最优控制理论第 5 章习题

Date due: 2025-12-10

1. 考虑系统

$$\dot{x}(s) = \alpha(s), \qquad \alpha(s) \in \{-1, 0, 1\},$$

初始条件 $x(t) = x \in \mathbb{R}$，$0 \le t \le s \le 2$，收益函数为

$$P_{x,t}[\alpha(\cdot)] = -\int_t^2 |x(s)|\, ds.$$

(a) 仿照讲义 5.2.1 的做法，将 (t, x) 平面（$0 \le t \le 2$）划分为三个区域，写出在 $T = 2$ 情况下的三个区域的解析描述。

(b) 对每个区域，写出相应的值函数 $v(x, t)$ 的显式公式。

(c) 在 3 个区域内验证你写出的值函数 $v(x, t)$ 满足 Hamilton - Jacobi - Bellman 方程。

2. 考虑如下火箭小车系统：

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = 2\alpha, \qquad |\alpha| \le 1,$$

收益函数为到达 $(0, 0)$ 的最短时间：

$$P_x[\alpha(\cdot)] = -\tau.$$

(a) 请写出与该系统对应的 Hamilton–Jacobi–Bellman 方程。

(b) 假设从初始状态 (x_1, x_2) 出发立即施加最大反向加速度：

$$\alpha(s) = -\mathrm{sgn}(x_2).$$

求速度变为零所需时间 t_{stop}，计算此时的位置 $x_1(t_{\mathrm{stop}})$，并将 $x_1 = 0$ 代入得到分界曲线的解析式。

(c) 根据你在 (b) 问得到的分界曲线，将平面分为：

- Region I：无需立即反向刹车，而需“先推一段再刹车”的区域；
- Region II：立即全力反向刹车即可到达原点的区域。

请分别写出两个区域 $v(x_1, x_2)$ 的解析表达式。

(d) 计算 v_{x_1}、v_{x_2}，代入新的 HJB 方程验证其成立。