最优控制理论第 3 章习题

Date due: 2025-11-05

考虑线性系统

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + N\alpha(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad \alpha(\cdot) \in \mathcal{U} := \{\, \alpha : [0,T] \to A \,\},$$

其中 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$、$N \in \mathbb{R}^{n\times m}$，控制集 $A = [-1,1]^m$。记 $X(t) = e^{tM}$，以及 $X^{-1}(t) = e^{-tM}$。

1. 对任意 $t > 0$，定义从 x_0 出发在时刻 t 的可达集

$$K(t,x_0) := \left\{ x(t;x_0,\alpha) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)N\alpha(s)\,ds \;:\; \alpha(\cdot) \in \mathcal{U} \right\}.$$

(1) 证明当 A 为凸集时，$K(t,x_0)$ 为凸集。

(2) 证明当 A 紧、且 $\{\alpha_k\}$ 在 L^∞ 中有界时，$K(t,x_0)$ 为闭集。

2. 考虑系统

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha, \qquad \alpha \in [-1,1].$$

(a) 计算 $X(t)$ 与 $X^{-1}(t)N$。

(b) 证明最优控制具有如下形式

$$\alpha^*(t) = \operatorname{sgn}(-t\,h_1 + h_2),$$

其中 $h = (h_1,h_2)^\top \neq 0$ 为常向量，因此最优控制至多只有一次切换。

3. 考虑 $\ddot{x} + x = \alpha$，且 $|\alpha| \le 1$。将其化为一阶系统

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha.$$

(a) 证明 $X^{-1}(t)N = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$。

(b) 证明最优控制具有如下形式

$$\alpha^*(t) = \operatorname{sgn}\big(-h_1 \sin t + h_2 \cos t\big) = \operatorname{sgn}\big(\sin(t+\delta)\big),$$

其中 δ 为某个相位，并证明 bang–bang 控制每隔 π 时间切换一次。

（提示：令 $-h_1 = \cos\delta,\ h_2 = \sin\delta$。）

4. 时间最优的 Hamilton 函数为

$$H(x, p, \alpha) = (Mx + N\alpha)\cdot p.$$

考虑 n 阶积分器链

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n,\ \dot{x}_n = \alpha, \qquad |\alpha| \le 1.$$

(a) 写出伴随方程与切换函数 $\phi(t) := p_n(t)$，证明 ϕ 为次数不超过 $n-1$ 的多项式。

(b) 证明切换次数（ϕ 的变号次数）至多为 $n-1$。