$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(t)), & t>0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

最终状态 $S=\{0\}$

可达集 $C(t) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha(\cdot) \in A, \ s.t. \ x(t) = 0 \}$

$C = \bigcup_{t \geq 0} C(t)$

线性化系统
$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), & t>0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad A = [-1,1]^m}$$

基本解: $\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t), & t>0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \Rightarrow X(t) = \exp(tM)X_0$

一般解: $\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t) + f(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \Rightarrow X(t) = X(t)X_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s) f(s)\,ds$

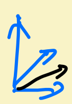
线性系统的解:

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s) N\alpha(s)\,ds$$

$C(t) = \{ x_0 \mid x(t) = 0 \}$

令 $x(t)=0 \Rightarrow x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N\alpha(s)\,ds$

$$C(t) = \left\{ -\int_0^t X^{-1}(s) N\alpha(s)\,ds \right\}$$

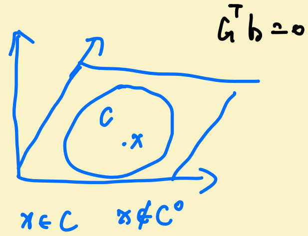


Thm 2.2: 对于线性系统 $\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$, 可达集 C 满足

(i) C 对称, 且 C 是凸集

(ii) $x_0 \in C(\bar{t})$, $\forall t \geq \bar{t}$, $x_0 \in C(t)$

$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$



Thm 3.3 (可控性矩阵判据)

设 $G = G(M,N) = [N, MN, M^2N, \cdots, M^{n-1}N]$ $\quad M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad N \in \mathbb{R}^{n\times m}$

以下两个条件等价:

(i) $\operatorname{rank} G = n$

(ii) $0 \in C^\circ$ $\qquad C^\circ$: 集合 C 的内部

Lemma 2.4 假设存在 $b \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds \geq 0 \qquad \forall \alpha(\cdot) \in A \qquad (1)$$

$A = [-1,1]^m$, 则必有 $\quad b^T X^{-1}(s) N \equiv 0$

Proof: 由于A是对称的, 且(1)对于所有 $\alpha(\cdot) \in A$ 成立, $\tilde{\alpha}(\cdot) := -\alpha(\cdot)$ 则也成立.

$$\int_0^t b^T X^{-1}(s) N (-\alpha(s)) ds \geq 0$$

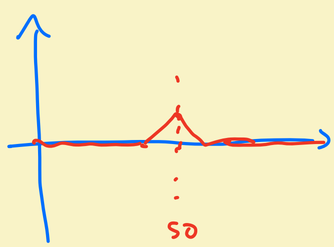
$$\Rightarrow -\int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds \geq 0$$

结合(1)可得

$$\int_0^t b^T X^{-1}(s) N \alpha(s) ds = 0 \qquad \forall \alpha(\cdot) \in A$$

令 $v(s) = b^T X^{-1}(s) N \in \mathbb{R}^m$,

$$\int_0^t v(s) \cdot \alpha(s) ds = 0 \qquad \forall \alpha(\cdot) \in A \qquad (2)$$

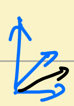


假设 $v(s) \not\equiv 0$, 则存在 $s_0 \in [0,t]$ 使得 $v(s_0) \neq 0$. 由于函数连续性 存在 $I \subset [0,t]$ 使得 $v(s) \neq 0$ 在 I 上成立.

定义
$$\alpha(s) := \begin{cases} v(s)/|v(s)| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} & s \in I \\ 0 & s \notin I \end{cases} \qquad \alpha(s) \in A$$

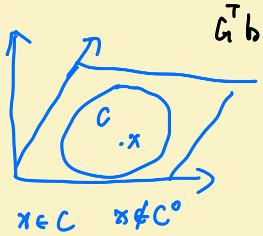
代入可得
$$\int_0^t v(s) \cdot \alpha(s) ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_I |v(s)| ds > 0$$

与(2)矛盾. 因此必有 $\quad b^T X^{-1}(s) N \equiv 0$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$G^T b = 0$



intuition: if rank $G<n$, then $0 \notin C^\circ$, if $0 \notin C^\circ$, then rank $G<n$

Proof of thm 2.3:

