

# 超导磁体案例研究

## (第二版)

Yukikazu Iwasa 著

Bondrew 译



# 目录

<b>第一章 超导磁体技术概论</b>	<b>13</b>
1.1 引言 . . . . .	13
1.2 超导电性 . . . . .	15
1.2.1 Meissner 效应 . . . . .	15
1.2.2 超导电性的 London 理论 . . . . .	15
1.2.3 第 I 类和第 II 类超导体 . . . . .	17
1.2.4 第 II 类超导体的临界面 . . . . .	19
1.3 磁体级超导体 . . . . .	21
1.3.1 材料 vs. 磁体级超导体 . . . . .	22
1.3.2 实验室超导体 vs. 磁体级超导体 . . . . .	22
1.4 磁体设计 . . . . .	23
1.4.1 要求和关键 . . . . .	23
1.4.2 运行温度的影响 . . . . .	24
1.5 数值解 . . . . .	25
1.5.1 粗算解 . . . . .	25
1.5.2 程序解 . . . . .	25
1.6 专题 . . . . .	26
1.6.1 问题 1.1: 第 I 类超导体的热力学性质 . . . . .	26
1.6.2 问题 1.2: 超导回路 . . . . .	31
1.6.3 问题 1.3: 磁共振成像 (MRI) . . . . .	32
<b>第二章 电磁场</b>	<b>35</b>
2.1 引言 . . . . .	35
2.2 Maxwell 方程 . . . . .	35

2.2.1 电场 Gauss 定律 . . . . .	36
2.2.2 Ampere 定律 . . . . .	36
2.2.3 Faraday 定律 . . . . .	37
2.2.4 磁通连续性 . . . . .	37
2.2.5 电荷守恒 . . . . .	38
2.2.6 本构关系 . . . . .	38
2.3 准静态 . . . . .	38
2.4 Poynting 矢量 . . . . .	39
2.5 场的标量势解法 . . . . .	40
2.5.1 二维柱坐标 . . . . .	41
2.5.2 球坐标 . . . . .	42
2.5.3 正交坐标系下的微分算符 . . . . .	43
2.5.4 Legendre 函数 . . . . .	44
2.6 专题 . . . . .	45
2.6.1 问题 2.1: 均匀场中的磁化球 . . . . .	45
2.6.2 问题 2.2: 均匀场中的第 I 类超导棒 . . . . .	49
2.6.3 讨论 2.1: 均匀场中的理想导体球 . . . . .	51
2.6.4 问题 2.3: 球壳的磁屏蔽 . . . . .	52
2.6.5 讨论 2.2: 用圆柱壳屏蔽 . . . . .	57
2.6.6 问题 2.4: 四个偶极子簇的远场 . . . . .	59
2.6.7 问题 2.5: 铁电磁体的磁极形状 . . . . .	60
2.6.8 讨论 2.3: 永磁体 . . . . .	61
2.6.9 问题 2.6: 圆柱中的准静态场 . . . . .	63
2.6.10 问题 2.7: 圆柱壳的感应加热 . . . . .	64
2.6.11 问题 2.8: 金属扁带中的涡流损耗 . . . . .	71
2.6.12 讨论 2.4: 分层以减少涡流损耗 . . . . .	73
2.6.13 问题 2.9: Rogowski 线圈 . . . . .	73
<b>第三章 磁体, 场, 力</b>	<b>77</b>
3.1 引言 . . . . .	77
3.2 Biot-Savart 定律 . . . . .	77
3.3 Lorentz 力和磁压 . . . . .	78
3.4 螺管线圈的场分析 . . . . .	80
3.4.1 简单线圈 . . . . .	84

3.4.2 失配误差—嵌套双线圈磁体 . . . . .	86
3.5 轴向力 . . . . .	88
3.5.1 两个“环”线圈间的轴向力 . . . . .	88
3.5.2 “薄壁”螺管内的轴向力 . . . . .	91
3.5.3 “薄壁”螺管和“环”线圈间的轴向力 . . . . .	92
3.5.4 两个“薄壁”螺管间的轴向力 . . . . .	93
3.5.5 “厚壁”螺管——中平面轴向力 . . . . .	96
3.5.6 双线圈嵌套磁体的轴向力 . . . . .	99
3.5.7 轴向偏心螺管的轴向恢复力 . . . . .	102
3.6 螺管在磁力下的应力应变 . . . . .	103
3.6.1 应力应变方程 . . . . .	103
3.6.2 各向同性螺管的应力应变方程 . . . . .	105
3.6.3 减小径向应力的绕制张力 . . . . .	110
3.7 自感 . . . . .	112
3.7.1 圆形闭合回路的自感 . . . . .	113
3.7.2 螺管线圈的自感 . . . . .	113
3.7.3 实用电感公式 . . . . .	113
3.8 互感 . . . . .	116
3.8.1 互感——几个可解析表达的情况 . . . . .	117
3.8.2 互感和相互作用力 . . . . .	120
3.9 专题 . . . . .	121
3.9.1 讨论 3.1: 均匀电流密度螺管 . . . . .	121
3.9.2 问题 3.1: “简单”螺管 . . . . .	122
3.9.3 讨论 3.2: Bitter 磁体 . . . . .	127
3.9.4 问题 3.2: 螺管中的最大场 . . . . .	132
3.9.5 讨论 3.3: 负荷线 . . . . .	133
3.9.6 讨论 3.4: 叠加技术 . . . . .	135
3.9.7 讨论 3.5: 混合磁体 . . . . .	136
3.9.8 讨论 3.6: 双饼 vs. 层绕 . . . . .	141
3.9.9 问题 3.3: Helmholtz 线圈 . . . . .	142
3.9.10 问题 3.4: Helmholtz 线圈——另一种方法 . . . . .	144
3.9.11 问题 3.5: 一个空间均匀磁体的分析 . . . . .	147
3.9.12 问题 3.6: 直角坐标下的场展开 . . . . .	151

3.9.13 问题 3.7: Notched 螺管 . . . . .	153
3.9.14 讨论 3.7: 饼式线圈磁体的场分析 . . . . .	155
3.9.15 问题 3.8: 理想双极磁体 . . . . .	160
3.9.16 问题 3.9: 理想四极磁体 . . . . .	165
3.9.17 讨论 3.8: 双跑道线圈磁体 . . . . .	167
3.9.18 问题 3.10: 理想环状 toroidal 磁体 . . . . .	173
3.9.19 讨论 3.9: 核聚变与磁约束 . . . . .	176
3.9.20 问题 3.11: 边缘磁场 . . . . .	176
3.9.21 讨论 3.10: 缩放一个螺管磁体 . . . . .	178
3.9.22 讨论 3.11: 粒子加速器 . . . . .	180
3.9.23 问题 3.12: 旋转加速器加速质子 . . . . .	180
3.9.24 问题 3.13: 两线圈磁体 . . . . .	182
3.9.25 问题 3.14: 螺管中平面上的轴向力 . . . . .	186
3.9.26 问题 3.15: 嵌套两线圈磁体的中平面上的力 . . . . .	191
3.9.27 问题 3.16: 环氧浸渍螺管的应力 . . . . .	193
3.9.28 问题 3.17: HTS 磁体中的应力和轴向力 . . . . .	195
3.9.29 讨论 3.12: 铁球上的磁力 . . . . .	200
3.9.30 讨论 3.13: 两线圈磁体的径向力 . . . . .	203
3.9.31 讨论 3.14: 45 T 混合磁体的结构支撑 . . . . .	204
3.9.32 讨论 3.15: Nb <sub>3</sub> Sn 导体上的应力 . . . . .	205
3.9.33 问题 3.18: 部分系统的自感 . . . . .	207
3.9.34 讨论 3.16: Rogowski 线圈的互感 . . . . .	213
3.9.35 讨论 3.17: 力 vs. 互感 . . . . .	213
<b>第四章 制冷</b>	<b>215</b>
4.1 引言 . . . . .	215
4.2 “湿式”磁体和“干式”磁体 . . . . .	215
4.3 制冷问题: 冷却、热、测量 . . . . .	217
4.3.1 冷源 . . . . .	217
4.3.2 热源 . . . . .	217
4.3.3 测量 . . . . .	217
4.4 液体工质: 湿式磁体 . . . . .	218
4.5 固体工质: 干式磁体 . . . . .	219
4.5.1 湿 LTS 磁体 vs. 干 HTS 磁体——热容 . . . . .	219

4.5.2 固体工质——氖、氮、氩 . . . . .	220
4.6 专题 . . . . .	221
4.6.1 问题 4.1: Carnot 制冷机 . . . . .	221
4.6.2 讨论 4.1: 制冷机性能 . . . . .	222
4.6.3 讨论 4.2: 浸泡磁体的冷却模式 . . . . .	222
4.6.4 讨论 4.3: “冷却” HTS 磁体 . . . . .	222
4.6.5 讨论 4.4: 超流 . . . . .	222
4.6.6 讨论 4.5: 1.8 K 过冷低温容器 . . . . .	222
4.6.7 讨论 4.6: J-T 过程 . . . . .	223
4.6.8 问题 4.2: 基于制冷机的小型氦液化器 . . . . .	223
4.6.9 讨论 4.7: 制冷机 vs. 制冷回环器 . . . . .	224
4.6.10 讨论 4.8: 辐射传热 . . . . .	224
4.6.11 讨论 4.9: 残余气体的对流传热 . . . . .	224
4.6.12 讨论 4.10: 真空泵系统 . . . . .	225
4.6.13 讨论 4.11: 固态制冷工质/磁体 . . . . .	225
4.6.14 问题 4.3: 固态制冷剂冷却的磁体 . . . . .	225
4.6.15 讨论 4.12: 温升和场均匀性 . . . . .	226
4.6.16 讨论 4.13: 低温热测 . . . . .	226
4.6.17 讨论 4.14: 气冷铜电流引线 . . . . .	226
<b>第五章 磁化 . . . . .</b>	<b>229</b>
5.1 引言 . . . . .	229
5.2 第 II 类超导体的 Bean 理论 . . . . .	229
5.2.1 无传输电流 . . . . .	229
5.2.2 传输电流对磁化的效应 . . . . .	233
5.3 测量技术 . . . . .	234
5.4 专题 . . . . .	238
5.4.1 讨论 1: 传导电流磁化 . . . . .	238
5.4.2 讨论 2: SQUID 用于磁化测量 . . . . .	239
5.4.3 讨论 3: “Bean 细丝” 中的磁化 . . . . .	240
5.4.4 讨论 4: 磁化中的 $J_c$ . . . . .	241
5.4.5 问题 5: 磁化测量 . . . . .	242
5.4.6 讨论 6: 磁扩散和热扩散 . . . . .	243
5.4.7 问题 7: 磁通跳跃判据 . . . . .	244

5.4.8 问题 8: 磁通跳跃 . . . . .	245
5.4.9 问题 9: 导线换位 . . . . .	246
5.4.10 问题 10: 导体磁化 . . . . .	247
5.4.11 讨论 11: 换位 . . . . .	248
5.4.12 讨论 12: HTS 中的磁通跳跃? . . . . .	249
<b>第六章 稳定性</b>	<b>251</b>
6.1 引言 . . . . .	251
6.2 稳定性理论和标准 . . . . .	252
6.2.1 公式 6.1 涉及的概念 . . . . .	252
6.2.2 热能量 . . . . .	253
6.2.3 热传导 . . . . .	253
6.2.4 焦耳热 . . . . .	253
6.2.5 扰动谱 . . . . .	253
6.2.6 稳定裕度 vs 扰动能 . . . . .	253
6.2.7 冷却 . . . . .	253
6.3 电流密度 . . . . .	253
6.3.1 横截面积 . . . . .	253
6.3.2 复合物超导体 . . . . .	253
6.3.3 绕组中的电流密度 . . . . .	253
6.4 专题 . . . . .	253
6.4.1 讨论 1: 低温稳定性——电路模型 . . . . .	253
6.4.2 问题 2: 低温稳定性——温度依赖 . . . . .	254
6.4.3 讨论 3: Stekly 低温稳定性判据 . . . . .	255
6.4.4 讨论 4: 复合物超导体 . . . . .	256
6.4.5 问题 5: 低温稳定性——非线性冷却曲线 . . . . .	257
6.4.6 讨论 6: 等效面积判据 . . . . .	258
6.4.7 讨论 7: 超导体“指数” $n$ . . . . .	259
6.4.8 问题 8: 复合物超导体( $n$ )——电路模型 . . . . .	260
6.4.9 问题 9: 电流脉冲下的 YBCO . . . . .	261
6.4.10 讨论 10: CICC 导体 . . . . .	262
6.4.11 问题 11: 冷却复合物导体的伏安关系 . . . . .	263
6.4.12 问题 12: 混合 III SCM 的稳定性分析 . . . . .	264
6.4.13 讨论 13: cryostable vs 准绝热磁体 . . . . .	265

6.4.14 讨论 14: MPZ 概念 . . . . .	266
6.4.15 问题 15: 绝热绕组中的耗散能密度 . . . . .	267
<b>第七章 交流及其他损耗</b>	<b>269</b>
7.1 引言 . . . . .	270
7.2 交流损耗 . . . . .	270
7.2.1 磁滞损耗 . . . . .	270
7.2.2 多丝复合物中的耦合损耗 . . . . .	270
7.2.3 涡流损耗 . . . . .	270
7.3 其他损耗 . . . . .	270
7.3.1 分段电阻 . . . . .	270
7.3.2 机械扰动 . . . . .	270
7.4 声发射技术 . . . . .	270
7.4.1 机械事件探测——LTS 磁体 . . . . .	270
7.4.2 应用于 HTS 磁体 . . . . .	270
7.5 专题 . . . . .	270
7.5.1 问题 1: 磁滞能量密度——在“小”磁场时间序列的 “纯” Bean 板 . . . . .	270
7.5.2 问题 2: 磁滞能量密度——在“中”磁场时间序列的 “纯” Bean 板 . . . . .	271
7.5.3 问题 3: 磁滞能量密度——在“大”磁场时间序列的 “纯” Bean 板 . . . . .	272
7.5.4 讨论 4: 磁滞能量密度——磁化的 Bean 板 . . . . .	273
7.5.5 讨论 5: 载有直流电流的 Bean 板 . . . . .	274
7.5.6 问题 6: 磁滞能量密度——载有直流电流的 Bean 板 .	275
7.5.7 问题 7: 自场磁滞能量密度——Bean 板 . . . . .	276
7.5.8 讨论 8: 磁体整体的交流损耗 . . . . .	277
7.5.9 讨论 9: 测量交流损耗的技术 . . . . .	278
7.5.10 讨论 10: CICC 中的交流损耗 . . . . .	279
7.5.11 讨论 11: HTS 中的交流损耗 . . . . .	280
7.5.12 问题 12: $Nb_3Sn$ 中的磁滞损耗 . . . . .	281
7.5.13 问题 13: 混合 III SCM 中的交流损耗 . . . . .	282
7.5.14 讨论 14: 混合 III NbTi 线圈中的分段耗散 . . . . .	283
7.5.15 讨论 15: 持续模式运行 & “指数” . . . . .	284

<b>第八章 保护</b>	<b>285</b>
8.1 引言 . . . . .	285
8.1.1 热能密度 vs. 磁能密度 . . . . .	285
8.1.2 热点和热点温度 . . . . .	286
8.1.3 绕组材料的温度数据 . . . . .	286
8.1.4 $T_f$ 的安全、风险、高度风险区间 . . . . .	286
8.1.5 温度引起的应变 . . . . .	286
8.2 绝热加热 . . . . .	286
8.2.1 恒定电流模式下的绝热加热 . . . . .	286
8.2.2 恒定放电量模式下的绝热加热 . . . . .	286
8.2.3 引线短接的磁体的绝热加热 . . . . .	286
8.2.4 恒定电压模式下的绝热加热 . . . . .	286
8.3 高电压 . . . . .	286
8.3.1 电弧环境 . . . . .	286
8.3.2 Paschen 电压试验 . . . . .	286
8.3.3 失超磁体内的电压峰值 . . . . .	286
8.4 正常区传播 (NZP) . . . . .	286
8.4.1 轴向 NZP 速度 . . . . .	286
8.4.2 “制冷” 条件下的 NZP . . . . .	286
8.4.3 横向匝间速度 . . . . .	286
8.4.4 热-流体失超恢复 (THQB) . . . . .	286
8.4.5 交流损耗诱导的 NZP . . . . .	286
8.5 计算机仿真 . . . . .	286
8.6 自保护磁体 . . . . .	286
8.6.1 尺度限制 . . . . .	286
8.7 孤立磁体的被动保护 . . . . .	286
8.8 主动保护 . . . . .	286
8.8.1 过热 . . . . .	286
8.8.2 多线圈磁体中的过压 . . . . .	286
8.8.3 主动保护技术：检测-抑制 . . . . .	286
8.8.4 主动保护技术：检测-激活加热器 . . . . .	286
8.8.5 失超电压保护技术：基本电桥 . . . . .	286
8.9 专题 . . . . .	286

8.9.1 问题 1: 大型超导磁体的回温 . . . . .	286
8.9.2 问题 2: 6 kA 气冷 HTS 引线的保护 . . . . .	287
8.9.3 问题 3: 制冷机制冷的 NbTi 磁体的保护 . . . . .	288
8.9.4 问题 4: 混合 III SCM 的“热点”温度 . . . . .	289
8.9.5 讨论 5: 失超电压探测——一个变种 . . . . .	290
8.9.6 问题 6: 抑制电阻的设计 . . . . .	291
8.9.7 讨论 7: 磁体的“缓慢”放电模式 . . . . .	292
8.9.8 讨论 8: 低阻电阻器设计 . . . . .	293
8.9.9 讨论 9: 过热 & 内部电压判据 . . . . .	294
8.9.10 讨论 10: Bi2223 带电流引线的保护 . . . . .	295
8.9.11 讨论 11: $MgB_2$ 磁体的主动保护 . . . . .	296
8.9.12 问题 12: NMR 磁体的被动保护 . . . . .	297
8.9.13 讨论 13: HTS 磁体到底要不要保护? . . . . .	298
<b>第九章 螺管示例, HTS 磁体及结论</b>	<b>299</b>
9.1 引言 . . . . .	299
9.2 螺管磁体示例 . . . . .	299
9.3 HTS 磁体 . . . . .	299
9.4 结论 . . . . .	299



# 第一章 超导磁体技术概论

## 1.1 引言

超导磁体技术包括超导磁体的设计、制造和运行。超导磁体需要最好的工程条件以确保成功的、可靠的、经济的运行。一个典型的 10 T 磁体，不论是以超导态运行于液氦 (4.2 K)、液氮 (77 K) 还是以电阻态运行于室温，都要承受等效 40 MPa 的磁压。超导磁体技术是一门交叉学科，需要包括如机械、电气、制冷和材料在内的很多工程领域的知识和技能训练。

表 1.1 列举了与超导磁体技术有关的“首次”事件，特别是自 1911 年 Onnes 发现超导电性以来的重要事件。关键的几个事件如下：

1. 水冷 10T 电磁体：Francis Bitter，1930 年代末期
2. 大规模氦气液化：Collins，1940 年代末期
3. 磁体级超导体：Kunzler 等，1960 年代初期
4. 磁体低温稳定性：Stekly，1960 年代中期
5. 高温超导体：Müller 和 Bednorz，1986 年

尽管 Bitter 的电磁体是有电阻、水冷、运行于室温的，但我们可以放心的说，Bitter 开创了现代磁体技术。Collins 液化设备出现后，曾经仅少数几个中心用得起的昂贵液氦可以广泛获取，快速推动了低温物理学的发展。1950 年代，发现了很多重要的超导体。最终，在 1960 年代发展出一直到今天还在使用的磁体级超导体。

1960 年代中期，Stekly 等人提出的低温稳定磁体的设计准则或许可以称为超导磁体发展早期的最重要一步。显然，它把超导从科学好奇引领到现实工程。此后的进展成功开发出“高性能”（绝热，非低温稳定）磁体，至今占据多数“市场”份额。

表 1.1: 超导磁体技术的诸多“首次”

时代	大事记
1930s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Meissner 效应</li> <li>-确认第 II 类低温超导体 (LTS)</li> <li>-超导电性的唯象理论</li> <li>-Bitter 电磁体产生高达 10T 磁场</li> </ul>
1940s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Collins 氦气液化装置市场化</li> </ul>
1950s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-发现了更多的第 II 类超导体</li> <li>-超导电性的 GLAG 和 BCS 理论</li> <li>-小型超导磁体</li> </ul>
1960s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-开发出磁体级超导体, 即 <math>NbTi, Nb_3Sn</math></li> <li>-国家磁体实验室建立</li> <li>-Bitter 磁体产生高达 22 T(有铁芯时 25T) 的磁场</li> <li>-LTS 中的磁通跳跃</li> <li>-LTS/正常金属混合物超导体</li> <li>-阐明低温稳定性标准</li> <li>-大型冷却 LTS 磁体</li> <li>-超导发电机</li> <li>-内冷 LTS 磁体</li> <li>-多丝 <math>NbTi/Cu</math> 超导体</li> </ul>
1970s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-多丝 <math>Nb_3Sb/Cu</math> 超导体</li> <li>-磁悬浮试验车</li> <li>-加速器用超导双极和四极磁体</li> <li>-沟槽电缆导体 (CICC)</li> <li>-混合磁体产生 30T 磁场</li> <li>-使用 LTS 磁体的 NMR 系统商业化</li> </ul>
1980s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-使用 LTS 磁体的 MRI 系统商业化</li> <li>-聚变 LTS 磁体的多国协作实验 (ITER)</li> <li>-60Hz 应用的亚微米超导体</li> <li>-超导加速器</li> <li>-发现高温超导体 (HTS)</li> </ul>
1990s	<ul style="list-style-type: none"> <li>-BSCCO-2223/Ag 超导带; 磁体 (1-7T)</li> <li>-“干式”磁体 (LTS 和 HTS)</li> <li>-YBCO 涂层导体</li> <li>-45T 混合磁体</li> </ul>
2000-	<ul style="list-style-type: none"> <li>-发现 <math>MgB_2</math> 超导体, <math>T_c=39K</math></li> <li>-HTS 示范装备, 如电缆、变压器、电机</li> <li>-高分辨率 900MHz-1GHz 全 LTS NMR 磁体</li> <li>-开发高分辨率 LTS/HTS NMR 磁体</li> <li>-脑成像用高场 MRI 磁体</li> <li>-强子对撞机 (LHC) 运行</li> </ul>

高温超导体的发现让超导磁体技术从液氦“高冷”中热起来。伴随制冷技术的进步，高温超导体促进了用制冷机冷却的高温超导/低温超导干式磁体（无制冷剂）的发展。21世纪早期，人们坚定的相信并热切的希望高温超导体最终能成功的实现低温超导体所未能实现的应用。

## 1.2 超导电性

超导电性的基本概念是在一特定“临界”温度( $T_c$ )下，在超导体内通以直流时，完全没有电阻。除了 $T_c$ ，临界磁场( $H_c$ )和临界电流密度( $J_c$ )是定义超导电性存在的另两个参数。 $T_c$ 和 $H_c$ 是热力学参数，对某一特定材料，不随金相处理过程而变。 $J_c$ 则不是热力学参数。实质上，Kunzler等人在1961年的关键贡献就是指出了对于某种超导体，仅通过控制处理过程的方法是可以显著提高 $J_c$ 的。本书不会用形式化的唯象理论或微观理论来解释 $T_c$ 、 $H_c$ 、 $J_c$ 间的相互关系。不过，鉴于超导电性的磁行为在超导磁体中有重要作用，本书会用简单理论模型扼要的作出解释。

### 1.2.1 Meissner 效应

Meissner效应是由Meissner和Ochsenfeld在1934年发现的，描述的是在超导块材的内部磁感应强度 $\vec{B}$ 不存在，即 $\vec{B} = 0$ 的现象。超导体的完全抗磁性是比完全无电阻（即 $\rho = 0$ ）更根本的性质。因为材料的完全抗磁性自动要求它是理想导体。Meissner效应，产生于表面的超导电流，这在第一类和第二类超导体中都观察到了。在第一类超导体中，在其热力学临界磁场 $H_c$ 之下，Meissner效应都是存在的。而在第二类超导体中，Meissner效应仅存在于下磁场 $H_{c1}$ 之下。超过 $H_{c1}$ 之后，磁场会逐步进入超导体内，直到达到上磁场 $H_{c2}$ 时磁场完全进入。此时，超导体称为完全的正常态。

### 1.2.2 超导电性的 London 理论

超导电性的唯象理论自1930年代开始发展（微观理论——BCS理论则是到1957年才完成的）。其中，London电磁理论（1935年）提出“穿透深度”的概念来解释Meissner效应。简单的说，超导体被穿透深入为 $\lambda$ 的表面超导电流完全屏蔽了外磁场。根据London理论， $\lambda$ 由下式给出：

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n_{se}}} \quad (1.1)$$

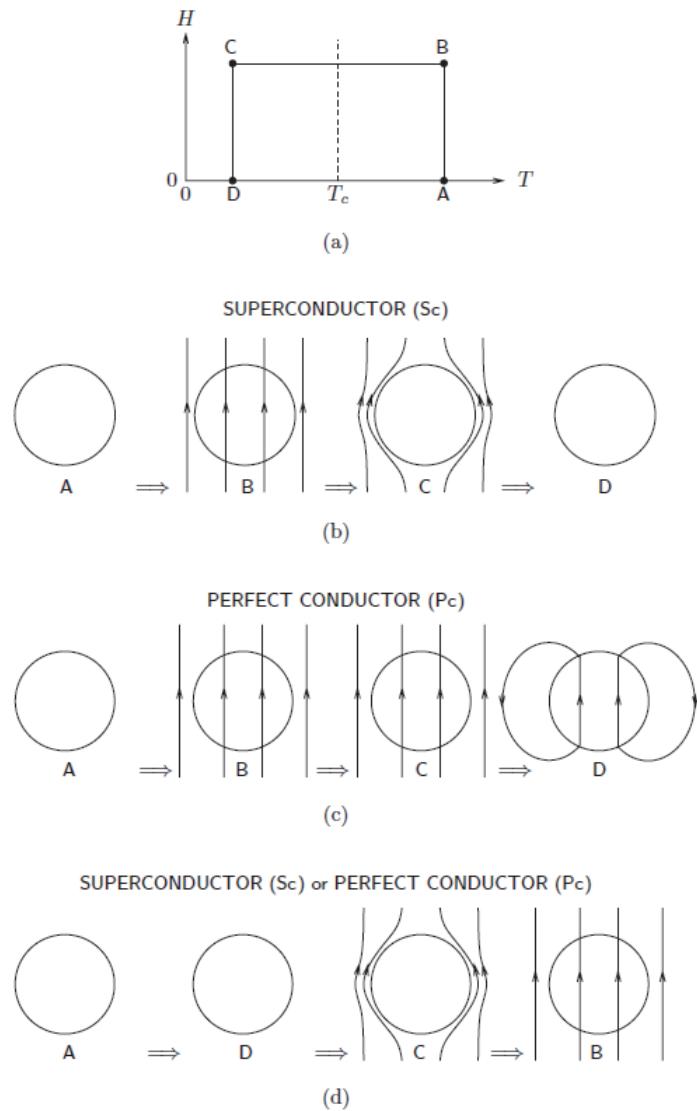


图 1.1: (a): 两个球在  $T < T_c$  时的 H-T 相图, 其中一个是超导体, 另一个 是理想导体。  
 (b): 超导球按  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  顺序施加 H-T 环境的磁场情况。(c): 理想导体按相同的顺序施加 H-T 环境的磁场情况。(d): 超导体或理想导体按  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$  顺序施加 H-T 环境的磁场情况。

式中,  $m$  和  $e$  分别是电子质量 ( $9.11 \times 10^{-31}$  kg) 和电荷量 ( $1.60 \times 10^{-19}$  C);  $\mu_0$  是自由空间磁导率 ( $4\pi \times 10^{-7}$  H/m)。这里, 超导电子密度  $n_{se}$  与自由电子  $n_{fe}$  不同。在  $T = 0$  时, 全部都是超导电子; 在  $T = T_c$  时, 为零。定量地, 有:

$$n_{se} \approx n_{fe} = \frac{\rho N_A}{W_A} \quad (1.2)$$

其中,  $\rho$  是导体的质量密度 (g/cm<sup>3</sup>),  $N_A$  是 Avogadro 常数 ( $6.023 \times 10^{23}$ /mole),  $W_A$  是原子质量 (g/mole)。超导电流密度  $J_c = en_{se}v \approx en_{fe}v$ ,  $v$  是超导电子的漂移速度。

### 1.2.3 第 I 类和第 II 类超导体

1911 年, Onnes 在纯汞中发现了超导电性; 随后, 其他金属如铅、锡也被发现是超导体。这些材料, 现在被称为第 I 类超导体。因其  $H_c$  较小 (0.1 T), 并不适合做超导磁体的材料。磁体级超导体属第 II 类。溯其源, 第 II 类超导体由 Haas 和 Voogd 于 1930 年在铅铋合金中发现。

第 II 类超导体可以用第 I 类超导体和正常导体材料的混合态来建模。1960 年代初, 有两种混合态物理模型: 薄层模型 (lamina) 和岛模型 (island)。薄层模型是 Goodman 提出的, 他认为第 II 类超导体的超导层被正常态层分割开。岛模型是 Abrikosov 提出的, 不久得到了 Essmann 和 Trauble 的实验证实。该理论认为在超导“海”中存在许多正常态的“岛”。对于第 II 类超导体, 若要在 0.1T 以上还能保持超导态, 正常态“岛”的半径必须小于  $\lambda$ 。岛半径是空间参数——相干长度  $\xi$ , 这个参数是 Pippard 在 1953 年引入的。

$\xi$  定义了超导/正常态转变发生的距离。根据用于解释第 II 类超导体超导电性磁场性质的 GLAG 理论, 如果  $\xi < \sqrt{2}\lambda$ , 是第 II 类超导体; 如果  $\xi > \sqrt{2}\lambda$ , 则是第 I 类超导体。对合金来讲, 由于缩短了自由电子的平均自由程,  $\xi$  会减小。 $\xi$  反比于材料正常态的电阻率。两种常用的磁体级合金——NbTi 和 Nb<sub>3</sub>Sn——的室温正常态电阻率都比铜高出一个数量级。值得注意的是, 所有 HTS 的  $\xi$  都远小于  $\lambda$ 。

### DC 和 AC 响应

图 1.2 给出了三个超导棒的示意图。第 I 类 (1.2a) 和第 II 类 (1.2b, 1.2c) 中的载流均小于其临界电流。在第 I 类超导体重, 无论通过 AC 抑或 DC,

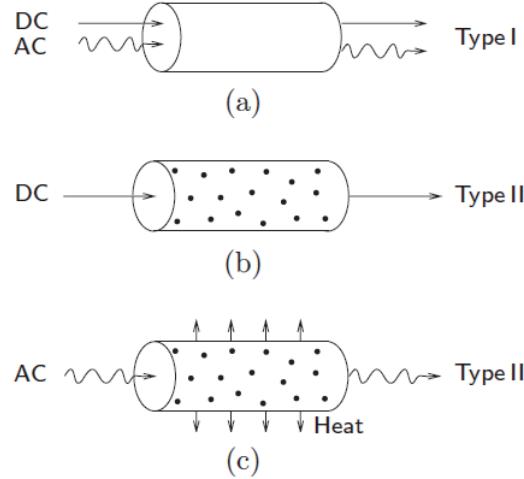


图 1.2: 超导棒载流。(a) 第 I 类超导体棒, DC 或 AC 电流——无焦耳耗散产生; (b) 第 II 类超导体棒, DC 电流无耗散; (c) 第 II 类超导体棒, AC 电流有焦耳热耗散产生。

电流都只在表面 (London 穿透深度) 流过且无能量耗散。第 II 类超导体中, DC 电流在整个棒体内流过, 尽管有正常区, 但不产生耗散。我们可以设想, “超导电子”通过材料时“躲”开了正常态区域。从电路的观点看, 我们可以认为这些有电阻的“岛”被周围的超导“海”短路掉了。当通过 AC 时, 第 II 类超导体是有损耗的, 即存在电阻——尽管其有效电阻仍然比正常高导电金属小几个数量级。每一个正常态区域都包含磁通束, 称为磁通量子 (fluxoid) 或旋涡 (vortices)。磁通束在时变磁场和/或电流下“流”动。此种耗散性磁通流动是第 II 类超导体交流损耗的主要来源。

### 磁场性质

置于磁场中, 第 I 类超导体在  $H < H_c$  下是完全抗磁的, 超过  $H_c$  就成为常规的无磁材料; 第 II 类超导体在下磁场  $H_{c1}$  下, 磁场性质和第 I 类一样, 在  $H_{c1}$  和  $H_{c2}$  之间时, 第 II 类超导体是混合态。图 1.3 给出了第 I 类/第 II 类超导体的磁化与磁场的关系。注意, 磁体级超导体的磁化曲线都是不可逆的, 并非如图中一样。不可逆的结果就是存在磁滞曲线。第 II 类超导体的磁滞本性是其交流损耗的又一来源。

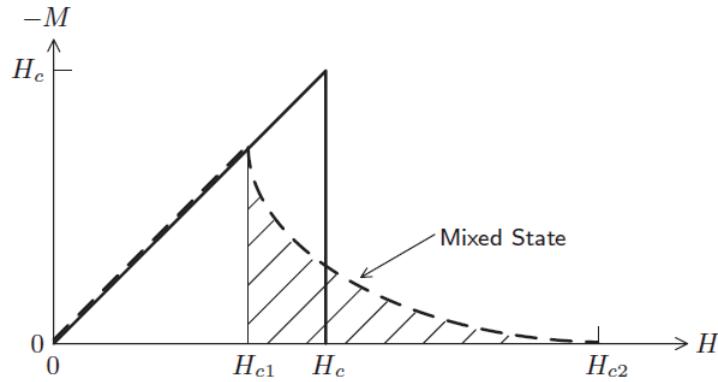


图 1.3: M-H 关系。实现是第 I 类, 虚线是第 II 类。斜线区域表示第 II 类超导体的混合态。

### 超导体举例

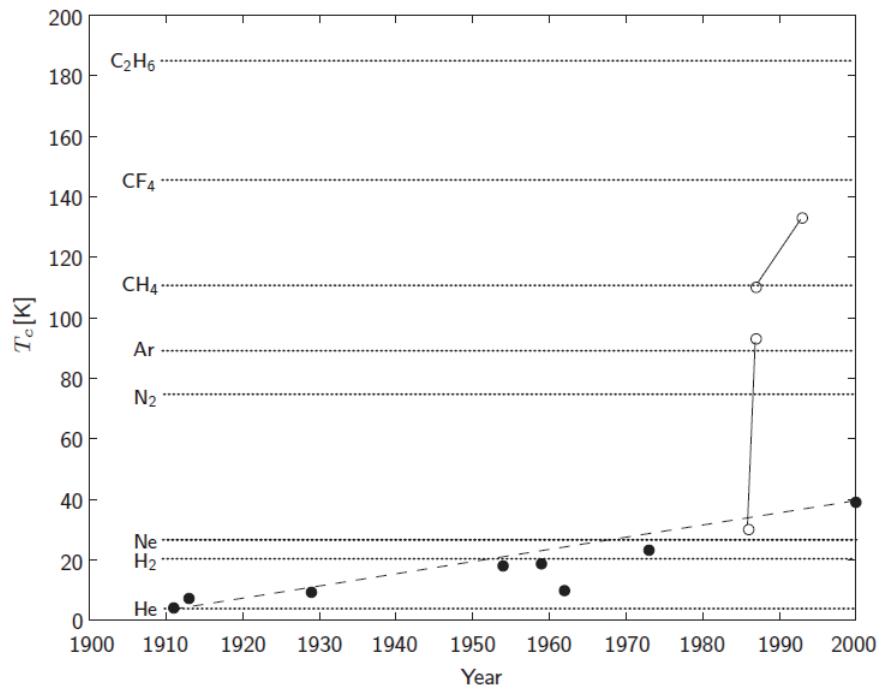
表 1.2列出了一些超导体，并给出了其类型、零场临界温度  $T_c$ 、临界磁感应强度（第 I 类:  $\mu_0 H_c$ ; 第 II 类:  $\mu_0 H_{c2}$ ）。所有的第 I 类超导体都是金属，临界场很小。这也就解释了为什么 Onnes 在 1913 年试图用铅线做磁体会失败：在磁场下，铅就已经不超导了。即使那个时代，磁场也要达到 0.3 T 才有使用价值。表 1.2已经很清楚的表明，超导磁体必须使用第 II 类超导体。和第 I 类不同，第 II 类超导体存在多种类型：合金、金属混合物甚至氧化物。所有的氧化物都是高温超导体。 $MgB_2$  是非金属，也被归为高温超导体。图 1.4给出了几种代表性的 HTS 或 LTS 的  $T_c$  及其发现年份。图中还标出了重要制冷工质的沸点。其中，实线把氧化物超导体连缀了起来，虚线把金属类超导体连缀了起来。

#### 1.2.4 第 II 类超导体的临界面

图 1.5展示了一种典型的第 II 类磁体级超导体的临界面。超导电性存在于由边界函数  $f_1, f_2, f_3$  所确定的临界面之下。对磁体工程师更有用的，是一般的  $f(H, T, J)$  函数。

表 1.2: 几种代表性第 I 类和第 II 类超导体的临界温度和临界磁场

第 I 类	$T_c [K]$	$\mu_0 H_c [T]$	第 II 类	$T_c [K]$	$\mu_0 H_c [T]$
Ti	0.39	0.0100	Nb 金属	9.5	0.2
Zr	0.55	0.0047	NbTi 合金	9.8	10.5
Zn	0.85	0.0054	NbN	16.8	15.3
Al	1.18	0.0105	MgB <sub>2</sub>	39.0	35-60
In	3.41	0.0281	Nb <sub>3</sub> Sn	18.2	24.5
Sn	3.72	0.0305	Nb <sub>3</sub> Al	18.7	31
Hg	4.15	0.0411	Nb <sub>3</sub> Ge	23.2	35.0
V	5.38	0.1403	YBCO	93	150
Pb	7.19	0.0803	Bi-22xx	85-110	>100

图 1.4: 几种代表性超导体  $T_c$  和发现年份

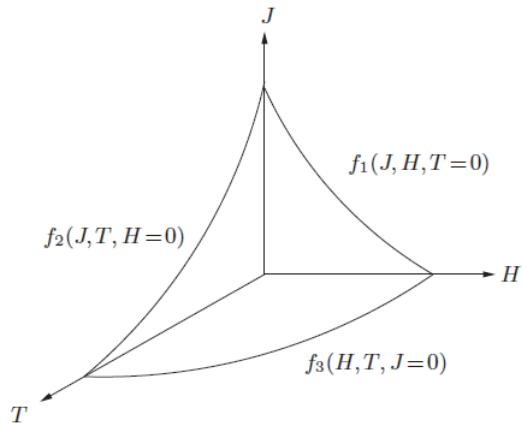


图 1.5: 典型第 II 类超导体的临界面

临界电流密度,  $J_c$

对第 II 类超导体,  $J_c$  可以通过冶金处理的方式大大提高。这种增强的  $J_c$  性能通常归因于“钉扎中心”的产生, 钉住了旋涡, 从而可以抵抗施加于其上的 Lorentz 力 ( $\vec{J}_c \times \vec{B}$ )。这些晶体中的钉扎中心可通过材料掺杂、冶金处理(如冷处理产生错位, 热处理产生前位体和晶界)等产生。Kim 等给出:

$$J_c \approx \frac{\alpha_c}{H + H_0} \quad (1.3)$$

式中,  $\alpha_c, H_0$  是常数。 $\alpha_c$  是  $H \gg H_0$  时平衡掉 Lorentz 力密度的渐近力密度。

### 1.3 磁体级超导体

磁体级超导体是指那些满足严格的磁体参数要求且可商业化取得的导体。以下是对磁体级超导体和超导材料的简短评论: 现今每一种成功的磁体级超导体, 都经历了长期和复杂的发展过程, 才从实验室走出, 达到磁体级。

表 1.3: 超导材料 vs. 导体

标准	数量	标准	数量
1. 超导吗?	10000	$3.J_c > 1\text{GA/m}^2$ ?	10
$2.T_c > 4.2\text{K}; \mu_0 H_{c2} > 10\text{T}$ ?	100	磁体级?	<10

### 1.3.1 材料 vs. 磁体级超导体

表 1.3 给出了满足特定标准的材料数量。随着标准推向磁体级，数量急剧减少。实际上，当今发现的 10000 多种超导体中，仅有几种可用于超导磁体。它们包括低温的  $NbTi$ 、 $Nb_3Sn$ ；高温的 Bi-2212、Bi-2223、涂层 YBCO 以及  $MgB_2$ 。

### 1.3.2 实验室超导体 vs. 磁体级超导体

超导材料从实验室发现到磁体级，要经过很长的一段历程。可分为六个阶段：

1. 发现；
2. 提高  $J_c$  性能
3. 与基底金属的共处理；
4. 多丝成形；
5.  $I_c > 100\text{ A}$  且长度  $> 1000\text{ m}$ ；
6. 其他要求，如强度和应力容许值。

表 1.4 给出了  $Nb_3Sn$  和 Bi-2223 的六个阶段开始的大致时间。值得注意的是，Bi-2223 最开始是与常规金属银共处理的。阶段 2 一直持续到今天。对于涂层 YBCO，目前大致处于阶段 3 晚期，即将进入阶段 4。目前已经有了使用 YBCO 制作的运行于 77K 的小线圈。2001 年发现的  $MgB_2$  已经进入阶段 5，目前已有“大”  $MgB_2$  磁体建成投运。

1961 年，发现  $Nb_3Sn$ 。尽管之后经过十多年的紧张 R&D，到现在应用于多数磁体时，仍需由用户自定制性质。因其脆性和应力承受不能超过 0.3%，在本质上是不易处理的，需要战战兢兢。BSCCO 与此情形很类似。

表 1.4:  $Nb_3Sn$  和  $Bi - 2223$  从材料到导体的发展阶段

阶段	事件	$Nb_3Sn$	$Bi - 2223$
1	发现	1950 年代早期	1980 年代晚期
2	实现短样大 $J_c$	1960 年代早期	1990 年代早期
3	与基底金属共处理	1960 年代晚期	1990 年代早期
4	多丝成形	1970 年代早期	1990 年代中期
5	$I_c \geq 100 A$ ; 长度 $\geq 1000 m$	1970 年代中期	2000 年代早期
6	其他磁体需求	1970 年代晚期	2000 年代中期

## 1.4 磁体设计

### 1.4.1 要求和关键

无论用于实验还是作为系统的组件，磁体都必须满足磁场的基本要求：规定的空间分布和时间变化特征。磁场的规格常由以下重要参数给定：1.  $H_0$ , 磁体中心 ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ) 场强; 2.  $V_0$ , 规定磁场的体积; 3.  $H(t)$ , 磁场的时变性。1 和 3, 将在第二章和第三章详细讨论。

除了满足上述基本要求，磁体设计还必须处理以下关键点：

**机械完整性** 磁体必须有足够的结构强度，承受正常运行和故障时的巨大磁场应力。

**运行可靠性** 磁体必须稳定、可靠的达到并维持于工作点。磁体的这种稳定性，一般简称为磁体稳定性。运行中磁体失去超导电性的过程叫“失超”。

**保护** 磁体一旦发生可能引起其进入正常态的事件，必须能保证不被损坏并且（能在事件解除后）能再次上电且运行在工作点上。

**导体** 对量产的磁体，超导磁体系统的费用很大程度上受超导体费用的影响。即导体费用决定磁体费用。本书很少定量处理有关多种方案经济性选择的导体费用问题，比如  $NbTi@1.8 K$ ,  $Nb_3Sn@4.2 K$ ,  $NbTi@4.2 K$ ,  $MgB_2@15 K$ 。

**制冷** 由于磁体运行需要能量来创造并维持低温环境，故制冷成为超导磁体的一个重要问题。制冷对于整个系统的重要性常被过分强调。这里必须指出，哪怕在很多超导磁体是作为关键部件的应用中，磁体不过是

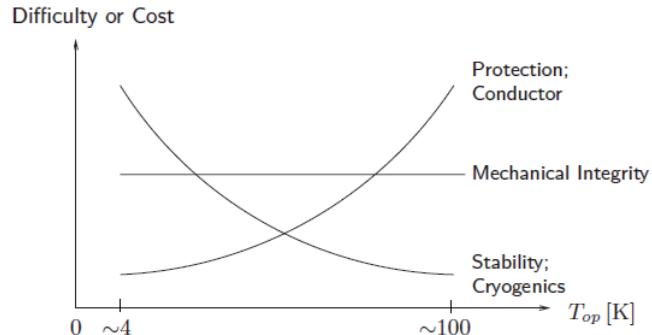


图 1.6: 温度对磁体的五个关键点的影响

整个系统的一个组件，而制冷又是磁体组件的子组件。制冷系统的功劳需求通常仅占整个系统的一个很小的份额。

磁体的终极发展目标是市场化。若想取得成功，还需要加入两个要素：  
1. 价格；2. 易用性。

#### 1.4.2 运行温度的影响

LTS 磁体的基本温度通常是 4.2 K。仅 HTS 磁体可能运行于高于 4.2 K 的温度。运行温度影响到磁体的 5 个方面：机械完整性、稳定性、保护、导体和制冷。图 1.6 给出了“难度或费用”与运行温度的定性关系。LTS 的温区通常是 1.8-10 K，HTS 的温区一般是 20-80 K。对于 LTS/HTS 混合系统，运行温度由 LTS 决定，即 <10 K。图 1.6 中，保护与导体、稳定性与制冷用同一条曲线仅表示趋势，并不代表实际上的重合。

图 1.6 表明，机械完整性的要求基本与运行温度无关。这个结论对运行温度到 100K 都是适用的。在这个温区范围内，磁体的不同材料的热膨胀都是可忽略的。对于一个给定磁场要求的磁体，必要安匝数与运行温度基本无关。因为已知的超导体都是随温度上升，临界电流密度下降。导体费用总是随温度上升而提高：降低制冷费用的期望收益一定要与导体费用的增加值作比较。运行稳定性和保护受运行温度影响较大。

## 1.5 数值解

如本书开始所指出的，超导磁体技术是跨学科的，需要精炼的机械、电气、制冷和材料领域的专业知识。其实这也意味着，一个人是不可能完成满足每一个实际磁体设计和运行参数需求的可靠的数值解的。通常，需要一个专业的团队来做成此事。

### 1.5.1 粗算解

制冷工程师或其他成员没必要对磁场专家的所有磁场计算深信不疑。制冷专家应当能够计算相对复杂条件下的大致磁场。本书的一个目标就是让设计团队的每一个成员都具备在自己领域以及其他领域进行粗算的能力。实际上，每一个新磁体系统都应这样开始：每一个成员都来对每一个重要的设计和运行参数粗算一遍。而后，磁体制造和运行的更精确的数值由组内领域专家计算。

### 1.5.2 程序解

对磁体系统的实际制造和运行，每一个设计和运行参数一般都必须采用程序辅助计算。多数设计团队使用 ANSYS、VectorFields、COMSOL。几种软件都可用于磁场、应力应变以及热的分析。专用程序，例如 GANDALF、THEA 专门用于处理 CICC 导体构成的大型磁体，特别是聚变磁体的失超发生和传播现象。失超现象包含热、流体、电暂态、电缆和工质的变化很大，热物理和电性质的变动幅度跨越 1-2 个数量级。正是这个原因，失超暂态多（有时完全是）依赖于数值仿真。数值仿真能处理非线性热发生和热传导，以及工质的热诱导的可压缩黏性流动。上述每一套程序都是基于超过 25 年的大量专家的工作。

GANDALF 和 THEA 都是商业软件。GANDALF 最初是用来分析 ITER 导体的热-流体暂态的。THEA 的主要特征是将热、流体模型扩展到多平行通道。

## 1.6 专题

### 1.6.1 问题 1.1：第 I 类超导体的热力学性质

第 I 类超导体的单位体积比热 ( $J/m^2K$ ) 由下式给出：

$$\text{超导态: } C_s(T) = aT^3 \quad (1.4a)$$

$$\text{正常态: } C_n(T) = bT^3 + \gamma T \quad (1.4b)$$

式中， $a, b, \gamma$  都是常数。

a) 证明零场时的转变温度为：

$$T_c = \sqrt{\frac{3\gamma}{a-b}} \quad (1.5)$$

可采取下列步骤：1) 熵的表达式  $C(T) = T\partial S(T)/\partial T$ ; 2) 注意到  $H = 0$  时，有  $S_n(T_c) - S_s(T_c) = 0$ 。

b) 证明  $H_{c0}$  在  $T = 0K, H_{c0} \equiv H_c(0)$  时，由下式给出：

$$H_{c0} = T_c \sqrt{\frac{\gamma}{2\mu_0}} \quad (1.6)$$

证明临界磁场  $H_c(T)$  是  $T$  的二次函数：

$$H_c(T) = H_{c0} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.7)$$

注意到零场时单位体积的吉布斯自由能关系：

$$G_n(T) - G_s(T) = \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2(T) \quad (1.8)$$

根据方程 1.8 以及  $S(T) = -\partial G(T)/\partial T$ ，可以推导出方程 1.6。

c) 证明内能密度差  $U_n - U_s$  在自场下于  $T_{ux}$  时取最大：

$$T_{ux} = \frac{T_c}{\sqrt{3}} \quad (1.9)$$

注意到，在零场时有： $U(T) = \int C(T)dT$

d) 缓慢绝热施加磁场 (初始温度为  $T_i$ ,  $0 < T_i < T_c$ )，磁场加至略大于临界值，此时相变至正常态，降低导体温度到  $T_j (< T_i)$ 。给出  $T_i$  和  $T_j$  的关系，并画出本过程的热力学相图。

e) 对于同一个初始温度为  $T_i (0 < T_i < T_c)$  的超导体，位于零场中突然施加  $H_e$ ，如果  $H_e$  超过临界值  $H_{ec}$ ，材料将被加热，证明

$$H_{ec}(T_i) = H_c(T_i) \sqrt{\frac{1 + 3(T_i/T_c)^2}{1 - (T_i/T_c)^2}} \quad (1.10)$$

### 问题 1.1 之解答

a) 由于  $C(T) = TdS(T)/dT$  以及  $S(T=0)=0$ , 我们有

$$S(T) = \int_0^T C(T)dT \quad (S1.1)$$

将 1.4代入上式, 有:

$$S_s(T) = \int_0^T \frac{C_s(T)}{T} dT = \frac{1}{3}aT^3 \quad (S1.2a)$$

$$S_n(T) = \int_0^T \frac{C_n(T)}{T} dT = \frac{1}{3}bT^3 + \gamma T \quad (S1.2b)$$

于是,

$$S_n(T) - S_s(T) = \gamma T - \frac{1}{3}(a-b)T^3 \quad (S1.3)$$

由于上面已经指出, 在  $H=0$  时, 有  $S_n(T_c) - S_s(T_c) = 0$ , 所以,

$$\gamma = \frac{1}{3}(a-b)T^2 \quad (S1.4)$$

解出  $T_c$ , 有

$$T_c = \sqrt{\frac{3\gamma}{a-b}} \quad (1.5)$$

b) 从式 1.8以及  $S(T) = -\partial G(T)/\partial T$ , 我们有

$$S_n(T) - S_s(T) = -\mu_0 H_c(T) \frac{\partial H_c(T)}{\partial T} \quad (S1.5)$$

联立 S1.3 和 S1.4, 重写  $(a-b)/3 = \gamma/T_c^2$ , 我们有

$$S_n(T) - S_s(T) = \gamma T \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (S1.6)$$

联立上面粮食, 对 T 积分, 有

$$-\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2(T) = \frac{1}{2}\gamma T_c^2 - \frac{1}{4}\gamma T_c^2 \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 + A \quad (S1.7)$$

式中, A 是常数。由于  $H_c(T=0) \equiv H_{c_0}$ , 我们有  $A = -\mu_0 H_{c_0}^2/2$ 。在  $T = T_c$  时, 由于  $H_c(T_c) = 0$ , 上式成为

$$0 = \frac{1}{2}\gamma T_c^2 - \frac{1}{4}\gamma T_c^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_{c_0}^2 \quad (S1.8)$$

解出  $H_{c_0}$ , 有

$$H_{c_0} = T_c \sqrt{\frac{\gamma}{2\mu_0}} \quad (1.6)$$

从上式, 我们可以得到

$$\gamma = \frac{2\mu_0 H_{c_0}^2}{T_c^2} \quad (S1.9)$$

联立 S1.7 和上式, 得到

$$-\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2(T) = \mu_0 H_{c_0}^2 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu_0 H_{c_0}^2 \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 - \frac{1}{2}\mu_0 H_{c_0}^2 \quad (S1.10)$$

上式可以重写为:

$$H_c^2(T) = H_{c_0}^2 \left[1 - 2\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right] = H_{c_0}^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]^2 \quad (S1.11)$$

从上式, 我们可以得到:

$$H_c(T) = H_{c_0} \left[1 - \frac{T}{T_c}\right] \quad (1.7)$$

由 1.6, 我们可以根据第一类超导体实验测得的  $\gamma$  和  $T_c$  计算预测  $H_{c_0}$ 。下表给出了通过公式计算和实测的  $\mu_0 H_{c_0}$  数据。同时还给出了一些其他实测数据。

表 1.5:  $H_{c_0}$ : 公式 1.6 计算值和实测值

超导体	$\rho[\text{g}/\text{cm}^3]$	$M[\text{g}/\text{mole}]$	$\gamma[\text{J}/\text{m}^3\text{K}^2]$	$T_c[\text{K}]$	$\mu_0 H_{c_0}$ 计算	$\mu_0 H_{c_0}$ 实测
Ti	4.53	47.88	316.8	0.39	5.6	10.0
Zr	6.49	91.22	199.2	0.55	6.1	4.7
Zn	7.14	65.38	69.8	0.85	5.6	5.4
Al	2.70	26.98	135.1	1.18	10.9	10.5
In	7.31	114.8	107.6	3.41	28.0	28.1
Sn	7.31	118.7	109.6	3.72	30.9	30.5
Hg	13.55	200.6	120.9	4.15	36.2	41.1
V	6.11	50.94	1111	5.38	142.7	140.3
Pb	11.35	207.2	163.2	7.19	72.8	80.3

c) 由零场时的  $dU(T) = C(T)dT$ , 我们可以得到

$$U(T) = \int_0^T C(T)dT \quad (S1.12)$$

代入式 1.4, 得到

$$U_n(T) = \int_0^T (bT^3 + \gamma T) dT = \frac{1}{4}bT^4 + \frac{1}{2}\gamma T^2 \quad (\text{S1.13a})$$

$$U_s(T) = \frac{1}{4}aT^4 \quad (\text{S1.13b})$$

两个自由能的差表示为:

$$\begin{aligned} U_n(T) - U_s(T) &= \frac{1}{4}(b-a)T^4 + \frac{1}{2}\gamma T^2 \\ &= \left(\frac{a-b}{4}\right) \left[\frac{2\gamma}{a-b}T^2 - T^4\right] \end{aligned} \quad (\text{S1.14})$$

对上式微分, 并在  $T = T_{ux}$  处令其为零, 有:

$$\frac{d(U_n - U_s)}{dT} \Big|_{T_{ux}} = \frac{a-b}{4} \left[ \frac{4\gamma}{a-b} T_{ux} - 4T_{ux}^3 \right] = 0 \quad (\text{S1.15})$$

于是

$$\frac{4\gamma}{a-b} T_{ux} - 4T_{ux}^3 = 0 \quad (\text{S1.16})$$

利用 1.5, 解出  $T_{ux}$ , 可得

$$T_{ux} = \sqrt{\frac{\gamma}{a-b}} = \frac{T_c}{\sqrt{3}} \quad (1.9)$$

d) 由于这个过程是绝热和可逆的, 那么如果场是缓慢施加的, 有  $S_n(T) = S_s(T)$ 。从 S1.2 可以得到

$$S_n(T_f) - S_s(T_i) = \frac{1}{3}bT_f^3 + \gamma T_f - \frac{1}{3}aT_i^3 \quad (\text{S1.17})$$

由  $S_n(T_f) - S_s(T_i) = 0$ , 我们得到关于  $T_f$  和  $T_i$  的表达式

$$\frac{1}{3}bT_f^3 + \gamma T_f = \frac{1}{3}aT_i^3 \quad (\text{S1.18})$$

从 1.5, 我们有

$$b = a - \frac{3\gamma}{T_c^2} \quad (\text{S1.19})$$

联立上面两式, 有

$$\frac{1}{3}a(T_f^3 - T_i^3) = -\gamma T_f \left[ 1 - \left( \frac{T_f}{T_c} \right)^2 \right] \quad (\text{S1.20})$$

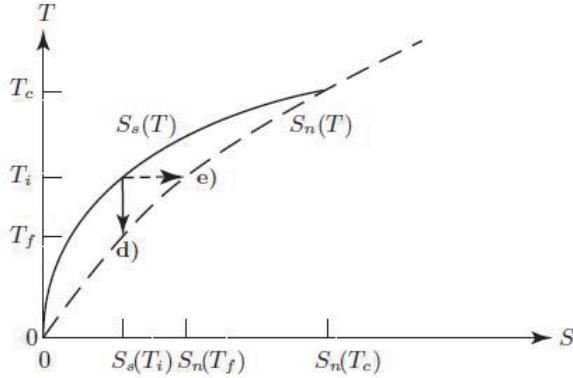


图 1.7: 超导态(实线)和正常态(虚线)的 T-S 图

由于  $T_f < T_c$ , 上式的右侧是负值, 于是可知  $T_f < T_i$ 。图 1.7 给出了超导态(实线)和正常态(虚线)的 T-S 图。 $T_i \rightarrow T_f$  转变在途中用竖实线表示。

e) 超导体被加热,首先必须先进入正常态。外场需提供磁场能  $\mu_0 H_c^2(T_i)/2$ 。由于转变过程要吸热  $T_i[S_n(T - i) - S_s(T_i)]$ , 故还必须提供吸收能  $H_{ec}$ 。图 1.7 中的虚横线就是转变过程。于是,

$$\frac{1}{2}\mu_0 H_{ec}^2(T_i) = \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2(T_i) + T_i[S_n(T - i) - S_s(T_i)] \quad (S.1.21)$$

上式和 S1.1 联立, 得到

$$\frac{1}{2}\mu_0 H_{ec}^2(T_i) = \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2(T_i) + T_i\left[\frac{1}{3}(b-a)T_i^3 + \gamma T_i\right] \quad (S1.22)$$

把 S1.9 代入上式, 并应用 S1.19, 得到

$$\frac{1}{2}\mu_0 H_{ec}^2(T_i) = \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2(T_i) + 2\mu_0 H_{c0}^2 \left(\frac{T_i}{T_c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T_i}{T_c}\right)^2\right] \quad (S1.23)$$

联立式 1.7, 得到

$$H_{ec}^2(T_i) = H_c^2(T_i) + 4H_c^2(T_i) \frac{(T_i/T_c)^2}{1 - (T_i/T_c)^2} \quad (S1.24)$$

于是

$$H_{ec}(T_i) = H_c(T_i) \sqrt{\frac{1 + 3(T_i/T_c)^2}{1 - (T_i/T_c)^2}}$$

由于  $H_c(T_c) = 0$ , 可知  $H_{ec}(T_c) = 0$ ; 另有  $H_{ec}(T_i) \geq H_c(T_i)$ 。

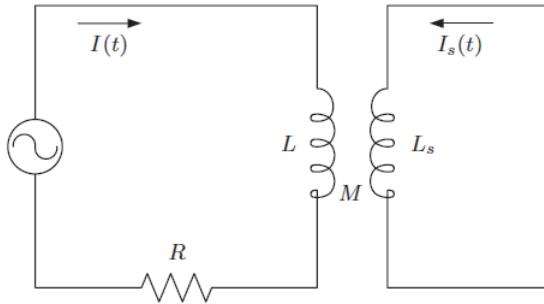


图 1.8: 超导线圈回路与一个带有电流源的回路通过电感耦合

### 1.6.2 问题 1.2: 超导回路

本问题表明不可能通过外施电流源的方法在闭合超导回路、线圈或盘中产生持续电流。此处用电路模型证明, 参数如图 1.8。

- 写出两个回路的电路方程。
- 解出  $I_s(t)$ , 证明以一个开始和最后都是 0 的  $I(t)$  ( $I(t = 0) = I(t = \infty) = 0$ ) 不能建立起闭合回路的电流。闭合超导回路可能是一个通过超导部件连接了引线的磁体、超导饼、超导盘。

#### 问题 1.2 之解答

- 两个电压方程为

$$L \frac{dI(t)}{dt} + M \frac{dI_s(t)}{dt} + RI = 0 \quad (S2.1a)$$

$$M \frac{dI(t)}{dt} + L_s \frac{dI_s(t)}{dt} = 0 \quad (S2.1b)$$

- 从 S2.1b 中可以解得

$$I_s(t) = -\frac{M}{L_s} I(t) + C \quad (S2.2)$$

因为  $I_s(t = 0) = 0$ , 所以,  $C = 0$ 。由于  $I(t = 0) = I(t = \infty) = 0$ , 所以仅在  $I(t) \neq 0$  时有  $I_s(t) \neq 0$ 。也即, 在无外电流源也无初始值的超导回路不能孤立的维持能量。

在一个超导回路中不能产生感应电流在某些应用中是有实际意义的。持续运行模式的磁体必须通过引线通入电流充电 (处于驱动模式)。此后, 通

过所谓的“超导开关”(persistent current switch, PCS)将引线短路, 电流源可以去掉。

### 1.6.3 问题 1.3: 磁共振成像 (MRI)

超导磁体最成功的商业应用之一便是医疗诊断装置, 特别是 MRI。以下是磁体工程师需要了解的一些基本问题:

- a) MRI 中, 为什么  $H^1$ 、 $N^{14}$  核可以被探测到, 而  $C^{12}$ 、 $O^{16}$  探测不到?
- b) 如果频率分辨率是 10 Hz, 对于 1T 全身 MRI 磁体的中心磁场均匀性最小要求多少? 对全身 MRI 磁体, 室温孔直径 80 cm, 这个均匀场区域通常在 25 cm DSU (直径半球体积)。
- c) MRI 单元中, 脉冲梯度磁体的作用?
- d) 对 1T 磁体单元, 脉冲磁体产生的典型  $\frac{d\vec{B}}{dz}$  是多少?

