x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N \tilde{\alpha}(s) ds$$

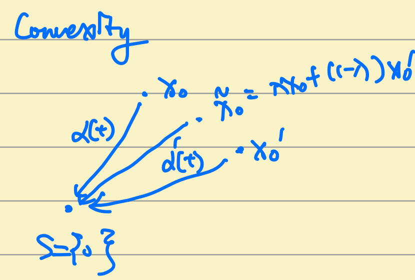
∴ $x_0 \in C(t')$. 令 $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda x_0 + (1-\lambda) x_0' = \int_0^{t'} X^{-1}(s) N \left(\lambda \tilde{\alpha}(s) + (1-\lambda)\alpha'(s)\right) ds$$

有 $\lambda x_0 + (1-\lambda) x_0' \in C(t') \subseteq C$

(ii) 见前述证明.





E.g. $n=2$, $m=1$, $A=[-1,1]$, 考虑系统

$$\dot{x}_1 = 0$$
$$\dot{x}_2 = \alpha(t)$$

最终状态

$X(t) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\dot{X}(t) = M X(t) + N \alpha(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha(t)$$

∴ 可达集 C 为: $\{(x_1, x_2): x_1 = 0\}$

$\dot{S} = \{0\}$

Defn: (controllability matrix 可控性矩阵)

$$G = G(M,N) := [N, MN, M^2N, \dots, M^{n-1}N]$$

$$G = [N \quad MN, \quad M^2N]$$
$$= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thm 2.3 (可控性矩阵判据) 设 $G=G(M,N)$，以下两个条件等价.

1. $\operatorname{rank} G = n$,
2. 原点 (零点) 位于可达集 C 的内部，即存在以 0 为中心的邻域包含在 C 内.

若 $\operatorname{rank} G = n$，则称线性系统 $\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$ 满足代数可控性条件

Thm (Cayley–Hamilton 定理) 设 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其特征多项式为

$$P_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

则矩阵 M 满足它自己的特征多项式，即

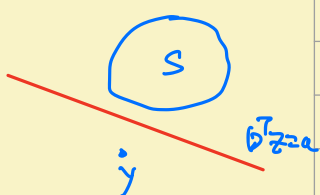
$$P_M(M) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \dots + a_1 M + a_0 I = 0$$

$$\Rightarrow M^n = -\left(a_{n-1}M^{n-1} + \dots + a_1 M + a_0 I\right)$$

Remark：矩阵的高次幂可用其自身的低次幂的线性组合表示.

Thm (Hyperplane Separation theorem 超平面分离定理) 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 为非空凸集，$y\in\mathbb{R}^n\setminus S$ 为 S 的外点，则存在 $b\in\mathbb{R}^n$，$\alpha\in\mathbb{R}$，使得.

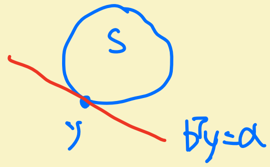
$$b^Ty > \alpha \ge b^Tx, \quad \forall x\in S$$



Remark：即，存在一个超平面 $H=\{z\in\mathbb{R}^n : b^Tz=\alpha\}$ 将 y 与 S 分开

Thm (Supporting Hyperplane Theorem 超平面支撑定理)
若 $y\in\partial S$ (在 S 的边界上)，取 $\alpha = b^Ty$，得到过 y 的支撑超平面：

$$b^Ty = \alpha \ge b^Tx \qquad \forall x\in S$$



Defn：(零解 zero solution) 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)\\ x(0) = x_0\end{cases}$$

当初始状态为零，且控制恒为零，

$$x_0 = 0$$
$$\alpha(t) = 0 \quad \forall t$$

则系统的解为恒为零的函数

$$x(t) \equiv 0 \qquad \forall t \geq 0$$

称 $x(t)$ 为这个系统的零解.

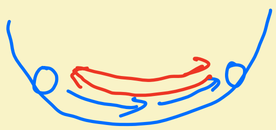
E.g. 齐次 ODE $\dot{x}(t) = M x(t)$, 当 $x_0 = 0$ 显然有

$$x(t) = e^{tM} x_0 = 0 \longrightarrow \text{是一个零解.}$$

Defn (渐近稳定性, Asymptotic Stability)

考虑自治系统

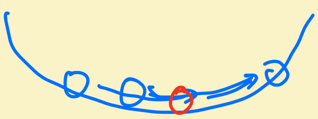
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



其中 $f(0) = 0$, 是一个平衡点。若满足以下条件:

1. Lyapunov 稳定性: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 只要 $\|x(0)\| < \delta$, 有

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$



2. 吸引性 (attractive): $\exists\, r > 0$, 只要 $\|x(0)\| < r$, 则

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Remark: 对于线性系统 $\dot{x}(t) = M x(t)$, 零解的渐近稳定性等价于 M 的所有特征值 λ_i 满足

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$$

也等价于矩阵指数 $e^{tM} \to 0$, as $t \to 0$, 即

$$x(t) = e^{tM} x_0 \to 0$$