最优控制论

https://github.com/styluck/opt_ctrl

3学分 54学时. 1~16周 2025.12.14

30% 平时，70% 考试 6~7次作业. 1次期中
期中成绩 > 70% 平时分满分

如何让一个动态系统按照我们希望的方式运行.

控制

最优化问题 $\min f(x)$ s.t. $x \in \mathbb{R}^n$

最优控制论 $\min P(x(t)) + L(x(T)) = F(a(t))$ s.t. $a(t) \in F$

函数

Lawrence C Evans Note book 基本框架
① 给定动力系统，如何选择合适的控制变量.

② 从经典控制到现代控制 → 最优控制 → 无限维的优化问题

③ Pontryagin 极大值原理.

Chp 1

Defn: (动力系统 Dynamic systems, Dynamics)

ordinary differential equation

无控制的动力系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{(ODE)}$$

t: 时间, $t \geq 0$ $x(t)$: t时间的状态 $x(t): [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$

f: 演化函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$

Defn: (受控制的动力系统, Controlled dynamics)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), a), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

此处 a 固定，不随时间变化

t: 时间, $t \geq 0$ $\quad$ $x(t)$: t 时间的状态 $\quad$ $x(t): [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$

f: 演化函数 $\quad$ $f: \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$

A: 控制参数集 $\quad$ $A \in \mathbb{R}^m$

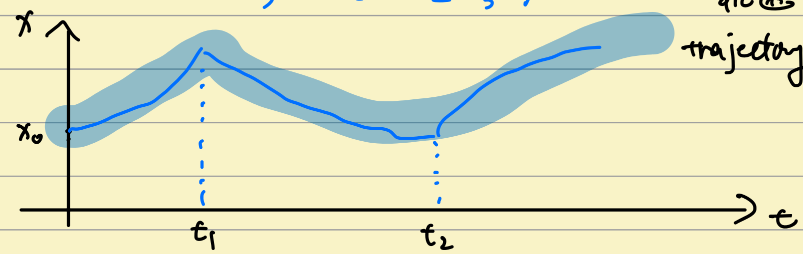
把 a 作为一个随时间变化的函数

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(t)), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$\alpha: [0, +\infty) \to A$

E.g.

$$\alpha(t) = \left.\begin{cases} a_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 & t_1 < t \leq t_2 \\ a_3 & t_2 < t \leq t_3 \end{cases}\right\} \text{控制}$$



轨迹

trajectory of ODE

Notation:

$$\mathbb{R}^n \ni f(x, a) = \begin{pmatrix} f^1(x, a) \\ \vdots \\ f^n(x, a) \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^n \ni x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^m \ni \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha^1(t) \\ \vdots \\ \alpha^m(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} := \{ \alpha: [0, +\infty) \to A \mid \alpha \text{ 可测} \} \to \text{可行控制集}$$

收益函数与最优控制问题

收益 (Payoff) 成本 (cost)

Defn: (收益泛函, payoff functional)

$$P[\alpha(\cdot)] := \underbrace{\int_0^T r(x(t),\alpha(t))\,dt}_{\substack{\text{running payoff} \\ \text{运行收益}}} + \underbrace{g(x(T))}_{\substack{\text{terminal payoff} \\ \text{终端收益}}}$$

Defn: (最优控制问题)

寻找控制 $\alpha^* \in \mathcal{A}$, 使得对任意可行控制 α 都有

$$P[\alpha^*] \geq P[\alpha]$$

这样的 α^* 称为最优控制

三个基本数学问题

① 最优控制是否存在?

② 如何数学上刻画 (characterise) 最优控制?

③ 如何具体构造最优控制?