#### 问题 1.3 之解答

- a) 有奇数质子或中子的原子核存在净角动量。处于磁场中, 原子核按某种正比于磁场强度的特定频率 (Larmor) 进动。比如氢的 Larmor 频率在 1T 时是  $42.576 MHz$ 。表 1.6\*给出了几种物质原子的数据。

表 1.6: 几种元素的原子核数据

原子序数	元素	原子质量	质子数	中子数	可探测?
1	氢	1	<b>1</b>	0	是
6	碳	12	6	6	否
6	碳	13	6	<b>7</b>	是
7	氮	14	<b>7</b>	<b>7</b>	是
8	氧	16	8	8	否
11	钠	23	<b>11</b>	12	是
15	磷	31	<b>15</b>	16	是

- b) 由于  $10 Hz$  相当于  $42.576 \times 10^6 Hz$  的  $0.23 \times 10^{-6}$ , 所以磁场必须是 1T 的  $0.23 \times 10^{-6}$ , 大约是 0.002 gauss。作为对比, 地磁场约为 0.7 gauss。
- c) 通过引入特定的空间磁场分布, 我们可以限制在某个制定区域产生共振。这让我们可以对某一个特定核素进行成像。

\*加粗的数字表示可探测

d) 梯度幅值直接和成像的空间解析度相关。更高的梯度可以同比例产生更好的解析度。但存在一个磁体和患者可以忍受的极限问题。医用 MRI 必须限制梯度强度——至少应限制梯度偏斜率——以避免产生对神经和肌肉的刺激。医用 MRI 的最大梯度约为  $3 - 4 \text{ gauss/cm}$ , 最大场偏斜率约为  $12 (\text{gauss/cm})/\text{ms}$  或者  $120 (\text{T/m})/\text{s}$ 。



## 第二章 电磁场

### 2.1 引言

本章我们通过 Maxwell 方程组来回顾电磁理论。这个回顾是为了“唤起”读者对电磁理论的理解，以便本书的主题——超导磁体——可以用量化的方式展开。之后，给出了几个在的大多数磁体应用中用得到，并可以用解析方法进行分析的特例，作为专题研究材料。

### 2.2 Maxwell 方程

Maxwell 方程组包括四个基本方程：1) Gauss 定律；2) Ampere 定律；3) Faraday 定律；4) 磁通连续定律。此外，我们还会常用到电荷守恒方程和其他本构关系。以下简要的逐一讨论。

本书中如非指明，电磁量都采用 SI 单位（表 2.1）。磁体界常常将磁场强度  $\vec{H}$  和磁通密度（或磁感应强度） $\vec{B}$  混用，尽管这个做法无伤大雅，也基本不会导致混淆，但我们应该提起注意，比如从  $M vs. \vec{H}$  图计算能量的时候。

自由空间的磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ ；自由空间磁导率  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ ，近似值为  $8.85 \times 10^{-12} F/m$ 。附录 IA 给出了其他物理常数及部分常用非 SI 单位到 SI 单位的转换因子。

电流密度是超导磁体磁场  $\vec{H}$  的主要源。故相对较小的时变  $\vec{D}$  场对  $\vec{H}$  的贡献在本章的 Maxwell 方程中并未包括进来。

表 2.1: 电磁量

符号	名称	SI 单位
$E$	电场	[V/m]
$H$	磁场	[A/m]
$B$	磁感应强度	[T]
$J$	电流密度	[A/m <sup>2</sup> ]
$K$	面电流密度	[A/m]
$\rho_c$	电荷密度	[C/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_c$	面电荷密度	[C/m <sup>2</sup> ]
$\rho_e$	电阻	[\Omega m]

### 2.2.1 电场 Gauss 定律

积分形式的自由空间的电场 Gauss 定律为:

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho_c dV \quad (2.1)$$

$\epsilon_0 \vec{E}$  场的面积分等于表面 S 围成的体积 V 内的净电荷量。式 2.1 中,  $d\vec{A} = \vec{n} dS$ , 其中  $\vec{n}$  是表面元上指向外向的单位法矢量。从 2.1 得微分形式:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_c \quad (2.2)$$

**边界条件:** 在电荷密度为  $\sigma_c [C/m^2]$  的面上, 从区域 1 到区域 2 的电场法向分量不连续:

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma_c / \epsilon_0 \quad (2.3)$$

式中, 单位矢量  $\vec{n}_{12}$  从区域 1 指向区域 2。

### 2.2.2 Ampere 定律

积分形式的 Ampere 定律为:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_f d\vec{A} \quad (2.4)$$

方程表明,  $\vec{H}$  场的线积分等于 C 围成的面 S 内的总的“自由”电流, 即不含有磁化电流。微分形式:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad (2.5)$$

上述两个方程都没有计入  $\vec{H}$  的另一个可忽略的源:  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  边界条件: 如果存在“自由”面电流密度  $\vec{K}_f [A/m]$ , 则通过区域 1 到区域 2 的磁场在切向不连续, 满足:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_f \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Faraday 定律

积分形式的 Faraday 定律为:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.7)$$

方程表明,  $\vec{E}$  场的线积分等于由 C 围成的面 S 内的总磁通对时间变化的负值。微分形式:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

边界条件: 通过区域 1 到区域 2 的  $\vec{E}$  场的切向分量总是连续的:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.9)$$

### 2.2.4 磁通连续性

积分形式磁通连续性方程为:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.10)$$

方程表明,  $\vec{B}$  场在表面 S 上的面积分为 0, 即  $\vec{B}$  场无点源。微分形式:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.11)$$

边界条件: 通过区域 1 到区域 2 的  $\vec{B}$  场的法向分量是连续的, 即:

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.12)$$

下文会谈到, 在磁介质中,  $\vec{B}$  是磁场强度  $\vec{H}$  和磁化强度  $\vec{M}$  之叠加。这意味着不论两种介质的磁化是多么不同,  $\vec{B}$  场在两种介质中的法向分量连续性都可以保持。

### 2.2.5 电荷守恒

“自由”电流密度  $\vec{J}_f$  与“自由”电荷密度  $\rho_{cf}$  的时变率有关。积分形式为：

$$\oint_S \vec{J}_f \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{cf} dV \quad (2.13)$$

微分形式为：

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_{cf}}{\partial t} \quad (2.14)$$

### 2.2.6 本构关系

磁感应强度  $\vec{B}$ ，磁场强度  $\vec{H}$  和磁化强度  $\vec{M}$  的关系为：

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.15)$$

在同质、各向同性、线性介质（本书通常以此设定为前提）中， $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$ 。式中的磁导率  $\mu$  和磁化系数  $\chi$  我们一般假定其与磁场无关。铁磁材料如“高  $\mu$ ”屏蔽材料的  $\chi$  可高达  $10^6$ 。典型的顺磁材料，例如氧， $\chi = 10^{-6}$ ；抗磁材料如单原子气体、多数液体的磁化系数是负值。第 I 类超导体具有完全抗磁性，有  $\chi = -1, \mu = 0$ 。

导体材料如金属中，电场  $\vec{E}$  会激发出电流密度  $\vec{J}$ ，其关系为

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho_e} \quad (2.16)$$

式中， $\rho_e$  是金属的电阻率 [ $\Omega m$ ]。

## 2.3 准静态

电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{B}$  通过法拉第定律耦合在一起。自由空间里，必须解如下的完整方程组：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} &= \rho_c \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J}_f &= -\frac{\partial \rho_{cf}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.17)$$

如果电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{B}$  能够解耦，将大大简化解方程组 2.17 的难度。“准静态”分析可以满足很多重要的实际应用。最简单的做法就是先解静态方程，即  $0^{th}$  阶近似：

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho_c \quad (2.18a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.18b)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad (2.18c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.18d)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = 0 \quad (2.18e)$$

以  $0^{th}$  阶电场  $\vec{E}$  为例，可以独立于  $\vec{H}$  解出。稍复杂的，感生场相比于初始的时变场是可以忽略的。此时，可取准静态的  $1^{st}$  阶近似：

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho_{c1} \quad (2.19a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B_0}{\partial t} \quad (2.19b)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{f1} + \epsilon_0 \frac{\partial E_0}{\partial t} \quad (2.19c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.19d)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_{c0}}{\partial t} \quad (2.19e)$$

注意到此时的  $\vec{E}_1$  仍是和  $\vec{H}_1$  无关的。一般而言，由电源给出的  $\vec{J}_f$  仅有  $\vec{J}_{f0}$  分量。在金属中， $\vec{J}_{f1} = \vec{E}_1 / \rho_e$ 。

上述的近似过程可以无限的进行下去，但是对于低频情况，解出  $0^{th}$  阶和  $1^{st}$  阶就够了。

## 2.4 Poynting 矢量

Poynting 定理可用下式表示：

$$-\nabla \cdot \vec{S} = p + \frac{dw}{dt} \quad (2.20)$$

式中， $\vec{S}[W/m^2]$  是 Poynting 矢量，定义为  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ ， $p$  是功率耗散密度， $w$  是以电磁能存储的能量密度。

方程表明， $S$  矢量的散度的负值等于  $p$ (能量耗散密度与产生密度之差) 与  $dw/dt$ (能量存储密度的变化率) 之和。如果  $\nabla \cdot \vec{S} = 0$ ，表明系统内能量

处于平衡态，流入和流出相等；如果  $\nabla \cdot \vec{S} < 0$ ，表明有能量流入系统，在系统内要么被耗散，要么被存储。

### 简谐情况

处理简谐时变电场  $\vec{E}$  时，有  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$  以及  $\vec{J} = (\vec{E}/\rho_e) e^{j\omega t}$ 。此时，时均功率耗散密度  $\langle p \rangle$  写成：

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* = \frac{1}{2\rho_e} |\vec{E}|^2 = \frac{\rho_e}{2} |\vec{J}|^2 \quad (2.21)$$

式中， $\vec{J}^*$  是  $\vec{J}$  的共轭量。

简谐条件下， $S$  矢量写成如下形式：

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (2.22a)$$

$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = \langle P \rangle + j2\omega (\langle E_m \rangle - \langle E_e \rangle) \quad (2.22b)$$

式中， $\langle P \rangle [W]$ ， $\langle E_m \rangle [J]$ ， $\langle E_e \rangle [J]$  分别是总能耗、磁场能、电场能。每一个时均量都是通过体积分得到的：

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2\rho_e} \int_V |\vec{E}|^2 dV \quad (2.23a)$$

$$\langle E_m \rangle = \frac{\mu_0}{4} \int_V |\vec{H}|^2 dV \quad (2.23b)$$

$$\langle E_e \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \int_V |\vec{E}|^2 dV \quad (2.23c)$$

复数形式的 Poynting 矢量  $\vec{S}$  拓展到 1<sup>st</sup> 阶，表示为：

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* + \vec{E}_0 \times \vec{H}_1^* \vec{E}_1 \times \vec{H}_0^*) \quad (2.24)$$

## 2.5 场的标量势解法

静电场因其旋度为零 ( $\nabla \times \vec{E} = 0$ )，是保守场。故存在一个标量势，满足：

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi = -\nabla\phi \quad (2.25)$$

于是， $\nabla \cdot \vec{E}$  可以写为：

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla^2\phi \quad (2.26)$$

若无电荷密度存在，即  $\rho_c = 0$ ，方程 2.2 可约化为：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.27)$$

进而，可以得到：

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.28)$$

方程 2.28 即所谓的 Laplace 方程，给出了使用标量势求解矢量  $\vec{E}$  的方法。

类似的，在直流条件下，若无自由电流存在，则有  $\nabla \times \vec{H} = 0$ ，磁场  $\vec{H}$  也可以写成标量势 Laplace 方程，即  $\vec{H} = -\nabla \phi$ 。在电磁领域之外，Laplace 方程也有广泛的应用。

下面将讨论二维圆柱坐标和三维球坐标下的 Laplace 方程。

### 2.5.1 二维柱坐标

二维柱坐标  $(r, \theta)$  下的电势满足：

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.29)$$

解方程 2.29 的标准做法是将  $\phi$  表示为两个函数的乘积，每一个函数仅含一个坐标：

$$\phi = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.30)$$

可解出方程 2.29 的通解：

$$\text{对于 } n=0, \phi_0 = (A_1 \ln r + A_2)(C_1 \theta + C_2) \quad (2.31a)$$

$$\text{对于 } n>0, \phi_n = (A_1 r^n + A_2 r^{-n})(C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta) \quad (2.31b)$$

其中， $A_1, A_2, C_1, C_2$  都是常数。

#### 特例

**n=0** 最简单的情况。场量在空间上仅依赖于  $1/r$ 。满足这个条件的示例包括线电荷 ( $\lambda = 2\pi\epsilon_0$ ) 产生的电场以及线电流 ( $I = 2\pi$ ) 产生的磁场。这样，由  $[\phi_0]_E = \ln r$  可以得到  $\vec{E} = \frac{\vec{z}}{r}$ ；由  $[\phi_0]_H = \theta$  可以得到  $\vec{E} = \frac{\vec{i}_\theta}{r}$ 。不难看出，场强在远离源时，以  $1/r$  衰减。

**n=1** 电势  $\phi_1 = \sin \frac{\phi}{r}$  和  $\phi_{1'} = \cos \theta/r$  与二维电/磁偶电场/磁场相联系。注意到两种形式在原点处 ( $r=0$ ) 都有奇点，故它们通常用于表示不含原点的偶极子场。究竟是选  $\sin$  还是  $\cos$ ，取决于坐标系中场的取向。此外， $\phi'_1 = r \sin \phi$  和  $\phi'_{1'} = r \cos \theta$  与均匀矢量场有关。

**n=2** 电势  $\phi_2 = \cos 2\theta/r^2$  和  $\phi'_2 = r^2 \cos 2\theta$  与二维四极电场相联系。前者在原点有奇点，仅用于不含原点的空间；后者可用于有限远内的所有空间。第三章会研究理想四极磁体。

### 2.5.2 球坐标

球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  下的势方程：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

类似的， $\phi$  可以写成三个各仅含一个坐标的函数乘积的形式：

$$\phi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (2.33a)$$

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \quad (2.33b)$$

$$\Theta(\theta) = C P_n^m(\cos \theta), (m \leq n) \quad (2.33c)$$

$$\Phi(\varphi) = D_1 \sin m\varphi + D_2 \cos m\varphi \quad (2.33d)$$

其中， $A_1, A_2, C, D_1, D_2$  都是常数。 $P_n^0(\cos \theta)$ ，或者其简写  $P_n(\cos \theta)$ ，就是所为的 Legendre 函数。它在设计空间部分均匀的螺管磁体时很有用，设计阶段可以假定场关于 z 轴 ( $\theta = 0$ ) 对称。 $P_n^m(\cos \theta)$ ，被称为伴随 Legendre 函数。它在最小化一个实际螺管磁体的设计“误差”时很有用。后面给出了一些有代表性的 Legendre 函数的表达式。

#### 特例

**n=0, m=0** 最简单的情况， $\phi_0 \propto 1/r$ 。一个熟知的例子是点电荷 ( $4\pi\epsilon_0$ ) 产生的电场  $\vec{E} = 1/r^2 \vec{i}_r$  ( $r > 0$ )。

**n=1, m=0** 有两个解，分别是  $\phi_1 \propto \cos \theta/r^2$  和  $\phi'_1 \propto r \cos \theta$ 。前者表示球外的偶极场，该场由球面上的电荷产生；后者是球内的均匀场。磁矩的偶极场亦可由  $\phi_1$  导出。

### 2.5.3 正交坐标系下的微分算符

下面将给出四个矢量微分算符——grad ( $\nabla$ )、div ( $\nabla \cdot$ )、curl ( $\nabla \times$ )、div grad ( $\nabla^2$ ) ——在正交坐标系下的表达式。

#### 笛卡尔坐标

三个正交坐标是:  $x, y, z$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i}_z \quad (2.34a)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.34b)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{i}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{i}_z \quad (2.34c)$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.34d)$$

#### 柱坐标

三个正交坐标是:  $r, \theta, z$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{i}_z \quad (2.35a)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.35b)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{i}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{i}_\theta \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{i}_z \end{aligned} \quad (2.35c)$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2.35d)$$

### 球坐标

三个正交坐标是:  $r, \theta, \varphi$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi \quad (2.36a)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (2.36b)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{i}_r \\ & + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{i}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{i}_\varphi \end{aligned} \quad (2.36c)$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (2.36d)$$

#### 2.5.4 Legendre 函数

方程 2.33c 中的  $P_n^m(\cos \theta)$  在  $m = 0$  时被称为 n 阶 Legendre 函数, 即  $P_n^0(\cos \theta) \equiv P_n(\cos \theta) \equiv P_n(u)$  (此处令  $u = \cos \theta$ )。在  $1 \leq m \leq n$  时, 被称为伴随 Legendre 函数。 $P_n^m(\cos \theta) \equiv P_n^m(u)$  满足下面的微分方程:

$$\frac{d}{du} [(1-u^2) \frac{dv}{du}] + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}] v = 0 \quad (2.37)$$

如前所述,  $P_n(u)$  在解具有一定相对对称性的磁场 (比如理想螺管) 时特别有用。 $P_n^m(u)$  则在实际螺管 (不完全、缺少旋转对称性) 分析中十分有用。

$$P_n(u) = \left( \frac{1}{2^n n!} \right) \frac{d^n (u^2 - 1)^n}{du^n} \quad (2.38a)$$

$$P_n^m(u) = (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(u)}{du^m} \quad (2.38b)$$

$$= \left[ \frac{(1-u^2)^{m/2}}{2^n n!} \right] \frac{d^{m+n} (u^2 - 1)^n}{du^{m+n}} \quad (2.38c)$$

几个有用的 Legendre 函数以及伴随 Legendre 函数的递归形式如下:

$$(n+1)P_{(n+1)}(u) - (2n+1)uP_n(u) + nP_{(n-1)}(u) = 0 \quad (2.39a)$$

$$(n+1-m)P_{n+1}^m(u) - (2n+1)uP_n^m(u) + (n+m)P_{n-1}^m(u) = 0 \quad (2.39b)$$

$$P_n^{m+2}(u) - \frac{2(m+1)u}{\sqrt{1-u^2}} P_n^{m+1} + (n-m)(n+m-1)P_n^m(u) = 0 \quad (2.39c)$$

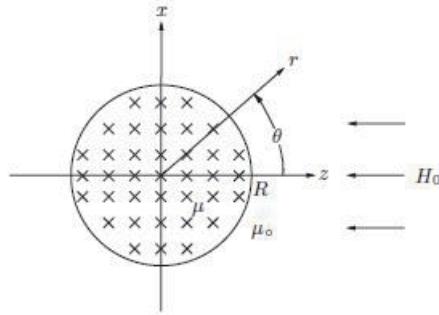


图 2.1: 均匀场中的磁性球

下面的几张表给出了常用的 Legendre 函数。

原书表 2.2-2.4 手工敲表很费劲，打算放到附录中。

## 2.6 专题

### 2.6.1 问题 2.1：均匀场中的磁化球

本题处理一个置于均匀外磁场中的磁性球问题。由于背景场是均匀的，故球的净受力为 0。

如图 2.1 所示，磁性球的半径是  $R$ ，磁导率是  $\mu$ ，外磁场为

$$\vec{H}_\infty = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.40)$$

a) 证明磁性球内 ( $B_2$ )、外 ( $B_1$ ) 的磁感应强度分别为：

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_0 H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \\ &+ \mu_0 \left( \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0 + \mu} \right) H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \end{aligned} \quad (2.41a)$$

$$B_2 = \frac{3\mu_0 \mu H_0}{2\mu_0 + \mu} (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.41b)$$

考虑以下极限情况： $\mu/\mu_0 = 0, \mu/\mu_0 = 1, \mu/\mu_0 = \infty$ 。确认结果表达式在球内是有物理意义的。

b) 在头脑中画出  $\mu = 0.1\mu_0, \mu = 100\mu_0$  时  $\vec{B}$  的场分布，然后和图 2.2 对照。

### 问题 2.1 之解答

a) 本题用标量势来解是最简单的。磁标量势表示为

$$\vec{H} = -\nabla\phi \quad (S1.1)$$

对线性、各向同性介质，磁场和磁感应强度的关系为

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (S1.2)$$

问题可以分为两个区域：区域 1 ( $r \geq R$ ) 和区域 2 ( $r \leq R$ )。因为在  $r = \infty$  时， $H_\infty = H_0$ ，在  $r = 0$  时， $H \neq \pm\infty$ ，每个区域的标量势可选为：

$$\phi_1 = H_0 r \cos\theta + \frac{A}{r^2} \cos\theta \quad (S1.3a)$$

$$\phi_2 = Cr \cos\theta \quad (S1.3b)$$

注意到，在  $r \rightarrow \infty$  时， $\phi_1 \rightarrow H_0 r \cos\theta$ ；在  $r = 0$  时， $\phi_2$  是有限的。应用  $\nabla$  算符，有：

$$\vec{H}_1 = H_0(-\cos\theta\vec{i}_r + \sin\theta\vec{i}_\theta) + \frac{A}{r^3}(2\cos\theta\vec{i}_r + \sin\theta\vec{i}_\theta) \quad (S1.4a)$$

$$\vec{H}_2 = C(-\cos\theta\vec{i}_r + \sin\theta\vec{i}_\theta) \quad (S1.4b)$$

#### 边界条件

1) 在  $r = R$  处， $\vec{H}$  的切向分量连续，故无表面电流。这等价于在  $r = R$  时，有  $\phi_1 = \phi_2$ ：

$$H_0 + \frac{A}{R^3} = C \quad (S1.5)$$

2) 在  $r = R$  处， $\vec{B}$  的法向连续：

$$\mu_0 \left( -H_0 + 2\frac{A}{R^3} \right) = -\mu C \quad (S1.6)$$

从 S1.5 和 S1.6 式，解出 A 和 C 两个常数：

$$C = \frac{3H_0\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \quad (S1.7)$$

$$A = (C - H_0)R^3 = H_0 \left( \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0 + \mu} \right) R^3 \quad (S1.8)$$

于是， $\vec{B}_1$  和  $\vec{B}_2$  可写为：

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 = & \mu_0 H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \\ & + \mu_0 \left( \frac{\mu_0 - \mu}{2\mu_0 + \mu} \right) H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta)\end{aligned}\quad (2.41a)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{3\mu_0 \mu H_0}{2\mu_0 + \mu} (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.41b)$$

下面，我们考虑三种  $\mu/\mu_0$  的三种特例。

**特例 1:**  $\mu/\mu_0 = 0$

将  $\mu = 0$  代入 2.41 式，可得

$$\vec{B}_1 = \mu_0 H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) + \frac{\mu_0 H_0}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (S1.9a)$$

$$\vec{B}_2 = 0 \quad (S1.9b)$$

这个球像第 I 类超导体。球内不允许有磁通密度存在 (Meissner 效应)。问题 2.2 将会讨论到， $\vec{H}$  在  $r = R$  处的  $\theta$  分量不连续将要求存在表面电流 (被限制在一个薄层内)。因为这个电流一旦建立起来，会一直流下去，这就表明了球对电流是无电阻的。如第一章所言的，存在 Meissner 效应的材料必须同时是理想导体：那这种材料其实就是超导体。

**特例 2:**  $\mu/\mu_0 = 1$

这时问题退化为平凡解，即等价于没有球的存在。代入方程 2.41，两个方程将变成同一个。

**特例 3:**  $\mu/\mu_0 = \infty$

这时表示的是一个理想铁磁材料。软铁的性质与此接近。磁场被“吸”如球内，代入 2.41 中，有

$$\vec{B}_1 = \mu_0 H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) - \mu_0 H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^3 (2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (S1.10a)$$

$$\vec{B}_2 = 3\mu_0 H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (S1.10b)$$

可见，球内的磁感应强度是外施磁场的 3 倍。注意到，如果球存在磁化饱和，则  $\mu$  不再是  $\infty$ 。所有磁性材料都存在的磁场饱和效应将在问题 4 中讨论。

b) 图 2.2 给出了  $\mu/\mu_0 = 0.1$  和  $\mu/\mu_0 = 100$  两种情况下的磁场线。

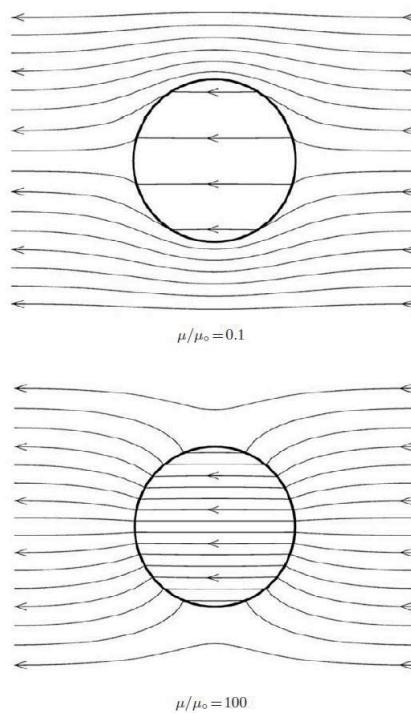


图 2.2: 两种特例下球内和球附近的磁场线。上球在无穷远处的磁场线密度是球内的 2.6 倍; 下球仅为 1.7 倍

### 2.6.2 问题 2.2：均匀场中的第 I 类超导棒

本题处理第 I 代超导体的 Meissner 效应，并用 London 超导理论对结果进行解释。图 2.3 给出了无限长、圆截面（半径  $R$ ）的 Pb 棒，置于垂直于轴向的均匀外磁场中。

$$\vec{H}_\infty = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.40)$$

式中， $\mu_0 H_0 = 0.08$  T。初始状态，棒处于正常态，于是磁场在棒的内外是处处相同的。棒逐步冷却至超导态。

a) 证明在外磁场暂态效应消失后，棒外场的表达式为

$$\vec{H}_1 = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) + H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.42)$$

b) 证明在穿透深度  $\lambda \ll R$  内的电流密度  $K_f$ [A/m] 的表达式为

$$\vec{K}_f = 2H_0 \sin \theta \vec{i}_z \quad (2.43)$$

c) 将表面电流密度幅值转换为（体）电流密度  $J_f$ [A/m<sup>2</sup>]。证明用 London 超导理论导出的电流密度值和这个值是一致的。

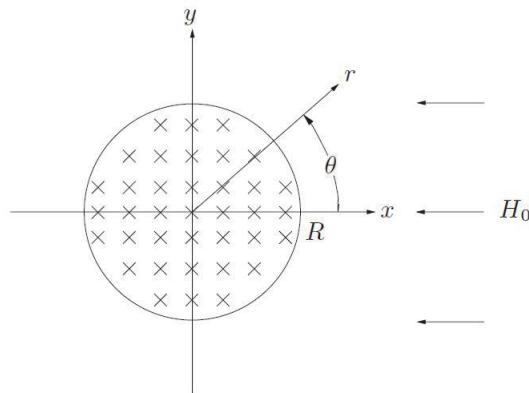


图 2.3: 无限长、圆截面超导棒置于均匀磁场中。

#### 问题 2.2 之解答

a) 问题可以分为两个区域：区域 1( $r \geq R$ ) 和区域 2( $r \leq R$ )。因为我们处理的是第 I 类超导体，也即圆棒超导时有  $\vec{B}_2 = 0(\phi_2 = 0)$ 。区域 1 的场

可由势函数导出:

$$\phi_2 = H_0 r \cos \theta + \frac{A}{r} \cos \theta \quad (S2.1)$$

注意到, 当  $r \rightarrow \infty$  时,  $\phi_1 \rightarrow H_0 r \cos \theta$ 。

在圆柱坐标系下使用  $\nabla$  算符, 可以得到  $\vec{H}$ :

$$\vec{H}_1 = -\frac{\partial}{\partial r}(H_0 r \cos \theta + \frac{A}{r} \cos \theta) \vec{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(H_0 r \cos \theta + \frac{A}{r} \cos \theta) \vec{i}_\theta \quad (S2.2)$$

$$= -(H_0 \cos \theta + \frac{A}{r^2} \cos \theta) \vec{i}_r - (-H_0 \sin \theta - \frac{A}{r^2} \sin \theta) \vec{i}_\theta \quad (S2.3)$$

整理 S2.3 式, 可得

$$\vec{H}_1 = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) + \frac{A}{r^2}(\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (S2.4)$$

$B$  法向分量的连续性要求 S2.3 中  $\vec{i}_r$  的系数在  $r = R$  处为零:

$$-H_0 + \frac{A}{R^2} = 0 \quad (S2.5)$$

解出上式, 得

$$A = R^2 H_0 \quad (S2.6)$$

于是, 超导圆棒外的场 (区域 1) 可以写为:

$$\vec{H}_1 = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) + H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.42)$$

注意到, 在  $r = R, \theta = 90^\circ$  时,  $|\vec{H}_1| = 2H_0$ ; 也即此处的幅值是远场的两倍。物理上看, 圆棒处于正常态时场本是在其内部的, 进入超导态后, 场被“推”出, 挤压在  $\theta = 90^\circ$  附近。

b) 因为  $2H_0 \sin \theta$  中的  $\vec{H}$  在  $r = R$  处的切向分量不连续, 所以肯定存在表面电流密度  $\vec{K}_f$  流过超导棒。我们有:

$$\vec{K}_f = \vec{i}_r \times 2H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta = 2H_0 \sin \theta \vec{i}_z \quad (2.43)$$

这个正弦电流分布式高能物理设施中被称为“核粒子加速器”内所用的大多数双极磁体的基础。

c) 根据超导电性的 London 理论, 第 I 类超导体的超导电流密度  $J_s$  由  $J_s = en_{se}v$  给出。其中,  $e$  是电荷量 ( $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C),  $n_{se}$  是超导电子的密度,  $v$  是超导电子的漂移速度。超导电子的密度大致上等于自由电子的密度:

$$n_{se} \simeq n_{fe} = \frac{\rho N_A}{W_A} \quad (1.2)$$

对于铅,  $\rho = 11.4 \text{ g/cm}^3; N_A = 6.023 \times 10^{23}; W_A = 207.2 \text{ g/mole}$ , 我们得到单位体积的电子数量:

$$n_{se} = \frac{11.4 \times 6.023 \times 10^{23}}{207.2} \simeq 3.3 \times 10^{28} \text{ electron/m}^3 \quad (\text{S2.7})$$

超导电子的漂移速度约为 200 m/s, 于是我们可以得到  $J_s$  的量级:

$$J_s = en_{se}v \sim 1.6 \times 10^{-19} \times 3.3 \times 10^{28} \times 200 \sim 1 \times 10^{12} \text{ A/m}^2$$

在上述铅圆柱棒所要求的表面电流密度 ( $K_f = J_f\lambda$ ) 下,  $J_f$  应大致上与  $J_s$  相等, 也即与上面所计算的  $J_s$  在同一个量级上。London 理论给出了供超导电流流过的超导体表面穿透深度  $\lambda$  的表达式:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n_{se}}} \quad (1.1)$$

其中,  $n_{se}$  上面已经给出,  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 则:

$$\lambda = \sqrt{\frac{9.1 \times 10^{-31}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3.3 \times 10^{28}}} \simeq 3 \times 10^{-8} \text{ m}$$

由于  $K_f = J_f\lambda$ , 则

$$J_f = \frac{2H_0}{\lambda} = \frac{2\mu_0 H_0}{\mu_0 \lambda} \simeq 4 \times 10^{12} \text{ A/m}^2 \quad (\text{S2.9})$$

也即,  $J_f$  与  $J_s$  大致上相等。

### 2.6.3 讨论 2.1: 均匀场中的理想导体球

本题我们推导理想导体 ( $\rho = 0$ ) 球置于磁场中的定量磁场表达。特别是针对图 1.1c 中的  $C \Rightarrow D$  转变过程。点 C 处, 包括球内的整个空间处于均匀外场中 (问题 1, eq. 2.40)。外施场合问题 1 中的图 2.1 相同。

当均匀外场降至 0 (图 1.1c 中的 D 点), 由于球内的磁感应无法改变, 其磁场  $\vec{H}_2$  必保持不变。远离球中心 ( $r \rightarrow \infty$ ) 处的外场  $\vec{H}_1$  为 0。靠近球处的磁场可由标量势  $\phi_1 = (A/r^2) \cos \theta$  导出。在  $\phi_1$  上应用  $\nabla$  算符, 可得到球坐标下的偶极场。

$$\vec{H}_2 = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (r \leq R) \quad (2.44a)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{A}{r^3}(2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (r \geq R) \quad (2.44b)$$

在  $r = R$  处,  $B$  的法向分量应连续。由于在  $\theta = 0$  处球内外的磁场均仅有法向分量, 故:

$$-H_0 = 2 \frac{A}{R^3}$$

于是,  $A = -H_0 R^3 / 2$ , 进而:

$$\vec{H}_1 = -H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left( \cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta \right) \quad (2.44c)$$

上式即磁场分布的定量表达。不同的是, 图 1.1c 的外场是自下向上的, 而图 2.1 的磁场是自右向左的。

在  $r = R$  处, 磁场切向分量的不连续等于在  $r = R$  处球表面电流密度  $\vec{K}_f$ 。联立方程 2.6、2.44a 和 2.44c, 有:

$$\vec{K}_f = \vec{i}_r \times \left[ H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta - \left( -\frac{1}{2} H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta \right) \right] = \frac{3}{2} H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta \quad (2.45)$$

值得一提的是, 这个  $\sin \theta$  分布, 可以用一个绕在球上的在  $z$  轴均匀匝密度的“薄”线圈来近似。

#### 2.6.4 问题 2.3: 球壳的磁屏蔽

本问题处理被动磁屏蔽。在 MRI、磁悬浮等一些人和磁场敏感设备必须暴露于磁场外缘的高场系统中磁屏蔽是非常重要的课题。美国食药局 (FDA) 规定, MRI 中的最大外缘磁场为 5 高斯 (0.5 mT)。

在空间中的球星区域, 屏蔽一个均匀磁场  $\vec{H}_\infty$ :

$$\vec{H}_\infty = H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.40)$$

为了形成屏蔽, 可以用一个外径为  $2R$ 、壁厚  $d/R \ll 1$ 、高磁导率材料 ( $\mu/\mu_0 \gg 1$ ) 的球壳, 如图 2.4 所示。

a) 将本问题视为均匀外磁场中的磁性球壳。证明  $H_{ss}/H_0$  有如下表达式。其中,  $H_{ss}$  为球壳内 ( $r \leq R - d$ ) 的磁场幅值

$$\frac{H_{ss}}{H_0} = \frac{9\mu_0\mu}{9\mu_0\mu + 2(\mu - \mu_0)^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d}{R} \right)^3 \right]} \quad (2.46)$$

b) 证明, 在极限情况  $\mu/\mu_0 \gg 1$  和  $d/R \ll 1$  下,  $H_{ss}/H_0$  可约化为

$$\frac{H_{ss}}{H_0} \simeq \frac{3}{2} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right) \left( \frac{R}{d} \right) \quad (2.47)$$

c) 用微扰法得到上式。首先，在  $\mu = \infty$  条件下解出壳上 ( $R-d \leq r \leq R$ ) 的磁场。接着，用微扰法在  $\mu/\mu_0 \gg 1$  条件下得到上式。

d) 实践中，屏蔽材料中的磁通必须控制在材料的饱和磁通 ( $\mu_0 M_{sa}$ ) 之下。证明，可保持壳不饱和的  $d/R$  表达式为

$$\frac{d}{R} \geq \frac{3H_0}{2M_{sa}} \quad (2.48)$$

e) 画出  $\mu/\mu_0 \gg 1$  情况下的场线。

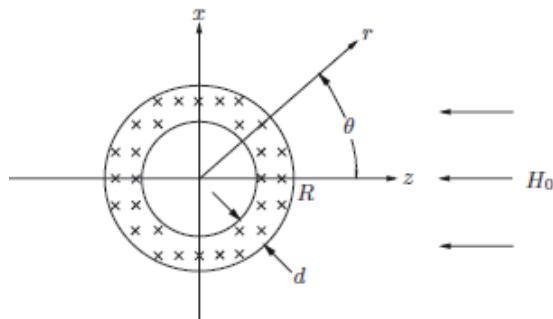


图 2.4: 均匀磁场中的磁性球壳

### 问题 2.3 之解答

a) 问题可以分为三个区域：区域 1( $r \geq R$ )；区域 2(球壳)；区域 3( $r \leq R-d$ )。相应的势函数为：

$$\phi_1 = H_0 r \cos \theta + \frac{A}{r^2} \cos \theta \quad (\text{S3.1a})$$

$$\phi_2 = C r \cos \theta + \frac{D}{r^2} \cos \theta \quad (\text{S3.1b})$$

$$\phi_3 = H_{ss} r \cos \theta \quad (\text{S3.1c})$$

注意到，在  $r \rightarrow \infty$  时， $\phi_1 \rightarrow H_0 r \cos \theta$  以及在  $r \rightarrow 0$  时， $\phi_3$  为有限值。应用球坐标下的  $\nabla$  算符，得到

$$\vec{H}_1 = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) + \frac{A}{r^3}(2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S3.2a})$$

$$\vec{H}_2 = C(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) + \frac{D}{r^3}(2 \cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S3.2b})$$

$$\vec{H}_3 = H_{ss}(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S3.2c})$$

边界条件:

1.  $r = R$  处,  $\vec{H}$  的切向分量  $H_\theta$  连续:  $\phi_1 = \phi_2$
2. 类似的, 在  $r = R - d$  处,  $H_\theta$  连续:  $\phi_2 = \phi_3$
3. 在  $r = R$  处,  $\vec{B}$  的法向分量  $B_r$  连续
4. 类似的, 在  $r = R - d$  处,  $B_r$  连续

由上述边界条件, 可导出下面的四个方程:

$$H_0 + \frac{A}{R^3} = C + \frac{D}{R^3} \quad (\text{S3.3a})$$

$$C + \frac{D}{(R-d)^3} = H_{ss} \quad (\text{S3.3b})$$

$$\mu_0(-H_0 + \frac{2A}{R^3}) = \mu \left( -C + \frac{2D}{R^3} \right) \quad (\text{S3.3c})$$

$$\mu \left[ -C + \frac{2D}{(R-d)^3} \right] = -\mu_0 H_{ss} \quad (\text{S3.3d})$$

联立 S3.3a 和 S3.3b, 消去  $C$ :

$$\frac{A}{R^3} + D \left[ \frac{1}{(R-d)^3} - \frac{1}{R^3} \right] - H_{ss} = -H_0 \quad (\text{S3.4})$$

联立 S3.3b 和 S3.3d, 解出  $D$ :

$$D = \frac{\mu - \mu_0}{2\mu} (R-d)^3 H_{ss} \quad (\text{S3.5})$$

于是, 可以  $H_{ss}$  表示  $A/R^3$ :

$$\frac{A}{R^3} = H_{ss} \left\{ 1 - \frac{\mu - \mu_0}{3\mu} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d}{R} \right)^3 \right] \right\} - H_0 \quad (\text{S3.6})$$

联立 S3.3c 和 S3.3d, 得到:

$$\frac{2A}{R^3} + 2 \frac{\mu}{\mu_0} D \left[ \frac{1}{(R-d)^3} - \frac{1}{R^3} \right] + H_{ss} = H_0 \quad (\text{S3.7})$$

联立 S3.3-S3.7, 用  $H_0$  表达  $H_{ss}$ , 可以得到:

$$\frac{H_{ss}}{H_0} = \frac{9\mu_0\mu}{9\mu_0\mu + 2(\mu - \mu_0)^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{d}{R} \right)^3 \right]} \quad (2.46)$$

b) 方程右侧的分子分母同除  $\mu_0^2$ , 应用极限  $\mu/\mu_0 \gg 1$  和  $d/R \ll 1$ :

$$\frac{H_{ss}}{H_0} \simeq \frac{9\mu/\mu_0}{9\frac{\mu}{\mu_0} + 2(\frac{\mu}{\mu_0})^2 [1 - (1 - 3\frac{d}{R})]} \quad (\text{S3.8})$$

$$\simeq \frac{3}{3 + 2(\frac{\mu}{\mu_0})(\frac{d}{R})} \quad (\text{S3.9})$$

在  $\mu d/\mu_0 R \gg 1$  的特殊情况下, S3.9 可以简化为:

$$\frac{H_{ss}}{H_0} \simeq \frac{2}{3} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right) \left( \frac{R}{d} \right) \quad (2.47)$$

c) 我们假设  $\mu$  为无限大。这要求 B 线在  $r = R$  处垂直于球壳。这是因为  $r = R$  处,  $\vec{H}_1$  仅有径向分量。由于壳内  $H = 0$ , 故在  $r = R$  处  $H_\theta$  必须连续。注意到, 当  $\mu = \infty$  时,  $C = D = 0$ 。这样,  $A = -R^3 H_0$ , 于是在  $r = R$  处

$$\vec{H}_1 = -3H_0 \cos \theta \vec{i}_r \quad (\text{S3.10})$$

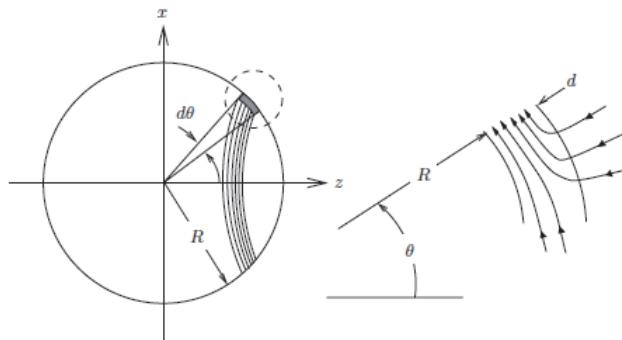


图 2.5: 通过球壳  $\pm\theta$  边界内区域进入壳的磁通。

B 线局限在壳内, 不会“逸”至区域 3。也即, 壳内的 B 仅有  $\vec{i}_\theta$  分量。应用磁通连续性 ( $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ) 并在  $\mu = \infty$  条件下解  $B_2$ 。解出  $B_2$  后, 可以得到  $\mu \neq \infty$  但  $\mu/\mu_0 \gg 1$  时  $\vec{H}_3$  的近似表达式。

首先, 计算通过表面区域  $\pm\theta$  边界内进入壳的总磁通 (图 2.5)。根据图中的微元积分

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu_0 \int_0^\theta \vec{H}_1 \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_0^\theta 3H_0 \cos \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \\ &= 3\pi\mu_0 R^2 H_0 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{S3.11})$$

这个  $\Phi$  一定等于在球壳  $\theta$  处  $\theta$  方向的磁通量。在  $d \ll R$  条件下，壳在  $\theta$  处的截面区域  $A_2$  可由下式给出

$$A_2 \simeq d \cdot 2\pi R \sin \theta \quad (\text{S3.12})$$

我们有

$$\begin{aligned} \Phi &= 3\pi\mu_0 R^2 H_0 \sin^2 \theta \\ &\simeq B_2 A_2 = B_2 d 2\pi R \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{S3.13})$$

解出  $B_2$ , 得

$$\vec{B}_2 \simeq \frac{3}{2}\mu_0 \left( \frac{R}{d} \right) H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta \quad (\text{S3.14})$$

注意到上式的  $\vec{B}_2$  是在  $\mu = \infty$  条件下得到的。现在我们可以导出  $\vec{H}_3$  的近似表达。由于  $\vec{H}$  的  $\vec{i}_\theta$  分量在  $r = R - d$  处必须连续, 于是

$$H_{\theta 3} \simeq \frac{B_{\theta 2}}{\mu} = \frac{3}{2} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right) \left( \frac{R}{d} \right) H_0 \sin \theta \quad (\text{S3.15})$$

得到了  $H_{\theta 3}$ , 我们就可以给出  $\vec{H}_3$  的完整表达式了:

$$\vec{H}_3 \simeq \frac{B_{\theta 2}}{\mu} = \frac{3}{2} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right) \left( \frac{R}{d} \right) H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S3.16a})$$

$$\left| \frac{\vec{H}_3}{H_0} \right| \simeq \frac{3}{2} \left( \frac{\mu_0}{\mu} \right) \left( \frac{R}{d} \right) \quad (\text{S3.16b})$$

方程 S3.16b 给出的比值与方程 2.47 给出的  $H_{ss}/H_0$  是一致的。注意: 此处的微扰法需要  $\mu = \infty$  和  $d \ll R$  条件, 但无需  $\mu d / \mu_0 R \gg 1$  条件。

d) 应当明确, 不能为了满足  $d/R \ll 1$  而将  $d$  选的特别小。事实上, 下面的分析仅在下式条件满足时有效:

$$\frac{\mu_0}{\mu} \ll \frac{d}{R} \ll 1 \quad (\text{S3.17})$$

实际的  $\mu$  不可能无限大。屏蔽材料会随着外场的增大最终饱和。因此, 壳内的最大磁通 ( $\theta = 90^\circ$  时取得) 必须小于屏蔽壳材料的饱和磁通  $\mu_0 M_{sa}$ 。于是

$$\frac{3}{2} \left( \frac{R}{d} \right) \mu_0 H_0 \leq \mu_0 M_{sa} \quad (\text{S3.18})$$

在 S3.18 中解出  $d/R$ , 有

$$\frac{d}{R} \gg \frac{3H_0}{2M_{sa}} \quad (2.48)$$

表 2.2: 几种材料的屏蔽特征值

$\mu_0 H_0$ [gauss]	annealed ingot iron		As-Cast Steel		Vanadium Permendur	
	$(\mu/\mu_0)_{dif}$	$\mu_0 M[T]$	$(\mu/\mu_0)_{dif}$	$\mu_0 M[T]$	$(\mu/\mu_0)_{dif}$	$\mu_0 M[T]$
1	7710	0.375	na	na	na	na
3	3850	0.91	1660	0.25	4845	0.65
5	500	1.42	1155	0.51	1875	1.25
10	115	1.54	565	0.93	545	1.67
20	47	1.60	180	1.25	170	1.96
50	23.5	1.70	50	1.52	17	2.10
100	17.5	1.81	25	1.70	4.8	2.15
200	8.25	1.93	10	1.85	1.3	2.17
500	2.0	2.05	1.0	1.92	0.26	2.18
1000	0.4	2.11	0.45	2.01	0.07	2.19
$\mu_0 M_{sa}$	2.13[T]		2.03[T]		2.20[T]	

表 3.1 给出了三种材料的微分  $\mu/\mu_0$  和  $\mu_0 M(H_0)$  的近似值。其中,  $(\mu/\mu_0)_{dif} \equiv \Delta M/\Delta H_0|_{\mu_0 H_0}$ ,  $\mu_0 H_0$  的范围为  $0 \sim 1000$  高斯。后面还给出了这三种材料的饱和磁通值。这几种材料常用来屏蔽  $\sim 100$  高斯下的磁场。

e)  $\mu/\mu_0 = 100$  磁性球壳置于均匀场中的磁场分布如图 2.6 所示。

### 2.6.5 讨论 2.2: 用圆柱壳屏蔽

我们用类似于问题 4 中所用的微扰技术推导  $H_{cs}/H_0$  的表达式。式中,  $H_{cs}$  是置于均匀外场采用高磁导率 ( $\mu/\mu_0 \gg 1$ ) 材料的圆柱壳 ( $d/R \ll 1$ ) 内部 ( $r \leq R - d$ ) 的磁场的幅值。在二维柱坐标系下, 外场有如下形式:

$$\vec{H}_\infty = H_0(-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.40)$$

