线性化系统
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), & t>0 \\ x(0) = x_0 & \alpha(\cdot) \in A = [-1,1]^m \end{cases}$$

可控性矩阵

$$G = G(M,N) \qquad M \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad N \in \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$= [N, MN, M^2N, \cdots, M^{n-1}N]$$

Thm 2.3 以下两个条件等价.

① $\operatorname{rank} G = n$

② $0 \in C^\circ$ → C 的内点

Thm 2.5, 2-6 可控性判据

设 $A = [-1,1]^m$, 如果

① $\operatorname{rank} G = n$

② M 满足 $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$

那么线性系统可控, 即 $C = \mathbb{R}^n$

2.5 Bang-Bang 原理

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(t) \end{pmatrix}$$

Defn: 一个控制 $\alpha(\cdot) \in A$ 被称为 Bang-Bang, 如果对任意 $t \geq 0$, 都有

$$|\alpha_i(t)| = 1 \qquad i \in [m]$$

Thm 2.8 (Bang-Bang 原理) 令 $t>0$, 若 $x^0 \in C$, 则系统

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t)$$

存在一个 bang-bang 控制满足 $x(t) = 0$.

L^p

$p\in[1,+\infty]$

$\|\cdot\|_\infty$

$$L^\infty = L^\infty(0,t;\mathbb{R}^m) = \{\alpha(\cdot): (0,t)\to\mathbb{R}^m \mid \boxed{\sup_{0\le s\le t}|\alpha(s)|} < +\infty\}$$

一个函数的集合

$$\|\alpha\|_{L^\infty} := \sup_{0\le s\le t}|\alpha(s)|$$

$$\|\alpha\|_{L^1} := \int_0^t|\alpha(s)|ds$$

Defn: (弱*收敛, weak* convergence) 令 $\alpha_n\in L^\infty$, $n=1,\dots$ 且 $\alpha\in L^\infty$.
我们称 α_n 弱*收敛到 α，若

$$\int_0^t \alpha_n(s)\cdot v(s)ds \to \int_0^t \alpha(s)\cdot v(s)ds,\quad \text{当 } n\to\infty$$

其中 $v(\cdot):[0,t]\to\mathbb{R}^m$ 满足 $\int_0^t|v(s)|ds<\infty$. 记作

$$\alpha_n \xrightarrow{*} \alpha$$

$$v(\cdot)\in L^1(0,t;\mathbb{R}^m) = \{\alpha(\cdot):(0,t)\to\mathbb{R}^m \mid \int_0^t|v(s)|ds<\infty\}$$

Alaoglu's 定理: 令 α_n 满足 $\|\alpha_n(\cdot)\|\le 1$，则存在一个子列 α_{n_k} (subsequence) 及 α 满足 $\|\alpha(\cdot)\|\le 1$，有

$$\alpha_{n_k}\xrightarrow{*}\alpha.$$

K中的元素为函数

Defn (泛函中的凸性) 令 K 是一个泛函集合，若任意 $x,\hat{x}\in K$，有

$$\lambda x+(1-\lambda)\hat{x}\in K,\quad \forall\lambda\in[0,1]$$

则称 K 是凸的.

Defn (极值点) 点 $z\in K$ 被称为一个极值点，如果不存在 $x,\hat{x}\in K$，及 $\lambda\in(0,1)$

$$z=\lambda x+(1-\lambda)\hat{x}$$

Krein-Milman 定理. 设 $\mathbb{K}$ 是一个 L^∞ 上非空、凸子集, 且在弱* 拓扑下是紧的, 则 $\mathbb{K}$ 至少存在一个极值点.

线性系统:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = M x(t) + N\alpha(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

取 $x_0 \in C(t)$ 记 $\mathbb{K} = \{\alpha(\cdot) \in A \mid \alpha(\cdot) \text{ 使 } x(t) = 0\}$

Lemma 2.9 集合 $\mathbb{K}$ 满足 Krein-Milman 定理的假设.

Proof: 由于 $x^0 \in C(t)$, $\mathbb{K}$ 非空

① 证明凸性, 根据 $\mathbb{K}$ 的定义 $\alpha(\cdot) \in \mathbb{K}$ 当且仅当
$$x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N\alpha(s)\,ds$$

同理 $\hat{\alpha}(\cdot) \in \mathbb{K}$, 当且仅当
$$x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N\hat{\alpha}(s)\,ds$$

因此
$$\begin{aligned} x_0 &= -\lambda\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)\,ds - (1-\lambda)\int_0^t X^{-1}(s)N\hat{\alpha}(s)\,ds \\ &= -\int_0^t X^{-1}(s)N\left(\lambda\alpha(s) + (1-\lambda)\hat{\alpha}(s)\right)ds \end{aligned}$$

可得 $\lambda\alpha + (1-\lambda)\hat{\alpha} \in \mathbb{K}$.