例

状态演化函数

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),\alpha(t)), & t>0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

① 控制生产与消费

$x(t)$: 工厂在时间 t 的产量. ← 状态

$\alpha(t)$: 工厂再投资的比例 $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ ← 控制

$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t)$ $k>0$: 增长率 ← 演化函数

收益函数:

$$P[\alpha] = \int_0^T (1-\alpha(t))x(t)\,dt$$ ← 期间内的总消费

在 t 时间消费比例为 $1-\alpha(t)$

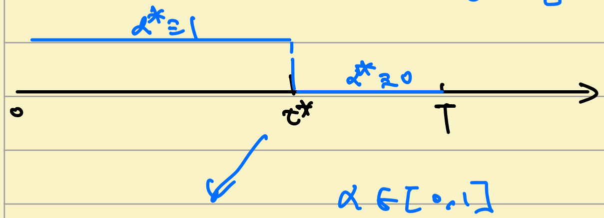
$\dot{x}(t) = f(x(t),\alpha(t)) = k\,\alpha(t)\,x(t)$ ← 演化函数

收益函数：运行收益 + 终端收益

$r(x(t),\alpha(t)) = (1-\alpha(t))\,x(t)$

$g(x(T)) = 0$

Ans: 最优控制呈现 bang-bang 形式 (bang-bang control)



$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0\le t<t^* \\ 0 & \text{if } t^*\le t<T \end{cases}$$

$\alpha \in [0,1]$

switching time

切换时间

② 社会性昆虫的繁殖策略 (Oster, Wilson)

worker → $w(t)$: 工蜂数

queen → $q(t)$: 蜂后数

$x(t)$: 状态 $x(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$

控制 → $\alpha(t) \in [0,1]$: 群体将多少比例的资源用于增加工蜂数量

$$\dot w(t) = -\mu w(t) + b\,\alpha(t)\cdot s(t)\cdot w(t)$$

μ: 工蜂的自然死亡率, $s(t)$: 工蜂在 t 时间的贡献率

b: 常数

$$\dot q(t) = -\nu q(t) + c\,[1-\alpha(t)]\,s(t)\cdot q(t)$$

ν: 蜂后的自然死亡率, c: 常数

目标：最大化季末蜂后数量

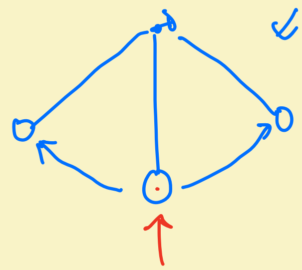
$P[\alpha] = q(T)$

$r(x(t),\alpha(t)) = 0$

$g(x(T)) = q$

Ans: 最优解也是 bang-bang 形式，群体在某个时间点之前专注于增加工蜂的数量，之后转而投入繁殖蜂后。

固定终点，自由时间 (fixed endpoint, free time)



③摆锤 Pendulum

状态:

$\theta(t)$: t时间的角度

$\dot{\theta}(t)$: t时间的角速度

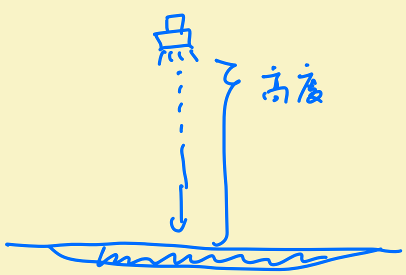
$\ddot{\theta}(t)$: t时间的角加速度

无控制时的运动方程: $\ddot{\theta}(t)+\lambda\dot{\theta}(t)+\omega^2\theta(t)=0$

控制: 转矩 $\alpha(t)$ torque 转矩

目标: 最短时间内让摆锤停下来: $x=\begin{pmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

收益函数: $P[\alpha]=-\tau$ τ: 首次满足 $x(\tau)=0$ 的时间



④月球着陆器

目标:

终端时间高度为0,速度为0.

同时,燃料消耗少.