我们假定圆柱材料的  $\mu$  是无限大的, 这样 B 线在  $r = R$  处必须垂直于圆柱。于是, 在  $r = R$  处, 有

$$\vec{H}_1 = -2H_0 \cos \theta \vec{i}_r$$

当然, 壳内的 B 是  $\theta$  方向的。在  $d/R \ll 1$  条件下, 磁通连续性要求 B

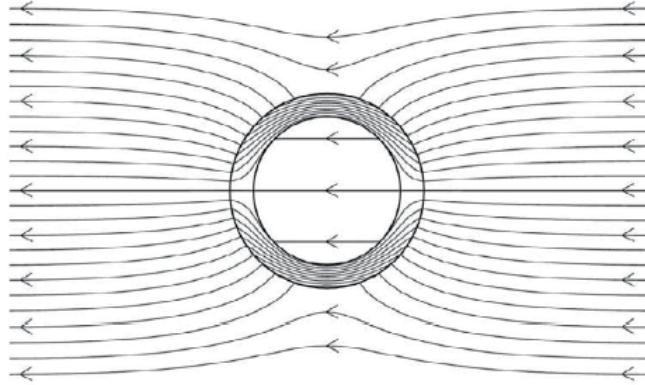


图 2.6:  $\mu/\mu_0 = 100$  磁性球壳置于均匀场中的磁场分布。注意到进出球壳的磁场线是近乎垂直于壳的。

满足:

$$B_2 d = \int_0^\theta 2\mu_0 H_0 R \cos \theta d\theta = 2\mu_0 R H_0 \sin \theta$$

于是,

$$\vec{B}_2 = 2\mu_0 \left(\frac{R}{d}\right) H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta$$

已知  $\mu = \infty$  下的  $\vec{B}_2$ , 我们可以得到  $\mu/\mu_0 \gg 1$  下的  $\vec{H}_2$ :

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu} \simeq 2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\frac{R}{d}\right) H_0 \sin \theta \vec{i}_\theta$$

因为在没有表面电流时  $H_\theta$  是连续的, 区域 2 和区域 3 一定有  $H_{\theta 2} = H_{\theta 3}$ 。于是, 在  $r = R - d$  处:

$$H_{\theta 3} = H_{\theta 2} \simeq 2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\frac{R}{d}\right) H_0 \sin \theta$$

从上面的表达式, 可以得出:

$$\begin{aligned} \vec{H}_3 &\simeq 2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\frac{R}{d}\right) H_0 (-\cos \theta \vec{i}_r + \sin \theta \vec{i}_\theta) \\ \left| \frac{\vec{H}_3}{H_0} \right| &\equiv \frac{H_{cs}}{H_0} \simeq 2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\left(\frac{R}{d}\right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

如问题 2.3 中的球壳一样, 圆柱壳的厚度也不能无限薄。它必须有保持足够的厚度以防止饱和:

$$\mu H_{cs} = 2\mu_0 H_0 \frac{R}{d} \leq \mu_0 M_{sa}$$

根据上面的推导，我们得到：

$$\frac{d}{R} \geq \frac{2H_0}{M_{sa}} \quad (2.50)$$

### 2.6.6 问题 2.4：四个偶极子簇的远场

本题讨论如下图布置的四个理想偶极子簇的远场。各偶极子的方向如图箭头所示。两个相反偶极子的中心距为  $2\delta_d$ 。各偶极子  $j$  均为零绕组厚度，直径均为  $2r_d$ ，在  $y$  向的总长度为  $l_d$ ，距离偶极子径向 ( $r_j$ ) 位置的远场 ( $r_j \gg l_d$ ) 可建模为球偶极子场  $\vec{B}_j$ ：

$$\vec{B}_j = \frac{r_d^2 l_d B_0}{2r_j^3} (\cos \theta_j \vec{i}_{r_j} + \frac{1}{2} \sin \theta_j \vec{i}_{\theta_j}) \quad (2.51)$$

式中， $r_j$  是分别到各偶极子中心的距离； $\theta_j$  的定义确保  $\theta_j = 0^\circ$  时，各偶极子的绕组内场指向  $r_j$  方向。图 2.7 给出了各偶极子内场的方向，还定义了对所有偶极子共同的  $r - \theta$  坐标系和  $z - x$  坐标系。注意到， $r \gg \delta_d$ ，我们有  $\theta_1 = \theta + 180^\circ, \theta_2 = \theta - 90^\circ, \theta_3 = \theta, \theta_4 = \theta + 90^\circ$ 。

证明，忽略各偶极子的末端效应，仅考虑  $y = 0$  平面，本组合系统的远场 ( $r/\delta_d \gg 1$ ) 近似表达式为：

$$\vec{B} \simeq \frac{3r_d^2 l_d B_0 \delta_d}{r^4} (-\sin 2\theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \cos 2\theta \vec{i}_{\theta}) \quad (2.52)$$

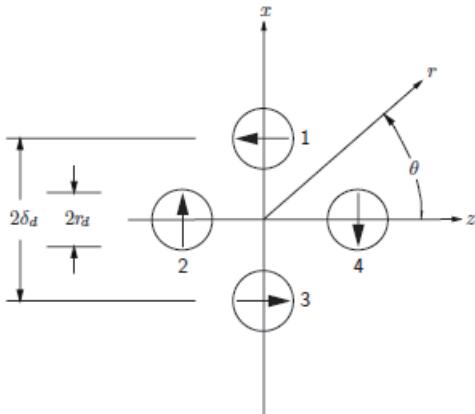


图 2.7：四个偶极子布置的横截面。每个偶极子的箭头指示线圈内场的方向。

### 问题 2.4 之解

对于  $r \gg \delta_d$ , 每个偶极子的  $r_j$  可以用  $r$  和  $\theta$  表示:

$$r_1 \simeq r - \delta_d \sin \theta \quad (\text{S4.1a})$$

$$r_2 \simeq r + \delta_d \cos \theta \quad (\text{S4.1b})$$

$$r_3 \simeq r + \delta_d \sin \theta \quad (\text{S4.1c})$$

$$r_4 \simeq r - \delta_d \cos \theta \quad (\text{S4.1d})$$

由此, 可以得到各偶极子采用  $\theta$  表示的场:

$$\vec{B}_1 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2(r - \delta_d \sin \theta)^3} (-\cos \theta \vec{i}_r - \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.2a})$$

$$\vec{B}_2 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2(r + \delta_d \cos \theta)^3} (\sin \theta \vec{i}_r - \frac{1}{2} \cos \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.2b})$$

$$\vec{B}_3 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2(r + \delta_d \sin \theta)^3} (\cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.2c})$$

$$\vec{B}_4 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2(r - \delta_d \cos \theta)^3} (-\sin \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \cos \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.2d})$$

对于  $r \gg \delta_d$ , 各项的分母可对  $\delta_d/r$  作一阶展开, 成为:

$$\vec{B}_1 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2r^3} \left[ 1 + 3\left(\frac{\delta_d}{r}\right) \sin \theta \right] (-\cos \theta \vec{i}_r - \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.3a})$$

$$\vec{B}_2 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2r^3} \left[ 1 - 3\left(\frac{\delta_d}{r}\right) \cos \theta \right] (\sin \theta \vec{i}_r - \frac{1}{2} \cos \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.3b})$$

$$\vec{B}_3 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2r^3} \left[ 1 - 3\left(\frac{\delta_d}{r}\right) \sin \theta \right] (\cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.3c})$$

$$\vec{B}_4 \simeq \frac{r_d^2 l_d B_0}{2r^3} \left[ 1 + 3\left(\frac{\delta_d}{r}\right) \sin \theta \right] (-\sin \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \cos \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S4.3d})$$

组合上面几式, 可以得到

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 \simeq \frac{3r_d^2 l_d B_0 \delta_d}{r^4} (-\sin 2\theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \cos 2\theta \vec{i}_\theta) \quad (2.52)$$

注意到, 四偶极子簇的  $|B|$  按  $\propto 1/r^4$  衰减而不是像单个偶极子一样的依照  $\propto 1/r^3$  衰减。

### 2.6.7 问题 2.5: 铁电磁体的磁极形状

图 2.8 给出了铁制电磁铁的剖面。两个铁磁材料制成的圆柱形磁极相对放置, 圆柱尖端倒角成锥形 (图中的阴影部分)。磁极上的线圈 (图中未画出)

通电后，两极间的间隙内将产生一个相对均匀的磁场。中心场理论上没有上限，因为它是  $\propto \ln(R_2/R_1)$  增长的。其中， $R_1$  和  $R_2$  分别是锥体顶部和基部的直径。由于随着  $R_2$  增加，磁体的质量会变得很大，所以实践中的中心场上限  $\sim 7$  T(巴黎 Bellevue; 瑞典 Uppsala Uni.)。由于尖端部分的磁矩产生的场对中心的 z 向场有一个负的贡献，所以，尖角能够加强中心场。

证明：若铁芯在与系统 z 轴平行方向励磁， $\theta_{tp} = 54^\circ 44'$  是这种简单磁极几何的最优角度。假定中心场是均匀分布于磁极件上的磁矩产生的场的叠加。 $z$  向励磁的磁矩  $\vec{m}_A [A \cdot m^2]$  产生的偶极场为：

$$\vec{H}_{m_A} = \frac{\vec{m}_A}{r^3} (\cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (2.53)$$

$\vec{H}_{m_A}(r, \theta)$  关于 z 轴对称，可以从标量势  $\cos \theta / r^2$  导出。

提示：解出位于磁极倒角基部边缘上(图示)的单个磁矩  $m_A \uparrow$  在 z 轴中心的场。

### 问题 2.5 的解

$m_A$  产生的在中心的场的 z 向分量  $H_{m_A z}$  为：

$$H_{m_A z} = \frac{\vec{m}_A}{r^3} (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) \quad (S5.1)$$

式中， $r_A$  是  $m_A$  距中心的距离。在  $\theta = \theta_{tp}$  时，上述方程的右侧为 0。于是

$$\cos^2 \theta_{tp} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_{tp} = 0 \quad (S5.2)$$

于是有  $\cos \theta_{tp} = 1/\sqrt{3}$  或  $\tan \theta_{tp} = \sqrt{2}$ ，也即  $\theta_{tp} \simeq 54.736^\circ \simeq 54^\circ 44'$ 。

我们注意到，对阴影区中基线之上的磁矩均有  $\theta_{tp} > 54^\circ 44'$ 。由于随  $\theta$  值的增加， $\cos \theta$  递减而  $\sin \theta$  递增，在  $\theta_{tp} > 54^\circ 44'$  时， $H_{m_A z}$  为负。以  $\theta_{tp} = 54^\circ 44'$  倒角磁极可以消除这种负的贡献，最大化中心场。

值得一提的是，NMR 质谱仪中的“神奇角”(magic angle) 也是  $54^\circ 44'$ 。通常，NMR 样品以这个“神奇角”与主轴场取向放置以减少各向异性的作用。

### 2.6.8 讨论 2.3：永磁体

永磁磁体是日常生活中大量设备如汽车、电视、电脑、手机、冰箱等的关键部件。实际上，如果没有永磁体，今日的现代生活将难以存续。在低场

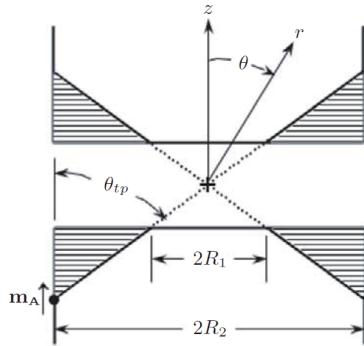


图 2.8: 电极对, 倒角为  $\theta_{tp}$ 。图中 • 指示了磁矩  $\vec{m}_A \uparrow$  的位置。

( $< 1$ ) T 的 MRI 中, 永磁体是超导体的竞争对手。由于永磁磁体既无需制冷也很便宜, 永磁 MRI 很受欢迎。

表 2.6 给出了 90 年 (1910s-1990s) 间永磁体和超导体的发展。永磁体性能以最大磁能  $BH|_{mx}$  表示, 而超导体以最高临界温度  $T_c|_{mx}$  表示。这期间,  $BH|_{mx}$  提高了约 30 倍,  $T_c|_{mx}$  提高了约 20 倍。

永磁体照这个步调发展下去, 在不久的将来, 永磁体 MRI 将能达到  $\sim 1$  T。在这个磁场之上, 还是超导的天下。

表 2.3: 永磁体和超导体的发展历程

年代	永磁体	$BH _{mx} [\text{kJ/m}^3]$	超导体	$T_c _{mx} [\text{K}]$
1910	特种钢	11	Pb	7.2
1920-1940	Alnico 1-4	15	NbN	16
1950	Alnico 5	35	$Nb_3Sn$	18
1960	Alnico 8,9	55	$Nb_{12}Al_3Ge$	19
1970	$SmCo_5$	140	$Nb_3Ge$	23
1980	$Sm(CoCuFeZr)$	240	$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_x$	118
1990	$Nd_2Fe_{14}B$	350	$(Hg, Pb)Sr_2Ca_2Cu_3O_x$	133

### 2.6.9 问题 2.6：圆柱中的准静态场

半径为  $R$  的长薄圆柱由理想导体 ( $\rho = \infty$ , 非超导) 薄板制成, 侧面开有宽  $\delta$  的窄缝 (如图)。圆柱置于正弦时变磁场中:

$$\vec{H}_\infty(t) = Re[H_0 e^{j\omega t}] \vec{i}_z \quad (2.54)$$

式中,  $H_0$  是复幅值。忽略端部效应。

a) 忽略  $\delta/R$  阶项。证明: 跨窄缝短边的一阶复电压幅值为:

$$V_{1|0} \equiv V_{1|\theta=0} = -j\omega\pi R^2 \mu_0 H_0 \quad (2.55)$$

b) 一个电阻率为  $\rho[\Omega \cdot m]$  的正常金属板置于窄缝将圆柱开缝恰好连接起来。推导通过该板的一阶复电流密度 (轴向单位长度)  $J_1[A/m]$  的表达式。假定: 驱动频率 ( $\omega/2\pi$ ) 足够小, 磁场仍保持原准静态形式; 电流在板截面上均匀流过。

c) 在无金属板存在 (或  $\rho_s = \infty$ ) 条件下, 在圆柱腔内画出 6 条一阶复电场矢量 ( $\vec{E}_1$ ) 线, 指明电场的重要特征。

d) 在无金属板存在条件下, 推导两点间的一阶电压的线积分  $V_1|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2}$  的表达式, 即一点位于  $\theta = +\pi/2$ , 另一点位于  $\theta = -\pi/2$ 。

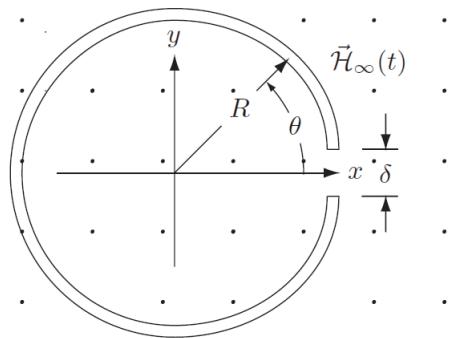


图 2.9: 置于  $z$  向正弦时变磁场的在  $\theta = 0$  处有窄缝的半径为  $R$  的理想导体长薄圆柱体的轴向视图。

### 问题 2.6 之解

a) 对一阶电场  $\vec{E}_1(t)$  应用积分形式的 Faraday 定律:

$$\mathcal{V}_1(t) \equiv \int_C \vec{E}_1(t) \cdot d\vec{s} = -\pi R^2 \mu_0 \frac{d\mathcal{H}_0(t)}{dt} \quad (\text{S6.1})$$

线积分沿着圆柱逆时针进行 (含窄缝)。上式右侧包括圆柱 ( $\pi R^2$ ) 所定义的整个区域。因为圆柱是理想导体, 故在材料内有  $\vec{\mathcal{E}}_1(t) = 0$ 。对线积分, 仅有的非零贡献来自窄缝。以复幅值表示, 有

$$V_{1|0} = -j\omega\pi R^2 \mu_0 H_0 \quad (2.55)$$

b) 应用 Ohm 定律, 得到  $J_1$ (单位长度):

$$J_1 = \frac{V_{1|0}}{\rho_s} \quad (\text{S6.2})$$

c) 因为圆柱是理想导体。圆柱面上  $\vec{E}_1$  的切向分量必须为零。 $\vec{E}_1$  以直角离开或进入圆柱。跨越圆柱的积分移动至窄缝左侧, 积分区域减少, 这令  $|E_1|$  变小。场线如图 2.10 所示。

d) 这是 c) 的特例。从对称角度, 可以准确计算出线积分。积分区域等于  $\pi R^2/2$ , 即

$$V_1|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} = -\frac{1}{2} j\omega\pi R^2 \mu_0 H_0 \quad (\text{S6.3})$$

上式和 a) 表明, 在同一轴向距离点, 跨过圆柱的电压与电压触头方位有关。记住这一点, 这在存在时变磁场 (外施磁场, 如本例; 系统中电流产生的) 条件下测电压时非常重要。超导体交流损耗的电测法就是一个非常好的例子。

### 2.6.10 问题 2.7: 圆柱壳的感应加热

本问题处理金属 (非超导) 圆柱壳的感应加热。它是一个同时涉及时谐电磁场、能流 (Poynting 矢量)、能量耗散的好例子。本体和下一题是交流损耗, 特别是涡流损耗的实例, 本课题将在第七章进一步讨论。感应加热在电炉中广泛使用, 用以在导体材料内获得高温。有时, 也用来作为研究超导线圈热行为的研究工具。在超导磁体技术研究中, 感应加热最常以脉冲场形式在其他超导线圈中产生小的正常区域, 模拟暂态扰动。

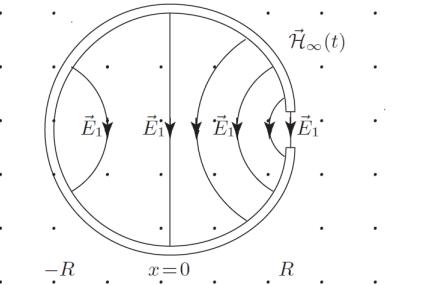


图 2.10:  $\vec{E}_1$  线垂直于理想导体圆柱。注意到, 从  $x = R$  到  $x = -R$ ,  $|E_1|$  是减小的。

图 2.11 给出一个“长”金属圆柱壳, 其电导率为  $\rho_e$ , 外径为  $2R$ , 厚度  $d \ll R$ , 置于正弦时变磁场中。磁场的 0 阶分量在 z 向均匀。即

$$\vec{H}_{\infty}(t) = \text{Re}[H_0 e^{j\omega t}] \vec{i}_z \quad (2.54)$$

式中,  $H_0$  是复磁场幅值。

我们首先用两种方法解出相应的场量。接下来, 用两种方法解出援助内的能量耗散。

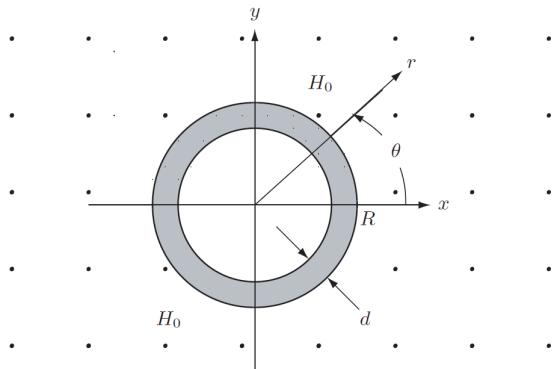


图 2.11: 圆柱金属壳置于均匀正弦时变磁场之中。

### 第一部分：感应加热场的问题

首先，用两种方法解出场量。

#### 方法一

a) 使用积分形式的 Maxwell 方程，忽略端部效应。证明在  $r \leq R$  区域内给出一阶电场  $\vec{E}_1$ ，在  $r \simeq R$  的壳内给出一阶电流密度  $\vec{J}_1$  的表达式为：

$$\vec{E}_1 = -\frac{j\omega\mu_0 r H_0}{2} \vec{i}_\theta \quad (2.56)$$

$$\vec{J}_1 = -\frac{j\omega\mu_0 R H_0}{2\rho_e} \vec{i}_\theta \quad (2.57)$$

b) 证明：在  $r \leq R - d$  区域，一阶磁场  $\vec{H}_1$  可以表示为

$$\vec{H}_1 = -\frac{j\omega\mu_0 R d H_0}{2\rho_e} \vec{i}_z \quad (2.58)$$

c) 上面三式，在准静态近似条件下得出，仅在“低”频下成立，或者说仅在频率远小于“趋肤深度”频率  $f_{sk}$  下成立。证明：

$$f_{sk} = \frac{\rho_e}{\pi\mu_0 R d} \quad (2.59)$$

#### 方法二

方法一得到的  $\vec{E}_1$ 、 $\vec{J}_1$ 、 $\vec{H}_1$  均随着  $\omega$  增大，仅在频率小于  $f_{sk}$  时成立。下面，我们用一种新技术来推出在所有频率下均成立的室温孔内场  $\vec{H}_T = \vec{H}_0 + \vec{H}_r$  的完整表达式。式中， $\vec{H}_T$  是总场， $\vec{H}_0$  是原场， $\vec{H}_R$  是室温孔内的系统反应场。

本方法中，首先将  $\vec{H}_T = \vec{H}_0 + \vec{H}_r$  视为零阶场，解出作为一阶磁场响应的  $\vec{H}_R$ 。

d) 证明在  $d \ll R$  条件下壳内的  $\vec{H}_R$ 、 $\vec{H}_T$  和  $\vec{J}$  为：

$$\vec{H}_R = -\frac{j\omega\mu_0 R d H_0}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \vec{i}_z \quad (2.60)$$

$$\vec{H}_T = \frac{2\rho_e H_0}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \vec{i}_z \quad (2.61)$$

$$\vec{J} = -\frac{j\omega\mu_0 R H_0}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \vec{i}_\theta \quad (2.62)$$

### 第一部分：感应加热场的问题之解

根据  $\theta$  方向的对称性， $\vec{E}_1$  和  $\vec{J}_1$  在  $\theta$  方向为常量，两个量均为  $\theta$  向，且仅依赖于  $r$ 。这样，Faraday 感应定律可在  $r$  的边线  $C$  上进行，围城的面积

为  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} &= -j\omega\mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{H}_0 \cdot d\vec{A} \\ \int_0^{2\pi} r E_{1\theta} d\theta &= -j\omega\mu_0 \int_0^r 2\pi r H_0 dr \\ E_{1\theta} \int_0^{2\pi} r d\theta &= -j\omega\mu_0 H_0 \int_0^r 2\pi r dr \end{aligned} \quad (\text{S7.1})$$

在  $r \leq R$  时

$$E_{1\theta} 2\pi r = -j\omega\mu_0 H_0 \pi r^2 \quad (\text{S7.2})$$

上式两侧同除  $2\pi r$ , 有

$$E_{1\theta} = -\frac{j\omega\mu_0 r H_0}{2} \quad (\text{S7.3})$$

于是

$$\vec{E}_1 = -\frac{j\omega\mu_0 r H_0}{2} \vec{i}_\theta \quad (2.56)$$

一阶电流仅在壳内 ( $r \simeq R$ ) 流动:

$$\vec{J}_1 = \frac{\vec{E}_1(r \simeq R)}{\rho_e} = -\frac{j\omega\mu_0 R H_0}{2\rho_e} \vec{i}_\theta \quad (2.57)$$

在  $d \ll R$  时, 我们可以将电流处理为一阶表面电流  $\vec{K}_1$ :

$$\vec{K}_1 = \vec{J}_1 \cdot d = -\frac{j\omega\mu_0 R d H_0}{2\rho_e} \vec{i}_\theta \quad (\text{S7.4})$$

b) 对  $r > R$ ,  $\vec{H}_1 = 0$ ; 我们可以将上述面电流等效为在  $r = R$  处  $\vec{H}$  的不连续: 壳内壁  $\vec{H}_0 + \vec{H}_1$ , 壳外  $\vec{H}_0$ 。于是

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 &= \vec{i}_r \times [\vec{H}_0 - (\vec{H}_0 + \vec{H}_1)] = -\frac{j\omega\mu_0 R d H_0}{2\rho_e} \vec{i}_\theta \\ &= \vec{i}_r \times -\vec{H}_1 = -\frac{j\omega\mu_0 R d H_0}{2\rho_e} \vec{i}_\theta \end{aligned} \quad (\text{S7.5})$$

在  $d \ll R$  条件下解出  $\vec{H}_1(r \leq R - d)$

$$\vec{H}_1 = -\frac{j\omega\mu_0 R d H_0}{2\rho_e} \vec{i}_z \quad (2.58)$$

c) 前已表明,  $\vec{J}_1$ 、 $\vec{K}_1$  和  $\vec{H}_1$  的幅值均随着频率单调增长。这意味着它不可能在所有  $\omega$  下成立。事实上, 那些解仅在准静态近似可以应用的低频下有效。特别的, 仅在  $|\vec{H}_1| \ll |\vec{H}_0|$  时有效:

$$|\vec{H}_1| = \frac{\omega\mu_0 R d |H_0|}{2\rho_e} \ll |\vec{H}_0| \quad (\text{S7.6})$$

由上式，可以得到频率极限，即通常所谓的趋肤深度频率  $f_{sk}$ 。在此频率下，准静态近似是有效的

$$f_{sk} = \frac{\rho_e}{\pi \mu_0 R d} \quad (2.59)$$

注意， $f_{sk}$  不仅与材料的电阻率有关，还与处于正弦时变磁场中的物体的尺寸有关。

d) 在计算反应场时，设定  $\vec{H}_1 \equiv \vec{H}_R$ 。在  $\vec{H}_1$  的表达式中，用  $\vec{H}_0 + \vec{H}_R$  代换  $\vec{H}_0$

$$\vec{H}_R = -\frac{j\omega\mu_0 R d (\vec{H}_0 + \vec{H}_R)}{2\rho_e} \quad (S7.7)$$

解出  $\vec{H}_R$ ，得到

$$\vec{H}_R = -\frac{j\omega\mu_0 R d \vec{H}_0}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \vec{i}_z \quad (2.60)$$

联立方程 2.60 和  $\vec{H}_T = \vec{H}_0 + \vec{H}_R$ ，可以得到

$$\begin{aligned} \vec{H}_T &= \vec{H}_0 + \vec{H}_R = H_0 \left( 1 - \frac{j\omega\mu_0 R d}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \right) \vec{i}_z \\ &= \frac{2\rho_e H_0}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \vec{i}_z \end{aligned} \quad (2.61)$$

$\vec{J}$  和  $\vec{H}_R$  通过  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  相联系，又  $\vec{K} = \vec{J}d$ ，于是

$$\vec{J} = \frac{1}{d} H_R \vec{i}_\theta \quad (S7.8)$$

$$= -\frac{j\omega\mu_0 R H_0}{2\rho_e + j\omega\mu_0 R d} \vec{i}_\theta \quad (2.62)$$

注意到，在低频下， $\vec{H}_R$  退化为  $\vec{H}_1$ ；高频下， $\vec{H}_R$  退化为  $-\vec{H}_0$  而  $\vec{H}_T$  变为 0。 $\vec{J}$  存在类似的行为。

## 第二部分：感应加热的能量耗散

我们用两种方法解出圆柱内的能量耗散。

### 方法一

e) 我们可以直接计算  $\langle p \rangle = \vec{E} \cdot \vec{J}^*/2 = \rho_e |J|^2/2$  而得到圆柱壳的电功率损耗。式中的  $\vec{J}$  已在前文求出。证明：在  $d \ll R$  条件下，壳内的时均总损耗（单位长度）的表达式为

$$\langle P \rangle = 2\pi R d \langle p \rangle = \frac{\pi \rho_e \omega^2 \mu_0^2 R^3 d}{4\rho_e^2 + \omega^2 \mu_0^2 R^2 d^2} |H_0|^2 \quad (2.63)$$

## 方法二

相同的施于圆柱的复功率也可以视为从  $r > R$  处的源在  $r = R$  处进入圆柱内的 Poynting 能流。

f) 证明: 在  $r = R$  处, 进入圆柱的一阶复 Poynting 矢量  $\vec{S}_1$  的面积分(单位长度)为:

$$-\oint_S \vec{S}_1 \cdot d\mathcal{A} = \frac{1}{2}(2\pi P)E_{1\theta}H_1^* = \frac{j\pi\rho_e\omega\mu_0R^2}{2\rho_e + j\omega\mu_0Rd}|H_0|^2 \quad (2.64)$$

提示:  $E_{1\theta} = \rho_e J_\theta$ ,  $J_\theta$  已在上文求出。

g) 证明: 上式的等号右侧的实部与 e) 中给出的  $\langle P \rangle$  是一致的。

h) 画出  $\langle P \rangle$  与  $\rho_e$  的关系。由于理想导体 ( $\rho_e = 0$ ) 和理想绝缘体 ( $\rho_e = \infty$ ) 均不产生损耗, 图像应从  $\langle P \rangle = 0$  开始, 并在  $\rho_e \rightarrow \infty$  时趋于 0。

i) 从  $\langle P \rangle$  与  $\rho_e$  的关系可以得到一个结论, 即存在临界电阻率  $\rho_{e_c}$ , 在该点  $\langle P \rangle$  最大。证明

$$\rho_{e_c} = \frac{\omega\mu_0Rd}{2} \quad (2.65)$$

从上式可知, 对一个电阻率 ( $\rho_e$ ) 和样品尺寸 ( $R, d$ ) 组合, 存在一个可以令加热最大化的最优频率。这个频率就是前面提到的趋肤深度频率  $f_{sk}$ 。

j) 计算一个半径  $R = 10$  mm, 壁厚  $d = 0.5$  mm, 电阻率  $\rho_e = 2 \times 10^{-10} \cdot \text{m}$ (大致为液氦温度下铜的电阻率) 的铜管的  $f_{sk}$ 。

## 第二部分: 感应加热的能量耗散之解

e) 正弦情况下, 时均能耗(单位长度) 功率可以表示为  $\langle p \rangle = \vec{E} \cdot \vec{J}^*/2 = \rho_e|J|^2/2$ , 也即

$$\langle p \rangle = \rho_e|J|^2/2 = \frac{\rho_e}{2} \left( \frac{\omega^2\mu_0^2R^2}{4\rho_e^2 + \omega^2\mu_0^2R^2d^2} \right) |H_0|^2 \quad (S7.9)$$

于是, 壳内总的能耗(单位长度) 可以能耗功率乘以截面积得到

$$\langle P \rangle = 2\pi Rd \langle p \rangle = \frac{\pi\rho_e\omega^2\mu_0^2R^3d}{4\rho_e^2 + \omega^2\mu_0^2R^2d^2} |H_0|^2 \quad (2.63)$$

下面检查一下上式在  $\rho_e$  两个极限下的情况:

$$\rho_e \ll \omega\mu_0Rd(\text{良导体}) \text{ 时: } \langle P \rangle \simeq \frac{\pi\rho_eR}{d} |H_0|^2 \propto \rho_e \quad (S7.10a)$$

$$\rho_e \gg \omega\mu_0Rd(\text{不良导体}) \text{ 时: } \langle P \rangle \simeq \frac{\pi\omega^2\mu_0^2R^3d}{4\rho_e} |H_0|^2 \propto \frac{1}{\rho_e} \quad (S7.10b)$$

正如我们所期望的，在上面两种极限情况下，都有  $\langle P \rangle \rightarrow 0$ 。

f) 复 Poynting 矢量  $\vec{S}$  的一阶展开为：

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{2}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* + \vec{E}_0 \times \vec{H}_1^* + \vec{E}_1 \times \vec{H}_0^*) \quad (\text{S7.11})$$

计算一阶 Poynting 矢量时， $E$  和  $H$  场的下表均不大于 1。在本例下，我们有  $\vec{E}_0 = 0$ ，于是上式化简为：

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 \times \vec{H}_0^*) \quad (\text{S7.12})$$

对于  $\vec{E}_1$  我们有：

$$\vec{E}_1 = \rho_e \vec{J} = -\frac{j\rho_e \omega \mu_0 R H_0}{2\rho_e + j\omega \mu_0 R d} \vec{i}_\theta \quad (\text{S7.13})$$

于是，

$$-\oint_S \vec{S}_1 \cdot d\vec{A} = \frac{1}{2}(2\pi R) E_{1\theta} H_0^* = \frac{j\pi \rho_e \omega \mu_0 R^2}{2\rho_e + j\omega \mu_0 R d} |H_0|^2 \quad (\text{2.64})$$

g) 根据复数的基本运算法则，取 f) 最后结果的实部，易得。可以看到，这和方法一得到的结果是一致的。

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \rho_e \omega^2 \mu_0^2 R^3 d}{4\rho_e^2 + \omega^2 \mu_0^2 R^2 d^2} |H_0|^2 \quad (\text{S7.14})$$

h) 如图 2.12 所示。

i) 将  $\langle P \rangle$  对  $\rho_e$  求导，并令之为零，有：

$$\frac{d \langle P \rangle}{d \rho_e} \Big|_{\rho_{e_c}} = [**] = 0 \quad (\text{S7.15})$$

解出上式，有

$$\rho_{e_c} = \frac{\omega \mu_0 R d}{2} \quad (\text{2.65})$$

上式在均匀正弦时变磁场施加于导体样品的感应加热应用中非常重要。样品被样品中感应的涡流加热。在趋肤深度频率  $f_{sk}$  下，感应加热最大。

j) 将数值  $R = 1$  cm,  $d = 0.5$  mm,  $\rho_e = 2 \times 10^{-10}$  m(4K 时铜的电阻率)代入公式，有

$$f_{sk} = \frac{\rho_{e_c}}{\pi \mu_0 R d} \simeq 10 Hz \quad (\text{2.59})$$

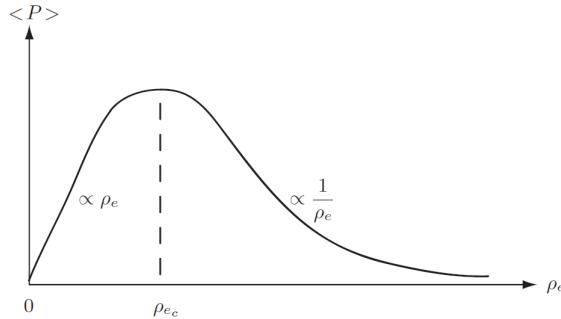


图 2.12: 感应加热圆柱壳的功率耗散和电阻率的关系。

### 2.6.11 问题 2.8: 金属扁带中的涡流损耗

本题推导置于时变磁场中的金属扁带的涡流损耗。这可以用于计算铜基超导带中涡流损耗的计算。(感应电流有用时叫感应加热, 有害时就叫涡流损耗。)

图 2.13 给出了电导率为  $\rho_e$ 、 $y$  向宽为  $b$ 、厚度 ( $z$  向) 为  $a$  的长 ( $x$  向) 金属扁带。扁带置于时变外磁场中。外场满足  $dB_0/dt = \dot{B}_0$ , 即零阶、均匀、 $z$  向。

a) 证明一阶电场  $\vec{E}_1$  为

$$E_{1x} = y\dot{B}_0 \quad (2.66)$$

b) 证明空间平均能耗密度  $\tilde{p}$  (单位体积) 为:

$$\tilde{p} = \frac{(b\dot{B}_0)^2}{12\rho_e} \quad (2.67)$$

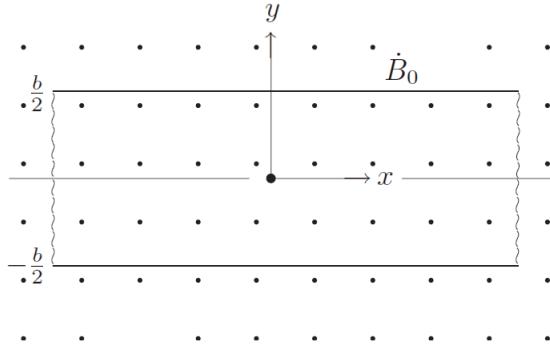
c) 外场以角频率  $\omega$  正弦变化, 即  $B(t) = B_0 \sin \omega t$  时, 证明: 时均能耗密度为:

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{(b\omega\dot{B}_0)^2}{24\rho_e} \quad (2.68)$$

### 问题 2.8 之解

a) 由于  $\vec{B}_0$  时均匀分布的且系统不依赖于  $x$ , 所以  $\vec{E}_1$  只能指向  $x$  方向并且仅依赖于  $y$ 。于是  $\nabla \times \vec{E}_1 = \partial \vec{B}_0 / \partial t$  可以化简为

$$-\frac{dE_{1x}}{dy} = -\frac{B_0}{dt} = -\dot{B}_0 \quad (\text{S8.1})$$

图 2.13: 宽度为  $b$  的金属扁带置于时变磁场中。

根据对称性,  $E_{1x}(y=0)=0$ , 于是, 我们有

$$E_{1x} = y\dot{B}_0 \quad (2.66)$$

b) 扁带中的局部能量损耗密度  $p(y)$  由  $\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_1$  给出。总的损耗 (单位长度) 为

$$P = a \int_{-b/2}^{b/2} p(y) dy = \frac{2a(\dot{B}_0)^2}{\rho_e} \int_0^{b/2} y^2 dy = \frac{ab(b\dot{B}_0)^2}{12\rho_e} \quad (\text{S8.2})$$

上式仅在  $\vec{J}_1$  感应出来的一阶感应磁场相比  $\vec{B}_0$  很小时才有效。

空间平均能耗密度  $\tilde{p}$ (单位体积) 可以由  $P$  除以截面得到:

$$\tilde{p} = \frac{P}{ab} \frac{(b\dot{B}_0)^2}{12\rho_e} \quad (2.67)$$

c) 在外场正弦变化时, 时均能耗密度为:

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{2} E_{1x} J_{1x}^* \quad (\text{S8.3})$$

由于  $E_{1x} = j\omega y B_0$ ,  $J_{1x} = E_{1x}/\rho_e$ , 于是可以得到

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{2a(\omega B_0)^2}{2\rho_e(ab)} \int_0^{b/2} y^2 dy = \frac{(b\omega\dot{B}_0)^2}{24\rho_e} \quad (2.68)$$

我们注意到,  $\tilde{p}$  和  $\langle \tilde{p} \rangle$  分别正比于  $(b\dot{B}_0)^2$  和  $(b\omega\dot{B}_0)^2$ 。也就是说, 两者对感应磁场和导体宽度均为平方依赖关系。

### 2.6.12 讨论 2.4: 分层以减少涡流损耗

假设将扁带劈为两条, 每一条宽度为  $b/2$ , 由上面的分析可以知道, 损耗将变为原来的  $1/4$ 。因此, 可以通过将扁带细分的方法降低涡流损耗。这种切分技术在电力变压器中广泛使用。类似的, 我们将在第 5 章和第 7 章中看到, 超导体也能从切分中获益。

### 2.6.13 问题 2.9: Rogowski 线圈

Rogowski 线圈是时变电流的安培计。它是一种环形拾磁线圈, 其积分输出电压正比于被线圈包围的截面内通过的总电流。图 2.14a 给出了一个 Rogowski 线圈, 待测电流  $I(t)$  置于其中央。如图所示, Rogowski 线圈包括  $N$  个串联的小圆环 (一匝)。每一个半径为  $c$  的圆环的中心位于电流中心的径向  $R$  处。图 2.14b 定义了一匝的  $xy$  坐标。

a) 证明在  $c \ll R$  条件下,  $N$  匝的 Rogowski 线圈的总磁链  $\Phi(t) = N\Phi_1(t)$  为:

$$\Phi(t) \simeq \frac{\mu_0 N c^2}{2R} I(t) \quad (2.69)$$

式中,  $\Phi_1(t)$  是与一匝交链的总磁通。

b) 证明  $\Phi(t)$  的准确表达式为:

$$\Phi(t) = \mu_0 N (R - \sqrt{R^2 - c^2}) I(t) \quad (2.70)$$

将  $N$  匝中的一个放在  $xy$  坐标系的中心来计算  $\Phi(t)$ 。

- c) 证明在极限  $(c/R)^4 \ll 1$  下, b) 退化为 a)。
- d) 证明 b) 中的公式在 Rogowski 线圈的轴线偏离电流的中心时也有效。
- e) 计算一个  $N = 3600; c = 3 \text{ mm}; R = 0.5 \text{ m}$  的 Rogowski 线圈在  $\Delta I(t) = 1 \text{ MA}$  时两端产生的伏秒。

### 问题 2.9 之解

a) 电流  $I(t)$  产生的磁场相对于电流方向是方位角向的。距电流中心距离  $R$  处的  $H_\phi(t)$  表示为:

$$H_\phi(t) = \frac{I(t)}{2\pi R} \quad (\text{S9.1})$$

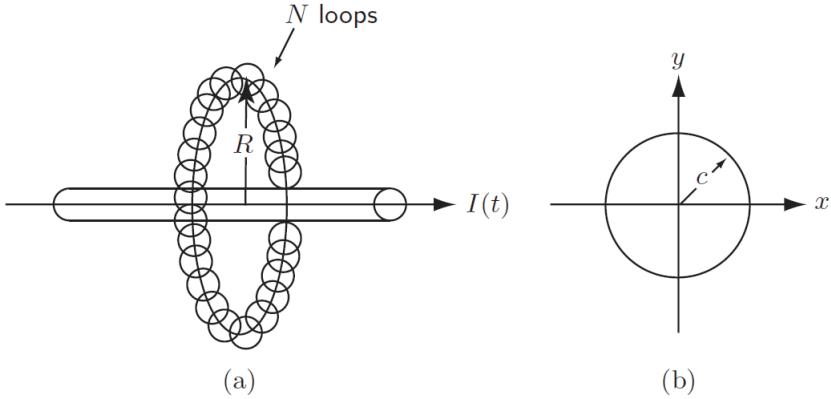


图 2.14: (a)  $N$  匝 Rogowski 线圈, 每匝直径为  $2c$ , 环绕在待测的时变电流  $I(t)$  外围。 (b) 一匝 (半径为  $r$ ) 的截面视图。圆环距离电流中心的距离为  $R$ 。

对于  $c \ll R$ , 上式给出的  $H_\phi(t)$  在每一匝的横截面  $\pi c^2$  上几乎都是成立的。由于 Rogowski 线圈有  $N$  个这样的回路, 我们有:

$$\Phi(t) \simeq \frac{\mu_0 N c^2}{2R} I(t) \quad (2.69)$$

Rogowski 线圈输出电压  $V(t)$  于是可以写为:

$$V(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 N c^2}{2R} \frac{dI(t)}{dt} \quad (\text{S9.2})$$

b) 因为  $H_\phi(t)$  在每一个环上并非常数，每一匝包围的总磁通  $\Phi_1(t)$  应由沿回路围成的区域的积分得到。注意到  $x^2 + y^2 = c^2$ ，定回路中心坐标为  $(0, 0)$ ， $\Phi_1(t)$  表示为：

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_{-c}^c \int_{-\sqrt{c^2-y^2}}^{\sqrt{c^2-y^2}} \frac{1}{R+y} dx dy$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\sqrt{c^2-y^2}}{R+y} dy \quad (\text{S9.3})$$

上式可以使用新变量  $\xi \equiv R + y$  得到闭式解（注意： $d\xi = dy$ ）。于是，有：

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= \frac{\mu_0 I(t)}{\pi} \int_{R-c}^{R+c} \frac{\sqrt{c^2 - R^2 + 2R\xi - \xi^2}}{\xi} d\xi \\ &= \mu_0(R - \sqrt{R^2 - c^2})I(t)\end{aligned}\quad (\text{S9.4})$$

$N$  匝的 Rogowski 线圈交链的总磁通  $\Phi(t) = N\Phi_1(t)$ :

$$\Phi(t) = \mu_0 N(R - \sqrt{R^2 - c^2})I(t) \quad (2.70)$$

c) 上式可以写为:

$$\Phi(t) = \mu_0 NI(t)(R - R\sqrt{1 - \frac{c^2}{R^2}}) \quad (\text{S9.5})$$

由于对  $x \ll 1$ ,  $\sqrt{1-x} \simeq 1 - (1/2)x + (1/8)x^2 - \dots$ , 截取到二阶, 所以

$$\Phi(t) \simeq \mu_0 N \left[ R - R \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{R^2} + \dots \right) \right] \quad (\text{S9.6})$$

$$\Phi(t) \simeq \frac{\mu_0 N c^2}{2R} I(t) \quad (2.69)$$

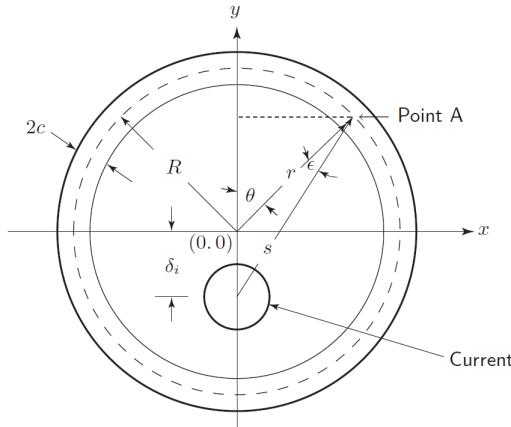


图 2.15:  $(x, y)$  面上的横截面视图。

d) 图 2.15 给出正交于电流/Rogowski 线圈组方向的横截面  $(x, y)$ , 其中 Rogowski 中心位于  $(0, 0)$ , 电流中心在 Rogowski 线圈中心向下偏离  $\delta_i$ 。关键参数如图中定义:  $r$  为 Rogowski 中心  $(0, 0)$  到一匝线圈上的点  $A$  的径向距离;  $\theta$  是  $y$  轴和  $r$  之间的夹角;  $s$  是电流中心到点  $A$  的距离;  $\epsilon$  是  $r$  与  $s$  之间形成的角。 $s^2$  写为:

$$s^2 = (r \cos \theta + \delta_i)^2 + r^2 \sin^2 \theta = r^2 + \delta_i^2 + 2r\delta_i \cos \theta \quad (\text{S9.7})$$

将  $r$  延长  $\delta_i \cos \theta$  形成一个直角, 我们有:

$$\cos \epsilon = \frac{r + \delta_i \cos \theta}{s} \quad (\text{S9.8})$$

点  $A$  处的磁场由  $H_A(t) = I(t)/2\pi s$  给出；它在 Rogowski 线圈回路上点  $A$  处的法向分量为：

$$H_{A\perp} = \frac{I(t)}{2\pi s} \cos \epsilon = \frac{I(t)}{2\pi s} \left( \frac{r + \delta_i \cos \theta}{s} \right) \quad (\text{S9.9})$$

将上式与  $s^2$  的表达式联立，得到：

$$H_{A\perp} = \frac{I(t)}{2\pi} \left( \frac{r + \delta_i \cos \theta}{r^2 + \delta_i^2 + 2r\delta_i \cos \theta} \right) \quad (\text{S9.10})$$

为了计算  $\Phi(t)$ ，S9.10 乘上  $(N/2\pi)2\sqrt{c^2 - (r-R)^2}$  必须积分两次：第一次对  $\theta$  从  $0$  至  $2\pi$  积分，视径向距离  $r$  为常数，计及  $N$  匝；第二次对  $R$  从  $R - c$  到  $R + c$  积分。注意到  $2\sqrt{c^2 - (r-R)^2}$  是每一匝直径为  $c$  的线圈在  $r$  处总的弦距离 ( $z$  向)，它位于距离回路中心的  $r - R$  处。

$$\Phi(t) = \frac{NI(t)}{2\pi^2} \int_{R-c}^{R+c} \int_0^{1\pi} \left[ \frac{(r + \delta_i \cos \theta)\sqrt{c^2 - (r - R)^2}}{r^2 + \delta_i^2 + 2r\delta_i \cos \theta} \right] d\theta dr \quad (\text{S9.11a})$$

$$= \frac{NI(t)}{\pi} \int_{R-c}^{R+c} \left[ 0 + \frac{\sqrt{c^2 - (r - R)^2}}{r} \right] dr \quad (\text{S9.11b})$$

注意到积分中完全没有  $\delta_i$ 。下面，S9.11b 沿着一匝的径向从  $r = R - c$  到  $r = R + c$  积分，有：

$$\Phi(t) = \frac{NI(t)}{\pi} \left[ \pi(R - \sqrt{R^2 - c^2}) \right] \quad (\text{S9.11c})$$

可见，Rogowski 线圈可以精确的测量电流  $I(t)$ ，不管它与其套入的电流是否同心。

e) 对于  $N = 3600, c = 3$  mm;  $R = 0.5$  m;  $\Delta I = 1$  mA，公式 2.69 可以应用，因为  $(c/R)^4 = 1.3 \times 10^{-9} \ll 1$ 。这样，由 S9.2 得：

$$\int V(t)dt = \frac{\mu_0 N c^2 \Delta I}{2R} \simeq 41 \text{ mVs}$$

在一个噪音环境中，比如典型的试验聚变机器中，测到 40 mVs 级别的信号水平并不简单，但也不是完全得不到。

正如我们所知，有已知的已知，他们是我们知道我们知道的；  
我们也知道有些是已知的未知。这就是说我们知道有些事情我们  
是不知道的。但是还有未知的未知——这些事我们不知道我们不  
知道。——Donald Rumsfeld, 2002

# 第三章 磁体，场，力

## 3.1 引言

本章我们研究与磁体、磁场、力相关的关键问题。涉及到的磁体包括：1) 单螺管磁体和多螺管磁体；2) Helmholtz 线圈和高均匀场磁体；3) 理想双极磁体；4) 理想四极磁体；5) 跑道线圈；6) 理想环形磁体。两种用于产生高场的重要螺管磁体——Bitter 磁体和混合磁体——也将会论及。其他问题，如负载线、最小体积磁体、叠加技术等将在专题中研究。

如今，场与力通常都由软件计算。给定磁体的配置，软件就能得到任意位置的精确数值解。这些软件也能计算线圈的自感与互感，以及施加于其上的 Lorentz 力。本章推导的分析表达式虽然仅限于给出特点位置（如中心）的场值，但这些表达式展现了场、力、磁体参数的相互关系。

我们首先研究 Biot-Savart 定律，本定律是无磁性材料存在时计算由电流产生的磁场的基础。接下来是些扩展性的问题：1) 场分析；2) 环形薄螺管的轴向力；3) 螺管内的应力应变；4) 自感和互感。

## 3.2 Biot-Savart 定律

位于 O 点的电流源  $Id\vec{s}$  在距离其  $r$  远处的 P 点产生的磁场  $d\vec{H}$  为：

$$d\vec{H} = \frac{(Id\vec{s} \times \vec{r})}{4\pi r^3} \quad (3.1)$$

方程 3.1 即是 Biot-Savart 定律（又称 Laplace 第一定律）。方程表明，任意位置的  $d\vec{H}$  的幅值反比于该位置到电流元的距离平方： $|d\vec{H}| \propto 1/r^2$ 。对于给定的半径， $|d\vec{H}|$  随  $\sin \theta$  变化， $\theta$  是矢量  $\vec{s}$  和  $\vec{r}$  的夹角。下面，我们推导位于  $z = 0$  处的载流为 I 的闭合线圈在 ( $z$ ) 轴上的磁场的表达式，如图

3.1 所示。回路的对称轴为  $z$  轴,  $\theta$  从  $z = 0$  平面起。 $\phi$ (图中未给出) 是方位角的方向。

可知,  $\vec{H}$  的  $r$  分量,  $H_r$  在  $z$  轴上的任何位置都是抵消的, 仅剩下  $z$  分量,  $dH_z = |d\vec{H}| \cos \theta$ 。在这个特例下, 方程 3.1 中的右侧部分可简化为  $(Id\vec{s} \times \vec{r}) = (Id\vec{s} \times \vec{r})_z = Iar \cos \theta d\phi$ , 于是

$$H_z = \int_0^{2\pi} \frac{Iar \cos \theta}{4\pi r^3} d\phi = \frac{Ia \cos \theta}{2r^2} \quad (3.2)$$

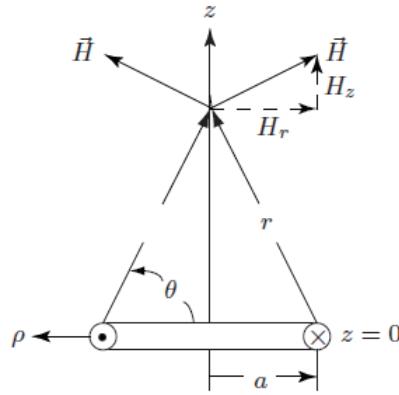


图 3.1: 半径为  $a$  的闭合回路通过电流  $I$ 。

式中,  $\cos \theta = a/r$ ,  $r^2 = a^2 + z^2$ , 于是  $H_z(z, \rho)$  在  $z$  轴上 ( $\rho = 0$ ) 成为:

$$H_z(z, 0) = \frac{a^2 I}{2r^3} = \frac{a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.3a)$$

$$H_z(z, 0) = \frac{H_z(0, 0)}{(1 + (z/z)^2)^{3/2}} \quad (\text{以中心处磁场 } H_z(0, 0) \text{ 表示}) \quad (3.3b)$$

专题中将以实例进行进一步的讨论。

### 3.3 Lorentz 力和磁压

在有磁感应强度  $\vec{B}$  存在时, 以速度  $v$  运动的电荷  $q$  会受到力  $\vec{F}_L$ , 此力称为 Lorentz 力:  $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$ 。对于一个电流密度为  $J$  的导体, 在磁场

$\vec{B}$  中, 所受 Lorentz 力密度为

$$\vec{f}_L = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.4)$$

方程 3.4 是磁体中电磁力和应力的基本表达式。如第一章开始提到的, 不管是以超导运行于 1.8-80 K, 还是以有阻态运行于室温, 产生相同磁场的磁体所需要处理的应力水平基本是一样的。磁体的极限磁场为结构部件和载流导体的强度所限。这样看, 一个 50 T 的超导磁体——如果可能的话——和一个 50 T 有电阻磁体都必须承受巨大的 Lorentz 应力。下文将说明, 一个 50 T 磁体的等效磁压约为 1 GPa(10000 atm)。

考虑一个无限长的薄壁螺线管, 半径为  $2a$ , 通以均匀分布的电流 (为了简化为面电流密度  $K_\theta$ [A/m] 计算)。 $(0, 0)$  处的磁感应强度的  $z$  分量为

$$B_z = \frac{\mu_0 a^2 K_\theta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0 K_\theta \equiv B_0 \quad (3.5)$$

由于电流环的分布是从  $z = -\infty$  到  $z = \infty$  的, 积分包括整个  $z$  轴。应用 Ampere 定律, 可知对于无限长螺管, 螺管外 ( $r > a$ ) 的  $\vec{B}$  为零; 螺管内在  $z$  和  $r$  两个方向都是均匀的  $B_0$ 。也就是说, 无限长螺管的室温孔内的磁场时完全均匀的, 并且仅在  $z$  向。

绕组内部的  $B_z$  是  $B_0$ , 外部是 0, 在管壁厚度  $\delta$  方向线性正比于  $r$  衰减。所以, 平均磁感应强度  $\bar{H}_z$  是  $B_0/2$ 。因而,  $r$  方向施于线圈上的平均 Lorentz 力密度为

$$f_{L_r} \vec{i}_r = \frac{K_\theta}{\delta} B_z \vec{i}_r = \frac{K_\theta B_0}{2\delta} \vec{i}_r \quad (3.6)$$

