最优控制理论第 6 章习题

Date due: NA

1. 考虑两个交战方 I 和 II，记 $x_1(t)$：I 在时刻 t 的资源存量；$x_2(t)$：II 在时刻 t 的资源存量。控制集合为 $A = B = [0,1]$。$\alpha(t) \in [0,1]$：I 把资源用于“消耗战（破坏对方生产能力）”的比例，$1-\alpha(t)$ 用于“直接攻击”；$\beta(t) \in [0,1]$：II 把资源用于“消耗战”的比例，$1-\beta(t)$ 用于“直接攻击”。

   给定参数：$m_1, m_2 > 0$：两方的资源生产率；$c_1, c_2 > 0$：两方进行“消耗战”时削弱对方生产能力的效率，假设 $c_2 > c_1$；$\omega_1, \omega_2 > 0$：衡量“直接攻击”时 I、II 的打击权重。

   $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = m_1 - c_1\,\beta(t)\,x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = m_2 - c_2\,\alpha(t)\,x_1(t), \end{cases} \qquad t \in [0,T].$$

   收益泛函 P 为

   $$P[\alpha(\cdot),\beta(\cdot)] = \int_0^T \left[\omega_1(1-\alpha(t))x_1(t) - \omega_2(1-\beta(t))x_2(t)\right] dt.$$

   玩家 I 希望最大化 P，玩家 II 希望最小化 P。

   (a) 写出状态变化 $f(x,\alpha,\beta)$ 与运行收益 $r(x,\alpha,\beta)$，并给出 Hamiltonian。

   (b) 将 $H(x,p,\alpha,\beta)$ 写成 $H(x,p,\alpha,\beta) = C(x,p) + \alpha A(x,p) + \beta B(x,p)$, 明确写出 $C(x,p)$、$A(x,p)$、$B(x,p)$。证明该模型满足 Isaacs 条件。

   (c) 假设值函数 $v(x,t)$ 足够光滑且博弈有值，定义协态 $p(t) = \nabla_x v(x(t),t)$，并法引入切换函数 $s_1(t) := -\omega_1 - c_2\,p_2(t), s_2(t) := \omega_2 - c_1\,p_1(t)$. 写出协态方程；推导 s_1, s_2 的微分方程，并给出终端条件。

   (d) 利用 (b)(c) 的结果，写出最优控制的反馈形式 $\alpha(t)$、$\beta(t)$。