① rank $G<n \Rightarrow 0 \notin C^\circ$

若 rank $G<n$，则存在 $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$，有

$$b^T G = 0$$

$$\Rightarrow b^T [N, MN, M^2N \cdots M^{n-1}N] = 0$$

$$\Rightarrow b^T N = b^T MN = b^T M^2 N = \cdots = b^T M^{n-1} N = 0$$

要证 $b^T M^k N = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$ 成立

$$p(\lambda) := \det(\lambda I - M) \qquad p(M) = 0$$

$$p(M) = M^n + \beta_{n-1} M^{n-1} + \cdots + \beta_1 M + \beta_0 I = 0$$

$$\Rightarrow M^n = -\beta_{n-1} M^{n-1} - \beta_{n-2} M^{n-2} \cdots \beta_1 M - \beta_0 I$$

$$b^T M^n N = b^T \left(-\beta_{n-1} M^{n-1} - \beta_{n-2} M^{n-2} \cdots \beta_1 M - \beta_0 I\right) N = 0$$

对 $n+1$ 阶同理，即 $b^T M^k N = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$ 成立

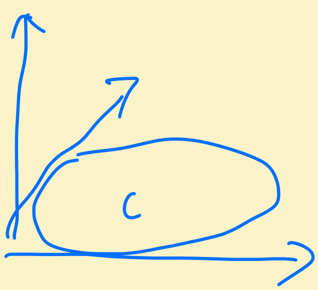
可达集表达式 $C(t) = \left\{ x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N \alpha(s) ds \right\}$

基本解：$X(s) = \exp(sM) \qquad X^{-1}(s) = X(-s)$

$$b^T x_0 = -b^T \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha(s) ds = -\int_0^t b^T \exp(-sM) N \alpha(s) ds$$

$$b^T \exp(-sM) N = b^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k M^k}{k!} N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!} b^T M^k N = 0$$

$$\Rightarrow b^T x_0 = 0 \quad \forall x_0 \in C(t) \quad \Rightarrow C^\circ = \emptyset \quad \Rightarrow 0 \notin C^\circ$$



② $0 \notin C^\circ \Rightarrow$ rank $G<n$

若 0 不在 C° 内，则对于每一个 $t>0$，0 也不是 $C(t)$ 的内点.

根据超平面支撑定理，存在 $b \neq 0$，使得 $b^T x_0 \leq 0$. $\forall x_0 \in C(t)$

取任意 $x^0 \in C(t)$. $\quad x_0 = \int_0^t X^{-1}(s) N \alpha(s) ds$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq b^T x_0 = -\int_0^t b^T X^{-1}(s) N\alpha(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t b^T X^{-1}(s) N\alpha(s)\,ds \geq 0$$

根据 Lemma 2.4. 有 $\quad b^T X^{-1}(s) N \equiv 0$

$$\Rightarrow b^T \exp(-sM) N \equiv 0$$

令 $s=0 \quad \Rightarrow b^T N = 0$

令 $\quad v(s) := b^T \exp(-sM) N$

$$v'(s) = v''(s) = \cdots \; v^{(n)}(s) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad b^T (-M)^k \exp(-sM) N \equiv 0$$

再令 $s=0$

$$\Rightarrow \quad b^T M^k N = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\Rightarrow \quad b^T G = 0 \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} G < n$$

若系统满足 $\operatorname{rank} G = n$，则称系统满足代数可控性条件

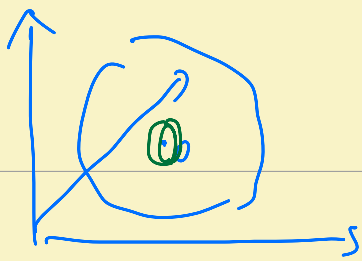
可控性的充分条件:

Defn: 我们称 线性系统 $\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$ 是可控的
如果满足 $C = \mathbb{R}^n$

Thm 2.5 (可控性判据)
设 $A = [-1,1]^m$，如果
(i) $\operatorname{rank} G = n$
(ii) M 的所有特征值 λ 满足 $\boxed{\operatorname{Re}(\lambda) < 0}$，则系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

是可控的，即 $C = \mathbb{R}^n$.



Proof: $\mathrm{rank}\, G = n$，根据 Thm 2.3，可达集 C 是含有原点的一个邻域 $B_\delta(0)$。由于 $Re(\lambda)<0$，只要施零控制 $\alpha \equiv 0$，系统的解 $x(t) = e^{tM}x_0$ 收敛到 0。

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，可先施加零控制一段时间，使轨迹进入 $B_\delta(0)$

E.g. $n=2$, $m=1$, $A=[-1,1]$, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t) \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = [N, MN] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) $\mathrm{rank}\, G = 2$

$$\det(\lambda I - M) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$

(ii) $Re(\lambda_i) < 0$ for $i = 1, 2$.