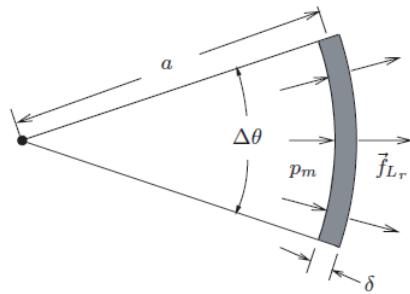


图 3.2: 平均直径为  $2a$  的薄壁螺管 (壁厚  $\delta$ ) 的微元的轴向视角

作用于线圈体积元上的  $r$  向的 Lorentz 力  $F_{L_r} \vec{i}_r$  等价于作用于线圈表

面元上的磁压  $p_m \vec{i}_r$ 。于是

$$F_{L_r} \vec{i}_i = f_{L_r} [(a\Delta\theta)\delta\Delta z] \vec{i}_r = p_m [(a\Delta\theta)\Delta z] \vec{i}_r \quad (3.7)$$

联立上式, 可得

$$p_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (3.8)$$

也即, 磁压等于磁能密度。如果磁感应强度  $B_0 = 1 \text{ T}$ , 可算得磁压为  $3.98 \times 10^5 \text{ Pa}$  或者  $4 \text{ atm}$ 。容易算出如果  $B_0 = 50 \text{ T}$ , 磁压将达到  $1 \text{ GPa}$ 。

### 3.4 螺管线圈的场分析

本节, 我们将推导出对分析高空间场均匀性的 MRI 和 NMR 磁体有用的闭式场表达式以及简单线圈 (“长”、“薄”) 的表达式。在螺管线圈设计的开始阶段, 可以用这些表达式来对场的均匀性 “找找感觉”。

图 3.3 给出的是一个内径、外径和长度分别为  $2a_1, 2a_2, 2b$  的螺管线圈的剖面图。从磁力线可以看出, 线圈产生的磁场在室温孔内主要是轴向的, 除了线圈的对称轴和轴平面上的径向, 磁力线都是发散的, 室温孔外尤甚。用于螺管线圈磁场分析的两个无量纲常数为:  $\alpha \equiv 2a_2/2a_1 = a_2/a_1$  和  $\beta \equiv 2b/2a_1 = b/a_1$ 。外径和长度都规范化为内径了。

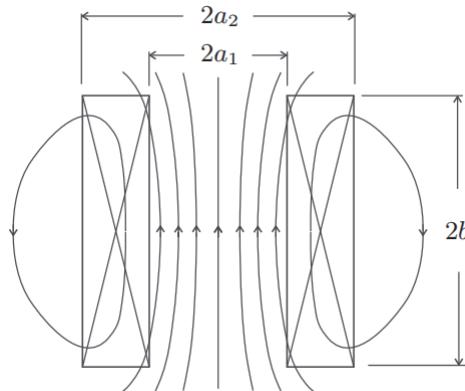


图 3.3: 螺管线圈的截面视图

在球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  下, 任何电流体系和/或磁性材料产生的  $z$  向磁场

$H_z(r, \theta, \phi)$  在除源以外空间可以写为:

$$H_z(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n (n+m+1) P_n^m(u) (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) \quad (3.9)$$

式中,  $P$  是 Legendre 多项式。

$A_n^m$  和  $B_n^m$  是常数, 通常除了  $A_0^0$  和  $B_0^0$  都是要被最小化的, 因为它们是引起不均匀性的项。 $A_n^m$  和  $B_n^m$  可以通过调节磁体中每一个线圈的参数来最小化。这些参数包括线圈内径、外径、长度、中平面相对于磁中心的位置、总体电流密度等。简单说, 所有与磁场的空间分布有关的参数都仅仅是无量纲参数  $\alpha, \beta$  的函数。

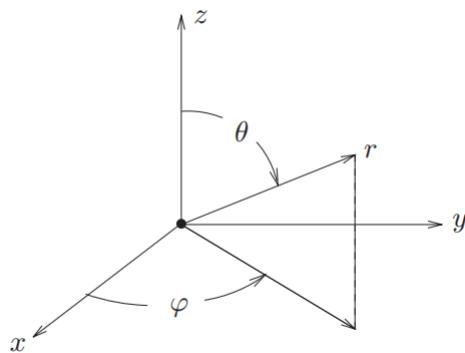


图 3.4: 圆柱坐标系。

螺管系统中, 所有的电流密度与  $\phi$  无关, 即存在轴对称性。此时, 仅  $m = 0$  的项保留。沿着  $z$  轴 ( $r = z, \theta = 0$ ) 和沿着中平面上的  $x$ (或  $y$ ) 轴 ( $x, \theta = 90^\circ$ ), 磁场化简:

$$H_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (n+1) A_n^0 \quad (3.10a)$$

$$H_z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n x^n (n+m+1) P_n^m(0) A_n^m \quad (3.10b)$$

上式第一式不含 Legendre 函数, 因为  $P_n^0(1) = P_n(1) = 1$ 。第二式中, 注意到当  $n =$  偶数且  $m =$  奇数时,  $P_n^m(0) = 0$ 。代入  $n$  和  $m$  的 0, 2, 4 三

个值, 我们可以写出笛卡尔坐标系下的  $H_z(x)$

$$H_z(z) = A_0^0 + 3A_2^0 z^2 + 5A_4^0 z^4 + \dots \quad (3.11a)$$

$$H_z(x) = A_0^0 - \left(\frac{3}{2}A_2^0 - 15A_2^2\right)x^2 + \left(\frac{15}{8}A_4^0 - \frac{105}{2}A_4^2 + 945A_4^4\right)x^4 + \dots \quad (3.11b)$$

式中,  $A_0^0$  是磁体中心  $(0, 0, 0)$  的场:  $A_0^0 \equiv H_0$ 。理想螺管中, 对于  $m > 0$  时, 系数为 0:  $A_0^0 = 0$ 。对于  $n > 0, m = 0$  时,  $A_n^0$  是线圈参数  $\alpha, \beta$  的函数。引入  $h_z(\zeta) \equiv H_z(z)/H_0$ , 此处  $\zeta \equiv z/a_1, h_z(\xi) \equiv H_z(x)/H_0, \xi \equiv x/a_1$ , 我们得到

$$\begin{aligned} h_z(\zeta) = & 1 + E_2(\alpha, \beta)\zeta^2 + E_4(\alpha, \beta)\zeta^4 \\ & + E_6(\alpha, \beta)\zeta^6 + \dots \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} h_z(\xi) = & 1 - \frac{1}{2}E_2(\alpha, \beta)\xi^2 + \frac{3}{8}E_4(\alpha, \beta)\xi^4 \\ & - \frac{5}{16}E_6(\alpha, \beta)\xi^6 + \dots \end{aligned} \quad (3.12b)$$

注意到  $\zeta^2$  的系数仅为  $\zeta^2$  系数异号的一半,  $\zeta^4$  的系数为  $\zeta^4$  同号的  $3/8$ 。实际上, 平面方向的任何系数在数值上都小于  $z$  向。所以,  $x$  和  $y$  方向的场的不均匀性要比  $z$  向小。

中心场  $H_0 (\equiv A_0^0)$  由下式给出:

$$H_0 = \lambda J a_1 F(\alpha, \beta) = \lambda J a_1 \beta \ln \left[ \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right] \quad (3.13a)$$

$$F(\alpha, \beta) = \beta \ln \left[ \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right] \quad (3.13b)$$

式中,  $F(\alpha, \beta)$  是均匀电流密度线圈的“磁场因子”。上式的衍生问题在专题 3.1 进行讨论。 $E_n(\alpha, \beta)$  在  $n = 2, 4, 6, 8, 10$  时的表达式在下面以  $F(\alpha, \beta)$  和  $E_n(\alpha, \beta)$  的乘积的形式给出 [3.3]。除了 2 阶外, 高阶的表达式

都使用积分上下限的简洁表达形式。

$$F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\beta} \left[ \frac{1}{(1 + \beta^2)^{1.5}} - \frac{\alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1.5}} \right] \quad (3.14a)$$

$$F(\alpha, \beta)E_4(\alpha, \beta) = -\frac{r^3}{24\beta^3} \left[ \frac{2r^4 + 7r^2\beta^2 + 20\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3.5}} \right] \Big|_{r=1}^{r=\alpha} \quad (3.14b)$$

$$F(\alpha, \beta)E_6(\alpha, \beta) = -\frac{r^3}{240\beta^5} \left[ \frac{8r^8 + 44r^6\beta^2 + 99r^4\beta^4 + 28r^2\beta^6 + 280\beta^8}{(\alpha^2 + \beta^2)^{5.5}} \right] \Big|_{r=1}^{r=\alpha} \quad (3.14c)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta)E_8(\alpha, \beta) = & -\frac{r^3}{896\beta^7} \left[ \left( 16r^{12} + 120r^{10}\beta^2 + 390r^8\beta^4 + 715r^6\beta^6 \right. \right. \\ & \left. \left. + 1080r^4\beta^8 - 1008r^2\beta^{10} + 1344\beta^{12} \right) / (\alpha^2 + \beta^2)^{7.5} \right] \Big|_{r=1}^{r=\alpha} \end{aligned} \quad (3.14d)$$

$F(\alpha, \beta)E_n(\alpha, \beta)$  是一个递归式，第  $n$  阶项从下式第一式导出。第二式是  $F(\alpha, \beta)E_n(\alpha, \beta)$  的另一种表达形式。

$$F(\alpha, \beta)E_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \beta} [F(\alpha = 1, \beta)E_{n-1}(\alpha = 1, \beta) - F(\alpha, \beta)E_{n-1}(\alpha, \beta)] \quad (3.15a)$$

$$F(\alpha, \beta)E_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{M_n \beta^{n-1}} \left[ \frac{f_n(\alpha = 1, \beta)}{(1 + \beta^2)^{n-0.5}} - \frac{\alpha^3 f_n(\alpha, \beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{n-0.5}} \right] \quad (3.15b)$$

式中， $M_n$  是一个常数。附录给出了  $n = 2, 3, 4, \dots, 20$  时的  $M_n$  和  $f_n(\alpha, \beta)$  的值。20 之下的偶数  $f_n$  用来求解磁场问题。

一般来说（但也不全是）， $z$  轴向磁场  $H_z(z)$  的均匀性要比  $z$  轴法平面上的均匀性更好。故，我们仅考虑  $z$  轴向磁场，并给出其一般形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_z(\zeta)}{\partial \zeta^2} &= [2E_2(\alpha, \beta) + (4)(3)E_4(\alpha, \beta)\zeta^2 + \dots] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n)(2n-1)E_{2n}(\alpha, \beta)\zeta^{2(n-1)} \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial^{2k} h_z(\zeta)}{\partial \zeta^{2k}} = \sum_{n=k}^{\infty} (2n)(2n-1)(\dots)(2n-2k+1)E_{2n}(\alpha, \beta)\zeta^{2(n-k)} \quad (3.16b)$$

在原点处， $\zeta = 0$ 。上两式由于仅第一项非零，可以化为更简单的形式

$$\frac{\partial^2 h_z(\zeta)}{\partial \zeta^2} \Big|_0 = 2E_2(\alpha, \beta) \frac{\partial^{2k} h_z(\zeta)}{\partial \zeta^{2k}} \Big|_0 = (2k)! E_{2k}(\alpha, \beta) \quad (3.17a)$$

### 嵌套线圈磁体

由  $\ell$  个线圈同心同轴嵌套的磁体, 3.12a 式仅给出  $\zeta^2$  项, 对每一组  $\lambda J, a_1, \alpha, \beta$ , 有通用表达式

$$h_z(\zeta) = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{\ell} (\lambda J)_l a_{1j} F(\alpha_j, \beta_j) E_2(\alpha_j, \beta_j)}{\sum_{j=1}^{\ell} (\lambda J)_j a_{1j} F(\alpha_j, \beta_j)} \zeta^2 + \dots \quad (3.18)$$

#### 3.4.1 简单线圈

本节我们推导“简单”线圈的  $E_n(\alpha, \beta)$  和  $h_z(\zeta)$  在 10 阶以下的表达式。各  $h_z(\zeta)$  的表达式可以给设计者在不依赖于磁场分析专家时, 对考虑线圈尺寸(即  $\alpha, \beta$ )的线圈的场的均匀性有一个“感觉”。

##### “短”线圈

短线圈 ( $\beta \rightarrow 0$ ), 如饼式线圈, 其  $F(\alpha, \beta)$  简化为

$$F(\alpha, \beta \rightarrow 0) = \beta \ln \alpha \quad (3.19)$$

通过枯燥的推导, 从 3.14 可以得出  $E_2, \dots, E_{10}$ 。在  $\beta \rightarrow 0$  极限下,  $f_n(\alpha, \beta)$  分母  $(1 + \beta^2)^{n-0.5}$  可以展开为  $\beta^{2k}$  的级数, 取前  $n$  项。整数  $k$  取遍 1 至  $n/2$ 。

$$\frac{1}{(1 + \beta^2)^{n-0.5}} = 1 - \dots + (-1)^k (n - 0.5) \cdots (n + k - 1.5) \frac{\beta^{2k}}{k!} \quad (3.20)$$

在  $\beta \rightarrow 0$  极限下, 上式右侧高于  $\beta^n$  的项为高阶小, 可以忽略。同时, 所有小于  $\beta^n$  的项都被约掉, 仅剩下  $\beta^n$  项。

$$E_2(\alpha, 0) = -\frac{3}{2^2} \frac{(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 \ln \alpha} = -\frac{3(\alpha^2 - 1)}{4\alpha^2 \ln \alpha} \quad (3.21a)$$

$$E_4(\alpha, 0) = \frac{15(\alpha^4 - 1)}{32\alpha^4 \ln \alpha} \quad (3.21b)$$

$$E_6(\alpha, 0) = -\frac{35(\alpha^6 - 1)}{96\alpha^6 \ln \alpha} \quad (3.21c)$$

$$E_8(\alpha, 0) = \frac{315(\alpha^8 - 1)}{1024\alpha^8 \ln \alpha} \quad (3.21d)$$

$$E_{10}(\alpha, 0) = -\frac{693(\alpha^{10} - 1)}{2560\alpha^{10} \ln \alpha} \quad (3.21e)$$

方程 3.12a 于是成为

$$h_z(\zeta) = 1 - \frac{3(\alpha^2 - 1)}{4\alpha^2 \ln \alpha} + \frac{15(\alpha^4 - 1)}{32\alpha^4 \ln \alpha} - \frac{35(\alpha^6 - 1)}{96\alpha^6 \ln \alpha} + \dots \quad (3.22)$$

### “薄壁” 线圈

对于薄壁线圈 ( $\alpha = 1$ ),  $F(\alpha, \beta)$  成为

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} F(\alpha, \beta) = \beta \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (3.23a)$$

$$= \frac{\beta(\alpha - 1)}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (3.23b)$$

联立 3.13 和上式, 得到:

$$E_2(1, \beta) = -\frac{3}{2(1 + \beta^2)^2} \quad (3.24a)$$

$$E_4(1, \beta) = \frac{5(3 - 4\beta^2)}{2^3(1 + \beta^2)^4} \quad (3.24b)$$

$$E_6(1, \beta) = -\frac{7(5 - 20\beta^2 + 8\beta^4)}{2^4(1 + \beta^2)^6} \quad (3.24c)$$

$$E_8(1, \beta) = \frac{9(35 - 280\beta^2 + 336\beta^4 - 64\beta^6)}{2^7(1 + \beta^2)^8} \quad (3.24d)$$

$$E_{10}(1, \beta) = -\frac{11(63 - 840\beta^2 + 2016\beta^4 - 1152\beta^6 + 128\beta^8)}{2^8(1 + \beta^2)^{10}} \quad (3.24e)$$

于是, 对于薄壁线圈, 我们有:

$$h_z(\zeta) = 1 - \frac{3}{2(1 + \beta^2)^2} + \frac{5(3 - 4\beta^2)}{2^3(1 + \beta^2)^4} + \dots \quad (3.25)$$

### “薄壁且长” 线圈

对于 “薄壁且长” 线圈 ( $\alpha = 1, \beta \rightarrow \infty$ ), 3.25 式简化为

$$h_z(\zeta) = 1 - \frac{1.5}{\beta^4} \zeta^2 - \frac{2.5}{\beta^6} \zeta^4 - \frac{3.5}{\beta^8} \zeta^6 - \dots - \frac{n+1}{2\beta^{n+2}} \zeta^n \quad (3.26)$$

从上式可以得出, 在  $\beta \rightarrow \infty$  极限下,  $E_n(1, \beta) = -(n+1)/2\beta^{(n+2)}$ 。正如我们所预期的, 随线圈长度增加, 均匀度提高。

### “环” 线圈

对环形线圈 ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ),  $E_n(\alpha, \beta)$  可由 3.21 在极限  $\alpha = 1$  以及 3.25 在极限  $\beta = 0$  下推出。在 3.21 中,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n \ln \alpha} = n \quad (3.27)$$

联立 3.21 和上式，或者简单的在 3.24 式中令  $\beta = 0$ ，可以得到同样的结果：

$$E_2(1, 0) = -\frac{3}{2} = -1.5 \quad (3.28a)$$

$$E_4(1, 0) = \frac{3 \cdot 5}{2^3} = 1.875 \quad (3.28b)$$

$$E_6(1, 0) = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \simeq -2.188 \quad (3.28c)$$

$$E_8(1, 0) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \simeq 2.461 \quad (3.28d)$$

$$E_{10}(1, 0) = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \simeq -2.707 \quad (3.28e)$$

于是

$$h_z(\zeta) = 1 - 1.5\zeta^2 + 1.875\zeta^4 - 2.188\zeta^6 + \dots \quad (3.29)$$

### 3.4.2 失配误差—嵌套双线圈磁体

方程 3.12 表明， $h_z(\zeta)$  和  $h_z(\xi)$ (其中， $h_z(\zeta) \equiv H_z/H_0, \zeta \equiv z/a_1, \xi \equiv x/a_1$ ) 都仅与  $\zeta$  或  $\xi$  的偶次幂有关。也即，两个方程都表达了“理想”螺线管或者此种“理想”嵌套螺管的轴向场的空间变化。在这里，“理想”指的是空间对称性、均匀性以及电流密度的不变性。

哪怕对一个单螺管，现实也是很不同的：线圈形状的瑕疵；导体尺寸和形状；导体的放置导致不仅与偶次幂有关。如果一个磁体是由嵌套线圈组成的，可能的瑕疵就更多了，会出现很多“不希望”的项。下面，我们将展示嵌套双线圈磁体失谐的起源。

考虑一个双螺管线圈嵌套磁体，参数为  $[2a_1]_1, \alpha_1, \beta_1, [\lambda J]_1$  的螺管线圈 1 嵌入参数为  $[2a_1]_2, \alpha_2, \beta_2, [\lambda J]_2$  的螺管线圈 2 内。如果两个线圈在轴向和径向都对齐的话，有：

$$H_z(z) = [H_z(z)]_1 + [H_z(z)]_2 \quad (3.30)$$

式中， $[H_z(z)]_1$  和  $[H_z(z)]_2$  由下式给出：

$$[H_z(z)]_1 = [A_0^0]_1 + 3[A_2^0]_1 z^2 + 5[A_4^0]_1 z^4 + \dots \quad (3.31a)$$

$$[H_z(z)]_2 = [A_0^0]_2 + 3[A_2^0]_2 z^2 + 5[A_4^0]_2 z^4 + \dots \quad (3.31b)$$

注意到，中心的总轴向场有： $H_z(0) = [A_0^0]_1 + [A_0^0]_2 \equiv H_0$

### 线圈轴向失配

如果线圈 1 和线圈 2 在径向是对齐的，即同轴。但是两个线圈的中心面未对齐，分别在  $z = 0$  和  $z = \delta_z$ 。这样，3.31 中的  $H_z(z)$  成为下式。第二式是第一式按幂次展开的情形。

$$\begin{aligned} H_z(z) = & H_0 + 3\{[A_2^0]_1 z^2 + [A_2^0]_2(z - \delta_z)^2\} \\ & + 5\{[A_4^0]_1 z^4 + [A_4^0]_2(z - \delta_z)^4\} + \dots \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\begin{aligned} H_z(z) = & \{H_0 + 3[A_2^0]_2 \delta_z^2 + 5[A_4^0]_2 \delta_z^4 + \dots\} \\ & - \{6[A_2^0]_2 \delta_z + 20[A_4^0]_2 \delta_z^3 + \dots\} + \dots \end{aligned} \quad (3.32b)$$

从上式可以看出，线圈 1 和线圈 2 的轴向失配  $\delta_z$  不仅影响了各含  $z$  项的系数，更重要的，还增加了  $z$  的奇次幂项，这导致  $H_z(z)$  在轴向不在对称。

在实际由许多线圈嵌套组成的 NMR 磁体中，轴向失配是不可避免的。例如，含  $z$  项要么扩大 NMR 谱线，要么引起谱线中各峰值的“下沉”。 $z^3$  项同样扩大了谱线，不过主要是在偏离中心频率的地方。

### 轴向补偿线圈

那些“不希望”的项可以经由超导磁体内部增加的补偿/校正线圈最小化。甚至，补偿线圈还可以布置在探测器和低温容器室温孔之间的径向间隙中。

最小化  $z$  的偶次幂项的补偿线圈本质上是“Helmholtz”线圈，其基本问题我们将在问题 3.3 中研究。最小化  $z$  的奇次幂的补偿线圈同样是 Helmholtz 类型的，但是它的一个线圈是反极性的，以产生轴向反对称场。

### 线圈径向失配

为了研究径向失配的嵌套双线圈磁体的磁场的空间变化，我们首先在笛卡尔坐标系中写出单个螺线管的  $H_z(x, y, z)$ 。从方程 3.11 和 Legendre 函数表的  $n = 0, n = 2, n = 4$  条，我们有：

$$H_z(x, y, z) = A_0^0 + 3A_2^0[z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)] + 5A_4^0\{z^4 - 3(x^2 + y^2)[z^2 - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)]\} \quad (3.33)$$

当线圈 2 相对于线圈 1 在径向失配, 在  $x$  方向失配  $\delta_x$ , 在  $y$  方向失配  $\delta_y$ 。我们将上式中的  $x$  和  $y$  分别用  $x - \delta_x$  和  $y - \delta_y$  替换, 有:

$$H_z(x, y, z) = H_0 + 3() + 5() + [A_4^0]_2() \quad (3.33')$$

上面的展开式包含很多项, 包括  $x, x^2, x^3, x^4, y, y^2, y^3, y^4, xy, xy^2, z^2, z^2x\dots$  等等。

一个  $x$  向补偿线圈通常由一对薄的 (一层或几层导体厚) 成型为“鞍状”以适应磁体的外圆柱表面并且其轴向沿  $\phi = 0(x)$  方向布置的长方形线圈构成。它产生一个随  $x$  增大的  $z$  向磁场, 在  $z$  轴 ( $x = 0$ ) 处为 0。类似的,  $y$  向补偿线圈和  $xy$  补偿线圈分别是沿着  $\phi = 90^\circ$  和  $\phi = 45^\circ$  成对布置的。每个线圈产生一个  $z$  向磁场, 随  $z$  轴增大。

### 线圈轴向、径向均失配

当嵌套线圈在轴向和径向均失配的时候——实际 NMR 中不可避免的结果—— $xz, yz, xyz$  及其他更多的失调会产生。

## 3.5 轴向力

本节给出轴向对齐环形线圈、薄壁螺管线圈等的轴向力  $F_z$  的解析表达式。这些表达式都是从 Garrett [3.5] 给出的公式推导出来的。极限情况下 (比如相距很远的线圈) 的近似表达式有助于快速的数值检查; 另一些公式或许可以用于为写自己的计算代码做基础。所有的案例中, 电流都是同向流动的, 任一个电流的反向都将导致力的反向。

### 3.5.1 两个“环”线圈间的轴向力

图 3.5 给出了距离为  $\rho$ 、轴向分立的两个“环”线圈 ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )。线圈 A 和线圈 B 的直径分别为  $2a_A$  和  $2a_B$ , 总的安匝数分别为  $N_A I_A$  和  $N_B I_B$ 。每个线圈产生的轴向场都指向同一方向。线圈 B 施于线圈 A 的轴向力  $F_{zA}(\rho)$  为:

$$F_{zA}(\rho) = \frac{\mu_0}{2} (N_A I_A)(N_B I_B) \frac{\rho \sqrt{(a_A + a_B)^2 + \rho^2}}{(a_A - a_B)^2 + \rho^2} \times \{k^2 K(k) + (k^2 - 2)[K(k) - E(k)]\} \quad (3.34)$$

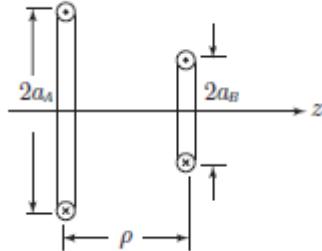
图 3.5: “环”线圈 A 和 B 同轴对齐，距离上相距  $\rho$ 

表 3.1: 第一类和第二类椭圆积分参数值

$k^2$	$k$	$K(k)$	$E(k)$	$k^2$	$k$	$K(k)$	$E(k)$
0	0	$\pi/2$	$\pi/2$	0.7	0.8367	2.0754	1.2417
0.1	0.3162	1.6124	1.5308	0.8	0.8944	2.2572	1.1785
0.2	0.4472	1.6596	1.4890	0.9	0.9487	2.5781	1.1048
0.3	0.5477	1.7139	1.4454	0.95	0.9747	2.9083	1.0605
0.4	0.6325	1.7775	1.3994	0.98	0.9899	3.3541	1.0286
0.5	0.7071	1.8541	1.3506	0.99	0.9950	3.6956	1.0160
0.6	0.7746	1.9496	1.2984	1	1	$\infty$	1

$F_{zA}(\rho)$  是  $+z$  向或者说是指向线圈 B 的；也即， $F_{zA}(\rho)$  是吸引力。如果两个电流的方向相反，符号变为-，力变成斥力。上式中， $K(k)$  和  $E(k)$  分别是第一类和第二类完全椭圆积分，定义为：

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.35a)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (3.35b)$$

本系统椭圆积分的模量  $k$  由下式决定：

$$k^2 = \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2 + \rho^2} \quad (3.36)$$

表 3.1 给出了部分  $k$  和  $k^2$  值下的  $K(k)$  和  $E(k)$ 。注意到， $K(0) = E(0) = \pi/2$ ；还注意到， $K(1) = \infty$  以及  $E(1) = 1$ ，也即  $K(k)$  是随  $k$  增

加而增加的,  $E(k)$  随  $k$  增加而减小。 $K(k)$  和  $E(k)$  可以展开为  $k^2$  的级数:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} [1 + (\frac{1}{2})^2 k^2 + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 k^4 + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 k^6 + \dots] \quad (3.37a)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} [1 - (\frac{1}{2})^2 k^2 - (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 \frac{k^4}{3} - (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 \frac{k^6}{5} - \dots] \quad (3.37b)$$

在  $k^2 \ll 1$  时, 两个积分和他们的差可以近似为

$$K(k) \simeq \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \frac{1225}{16384} k^8) \quad (3.38a)$$

$$E(k) \simeq \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \frac{175}{16384} k^8) \quad (3.38b)$$

$$K(k) - E(k) \simeq \frac{\pi}{4} (k^2 + \frac{3}{8} k^4 + \frac{15}{64} k^6 + \frac{175}{1024} k^8) \quad (3.38c)$$

### 特例 1: 两个远离的“环”线圈

当两个线圈相距足够远, 也即  $\rho^2 \gg (a_A + a_B)^2$  时, 有  $k^2 \ll 1$ 。此时, 可以用方程 3.38 化简 3.34。方程 3.34 首先被简化为:

$$F_{zA}(\rho) \simeq \frac{\mu_0}{2} (N_A I_A)(N_B I_B) \{k^2 K(k) + (k^2 - 2)[K(k) - E(k)]\} \quad (3.39)$$

应用 3.38 第一式和第三式, 仅考虑  $k^4$  及以下项。尽管  $k^2 \ll 1$ , 我们展开  $K(k) - E(k)$  时必须将  $k^4$  项包括进来, 因为它的系数还有一个  $-2$ :

$$F_{zA}(\rho) \simeq \frac{\mu_0}{2} (N_A I_A)(N_B I_B) \left( \frac{3\pi}{16} k^4 \right) \quad (3.39')$$

在第二步近似时,  $k^6$  项被略去了。最后, 我们得到了极限  $\rho^2 \gg (a_A + a_B)^2$  时的一个简单表达式:

$$F_{zA}(\rho) = \frac{3\mu_0}{2\pi} \left( \frac{\pi a_A^2 N_A I_A}{\rho^2} \right) \left( \frac{\pi a_B^2 N_B I_B}{\rho^2} \right) \quad (3.39'')$$

### 特例 2: 两个紧邻的相同直径的“环”线圈

如果两个环线圈的直径相同并相互紧邻放置, 即  $a_A = a_B = a$  以及  $\rho \ll 2a$ 。此时,  $k^2 \mapsto 1, K(k) \mapsto \infty, E(k) \mapsto 1$ 。方程 3.34 可以简化为:

$$F_{zA}(\rho) \simeq \mu_0 (N_A I_A)(N_B I_B) \left( \frac{a}{\rho} \right) \quad (3.39''')$$

我们可以将上式表示为“环” A 直径  $(2\pi a)$ , “环” A 安匝  $(N_A I_A)$  和轴向相距  $\rho$  处的“环” B 在“环” A 上的场的径向分量  $(B_r)$ , 由于  $\rho \ll a$ ,

可简单表示为  $\mu_0 N_B I_B / (2\pi\rho)$  的乘积。于是：

$$\begin{aligned} F_{zA}(\rho) &\simeq (2\pi a) \times (N_A I_A) \times \left( \frac{\mu_0 N_B I_B}{2\pi\rho} \right) \\ &= \mu_0 (N_A I_A) (N_B I_B) \left( \frac{a}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (3.39'')$$

### 3.5.2 “薄壁”螺管内的轴向力

考虑一个直径为  $2a$ , 长度为  $2b$ , 中平面位于  $z = 0$ , 通过均匀表面电流  $NI/2b$  的薄壁 ( $\alpha = 1$ ) 螺管线圈。对于这个螺管线圈, 距离中平面  $z \geq 0$  处的轴向力可以表示为：

$$\begin{aligned} F_z(z) = -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{NI}{2b} \right)^2 &\{ (b-z)\sqrt{4a^2 + (b-z)^2} [K(k_{b_-}) - E(k_{b_-})] \\ &+ (b+z)\sqrt{4a^2 + (b+z)^2} [K(k_{b_+}) - E(k_{b_+})] \\ &- 2b\sqrt{4a^2 + 4b^2} [K(k_{2b}) - E(k_{2b})] \} \end{aligned} \quad (3.40)$$

椭圆积分模量分别为：

$$k_{b_-}^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + (b-z)^2}; \quad k_{b_+}^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + (b+z)^2}; \quad k_{2b}^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + 4b^2}$$

#### 特例 3：端部力

在  $z = b$  处, 因为有  $k_{b_+} = k_{2b}$ , 所以有  $F_z(b) = 0$ 。也即, 正如我们所预料到的, 一个孤立螺线管端部的轴向力是零。

#### 特例 4：中平面的力

将  $z = 0$  代入 3.40 式, 我们可以得到中平面 ( $z = 0$ ) 处的轴向力  $F_z(0)$ :

$$\begin{aligned} F_z(0) = -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{NI}{2b} \right)^2 &\{ 2b\sqrt{4a^2 + b^2} [K(k_b) - E(k_b)] \\ &- 2b\sqrt{4a^2 + 4b^2} [K(k_{2b}) - E(k_{2b})] \} \end{aligned} \quad (3.41)$$

式中,  $k_{2b}$  由下式给出:

$$k_b^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + b^2}$$

孤立螺线管在  $z$  向的轴向压缩力从 0 到  $z = b$  是逐渐变大, 至中平面处取得最大值。

### 特例 5：长薄壁螺管的中平面的力

对于一个“长”( $\beta \gg 1$  或者  $k^2 \ll 1$ ) 的薄壁螺线管，利用方程 3.38，可以将方程 3.41a 简化为：

$$F_z(0) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right) \pi a^2 \quad (3.41')$$

上式表明， $F_z(0)$  在给定表面电流密度值  $NI/2b$  后，与线圈长度无关。因为长螺管的轴向中心场 (问题 3.1) 有  $NI/2b = H_z(0,0)$ ，我们可以得到：

$$F_z(0) \simeq -\frac{1}{2} \mu_0 H_z^2(0,0) \times \pi a^2 \quad (3.41'')$$

这样， $F_z(0)$  就等于磁压乘上线圈室温孔的面积。实际上，下面我们将看到，每一个轴向力的表达式都有一个磁压项 ( $\mu_0(NI/2b)^2$ ) 或其等价形式。

### 3.5.3 “薄壁”螺管和“环”线圈间的轴向力

图 3.6 给出了一个薄壁螺线管 ( $2a_s, 2b_s, N_s I_s/2b_s$ ) 与一个环线圈 ( $2a_R, N_R I_R$ ) 同轴放置的情况。螺管右侧距离环线圈距离  $\rho$ 。各线圈产生的轴向场指向同一方向。螺线管受到的轴向力可以表示为：

$$\begin{aligned} F_{zS}(\rho) = & -\frac{\mu_0}{2} (N_R I_R) \left( \frac{N_S I_S}{2b_s} \right) \times \\ & \left( \sqrt{(a_R + a_s)^2 + (\rho + 2b_s)^2} \{2[K(k_s) - E(k_s)] - k_s^2 K(k_s)\} \right. \\ & \left. - \sqrt{(a_R + a_s)^2 + \rho^2} \{2[K(k_R) - E(k_R)] - k_R^2 K(k_R)\} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

式中，模量为：

$$k_s^2 = \frac{4a_s a_R}{(a_s + a_R)^2 + (2b_s + \rho)^2}; \quad k_R^2 = \frac{4a_s a_R}{(a_s + a_R)^2 + \rho^2}$$

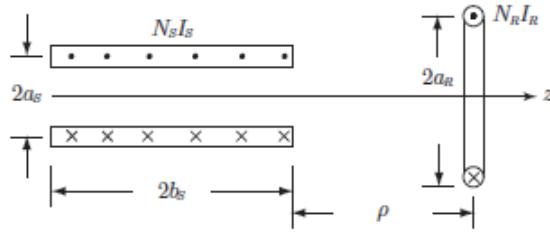
在方程 3.42 的等号右侧项中，第二项大于第三项，所以  $F_{zS}(\rho)$  是正值，也即轴向作用力是吸引力。

### 特例 6：相距很远的“薄壁”螺管和“环”线圈

当两个线圈相距很远，也即  $k_s^2 \ll 1$  和  $k_R^2 \ll 1$  时，可以得到：

$$F_{zS}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} (\pi a_R^2 N_R I_R) \left( \frac{\pi a_s^2 N_S I_S}{2b_s} \right) \left[ \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{(\rho + 2b_s)^3} \right] \quad (3.43)$$

按照上述处理方式，我们可以看到力是向着  $+z$  方向的，正比于两个线圈磁矩的乘积。

图 3.6: 薄壁螺管和环线圈同轴对齐, 相距  $\rho$ 

### 特例 7: 相距极远的“薄壁”螺管和“环”线圈

当两个线圈的相距足够远, 以至于  $\rho \gg 2b_s$  时, 方程 3.43a 中的大括号中的第二项可以展开后略去高次项, 有:

$$F_{zS}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} (\pi a_R^2 N_R I_R) \left( \frac{\pi a_S^2 N_S I_S}{2b_s} \right) \frac{6b_s}{\rho^4} \quad (3.43')$$

正如我们所料, 3.43b 和 3.39c 是等价的。

### 3.5.4 两个“薄壁”螺管间的轴向力

本节, 我们推导两个薄壁螺管之间的轴向力方程。方程是基于 Garrett [3.5] 的方程推导出来的。这个方程将成为一般的非薄壁螺线圈的轴向力的基础 (3.5.5 节)。考虑两个同轴的薄壁线圈, A( $2a_A; 2b_A; N_A I_A / 2b_A$ ) 和 B ( $2a_B; 2b_B; N_B I_B / 2b_B$ )。如图 3.7 所示, 螺管 A 的右端距离螺管 B 的左端距离为  $\rho$ 。各螺管产生的轴向场是指向同一个方向的。

### 螺管 B 施于螺管 A 的轴向力

螺管 B 施加给螺管 A 的轴向力可以写为:

$$\begin{aligned}
 F_{zAB}(\rho) = & \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \times \\
 & \left( \frac{2b_A + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (2B_A + \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (2b_A + \rho)^2] [K(k_A) - E(k_A)] - \Upsilon(c^2, k_A) \} \right. \\
 & + \frac{2b_B + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (2B_B + \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (2b_B + \rho)^2] [K(k_B) - E(k_B)] - \Upsilon(c^2, k_B) \} \\
 & - \frac{2b_T + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (2B_T + \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (2b_T + \rho)^2] [K(k_T) - E(k_T)] - \Upsilon(c^2, k_T) \} \\
 & \left. - \frac{\rho}{\sqrt{a_T^2 + \rho^2}} \{ (a_T^2 + \rho^2) [K(k_\rho) - E(k_\rho)] - \Upsilon(c^2, k_\rho) \} \right) \\
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

式中,  $a_T = a_A + a_B$ ,  $b_T = b_A + b_B$ , 模量分别为:

$$\begin{aligned}
 k_A^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (2b_A + \rho)^2}; & k_B^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (2b_B + \rho)^2} \\
 k_T^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (2b_T + \rho)^2}; & k_\rho^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + \rho^2}
 \end{aligned}$$

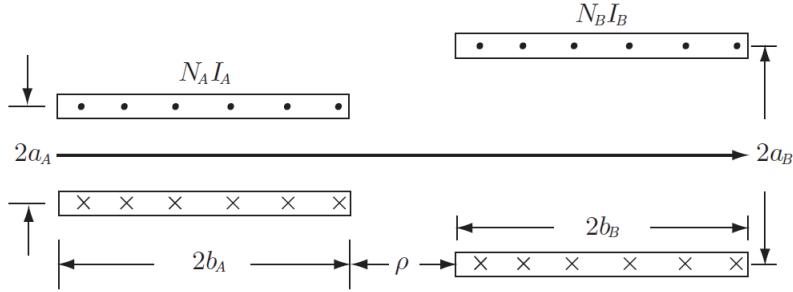


图 3.7: 薄壁螺管 A 和 B, 相距  $\rho$ 。

上式中,  $\Upsilon(c^2, k)$  定义为

$$\Upsilon(c^2, k) \equiv (a_A - a_B)^2 [\prod(c^2, k) - K(k)] \tag{3.45}$$

其中,  $\prod(c^2, k)$  是第三类完全椭圆积分, 定义为

$$\prod(c^2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - c^2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \tag{3.46}$$

从上式明显可以看出，该积分有两个模量： $c^2 \leq 1$  和  $k \leq 1$ 。模量  $c^2$  由下式给出

$$c^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2} = \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2} \quad (3.47)$$

$\prod(0, k) = K(k)$ ,  $\prod(1, k) = \infty$ 。 $\prod(c^2, k)$  可用  $c^2$  和  $k^2$  的级数表示：

$$\prod(c^2, k) = \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \frac{(2m)!(2j)!k^{2j}c^{2(m-j)}}{4^m 4^j (m!)^2 (j!)^2} \quad (3.48)$$

低阶项为：

$$\prod(c^2, k) = \frac{\pi}{2}(\dots) \quad (3.49a)$$

$$\prod(c^2, 0) = \frac{\pi}{2}(\dots) \quad (3.49b)$$

注意到，当  $c^2 = 0$  时，3.49a 退化为 3.38a，因为  $\prod(0, k) = K(k)$ 。不过，对于大部分问题， $c^2$  通常是接近于 1 的，这种条件下，由于快速收敛要求  $c^2 \ll 1$ ，3.49 的任一种展开都不好使。后面，在讨论互感的时候，我们将使用 3.49b。表 3.2 给出了一些  $c^2$  和  $k^2$  下的  $\prod(c^2, k)$ 。可以使用 Mathcad 等软件计算  $K(k), E(k), \prod(c^2, k)$ 。

#### 特例 8：施于 A 的中平面合力

我们首先考虑两个螺管 A 和螺管 B 具有相同的长度 ( $2b$ )、相同的表面电流密度 ( $NI/2b$ )，但具有不同的直径的情况。对 3.44 做代换  $2b_A = 2b_B = 2b, N_A I_A / 2b_A = N_B I_B / 2b_B = NI/2b, \rho = 0$ (线圈相邻端之间无间隙)，我们得到线圈 A 的中平面上的总受力的表达式。这个表达式对于我们探讨非薄壁线圈很有用。

$$\begin{aligned} F_{zA}(0) = & \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{NI}{2b} \right)^2 \times \left( \frac{4b}{\sqrt{a_T^2 + 4b^2}} \{ [a_T^2 + 4b^2] [K(k_{2b}) - E(k_{2b})] - \Upsilon(c^2, k_{2b}) \} \right. \\ & \left. - \frac{4b}{\sqrt{a_T^2 + 16b^2}} \{ [a_T^2 + 16b^2] [K(k_{4b}) - E(k_{4b})] - \Upsilon(c^2, k_{4b}) \} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

式中， $a_T = a_A + a_B$ ，模量表示为：

$$k_{2b}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + 4b^2}; \quad k_{4b}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + 16b^2}$$

尽管  $c^2 < 1$  总是成立的, 但  $c^2 \simeq 1$ 。对于我们感兴趣的大部分问题, 方程 3.50 不能近似为长螺管线圈 ( $\beta \gg 1$ )。

如果我们令线圈 A 和线圈 B 直径和表面电流密度一致, 但长度减半。当  $\rho = 0$  时这两个螺管线圈就变成了一个长度为  $2b$  的线圈。接下来, 对 3.44 进行如下替换  $2a_A = 2a_B = 2a, N_A I_A / 2b_A = N_B I_B / 2b_B = NI / 2b, 2b_A = 2b_B = b$ , 代换后的方程变成 3.50.

### 3.5.5 “厚壁” 螺管——中平面轴向力

当一个螺管不能视为薄壁时, 可以将之视为在径向上很多薄壁线圈的集合。这里, 我们考虑对  $\alpha > 1$  螺管线圈的最简单的处理方法: 螺管被分为两个薄壁子螺管 A(内) 和 B(外), 两个线圈的长度均为  $2b$ , 直径分别为  $2a_A, 2a_B$ , 且有  $2a_B > 2a_A$ 。单位长度电流为  $1/2(NI/2b)$ 。一半子线圈 A 上的总的轴向力由两部分组成: 一半来自与它自己的另一半,  $F_{zAA}(0)$ , 可由 3.41a 给出; 一半来自螺管线圈 B,  $F_{zAB}(0)$ 。图 3.8 给出了两个子线圈的放置情况, 借此可以推导出自螺管 A 的中平面上的轴向力表达式。比较图 3.7 和图 3.8, 我们发现方程 3.44 经代换  $2b_A = b; 2b_B = 2b; \rho = -2b$  可以应用。使用这些参数以及 3.47 给出的  $c^2$ , 方程 3.44 成为:

$$\begin{aligned} F_{zAB}(0) = & -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_A I_A}{4b} \right) \times \\ & \left( \frac{2b}{\sqrt{a_T^2 + b^2}} \{ [a_T^2 + b^2] [K(k_b) - E(k_b)] - \Upsilon(c^2, k_b) \} \right. \\ & \left. - \frac{2b}{\sqrt{a_T^2 + 4b^2}} \{ [a_T^2 + 4b^2] [K(k_{2b}) - E(k_{2b})] - \Upsilon(c^2, k_{2b}) \} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

式中,  $a_T = a_A + a_B$ , 模量写为

$$k_b^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b^2}; \quad k_{2b}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + 4b^2}$$

子螺管 A 施加在自身的中平面轴向力  $F_{zAA}(0)$  已由方程 3.41a 给出, 需要用  $NI/4b$  代替  $NI/2b$ 。类似的, 子螺管 B 受到的总中平面力  $F_{zB}(0)$  由  $F_{zBB}(0)$  和  $F_{zBA}(0)$  组成:

$$F_{zA}(0) = F_{zAA}(0) + F_{zAB}(0) \quad (3.52a)$$

$$F_{zB}(0) = F_{zBB}(0) + F_{zBA}(0) \quad (3.52b)$$

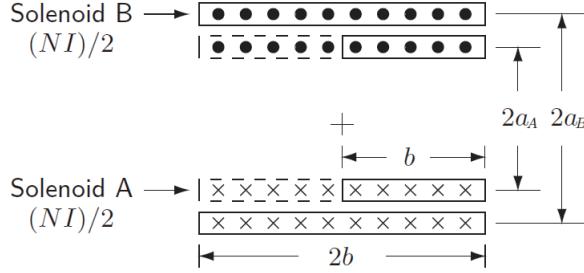


图 3.8: 螺管线圈 A 和 B 的布置, 用以计算线圈 A 上的中心面轴向力。

于是,

$$\begin{aligned}
 F_{zA}(0) = & -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{NI}{4b} \right) \times \\
 & \left\{ \{2b\sqrt{4a_A^2 + b^2}[K(k_{bA}) - E(k_{bA})] - 2b\sqrt{4a_A^2 + 4b^2}[K(k_{2bA}) - E(k_{2bA})]\} \right. \\
 & + \frac{2b}{\sqrt{a_T^2 + b^2}} \{[a_T^2 + b^2][K(k_b) - E(k_b)] - \Upsilon(c^2, k_b)\} \\
 & \left. - \frac{2b}{\sqrt{a_T^2 + 4b^2}} \{[a_T^2 + 4b^2][K(k_{2b}) - E(k_{2b})] - \Upsilon(c^2, k_{2b})\} \right\} \\
 & \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

其中,  $c^2$  已在 3.47 给出, 模量为:

$$k_{bA}^2 = \frac{4a_A^2}{4a_A^2 + b^2}; \quad k_{2bA}^2 = \frac{4a_A^2}{4a_A^2 + 4b^2}; \quad k_{bB}^2 = \frac{4a_B^2}{4a_B^2 + b^2}; \quad k_{2bB}^2 = \frac{4a_B^2}{4a_B^2 + 4b^2}$$

本例中, 由于  $2b_A = 2b_B = 2b$ ,  $N_A I_A = N_B I_B$  以及  $F_{zAB}(0) = F_{zBA}(0)$ , 于是有:

$$\begin{aligned}
 F_{zB}(0) = & -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{NI}{4b} \right) \times \\
 & \left( \{2b\sqrt{4a_B^2 + b^2}[K(k_{bB}) - E(k_{bB})] - 2b\sqrt{4a_B^2 + 4b^2}[K(k_{2bB}) - E(k_{2bB})]\} \right. \\
 & + \frac{2b}{\sqrt{a_T^2 + b^2}} \{[a_T^2 + b^2][K(k_b) - E(k_b)] - \Upsilon(c^2, k_b)\} \\
 & \left. - \frac{2b}{\sqrt{a_T^2 + 4b^2}} \{[a_T^2 + 4b^2][K(k_{2b}) - E(k_{2b})] - \Upsilon(c^2, k_{2b})\} \right) \\
 & \quad (3.53')
 \end{aligned}$$

螺管的总的中平面轴向力  $F_{zT}(0)$  分为两个薄壁线圈的各自受力  $F_{zA}(0)$

和  $F_{zB}(0)$  之和。于是我们得到:

$$\begin{aligned}
 F_{zT}(0) = & -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{NI}{4b} \right) \times \\
 & \left( 2b\sqrt{4a_A^2 + b^2}[K(k_{bA}) - E(k_{bA})] - 2b\sqrt{4a_A^2 + 4b^2}[K(k_{2bA}) - E(k_{2bA})] \right. \\
 & + 2b\sqrt{4a_B^2 + b^2}[K(k_{bB}) - E(k_{bB})] - 2b\sqrt{4a_B^2 + 4b^2}[K(k_{2bB}) - E(k_{2bB})] \\
 & + \frac{4b}{\sqrt{a_T^2 + b^2}} \{ [a_T^2 + b^2][K(k_b) - E(k_b)] - \Upsilon(c^2, k_b) \} \\
 & \left. - \frac{4b}{\sqrt{a_T^2 + 4b^2}} \{ [a_T^2 + 4b^2][K(k_{2b}) - E(k_{2b})] - \Upsilon(c^2, k_{2b}) \} \right) \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

当一个螺线圈被分为 2 个薄壁子螺管时, 为获得  $F_{zT}(0)$ , 要计算方程 3.54 中的 4 项; 当一个螺线圈被分为  $m > 2$  个薄壁螺管时, 则要求计算  $2(m!)/[(m-2)!]$  项。比如  $m = 3$  时,  $F_{zT}(0)$  的表达式中有 12 项, 有 18 个模量, 手算是很繁琐的。

为了编制可用来精确计算“实际”螺管线圈(“厚”壁)中平面轴向力的计算机代码, 我们不得不按照  $m$  个薄壁线圈展开 3.54。为了确保每一个子线圈是薄壁的,  $m$  可能是 10 或者更大。

注意到, 多数情况下  $c^2$  是接近于 1 的, 甚至对“长”螺管 ( $\beta \gg 1$ ) 也不可能近似  $\prod(c^2, k)$  项。

#### 特例 9: 长厚壁螺管的中平面力

因为在大多数应用中,  $c^2 \simeq 1$ , 3.54 中含  $\prod(c^2, k)$  项不能由其前几项近似表示。不过, 3.54 中的剩余项可以在  $\beta \gg 1$  时展开, 正如特例 5 中所作的那样。于是, 我们有:

$$\begin{aligned}
 F_{zT}(0) \simeq & -\mu_0 \left( \frac{NI}{4b} \right)^2 \left\{ \pi(a_A^2 + a_B^2) - (a_A^2 - a_B^2)^2 [2 \prod(c^2, k_b) - \prod(c^2, k_{2b})] \right\} \\
 \simeq & -\mu_0 \left( \frac{NI}{4b} \right)^2 \pi(a_A^2 + a_B^2) \left\{ 1 - \frac{(a_A^2 - a_B^2)^2}{\pi(a_A^2 + a_B^2)} [2 \prod(c^2, k_b) - \prod(c^2, k_{2b})] \right\} \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

可知, 上式当  $a_A = a_B$  时, 约化为 3.41b 式。在上式的第二行的形式中, 大括号内的项可以视为修正项。

### 3.5.6 双线圈嵌套磁体的轴向力

在一个由多个轴向对齐的嵌套螺线管组成的磁体中，通常计算各个螺管的中平面轴向压缩力是很重要的；对于一个大型的嵌套螺管磁体，如 MRI 磁体，则更为重要。这里我们考虑最简单的仅有两个薄壁螺线管 A 和 B 组成的嵌套磁体，如图 3.9 所示。螺线管 A(内) 的参数为  $2a_A, 2b_A, N_A I_A / 2b_A$ ；螺线管 B(外) 的参数为  $2a_B, 2b_B, N_B I_B / 2b_B$ 。

#### 施于 A 的中平面轴向力

施于螺线管 A 右半部分的总中平面轴向力  $F_{zA}(0)$  是  $F_{zAA}(0)$  和  $F_{zAB}(0)$  之和。 $F_{zAA}(0)$  是其自身左半部分的中平面轴向力； $F_{zAB}(0)$  来自螺线管 B。 $F_{zAA}(0)$  可由方程 3.41a 替换下标 A 给出。 $F_{zAB}(0)$  可由方程 3.44 采取如下替代得到： $b_A$  替  $2b_A$ ， $-(b_A + b_B)$  替  $\rho$ ， $2b_B$  不变， $c^2$  仍由 3.47 给出。

$$\begin{aligned} F_{zA}(0) = & \frac{\mu_0}{2} \left[ \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right)^2 \times \{2b_A \sqrt{4a_A^2 + b_A^2} [K(k_{bA}) - E(k_{bA})] - 2b_A \sqrt{4a_A^2 + 4b_A^2} [K(k_{2bA}) - E(k_{2bA})]\} \right. \\ & + \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \left( \frac{2b_B}{\sqrt{a_T^2 + b_T^2}} \{[a_T^2 + b_T^2] [K(k_B) - E(k_B)] - \Upsilon(c^2, k_B)\} \right. \\ & - \frac{b_D}{\sqrt{a_T^2 + b_D^2}} \{[a_T^2 + b_D^2] [K(k_D) - E(k_D)] - \Upsilon(c^2, k_D)\} \\ & \left. \left. - \frac{b_T}{\sqrt{a_T^2 + b_T^2}} \{[a_T^2 + b_T^2] [K(k_T) - E(k_T)] - \Upsilon(c^2, k_T)\} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

由  $a_T = a_A + a_B, b_D = b_B - b_A$  以及  $b_T = b_A + b_B$ ，给出  $k_{bA}, k_{2bA}, k_A, k_B, k_{AB}$ ：

$$k_{bA}^2 = \frac{4a_A^2}{4a_A^2 + b_A^2}; k_{2bA}^2 = \frac{4a_A^2}{4a_A^2 + 4b_A^2}; k_B^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_B^2}; k_D^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_D^2}; k_T^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_T^2}$$

#### 特例 10：长螺管的施于 A 的中平面力

当两个螺线管都是“长”( $b_A^2 \gg 4a_A^2, b_B^2 \gg a_T^2$ ) 的，并且长度不一样，从而  $b_D^2 \gg a_T^2$ ，方程 3.56 可以简化为：

$$\begin{aligned} F_{zA}(0) \simeq & -\frac{\mu_0}{2} \left\{ \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right)^2 \pi a_A^2 + \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \times \right. \\ & \left. (a_A - a_B)^2 [\Pi(c^2, k_D) + \Pi(c^2, k_T) - 2\Pi(c^2, k_B)] \right\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

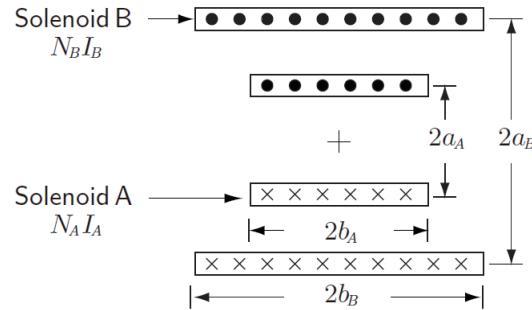


图 3.9: 有螺管 A 和 B 组成的嵌套磁体

方程 3.57a 等号右侧的第二项代表  $F_{zAB}$ 。物理上, 这是由于螺线管 B 的磁场在螺线管 A 的接近螺线管 B 末端的轴向位置上的径向分量  $B_r$  引起的。注意到, 当  $b_A \rightarrow \infty$  以及  $b_B \rightarrow \infty$  时, 第二项趋于。

#### 特例 11: 施于 A 的中平面轴向力——A 和 B 均“长”但 B 比 A 更长

当两个螺线管都如特例 10 中一样是“长”的, 且 B 比 A 更长一些, 也即  $b_D \rightarrow b_B$  以及  $b_T \rightarrow b_B$  时, 方程 3.57a 可进一步化简为:

$$F_{zA}(0) \simeq F_{zAA}(0) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right)^2 \pi a_A^2 \quad (3.57')$$

