

第二章：终点可达性 / 可控性  $\Leftrightarrow$  可观测性.

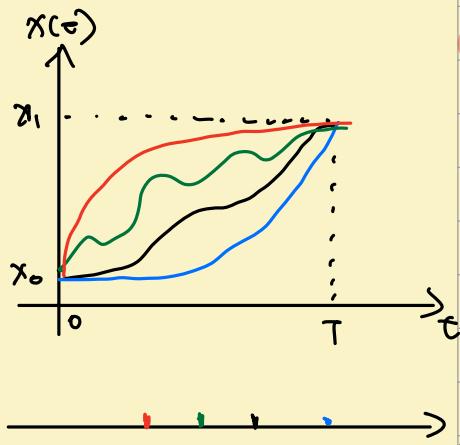
第三章：在可达的前提下，讨论时间最优控制.

① 线性模型  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ .  $A = [-1, 1]^n$

② Pontryagin 极大值原理 (PMP)

第四章：扩展到一般非线性，一般型收益的最优控制问题

### 变分法 (Variational method)



Defn: (Lagrangian 函数) 给定一个光滑  $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I = I(x, v)$ .

其中  $T > 0$ ,  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ . 我们称  $I$  为 Lagrangian 函数.

基本变分问题:  $\min_{x(t)} I(x(t)) := \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$  (1)

其中,  $x(0) = x_0$ ,  $x(T) = x_1$ ,  $L$  为光滑的 Lagrangian 函数.

目标: 假设存在  $x^*(\cdot)$  使得  $I(x(\cdot))$  最小, 如何刻画  $x^*(\cdot)$ ?

$I(x(\cdot))$  令  $L = L(x, v)$   $x$ : 距离  $v$ : 速度  $(v_1 \dot{x})$   $x \in \mathbb{R}^n$   $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

偏导:  $L_{x_i} := \frac{\partial L}{\partial x_i}$   $L_{v_i} := \frac{\partial L}{\partial v_i}$

梯度:  $\nabla_x L = \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ \vdots \\ L_{x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$   $\nabla_v L = \begin{pmatrix} L_{v_1} \\ \vdots \\ L_{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$v \in \mathbb{R}^n$   $v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$

全速梯公式:  $\frac{dL}{dt} = \left( \frac{dx}{dt} \right)^T \nabla_x L + \left( \frac{dv}{dt} \right)^T \nabla_v L$

$$\min_x f(x)$$

$$y = x^2$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = 0$$

$\nabla$ : nabla

Thm (Euler-Lagrangian 方程) 若  $x^*(\cdot)$  使得 (1) 目标值最小, 则.

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau)) = \nabla_x L(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau)) \quad \tau \in [0, T]$$

Proof: 令  $x^*(\cdot)$  是  $\Gamma$ , 构造一个光滑扰动  $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 满足  
 $y(0) = y(T) = 0$  (端点零扰动). 定义一个路径:

$$x_\varepsilon(t) := x^*(t) + \varepsilon y(t) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

由于基本变分问题:

$$I(x(\cdot)) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

则  $x_\varepsilon(\cdot)$  对于所有  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  满足端点条件  $x_\varepsilon(0) = x_0$ ,  $x_\varepsilon(T) = x_1$ , 且

$$i(\varepsilon) := I(x_\varepsilon(\cdot)) = \int_0^T L(x(t) + \varepsilon y(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{y}(t)) dt$$

时  $i$  关于  $\varepsilon$  可导

$$i'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^T L(x(t) + \varepsilon y(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{y}(t)) dt$$

由于上光滑

$$i'(\varepsilon) = \int_0^T \frac{d}{d\varepsilon} L(x(t) + \varepsilon y(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{y}(t)) dt$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^n \left( L_{x_i} \cdot y_i(t) + L_{\dot{x}_i} \cdot \dot{y}_i(t) \right) dt$$