E.g. $n=2$, $m=1$, $A=[-1,1]$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = [N, MN] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) $\mathrm{rank}\, G = 2$ $\qquad \lambda^2 = 0$ $\Rightarrow$ 可控的

要去哪：可达 →
可控

终会看到：可观

可观 ⟺ 可控

Thm 2.6（改进可控性判据）

设 $A=[-1,1]^m$，如果

(i) $\operatorname{rank} G = n$

(ii) M 的所有特征值 λ 满足 $\boxed{\operatorname{Re}(\lambda) \le 0}$，则系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), & t>0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

是可控的，即 $C = \mathbb{R}^n$.

2.4 可观测性

(ODE) $\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad M \in \mathbb{R}^{n\times n}$

假设我们只能观测到

(O) $\quad y(t) = Nx(t) \qquad t \ge 0 \qquad N \in \mathbb{R}^{m\times n}$

当 $m \ll n$，y 是低维的观测.

可观测性问题：给定 $y(\cdot)$，我们可否知道 $x(\cdot)$ 状态？

Defn: ((ODE), (O)) 被称为可观测的，若可以通过 $y(\cdot)$ 在任意 $[0,t]$ 计算 x_0.

即：

对任意 $x_1(\cdot)$，$x_2(\cdot)$，$Nx_1(\cdot) \equiv Nx_2(\cdot) \Rightarrow x_1(0) = x_2(0)$

E.g. ① 若 $N \equiv 0$，$\Rightarrow y(t) \equiv 0$ 系统不可观测.

② 若 $m=n$，且 N 是可逆的，$y(t) = Nx(t) \Rightarrow x(t) = N^{-1}y(t)$

系统完全可观测.

Thm 2.7 (可观测性和可控性. observability and controllability).

系统 (P) $\begin{cases} \dot{x}(t) = M x(t) \\ y(t) = N x(t) \end{cases}$

是可观测的, 当且仅当系统

(D) $\dot{z}(t) = M^T z(t) + N^T \alpha(t)$, $\alpha \in A = \mathbb{R}^m$

是可控的, 即 $C = \mathbb{R}^n$.

Remark: 可观测性和可控性互为对偶

代数可控性条件

$\operatorname{rank} G = n$

Proof: 设 (P) 是不可观测的, 则存在 $x_1 \neq x_2$

$\dot{x}_1(t) = M x_1(t) \qquad x_1(0) = x_1$

$\dot{x}_2(t) = M x_2(t). \qquad x_2(0) = x_2$

但 $y(t) = N x_1(t) = N x_2(t) \quad \forall t \geq 0.$

令 $x(t) := x_1(t) - x_2(t) \qquad x_0 = x_1 - x_2$

$\dot{x}(t) = M x(t). \qquad x(0) = x_0$

$y(t) = N x(t) = N x_1(t) - N x_2(t) = 0 \qquad \forall t \geq 0$

因为 $x(t) = \exp(tM) x_0$

可得 $N x(t) = N \exp(tM) x_0 \equiv 0 \qquad \forall t \geq 0$

令 $v(t) = N \exp(tM) x_0 = 0 \Rightarrow N x_0 = 0$

$v'(0) = 0 \qquad \Rightarrow N M x_0 = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow N M^k x_0 = 0$

$\Rightarrow x_0^T (M^k)^T N^T = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+$

$x_0^T G = x_0^T [N^T, M^T N^T, \dots (M^T)^{n-1} N^T] = 0$

(D)

$\dot{z}(t) = M^T z(t) + N^T \alpha(t)$,

因为 $x_0 \neq 0$ $\quad$ rank $G < n$ $\quad$ 因此 (D) 不可控的

设 (D) 是不可控的，则 rank $G<n$，根据定理 2.3，有

存在 $x_0 \neq 0$，且 $x_0^T G = 0$ $\Rightarrow$ $NM^k x_0 = 0$, $k=0,\dots,n-1$

根据 Cayley-Hamilton 定理

$$M^n = -\beta_{n-1} M^{n-1} \cdots - \beta_0 I$$

$$\Rightarrow NM^k x_0 = 0, \quad \forall k = n, n+1, \dots$$

要证 $y(t) = N x(t) \equiv 0$

$$N x(t) = N \exp(Mt) x_0 = N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} x_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} NM^k x_0 = 0$$

因此，(P) 是不可观测的。

2.5 Bang-Bang 原理

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(t) \end{pmatrix}$$

Defn: 一个控制 $\alpha(\cdot) \in A$ 被称为 bang-bang，如果对任意 $t \geq 0$，都有 $|\alpha_i(t)| = 1$

Thm 2.8 (Bang-Bang 原理) 设 $t>0$，若 $x^0 \in C$，则系统

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$$

存在一个 bang-bang 控制满足 $x(t) = 0$.