物理上很容易理解, 当  $b_A/b_B \rightarrow 0$  时有  $F_{zAB}(0) \rightarrow 0$ , 因为螺管 B 比螺管 A 更长。作为  $F_{zAB}(0)$  中关键要素的螺管 B 的  $B_r$  在其室温孔内是 0, 而此处正式螺管 A 放置的位置。

#### 施于 B 上的中平面轴向力

螺线管 B 的中平面上的轴向力的表达式与螺管 A 非常相似。我们可以通过变量替换的方式, 直接从前几部分的方程得到。螺管 B 的中平面总轴向力  $F_{zB}(0)$  是  $F_{zBB}(0)$  与  $F_{zBA}(0)$  之和。其中,  $F_{zBB}(0)$  是由其自身左半

部分产生的中平面轴向力,  $F_{zBA}(0)$  是螺线管 A 产生的。

$$\begin{aligned}
 F_{zB}(0) = & -\frac{\mu_0}{2} \left[ \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right)^2 \times \right. \\
 & \{ 2b_B \sqrt{4a_B^2 + b_B^2} [K(k_{bB}) - E(k_{bB})] - 2b_B \sqrt{4a_B^2 + 4b_B^2} [K(K_{2bB}) - E(k_{2bB})] \} \\
 & + \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{2b_A}{\sqrt{a_T^2 + b_A^2}} \{ [a_T^2 + b_A^2] [K(k_A) - E(k_A)] - \Upsilon(c^2, k_A) \} \right. \\
 & + \left. \frac{b_D}{\sqrt{a_T^2 + b_D^2}} \{ [a_T^2 + b_D^2] [K(k_D) - E(k_D)] - \Upsilon(c^2, k_D) \} \right. \\
 & \left. - \frac{b_T}{\sqrt{a_T^2 + b_T^2}} \{ [a_T^2 + b_T^2] [K(k_T) - E(k_T)] - \Upsilon(c^2, k_T) \} \right) \]
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

式中的  $c^2$  同样有方程 3.47 给出, 模量  $k_{2bB}, k_A$  如下给出:

$$k_{2bB}^2 = \frac{a_B^2}{4a_B^2 + 4b_B^2}; \quad k_A^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_A^2}$$

其他模量与方程 3.56 相同。

**特例 12:** 施于 B 的中平面轴向力——A 和 B 均“长”但 B 比 A 更长

如特例 11 所述时, 我们有:

$$\begin{aligned}
 F_{zB}(0) \simeq & -\frac{\mu_0}{2} \left\{ \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right)^2 \pi a_B^2 + \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) [\pi(a_A^2 + a_B^2) \right. \\
 & \left. - (a_A - a_B)^2 [2\Pi(c^2, k_A) + \Pi(c^2, k_D) - \Pi(c^2, k_T)]] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

如特例 11 中, 方程 3.59a 中的第二项表示的  $F_{zBA}$  是可以忽略的, 这是由于螺管 A 的  $B_r$  影响螺管 A 两端附近位置轴线上的螺管 B。

**特例 13:** 施于 B 的中平面轴向力——A 和 B 均“长”但 B 比 A 短很多

当两个螺管都是“长”的, 但螺管 B 比螺管 A 短很多 ( $b_D^2 \rightarrow b_A^2 \gg a_T^2$ ) 时, 方程 3.58 简化为:

$$F_{zB}(0) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right)^2 \pi a_B^2 \tag{3.59'}$$

方程 3.59b 可以类比为特例 11 中的 3.57b。也可以用相同的物理原因解释这个结果。

### 3.5.7 轴向偏心螺管的轴向恢复力

当每一个螺管的轴向场都是指向同一个方向并且螺管 A 和螺管 B 的轴中心失配距离为  $\rho$  时, 将产生一个轴向恢复力  $F_{zR}(\rho)$  以对齐轴中心。 $F_{zR}(\rho)$  可以写为:

$$\begin{aligned}
 F_{zR}(\rho) = & -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \times \\
 & \left( \frac{b_T - \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_T - \rho)^2}} \left\{ [a_T^2 + (b_T - \rho)^2] [K(k_{T-}) - E(k_{T-})] - \Upsilon(c^2, k_{T-}) \right\} \right. \\
 & + \frac{b_D + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_T + \rho)^2}} \left\{ [a_T^2 + (b_D + \rho)^2] [K(k_{D+}) - E(k_{D+})] - \Upsilon(c^2, k_{D+}) \right\} \\
 & - \frac{b_T + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_T + \rho)^2}} \left\{ [a_T^2 + (b_T + \rho)^2] [K(k_{T+}) - E(k_{T+})] - \Upsilon(c^2, k_{T+}) \right\} \\
 & \left. - \frac{b_D - \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_D - \rho)^2}} \left\{ [a_T^2 + (b_D - \rho)^2] [K(k_{D-}) - E(k_{D-})] - \Upsilon(c^2, k_{D-}) \right\} \right) \\
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

式中,  $a_T = a_A + a_B, b_T = b_A + b_B, b_D = b_A - b_B$ 。模量:

$$k_{T+}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_T + \rho)^2}; k_{T-}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_T - \rho)^2};$$

$$k_{D+}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_D + \rho)^2}; k_{D-}^2 = \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_D - \rho)^2}$$

#### 特例 14: 不存在轴向失配

当  $\rho = 0, k_{T+}^2 = k_{T-}^2, k_{D+}^2 = k_{D-}^2$  时, 有  $F_{zR}(\rho) = 0$ 。这和物理上的预期是一致的。

#### 特例 15: 微小的轴向失配

对于很小的失配, 规定为  $\rho \ll \sqrt{a_T^2 + b_D^2}$ ,  $F_{zR}(\rho)$  正比于  $\rho$ :

$$F_{zR}(\rho) \propto -\left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \rho \tag{3.61}$$

方程 3.61 后面将用来推导小失配距离线圈 A 和 B 之间的互感表达式  $M_{AB}(\rho)$ 。

### 特例 16：某一螺管是“长”的

如果螺管 A 或螺管 B 之一是“长”的，这个更长的螺管的轴向场将成为均匀的，其  $B_r$  就很小了，哪怕两个线圈之间存在可观的失配，长螺管在短线圈上也只产生很小的轴向力。方程 3.60 在  $b_T^2 \gg a_T^2, b_D^2 \gg a_T^2$  时前两个+项和后两个-项抵消，有  $F_{zR}(\rho) \rightarrow 0$ 。

## 3.6 螺管在磁力下的应力应变

此处研究超导体在(主要是)洛伦兹力的应力和应变。本节的磁应力的分析解和图表都是在简单场分布下的应用绕组材料的简单性质而得到的。

### 3.6.1 应力应变方程

处于由轴向磁场  $B_z(r, z)$  和电流  $\lambda J$  相互作用产生的磁场力下的螺管绕组的应力(径向  $\sigma_r(r, z)$ , 环向  $\sigma_\theta(r, z)$ , 轴向  $\sigma_z(r, z)$ , 剪切  $\tau_{rz}(r, z)$ )满足以下平衡方程：

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\lambda J B_z(r, z) \quad (3.62a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\lambda J B_r(r, z) \quad (3.62b)$$

边界条件为： $\sigma_r(r = a_1, z); \sigma_r(r = a_2, z); \sigma_z(r, z = \pm b) = 0; \tau_{rz}(r = a_1, z) = 0; \tau_{rz}(r = a_2, z) = 0; \tau_{rz}(r, z = \pm b) = 0$ 。注意到剪切力是方程 3.62a 和 3.62b 中唯一的变量。大多数复合超导体，包括 LTS 和 HTS，都可以视为正交各向异性：可以应用 Hooke 定律。正交各向异性材料具有以下机械性质：Young 模量，Poisson 比。它们在三个正交方向不同，但都关于正交方向对称。应变  $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$  分别为  $r, \theta, z$  向，剪切应变  $\gamma_{rz}$  位于  $r - z$  平面。应变关系：

$$\epsilon_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{zr}}{E_z} \sigma_z + \epsilon_{Tz} \quad (3.63a)$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} \sigma_z + \epsilon_{T\theta} \quad (3.63b)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{rz}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} \sigma_\theta + \frac{1}{E_z} \sigma_z + \epsilon_{Tz} \quad (3.63c)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{G_{rz}} \tau_{rz} \quad (3.63d)$$

$E_r, E_\theta, E_z$  分别是各向的杨氏模量。 $\mu_{12} \equiv -\epsilon_2/\epsilon_1$ , 当材料应力加在 1 方向时 ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) 两个正交方向的横向应变的 Poisson 比。 $G_{rz}$  是剪切模量。 $\epsilon_{Tr}, \epsilon_{T\theta}, \epsilon_{Tz}$  分别为从室温 300 K 到运行温度  $T_{op}$  的热膨胀积分系数。

$$\epsilon_{Tr} = \int_{300K}^{T_{op}} \alpha_{Tr}(T) dT; \quad \epsilon_{T\theta} = \int_{300K}^{T_{op}} \alpha_{T\theta}(T) dT; \quad \epsilon_{Tz} = \int_{300K}^{T_{op}} \alpha_{Tz}(T) dT \quad (3.63e)$$

$\alpha_{Tr}(T), \alpha_{T\theta}(T), \alpha_{Tz}(T)$  分别为平行于各自主轴的热膨胀系数, 与温度有关。注意到这些系数是正的, 并且因为是从 300 K 到度  $T_{op} < 300$  K 积分, 方程 3.63a-3.63c 中的热应变是负的, 也即压缩力。

应用下列  $\nu$  和  $E$  的关系:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_r}; \quad \frac{\nu_{\theta z}}{E_z} = \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta}; \quad \frac{\nu_{zr}}{E_r} = \frac{\nu_{rz}}{E_z} \quad (3.63f)$$

在轴对称体情况下, 例如理想螺线管, 在  $r$  和  $z$  方向的应变  $u_r$  和位移  $u_z$  分别为:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (3.63g)$$

由于轴对称, 方程 3.62 中的所有变量都与  $\theta$  无关, 且有  $u_\theta = 0$ 。一般的, 不同时存在  $\sigma_r$  和  $\sigma_z$  的闭式解。在一个“长”螺管中, 例如多用于空间高磁场均匀性 NMR 磁体的螺管中,  $B_z(r, z)$  在  $z$  方向至少是在螺管以中平面为起点的很大长度内的变化都是很小的。剪切应力  $\tau_{rz}$  是由  $B_z(r, z)$  在线圈上产生的径向载荷的变化导致的。因此, 在一个长螺管中, 我们可以假设所有变量不依赖于  $z$ (包括  $u_r$ , 有  $\partial u_r / \partial z = 0$ ) 来化简 3.62a。因为在高磁场均匀性磁体中有  $\partial B_r(r, z) / \partial z \simeq 0$ , 我们可以放心的假设在磁体轴向的大部分长度上有  $\partial u_r / \partial z = 0$  成立。加上  $\partial u_z / \partial r = 0$ , 我们发现  $\gamma_{rz} = \tau_{rz} = 0$ 。反过来, 这个结果有会解耦 3.62a 和 3.62b。

联立方程 3.62 和 3.63, 假设  $\tau_{rz} = 0$ , 用  $u_r$  解出  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$ , 我们得到以下微分方程:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \zeta^2 \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{E_r} \lambda J B_z(r) + \frac{F}{r} \quad (3.64a)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}; \quad F = -(\zeta^2 - \nu_{r\theta})\epsilon_{T\theta} + (1 - \nu_{\theta r}\zeta^2)\epsilon_{Tr} \quad (3.64b)$$

方程 3.64a 的解的一般形式:

$$u_r = C_1 r^\zeta + \frac{C_2}{r^\zeta} + u_r^L + u_r^T \quad (3.65)$$

式中,  $C_1, C_2$  是由  $r = a_1, r = a_2$  边界条件确定的常数。 $u_r^L$  和  $u_r^T$  (上标  $L$  和  $T$  分别代表 Lorentz 和 thermal) 依赖于方程 3.64a 等式右侧源项的特解。热学项  $u_r^T$  为:

$$u_r^T = \frac{Fr}{1 - \zeta^2} \quad (3.66)$$

对各向同性材料 ( $E_\theta = E_r, \zeta = 1$ ),  $u_r^T$  为:

$$u_r^T(\zeta = 1) = \frac{1}{2}Fr \ln r \quad (3.67)$$

一般的,  $B_z(r)$  可以用幂级数给出:

$$B_z(r) = \sum_{k=0}^n b_k r^k \quad (3.68)$$

于是, Lorentz 项可以表示为:

$$u_r^T = \frac{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{E_r} \lambda J \sum_{k=0}^n \frac{b_k r^{k+2}}{\zeta^2 - (k+2)^2} \quad (3.69)$$

### 3.6.2 各向同性螺管的应力应变方程

本节我们推导具有绕组电流密度  $\lambda J$  的各向同性螺线管径向和方位角方向的应力。绕组中的轴向场从  $B_z(r = a_1) \equiv B_1$  到  $B_z(r = a_2) \equiv B_2$  随  $r$  线性变化。注意到在嵌套线圈磁体中,  $B_1, B_2$  都可能包括由位于外部的“长”线圈产生的不均匀背景场。我们定义两个无量纲参数:  $\kappa \equiv B_2/B_1$ ,  $\rho = r/a_1$ 。在一个高场 NMR 磁体中, 最内部的线圈  $\kappa$  会超过 0.9; 对一个孤立的线圈, 大概是 -0.1; 对于无限长孤立线圈, 有  $\kappa = 0$ 。于是, 方程 3.62a 可以修正为:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -\frac{\lambda J B_1 a_1}{\alpha - 1} [\alpha - \kappa - (1 - \kappa)\rho] \quad (3.70)$$

对于各向同性材料, 考虑热应变  $\epsilon_T$  的应变为:

$$\epsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \nu \sigma_\theta) + \epsilon_T \quad (3.71a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_\rho) + \epsilon_T \quad (3.71b)$$

从上式中解出  $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ :

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_\rho + \nu \epsilon_\theta - (1 + \nu) \epsilon_T] \quad (3.72a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_\theta + \nu \epsilon_\rho - (1 + \nu) \epsilon_T] \quad (3.72b)$$

应变是和位移  $u$  有关的:

$$\epsilon_\rho = \frac{1}{a_1} \frac{du}{d\rho}; \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{a_1} \frac{u}{\rho} \quad (3.72c)$$

联立 3.72a-3.72c, 我们得到:

$$\sigma_\rho = \frac{E}{(1-\nu^2)a_1} \left[ \frac{du}{d\rho} + \nu \frac{u}{\rho} - a_1(1+\nu)\epsilon_T \right] \quad (3.72d)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)a_1} \left[ \frac{u}{\rho} + \nu \frac{du}{d\rho} - a_1(1+\nu)\epsilon_T \right] \quad (3.72e)$$

联立 3.70 和方程 3.92d, 3.72e, 得到:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = -\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) \left(\frac{\lambda J B_1 a_1^2}{\alpha-1}\right) [\alpha - \kappa - (1-\kappa)\rho] \quad (3.73)$$

方程 3.73 的通解为:

$$u = C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} - \left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) \left(\frac{\lambda J B_1 a_1^2}{\alpha-1}\right) \left[ \frac{(\alpha-\kappa)\rho^2}{3} - \frac{(1-\kappa)\rho^3}{8} \right] \quad (3.74)$$

式中,  $C_1, C_2$  是由  $\rho = 1$  和  $\rho = \alpha$  处的边界条件确定的常数; 最后一项是特解。联立 3.74, 3.72d 和 3.72e, 我们得到:

$$\sigma_\rho = \frac{E}{(1-\nu^2)a_1} \left[ (1+\nu)C_1 - (1-\nu) \frac{C_2}{\rho^2} \right] \quad (3.75a)$$

$$- \left\{ \frac{\lambda J B_1 a_1}{\alpha-1} \left[ \frac{2+\nu}{3}(\alpha-\kappa)\rho - \frac{3+\nu}{8}(1-\kappa)\rho^2 \right] \right\} - \frac{E\epsilon_T}{1-\nu}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)a_1} \left[ (1+\nu)C_1 + (1-\nu) \frac{C_2}{\rho^2} \right] \quad (3.75b)$$

$$- \left\{ \frac{\lambda J B_1 \alpha_1}{\alpha-1} \left[ \frac{1+2\nu}{3}(\alpha-\kappa)\rho - \frac{1+3\nu}{8}(1-\kappa)\rho^2 \right] \right\} - \frac{E\epsilon_T}{1-\nu}$$

代入  $\sigma_\rho(1) = 0$  和  $\sigma_\rho(\alpha) = 0$ , 我们得到  $C_1, C_2$  的表达式:

$$\begin{aligned} [(1+\nu)C_1 - (1-\nu)C_2] &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \frac{\lambda J B_1 a_1^2}{\alpha-1} \right) \\ &\times \left[ \frac{2+\nu}{3}(\alpha-\kappa) - \frac{3+\nu}{8}(1-\kappa) \right] + a_1(1+\nu)\epsilon_T \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\begin{aligned} [(1+\nu)C_1 - (1-\nu) \frac{C_2}{\alpha^2}] &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \frac{\lambda J B_1 a_1^2}{\alpha-1} \right) \\ &\times \left[ \frac{2+\nu}{3}(\alpha-\kappa)\alpha - \frac{3+\nu}{8}(1-\kappa)\alpha^2 \right] + a_1(1+\nu)\epsilon_T \end{aligned} \quad (3.76b)$$

解出  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = \frac{1-\nu}{E} \left( \frac{\lambda J B_1 a_1^2}{\alpha^2 - 1} \right) \times \left[ \frac{2+\nu}{3} (\alpha - \kappa)(\alpha^2 + \alpha + 1) - \frac{3+\nu}{8} (1 - \kappa)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1) \right] + a_1 \epsilon_T \quad (3.76c)$$

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{\lambda J B_1 a_1 \alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right) \times \left[ \frac{2+\nu}{3} (\alpha - \kappa) - \frac{3+\nu}{8} (1 - \kappa)(\alpha + 1) \right] \quad (3.76d)$$

将方程 3.76c 和 3.76d 代入 3.75, 我们可以得到:

$$\sigma_\rho = \frac{\lambda J B_1 a_1}{\alpha - 1} \left[ \frac{2+\nu}{3} (\alpha - \kappa) \left( \frac{\alpha^2 + \alpha + 1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2}}{\alpha + 1} - \rho \right) - \frac{3+\nu}{8} (1 - \kappa)(\alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} - \rho^2) \right] \quad (3.77a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\lambda J B_1 a_1}{\alpha - 1} \left\{ (\alpha - \kappa) \left[ \frac{2+\nu}{3} \left( \frac{\alpha^2 + \alpha + 1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2}}{\alpha + 1} \right) - \frac{1+2\nu}{3} \rho \right] - (1 - \kappa) \left[ \frac{3+\nu}{8} (\alpha^2 + 1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2}) - \frac{1+3\nu}{8} \rho^2 \right] \right\} \quad (3.77b)$$

### 薄壁线圈

图 3.10a 和 3.10b 分别画出了薄壁线圈 (这里  $\alpha = 1.2$ ) 的归一化方位角向应力 ( $\varsigma_\theta \equiv \sigma_\theta / (\lambda J B_1 a_1)$ ) 和径向应力 ( $\varsigma_r \equiv \sigma_\rho / (\lambda J B_1 a_1)$ ) 与归一化径向距离 ( $\rho \equiv r/a_1$ ) 在几个特定的“场比率” ( $\kappa \equiv B_2/B_1$ ) 下的关系。我们发现,  $\kappa = -0.1$  对应孤立螺管;  $\kappa = 0$  对应无限长线圈;  $\kappa > 0$  对应处于均匀背景场中的线圈。

对于  $\kappa > 0.5$ , 绕组总体上有一个正的径向应力, 倾向于将各匝分开。这种情况一般是要避免的。

### 中等厚度线圈

图 3.11 给出了“中等厚度”线圈 ( $\alpha = 1.8$ ) 的类似于图 3.10 的特性。这里,  $\alpha = 1.8$ 。在这个中等厚度线圈中, 在  $\kappa \approx 0.2$  时有  $\varsigma > 0$ ; 在  $\kappa > 0.8$  时  $\varsigma$  超过 0.1。也即, 一个内插入高场背景场磁体室温孔中的线圈应当是薄壁的, 不然, 它应当被切分为多个薄壁的。

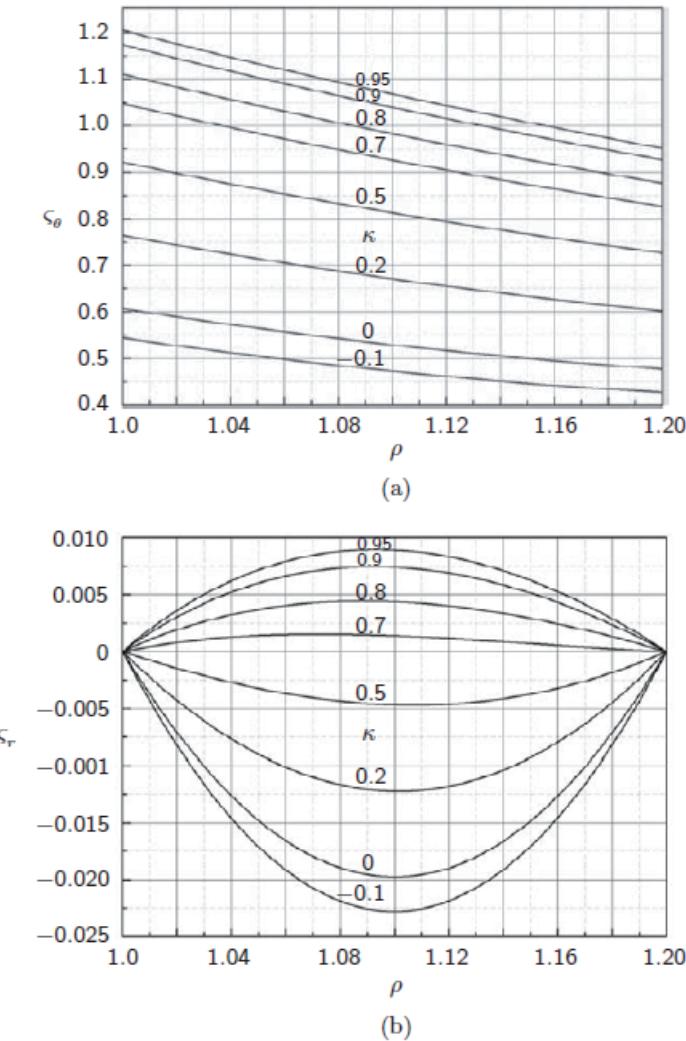


图 3.10: 几个  $\kappa \equiv B_2/B_1$  值下的薄壁线圈 ( $\alpha = 1.2$ ) 的特性图: a) 归一化切应力  $\varsigma_\theta \equiv \sigma_\theta/(\lambda J B_A a_1)$  vs. 归一化径向距离  $\rho \equiv r/a_1$ ; b) 归一化径向应力  $\varsigma_r \equiv \sigma_\rho/(\lambda J B_A a_1)$  vs.  $\rho$ 。各图中,  $\kappa$  的取值均为 -0.1(最下); 0; 0.2; 0.5; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95(最顶)

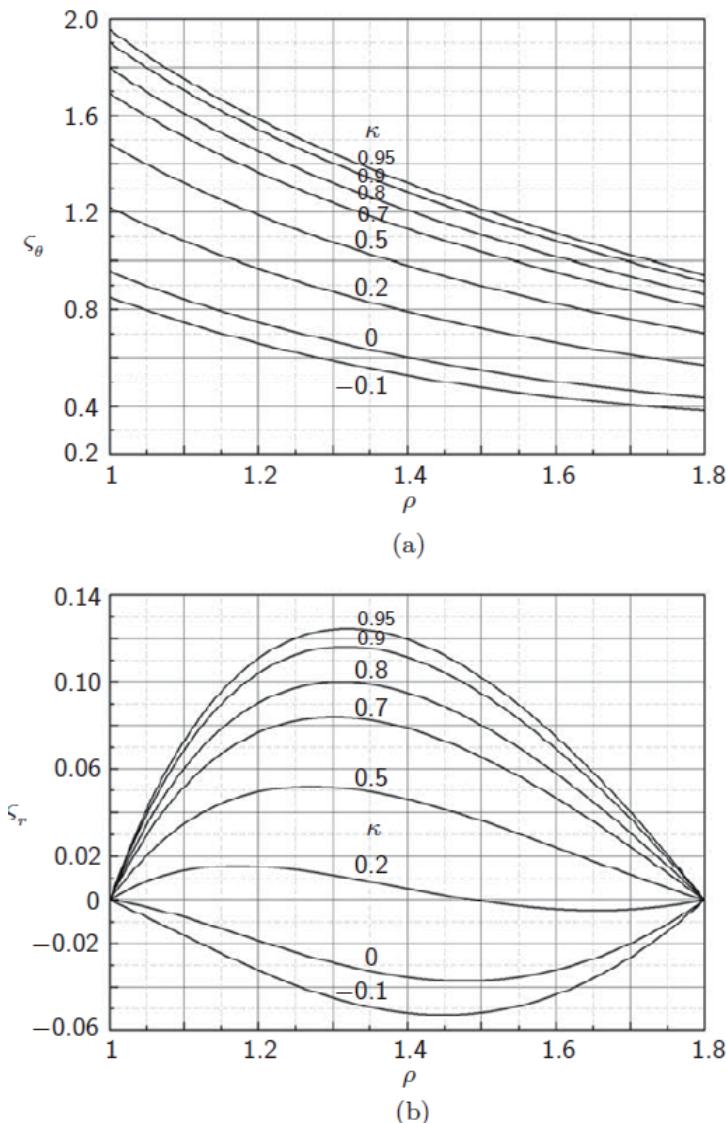


图 3.11: 几个  $\kappa \equiv B_2/B_1$  值下的中等厚度线圈 ( $\alpha = 1.8$ ) 的特性图: a)  $\varsigma_\theta \equiv \sigma_\theta/(\lambda JB_A a_1)$  vs.  $\rho$ ; b)  $\varsigma_r \equiv \sigma_\rho/(\lambda JB_A a_1)$  vs.  $\rho$ 。各图中,  $\kappa$  的取值均为 -0.1(最下); 0; 0.2; 0.5; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95(最顶)

### 厚壁线圈

类似的，图 3.12 给出了厚壁线圈 ( $\alpha = 3.6$ ) 的特性图，这里  $\alpha = 3.6$ 。注意到， $\varsigma_\theta$  大致是中等厚度线圈的 2 倍。最显著的是，厚壁线圈的归一化径向应力只在  $\kappa$  明显小于 0 时才为正值。有两种实用方法可以令  $\sigma_r$  接近 0 或者成为负值：1) 预应力绕制线圈；2) 在最外层用绑线或高弹性模量材料绑扎。同时，将线圈分割为更薄的线圈不仅降低  $\sigma_r$  还降低  $\sigma_\theta$ 。

### 3.6.3 减小径向应力的绕制张力

这里用一个例子演示绕组张力对减小径向应力  $\sigma_r$  的好处。如上文所述， $\sigma_r$  在绕组中应当保持负值以保证各层不再径向分离。简单来说，当线圈是由预张力导体绕成时，张力产生径向的向内应力，减少了绕组内部的径向应力。尽管绕组张力在绕制过程中维持恒定，张力效应在绕组内的径向变化也很难写出为磁力的近似表达式。由于绕组张力的存在，绕向角向和径向的应力计算必须通过数值分析得到。

考虑一个放置于高场背景磁体室温孔内的线圈。插入线圈的参数为内径  $2a_1 = 87$  mm，外径  $2a_2 = 156.6$  mm，即  $\alpha = 1.8$ ：这是一个中等厚度磁体。我们假设线圈是“长”的。插入线圈的其他参数包括： $B_z(r = a_1) \equiv B_1 = 28.1$  T;  $B_z(r = a_2) \equiv B_2 = 24.3$  T;  $\kappa \equiv B_2/B_1 = 0.865$ ;  $\lambda J = 8.26 \times 10^7$  A/m<sup>2</sup>。从图 3.11 的  $\varsigma_r(\rho)$  在  $\alpha = 1.8$  时的曲线，我们找到归一化径向应力的最大值时 0.11，在  $\rho = r/a_1 = 1.3$  时取得。于是，最大径向应力为：

$$\begin{aligned} [\sigma_r]_{mx} &= 0.11 \lambda J B_1 \alpha_1 \\ &= 0.11 (8.26 \times 10^7 \text{ A/m}^2) (28.1 \text{ T}) (43.5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 11.1 \text{ MPa} \end{aligned}$$

11.1 MPa 的径向应力在内插线圈内是难以承受的。图 3.13 给出了在几个给定绕制张力下（从 0 到最大 200 N  $\simeq 20$  kg）的  $\sigma_r$  和  $r$  的关系。本图说明，绕制张力至少要求 160 N 才能保证  $\sigma_r$  为 0 或为负值。实践中，可能应用大到 200N 的张力来绕线圈。对于这个特别的内插磁体，绕制张力 80 N 时，最大应力减小至大约 5 MPa。当线圈是用环氧浸渍时，正的径向 5 MPa 应力是可以承受的。

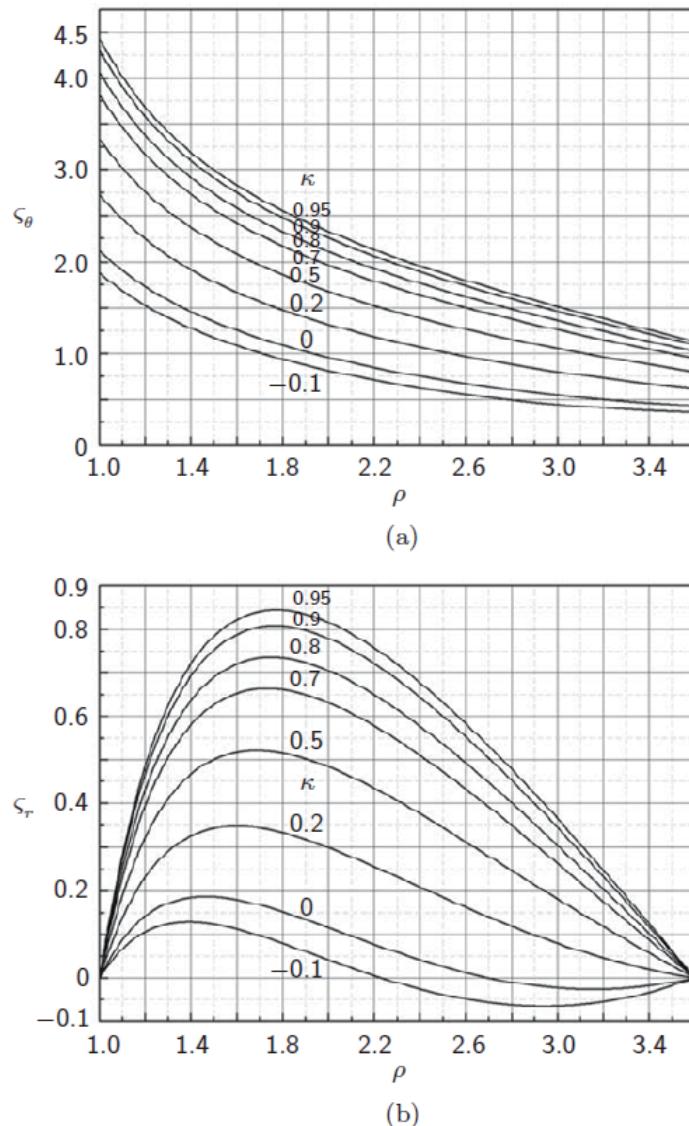


图 3.12: 几个  $\kappa \equiv B_2/B_1$  值下的中厚壁线圈 ( $\alpha = 3.6$ ) 的特性图: a)  $\varsigma_\theta \equiv \sigma_\theta/(\lambda JB_A a_1)$  vs.  $\rho$ ; b)  $\varsigma_r \equiv \sigma_r/(\lambda JB_A a_1)$  vs.  $\rho$ 。各图中,  $\kappa$  的取值均为 -0.1(最下); 0; 0.2; 0.5; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95(最顶)

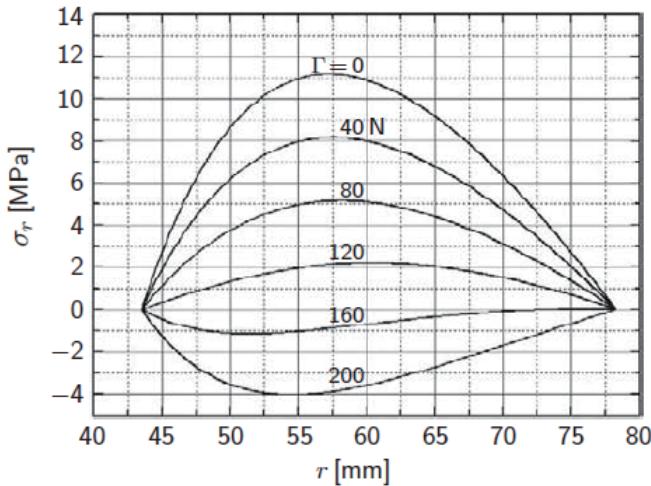


图 3.13:  $\alpha = 1.8$  的螺管线圈在不同张力  $\Gamma$  下的  $\sigma_r$  vs.  $r$ 。 $\Gamma = 0$  时,  $\sigma$  取得峰值, 在  $r \approx 57.5$  mm 处约为 11.1 MPa。当张力大于 160 N( $\simeq 16$  kg) 后, 处处  $\sigma_r \leq 0$ 。

### 3.7 自感

线圈的总磁链  $\Phi$  正比于通过线圈的电流  $I$ :

$$\Phi = LI \quad (3.78)$$

比例系数  $L$  是线圈的自感。注意到  $\Phi$  是一个“场”量概念, 而  $I$  是一个“路”量概念:  $L$  将这两个概念连接起来。因为“场”的概念必然涉及体积, 故  $L$  是一个与几何有关的量。 $L$  还与线圈中存储的磁能  $E_m$  有关:

$$E_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (3.79)$$

对于不含有磁性材料的系统,  $E_m$  可通过在整个空间积分  $(1/2)\mu_0 H^2$  计算。可见,  $E_m$  也是一个“场”量概念;  $L$  通过方程 3.79 将  $E_m$  和  $I$  连接在一起。

### 3.7.1 圆形闭合回路的自感

一根半径为  $a$ 、磁导率为  $\mu$  的导线围成的半径为  $R$  的圆环的  $L$  公式可由 Maxwell 方程导出：

$$L = \mu_0 R \left[ \ln\left(\frac{8R}{a} - 2\right) \right] + \frac{1}{4}\mu R \quad (3.80a)$$

$$\simeq \mu_0 R \left[ \ln\left(\frac{R}{a}\right) + 0.079 \right] + \frac{1}{4}\mu R \quad (3.80b)$$

上述方程的等号右侧，第一项是由圆环内部区域 ( $0 \leq r \leq R - a$ ) 磁通贡献的自感；第二项由是  $2\pi R$  长的导线内部贡献的自感圆环自感 (问题 3.18)。因为导线外部的磁链与频率无关，第一项对所有频率都成立，而第二项是频率相关的。 $(1/4)\mu R$  仅对低频成立；第二项在高频时趋向于零。第一项的推导是非常复杂的，涉及到椭圆积分等高等数学。

### 3.7.2 螺管线圈的自感

对于一个不含有铁磁材料，由绕组内径  $a_1, \alpha, \beta$  以及总匝数  $N$  确定的螺管线圈的自感  $L$  可以写为：

$$L = \mu_0 a_1 N^2 L(\alpha, \beta) \quad (3.81)$$

式中， $L(\alpha, \beta)$  是一个无量纲电感参数，仅与由  $\alpha, \beta$  表示的线圈形状有关。图 3.14 画出了我们感兴趣的  $\alpha = 1$  至  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 0.04$  至  $\beta = 10$  范围内的  $L(\alpha, \beta)$ 。 $\beta > 1$  涵盖了大部分螺管线圈，但“环”和“饼”是重要的例外。如图中所示， $L(\alpha, \beta)$  大致上正比于  $\alpha$ 。事实上，当一个粗略的 (“ball-park”)  $L$  值足够时，例如在 “first-cut” 设计阶段，我们可以使用：

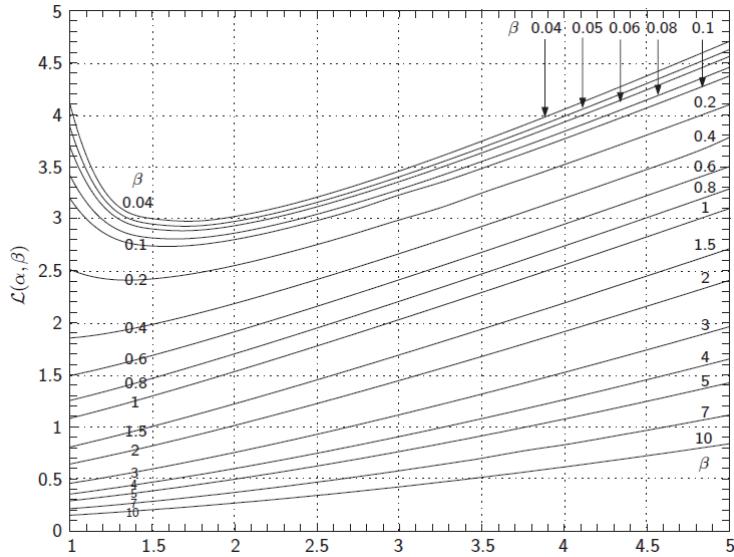
$$L(\alpha, \beta) \sim \frac{\pi\alpha}{2(\beta + 0.5)} \quad (\text{for } \beta \rightarrow 1 \text{ from } \beta > 1) \quad (3.82a)$$

$$L(\alpha, \beta) \sim \frac{\pi\alpha}{2\beta} \quad (\text{for } \beta \rightarrow \infty) \quad (3.82b)$$

对于一个“薄壁”螺管，即  $\alpha \simeq 1, \beta \rightarrow \infty$ , 3.82b 简化为  $\pi/2\beta$  (问题 3.18)。

### 3.7.3 实用电感公式

本节给出非磁性材料 ( $\mu = \mu_0$ ) 线圈的电感公式。一些公式的推导，在问题 3.18 中会再次涉及。

图 3.14: 参数  $\alpha, \beta$  下的  $L(\alpha, \beta)$ 

尽管过去——电感计算程序大量使用之前——推导出了“厚”线圈的解析表达式并写入工程参考书中，这些公式一般来说是很难用的。图 3.14，甚至方程 3.82，对大多数应用，特别是早期设计的电感计算足够了。

### 导线

半径为  $a$  的导线单位长度电感  $L[H/m]$  为：

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (3.83)$$

### “长”线圈

a. 一个“长” ( $> 0.75$ )、“薄” ( $2a_1$ )、 $N$  匝的线圈：

$$L = \mu_0 a_1 N^2 \left[ \frac{\pi(1+\alpha)^2}{8\beta} \right] \left[ 1 - \frac{2}{3\pi\beta} + \frac{(1+\alpha)^2}{32\beta^2} \dots \right] \quad (3.84)$$

在  $(\alpha-1)/(\alpha+1) \ll 1$  时，化简为：

$$L = \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\pi}{2\beta} \right) \left[ 1 - \frac{2}{3\pi\beta} + \frac{1}{8\beta^2} \dots \right] \quad (3.84b)$$

b. 一个“很长” ( $\beta \gg 1$ )、“薄” ( $\alpha \approx 1$ )，方程 3.84b 成为：

$$L = \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\pi}{2\beta} \right) \quad (3.84c)$$

可见，对一个非常长且薄壁的线圈，有  $L(\alpha, \beta) = \pi/2\beta$ 。

### “短” 线圈

一个“短” ( $\beta < 0.75$ )、“薄” ( $2a_1, \alpha \simeq 1$ )、N 匝的线圈：

$$\begin{aligned} L \simeq & \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right) \left\{ \ln \left[ \frac{2(\alpha + 1)}{\beta} \right] \left[ 1 + \frac{\beta^2}{2(1 + \alpha^2)} \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\beta^2}{4(1 + \alpha^2)} \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

如果  $\beta \ll 1$ ，变为：

$$L \simeq \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right) \left\{ \ln \left[ \frac{2(\alpha + 1)}{\beta} \right] - 0.5 \right\} \quad (3.85')$$

### 饼式线圈

一个内径  $2a_1$ 、饼式 (扁平) ( $\beta \ll 1$ )、N 匝线圈：

$$\begin{aligned} L \simeq & \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right) \left\{ \ln \left[ \frac{4(\alpha + 1)}{\alpha - 1} \right] \left[ 1 + \frac{1}{24} \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)^2} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{43}{144} \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha + 1)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

对于  $(\alpha - 1)/(\alpha + 1) \ll 1$ ，上式进一步简化为：

$$L \simeq \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\alpha + 1}{2} \right) \left\{ \ln \left[ \frac{4(\alpha + 1)}{\alpha - 1} \right] - 0.5 \right\} \quad (3.86')$$

注意到，对于一个“环” ( $N = 1$ )，有  $a_1(\alpha + 1) = 2R, 2a_1\beta = 2a, a_1(\alpha - 1) = 2a$ ，方程 3.85b 和 3.86b 都将简化为：

$$L \simeq \mu_0 R \left[ \ln \left( \frac{4R}{\alpha} \right) - 0.5 \right] = \mu_0 R \left[ \ln \left( \frac{R}{a} \right) + 0.886 \right] \quad (3.86'')$$

方程 3.86c 应用于具有长方形横截面的环，而 3.80a 用于圆形截面的环。对一个实际很平 ( $\alpha \gg 1$ ) 的饼，3.86a 进一步可以简化为：

$$L \simeq 0.5 \mu_0 a_1 \alpha N^2 \left\{ \ln \left( \frac{25}{6} \right) - \frac{101}{288} \right\} = 0.538 \mu_0 a_1 \alpha N^2 \approx 0.5 \mu_0 a_2 N^2 \quad (3.86''')$$

注意到，3.86d 中出现的是  $a_2$  而不是通常出现的  $a_1$ 。

### 理想偶极磁体

“理想”偶极磁体——无限长、零绕组厚度、 $N$  匝——的单位长度电感  $L[\text{H/m}]$ ：

$$L_l = \frac{1}{8} \mu_0 \pi N^2 \quad (3.87)$$

### 理想四极磁体

“理想”四极磁体——无限长、零绕组厚度、N 匝——的单位长度长度电感  $L[\text{H/m}]$ :

$$L_l = \frac{1}{16}\mu_0\pi N^2 \quad (3.88)$$

注意到，一个理想偶极子和理想四极子磁体，电感与绕组半径无关，但与长度成正比。

### 理想圆截面的环形磁体

“理想”环形磁体——零绕组厚度、主半径  $R$ ，圆截面半径  $a$ ，匝数  $N$ :

$$L = \mu_0 R N^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a}{R} \right)^2} \right] \quad (3.89)$$

在极限  $a \ll R$  下， $L$  近似为:

$$L = \mu_0 a N^2 \left( \frac{a}{2R} \right) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{a}{R} \right)^4 + \dots \right] \simeq \mu_0 a N^2 \left( \frac{a}{2R} \right) \quad (3.89')$$

### “理想”矩形截面的环形磁体

“理想”环形磁体——零绕组厚度、主半径  $R$ ，矩形截面 r 轴宽  $2a$ 、z 轴高  $2b$ ，匝数  $N$ :

$$L = \mu_0 b N^2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) \right] \quad (3.90)$$

在极限  $a \ll R$  下， $L$  近似为:

$$L = \mu_0 b N^2 \left( \frac{2a}{\pi R} \right) \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{a}{R} \right)^4 + \dots \right] \simeq \mu_0 b N^2 \left( \frac{2a}{\pi R} \right) \quad (3.90')$$

## 3.8 互感

当线圈 1 和线圈 2 相互靠近时，他们通常会存在感应相互作用。他们的耦合可以量化为互感  $M_{12}, M_{21}$ 。显然有  $M_{12} = M_{21}$ 。我们有:

$$M_{12} \equiv N_1 \frac{\Phi_{12}}{I_2} = M_{21} \equiv N_2 \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (3.91)$$

$\Phi_{12}$  是当线圈 2 通过电流  $I_2$  产生的磁通与线圈 1 的  $N_1$  匝的交链； $\Phi_{21}$  是当线圈 1 通过电流  $I_1$  产生的磁通与线圈 2 的  $N_2$  匝的交链；在一个两线圈耦合系统的总磁能  $E_m$  为:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_1 I_2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \end{aligned} \quad (3.92)$$

和自感公式类似，对于一些系统是存在互感公式的。我们感兴趣的，比如耦合同轴螺管组，能计算线圈自感的代码通常也能一个多线圈系统的电感矩阵。

### 串联线圈

两个自感为  $L_1, L_2$  互感为  $M_{12}$  的两线圈串联系统的有效自感  $L_s$  为：

$$L_s = L_1 + L_2 \pm 2M_{12} \quad (3.93)$$

如果磁场是叠加的， $M_{12}$  取 + 号；反之，取 - 号。

### 并联线圈

两个自感为  $L_1, L_2$  互感为  $M_{12}$  的两线圈并联系统的有效自感  $L_s$  为：

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{L_1 + L_2 \mp 2M_{12}} \quad (3.94)$$

### 互感系数

与  $L_1, L_2$  有关的互感系数  $M_{12}$  为：

$$M_{12} = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (3.95a)$$

$$k = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (3.95b)$$

其中， $k$  称为耦合系数。 $k = 0$  表示线圈之间是无耦合的， $k = 1$  表示全耦合。对于一个紧密嵌入的螺管对，即一个线圈同轴、同心位于另一个线圈的室温孔内， $k$  一般在  $0.3 - 0.6$ 。当他们的  $\alpha$  和  $\beta$  相近时，趋向于 0.6；否则，趋向于 0.3。

### 3.8.1 互感——几个可解析表达的情况

因为线圈之间的力和互感是紧密相连的，前面给出的线圈 A 和线圈 B 之间的轴向力解析表达式可以用于导出互感公式。根据  $\vec{F} = I_A I_B \nabla M$ ，显然  $M$  的表达式要比轴向力的表达式更复杂。因此，下面仅讨论几个简单的例子。

#### 两个环线圈之间的互感

两个轴对齐的“环”线圈  $A(2a_A, N_A)$  和线圈  $B(2a_B, N_B)$  相距  $\rho$ ，互感  $M_{AB}(\rho)$ ：

$$M_{AB} = \frac{\mu_0}{2} (N_A N_B) \sqrt{(a_A + a_B)^2 + \rho^2} \{2[K(k) - E(k)] - k^2 K(k)\} \quad (3.96)$$

本系统的模量  $k^2$  为:

$$k^2 = \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2 + \rho^2}$$

### 特例 1: 相距很远的两个环形线圈

当两个环线圈相距很远时, 即  $\rho^2 \gg (a_A + a_B)^2$  或  $k^2 \ll 1$  时, 方程 3.38c 和 3.38a 可用来简化方程 3.96:

$$M_{AB} \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{(\pi a_A^2 N_A)(\pi a_B^2 N_B)}{\rho^3} \right] \quad (3.97)$$

上式表明, 互感近似正比于两个线圈的总绕组面积  $\pi a_A^2 N_A$  和  $\pi a_B^2 N_B$  之积。

### 薄壁螺管和环形线圈间的互感

此处, 我们考虑一个“薄壁”螺管 ( $2a_S$ ; 均匀匝密度  $N_S/2b_S$ ) 和一个环线圈 ( $2a_R, N_R$ ) 在轴向对齐。环线圈位于螺管右端的右侧  $\rho$  处, 如图 3.6 所示。螺管线圈和环线圈之间的互感  $M_{RS}$  为:

$$\begin{aligned} M_{RS}(\rho) = & -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \times \\ & \left( \frac{\rho}{\sqrt{(a_R^2 + a_S^2)^2 + \rho^2}} \{ [(a_R + a_S)^2 + \rho^2][K(k_R) - E(k_R)] - \gamma(c^2, k_R) \} \right. \\ & \left. - \frac{2b_S + \rho}{\sqrt{(a_R + a_S)^2 + (2b_S + \rho)^2}} \times \right. \\ & \left. \{ [(a_R + a_S)^2 + (2b_S + \rho)^2][K(k_S) - E(k_S)] - \gamma(c^2, k_S) \} \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

式中的参数为:

$$k_R^2 = \frac{4a_R a_S}{(a_R + a_S)^2 + \rho^2}; k_S^2 = \frac{4a_R a_S}{(a_R + a_S)^2 + (2b_S + \rho)^2}; c^2 = \frac{4a_R a_S}{(a_R + a_S)^2}$$

### 特例 2: 相距很远的薄壁线圈和环线圈

当两个线圈很远, 至于  $k_R^2 \ll 1, k_S^2 \ll 1, \rho > b_S$  时, 方程 3.98 可以简化为:

$$\begin{aligned} M_{RS} = & \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \left\{ \frac{2\pi(a_R a_S)^2 b_S}{\rho^3} \left( 1 + \frac{b_S}{\rho} \right) \right. \\ & \left. - (a_R - a_S)^2 [\Pi(c^2, k_S) - \Pi(c^2, k_R)] \right\} \end{aligned} \quad (3.99)$$

尽管  $\rho$  比  $a_R, a_S$  长不少, 但仍能远大于  $b_S$ 。于是, 修正项  $b_S/\rho$  和  $\Pi(c^2, k_S)$  在方程 3.99 中必须保留。

### 特例 3：相距极远的薄壁线圈和环线圈

当两个线圈足够远，至于  $\rho \gg b_S$  以及  $k_R \rightarrow 0, k_S \rightarrow 0$  都满足时，方程 3.99 进一步可以简化为：

$$\begin{aligned} M_{RS} &= \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \frac{2\pi(a_R a_S)^2 b_S}{\rho^3} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} (\pi a_R^2 N_R) \left( \frac{\pi a_S^2 N_S}{2b_S} \right) \frac{2b_S}{\rho^3} \end{aligned} \quad (3.100)$$

### 环线圈在薄壁螺管的中部

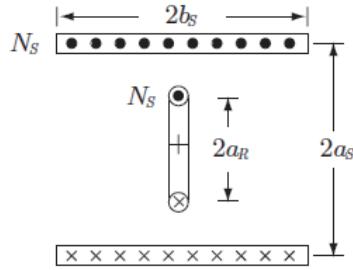


图 3.15: 环形线圈置于薄壁线圈的中平面处

图 3.15 给出了两个线圈的安置示意图，图中环线圈位于薄壁螺管线圈的中平面上。在这个安置中， $\rho = -b_S$ 。这样，在方程 3.98 中插入  $\rho = -b_S$ ，我们得到下面的简化表达式：

$$\begin{aligned} M_{RS}(\rho = -b_S) &\simeq \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \times \frac{2b_S}{\sqrt{(a_R + a_S)^2 + b_S^2}} \times \\ &\quad \{(a_R + a_S)^2 + b_S^2\} [K(\kappa) - E(\kappa)] - \Upsilon(c^2, \kappa) \end{aligned} \quad (3.101)$$

式中， $k$  为：

$$\kappa^2 = \frac{4a_R a_S}{(4a_R + a_S)^2 + b_S^2}$$

### 特例 4：长薄壁螺管和环线圈

当薄壁线圈是“长”的，特别是当  $b_S \gg a_R$  满足时，环线圈和螺管线圈的相对位置不再重要。对于一个满足  $k^2 \simeq 4a_R a_S / b_S^2$  的长螺管，方程 3.101 变为：

$$\begin{aligned} M_{RS} &\simeq \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) (2) \{b_S^2 [K(\kappa) - E(\kappa)] - \Upsilon(c^2, \kappa)\} \\ &\simeq \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \pi (a_R^2 + a_S^2) \left[ 1 - \frac{2(a_R - a_S)^2}{\pi(a_R^2 + a_S^2)} \Pi(c^2, \kappa) \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

大括号内的第二项可以视为修正项, 在极限  $a_R \gg a_S$  或  $a_R \ll a_S$  时可以忽略。

#### 特例 5: 与螺管直径相差很大的环线圈

当环线圈的直径与螺管线圈直径相差很大时, 条件  $c^2 \rightarrow 0$  满足,  $\prod(c^2, 0)$  可由依  $c^2$  展开的级数的前几项表示。在方程 3.102 取极限  $k^2 \rightarrow 0$  ( $b_S \gg a_R, b_S \gg a_S$ ),  $\prod(c^2, k) \rightarrow \prod(c^2, 0)$  时, 使用 3.49b, 我们有:

$$\begin{aligned} M_{RS} &\simeq \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \pi (a_R^2 + a_S^2) \left[ 1 - \frac{(a_R - a_s)^2}{(a_R^2 + a_S^2)} \left( 1 + \frac{1}{2}c^2 + \frac{3}{8}c^4 + \frac{5}{16}c^6 \right) \right] \\ &\simeq \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_R N_S}{2b_S} \right) \pi (a_R^2 + a_S^2) \times \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{(a_R - a_s)^2}{(a_R^2 + a_S^2)} \left[ 1 + \frac{2a_R a_S}{(a_R^2 + a_S^2)^2} + \frac{6(a_R a_S)^2}{(a_R^2 + a_S^2)^4} + \frac{20(a_R a_S)^3}{(a_R^2 + a_S^2)^6} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.103)$$

### 3.8.2 互感和相互作用力

使用 3.5.7 节导出的轴向偏离中心线圈受到的轴向恢复力表达式, 我们可以导出两个轴向依赖线圈的互感表达式。两个螺管 A、B 间的净磁力  $F_{AB}$  与存储在两个线圈中的总磁能有关:

$$\vec{F}_{AB} = \nabla E_{AB} \quad (3.104)$$

将方程 3.92 中的下标替换为方程 3.104a 中的 A 和 B, 注意到 z 向的  $F_{AB}$  是  $F_{ZR}(\rho)$ , 我们有:

$$F_{zR}(\rho) = \frac{\partial E_{AB}}{\partial \rho} = I_A I_B \frac{\partial M_{AB}(\rho)}{\partial \rho} \quad (3.105)$$

对于小距离  $\rho (\rho \ll \sqrt{a_T^2 + b_D^2})$ , 我们可以对  $F_{ZR}(\rho)$  积分, 有:

$$M_{AB}(\rho) - M_{AB}(0) \propto -\rho^2 \quad (3.106)$$

可见, 对于小距离  $\rho$ ,  $M_{AB}(\rho)$  随偏离中心距离的平方  $\rho^2$  减小。

#### 磁场强度 $H$ 和磁感应强度 $B$

除非特别指明, 专题中的磁体都是空心的。此时, 磁感应强度  $B$  和磁场强度  $H$  存在简单关系:  $B = \mu_0 H$ 。式中,  $\mu_0$  是空气磁导率, 此时等于真空磁导率。通常, 特别是工程师, 常用特斯拉 [T] 作磁感应强度单位, 用安培每米 [ $A/m$ ] 作磁场强度的单位。