证明  $i'(0)$  在  $\varepsilon = 0$  时, 为局部极小

对于所有  $\varepsilon$ , 有  $x_\varepsilon(0) = x_0 = x^*(0)$ . 由于  $x^*(\cdot)$  为极小解. 存在  $\delta > 0$ , 使得  $\varepsilon \in (0, \delta)$  都有

$$i(\varepsilon) \geq i(0)$$

因此  $i(\cdot)$  为一个局部极小点. 由于  $y$  和  $L$  是光滑的. 仅有二阶必要条件

$$i'(0) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^T \sum_{i=1}^n \left( L_{x_i} \cdot y_i(t) + L_{\dot{x}_i} \cdot \dot{y}_i(t) \right) dt$$

选取一个分量  $j \in [n]$ , 令  $y_j = 1$ ,  $y_i = 0 \quad \forall i \neq j$ ,  $\psi$  是在  $[0, T]$  上的光滑函数. 且  $\psi(0) = \psi(T) = 0$ , 则

$$\text{积分部分} \\ \int u dv = uv - \int v du$$

$$= \cancel{\int_0^T L_{v_j} \cdot \dot{\psi}_j(t) dt} - \int_0^T \frac{d}{dt} L_{v_j} \psi_j(t) dt \\ \text{几乎处处成立:} \\ \text{almost everywhere}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^T \left( L_{x_j} \psi_j(t) + L_{v_j} \dot{\psi}_j(t) \right) dt \\ = \int_0^T \left( L_{x_j} \psi_j(t) - \frac{d}{dt} L_{v_j} \psi_j(t) \right) dt \\ = \int_0^T \left( L_{x_j} - \frac{d}{dt} L_{v_j} \right) \psi_j(t) dt$$

Lemma (积分基本引理) 若对于  $\phi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑函数, 如果

$$\int_0^T \phi(t) \psi(t) dt = 0$$

则  $\phi = 0$  几乎处处成立  $(0, T)$

根据积分基本引理, 可得

$$L_{x_j} - \frac{d}{dt} L_{v_j} = 0 \quad \leftarrow \text{第 } j \text{ 个量.}$$

记着, 可得

$$\frac{1}{2} \nabla_v L(x^*, \dot{x}^*) = \nabla_x L(x^*, \dot{x}^*)$$

$$H(x, p, \alpha) = (Mx + N\alpha)p$$

$$= \dot{x}p$$

$$\dot{x} = Mx + N\alpha$$

$\Rightarrow$  Hamilton's 方程 的形式:

Defn. (广义动量 generalized momentum) 给定路径  $x(\cdot)$ . 定义

$$p(\cdot) := \nabla_v L(x(\cdot), \dot{x}(\cdot))$$

称  $p(\cdot)$  为广义动量

Assumption (Legendre 可逆假设) 对于固定的  $x$ , 时刻

$$v \rightarrow p := \nabla_v L(x, v)$$

是可逆的, 则反解为  $v = v(x, p)$ .

Defn (Hamiltonian 动力系统)  $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(x, p) = \langle p, v(x, p) \rangle - L(x, v(x, p))$$

Thm (Hamiltonian dynamics). 若  $x(t)$  为 Euler-Lagrangian 方程

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x(t), \dot{x}(t)) = \nabla_x L(x(t), \dot{x}(t))$$

的解. 全  $p(t) = \nabla_v L(x(t), \dot{x}(t))$  满足 Legendre 变换假设. 且.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), p(t)) \end{cases}$$

且  $H(x(t), p(t))$  是关于时间的常数.

Proof: 由定义

$$H(x, p) = \langle p, v(x, p) \rangle - L(x, v(x, p))$$

对  $x$  求偏导,

$$\nabla_x H = p \cdot \nabla_x v - \nabla_x L(x, v(x, p)) - \underbrace{\nabla_v L(x, v(x, p))}_{p} \nabla_x v$$

根据定义  $p = \nabla_v L(x, v(x, p))$ , 有得

$$\nabla_x H(x, p) = -\nabla_x L(x, v(x, p))$$

根据 Euler-Lagrangian 方程.