状态:

$h(t)$: 高度

$v(t)$: 速度 $x=\begin{pmatrix}h(t)\\ v(t)\\ m(t)\end{pmatrix}$

$m(t)$: 剩余质量

牛顿定律: $m\ddot{h}=-gm+\alpha$

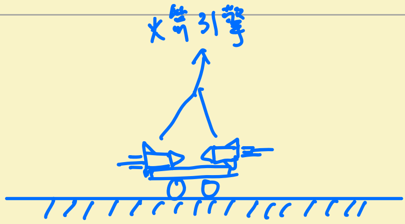
控制: $\alpha(t)\in[0,1]$ → 推力大小

运动方程:

$$\dot{h}(t)=v(t)$$

$$\dot{v}(t)=-g+\frac{\alpha(t)}{m(t)} \quad \leftarrow \quad m\ddot{h}=-gm+\alpha$$

$$\dot{m}(t)=-k\alpha(t)$$



⑤ 火箭小推车

控制:

$\alpha(t) \in [-1,1]$ 有方向和大小的推力

状态:

$q(t)$: 位置

$v(t)$: 速度 $\quad x = \begin{pmatrix} q(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

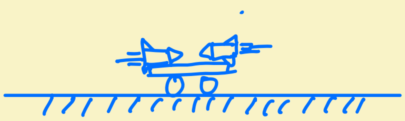
$$\begin{cases} \dot{q}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \alpha(t) \end{cases}$$

目标:

在最短时间内由初始点到达原点 $\begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

收益函数:

$$P[\alpha] = -\tau$$



ad hoc 先验
猜测最优控制只需取端点.

$\alpha(t) \in [-1,1]$

几何求解

$\alpha \in \{-1,1\} \quad \alpha = \pm 1$

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \alpha(t) \end{cases}$$

① $\alpha = 1$

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow v \cdot \dot{v}(t) = \dot{q}(t)$$

$$v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{v^2})$$

$$\frac{1}{2} (\dot{v^2}) = \dot{q}(t) \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t \dot{v^2} dt = \int_0^t \dot{q}(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(v^2(t) - v^2(0) \right) = q(t) - q(0)$$

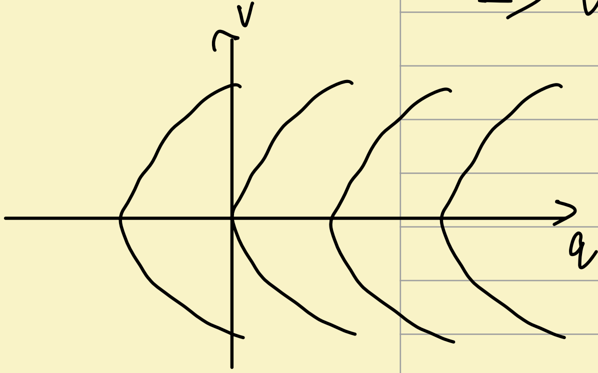
$$\Rightarrow v^2(t) = 2q(t) + \underbrace{\left(v^2(0) - 2q(0) \right)}_{b}$$