……cgs 电磁单位制……

## 3.9 专题

### 3.9.1 讨论 3.1：均匀电流密度螺管

这里，我们首先讨论均匀电流密度螺管线圈的一些基本问题。绕组的内直径是  $i.d. = 2a_1$ ，外直径是  $o.d. = 2a_2$ ，总长度是  $2b$ 。图 3.16 定义了绕组截面——因为我们处理的是轴对称螺管，可以仅考虑  $z$  和  $r$  轴。由位于  $(r, z)$  处的微分截面载流环  $dA[A/m^2]$  在中心点处产生的微分磁感应强度  $dB_z(0, 0)[T]$  为：

$$dB_z(0, 0) = \frac{\mu_0 r^2 \lambda J dA}{2(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.107)$$

式中， $\lambda J[A/m^2]$  是微分截面内部的总电流密度。无量纲数  $\lambda$  称为空间因子，这刻画了绕组截面并非完全由载流导体占据这一事实。注意到在这个模型中， $\lambda J$  在整个绕组截面上是均匀的，且有：

$$\lambda J = \frac{NI}{2b(a_2 - a_1)} \quad (3.108a)$$

$$= \frac{NI}{2a_1^2 \beta(\alpha - 1)} \quad (3.108b)$$

式中， $\alpha = a_2/a_1, \beta = b/a_1$ 。 $N$  是总匝数， $NI$  称为总安匝数。

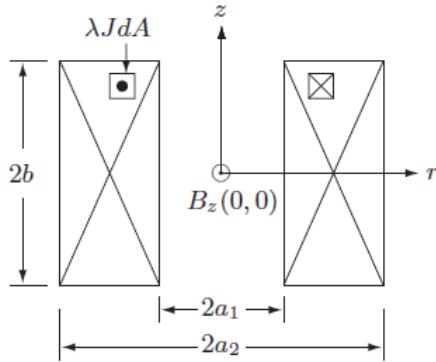


图 3.16：均匀电流密度螺管的截面

对 3.107 式从  $r = a_1$  到  $r = a_2$  以及  $z = -b$  到  $z = b$  积分，我们得到螺管的  $B_z(0, 0)$  和  $F(\alpha, \beta)$  的表达式：

$$B_z(0, 0) = \mu_0 \lambda J_{a_1} F(\alpha, \beta) \quad (3.109)$$

$$F(\alpha, \beta) = \beta \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (3.13b)$$

前面已经提及,  $F(\alpha, \beta)$  是均匀电流密度线圈的“场因子”。和电感参数  $L(\alpha, \beta)$  类似, 它也是仅依赖于螺管线圈的截面形状的。图 3.17 给出了三组关系: 3.17a 给出的是在  $\beta$  为常数时,  $F(\alpha, \beta)$  与  $\alpha$  的关系; 3.17b 给出的是在  $\alpha$  为常数时,  $F(\alpha, \beta)$  与  $\beta$  的关系; 3.17c 给出的是在  $F(\alpha, \beta)$  为常数时,  $\beta$  与  $\alpha$  的关系。

与  $F(\alpha, \beta)$  类似, 螺管总体积  $V_{cd} = \lambda 2\pi a_1^3 (\alpha^2 - 1) \beta$  在给定的  $\lambda, a_1$  条件下仅依赖于  $\alpha, \beta$ : 每一幅图中的实线上的点都是给定  $F(\alpha, \beta)$  下的最小体积。 $F(\alpha, \beta)$  与某些特殊线圈相关的显著特征将在问题 3.1 中论及。

### 3.9.2 问题 3.1: “简单”螺管

- a) 从 3.107 开始, 推导得到 3.109 和 3.13b。
- b) 通过联立 3.108b 和 3.109, 可以得到  $B_z(0, 0)$ :

$$B_z(0, 0) = \frac{\mu_0 N I}{2a_1(\alpha - 1)} \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (3.110)$$

“环”线圈 化简上式为一个半径  $a_1$ 、载流  $N I$  的环线圈 ( $\alpha = 1$ ), 得到:

$$B_z(0, 0) = \frac{\mu_0 N I}{2a_1} \quad (3.111)$$

“薄壁”螺管 对于薄壁螺管 ( $\alpha \rightarrow 1$ ), 可以简化为:

$$B_z(0, 0) = \frac{\mu_0 N I}{2a_1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (3.111b)$$

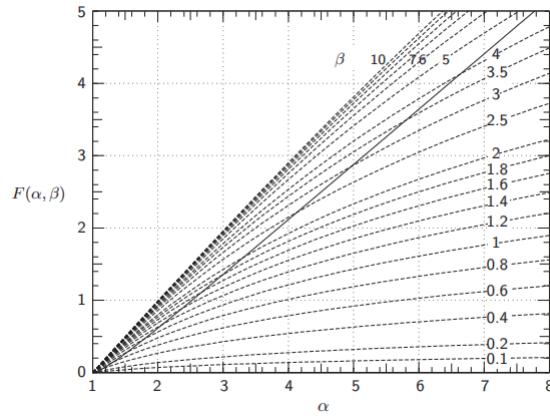
$$B_z(0, 0) = \mu_0 \lambda J a_1 (\alpha - 1) \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (3.111c)$$

“长”螺管 对于长度远大于外直径的螺管 ( $\beta \gg \alpha$ ), 可以简化为:

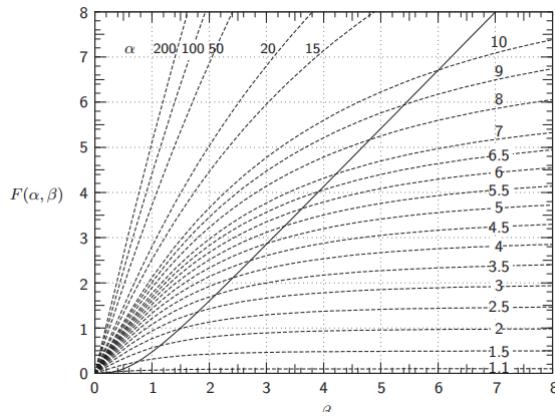
$$B_z(0, 0) = \frac{\mu_0 N I}{2b} \quad (3.111d)$$

考虑到  $N I / 2b = K_\theta$ , 上式等价于 3.5, 于是

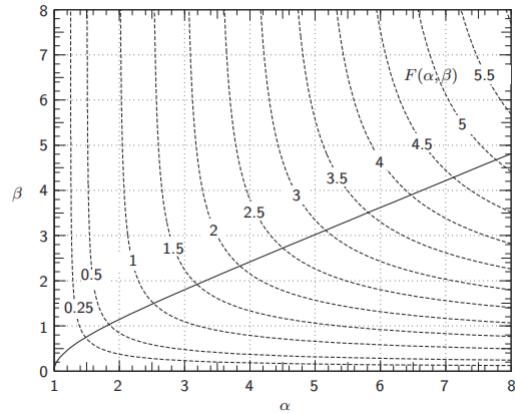
$$B_z(0, 0) = \mu_0 \lambda J a_1 (\alpha - 1) \quad (3.111e)$$



(a) 在  $\beta$  为常数时,  $F(\alpha, \beta)$  与  $\alpha$  的关系 (虚线)。实线表示给定  $F(\alpha, \beta)$  下的最小导体体积。



(b) 在  $\alpha$  为常数时,  $F(\alpha, \beta)$  与  $\beta$  的关系 (虚线)。实线表示给定  $F(\alpha, \beta)$  下的最小导体体积。



(c) 在  $F(\alpha, \beta)$  为常数时,  $\beta$  与  $\alpha$  的关系 (虚线)。实线表示给定  $F(\alpha, \beta)$  下的最小导体体积。

图 3.17:  $F(\alpha, \beta)$ 、 $\beta$ 、 $\alpha$  之关系

“饼式”线圈 对于长度比外直径小很多的饼式线圈, 简化为:

$$B_z(0, 0) = \frac{\mu_0 NI}{2a_1} \left( \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \right) \quad (3.111f)$$

c) 场 vs. 能量: 证明电阻性螺管 (比如铜螺管) 线圈的中心场表达  $B_z(0, 0)$  与其所需功率  $P$  的关系为:

$$B_z(0, 0) = \mu_0 G(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{\lambda P}{\rho_{cd} a_1}} \quad (3.112a)$$

$$G(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi(\alpha^2 - 1)}} \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}\right) \quad (3.112b)$$

式中,  $\rho_{cd}$  是导体电导率。 $G(\alpha, \beta)$  被称为均匀电流密度线圈的“G 因子”。

### 问题 3.1 之解

a) 对 3.107 在  $z$  和  $r$  的合适区间积分, 得到:

$$B_z(0, 0) = \frac{\mu_0 \lambda J}{2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{-b}^b \frac{r^2 dz dr}{\sqrt[3]{r^2 + z^2}} = \mu_0 \lambda J \int_{a_1}^{a_2} \int_0^b \frac{r^2 dz dr}{\sqrt[3]{r^2 + z^2}}$$

查积分表, 得到:

$$\int_0^b \frac{dz}{\sqrt[3]{r^2 + z^2}} = \left[ \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^b = \frac{b}{r^2 \sqrt{r^2 + b^2}}$$

于是:

$$\begin{aligned} B_z(0, 0) &= \mu_0 \lambda J \int_{a_1}^{a_2} \frac{r^2 b dr}{r^2 \sqrt{r^2 + b^2}} = \mu_0 \lambda J b [\ln(r + \sqrt{r^2 + b^2})]_{a_1}^{a_2} \\ &= \mu_0 \lambda J b [\ln(a_2 + \sqrt{a_2^2 + b^2}) - \ln(a_1 + \sqrt{a_1^2 + b^2})] \\ &= \mu_0 \lambda J a_1 \left( \frac{b}{a_1} \right) \ln \left[ \frac{\frac{a_2}{a_1} + \sqrt{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a_1}\right)^2}}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a_2}\right)^2}} \right] \end{aligned} \quad (S1.1)$$

考虑到  $a_2/a_1 = \alpha$  和  $b/a_1 = \beta$ , 上式变为:

$$B_z(0, 0) = \mu_0 \lambda J \alpha_1 \beta \ln \left[ \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right] \quad (S1.2)$$

于是:

$$B_z(0,0) = \mu_0 \lambda J_{a_1} F(\alpha, \beta) \quad (3.109)$$

$$F(\alpha, \beta) = \beta \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (3.13b)$$

b) “环”线圈。对于环线圈 ( $\alpha \rightarrow 1; \beta \rightarrow 0$ ), 3.110 中右侧的对数项成为:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} = \ln \alpha$$

因为当  $|\epsilon| \ll 1$  时,  $\ln(1 + \epsilon) \simeq \epsilon$ 。故有  $\alpha \rightarrow 1$  时,  $\ln \alpha \rightarrow \alpha - 1$ 。于是:

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_0 NI}{2a_1(\alpha - 1)} (\alpha - 1) = \frac{\mu_0 NI}{2a_1} \quad (3.111)$$

注意到, 方程 3.111a 和方程 3.3a 的关系。

薄壁螺管。对于薄壁螺管 ( $\alpha \rightarrow 1$ ), 通过联立 3.13b 和 3.23b, 可得:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (S1.3)$$

联立 3.110 和 S1.3, 我们得到 3.111b。从方程 3.109, 3.13b 和 S1.3, 我们得到 3.111c:

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_0 NI}{2a_1} \left( \frac{1}{1 + \beta^2} \right) \quad (3.111b)$$

$$B_z(0,0) = \mu_0 \lambda J_{a_1} (\alpha - 1) \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (3.111c)$$

注意到, 对于长螺管  $\beta \gg 1$ , 3.111c 变成 3.111e。

长螺管。对于  $\beta \gg \alpha$ , 有:

$$\lim_{\beta \gg \alpha} \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) = \ln \left( \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta} \right) = \ln \left( \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1}{\frac{1}{\beta} + 1} \right)$$

使用“环”线圈中相同的近似方法, 得到:

$$\lim_{\beta \gg \alpha} \ln \left( \frac{\frac{\alpha}{\beta} + 1}{\frac{1}{\beta} + 1} \right) \simeq \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

于是在极限  $\beta \gg \alpha$  下, 我们得到:

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_0 NI}{2b} \quad (3.111d)$$

上文已经提及,  $NI/2b$  可以视为表面电流密度。从式 3.108 中, 有  $NI/(2b) = \lambda J(a_2 - a_1)$ 。于是上式又可以写为:

$$B_z(0, 0) = \mu_0 \lambda J a_1 (\alpha - 1) \quad (3.111e)$$

对于一个长螺管, 它的中心场和它的长度是无关的。 $B_z(0, 0)$  独立性在大  $\beta (> \sim 3)$  和中等  $\alpha (< \beta)$  情况下是明显的 (图 3.17b)。同样,  $B_z(0, 0)$  在大  $\beta (> \sim 3)$  和中等  $\alpha (< \beta)$  情况下正比于线圈的  $a_2 - a_1$ 。这是因为该值越大, 对应的单位长度总安匝数越大 (图 3.17a)。

**饼式线圈。**对于饼式线圈, 近似极限是  $\beta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} &= \ln \left( \frac{2\alpha}{2} \right) = \ln \alpha \\ B_z(0, 0) &= \frac{\mu_0 NI}{2a_1} \left( \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \right) \end{aligned} \quad (3.111f)$$

注意到, 饼式线圈的中心场等于环线圈的中心场乘一个系数  $\ln \alpha / (\alpha - 1)$ 。在  $\alpha \rightarrow 1$  时, 上式退化为环线圈的表达式。

c) 全部导体体积等于  $\lambda \times <\text{绕组体积} (\text{winding volume, wv})>$ :

$$<\text{wv}> = 2b\pi(a_2^2 - a_1^2) = a_1^3 2\pi\beta(\alpha^2 - 1)$$

于是:

$$P = \rho_{cd} J^2 \lambda a_1^3 2\pi\beta(\alpha^2 - 1) \quad (3.112)$$

这里,  $J$  仅是导体中的电流密度。从 3.112 中, 我们用  $P$  和其他参数解出  $J$ :

$$J = \sqrt{\frac{P}{\rho_{cd}\lambda a_1}} \left[ \frac{1}{a_1 \sqrt{2\pi\beta(\alpha^2 - 1)}} \right] \quad (\text{S1.4})$$

联立 S1.2 和 S1.4, 得到:

$$\begin{aligned} B_z(0, 0) &= \mu_0 \lambda \sqrt{\frac{P}{\rho_{cd}\lambda a_1}} \left[ \frac{1}{a_1 \sqrt{2\pi\beta(\alpha^2 - 1)}} \right] a_1 \beta \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \\ &= \mu_0 \sqrt{\frac{\lambda P}{\rho_{cd} a_1}} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi(\alpha^2 - 1)}} \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \end{aligned}$$

于是：

$$B_z(0,0) = \mu_0 G(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{\lambda P}{\rho_{cd} a_1}} \quad (3.113a)$$

$$G(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi(\alpha^2 - 1)}} \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (3.113b)$$

上式表明，对给定参数  $\alpha$  和  $\beta$  的电阻性螺管线圈所需的功率  $P$  和它的中心场是平方关系：

$$P = \frac{\rho_{cu} a_1 B_z^2(0,0)}{\mu_0^2 \lambda G^2(\alpha, \beta)} \quad (3.113c)$$

### 3.9.3 讨论 3.2: Bitter 磁体

尽管本书主要研究超导磁体，这里我们讨论一下无铁芯、水冷磁体。我们称这种直流高场水冷磁体为“Bitter 磁体”，以纪念于 1930s 最早提出该设计的 MIT 科学家 Francis Bitter。Bitter 的工作奠定了现代磁体技术的基础。我们从 Bitter 的《磁体》一书摘录一段，描述高场磁体的技术挑战和解决方案。

Bitter 的设计采用了堆叠的环形板导体。每一个板有一个缝，用薄绝缘片隔开。缝允许裸露部分在压力下与相邻板的裸露部分连接，从而电流可以在板间以类似螺旋的形式流动。每一个 Bitter 板都打了数百个冷却孔。为了产生高场，通入几千安培的电流，小号几兆瓦的电能，转换为金属板的热量。迫流水以高速 ( $\sim 20 \text{ m/s}$ ) 流过孔，带走热量。1990s 国家高场实验室开发的 Florida-Bitter 磁体如图 3.18 所示。板上的径向缝清晰可见。同时也注意到，水控并不是像 Bitter 板是圆形的。这种在电流方向拉长的形状处理最早是由 MIT 的 Weggel 在 1970s 提出的。这里的外板直径是 148 mm；板直径尺寸早已超过 400 mm。16 个大孔是用于板的轴向固定的。Bitter 磁体制造的关键特征是模块化，即由许多相似的板组成。为了优化磁体性能，板的厚度、机械性质和电气性质在轴向可以定制。

由 3.110 式可知，在给定安匝数  $NI$  下，绕组内径  $a_1$  越小，中心场  $B_z(0,0)$  越大。又，从 3.113a 式可知，在相同功耗下，安匝越靠近磁体室温孔越高效。Bitter 的设计 ( $J \propto 1/r$ ) 是一个近似实现上述目标的有效方法。

#### A. 电流密度、场、能量

本节，我们推导出 Bitter 磁体的以下表达式：电流密度  $J_\theta(r)$ ，中心场  $B_z(0,0)$ ，场因数  $F(\alpha, \beta)$ ，G 因数  $G(\alpha, \beta)$ 。

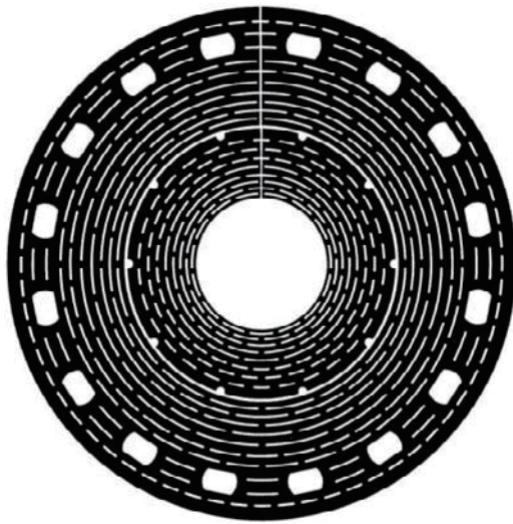


图 3.18: 国家高场实验室的两个嵌入式 Florida-Bitter 轮廓, 外盘直径 140 mm, 位于“水”磁体内

### 电流密度分布

考虑一个单盘, 电流在  $\theta$  向流动。电场  $E$  给出的电压  $V$  正比于  $\theta$ 。因为  $\vec{E}$  仅有  $\theta$  分量, 且在给定  $r$  处为常亮,  $E_\theta 2\pi r = V$ 。所以,  $E_\theta$  按照  $1/r$  变化。由于  $\vec{J} = \vec{E}/\rho_{Cu}$ , 我们有:

$$[J_\theta(r)]_B = \frac{E_\theta}{\rho_{Cu}} = \frac{V}{2\pi\rho_{Cu}r} = J_0 \frac{a_1}{r} \quad (3.114)$$

式中,  $J_0 = [J_\theta(a_1)]_B = V/(2\pi\rho_{Cu}a_1)$ 。上式表明, Bitter 磁体中的电流密度按照  $1/r$  减小, 且在  $r = a_1$  处取得最大值。

### 场

我们用上式给出的  $J_\theta$  替换 3.107 式中的  $\lambda J$ 。选择合适的上下限, 积分得:

$$\begin{aligned} [B_z(0, 0)]_B &= \mu_0 \lambda_B J_0 a_1 \int_{a_1}^{a_2} \int_0^b \frac{r dr dz}{\sqrt[3]{r^2 + z^2}} \\ &= \mu_0 \lambda_B J_0 a_1 \int_1^\alpha \int_0^\beta \frac{\eta d\eta d\zeta}{\sqrt[3]{\eta^2 + \zeta^2}} \end{aligned}$$

式中,  $r/a_1 = \eta$ ,  $z/a_1 = \zeta$ , 查积分表, 得到:

$$\int_0^\beta \frac{d\zeta}{\sqrt[3]{\eta^2 + \zeta^2}} = \left[ \frac{\zeta}{\eta^2 \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \right]_0^\beta = \frac{\beta}{\eta^2 \sqrt{\eta^2 + \beta^2}}$$

联立上面两式, 得到:

$$\begin{aligned} [B_z(0,0)]_B &= \mu_0 \lambda_B J_0 a_1 \beta \int_1^\alpha \frac{\eta d\eta}{\eta^2 \sqrt{\eta^2 + \beta^2}} \\ &= \mu_0 \lambda_B J_0 a_1 \beta \left[ -\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \eta^2}}{\eta}\right) \right]_1^\alpha \\ &= \mu_0 \lambda_B J_0 a_1 \ln\left(\alpha \frac{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}}{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \end{aligned}$$

上面的表达式可以写为:

$$[B_z(0,0)]_B = \mu_0 \lambda_B J_0 a_1 [F(\alpha, \beta)]_B \quad (3.115a)$$

$$[F(\alpha, \beta)]_B = \ln\left(\alpha \frac{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}}{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \quad (3.115b)$$

注意 3.115b 和 3.15b 两式的区别。

### 场和能量

我们通过在整个线圈区域内积分功率密度  $\rho_{cu}[J_\theta]^2_B(r)$  推导出  $[H_z(0,0)]_B$  和 Bitter 磁体总功率  $P_B$  的关系式。这里继续采用无量纲参数, 有:

$$P_B = a_1^3 \int_1^\alpha \int_{-\beta}^\beta \rho_{cu} \lambda_B \left(\frac{J_0}{\eta}\right)^2 2\pi \eta d\zeta d\eta = J_0^2 \rho_{cu} \lambda_B a_1^3 (4\pi \beta \ln \alpha)$$

通过上面的表达式, 我们将  $J_0$  和  $P_B$  联系起来:

$$J_0 = \frac{1}{a_1 \sqrt{4\pi \beta \ln \alpha}} \sqrt{\frac{P_B}{\rho_{cu} \lambda_B a_1}}$$

上式和 3.115 联立, 得到:

$$[B_z(0,0)]_B = \mu_0 [G(\alpha, \beta)]_B \sqrt{\frac{\lambda_B P_B}{\rho_{cu} a_1}} \quad (3.116a)$$

$$[G(\alpha, \beta)]_B = \frac{1}{\sqrt{4\pi \beta \ln \alpha}} [F(\alpha, \beta)]_B \quad (3.116b)$$

在均匀电流密度螺管线圈中,  $[B_z(0,0)]_B$  按  $P_B$  的平方根增加;  $P_B$  是磁场的二次函数。 $[G(\alpha, \beta)]_B$  在  $\alpha \simeq 6.42$  和  $\beta \simeq 2.5$  时取得最大值, 此时

$[G(\alpha, \beta)]_B \simeq 0.166$ 。在  $5 \leq \alpha \leq 9$  和  $1.8 \leq \beta \leq 2.6$  范围内,  $[G(\alpha, \beta)]_B$  的值至少是其峰值的 99%。也就是说, 在这个  $\alpha$  和  $\beta$  范围内, 在给定场下,  $P_B$  变动在 2% 以内。不过, 给定  $a_1$  时, 场的均匀性随  $2b/\beta$  增大而改善。故大多数 Bitter 磁体的  $\beta > 2.5$ 。

### 实例

我们用上面的关系式计算一个 Bitter 磁体。磁体参数  $2a_1 = 6$  cm,  $2a_2 = 40$  cm,  $2b = 22$  cm,  $\lambda_B = 0.8$ ,  $\rho_{Cu} = 2 \times 10^{-6}$  cm, 产生的磁场  $[B_z(0, 0)]_B = 20$  T。此时,  $\alpha = 40/6 = 6.67$ ;  $\beta = 22/6 = 3.67$ 。

$$\begin{aligned}[G(6.67, 3.67)]_B &= \frac{1}{\sqrt{4\pi 3.67 \ln(6.67)}} \ln \left[ 6.67 \frac{3.67 + \sqrt{1 + (3.67)^2}}{3.67 + \sqrt{(6.67)^2 + (3.67)^2}} \right] \\ &\simeq 0.159\end{aligned}$$

类似的,

$$\begin{aligned}P_B &= \frac{\rho_{Cu} a_1 [B_z(0, 0)]_B^2}{\mu_0^2 \lambda_B [G(\alpha, \beta)]_B^2} \\ &= \frac{(2 \times 10^{-8} \Omega m)(3 \times 10^{-2} \text{ m})(20 \text{ T})^2}{(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}})^2 (0.8)(0.159)^2} \\ &\simeq 7.5 \text{ MW}\end{aligned}$$

这个功率是运行于 Francis Bitter 国家磁体实验室 20 T Bitter 磁体的典型值。

### B. 非 “Bitter” 电流密度分布

水冷磁体的一个重要参数是磁场效率, 定义为  $[B_z(0, 0)]_B^2 / \mu_0^2 P_B$ 。作为一种均匀电流密度磁体, Bitter 磁体的场效率正比于  $\lambda_B$  和  $[G(\alpha, \beta)]_B^2$ , 反比于  $a_1$  和  $\rho_{Cu}$ 。

我们到目前讨论了两种电流分布: 1) 均匀电流分布,  $J(r, z) = J_0$ 。这时,  $J$  与  $r$  和  $z$  无关; 2) Bitter 分布, 即  $J \propto 1/r$ 。由 graded 超导材料绕的超导磁体的  $J(r)$  随  $r$  离散阶梯变化。由多个嵌套线圈组成的磁体, 每一个线圈由不同的超导带绕成, 同样有  $J(r)$  随  $r$  阶梯变化。此处, 我们介绍另外三种水冷磁体的电流分布。

### Kelvin 线圈

给出最高磁场效率的电流密度分布被称为 Kelvin 分布:

$$J_K(r, z) \propto \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Kelvin 线圈的独有性质是每一个部分的单位功率都产生相同的磁场。作为对比，总功率相同的均匀电流密度线圈的中心场仅为 Kelvin 线圈的 66%；Bitter 线圈的这个比值是 77%。不过，制成具有 Kelvin 电流分布的线圈并不具可行性。

### Gaume

Gaume 分布同样给出很好的磁场效率：

$$J_G(r, z) \propto \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + z^2}} \right)$$

Gaume 线圈的每一匝在单位功率下产生相同的磁场。Gaume 线圈的磁场是 Kelvin 的 85%。Bitter 线圈的电流分布在某种程度上是近似于 Gaume 线圈的。这可以通过以下方法实现：更厚的 Bitter 板，轴向远离中心平面。 $J_b(r, z) \propto 1/r\delta(z)$ ，此处  $\delta(z)$  是依赖于  $z$  的板的厚度。

### Polyhelix

多螺旋线圈由多个嵌套的单层线圈组成，每一层的电流密度被调整以最大化磁场效率和/或匹配每一层的与其导体强度匹配的应力：

$$J_P(r, z) \propto f(r)$$

最高效率的多螺旋线圈，其  $J_P(r, z) \propto 1/r^2$ ，可以产生 92% 的 Kelvin 磁场。实践中，由于两端需要多个电极，多螺旋线圈被认为比 Bitter 线圈更难于制造。

### 3.9.4 问题 3.2: 螺管中的最大场

虽然磁体中心的轴向场是磁体用户通常要确认的参数, 但对磁体设计者来说同等重要的一个参数是磁体暴露的最大场。在但螺管磁体中, 如方程 3.12b 给出的, 中平面轴向场  $H_z(r, \theta)$  在室温孔内随远离轴而快速增长。实际上, 轴向的最大场出现在中平面的绕组半径最内点:  $H_m = H_z(a_1, 0)$ 。在由多个嵌套线圈组成的多线圈磁体中, 最大场反而不再最内线圈上。这是由于其余线圈产生的场通常并非轴向, 是偏移  $(a_1, 0)$  点的。再次说明, 对这个话题的处理只是为了增强读者对简单螺管线圈场分布的理解。在实际的多线圈磁体中, 必须依靠程序代码来计算最大场及其所处的位置。

a) 使用 3.4 节中的表达式, 证明对“薄壁”线圈 ( $\alpha = 1$ ), 有关系式  $H_z(r, 0)/H_z(0, 0) = h_z(\xi)$ , 其中  $\xi = r/a_1$ :

$$\begin{aligned} h_z(\xi) = & 1 + \frac{3}{4(1+\beta^2)^2}\xi^2 + \frac{15(3-4\beta^2)}{64(1+\beta^2)^4}\xi^4 + \frac{35(5-20\beta^2+8\beta^4)}{256(1+\beta^2)^6}\xi^6 \\ & + \frac{315(35-280\beta^2+336\beta^4-64\beta^6)}{16384(1+\beta^2)^8}\xi^8 \\ & + \frac{693(63-840\beta^2+2016\beta^4-1152\beta^6+128\beta^8)}{65536(1+\beta^2)^{10}}\xi^{10} \end{aligned} \quad (3.117)$$

b) 此外, 证明对“短”线圈 ( $\beta = 0$ ),  $h_z(\xi)$  的表达式为:

$$\begin{aligned} h_z(\xi) = & 1 + \frac{3(\alpha^2-1)}{8\alpha^2 \ln \alpha^2}\xi^2 + \frac{45(\alpha^4-1)}{256\alpha^4 \ln \alpha}\xi^4 + \frac{175(\alpha^6-1)}{1536\alpha^6 \ln \alpha}\xi^6 \\ & + \frac{11025(\alpha^8-1)}{131027\alpha^8 \ln \alpha}\xi^8 + \frac{43659(\alpha^{10}-1)}{655360\alpha \ln \alpha}\xi^{10} \dots \end{aligned} \quad (3.117b)$$

c) 类似的, 证明对“薄壁且长”线圈,  $h_z(\xi)$  为:

$$h_z(\xi) \propto 1 + \frac{3}{4\beta^4}\xi^2 - \frac{15}{16\beta^6}\xi^4 + \frac{35}{32\beta^8}\xi^6 - \frac{315}{256\beta^{10}}\xi^8 + \dots \quad (3.117c)$$

d) 对“薄壁”线圈 ( $\alpha = 1$ ) 和相对“短”线圈 ( $\beta = 0.4$ ) 计算  $H_m/H_z(0, 0) \equiv h_m$  的近似值。

e) 计算饼式线圈 ( $\alpha = 2, \beta \approx 0$ ) 的  $h_m$ 。

f) 确定“薄壁”且“长”线圈 ( $\alpha = 1, \beta = 2$ ) 的  $h_m$ 。

### 问题 3.2 之解

a) 考虑到  $H_z(r, \theta)$  在中平面上与  $H_z(x, 0)$  或  $H_z(y, 0)$  等价, 我们使用方程 3.12b, 其中  $\xi = x/a_1, \xi = y/a_1$  或  $\xi = r/a_1$ 。对于“薄壁”螺管线圈,

我们可以通过联立方程 3.12b 和 3.25 得到方程 3.117a。

b) 类似的, 方程 3.117b 可以通过联立方程 3.12b 和 3.21 得到。

c) 我们通过联立 3.12b 和 3.26 得到方程 3.117c。不像方程 3.117b 的高阶项的符号都是正的, 3.117c 中的项是正负交替的。

d) 将  $\beta = 0.4, \xi = 1$  代入方程 3.117a, 我们得到:

$$h_m = 1 + 0.5574 + 0.3055 + 0.1125 - 0.0086 - 0.0585 = 1.9082$$

e) 将  $\alpha = 2, \xi = 1$  代入方程 3.117b, 我们得到:

$$h_m = 1 + 0.4058 + 0.2378 + 0.1618 + 0.1209 + 0.0960 = 2.0222$$

f) 将  $\beta = 2, \xi = 1$  代入方程 3.117a, 我们得到:

$$h_m = 1 + 0.03 - 0.0049 + 0.0005 + 0.0000 - 0.0000 = 1.0256$$

一个更快但稍不精确的解可以从方程 3.117c 中得到, 该方程事实上只对  $\beta \gg 1$  成立:

$$h_m \simeq 1 + 0.0469 - 0.0146 + 0.0043 - 0.0012 + 0.0003 = 1.0356$$

### 3.9.5 讨论 3.3: 负荷线

#### A. 用“各向同性”超导体绕成的螺管线圈磁体

图 3.19 给出了各向同性超导体在给定温度  $T_0$  下临界电流  $I_c$  与  $B$  的关系曲以及超导螺管磁体的两组“负荷线”。这里,  $I_c(B, T_0)$  是各向同性的, 也即  $I_c(B, T_0)$  与场方向无关, 这和圆截面超导体的特性是吻合的。

实线和虚线负荷线, 从对应“自场”的  $B_z(0, 0)$  开始: 实线对应轴向场  $B_z(0, 0)$ , 虚线代表绕组内的最大场  $B_{mx}$ ——对简单螺管磁体,  $B_{mx}$  出现在绕组内半径 ( $r = a_1$ ) 和轴向中平面 ( $z = 0$ ) 处,  $B_{mx} = B_z(a_1, 0)$ 。 $I_c(B, T_0)$  和虚线负载线交点是磁体可以保持超导态的可获得最大运行电流,  $I_{op}(B_{mx}, T_0)$ 。

当磁体置于另一个磁体的室温孔中, 背景场磁体产生的场必将加到内侧磁体的负载线上, 所谓的“内插”——在一个组合系统中, 两个磁体一般是同轴且中平面重合的。从  $B$  轴上  $B_b$  开始的实线对应组合系统中心场, 虚线对应最大内插场——注意到虚线起点略高于  $B_b$ , 因为那里的背景场更大;  $I_c(B, T_0)$  和虚线的交点给出了这个组合磁体系统的最大运行电流,  $I_{op}(B_{mxb}, T_0)$ 。

出于各种原因, 后面各章节讨论的超导磁体, 不论是孤立的还是组合的系统, 一般设计运行电流为其最大可能电流的 50-70%。

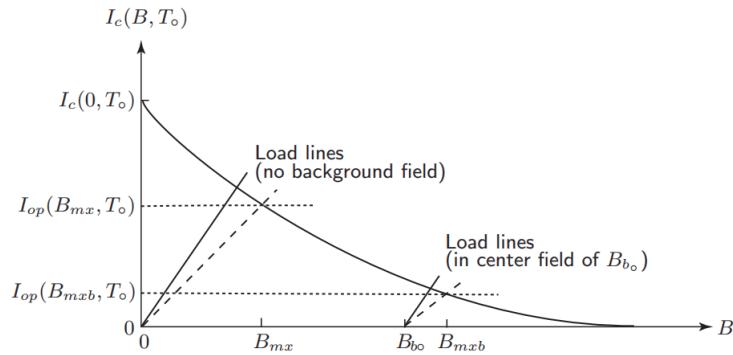


图 3.19: 各向同性超导体在给定温度  $T_0$  下临界电流  $I_c$  与  $B$  的关系曲线; 螺管磁体的两组“负荷线”——自场以及置于另一个产生背景中心场  $B_{b0}$  的螺管磁体室温孔中两种情况

### B. 用各向异性超导体绕制的螺管磁体

对于一个非圆截面超导体,  $I_c(B, T_0)$  通常是“各向异性”的, 即  $I_c(B, T_0)$  依赖于磁场相对于截面的方向。非圆截面超导体的典型例子就是高温超导体 Bi2223 和 YBCO, 这两种导体都是“带”式的。

附录 V 中给出了 Bi2223 和 YBCO 的  $I_c(B, T)/I_c(sf, 77 \text{ K})$  图—— $I_c(B, T)$  数据归一化为  $I_c(sf, 77 \text{ K})$  数据。所谓 sf, 代表“自场”(self field), 即传导电流自身产生的磁场。对每一种超导体, 给出了两组数据, 一组是外部施加平行垂直电流“宽”面的磁场  $B_{\parallel}$ , 一组是外部施加垂直于“宽”面的磁场  $B_{\perp}$ 。Bi2223 和 YBCO 的  $I_c(B, T_0)$  都是在  $B_{\perp}$  下下降更快。另一个值得注意的是, 两种导体的临界电流在两种方向的磁场下, 都是磁场越大下降越快。

可以从图 3.3 所示的螺管磁体的场线可以推断出, 径向分量  $B_r$  在螺管轴向中平面 ( $z = 0$ ) 严格为零, 在  $\pm b$  和  $r$  方向增长, 在  $z = \pm b, a_1 < r < a_2$  存在最大径向场  $[B_r(\alpha, \beta)]_{pk}$ 。不存在  $[B_r(\alpha, \beta)]_{pk}$  的闭式解析解。不过, 对于大多数但螺管线圈 ( $1 \leq \alpha \leq 3.6, 0.1 \leq \beta \leq 10$ ), 在基于带材的磁体初设阶段, 例如双饼线圈堆叠磁体 (讨论 3.6), 方程 3.118 给出的  $[B_r(\alpha, \beta)]_{pk}$  与程序代码计算的结果相差  $\pm 30\%$ :

$$\frac{[B_r(\alpha, \beta)]_{pk}}{B_z(0, 0)} \simeq \frac{0.3}{\alpha^2 \beta} + \frac{0.6}{\alpha} \quad (3.118)$$

注意到, 对一个“薄壁”或“中等厚壁”( $\alpha \leq 1.8$ )且“短”( $\beta < 1$ )的螺管线圈,  $[B_r(\alpha, \beta)]_{pk}$  可能超过  $B_z(0, 0)$ , 例如  $[B_r(\alpha = 1.1, \beta = 0.1)]_{pk} \approx 3B_z(0, 0)!$

从而,由带材绕制的磁体中,负荷线交点对应最大垂直场  $B_\perp$ ,即  $[B_r(\alpha, \beta)]_{pk}$ 。限制带材运行电流的是带材的  $I_c(B_\perp, T_0)$  曲线而不是对应  $I_c(B, T_0)$  的最大  $B (= B_z)$  负荷线。同时,由于  $B_\perp$  随绕组中带材的高度(带材宽度)而变化,这个变化在计算最大运行电流的时候也必须包括进来。Voccio 最近给出了确定 Bi2223 和 YBCO 带材绕制的“饼式线圈”的最大运行电流的解析方法 [3.10]。

### 3.9.6 讨论 3.4: 叠加技术

解场问题应用的 Biot-Savart 定律从根本上阐明了螺管上某点的磁场是螺管上所有电流源产生的磁场的矢量和叠加。这里,我们在整个螺管上应用叠加技术以计算螺管轴线上任一点的磁场。这个技术,虽仅限于轴线上的磁场,但亦能增进读者对螺管磁场的一般理解。

#### A. 末端磁场

轴对称螺管的轴线末端处磁场是一个同样组成但两倍长度的螺管的中心场的一半。我们可以形象化的理解这个问题,考虑一个有两个完全相同部分组成的轴对称螺管,每个螺管长  $2b$ (图 3.20)。新螺管的轴向中心场是由两个部分螺管产生的两个等量场之和:

$$H(b) = H(\alpha, \beta)|_{z=b} = \frac{1}{2}H(\alpha, 2\beta)|_{z=0} = \frac{1}{2}\lambda J a_1[F(\alpha, 2\beta)] \quad (3.119)$$

由于  $F(\alpha, 2\beta) > F(\alpha, \beta)$  (图 3.17b),自然有  $H(z = b) > 0.5H(0)$ 。也即,螺管的轴线末端场总是略大于中心场的一半。注意到,在极限  $\beta \rightarrow \infty$  下,有  $H(z = b) \rightarrow 0.5H(0)$ 。

#### B. 非中心轴向场

叠加技术还可以用于计算螺管轴线上任一点的轴向场。这里考虑两个非中心轴向场的实例: 1)  $0 < z < b$ , 即位于螺管室温孔内; 2)  $z > b$ , 即位于

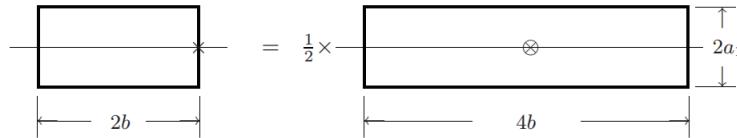


图 3.20: 采用叠加技术, 一个长度为  $2b$  的轴对称螺管末端磁场可以按照同样尺寸但长度  $4b$  的螺管的中心场的一半计算。

螺管室温孔外。图 3.21 给出了各实例应用叠加技术的过程。于是, 我们有:

$$(情况 1: z < b) \quad H(z) = \frac{1}{2} \lambda J \alpha_1 [F(\alpha, \beta = \frac{b+z}{a_1}) + F(\alpha, \beta = \frac{b-z}{a_1})] \quad (3.120a)$$

$$(情况 2: z < b) \quad H(z) = \frac{1}{2} \lambda J a_1 [F(\alpha, \beta = \frac{b+z}{a_1}) - F(\alpha, \beta = \frac{z-b}{a_1})] \quad (3.120b)$$

### 3.9.7 讨论 3.5: 混合磁体

混合磁体包括两个不同种类的轴向对齐且居中的电磁体: 大功率水冷磁体置于超导磁体 (SCM) 的室温孔内。1960 年代, 国家磁体实验室 (NML) 的 Montgomery 等人证实它是获得高达  $\sim 25$  T 直流磁场的一种方法 [3.11]。这个磁场是当时可用电源 9 MW 所能支持 Bitter 磁体实现的最高直流场。此后 30 年, 磁体实验室设计、制造和运行了多台混合磁体, 为混合磁体技术做出了贡献 [3.12–3.18]。

#### A. 代表性的混合磁体设施

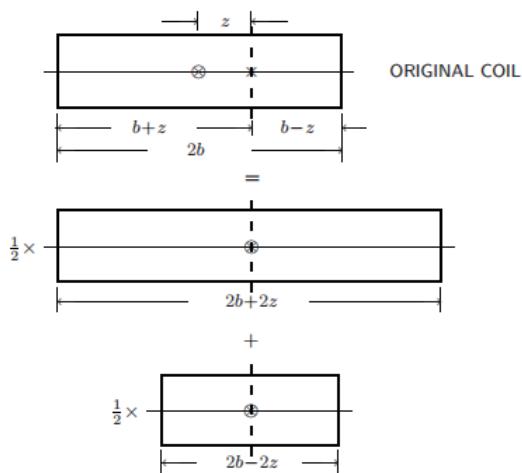
现在多有个混合磁体在运行。下面以开始运行的时间为序, 对几个代表性的混合磁体作简要介绍。

##### 高场磁体实验室, Radboud 大学

位于 Nijmegen 的高场磁体实验室 (High Field Magnet Laboratory, HFML) 自 1977 年起, 运行了两个 25.4 T [3.12] 和 32 T [3.14, 3.15] 的混合磁体, 由 6-MW 电源供电 [3.19]。他们最新安装了 20-MW 电源 [3.20] 并升级了水冷磁体, 2012 年它的 45 T 混合磁体投入运行。

##### 高场实验室, Tohoku 大学

**Case 1:**  $z < b$



**Case 2:**  $z > b$

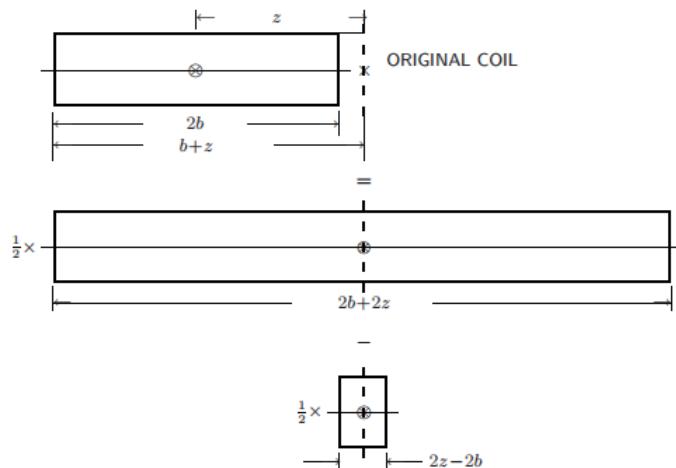


图 3.21: 处理偏离轴心点的叠加技术。

使用 7.5 MW 电源，自 1983 年开始运行。高场实验室 (High Field Laboratory) 已将其“湿”混合磁体替换为“干”式，产生了 30T 的磁场 [3.23]。

For a facility hybrid magnet that must undergo many field-sweep sequences, its SCM should ideally be dry and of HTS. A dry cryostat avoids loss of liquid cryogen after a trip in its water-cooled magnet; 高温超导磁体相比低温超导磁体，可以承受更大的由交流损耗产生的运行温度的温升。第 4 章将讨论两个设计/运行选项，该选项使得在混合磁体运行条件下甚至一个干式高温超导磁体都能可靠运行：1) 超导磁体腔内放置大量固体制冷工质；2) 采用低温环形器 (cryocirculator, 讨论 4.7) 而不是制冷机作为 SCM 的初级冷源。

#### Grenoble 高场实验室

Grenoble 磁体实验室在 1987 年开始运行混合磁体 [3.24]。他们最近的 24-MW 电源 [3.25] 为 40-T 混合磁体做保障 [3.26]。

#### 磁体实验室，国家材料科学研究院

位于 Tsukuba 的国家材料科学研究院的磁体实验室 (Magnet Laboratory at the National Institute of Materials Science) 自 1995 年开始运行混合磁体。他们有一台 17-MW 电源，用于运行 30–35 T 混合磁体 [3.27]。

#### 国家高场实验室 (NHMFL)

Florida 州立大学的国家强磁场实验室的 45-T 混合磁体 [3.28, 3.29] 产生了世界上最大的直流磁场。当前，水冷磁体产生了 34T，SCM 产生了 11T [3.30]。该 SCM 下文会详细讨论。

#### B. NHMFL 45 T 混合磁体

图 3.22 给出了 NHMFL 的 45T 混合磁体的水冷磁体、SCM 和一些附件的剖面图 [3.31]。水冷磁体有四个嵌套线圈，在 24MW 功率下产生 31T 的中心场。SCM 由三个线圈 A、B、C 组成，运行于 1.8K，最初产生了 14T 磁场，但现在运行在 11T [3.30]；水冷磁体经修改设计，可以在 30MW 功率下产生 34T 磁场。系统包括超流液氦杜瓦，SCM 杜瓦通过管道与之相连，图的中部右侧可见。

这里缺一个参数表

#### 45 T 混合超导磁体参数

表 3.3 给出了 45T 混合 SCM 的关键参数 [3.31]。这个 SCM 最突出的特征是它的三个线圈，每一个都是由 CICC 导体 (cable-in-conduit conductor)

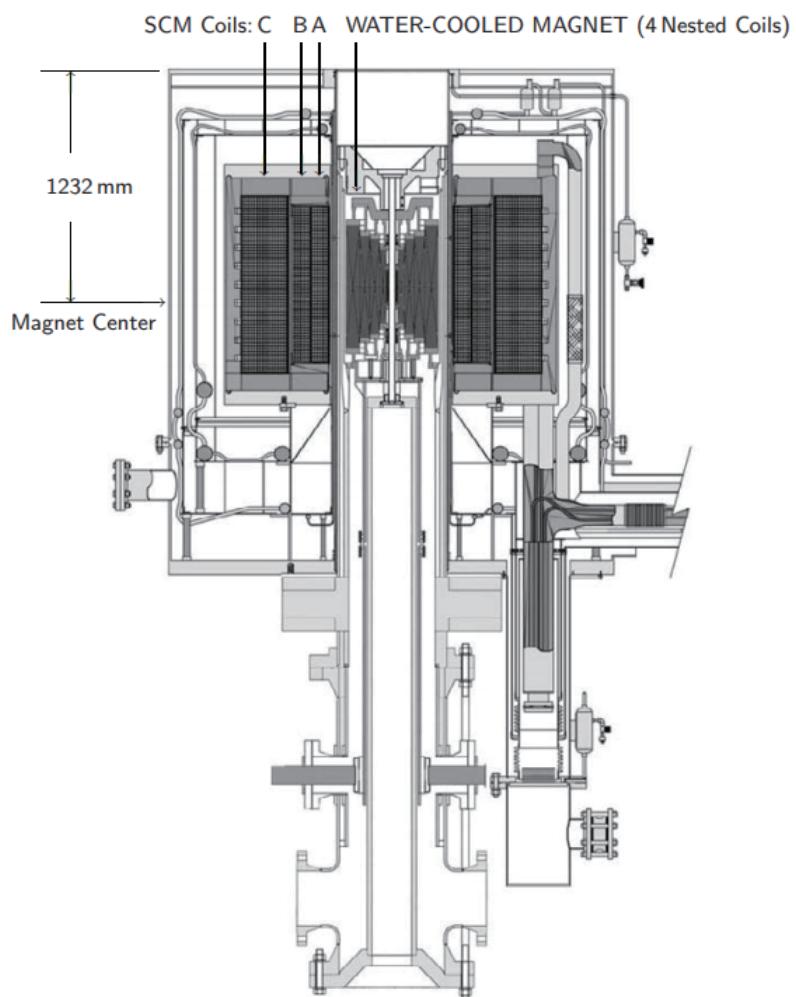


图 3.22: NHMFL 45 T 混合磁体剖面图。

绕成的，CICC 的更多细节，第 6 章会讨论。两个内部的线圈 A 和 B 是层绕的，外部的线圈是由 29 个双饼线圈堆叠的。

### C. 混合磁体的工程挑战

混合磁体很稀少，仅在大概五六个重点国家实验室内运行。它不是一类采用常规方法制造的磁体，甚至制造周期要超过 1 年。当然，它不是那种可以有一群工程师或物理学家在几个月就能造出来的。因此，仅有很少的工程师实际参与到设计、制造和运行混合磁体中来。它将两类磁体以很近的距离组合起来，一个运行于常温，另一个运行于液氦温度。两个磁体的电磁和机械是紧耦合的。于是，除了每个磁体特定的工程问题，混合磁体还存在特别的重要设计和运行挑战：处于低温的 SCM 的巨大的对处于室温的磁体机械结构的作用力，SCM 杜瓦上最小的热负荷传导。尽管本书的读者的大部分不会看到混合磁体本体，但它提供了多数磁体和低温工程师会发觉有指导意义的设计和运行要点。

关于混合磁体的一般话题在本节后面和第 4/6/7/8 张都会涉及，这些话题是基于 MIT 运行的 35T 混合磁体的 [3.16-3.18]。

### D. 配置和独有特征

混合磁体中，超导磁体总是置于水冷磁体（内插）外侧。在这个配置下，优化每一组件的特性。

#### 水冷磁体

- 在讨论 3.2 中已经证明，Bitter 磁体的功率需求  $P_B$  正比于  $a_1$  和  $[B_z(0,0)]_B^2$ （方程 3.116a），其中， $P_B$  典型值为 6 ~ 30 MW。Bitter 磁体相当耗电，最好对其整个体积进行优化：将其作为混合磁体的内插单元。不过，磁场越强，磁场对导体的磁应力越大，导体材料强度就该越强，而这一般意味着更大电阻。于是， $B_z(0,0) \propto \sqrt{P}$ （方程 3.113a）和  $[B_z(0,0)]_B \propto \sqrt{P_B}$ （方程 3.116a）在高场时都是无效的。
- 常规金属比如“铜”没有“内秉”的场极限，不存在高于某个长就不能用它制造磁体的问题。但是，如上所述，由于强度高的材料需要更多的功率，等量的要求更多的冷量以匹配增加的焦耳热耗散，30 – 40 T 一般认为是实际磁体设施的极限了。

#### 超导磁体

- 超导体都有明确的上临界场，超过了即失超。于是，最好将超导磁体放在混合磁体的低场部分：将它置于水冷磁体外侧。

- 总的存储磁能随磁体大小增加而增加，但对功率的需求——主要来自制冷——并不显著。100 MJ 的磁体并不需要 100 MW 的电源，通常 10 – 100 kW 就足够了。

统筹考虑这些特征，我们就很自然的理解为什么混合磁体是内侧放水冷磁体，外部包围一个超导磁体了。

### 作用力

混合磁体的一个独特特征和需求源自内插磁体和 SCM 相互作用力。如果两个磁体轴向和径向都是对齐的，特闷之间无相互作用力。但是，他们场中心的相对错位导致很大的作用力。轴向错位产生使轴向对齐的轴向恢复力。场中心的径向错位导致错位进一步增加，即失稳。一般的，力是适中的；小心的设计和建造可以相对容易的应对此事。不过，高性能湿冷内插磁体的失效是不可避免的。若失效，比如当内插绕组短路，减少了产生的磁场，引起的场错位会突然产生很大的力。

为了控制故障力，结构上的需求是最重要的，其次是磁体的监控保护。由于两个磁体的磁耦合（互感），控保也很复杂。很明显，每个磁体及其电源系统都必须有某种电保护以防止在哪里出错的时候损坏或损伤。但还存在即使两个磁体分离后仍存在的强电耦合。第 8 章的问题 8.3 和 8.4 讨论线圈的一般监控细节以及混合磁体的特别问题。

### 3.9.8 讨论 3.6：双饼 vs. 层绕

两个磁体的绕制技术中，有一种被普遍成为“双饼”或简单的称为“饼”；另一种是“层绕”。双饼线圈通常使用扁平带材绕成，有时也采用大的方截面或长方形截面导体（如 CICC）绕成。每一个双饼都是由一根连续的导体绕成的。双饼线圈的概念图如图 3.23 所示，双饼绕制的起点是导体的中点（图中的 C 处附近），而层绕的话，起点在导体的一端（图中的 A 或 B）。因为每一个双饼线圈的绕组高度 ( $2b$ ) 大约是导体宽度的 2 倍，所以一个实际的磁体需要多个双饼线圈，相邻线圈在径向最外侧绕组直径范围内 ( $2a_2$ ) 拼接起来。而层绕线圈是从一端到另一端连续绕制，从最里层到最外层一层一层绕成。两种技术的优缺点下文将加以讨论。

#### 优势和劣势

- 对双饼线圈，对导体长度的要求低于层绕线圈。对小线圈，无接头的长度为  $\sim 50$  m 的导体就足够了。甚至对于大型磁体， $\sim 1 - 2$  km 也



图 3.23: 双饼线圈图示。为了清晰, 上下饼分开了。图中这种双饼是由超导带材绕制的, 点 A 和点 B 是连续导体的端头, 而点 C 大约是带材的中点。

够了。另一方面, 对层绕线圈, 单个线圈所需的无接头导体长度轻易超过 10 km。由于长导体更难制造, 所以如果考虑导体长度, 饼式线圈优于层绕线圈。

2. 饼式磁体一般要求很多双饼线圈, 每一个双饼理想状态下应该是同化的模块以构成磁体绕组的高度。这种模块化磁体方法, 结合上面提及的导体长度要求, 使得饼式线圈的制造更加简单(也更便宜)。同时, 层绕线圈可能出现的绕制过程一个问题可能导致整个线圈导体不可用的情况在饼式线圈这里, 只会影响到一个双饼的导体量。由于每个双饼的电磁性能和尺寸会存在微小的不同, 另一个饼式线圈技术的优点就是它让线圈置于其最适合位置的操作成为可能。
3. 饼式线圈技术的一个明显的不足是它不可避免相邻双饼的连接。连接是制造的一个额外过程。由于连接必须随依绕组的形状, 实施起来比单一导体焊接困难。或许对于运行更重要的是这些接头产生的焦耳热耗散——除非接头也是超导的。NMR 和 MRI 磁体一般是要求超导接头的。

### 3.9.9 问题 3.3: Helmholtz 线圈

很多应用都希望有高均匀性的磁场。一种被称为“Helmholtz coil”的简单布局可以在一个有限的区域内实现高均匀磁场。它使用两个一致的空间上同轴但在磁场轴线( $z$  向) 分开一定距离的的线圈(图 3.24a); 两个线圈分别位于  $z = d/2$  和  $z = -d/2$ 。通过调整间隔  $d$ , 使得磁场中心处于

