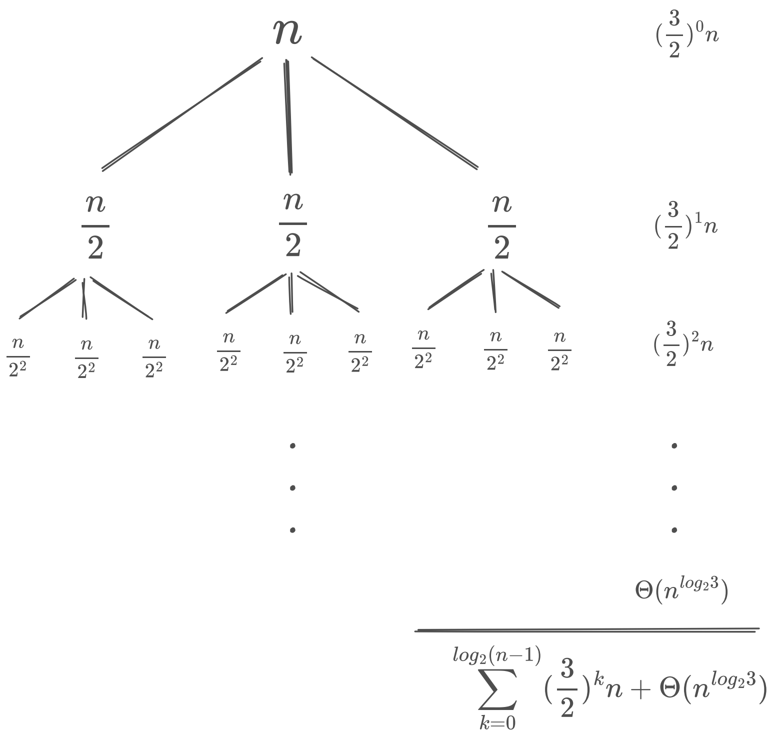
created: 2022-09-28
last-modified: "2022-10-06"
tags: `study`, `university`

4.3-7

$4c(\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n \le cn^{\log_3 4}$을 만족하는 $c > 0$은 없으므로 증명할 수 없다
이때, $cn^{\log_3 4} + dn$을 대입하면, 충분히 큰 d에서 아래 식이 성립하므로 증명할 수 있다

$$\begin{aligned} &4c(\frac{n}{3})^{\log_3 4} - \frac{4}{3}dn + n \\ &= cn^{\log_3 4} - (\frac{4}{3}d - 1)n \\ &\le cn^{\log_3 4} - dn \end{aligned}$$

4.4-1



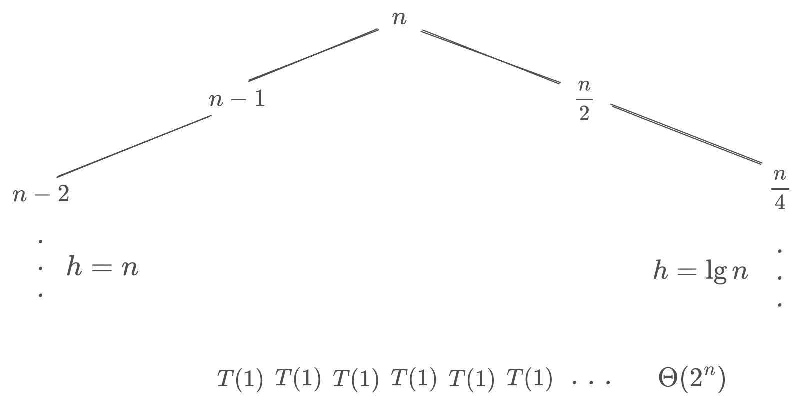
($\lfloor \frac{1}{2} \rfloor$를 $\frac{1}{2}$으로 근사하여 표기)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\lg(n-1)}(\frac{3}{2})^k n+\Theta(n^{\lg 3})\\
&\le \sum_{k=0}^{\lg n}(\frac{3}{2})^k n+\Theta(n^{\lg 3})\\
&= 2((\frac{3}{2})^{\lg n}-1)\\
&= 2(n^{\lg\frac{3}{2}}-1)\\
&\le 2n^{\lg 3}
\end{aligned}$$

위와 같으므로 $O(n^{\lg 3})$으로 추측 가능하다
Substitution Method로 $cn^{\lg 3}-dn$을 대입하면, 충분히 큰 d에서 아래와 같은 식이 성립하므로 입증 가능하다

$$\begin{aligned}
&3c(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)^{\lg 3}-3d\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\\
&\le 3c(\frac{n}{2})^{\lg 3}-\frac{3d}{2}n+n\\
&= cn^{\lg 3}-(\frac{3d}{2}-1)n\\
&\le cn^{\lg 3}-dn
\end{aligned}$$

4.4-5



각 레벨에서 오른쪽 자식은 이전 레벨의 절반으로 줄어드므로 $\sum_{k=0}^{\lg(n-1)}(\frac{n}{2^k})$이고,
왼쪽 자식은 이전 레벨을 그대로 가져오고 1을 뺀다
이때 1이 빠지는 횟수는 0, 1, 2, 4, ..., 2^k번이 된다
따라서 $\sum_{k=0}^{n-1}(n-2^k)$이고, 잎 노드는 총 2^n개 있으므로, $\Theta(2^n)$이다

형태를 $O(2^n)$으로 추측하고 Substitution Method에 의해,

$$\begin{aligned}
&c2^{n-1}+c2^{\frac{n}{2}}-d(n-1)-\frac{dn}{2}+n\\
&= c2^{n-1}+c\sqrt{2^n}-d(n-1)-\frac{dn}{2}+n\\
&\le c2^{n-1}+c2^{n-1}-d(n-1)-\frac{dn}{2}+n\\
&\le c2^n-dn
\end{aligned}$$

이고, 따라서 $O(2^n)$이다

4.5-1

b

$\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} = n^{\log_4 2}$
Master Method를 이용해서,
$T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}} \lg n)$

4.5-4

Master Method를 적용하기 위해 $n^{\log_2 4} = n^2$
$\frac{n^2 \lg n}{n^2} = \lg n$에 대해,
$\lg n$은 n에 대한 다항식보다 항상 점근적으로 작으므로,
$n^2 \lg n$과 n^2은 다항 비교가 불가능하다.

하지만, Advanced Master Method를 이용하면(출처: https://coloredrabbit.tistory.com/94, 페이지 하단에 다른 출처 목록 더 있음),
$a = 4, b = 2, k = 2, p = 1$인 경우에 해당하므로,
$4 = 2^2 \wedge 1 > -1$이고
$\Theta(n^2 \lg^2 n)$이다

4-1

b

Master Method에 의해,
$n^{log_{\frac{10}{7}} 1} = 1$이고, 1은 n보다 다항적으로 작고,
$\frac{7}{10} n \leq cn$을 만족하는 $c < 1$이 존재하므로,
$T(n) = \Theta(n)$

d

Master Method에 의해,
$n^{\lg_3 7} < n^2$이고,
$7(\frac{n}{3})^2 = \frac{7n^2}{9} \leq cn^2$을 만족시키는 $c < 1$인 값이 있으므로($\frac{7}{9} \leq c < 1$),
$T(n) = \Theta(n^2)$