$\|\alpha_n\| \le 1$
因此可用 Alaoglu's 定理

② 证明弱* 紧性. 令 $\alpha_n \in \mathbb{K}$, $n=1,\dots$. 根据 Alaoglu's 定理, 存在一个子列 $n_k \to \infty$ 和 $\alpha \in A$, 使得 $\alpha_{n_k} \xrightarrow{*} \alpha$. 此时, 仅需证 $\alpha \in \mathbb{K}$.
因为 $\alpha_{n_k} \in \mathbb{K}$, 根据 $\mathbb{K}$ 的定义, 有
$$x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s) N\alpha_{n_k}(s)\,ds \qquad \forall k$$

由于 $\alpha \in \mathbb{K} \subseteq L^\infty$ 对于每一个分量 α^i, $i \in [m]$ 都有 $\alpha^i_{n_k} \to \alpha^i$

所以

$$x^0 = -\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha_{n_k}(s)ds \to \int_0^t X^{-1}(s)N\alpha(s)ds \quad \text{as } k\to+\infty$$

根据弱*收敛的定义，$\alpha\in\mathbb{K}$。因此，$\mathbb{K}$是弱*紧的。

Thm 2.10 令 $\alpha^*(\cdot)\in\mathbb{K}$ 是一个极值点，则 $\alpha^*(\cdot)$ 是 bang-bang 的。

Proof: 我们须证明对任意 $s\in[0,t]$ 有

$$|\alpha^{i*}(s)| = 1$$

反证法，设存在 $i\in[m]$ and $E<[0,t]$，且 $|E|>0$ 使得 $|\alpha^{i*}(s)|<1$，对于 $s\in E$。则存在子集 $F\subseteq E$ 及 $\varepsilon>0$，有

$$|F|>0, \text{ 且 } |\alpha^{i*}(s)|\le 1-\varepsilon \quad \text{对于 } s\in F$$

定义 $I_F(\beta(\cdot)) := \int_F X^{-1}(s)N\beta(s)ds$ $\qquad \beta(s)\in\mathbb{R}^m \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{\beta}(\cdot) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ 第i个分量

且 $\bar{\beta}(\cdot)\neq 0$，$I_F(\bar{\beta}(\cdot))=0$，$|\bar{\beta}(\cdot)|\le 1$.

再定义

$$\alpha_1(\cdot) := \alpha^*(\cdot) + \varepsilon\beta(\cdot)$$

$$\alpha_2(\cdot) := \alpha^*(\cdot) - \varepsilon\beta(\cdot)$$

接着证 $\alpha_1(\cdot),\alpha_2(\cdot)\in\mathbb{K}$

由于

$$-\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha_1(s)ds = -\int_0^t X^{-1}(s)N\alpha^*(s)ds - \varepsilon\underbrace{\int_0^t X^{-1}(s)N\beta(s)ds}_{=I_F(\bar{\beta}(\cdot))=0}$$

$$= x_0$$

因此，有 $\alpha_1\in\mathbb{K}$。同理，可得 $\alpha_2\in\mathbb{K}$

由于

$$\begin{cases}\alpha_1 = \alpha^* + \varepsilon\beta \\ \alpha_2 = \alpha^* - \varepsilon\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1\neq\alpha^* \\ \alpha_2\neq\alpha^*\end{cases} \qquad \varepsilon>0$$

但

$$\alpha^* = \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2$$

因此 α^* 不是一个极值点，矛盾。故 α^* 是 Bang-Bang 的。

小结

$M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad N\in\mathbb{R}^{n\times m}$

Object：线性系统
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), & t>0\\ x(0) = x_0 & \alpha\in A\end{cases}$$

基本解，一般解。

$$x_0 = -\int_0^t X^{-1}(s)\,N\alpha(s)\,ds \iff x_0 \text{ 可达}$$

可控性：

可控性矩阵 $G(M,N) = [N, MN, M^2N, \cdots M^{n-1}N]$

代数可控性条件 $\operatorname{rank} G = n$

可观测性：
$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Mx(t)\\ y(t) = Nx(t)\end{cases} \overset{\text{互为对偶}}{\iff} \dot{z}(t) = M^T z(t) + N^T\alpha(t)$$

bang-bang原理：

任何可达状态都可以通过仅取端点值的控制在t时间达到。