$(r = 0, z = 0)$ :

$$\frac{d^2 H_z(0, z)}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.121)$$

a) 将两个线圈看成理想的“环”线圈，半径为  $a$ ，证明当  $d = a$  时，在中心处有  $dH_z^2(0, z)/dz^2 = 0$ 。图 3.24b 中的实线给出了一个不满足方程 3.121 的  $d$  下的  $H_z(0, z)$ 。

b) 证明两个线圈如果反极性，中心处会产生一个梯度场。在  $z = 0$  处计算  $dH_z/dz$ 。（注意，当  $d = a$  时  $d^3 H_z(0, z)/dz^3 \neq 0$ ； $d^3 H_z(0, z)/dz^3 = 0$  要求  $d = \sqrt{3}a$ ）此种相反电流的配置称为 Maxwell 线圈。图 3.24b 中的虚线给出了梯度线圈的  $H_z(z)$ 。

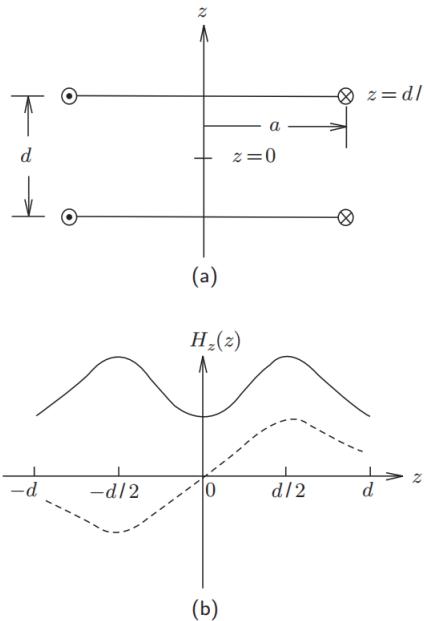


图 3.24: (a) 理想 Helmholtz 线圈布局; (b) 均匀场下的  $H_z(0, z)$ (实线) 和梯度场下的  $H_z(0, z)$ (虚线)

### 问题 3.3 之解

a) 位于下方  $z = -d/2$  处环产生的轴向 ( $r = 0$ ) 磁场的  $z$  分量可由方程 3.3a 给出：

$$H_z(0, z) = \frac{a^2 I}{2[a^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}$$

加上位于上面  $z = d/2$  处的线圈的磁场, 有:

$$H_z(0, z) = \frac{a^2 I}{2} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[a^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (\text{S3.1})$$

将 S3.1 给出的方程  $H_z(z)$  对  $z$  微分, 有:

$$\frac{d^2 H_z(0, z)}{dz^2} = \frac{3a^2 I}{2} \left\{ -\frac{(z + \frac{d}{2})}{[a^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{(z - \frac{d}{2})}{[a^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

注意, 由于对称性,  $dH_z(0, z)/dz = 0$  在  $z = 0$  处对任意  $a$  成立。

对 S3.1 二次微分有:

$$\frac{d^2 H_z(0, z)}{dz^2} = \frac{3a^2 I}{2} \left\{ -\frac{a^2 - 4(z + \frac{d}{2})^2}{[a^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{7}{2}}} - \frac{a^2 - 4(z - \frac{d}{2})^2}{[a^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

如果  $d = a$ , 在  $z = 0$  处二阶导数为零。这种同轴放置两个同一线圈, 且其距离等于线圈半径的做法产生了一个高均匀场区域。这里的二阶分析是 MRI 和其他要求高空间均匀性磁场磁体设计的重要准则之一。

b) 对这个系统, 下方线圈的电流极性反转, 有:

$$H_z(0, z) = \frac{a^2 I}{2} \left\{ -\frac{1}{[a^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[a^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (\text{S3.2})$$

根据对称性,  $H_z(z = 0) = 0$ 。对 S3.2 依  $z$  求导, 有:

$$\frac{dH_z(0, z)}{dz} = \frac{3a^2 I}{2} \left\{ \frac{(z + \frac{d}{2})}{[a^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{(z - \frac{d}{2})}{[a^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} \quad (\text{S3.3})$$

在  $z = 0$  处计算 S3.3, 有:

$$\frac{dH_z(0, z)}{dz} |_{z=0} = \frac{3a^2 Id}{2[a^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{5}{2}}}$$

这种放置两个同一但电流方向相反的线圈产生梯度场的方法是要求中平面梯度场磁体设计中使用的基本法则。MRI 系统中使用的脉冲磁体产生梯度场 (从成像中提取空间信息) 就是一个例子。

### 3.9.10 问题 3.4: Helmholtz 线圈——另一种方法

这一节, 我们使用方程 3.16a 和 3.22 分析问题 3.3 中的 Helmholtz 线圈。

证明，两个半径为  $a$ 、分别位于  $\xi (\equiv z/a) = +0.5$  和  $\xi = -0.5$  的“环”线圈 1 和 2 组成的 Helmholtz 对，轴向场在其中心 ( $\xi = 0$ ) 的二阶导数  $d^2 h_z(0)/d\xi^2|_{1/2}$  可以表示为  $\xi^{2n}$  的级数且随着项数增加而收敛于 0。由于并未计算每一个线圈在  $\xi = 0$  的值，所以 3.17b 的简化表达式不能用。

使用最高项第 20 项计算  $d^2 h_z(0)/d\xi^2|_{1/2}$ 。注意到  $E_2(1, 0) \cdots E_{10}(1, 0)$  已由 3.28 给出。导出  $E_2(1, 0) \cdots E_{10}(1, 0)$  的技术也可以用于从 3.15b 导出  $E_{12}(\alpha, 0) \cdots E_{20}(\alpha, 0)$ ,  $f_{12}(\alpha, \beta) \cdots f_{20}(\alpha, \beta)$  在附录 IB 中有。在极限  $\beta \rightarrow 0$  下，将  $1/(1 + \beta^2)^{19.5}$  展开至  $\beta^{20}$  项，有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \beta)^{19.5}} &= 1 - \frac{39}{2}\beta^2 + \frac{39}{2} \cdot \frac{41}{2} \frac{\beta^4}{2!} - \frac{39}{2} \cdot \frac{41}{2} \cdot \frac{43}{2} \frac{\beta^6}{3!} + \dots \\ &\quad + \frac{39}{2} \cdot \frac{41}{2} \cdot \frac{43}{2} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{47}{2} \cdot \frac{49}{2} \cdot \frac{51}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \frac{55}{2} \cdot \frac{57}{2} \frac{\beta^{20}}{10!} \end{aligned} \quad (3.122)$$

$E_{12}(\alpha, 0) \cdots E_{20}(\alpha, 0)$  类似于方程 3.21 中的  $E_2(\alpha, 0) \cdots E_{10}(\alpha, 0)$ ，我们有：

$$E_{12}(\alpha, 0) = \frac{7 \cdot 11 \cdot 13}{2^{12}} \cdot \frac{(\alpha^{12} - 1)}{\alpha^{12} \ln \alpha} = \frac{1001(\alpha^{12} - 1)}{4096\alpha^{12} \ln \alpha} \quad (3.123a)$$

$$E_{14}(\alpha, 0) = -\frac{5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2^{12} \cdot 7} \cdot \frac{(\alpha^{14} - 1)}{\alpha^{14} \ln \alpha} = -\frac{6435(\alpha^{14} - 1)}{28672\alpha^{14} \ln \alpha} \quad (3.123b)$$

$$E_{16}(\alpha, 0) = \frac{5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}{2^{19}} \cdot \frac{(\alpha^{16} - 1)}{\alpha^{16} \ln \alpha} = \frac{109395(\alpha^{16} - 1)}{524288\alpha^{16} \ln \alpha} \quad (3.123c)$$

$$E_{18}(\alpha, 0) = -\frac{5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{2^{17} \cdot 3^2} \cdot \frac{(\alpha^{18} - 1)}{\alpha^{18} \ln \alpha} = -\frac{230945(\alpha^{18} - 1)}{1179648\alpha^{18} \ln \alpha} \quad (3.123d)$$

$$E_{20}(\alpha, 0) = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{2^{20} \cdot 5} \cdot \frac{(\alpha^{20} - 1)}{\alpha^{20} \ln \alpha} = \frac{969969(\alpha^{20} - 1)}{5242880\alpha^{20} \ln \alpha} \quad (3.123e)$$

在极限  $\alpha \rightarrow 1$  时, 方程 3.123a-3.123e 成为:

$$E_{12}(1, 0) = \frac{3003}{1024} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{2^{10}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \simeq 2.933 \quad (3.124a)$$

$$E_{14}(1, 0) = -\frac{6435}{2048} = -\frac{5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2^{11}} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \simeq -3.142 \quad (3.124b)$$

$$E_{16}(1, 0) = \frac{109395}{32768} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}{10^{15}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} \simeq 3.338 \quad (3.124c)$$

$$E_{18}(1, 0) = -\frac{230945}{65536} = -\frac{5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{10^{16}} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18} \simeq -3.524 \quad (3.124d)$$

$$E_{20}(1, 0) = \frac{969969}{262144} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}{10^{18}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20} \simeq 3.700 \quad (3.124e)$$

### 问题 3.4 之解

位于  $\xi = +0.5$  的线圈 1 贡献的  $d^2h_z(\xi)/dx_i^2$  在  $xi = 0$  时  $d^2h_z(0)/d\xi^2|_{1/2}$  由方程 3.16a 给出:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2h_z(0)}{d\xi^2} \right|_{\frac{1}{2}} &= 2E_2(1, 0) + 12E_4(1, 0) \times (0.5)^2 + 30E_6(1, 0) \times (0.5)^4 \\ &\quad + 56E_8(1, 0) \times (0.5)^6 + 90E_{10}(1, 0) \times (0.5)^8 \\ &\quad + 132E_{12}(1, 0) \times (0.5)^{10} + 182E_{14}(1, 0) \times (0.5)^{12} \quad (S4.1) \\ &\quad + 240E_{16}(1, 0) \times (0.5)^{14} + 306E_{18}(1, 0) \times (0.5)^{16} \\ &\quad + 380E_{20}(1, 0) \times (0.5)^{18} + \dots \end{aligned}$$

由于线圈 2(位于  $\xi = -0.5$ ) 和位于  $\xi = 0.5$  的线圈 1 在  $\xi = 0.5$  处给出

树枝上相同的  $d^2\xi_z/d\xi^2$ , 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{d^2h_z(0)}{d\xi^2} \Big|_{\frac{1}{2}} = & 4\left(-\frac{3}{2}\right) + 24\left(\frac{15}{8}\right)(0.5)^2 + 60\left(-\frac{35}{16}\right)(0.5)^4 \\ & + 112\left(\frac{315}{128}\right)(0.5)^6 + 180\left(-\frac{693}{256}\right)(0.5)^8 \\ & + 264\left(\frac{3003}{1024}\right)(0.5)^{10} + 264\left(-\frac{6435}{2048}\right)(0.5)^{12} \quad (\text{S4.2}) \\ & + 480\left(\frac{109395}{32768}\right)(0.5)^{14} + 612\left(-\frac{230945}{65536}\right)(0.5)^{16} \\ & + 760\left(\frac{969969}{262144}\right)(0.5)^{18} + \dots \end{aligned}$$

随着项数增加, 我们计算方程 S4.2:

$$\begin{aligned} \frac{d^2h_z(0)}{d\xi^2} \Big|_{\frac{1}{2}} &= -6 \quad (\text{only } E_2) \\ &= 5.25 \quad (\text{through } E_4) \\ &\approx -2.9531 \quad (\text{through } E_6) \\ &\approx 1.3535 \quad (\text{through } E_8) \\ &\approx -0.5499 \quad (\text{through } E_{10}) \\ &\approx 0.2062 \quad (\text{through } E_{12}) \\ &\approx -0.0730 \quad (\text{through } E_{14}) \\ &\approx 0.0248 \quad (\text{through } E_{16}) \\ &\approx -0.0081 \quad (\text{through } E_{18}) \\ &\approx 0.0026 \quad (\text{through } E_{20}) \end{aligned}$$

由上可知, 随着高次项的加入,  $d^2h_z(0)/d\xi^2|_{1/2} \rightarrow 0$ 。注意到, 对置于  $\xi = 0$  的一个孤立环线圈:  $d^2h_z(0)/d\xi^2 = -3$ 。

### 3.9.11 问题 3.5: 一个空间均匀磁体的分析

图 3.25 给出了一个由三个线圈组成的空间均匀磁体的结构剖面。线圈 1 和线圈 3 是完全一样的, 分别位于中间线圈 2 的上下方, 用以加强中心场  $(0, 0)$  的均匀性。关键尺寸 (mm 为单位) 已在图中标注。每个线圈的  $2a_1$  都是 100 mm, 每个线圈的总电流密度均为  $\lambda J = 2.5147 \times 108 \text{ A/m}^2$ 。表格 3.4 给出了使用 Bobrov 程序计算得到的场参数 [3.32]。

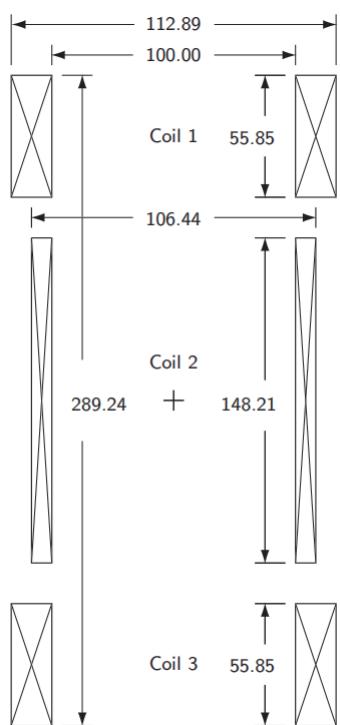


图 3.25: 三个线圈组成的磁体, 以 mm 为单位

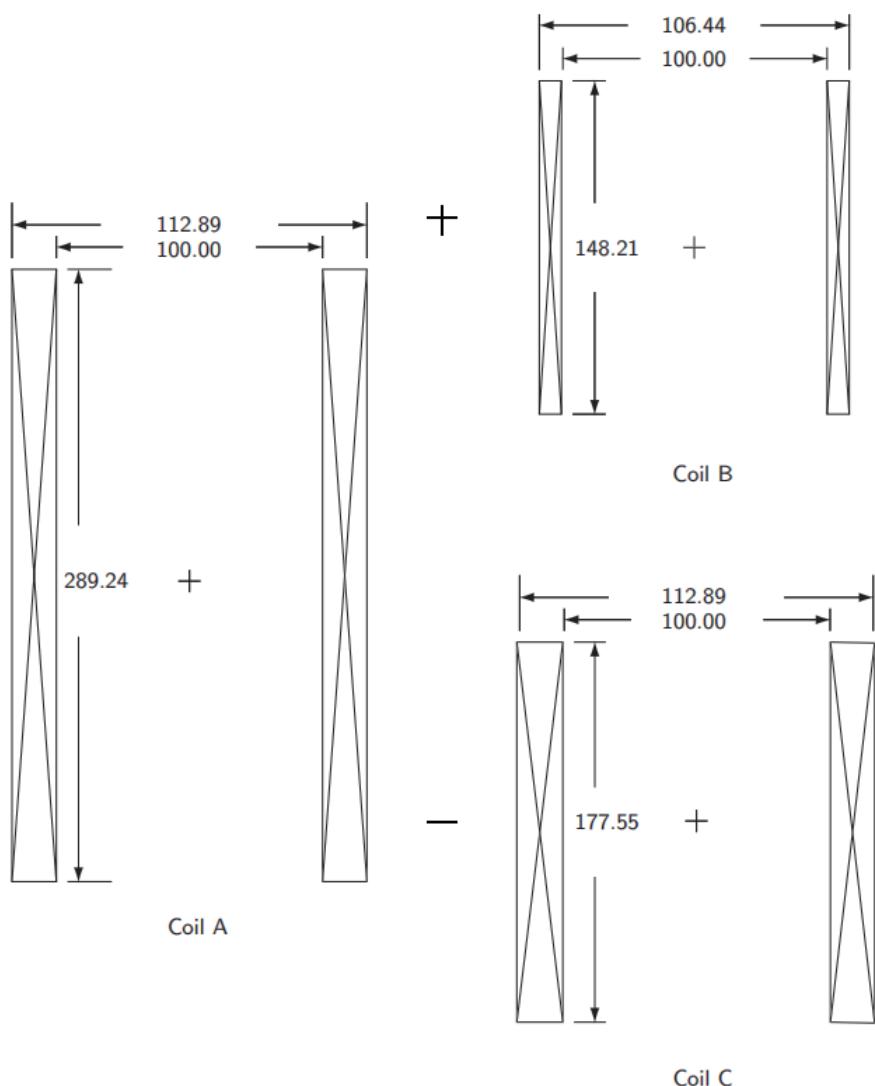


图 3.26: 图 3.25 中的三个线圈表示为 A、B、C，每个线圈的中心都位于磁体中心。  
线圈 C 的符号表示它的载流是与 A 和 B 反向的。以 mm 为单位

图 3.26 给出的是同一个磁体，线圈用 A、B 和 C 表示，各线圈的中心都是  $(0, 0)$ 。线圈 A 从线圈 1 延伸至线圈 3，还包括中间的两个间隙。线圈 B 与线圈 2 一致。因为这个新的表示法中线圈 2 被线圈 A 和线圈 B 代表了 2 次，所以加入与线圈 A 和 B 电流相反的线圈 C，以减掉 1 个线圈 2 以及那两个间隙。

a) 证明，如果线圈 A、B 和 C 的总电流密度都是  $\lambda J$ ，图 3.26 的线圈配置和原线圈配置给出相同的中心场；

$$B_0 = 1.000 \text{ T} = \mu_0 \lambda J a_1 [F_A(\alpha, \beta) + F_B(\alpha, \beta) - F_C(\alpha, \beta)] \quad (3.125)$$

b) 应用方程 3.14 和 3.17，并使用手持科学计算器，计算本磁体的  $d^2B/dz^2|_0$  和  $d^4B/dz^4|_0$ 。计算值应该可表 3.4 使用程序计算的结果吻合。

### 问题 3.5 之解

表 3.5 列出了线圈 A、B 和 C 的  $\alpha$  和  $\beta$  的近似值。采用这些数值，我们得到：

$$F_A(\alpha, \beta) = 0.12094421$$

$$F_B(\alpha, \beta) = 0.05287933$$

$$F_C(\alpha, \beta) = 0.11053327$$

a) 从方程 3.125，我们有：

$$\begin{aligned} B_0 &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(2.5147 \times 10^8 \text{ A/m}^2)(5 \times 10^{-2} \text{ m}) \\ &\times (0.12094421 + 0.05287933 - 0.11053327) = 1.000 \text{ T} \end{aligned}$$

b) 将  $\alpha$  和  $\beta$  代入方程 3.14a 和 3.14b1，我们有：

$$F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta)_A = -0.002277367; F(\alpha, \beta)E_4(\alpha, \beta)_A = -0.000315757$$

$$F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta)_B = -0.007938543; F(\alpha, \beta)E_4(\alpha, \beta)_B = -0.001737981$$

$$F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta)_C = -0.010216278; F(\alpha, \beta)E_4(\alpha, \beta)_C = -0.002133593$$

当所有线圈都有相同的  $a_1$  和  $\lambda Ja_1$  时，方程 3.18 成为：

$$h_\zeta(\zeta) = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{j=1} F(\alpha_j, \beta_j)E_2(\alpha_j, \beta_j)}{\sum_{k} F(\alpha_k, \beta_k)} \zeta^2 + \dots \quad (\text{S5.1})$$

$$\begin{aligned}
 E_2(\alpha, \beta) &= \frac{F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta)_A + F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta)_B - F(\alpha, \beta)E_2(\alpha, \beta)_C}{F(\alpha, \beta)_A + F(\alpha, \beta)_B - F(\alpha, \beta)_C} \\
 &= \frac{-0.002277367 - 0.007938543 + 0.010216278}{0.120924421 + 0.05287933 - 0.11053327} = 0.000005822 \\
 E_4(\alpha, \beta) &= \frac{-0.000315757 - 0.001737981 + 0.002132363}{0.6329027} = 0.001261725
 \end{aligned}$$

于是我们有：

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 B}{dz^2} \right|_0 &= 2E_2\left(\frac{B_0}{a_1^2}\right) = 0.4658 \times 10^{-6} \text{ T/cm}^2 \\
 \left. \frac{d^4 B}{dz^4} \right|_0 &= 24E_4\left(\frac{B_0}{a_1^4}\right) = 4.8453 \times 10^{-5} \text{ T/cm}^4
 \end{aligned}$$

这些数值与表 3.4 给出的事实上是一致的，尽管需要我们勤奋的计算至第九位小数。

值得注意的是，这里呈现的分析对计算给定此题设计的场梯度是很有用的，尽管乏味。这里给出的分析形式对设计空间高均匀性磁体并不实用；它只是对开发个人的设计程序很有用。

### 3.9.12 问题 3.6：直角坐标下的场展开

在由图 3.4 定义的球坐标  $(r, \theta, \phi)$  下，由嵌套线圈组成磁体产生的在无源子由空间的  $z$  向磁场  $H_z$  可由方程 3.9 表示：

证明，笛卡尔坐标系下  $H_z(r, \theta, \phi)$  的表达式  $H_z(x, y, z)$  在  $n = 0, 1, 2$  分别为：

$$n=0: H_z(x, y, z) = *A_0^0 \quad (3.126a)$$

$$n=1: H_z(x, y, z) = A_0^0 + 2zA_1^0 + 3(A_1^1x + B_1^1y) \quad (3.126b)$$

$$\begin{aligned}
 n=2: H_z(x, y, z) &= A_0^0 + 2zA_1^0 + 3(A_1^1x + B_1^1y) \\
 &\quad + \frac{3}{2}A_2^0(2z^2 - x^2 - y^2) + 12z(A_2^1x + B_2^1y) \\
 &\quad + 15[A_2^2(x^2 - y^2) + 2B_2^2xy] \quad (3.126c)
 \end{aligned}$$

#### 问题 3.6 之解

球坐标参数  $r, u = \cos \theta, s = \sin \theta, \sin \phi, \cos \phi$  用  $x, y, z$  表示为：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{S6.1a})$$

$$u = \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{S6.1b})$$

$$s = \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{S6.1c})$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{S6.1d})$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{S6.1e})$$

方程 3.9 与 S6.1a-S6.1e 分别对  $n = 0, 1, 2$  联立, 有:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= \sum_0^{m=0} r^0(1+0)P_0^0(u)(A_0^0 \cos 0 + B_0^0 \sin 0) \\ &= (1)(1)(1)(A_0^0) \end{aligned} \quad (\text{S6.2})$$

对  $n = 0$ , 我们有:

$$H_z(x, y, z) = A_0^0 \quad (3.126a)$$

注意到,  $A_0^0$  表示磁体中心场  $H_z(0, 0, 0)$ 。 $n = 1$  时:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= \sum_1^{m=0} r^1(2+m)P_1^m(A_1^m \cos m\varphi + B_1^m \sin m\varphi) \\ &= r^1(2+0)P_1^0(A_1^0) + r^1(2+1)P_1^1(A_1^1 \cos \varphi + B_1^1 \sin \varphi) \\ &= 2ruA_1^0 + 3rs(A_1^1 \cos \varphi + B_1^1 \sin \varphi) \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} A_1^0 \\ &\quad + 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left( \frac{A_1^1 x + B_1^1 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= 2zA_1^0 + 3(A_1^1 x + B_1^1 y) \end{aligned} \quad (\text{S6.3})$$

于是, 对最大为 1 的  $n$  值, 我们有:

$$H_z(x, y, z) = A_0^0 + zA_1^0 + 3(A_1^1 x + B_1^1 y) \quad (3.126b)$$

注意,  $H_z(x, y, z)$  含有仅随着  $z, x, y$  变化的项。 $n = 2$  时:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= \sum_2^{m=0} r^2(3+m)P_2^m(A_2^m \cos m\varphi + B_2^m \sin m\varphi) \\ &= r^2(3+0)P_2^0(A_2^0) + r^2(3+1)P_2^1(A_2^1 \cos \varphi + B_2^1 \sin \varphi) \\ &\quad + r^2(3+2)P_2^2(A_2^2 \cos 2\varphi + B_2^2 \sin 2\varphi) \end{aligned} \quad (\text{S6.4})$$

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= 3(x^2 + y^2 + z^2) \frac{1}{2} \left( \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) A_2^0 \\ &\quad + 4(x^2 + y^2 + z^2) \frac{3z\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \left( A_2^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + B_2^1 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &\quad + 5(x^2 + y^2 + z^2) \frac{3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + z^2} \left[ A_2^2 \left( \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 \right) + B_2^2 \frac{(2xy)}{x^2 + y^2} \right] \\ &= \frac{3}{2} A_2^0 (2z^2 - x^2 - y^2) \\ &\quad + 12z(A_2^1 x + B_2^1 y) + 15[A_2^2(x^2 - y^2) + 2B_2^2 xy] \end{aligned}$$

累加方程 S6.2b, S6.3b 和 S6.4b, 我们得到对最大为 2 的  $n$  值情况:

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= A_0^0 + 2zA_1^0 + 3(A_1^1 x + B_1^1 y) \\ &\quad + \frac{3}{2} A_2^0 (2z^2 - x^2 - y^2) + 12z(A_2^1 x + B_2^1 y) \quad (3.126c) \\ &\quad + 15[A_2^2(x^2 - y^2) + 2B_2^2 xy] \end{aligned}$$

注意到, 当对  $n = 0, 1, 2$  计算  $H_z(x, y, z)$  时, 它包含随  $x, y, z, z^2, x^2, y^2, zx, zy$  和  $xy$  变化的项。

### 3.9.13 问题 3.7: Notched 螺管

Helmholtz 线圈的准则——关于螺管中心对称放置载流元以在中心区域产生空间均匀场——是 notched 螺管线圈设计的基本准则。很多 MRI 和 NMR 磁体都是 notched 螺管设计的变种。

对一个简单螺管, 绕组内半径  $a_1$ , 外半径  $a_2$ , 总长度  $2b$ , 总电流密度  $\lambda J$ 。回想到前面方程 3.13a 和 3.13b 给出中心轴向场  $H_0 \equiv H_z(0, 0)$ , 有:

$$H_0 = \lambda J a_1 F(\alpha, \beta) \quad (3.13a)$$

$$F(\alpha, \beta) = \beta \ln \left( \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right) \quad (3.13b)$$

考虑到对称性以及前面讨论 3.4 给出的叠加技术, 证明如图 3.27 所示的具有均匀电流密度  $\lambda J$  的 notched 螺管的  $H_z(0, z_1)$  的表达式为:

$$\begin{aligned} H_z(0, z_1) = & \frac{1}{2} \lambda a_1 [F(\alpha_1, \beta_1 + \gamma_1) + F(\alpha_1, \beta_1 - \gamma_1)] \\ & - \frac{1}{2} \lambda J a_3 [F(\alpha_2, \beta_2 + \gamma_2) + F(\alpha_2, \beta_2 - \gamma_2)] \end{aligned} \quad (3.127)$$

式中,  $\alpha_1 = a_2/a_1, \beta_1 = b_1/a_1, \gamma_1 = z_1/a_1, \alpha_2 = a_2/a_3, \beta_2 = b_2/a_3, \gamma_2 = z_1/a_3$ 。螺管参数  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  如图 3.27 的定义。

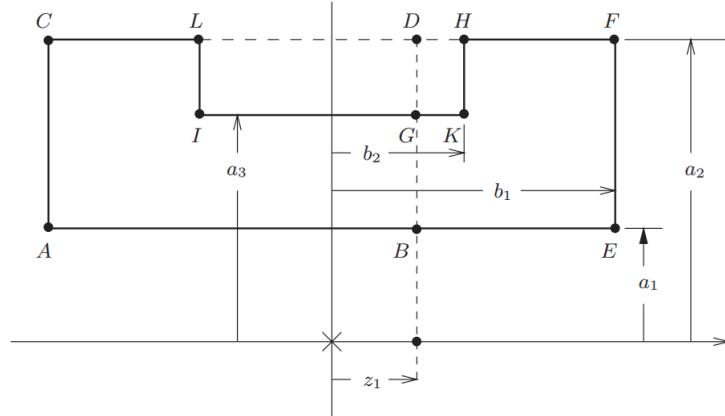


图 3.27: 一个 notched 螺管的几何形状。

### 问题 3.7 之解

为了解出  $H_z(0, z - 1)$ , 我们可以把螺管分成四个单螺管, 其截面参数按角点设计如下:

**螺管 1:** ABDC, 有  $\alpha_1 = a_2/a_1 = \alpha, \beta_1 = (b_1 + z_1)/a_1 = \beta + \gamma$ , 其中  $\beta = b_1/a_1, \gamma = z_1/a_1$ ;

**螺管 2:** BEFD, 有  $\alpha_2 = a_2/a_1 = \alpha, \beta_2 = (b_1 - z_1)/a_1 = \beta - \gamma$ ;

**螺管 3:** IGDL, 有  $\alpha_3 = a_2/a_3 = \alpha', \beta_3 = (b_2 + z_1)/a_3 = \beta' + \gamma'$ , 其中  $\beta' = b_2/a_3, \gamma' = z_1/a_3$ ;

**螺管 4:** GKHD, 有  $\alpha_4 = a_2/a_3 = \alpha', \beta_4 = (b_2 - z_1)/a_3 = \beta' - \gamma'$ ;

注意到，所有螺管中， $J$  都有相同的幅值，但螺管 3 和 4 与螺管 1 和 2 有相反的方向。同时注意到，所有的螺管都不是 notched。

**螺管 1 的磁场：** $2_b = b_1 + z_1$  长的螺管 1 产生的  $H_z(0, z_1)$  是具有相同参数  $a_1, a_2, \lambda J$  而长度为  $2_b = 2(b_1 + z_1)$  的螺管产生的中心场的一半。这从一个长为  $2b$  的非 notched 螺管的中心场  $H_z(0, 0)$  是两部分螺管产生的场（一部分从  $z = -b$  到 0，另一部分从 0 到  $z = b$ ）之和这里看的更清楚。也即，螺管的每一半产生总场  $H_z(0, 0)$  的一半。于是：

$$H_z(0, z_1)|_1 = \frac{1}{2} \lambda J a_1 F(\alpha, \beta + \gamma) \quad (\text{S7.1})$$

**螺管 2 的磁场：**在  $(0, z_1)$ ， $H_z$  中来自长度  $2_b = b_1 - z_1$  的螺管 2 的部分是具有相同  $a_1, a_2, \lambda J$  而长度为  $2_b = 2(b_1 - z_1)$  的螺管的中心场的一半。

$$H_z(0, z_1)|_2 = \frac{1}{2} \lambda J a_1 F(\alpha, \beta - \gamma) \quad (\text{S7.2})$$

**螺管 3 的磁场：**在  $(0, z_1)$ ， $H_z$  中来自长  $2_b = b_2 + z_1$  的螺管 3 的部分是具有相同  $a_3, a_2, \lambda J$  而长度为  $2_b = 2(b_2 + z_1)$  的螺管的中心场的一半。因为  $J$  是反向的，我们有：

$$H_z(0, z_1)|_3 = -\frac{1}{2} \lambda J a_3 F(\alpha', \beta' + \gamma') \quad (\text{S7.3})$$

**螺管 4 的磁场：**在  $(0, z_1)$ ， $H_z$  来自长  $2_b = b_2 - z_1$  的螺管 4 的部分是除长为  $2_b = 2(b_2 - z_1)$  而其他参数相同的螺管的中心场的一半。

$$H_z(0, z_1)|_4 = -\frac{1}{2} \lambda J a_3 F(\alpha', \beta' - \gamma') \quad (\text{S7.4})$$

### Notched 螺管的磁场

原 notched 螺管产生的  $H_z(0, z_1)$  于是可以由上四式之和给出：

$$\begin{aligned} H_z(0, z_1) &= H_z(0, z_1)|_1 + H_z(0, z_1)|_2 + H_z(0, z_1)|_3 + H_z(0, z_1)|_4 \\ &= \frac{1}{2} \lambda J a_1 [F(\alpha, \beta + \gamma) + F(\alpha, \beta - \gamma)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda J a_3 [F(\alpha', \beta' + \gamma') + F(\alpha', \beta' - \gamma')] \end{aligned} \quad (3.127)$$

### 3.9.14 讨论 3.7：饼式线圈磁体的场分析

应用讨论 3.4 中的叠加技术，我们推导可用于计算一个有  $2N$  个饼式线圈 ( $N$  个双饼) 组成的螺管磁体的场误差系数的轴向场表达式。Bi2223 和

YBCO 是带形式的, 由高温超导带绕制的饼式线圈组成的磁体是实现空间高均匀度磁体 (例如 NMR 和 MRI 磁体) 的一个可行途径 [3.33, 3.34]。饼式线圈是薄的方截面导体的理想形式。

在这个分析中, 每个饼都有相同的尺度—— $2a_1; 2a_2; 2b = w$ (带材宽度)——在饼线圈绕组中有相同的  $\lambda J$ 。相邻线圈分离距离为  $\delta$ 。图 3.28 给出了一个由  $2N$  个单饼组成的磁体的剖面示意图。

在推导场方程时, 所有的饼都对磁体原点居中。我们采用下面的简化记法。将  $F(\alpha, \beta)/\beta$  简记为:

$$\frac{F(\alpha, \beta)}{\beta} \equiv \ln(\alpha, \beta) = \ln \left[ \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}} \right] \quad (3.128)$$

我们定义一个无量纲轴向磁场参数,  $\eta(\zeta) \equiv H(z)/(\lambda J a_1)$ , 其中  $\zeta \equiv z/a_1$ 。有:

$$\eta(\zeta) \equiv \frac{H(Z)}{\lambda J a_1} = \beta \ln(\alpha, \beta) \left[ 1 + \sum_{j=1}^n E_{2j}(\alpha, \beta) \zeta^{2j} \right] \quad (3.128b)$$

因为使用了  $\ln(\alpha, \beta)$ , 方程 3.128b 是一个无量纲场的表达式, 与 3.13a 形式略有不同。

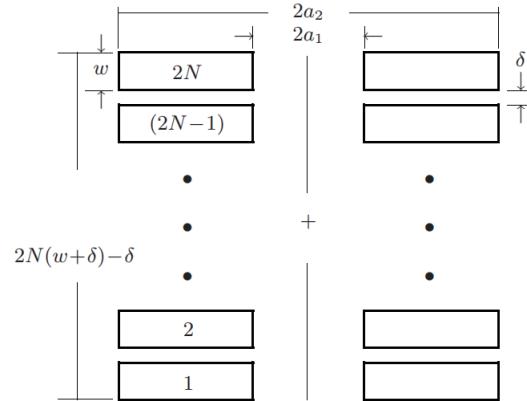


图 3.28: 由  $2N$  个单饼 (或  $N$  个双饼) 组成的磁体

### 第一步: 二饼磁体——饼 1 和饼 2

首先考虑最简单的情况: 一个由两个饼 P1 和 P2 组成的磁体。采用讨论 3.4 中的叠加技术, 原始具有间隙  $\delta$ (图 3.29 最左侧) 的磁体与两个无间

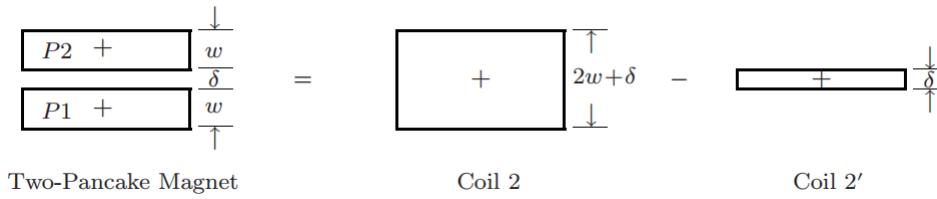


图 3.29: 将双饼磁体视为线圈 2 减去线圈 2'，尺寸如图所注。

隙螺管等价：高为  $2b_2 = w + \delta$  的线圈 2(中部) 减去高为  $2b'_2 = \delta'$  的线圈 2'。下标 2 为了标明考虑的磁体包括两个饼式线圈。注意到图 3.29 中的每个线圈仅给出了高度 ( $2b$ )，这是因为它是我们在这个考虑下唯一相关的参数：即线圈 2 有  $\beta_2 = (2w + \delta)/2a_1$ ；线圈 2' 有  $\beta_2' = \delta/2a_1$ 。

与两个线圈有关的无量纲轴向场  $\eta(\zeta)$  为：

$$\eta_2(\zeta) = [\eta(\zeta)]_2 - [\eta'(\zeta)]_2 \quad (3.129)$$

从 3.128b 式，我们有：

$$[\eta(\zeta)]_2 = \beta_2 \ln(\alpha, \beta_2) \left[ 1 + \sum_{j=1}^n E_{2j}(\alpha, \beta_2) \zeta^{2j} \right] \quad (3.130a)$$

$$[\eta'(\zeta)]_2 = \beta'_2 \ln(\alpha, \beta'_2) \left[ 1 + \sum_{j=1}^n E_{2j}(\alpha, \beta'_2) \zeta^{2j} \right] \quad (3.130b)$$

组合 3.129 和 3.130，我们有：

$$\begin{aligned} \eta_2(\zeta) &= [\beta_2 \ln(\alpha, \beta_2) - \beta'_2 \ln(\alpha, \beta'_2)] \\ &+ \sum_{j=1}^n [\beta_2 \ln(\alpha, \beta_2) E_{2j}(\alpha, \beta_2) - \beta'_2 \ln(\alpha, \beta'_2)] \zeta^{2j} \end{aligned} \quad (3.131)$$

### 第二步：四饼磁体——再加上饼 3 和饼 4

接下来，我们考虑一个由四个饼组成的磁体。如图 3.30 所示，新磁体是第一步中的磁体上下各加一个磁体组成的。这两个新的饼，如图 3.30 所给出的，可以建模为  $2b = 4w + 3\delta$  的线圈 4 减去  $2b = 2w + 3\delta$  的线圈 4'。于是，线圈 4 有  $\beta_4 = (4w + 3\delta)/2a_1$ ；线圈 4' 有  $\beta'_4 = (2w + 3\delta)/2a_1$ 。

来自所有四个线圈的总的无量纲轴向磁场  $\eta_4(z)$  为：

$$\eta_4(z) = [\eta(\zeta)]_2 - [\eta'(\zeta)]_2 + [\eta(\zeta)]_4 - [\eta'(\zeta)]_4 \quad (3.132)$$

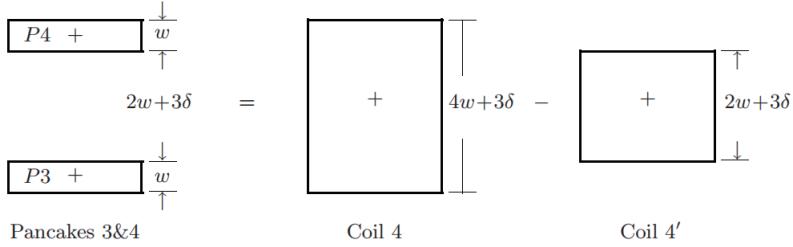


图 3.30: 视为线圈 4 减去线圈 4' 的磁体加入到图 3.29 的二饼磁体上组成的四饼磁体, 尺寸如图所注。

其中,

$$[\eta(\varsigma)]_4 = \beta_4 \ln(\alpha, \beta_4) [1 + \sum_{j=1}^n E_{2j}(\alpha, \beta_4) \varsigma^{2j}] \quad (3.133a)$$

$$[\eta'(\varsigma)]_4 = \beta'_4 \ln(\alpha, \beta'_4) [1 + \sum_{j=1}^n E_{2j}(\alpha, \beta'_4) \varsigma^{2j}] \quad (3.133b)$$

组合 3.130 和 3.133, 我们得到:

$$\begin{aligned} \eta_4(\varsigma) &= [\beta_2 \ln(\alpha, \beta_2) + \beta_4 \ln(\alpha, \beta_4)] - [\beta'_2 \ln(\alpha, \beta'_2) + \beta'_4 \ln(\alpha, \beta'_4)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \{ [\beta_2 \ln(\alpha, \beta_2) E_{2j}(\alpha, \beta_2) + \beta_4 \ln(\alpha, \beta_4) E_{2j}(\alpha, \beta_4)] \\ &\quad - [\beta'_2 \ln(\alpha, \beta'_2) E_{2j}(\alpha, \beta'_2) + \beta'_4 \ln(\alpha, \beta'_4) E_{2j}(\alpha, \beta'_4)] \} \varsigma^{2j} \end{aligned} \quad (3.134)$$

### 第三步: 2N 饼磁体——加上最后两个饼

图 3.31 给出了 2N 饼磁体中最后两个饼 ( $2N-1$ ) 和  $2N$  的模型。线圈  $2N$  有  $2b_N = 2Nw + (2N-1)\delta$ , 由此  $\beta_{2N} = [2Nw + (2N-1)\delta]/2a_1$ ; 线圈  $2N'$  有  $2b'_{N'} = 2(N-1)w + (2N-1)\delta$ , 由此  $\beta'_{2N} = [2(N-1)w + (2N-1)\delta]/2a_1$ 。

由  $N$  个双饼组成的  $2N$  饼磁体的轴向磁场表达式:

$$\eta_{2N}(\varsigma) = \sum_{k=1}^N \{ [\eta(\varsigma)]_{2k} - [\eta'(\varsigma)]_{2k} \} \quad (3.135)$$

本分析中, 我们假设双饼内部的间隙和相邻双饼之间的间隙是相等的。

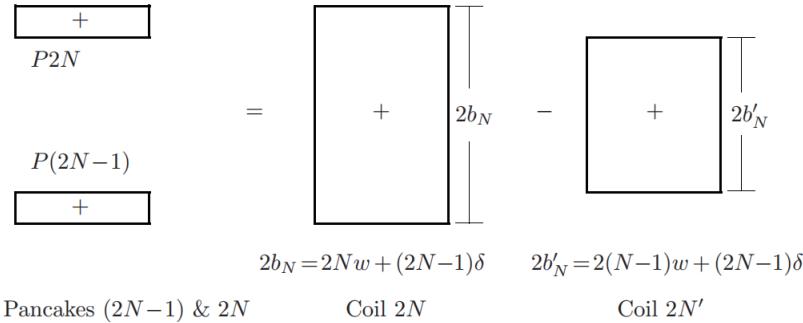


图 3.31: 视为线圈 2N 减去线圈 2N' 的磁体加入到 2(N - 1) 饼式线圈磁体上。

我们可以将 3.135 用和 3.134 类似的形式表达:

$$\begin{aligned} \eta_{2N}(\zeta) = & \sum_{k=1}^N \{ [\beta_{2k} \ln(\alpha, \beta_{2k}) - \beta'_{2k} \ln(\alpha, \beta'_{2k})] \\ & + \sum_{j=1}^n [\beta_{2k} \ln(\alpha, \beta_{2k}) E_{2j}(\alpha, \beta_{2k}) - \beta'_{2k} \ln(\alpha, \beta'_{2k}) E_{2j}(\alpha, \beta'_{2k})] \} \zeta^{2j} \end{aligned} \quad (3.136)$$

式中,

$$\beta_{2k} = \frac{2k\omega + (sk - 1)\delta}{2a_1}; \quad \beta'_{2k} = \frac{2(k-1)\omega + (2k-1)\delta}{2a_1}$$

式 3.136 也可以写作:

$$\frac{\eta_{2N}(\zeta)}{\eta_{2N}(0)} = \{1 + [E_2]_{2N}\zeta^2 + \cdots + [E_{2n}]_{2N}\zeta^{2n}\} \quad (3.137)$$

式中,  $\eta_{2N}(0)$  是无量纲中心场。 $[E_{2n}]_{2N}$  是第 n 阶总体误差系数。 $\eta_{2N}(\zeta = 0)$  和  $[E_{2n}]_{2N}$  为:

$$\eta_{2N}(0) = \sum_{k=1}^N [\beta_{2k} \ln(\alpha, \beta_{2k}) - \beta'_{2k} \ln(\alpha, \beta'_{2k})] \quad (3.138a)$$

$$[E_{2n}]_{2N} = \frac{\sum_{k=1}^N [\beta_{2k} \ln(\alpha, \beta_{2k}) E_{2n}(\alpha, \beta_{2k}) - \beta'_{2k} \ln(\alpha, \beta'_{2k}) E_{2n}(\alpha, \beta'_{2k})]}{\sum_{k=1}^N [\beta_{2k} \ln(\alpha, \beta_{2k}) - \beta'_{2k} \ln(\alpha, \beta'_{2k})]} \quad (3.138b)$$

$$(3.138c)$$

于是, 方程 3.138b 给出了一个计算由  $2N$  个一致饼式线圈 (各磁体有相同的  $2a_1, 2b = w, \alpha, \beta$ , 相邻间距  $\delta$ ) 组成的磁体第  $n$  阶误差系数的表达式。

### 3.9.15 问题 3.8: 理想双极磁体

本问题研究理想双极磁体。此磁体无限长 (从而无边缘效应)、绕组厚度为零、磁场由纵向表面电流产生、磁场方向与双极磁体的轴垂直。实际双极磁体的磁场和力的计算远比理想双极磁体复杂; 不过, 除了在端部的复杂情况, 理想双极磁体给出了双极磁体的大多关键特征。双极磁体用于要求与磁体轴向垂直方向的磁场均匀的系统, 例如高能粒子加速器 [3.35–3.40] 和发电机 [3.41–3.43]。

一个半径为  $R$ 、零绕组厚度的长 (二维) 双极磁体由双极壳 ( $r = R$ ) 上的  $z$  向的表面电流励磁。室温孔内 ( $r < R$ ) 的磁场  $\vec{H}_{d1}$  以及壳外的磁场  $\vec{H}_{d2}$  为:

$$\vec{H}_{d1} = H_0(\sin\theta\vec{i}_r + \cos\theta\vec{i}_\theta) \quad (3.139a)$$

$$\vec{H}_{d2} = H_0\left(\frac{R}{r}\right)^2(\sin\theta\vec{i}_r - \cos\theta\vec{i}_\theta) \quad (3.139b)$$

二维坐标的定义如图 3.32。 $+z$  方向指向纸面外。在解答下面的问题时, 忽略边缘效应。

a) 画出双极磁体  $r < R$  和  $r > R$  两个区域的场线。

b) 证明  $r = R$  处的表面电流的表达式为:

$$\vec{K}_f = -2H_0\cos\theta\vec{i}_z \quad (3.140)$$

画出方向草图,  $\vec{K}_f$  如果是  $+z$  方向, 画圈 (o); 反之, 画叉 (x)。

c) 证明作用在载流壳单单元上的单位长度的 Lorentz 力密度表达式  $\vec{f}_L[\text{N/m}^2]$  为:

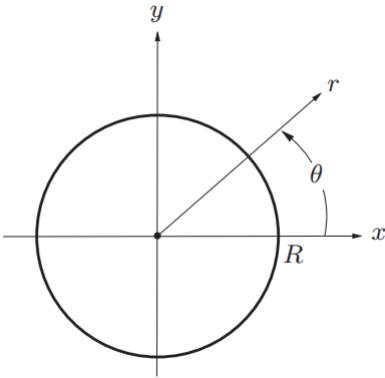
$$\vec{f}_L = -\mu_0 H_0^2 \sin 2\theta \vec{i}_\theta \quad (3.141)$$

d) 证明施于右半部分 ( $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ ) 的净  $x$  向单位长度 Lorentz 力  $\vec{F}_{Lx}[\text{N/m}]$  为:

$$F_{Lx} = \frac{4R\mu_0 H_0^2}{3} \quad (3.142)$$

e) 证明单位长度储存的总磁能表达式  $E_m[\text{J/m}]$  为:

$$E_m = \frac{\pi R^2 B_0^2}{\mu_0} \quad (3.143)$$

图 3.32: 圆柱坐标系;  $+z$  朝向纸面外。

在  $B_0 = 5 \text{ T}$ ,  $R = 20 \text{ mm}$  时计算  $E_m$ 。同时, 由  $E_m$  计算一个长为  $10 \text{ m}$ 、载流  $I_{op} = 5000 \text{ A}$  的双极磁体的电感  $L$ 。

为了减少双极磁体外部的磁场, 在双极外装设一个厚度  $d$  的铁扼 ( $\mu = \infty$ ), 如图 3.33 所示。

f) 证明, 在双极内部产生同样的磁场  $\vec{H}$ , 需要的  $\vec{K}_{f1}$  恰为方程 3.140 的一半。解释为什么电流减小了。

g) 实际中, 铁扼不可能在无限的  $H_0$  下保持高  $\mu$  值。证明, 为了保持铁扼不饱和, 最小的  $d_m$  表达式:

$$d_m = R \left( \frac{H_0}{M_{sa}} \right) \quad (3.144)$$

式中,  $M_{sa}$  是铁扼材料的饱和磁化。在以下条件下计算  $d_m$ :  $\mu_0 H_0 = 5 \text{ T}$ ;  $\mu_0 M_{sa} = 1.2 \text{ T}$ ;  $R = 20 \text{ mm}$ 。

### 问题 3.8 之解

a) 场线示意图如图 3.34a。磁场的法向 ( $r$  向) 分量在边界处 ( $r = R$ ) 处是连续的。

b) 磁场的切向方向 ( $\theta$  向) 在  $r = R$  处不连续, 差值为该处的表面电流密度  $\vec{K}_f$ , 根据方程 2.6, 有:

$$\vec{K}_f = \vec{r}_r \times (\vec{H}_{d2} - \vec{H}_{d1}) = \vec{r}_r \times -2H_0 \cos \theta \vec{r}_\theta = -2H_0 \cos \theta \vec{r}_z \quad (3.140)$$

如图 3.34b 指出的,  $\vec{K}_f$  在  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$  部分是指向  $-z$  向的, 在  $90^\circ < \theta < 270^\circ$  部分是指向  $+z$  向的。

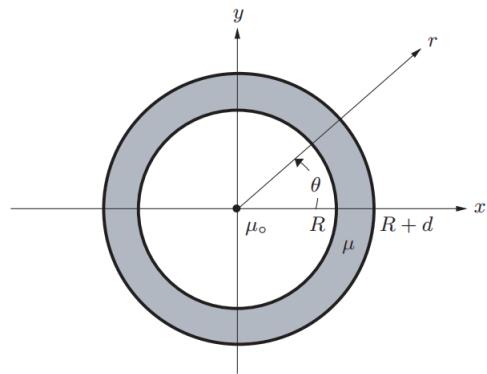
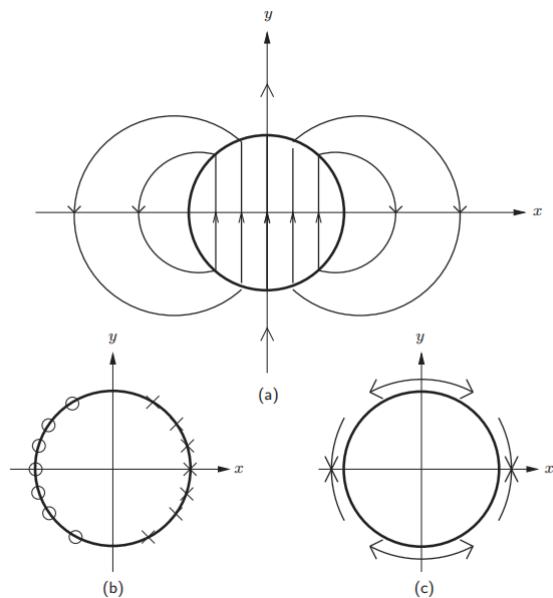
图 3.33: 理想双极磁体外置厚度为  $d$  的铁扼

图 3.34: 理想双极磁体。a) 内外场; b) 表面电流密度矢量; c) 力矢量。

c)  $\vec{f}_L$  由  $\vec{K}_f \times \mu_0 \vec{H}_d$  给出, 其中  $\mu_0 \vec{H}_d = \mu_0(\vec{H}_{d1} + \vec{H}_{d2})/2$ :

$$\vec{f}_L = \vec{K}_f \times \mu_0 H_0 \sin \theta \vec{i}_r \quad (\text{S8.1})$$

$$\begin{aligned} &= -2\mu_0 H_0^2 \cos \theta \sin \theta \vec{i}_\theta \\ &= -\mu_0 H_0^2 \sin 2\theta \vec{i}_\theta \end{aligned} \quad (3.141)$$

注意到,  $\vec{f}_L$  无  $r$  分量; 它仅有  $\theta$  分量 (图 3.34c)。同时, 力密度在  $\theta = \pi/4 + n\pi/2$  处最大, 而在  $\theta = 0 + n\pi/2$  时为零, 式中  $n = 0, 1, 2, 3$ 。累计力  $\propto \int f_L(\theta) d\theta$  在  $\theta = 0$  和  $180^\circ$  时取最大值。

d) 从图 3.34c 明显可见, 施于右半部分的单位长度 Lorentz 力是  $+x$  方向的:

$$F_{Ldx} = \int \vec{f}_L \cdot \vec{i}_x dx = -R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{L\theta} \sin \theta d\theta \quad (\text{S8.2a})$$

$$= -2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{L\theta} \sin \theta d\theta = 4R\mu_0 H_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \quad (\text{S8.2b})$$

从方程 S8.2b, 我们得:

$$F_{Lx} = \frac{4R\mu_0 H_0^2}{3} \quad (3.142)$$

施于左半部分的净 Lorentz 力和施于右半部分的 Lorentz 力的幅值相同, 而指向  $-x$  向。也就是说, 存在一个很大的力试图将双极磁体的两部分拉开。实际上, 用于承受这个力的支撑结构的设计是双极磁体设计的关键点之一。

e)  $E_m$  [ J/m] 可以通过对磁能密度  $\mu_0 |H(r, \theta)|^2/2$  在垂直于双极轴的整个表面 (从  $r = 0$  到  $r = \infty$ ; 从  $\theta = 0$  到  $\theta = 2\pi$ ) 积分获得。

$$E_m = \frac{\mu_0}{2} \int_0^R |H_{d1}|^2 2\pi r dr + \frac{\mu_0}{2} \int_R^\infty |H_{d2}|^2 2\pi r dr \quad (\text{S8.3a})$$

$$= \frac{\mu_0}{2} H_0^2 \pi R^2 + \frac{\mu_0}{2} H_0^2 \pi R^2 \quad (\text{S8.3b})$$

$$= \mu_0 \pi R^2 H_0^2 = \frac{\pi R^2 B_0^2}{\mu_0} \quad (3.143)$$

从方程 S8.3b 可知, 存储的总磁能可以分为双极壳内外的两个部分。我们可以想象, 双极内流动电流的一半用来产生  $H_{d1}$  而另一半用来产生  $H_{d2}$ 。代入  $\mu_0 H_0 = B_0 = 5$  T,  $R = 20$  mm, 有:

$$E_m = \frac{\pi (2 \times 10^{-2} m)^2 (5T)^2}{4\pi \times 10^{-7} H/m} = 25 kJ/m$$