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, \dot{x})$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \dot{x} &= \frac{d}{dt} \nabla_v L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, \dot{x}) = \nabla_x L(x, v(x, p)) \\ &= -\nabla_x H(x, p) \end{aligned}$$

第二条得证.

同理对  $p$  求偏导

$$\nabla_p H = v(x, p) + p \cdot \nabla_p v - \underbrace{\nabla_v L(x, v(x, p))}_{p} \nabla_p v$$

且

$$\nabla_p H(x, p) = v(x, p) = \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), p(t))$$

第一条得证.

is Hamilton 量守恒.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} H(x(t), p(t)) &= \nabla_x H \cdot \dot{x} + \nabla_p H \cdot \dot{p} \\ &= \nabla_x H \cdot \nabla_p H + \nabla_p H \cdot (-\nabla_x H) \\ &= 0\end{aligned}$$

因此  $H(x(t), p(t))$  为关于时间  $t$  的常数.

E.g.: 牛顿第二定律.  $F = m\ddot{x}$    
  $m$ : 质量  $a$ : 加速度  
 $x$ : 位移  $\ddot{x}$ : 加速度

考虑 Lagrangian 问题  $\xrightarrow{\text{动能}} L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x) \xrightarrow{\text{势能}} = \frac{m}{2} \|\dot{x}\|^2 - V(x)$

Euler-Lagrangian

$$\frac{d}{dt} \nabla_x L(x, \dot{x}) \geq \nabla_x L(x, \dot{x})$$

$$\text{可得 } \nabla_x L(x, \dot{x}) = m\ddot{x}, \quad \nabla_x L(x, \dot{x}) \geq -\nabla V(x)$$

$$\frac{d}{dt} m\ddot{x} \leq -\nabla V(x)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\nabla V(x) \rightarrow \text{保守力场中的牛顿第二定律.}$$

$$F = -\nabla V$$

4.2. 优化 - Lagrangian 乘子.

考虑, 最优化问题

$$\min_x f(x)$$

← 无约束优化问题

其中  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是一个光滑函数.

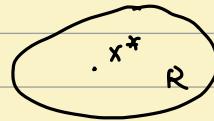
Then (Fermat 定理)  $x^*$  是最优解 for  $f$ , 需条件:  $\nabla f(x^*) = 0$

### 考慮約束極化 (0) 題

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t. } x \in R := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$$

Case 1.  $x^* \in R^0$

$$\nabla f(x^*) = 0$$



Case 2.  $x^* \in \partial R$

$$\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)$$



$$L(x; \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x)$$

$$\text{最优化条件: } \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \lambda^* \nabla g(x^*) = 0$$

第3章习题 4.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = x_3 \quad \dot{x}_3 = x_4 \quad \dots \quad \dot{x}_{n-1} = x_n \quad \dot{x}_n = \alpha$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$$

$$\dot{x}_2 = \alpha$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha(t)$$

$$M = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & 0 \\ x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$$

问题: 最优时间问题  $\rightarrow$  PMP  $\rightarrow$  Thm 3.4

$$\text{Hamilton: } H(x, p, \alpha) = (Mx + N\alpha) \cdot p$$

$\Rightarrow$

$$\dot{x} = \nabla_p H$$

$$\dot{p} = -\nabla_x H$$

$$\text{arg } \max \alpha N^T p(t) = \text{sgn}(N^T p(t))$$

切换函数.

(a) 切换函数:  $\phi(t) := N^T p(t) = P_n(t)$

(b)  $\dot{p} = -\nabla_x H = -M^T p$   $M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{p}_1 = -p_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dot{p}_3 = -p_4, \dots$$

$$\Rightarrow p_1 \equiv c_0, \quad \dot{p}_2 = -c_0, \quad \dot{p}_3 = c_0 t - c_1, \quad \dots$$

$$p_2 = -c_0 t + c_1, \quad p_3 = c_0 t^2 - c_1 t + c_2$$

$P_n$  是一个关于  $t$  的  $n-1$  次多项式

一个实值多项式的不同零点个数不超过其次数.

$\therefore \phi$  的零点次数至多  $n-1$  次