$$\Rightarrow v^2(t) = 2q(t) + b$$

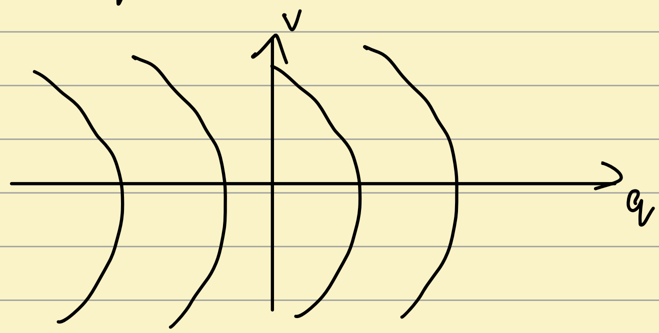
② $\alpha = -1$

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot(\dot{v^2}) = -\dot{q}$$

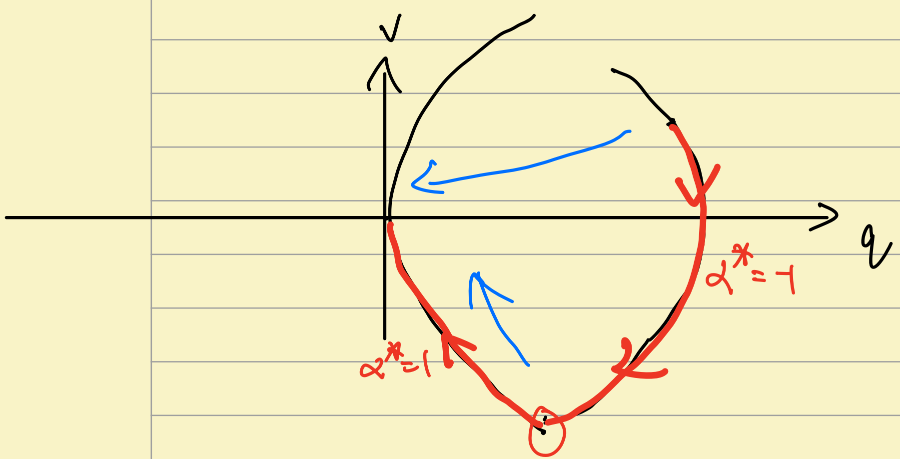
$$\Rightarrow v^2(t) = -2q(t) + c$$



$v^2 = 2q + b$



$v^2 = -2q + c$



bang-bang control

Outline

Chp 2: 可控性(Controllability) 和 bang-bang 原理

Chp 3: 时间最优控制.

Chp 2: Controllability and bang-bang principal.

可控性：是否可以将某一初始状态驱动到预定目标。

bang-bang 原理：最优控制往往呈现"开关型"的 bang-bang 状态。

本章目标：是否存在一个控制 $\alpha(\cdot)$ 使得 $x(t)\in S$ 在某个有限的时间成立

简化：$S=\{0\}$

Defn：(可达集. reachable set)

时间 t 的可达集 $C(t)$：由所有的可以在时间 t 将系统从某初始状态驱入原点的初始点组成

$$C(t)=\{x_0\in\mathbb{R}^n \mid \exists\alpha(\cdot)\in A \ \ s.t.\ x(t)=0\}$$

总可达集 C：所有可以在某个有限时间使系统达原点的初始点构成的集合

$$C=\bigcup_{t\geq 0}C(t)$$

若 $t_1\leq t_2$，则 $C(t_1)\subseteq C(t_2)$，C是所有 $C(t)$ 的并集

线性系统与矩阵指数

矩阵表达

E.g. $x(t)=\begin{pmatrix} q(t)\\ v(t)\end{pmatrix}$ $\quad \dot{q}(t)=v(t)$, $\dot{v}(t)=\alpha(t)$ $\quad \dot{x}(t)=\begin{pmatrix}\dot{q}(t)\\ \dot{v}(t)\end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\alpha(t)$$

线性假设：存在矩阵 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $N\in\mathbb{R}^{n\times m}$，使得

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Mx(t)+N\alpha(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

且控制取值于立方体：$A=[-1,1]^m=\{a\in\mathbb{R}^m \mid |a_i|\leq 1,\ i=1,\cdots,m\}$

分析线性系统：常用矩阵指数.

Defn：(基本解矩阵)

$X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为矩阵微分方程的唯一解

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = MX(t), \\ X(0) = I \end{cases}$$

则称 $X(\cdot)$ 是一个基本解矩阵，且

$$X(t) = \exp(tM) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!}$$

$$\dot{X}(t) = MX(t) \qquad \dot{X}(t)[X(t)]^{-1} = M$$

$$\int_0^t \dot{X}(t)[X(t)]^{-1}\,dt = \int_0^t M\,dt$$

$$\ln X(t) \cancel{- \ln I} = Mt - \cancel{M0}$$

$$\Rightarrow \ln X(t) = Mt \quad \Rightarrow \quad X(t) = \exp(tM)$$