Cours Complexité/Algorithmique
HMIN329

Amir SHIRALI POUR

28 September 2020

1 Exercice

On condidère la suite de nombres $(u_n)_{n \in N}$, déinie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \forall (n) \in N \end{cases}$$

1.1 Donnez les termes de la suite jusqu'à u_5.

Supposons que les nombres naturels commencent avec 0 et non avec 1 :
$u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$, $u_4 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$ et $u_5 = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$

1.2 Montrez par récurrence que $\forall (n) \in N \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 0$ nous avons $u_1 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.
Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie.

$$P(n) = \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \forall (n) \in N \end{cases}$$

Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) = u_{(n+1)+1 = \frac{1}{1+u_{(n+1)}} \Rightarrow u_{n+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+u_n}} = \frac{1+u_n}{2+u_n}}$$

Car u_n est tout le temps positif, quand $n \to +\infty$ lorsque pour n suffisamment grand $P(n+1)$ tend vers 1.
On voit aussi que la valeur minimale pour $P(n+1)$ est égale de $u_1 = \frac{1}{2}$
Donc $P(n+1)$ est **vraie**.
Conclusion :
Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

2 Exercice

Soit $E = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et soient les parties suivantes de E : $A = 1, 2, 3, 4$, $B = 4, 5, 6, 7, C = 1, 3, 5, 7 et D = 2, 3, 4, 5, 6$.

2.1 Faites un diagramme de Venn de ces ensembles.

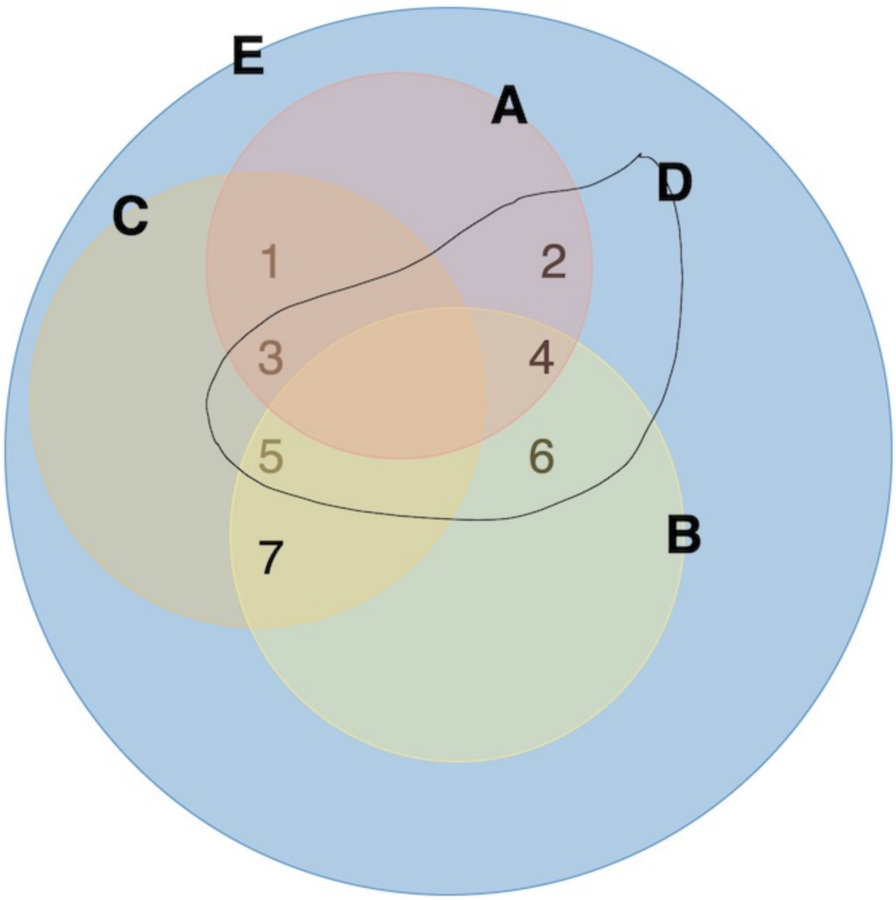

FIGURE 1 – Diagramme de Venn

2.2 Déterminez

2.2.1 $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

$(A \cap B) = \{4\}$, $(C \cap D) = \{3, 5\} \Rightarrow (A \cap B) \cup (C \cap D) = \{3, 4, 5\}$

2.2.2 $(A \cup C) \cap (B \cup D)$

$(A \cup C) = \{1,2,3,4,5,7\}$, $(B \cup D) = \{2,3,4,5,6,7\} \Rightarrow (A \cup B) \cap (C \cup D) = \{2,3,4,5,7\}$

2.2.3 $\overline{(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{D}) \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})} = (\overline{\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{D}}) \cap (\overline{\mathrm{B} \cup \mathrm{C}}) = (A \cup \overline{\mathrm{D}}) \cap (\overline{\mathrm{B} \cup \mathrm{C}})$

$\Rightarrow (A \cup \overline{\mathrm{D}}) = \{1,2,3,4,7\}$, $(\overline{\mathrm{B} \cup \mathrm{C}}) = \{2\} \Rightarrow \overline{(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{D}) \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})} = \{2\}$

2.2.4 $|A \times D| = 4 \times 5 = 20$

2.2.5 $P(C) = 2^4 = 16$

$\Rightarrow$P(C) = $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{1,3,5\}, \{1,3,7\}, \{1,5,7\}, \{3,5,7\}, \{1,3,5,7\}\}$

3 Exercice

Soient $f : R \to R$ et $g : R \to R$ deux applications telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

3.1 f et g sont-elle injectives ? sujectives ? bijectives ? Justifiez.

f est **injective** et **surjective** et donc elle est **bijective** car chaque élément $y \in Y$ a exactement un antécédent.

g n'est **pas injective** car on trouve des élément $y \in Y$ avec plus un antécédent. Ex : $x = \pm 2 \Rightarrow y = 15$.

g est **surjective** car chaque élément $y \in Y$ avec moins un antécédent.

g n'est pas **bijective** car elle n'est pas injective.

3.2 A-t-on $f \circ g = g \circ f$

$f \circ g = f(g(x)) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 3 + 1 = 3x^2 - 2$
$g \circ f = g(f(x)) = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x + 1 - 1 = 9x^2 + 6x$
$\Rightarrow$f $\circ g \neq g \circ f$