对于一个 5T 双极磁体，如果长 10 m，总存储磁能变为 250 kJ。总存储磁能等于双极磁体的总电感能。

$$\frac{1}{2}LI_{op}^2 = 250 \text{ kJ} \quad (\text{S8.4})$$

代入  $I_{op} = 5000 \text{ A}$  解出 L，有：

$$L = \frac{2(250 \times 10^3 \text{ J})}{(5000 \text{ A})^2} = 20 \text{ mH}$$

在 3.7.3 节已给出，理想双极磁体单位长度的自感为：

$$L_\ell = \frac{1}{8}\mu_0\pi N^2 \quad (3.87)$$

代入  $L_\ell (= 2 \text{ mH/m})$  以及 20 mH，解出 N，我们发现在  $I_{op} = 5000 \text{ A}$  时  $N \simeq 64$ 。如果双极磁体的运行电流是 1000A，那么磁体的电感必须是 0.5H；它必须有 5 倍于 20 mH 双极的绕组匝数： $N \simeq 318$ 。

f) 因为  $\mu = \infty$ ，以及在  $R < r < R + d$  时  $\vec{H}_{d2} = 0$ ，如果屏蔽足够厚以避免饱和，那么对  $r > R + d$  也有  $\vec{H}_{d2} = 0$ 。明显：

$$\vec{K}_{f1} = -H_0 \cos \theta \vec{r}_\theta \quad (\text{S8.5})$$

这恰好是方程 3.140 中给出  $\vec{K}_f$  的一半。考虑两种情况下都要求表面电流，我们可以作如下解释：全部用于产生室温孔场  $-2H_0 \cos \theta$  的表面电流，其中一半来自铁芯磁化的“表面电流”、

g) 单位长度的磁通 [Wb/m] 进入径向厚度为 d 的铁扼的 0 至  $\theta = 90^\circ$  部分，必须等于或小于  $\mu_0 M_{sa} d$

$$R\mu_0 H_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = R\mu_0 H_0 \leq \mu_0 M_{sa} d \quad (\text{S8.6})$$

于是，铁扼的最小厚度为：

$$d_m = R \left( \frac{H_0}{M_{sa}} \right) \quad (3.144)$$

代入  $R = 20 \text{ mm}$ ,  $\mu_0 H_0 = 5 \text{ T}$ ,  $\mu_0 M_{sa} = 1.2 \text{ T}$ ，我们有：

$$d_m = (20 \text{ mm}) \frac{5T}{1.2T} = 83 \text{ mm}$$

从表 2.5 可知，在  $\mu_0 M = 1.25 \text{ T}$  时，as-cast 钢的磁导率为  $180\mu_0$ 。尽管不是无限大，但对于满足我们的无限大假设是足够用了。

### 3.9.16 问题 3.9：理想四极磁体

本问题研究一个理想四极磁体，该磁体无限长（无边缘效应）、零绕组厚度、纵向表面电流产生的磁场垂直于磁场轴线。类似于双极磁体，四极磁体主要用于粒子加速器 [3.35, 3.39, 3.44–3.46]。如下文 f) 所论及的，四极磁体用于聚焦带电粒子束。

一个半径为  $R$ 、零绕组厚度的“长”四极磁体由四极磁体壳体上 ( $r = R$ ) 沿  $z$  向流动的表面电流励磁。室温孔内 ( $r < R$ ) 的磁场  $\vec{H}_{q1}$  和壳外 ( $r > R$ ) 的磁场  $\vec{H}_{q2}$  分别为：

$$\vec{H}_{q1} = H_0 \left( \frac{r}{R} \right) (\sin 2\theta \vec{i}_z + \cos 2\theta \vec{i}_\theta) \quad (3.145a)$$

$$\vec{H}_{q2} = H_0 \left( \frac{R}{r} \right)^3 (\sin 2\theta \vec{i}_r - \cos 2\theta \vec{i}_\theta) \quad (3.145b)$$

在解答下列问题时，忽略边缘效应。

- a) 画出四极磁体内外区域的场线。
- b) 证明  $r = R$  处的表面电流  $\vec{K}_f$  表达式为：

$$\vec{K}_f = -2H_0 \cos 2\theta \vec{i}_z \quad (3.146)$$

大致画出电流的方向，在  $\vec{K}_f$  是  $+z$  向（指向纸面外）时画圈 (o)；反之，画叉 (x)。

- c) 证明施加于壳体载流元上的单位长度 Lorentz 力密度的表达式为：

$$\vec{f}_L = -\mu_0 H_0^2 \sin 4\theta \vec{i}_\theta \quad (3.147)$$

- d) 证明质子沿磁场中心以近乎光速  $c$  在  $+z$  向运动时， $x$  向“磁弹性常数”  $k_{Lx}$  的表达式为：

$$k_{Lx} \simeq \frac{qc\mu_0 H_0}{R} \quad (3.148)$$

- e) 类似的，证明质子沿磁场中心以近乎光速  $c$  在  $+z$  向运动时， $y$  向“磁弹性常数”  $k_{Ly}$  的表达式为：

$$k_{Ly} \simeq -\frac{qc\mu_0 H_0}{R} \quad (3.149)$$

- f) 通过阐明  $k_{Lx}$  和  $k_{Ly}$  是不稳定还是可恢复的，描述四极磁体在带电粒子加速器中的作用。

## 问题 3.9 之解

- a) 场线如图 3.35a 所示。对于理想情况,  $r$  分量在  $r = R$  处是连续的。  
 b) 磁场的  $\theta$  分量在边界上的不连续等价于  $r = R$  处的表面电流密度, 即:

$$\begin{aligned}\vec{K}_f &= \vec{r}_r \times (\vec{H}_{q2} - \vec{H}_{q1}) = \vec{r}_r \times -2H_0 \cos 2\theta \vec{r}_\theta \\ &= -2H_0 \cos 2\theta \vec{r}_z\end{aligned}\quad (3.146)$$

$\vec{K}_f$  矢量在磁壳体上改变四次方向 (图 3.35b)。

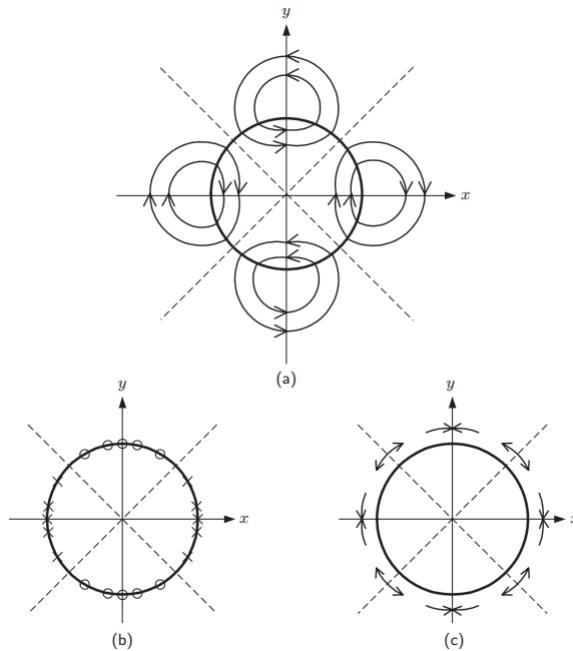


图 3.35: a) 四极磁体的内外磁场; b) 磁体内的表面电流密度矢量; c) 磁体中力的方向。

c)  $\vec{f}_L$  由  $r = R$  处  $\vec{K}_f$  与  $\mu_0 \vec{H}$  的差积给出。在  $r = R$  处, 平均场  $(\vec{H}_{q1} + \vec{H}_{q2})/2$  就是  $\vec{H} = H_0 \sin 2\theta \vec{r}_r$ , 因为  $\vec{H}_{q1}$  的  $r$  分量与  $\vec{H}_{q2}$  的相抵消。注意到  $\vec{K}_f = -2H_0 \cos 2\theta \vec{r}_\theta$ , 我们有:

$$\vec{f}_L = -2\mu_0 H_0^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \vec{r}_\theta = -\mu_0 H_0^2 \sin 4\theta \vec{r}_\theta \quad (3.147)$$

$\vec{f}_L$  的分布情况在图 3.35c 中画出。

d) 我们可以将  $x$  方向的磁弹性系数定义为:

$$k_{Lx} = -\frac{\partial F_{Lx}}{\partial x} \quad (\text{S9.1})$$

电荷为  $q$  的质子以近乎光速  $c$  在  $z$  向运动时, 受到的  $x$  向 Lorentz 力密度  $F_{Lx}$  为:

$$F_{Lx} \simeq [q(c\vec{i}_z) \times \mu_0 H_{q1}\vec{i}_\theta]_{\theta=0} \simeq -qc\mu_0 H_0 \left(\frac{r}{R}\right) \vec{i}_x \quad (\text{S9.2})$$

$k_{Lx}$  于是由下式给出:

$$k_{Lx} = -\frac{\partial F_{Lx}}{\partial x} = -\frac{\partial F_{Lx}}{\partial r} \simeq \frac{qc\mu_0 H_0}{R} \quad (3.148)$$

e) 在  $y$  向 ( $r$  向在  $\theta = 90^\circ$  时),  $F_{Ly}$  为:

$$F_{Ly} \simeq [q(c\vec{i}_z) \times \mu_0 H_{q1}\vec{i}_\theta]_{\theta=\frac{\pi}{2}} \simeq qc\mu_0 H_0 \left(\frac{r}{R}\right) \vec{i}_y \quad (\text{S9.3})$$

$k_{Ly}$  于是由下式给出:

$$k_{Ly} = -\frac{\partial F_{Ly}}{\partial y} = -\frac{\partial F_{Ly}}{\partial r} \simeq -\frac{qc\mu_0 H_0}{R} \quad (3.149)$$

f)  $F_{Lx}$  是恢复性的, 但  $F_{Ly}$  是不稳定的, 会令粒子束在  $y$  向发散。在加速环中, 四极磁体因此成对使用, 一个用于在  $x$  向聚焦, 紧跟另一个在  $y$  向聚焦; 净效果是在两个方向都聚焦了。

### 3.9.17 讨论 3.8: 双跑道线圈磁体

这里我们讨论一个由两个在磁体轴向正交平面方向相距  $2c$  的平行的理想“跑道”线圈。跑道线圈的名字源导体末端绕过  $180^\circ$ , 就像跑道一样。和双极磁体不同, 它的绕组是平面的, 即“平”的。平的绕组让它相比于双极磁体更容易绕制, 故而更适合用于发电机和电动机 [3.47-3.50]。跑道线圈同样也适合于磁悬浮 [3.51-3.53]。

图 3.36 给出了由两个理想跑道线圈组成的磁体的绕组配置剖面图。一组两个非常长的跑道线圈, 彼此平行, 某些情况下可以替代双极磁体。例如, 如果一天长超导带必须在一个横向于其主轴的均匀场下测试, 就可以使用这种磁体; 它相较于双极磁体制作更容易。如图 3.36 给出的, 每一个跑道线圈的绕组外宽度为  $2a_2$ , 内宽度为  $2a_1$ , 有  $N$  匝。

右手侧的各跑道线圈的电流方向是  $+z$  向 (指向纸外), 左侧指向  $-z$  向。下面我们推导这种磁体的关键参数表达式。

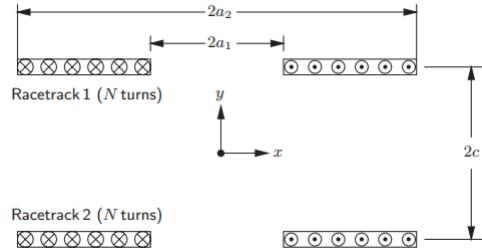


图 3.36: 由两个理想跑道线圈组成的磁体剖面。

### A. 磁体中心场

对右手侧跑道线圈 1 的  $\xi$  处的微分表面电流  $Kd\xi$  上应用 Biot-Savart 定律 (方程 3.1), 我们会得到  $(x, y)$  处的微分磁场:

$$d\vec{H}_{1+} = \frac{Kd\xi}{2\pi r_1} \vec{i} \quad (3.150)$$

式中, 磁场方向如图所示,  $K = NI/(a_2 - a_1)$ 。整个  $+z$  表面电流 (从  $\xi = a_1$  到  $\xi = a_2$ ) 贡献的磁场的  $y$  分量  $H_{y1+}$  可以通过从  $\xi = a_1$  到  $\xi = a_2$  对方程 3.151 积分得到:

$$H_{y1+} = -\frac{K}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\cos \theta_1 d\xi}{r_1} \quad (3.151)$$

将  $r_1 = \sqrt{(\xi-x)^2 + (c-y)^2}$  和  $\cos \theta_1 = (\xi-x)/r_1$  代入方程 3.151, 我们得到:

$$H_{y1+} = -\frac{K}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(\xi-x)d\xi}{(\xi-x)^2 + (c-y)^2} = -\frac{K}{4\pi} \ln \left[ \frac{(a_2-x)^2 + (c-y)^2}{(a_1-x)^2 + (c-y)^2} \right] \quad (3.152)$$

类似的，其他电流的贡献：

$$H_{y1-} = -\frac{K}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(\xi + x)d\xi}{(\xi + x)^2 + (c - y)^2} = -\frac{K}{4\pi} \ln \left[ \frac{(a_2 + x)^2 + (c - y)^2}{(a_1 + x)^2 + (c - y)^2} \right] \quad (3.152b)$$

$$H_{y2+} = -\frac{K}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(\xi - x)d\xi}{(\xi - x)^2 + (c + y)^2} = -\frac{K}{4\pi} \ln \left[ \frac{(a_2 - x)^2 + (c + y)^2}{(a_1 - x)^2 + (c + y)^2} \right] \quad (3.152c)$$

$$H_{y2-} = -\frac{K}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(\xi + x)d\xi}{(\xi + x)^2 + (c + y)^2} = -\frac{K}{4\pi} \ln \left[ \frac{(a_2 + x)^2 + (c + y)^2}{(a_1 + x)^2 + (c + y)^2} \right] \quad (3.152d)$$

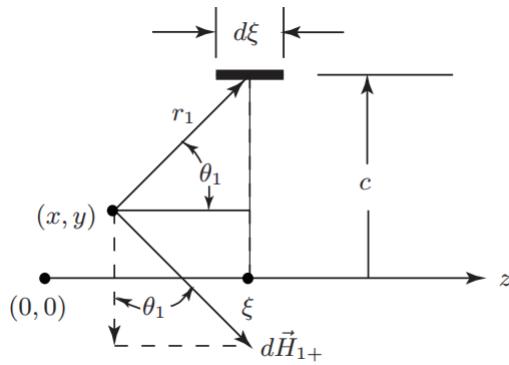


图 3.37：两个理想跑道线圈组成的磁体的剖面

组合上面四个贡献，并将将  $x = 0$  和  $y = 0$  代入，有：

$$\begin{aligned} H_y(x, y) = & -\frac{K}{\pi} \left\{ \ln \left[ \frac{(a_2 - x)^2 + (c - y)^2}{(a_1 - x) + (c - y)^2} \right] + \ln \left[ \frac{(a_2 + x)^2 + (c - y)^2}{(a_1 + x)^2 + (c - y)^2} \right] \right. \\ & \left. + \ln \left[ \frac{(a_2 - x)^2 + (c + y)^2}{(a_1 - x)^2 + (c + y)^2} \right] + \ln \left[ \frac{(a_2 + x)^2 + (c + y)^2}{(a_1 + x)^2 + (c + y)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.153a)$$

$$H_y(0, 0) = -\frac{K}{\pi} \ln \left( \frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2} \right) \quad (3.153b)$$

### B. 中心附近的磁场

我们可以通过求和  $H_y(0, 0)$  与上面的导出的包含  $H_{y1+}$  的项来导出

$H_y(x, y)$ (方程 3.153a)。方程 3.152a 可以写为:

$$\begin{aligned} H_{y1+} &= -\frac{K}{4\pi} \ln \left[ \frac{(a_2 - x)^2 + (c - y)^2}{(a_1 - x)^2 + (c - y)^2} \right] \\ &= -\frac{K}{4\pi} \{ \ln[(a_2 - x)^2 + (c - y)^2] - \ln[(a_1 - x)^2 + (c - y)^2] \} \end{aligned} \quad (3.154)$$

$\ln[(a_2 - x)^2 + (c - y)^2]$  可由下式给出:

$$\begin{aligned} \ln[(a_2 - x)^2 + (c - y)^2] &= \ln[(a_2^2 + c^2)(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2a_2x - 2cy}{a_2^2 + c^2})] \\ &= \ln(a_2^2 + c^2) + \ln(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2a_2x - 2cy}{a_2^2 + c^2}) \end{aligned}$$

在  $|x| \ll 1$  时, 使用  $\ln(1 + x) \simeq x - x^2/2$  近似:

$$\begin{aligned} \ln[(a_2 - x)^2 + (c - y)^2] &\simeq \ln(a_2^2 + c^2) \\ &+ \frac{(c^2 - a_2^2)(x^2 - y^2) - 2(a_2^2 + c^2)(a_2x + cy) - 4a_2cxy}{(a_2^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln[(a_1 - x)^2 + (c - y)^2] &\simeq \ln(a_1^2 + c^2) \\ &+ \frac{(c^2 - a_1^2)(x^2 - y^2) - 2(a_1^2 + c^2)(a_1x + cy) - 4a_1cxy}{(a_1^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

于是，方程 3.154，以及类似的， $H_{y1-}, H_{y2+}, H_{y2-}$  可以写成：

$$\begin{aligned} H_{y1+}(x, y) \simeq & -\frac{K}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2}\right) + \frac{(c^2 - a_2^2)(x^2 - y^2) - 2(a_2^2 + c^2)(a_2 x + c y) - 4a_2 c x y}{(a_2^2 + c^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(c^2 - a_1^2)(x^2 - y^2) - 2(a_1^2 + c^2)(a_1 x + c y) - 4a_1 c x y}{(a_1^2 + c^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.155a)$$

$$\begin{aligned} H_{y2+}(x, y) \simeq & -\frac{K}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2}\right) + \frac{(c^2 - a_2^2)(x^2 - y^2) + 2(a_2^2 + c^2)(a_2 x + c y) - 4a_2 c x y}{(a_2^2 + c^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(c^2 - a_1^2)(x^2 - y^2) + 2(a_1^2 + c^2)(a_1 x - c y) + 4a_1 c x y}{(a_1^2 + c^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.155b)$$

$$\begin{aligned} H_{y2+}(x, y) \simeq & -\frac{K}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2}\right) + \frac{(c^2 - a_2^2)(x^2 - y^2) - 2(a_2^2 + c^2)(a_2 x - c y) + 4a_2 c x y}{(a_2^2 + c^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(c^2 - a_1^2)(x^2 - y^2) - 2(a_1^2 + c^2)(a_1 x - c y) + 4a_1 c x y}{(a_1^2 + c^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.155c)$$

$$\begin{aligned} H_{y2-}(x, y) \simeq & -\frac{K}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2}\right) + \frac{(c^2 - a_2^2)(x^2 - y^2) + 2(a_2^2 + c^2)(a_2 x + c y) - 4a_2 c x y}{(a_2^2 + c^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(c^2 - a_1^2)(x^2 - y^2) + 2(a_1^2 + c^2)(a_1 x - c y) - 4a_1 c x y}{(a_1^2 + c^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.155d)$$

联立各项，在  $(0, 0)$  附近，我们有：

$$\begin{aligned} H_y(x, y) \simeq & -\frac{K}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2}\right) - \frac{(a_2^2 - a_1^2)[3c^4 + (a_2^2 + a_1^2)c^2 - a_2^2 a_1^2]}{(a_2^2 + c^2)^2 (a_1^2 + c^2)^2} (x^2 - y^2) \right] \\ \simeq & H_y(0, 0) + K \left[ \frac{a_2^2 - c^2}{(a_2^2 + c^2)^2} - \frac{a_1^2 - c^2}{(a_1^2 + c^2)^2} \right] (x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (3.156)$$

注意到，当  $c^2$  满足下式时，2 阶不均匀项成为零：

$$\begin{aligned} c^2 = & \frac{1}{6} [\sqrt{(a_2^2 + a_1^2)^2 + 12a_2^2 a_1^2} - (a_2^2 + a_1^2)] \\ = & \frac{1}{6} [\sqrt{a_2^4 + 14a_2^2 a_1^2 + a_1^4} - (a_2^2 + a_1^2)] \end{aligned} \quad (3.156b)$$

### C. 四个电流元素中心场

我们通过近似将四个电流面视为载流为  $NI$  的载流元，可以进一步简化跑道线圈中心附近磁场的表达式，如图 3.38 所示。点表示  $+z$  向，叉表示  $-z$  方向。

在这个案例中, 我们令  $a_1 = a, a_2 = a + \epsilon$  以及  $K\epsilon = K(a_2 - a) = NI$ 。将这些参数代入方程 3.153b 中去。考虑在  $|x| \ll 1$  时, 有  $\ln(1+x) = x$ 。于是:

$$\begin{aligned} H_y(0, 0) &= -\frac{K}{\pi} \ln\left(\frac{a_2^2 + c^2}{a_1^2 + c^2}\right) \simeq -\frac{K}{\pi} \ln\left(\frac{a^2 + c^2 + 2a\epsilon}{a^2 + c^2}\right) \\ &\simeq -\frac{K2a\epsilon}{\pi(a^2 + c^2)} \simeq -\frac{2aN I}{\pi(a^2 + c^2)} \end{aligned} \quad (3.157)$$

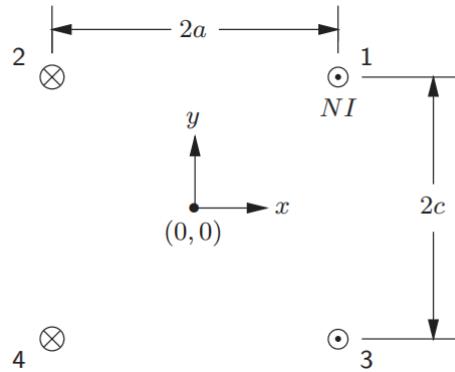


图 3.38: 力计算用到的电流分布模型。

方程 3.156a 的等号右侧的第二项  $K(a_2^2 - a_1^2) = K(a_2 + a_1)(a_2 - a_1)$  成为  $2aN I$ , 于是:

$$\begin{aligned} \frac{K(a_2^2 - a_1^2)[3c^4 + (a_2^2 + a_1^2)c^2 - a_c^2 a_1^2]}{\pi(a_2^2 + c^2)^2(a_1^2 + c^2)^2}(x^2 - y^2) &\simeq \frac{2aN I[3c^4 + 2a^2 c^2 - a_4]}{\pi(a^2 + c^2)^4}(x^2 - y^2) \\ &= -H_y(0, 0) \left[ \frac{3c^4 + 2a^2 c^2 - a^4}{(a^2 + c^2)^3(x^2 - y^2)} \right] \end{aligned}$$

联立上式和 3.156, 得到:

$$H_y(0, 0) \simeq H_h(0, 0) \left[ 1 + \frac{3c^4 + 2a^2 c^2 - a^4}{(a^2 + c^2)^3}(x^2 - y^2) \right] \quad (3.157b)$$

#### D. 电流元上的力

这四个相同的电流元模型可以用来计算施加于电流元 1 上的轴向单位长度的 Lorentz 力  $\vec{F}_1$ 。这个力是电流元 2/3/4 分别作用于电流元 1 上的 Lorentz 力之和:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1|_2 + \vec{F}_1|_3 + \vec{F}_1|_4 \quad (3.158)$$

式中,  $\vec{F}_1|_2, \vec{F}_1|_3, \vec{F}_1|_4$  分别是元素 2/3/4 作用在元素 1 上的力矢量。

载流为  $I_2 = NI$  的元素 2 作用在载流为  $I_1 = NI$  上的力  $\vec{F}_1|_2$  的方向为  $+x$ , 为:

$$\vec{F}_1|_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a} \vec{i}_x = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi a} \vec{i}_x \quad (3.159)$$

类似的, 元素 3 在元素 1 上的力  $\vec{F}_1|_3$  是  $-y$  向的, 为:

$$\vec{F}_1|_3 = -\frac{\mu_0 I_1 I_3}{4\pi c} \vec{i}_y = -\frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi c} \vec{i}_y \quad (3.159b)$$

元素 4 对元素 1 的力  $\vec{F}_1|_4$ , 既有  $x$  向, 也有  $y$  向:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1|_4 &= \frac{\mu_0 I_1 I_4}{4\pi \sqrt{a^2 + c^2}} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \vec{i}_x + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \vec{i}_y \right) \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi} \left( \frac{a}{a^2 + c^2} \vec{i}_x + \frac{c}{a^2 + c^2} \vec{i}_y \right) \end{aligned} \quad (3.159c)$$

其他三个元素对元素 1 的电磁力的  $x$  分量和  $y$  分量  $F_{1x}$  和  $F_{1y}$  为:

$$F_{1x} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{a^2 + c^2} \right) = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi a} \left( 1 + \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right) \quad (3.160a)$$

$$F_{1y} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi} \left( -\frac{1}{c} + \frac{c}{a^2 + c^2} \right) = -\frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi c} \left( 1 - \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) \quad (3.160b)$$

### E. 跑道线圈自身内部以及两线圈之间的作用力

因为  $c^2 < a^2 + c^2$ ,  $F_{1y}$  指向  $-y$  向。跑道线圈 1 内部的元素 1 和元素 2 之间的净力是斥力, 这是因为它们的电流极性相反。类似的, 跑道线圈 2 内部的元素 3 和 4 之间的净力也是斥力。也即, 如无外部约束, 各跑道线圈都有扩展成圆形的趋势。

元素 1 和元素 3 之间的净力是引力, 因为它们的电流极性是相同的。类似的, 元素 2 和元素 4 之间的净力也是引力。如图 3.160b 所示, 两个跑道线圈之间的净力是引力。

#### 3.9.18 问题 3.10: 理想环状 toroidal 磁体

本问题处理一个零绕组厚度的理想环形磁体, 关键参数如图所示。

一个理想的圆截面环形磁体, 大半径为  $R$ 、小半径为  $a$ , 由等效总安匝数  $NI$  的表面电流励磁 (图 3.39)。假定表面电流围绕环流动, 方向与  $\phi$  向垂直。

a) 证明环形磁体的内部磁场  $B_\phi$  为:

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (3.161)$$

同时证明, 环外的磁场  $B_\phi$  是零。

b) 假设环磁体已用有  $N$  个环, 每个环载流均为  $I$ 。证明, 作用于单个环上的净径向洛伦兹力  $F_{L+}$  为:

$$F_{L+} = \frac{\mu_0 NI^2}{2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}\right) \quad (3.162)$$

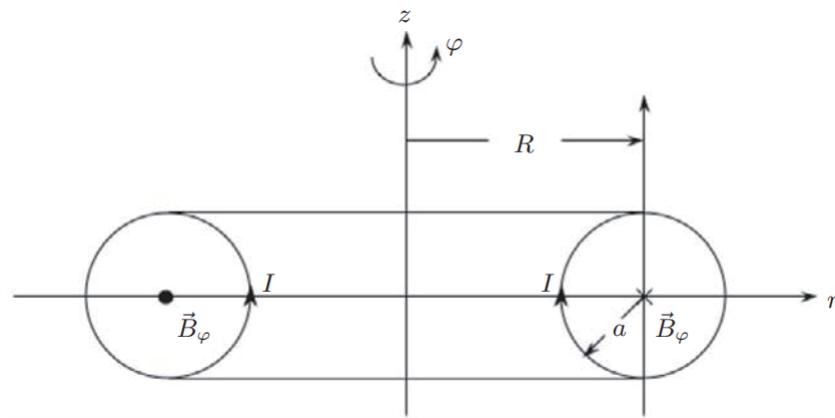


图 3.39: 理想环形磁体, 由  $N$  个环组成, 每个环载流均为  $I$ 。

### 问题 3.10 之解

a) 根据对称性, 我们看到  $H_\phi$  与  $\phi$  无关。在环形磁体内应用 Ampere 积分定律:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(r) r d\varphi = 2\pi r H_\varphi(r) = NI \quad (S10.1)$$

因为  $B_\phi(r) = \mu_0 H_\phi(r)$ , 我们有:

$$B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (3.161)$$

当上述积分在整个周长上进行时, 环形磁体外部无净电流。故而,  $H_\phi(r) = 0$ ,  $B_\phi(r) = 0$ 。

b) 图 3.40 给出了一个环，在它上面一个力微元  $d\vec{F}_L$  作用在一个微元  $d\vec{s}$  上。 $r$  方向的力微元为  $dF_{Lr}$ 。 $d\vec{F}_L$  可以写为：

$$d\vec{F}_L = -Ids\vec{i}_\theta \times \tilde{B}_\varphi(r)\vec{i}_\varphi \quad (\text{S10.2})$$

式中， $B_\varphi(r)$  是作用在表面电流上的平均场。这个场是方程 3.161 给出的场的一半。

$$d\vec{F}_L = -Ids\vec{i}_\theta \times \tilde{B}_\varphi(r)\vec{i}_\varphi = \frac{\mu_0 NI^2 ds}{4\pi r} \vec{i}_\xi \quad (\text{S10.3})$$

式中， $\vec{i}_\theta \xi$  矢量与  $\vec{F}_L$  同向 (Fig. 3.40)。该力微元的  $r$  分量写为：

$$dF_{Lr} = \frac{\mu_0 NI^2 \cos \theta ds}{4\pi r} \quad (\text{S10.4})$$

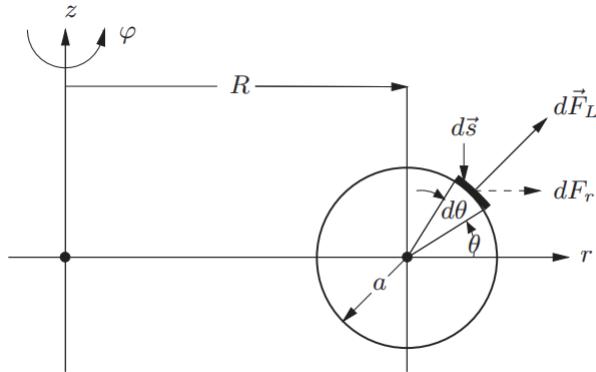


图 3.40：作用于单个环上的力微元。

因为  $ds = ad\theta$ ,  $r = R + a \cos \theta$ , 我们根据 S10.4 写出  $dF_{Lr}$ :

$$dF_{Lr} = \frac{\mu_0 NI^2 a \cos \theta d\theta}{4\pi(R + a \cos \theta)} \quad (\text{S10.5})$$

在整个小圆上对 S10.5 积分，有：

$$F_{Lr} = \frac{\mu_0 NI^2 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{R + a \cos \theta} = \frac{\mu_0 NI^2 a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{R + a \cos \theta} \quad (\text{S10.6})$$

查积分表，有：

$$\begin{aligned} F_{Lx} &= \frac{\mu_0 NI^2 a}{2\pi} \left( \frac{\theta}{a} \Big|_0^\pi - \frac{R}{a} \int_0^\pi \frac{d\theta}{R + a \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\mu_0 NI^2 a}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{a} - \frac{2R}{a\sqrt{R^2 - a^2}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{R-a}{R+a}} \tan \frac{\theta}{2} \right] \Big|_0^\pi \right\} \end{aligned} \quad (\text{S10.7a})$$

$$F_{Lr} = \frac{\mu_0 N I^2}{2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}}\right) \quad (3.162)$$

当  $R \rightarrow \infty$  时，环形磁体成为直径为  $2a$  的直螺管。如我们所料，此时  $F_{Lr} \rightarrow 0$ 。

### 3.9.19 讨论 3.9：核聚变与磁约束

如果轻元素核被约束并被加热到很高的温度 ( $\sim 100$  MK)，它们将发生聚变。因为聚变产生的总质量  $M_f$  比原始核的总质量  $M_n$  要轻，反应会释放出静能量  $E_n = (M_n - M_f)c^2$ ，其中， $c$  是光速。太阳通过这种过程产生能量。一个可控的热核反应堆是一个小型的人造太阳。太阳通过引力约束不稳定的热离子。重力可以用磁体替代；使用磁场稳定热离子的技术称为磁约束。

聚变发电反应堆最可能使用一种采用磁约束的环形装置 Tokamak。Tokamak 在 1950 年代由莫斯科 kURchatov 原子能研究所的 L.A. Artsimovich 和 A.D. Sakharov 提出。国际热核实验反应堆 (International Thermonuclear Experimental Reactor, ITER) 项目是一个联合欧盟、日本、俄罗斯、美国、韩国、中国和印度的合作项目。ITER 的目标是使用超导磁体制造一个现实可行的 Tokamak。ITER 的环形磁体并未上面研究的圆截面，而是 D 型的，主半径  $R \sim 8$  m，高约 12 m；它的环形磁场  $B_\phi \sim 6$  T，导体上的最大磁场约为 13 T。ITER 将在法国 Cadarache 完成制造。

### 3.9.20 问题 3.11：边缘磁场

本问题处理边缘磁场——磁体系统外部的不希望有的磁场。边缘磁场很重要，因为它可能在磁体系统附近形成风险点；它还会对磁场敏感设备造成干扰或引起其失真。为了计算远离磁场的边缘位置的磁场  $\vec{H}_f$ ，我们可以将磁体建模为一个有效半径为  $R_e$  的球形偶极子：

$$\vec{H}_f = H_0 \left(\frac{R_e}{r}\right)^3 (\cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (3.163)$$

式中， $\mu_0 H_0$  是中心场。我们令方程 3.163 中给出的  $z$  轴 ( $r$  向，在  $\theta = 0$  时) 偶极远场 ( $r \gg R$ ) 等于由方程 3.3a 给出的半径为  $a$ 、载流为  $I$  的环 ( $z \gg a$ )。于是：

$$H_0 R_e^3 = \frac{1}{2} a^2 I \quad (3.164)$$

a) 对一个安匝数为  $NI$ 、内径  $2a_1$ 、外径  $2a_2$  的螺管线圈，证明：采用加权平均  $a^2$ ，方程 3.164 修改为：

$$H_0 R_e^3 = \frac{1}{2} \tilde{a}^2 NI = \frac{1}{6} (a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2) NI \quad (3.165)$$

当方程 3.164 用于  $n_\ell$  组成的绕组的每一层时，每一层都有相同的匝数  $n_{t/\ell}$ 。我们此处不加推倒的给出一个表达式，请读者自行推导：

$$H_0 R_e^3 = \frac{1}{2} a_1^2 NI [1 + (\alpha - 1) \frac{(n_\ell + 1)}{n_\ell} + (\alpha - a)^2 \frac{(n_\ell + 1)(2n_\ell + 1)}{6n_\ell^2}] \quad (3.166)$$

注意到， $N = n_{t/\ell} n_\ell$ 。对于  $n_\ell \gg 1$ ，方程 3.166 可以由 3.165 近似。因为  $R_e$  正比于各方程等号右侧的立方根，多数情况下方程 3.165 是方程 3.166 的很好近似。这些方程仅在  $r \gg R_e$  时有效，所以，方程 3.165 计算的  $R_e$  是无磁体长度  $2b$  和安匝数  $NI$  无关的。对于由  $k$  个线圈嵌套组成的磁体，方程 3.165 可以推广为：

$$H_0 R_e^3 = \frac{1}{6} I \sum_{j=1}^k (a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + a_{1j} a_{2j}) N_j \quad (3.167)$$

b) 使用方程 3.167 和表格 3.3 给出的参数，证明对 45 T 超导磁体有  $R_e = 0.67$  m。(因为水冷磁体的体积比超导磁体的体积小很多，水冷磁体尽管其中心场为 31 T，但对边缘场仅贡献了一点点，可以忽略掉。)

c) 处于安全性考虑，与本磁体的运行和实验有关的人和设备必须位于磁体的 100 gauss 线外。确定  $z = 2.75$  m 处的径向距离  $r_m$ ，在此处边缘场幅值  $|\mu_0 \vec{H}_f|$  恰为 100 gauss。

### 问题 3.11 之解

a) 参数为  $2a_1, 2a_2$  的螺管的加权平均  $a^2$  可以写为：

$$\tilde{a}^2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)} \int_{a_1}^{a_2} r^2 dr = \frac{(a_2^3 - a_1^3)}{3(a_2 - a_1)} = \frac{1}{3} (a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2) \quad (S11.1)$$

于是：

$$H_0 R_e^3 = \frac{1}{2} \tilde{a}^2 NI = \frac{1}{6} (a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2) NI \quad (3.165)$$

b) 应用 3.167 和  $H_0 = 14T/\mu_0$  到 45 T 超导磁体 (表 3.3)，我们有：

$$\begin{aligned} \frac{14T}{4\pi \times 10^{-7} H/m} R_e^3 &= \text{long numbers expression} \\ (11.1408 \times 10^6 \text{ Am}^2) R_E^3 &= 3.300 \times 10^6 \text{ Am}^2 \end{aligned}$$

$$R_e = 0.667m$$

c) 在  $I_{op} = 10 \text{ kA}$  时,  $\mu_0 \vec{H}_f = 0.01 \text{ T}$ (100 gauss), 我们有:

$$(0.01T) = (14 \text{ T})\left(\frac{0.67 \text{ m}}{R \text{ m}}\right)(\cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (\text{S11.2a})$$

$$(R \text{ m}) = \sqrt{(x \text{ m})^2 + 0 + (2.7 \text{ m})^2} \quad (\text{S11.2b})$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x \text{ m}}{2.7 \text{ m}}\right) \quad (\text{S11.2c})$$

在方程 S11.2a, S11.2b 和 S11.2c 中解出  $x$ , 我们得到:  $x = 6.52 \text{ m}$ 。对于  $x = 6.52 \text{ m}$ , 我们从方程 S11.2b 得到  $R \simeq 7.05 \text{ m}, \theta \simeq 67.5^\circ$ 。

注意到实验仪器在 100 gauss 磁场中暴露一天半天和在 5 gauss 中长期暴露是不同的。

### 3.9.21 讨论 3.10: 缩放一个螺管磁体

在磁体设计的早期, 缩放一个已经设计好的磁体的参数作为新磁体的参数有时候很方便并且也很快速。缩放的时候通常的要求就是保持中心场  $H_z(0,0)$  或者功耗不变。注意到下面的所有缩放定律尽管是针对螺管磁体提出的, 但对任何形状的磁体都可以应用。

原始绕组尺寸  $a_{1o} \equiv a_o; a_{2o} \equiv \alpha_o a_o; b_o \equiv \beta_o a_o$  分别缩放  $\chi$ ( $>1$  为放大,  $<1$  为缩小) 得到一组新的绕组尺寸参数, 其中的  $\chi$  是常数,  $a_{1\chi} = \chi a_o; a_{2\chi} = \chi \alpha_o a_o; b_\chi = \chi \beta_o a_o$ 。下面的讨论中, 所有的  $o$  下标参数都表原始磁体,  $\chi$  下标参数表示缩放后的新磁体。

我们感兴趣的参数包括: 中心场  $H_z(0,0) \equiv H$ ; 空间因数  $\lambda$ ; 总电流密度  $J$ ; 运行电流  $I$ ; 导体截面积  $A$ ; 磁能  $E$ ; 总导体长度  $\ell$ ; 绕组体积  $V$ 。下面的讨论中, 我们假设两个磁体的空间因数相同:  $\lambda_\chi = \lambda_o = \lambda$ 。

#### A. 空间均匀性

如讨论 3.4 所述, 螺管磁体的磁场的空间均匀性完全由  $\alpha, \beta$  确定。因此, 只要  $\alpha, \beta$  保持不变, 全比例磁体将和原始磁体具有相同的均匀性。

#### B. 中心场 vs. 电流密度

由方程 3.13a(3.4 和问题 3.1), 对于相同的  $\lambda, \alpha, \beta$ , 中心场正比于  $a_1 J$ 。因为  $a_{1\chi} = \chi a_o$ ,  $J_\chi$  必须缩放  $1/\chi$ :  $J_\chi = J_o/\chi$ 。因为磁压正比于  $H_z^2(0,0)$ , 所以新磁体的磁压与原磁体保持一致。这从磁压正比于磁体的径向尺寸与运行电流密度的乘积  $a_1 J$  在缩放过程不变也能看出。可以从方程 3.54 得到, 新的磁体的中平面总的轴向力是原磁体的  $\chi^2$ ——方程 3.54 中,  $(NI/4b)^2$  保持不变; 它是面积项, 增长  $\chi^2$ 。

### C. 导体大小 & 运行电流

如果  $I_\chi$  缩放  $\chi$ , 则缩放后的磁体的导体截面积  $A_\chi \simeq I_\chi/J_\chi$  要被缩放  $\chi^2$ :  $A_\chi = \chi^2 A_o$ 。另一方面, 如果运行电流不变, 那有  $A_\chi = \chi A_o$ 。

### D. 总匝数

缩放后磁体的总匝数,  $N_\chi$ , 可以由下式给出:

$$N_\chi = \frac{\lambda J_\chi (2\beta a_\chi) a_\chi (\alpha - 1)}{I_\chi} \quad (3.168)$$

给定  $A_\chi, J_\chi = J_o/\chi$ , 因为  $H_z(0, 0)$  必须保持不变,  $N_\chi$  可保持不变或者必须按  $\chi$  缩放:

$$(对于 I_\chi = \chi I_o) \quad N_\chi = \frac{\lambda(\frac{J_o}{\chi})(2\beta\chi a_o)\chi a_o(a-1)}{\chi I_o} = N_o \quad (3.168b)$$

$$(对于 I_\chi = I_o) \quad N_\chi = \frac{\lambda(\frac{J_o}{\chi})(2\beta\chi a_o)\chi a_o(a-1)}{I_o} = \chi N_o \quad (3.168c)$$

### E. 总导体长度、运行电流和安·米

磁体所需的总导体长度,  $\ell_\chi$ , 有两种选项:

$$(对于 I_\chi = \chi I_o) \quad \ell_\chi = N_\chi \pi (\alpha a_\chi + a_\chi) = N_o \chi \pi a_0 (\alpha + 1) = \chi \ell_o \quad (3.169a)$$

$$(对于 I_\chi = I_o) \quad \ell_\chi = \chi N_o \chi \pi a_0 (\alpha + 1) = \chi^2 \ell_o \quad (3.169b)$$

总的安·米数,  $I_\chi \ell_\chi$ , 是导体费用的一个很好的指标, 在两种情况下都是按  $\chi^2$  缩放:

$$I_\chi \ell_\chi = \chi^2 I_o \ell_o \quad (3.170)$$

### F. 总磁场能

因磁体的总磁能是磁能密度在磁场所在的全部空间区域的积分, 以及磁能密度不变, 所以:  $E_{m\chi} = x^3 E_{mo}$

#### 演示例子

我们有一个如下参数的模型磁体:  $H_z(0, 0) = 1.53$  T;  $2a_1 = 80$  mm;  $2a_2 = 130$  mm;  $2b = 220$  mm; 总匝数  $N_o = 2976$ 。磁体自感 0.301 H, 在运行电流为 100 A 时产生的中心场为 1.53 T。下面我们考虑一个磁体, 尺寸扩大 10 倍, 空间因数保持不变。我们计算几个新磁体的参数。

**自感** 因为  $L_\chi = \mu_o a_\chi N_\chi^2 L(\alpha, \beta)$ , 1) 如果  $I_\chi = \chi I_o$ ,  $L_\chi = \chi L_o$ ; 或者 2) 如果  $I_\chi = I_o$ ,  $L_\chi = \chi^3 L_o$ 。于是: 1) 如果  $I_\chi = 100$  A, 有  $L_\chi \simeq 3.01$  H; 2) 如果  $I_\chi = 10$  A, 有  $L_\chi \simeq 301$  H。

计算  $\ell_o$ :

$$\begin{aligned}\ell_o &= N_o \frac{a_o(\alpha + 1)}{2} \\ &= (2976) \frac{(0.04)(1.625 + 1)}{2} \simeq 156 \text{ m}\end{aligned}$$

于是: 1) 如果  $I_x = 1000 \text{ A}$ ,  $\ell_x \simeq 1.56 \text{ km}$ ; 2) 如果  $I_x = 100 \text{ A}$ ,  $\ell_x \simeq 15.6 \text{ km}$ 。

### 3.9.22 讨论 3.11: 粒子加速器

电场 ( $\vec{E}$ ) 加速带电粒子的简单原理是粒子加速器的基础。Cockcroft-Walton (1928) 和 Van de Graaff (1930) 的早期及其是线性的: 沿一条直线以电势 ( $\int \vec{E} \cdot \vec{s}$ ) 加速粒子。线性加速器需要很大的势能才能产生高能量粒子。因此, 线性加速器需要大的电场  $\vec{E}$  或者长距离, 或两者兼有。斯坦福直线加速器 ( $\sim 20 \text{ GeV}$ ) 的距离为 2 英里 (3.2km)。

1930 年代, Lawrence 开发了一种圆形的回旋加速器。现代圆形加速器是 Lawrence 斯回旋加速器的变种。在圆形加速器中, 带电粒子每次回旋时都以适度的电势加速; 通过多次回旋, 可以将粒子加速到远远超过线性加速器可实现的能量水平。

圆形加速器的一个重要组件是一组用于产生磁场 (通常为垂直方向) 以使粒子沿圆周轨道运动的磁体。现代加速器使用双极磁体, 而 Lawrence 的首台 1.2 MeV 回旋加速器使用的是磁极片。

问题 3.12 将研究, 圆形加速器中的粒子能量  $E_p$  正比于回旋半径  $R_a$ 、粒子束速度和垂直磁场密度  $B_z$ 。CERN 的强子对撞机 (LHC) 产生的最新的粒子能量为 7 TeV, 它意味着机器半径将近 3 km! 作为对比, Lawrence 的首台回旋加速器的半径是  $\sim 0.1 \text{ m}$ 。如果 LHC 使用和 Lawrence 首台加速器一样的  $\sim 1 \text{ T}$  的磁场  $B_z$ , 那么半径需要增加  $\sim 3 \times 10^4$  仅能令  $E_p$  达到  $\sim 0.8 \text{ TeV}$ 。在 LHC 中, 通过增加磁场强度, 扩大了  $\sim 8$  倍半径, 实现了 7 TeV。如此大的磁场, 仅超导双极磁体可以实现。

### 3.9.23 问题 3.12: 旋转加速器加速质子

世界最大的对撞机 LHC 有  $\sim 1250$  个双极磁体, 每一个都有  $\sim 14 \text{ m}$  长, 在直径 56 mm 的空间内产生 8.3 T 的磁场。LHC 有两个相对运动的质子环束, 每一部分被加速到 7 TeV。

a) 椭圆形主环由两个半径为  $R_a = 2.8 \text{ km}$  的半圆组成，连接一个将近  $4.5 \text{ km}$  的直线部分。双极磁体占满了两个半圆部分。证明，双极磁场  $8.3 \text{ T}$  产生的 Lorentz 力  $\vec{F}_L$  平衡了  $7 \text{ TeV}$  质子在圆部分的向心力  $\vec{F}_{cp}$ 。假设质子速度等于光速， $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。

b) 证明  $7 \text{ TeV}$  的质子的速度接近光速。

### 问题 3.12 之解

a) 旋转质子的向心力  $\vec{F}_{cp}$  被 Lorentz 力  $\vec{F}_L$  平衡。因为  $F_{cp}$  总是指向径向朝外的，所以需要选择  $B_z$  的方向以保证  $F_L$  径向向心。两个力分别为：

$$\vec{F}_{cp} = \frac{M_p v^2}{R_a} \vec{i}_r \simeq \frac{M_p c^2}{R_a} \vec{i}_r = \frac{E_p}{R_a} \vec{i}_r \quad (\text{S12.1a})$$

$$\vec{F}_L = -qcB_z \vec{i}_r \quad (\text{S12.1b})$$

从  $\vec{F}_L + \vec{F}_{cp} = 0$  中解出  $R_a$ ，我们得到：

$$R_a = \frac{E_p}{qcB_z} \quad (\text{S12.2})$$

根据上式，我们有：

$$R_a = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})(7 \times 10^{12} \text{ eV})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(3 \times 10^8 \text{ m/s})(8.3 \text{ T})} \simeq 2.81 \times 10^3 \text{ m} \simeq 2.8 \text{ km}$$

这笔 LHC 的实际半径 (略超过  $4 \text{ km}$ ) 要小。注意到上面的计算假定了整个环都被双极磁体占满；实际上，双极磁体的使用率是  $\sim 60\%$ ——其余部分空间被四极磁体、探测磁体占据。沿着 LHC 环的平均双极场于是  $\sim 5 \text{ T}$ ，这样就会计算得到半径为  $\sim 4 \text{ km}$ 。当然，双极场  $B_z = 15 \text{ T}$  将使环半径减半。 $10 - 16 \text{ T}$  的超导双极磁体很容易造出来 [3.54–3.56]。

b) 质子质量  $M_p$ ，行进速度  $v$  与其静止速度有关：

$$M_p = \frac{M_{po}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{E_p}{c^2} \quad (\text{S12.3})$$

在上式中解出  $v/c$ ，有：

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{M_{po}^2 c^4}{E_p^2}} \quad (\text{S12.4})$$

因为  $v/c$  非常接近 1，方程 S12.4 可以近似为：

$$\frac{v}{c} \simeq 1 - \frac{M_p c^2 c^4}{2 E_p^2} \simeq 1 - 9 \times 10^{-9}$$

可见，质子速度相当接近光速了。

### 3.9.24 问题 3.13: 两线圈磁体

图 3.41 给出了一个由两个轴向对齐、完全相同的线圈 A 和 B 组成的磁体的剖面。两线圈的励磁极性相同。轴向场  $B_z$  沿水平方向。如问题 3.3 指出的, 反对称系统 (Maxwell 线圈) 在中点 ( $z = 0$ ) 产生线性的轴向场。对称系统的线圈间的轴向作用力是引力; 反对称系统配置下是大小相同的斥力。

两个绕组参数均为:  $2a_1 = 1.5$  m;  $2a_2 = 2.1$  m;  $2b = 0.1$  m;  $N = 8900$  和  $I = 65$  A。左侧线圈轴中心位于  $z = 0.5$  m, 右侧线圈位于  $z = -0.5$  m —— 两线圈的中心距为 1 m (3.5 节中的  $\rho$ )。水平的黑色条代表两个线圈之间的室温结构支撑件。图 3.42a 和 3.42b 分别给出了  $B_z(r, z)$  和  $B_r(r, z)$  在  $I = 65$  A 的图。注意, 这里的  $z = 0$  恰好与线圈轴向中点重合。

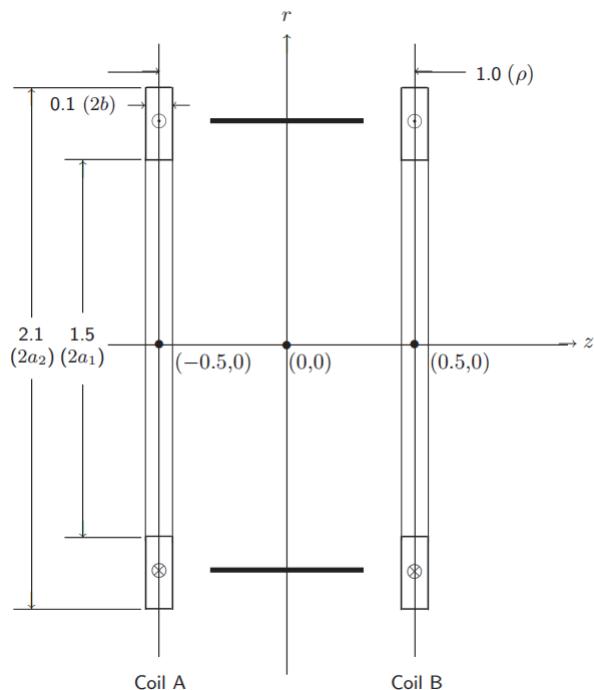
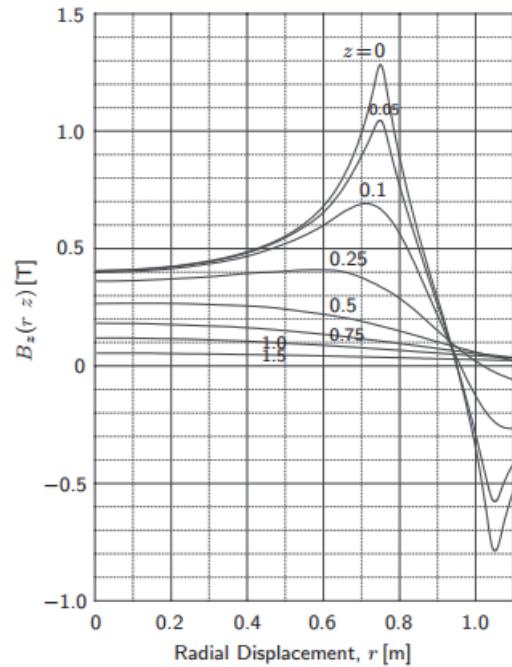
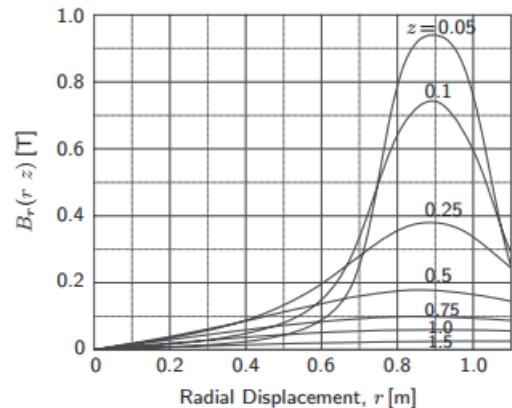


图 3.41: 有两个相同线圈 A 和 B 在相同极性励磁下组成的磁体的剖面, 尺寸以 m 为单位

- 计算  $I = 65$  A 时, 线圈 A 的总体电流密度。
- 计算线圈 A 绕组的总导体长度。
- 使用恰当的解析表达, 证明线圈 A 在  $I = 65$  A、线圈 B 不励磁时



(a)



(b)

图 3.42: 一个线圈未励磁, 另一个线圈在  $I = 65$  A 时的 (a)  $B_z(r, z)$  和 (b)  $B_r(r, z)$

的轴向中点处的  $B_z$  近似为 0.4T, 如图 3.42a 所示。

d) 使用图 3.14 中给出的螺管的  $L(\alpha, \beta)$  和方程 3.81, 计算线圈 A 的自感。某程序给出的数值是 216.8 H。

f) 定量的证明, 3.5.1 中研究过的线圈 A 上的轴向力  $F_{zA}(\rho)$  在线圈 B 以 65 A 励磁时是  $+z$  向的, 即线圈 A 和 B 之间的轴向力是引力。

g) 使用图 3.42a 和 3.42b 中合适的场数据, 计算上述引力的幅值: 两个线圈均以 65A 励磁。结果应该在  $2 \times 10^5$  N 的  $\pm 20\%$  以内。(某程序计算值为 -193 kN, 负号表示引力。)

h) 将每个线圈近似为“环”(如图 3.5), 使用方程 3.34 计算线圈 B 施于线圈 A 上的轴向力  $F_{zA}(\rho)$  使用  $K(k) = 2.1000, E(k) = 1.2000, k = 0.874157$ 。这里  $a_A = a_B = 0.9$  m,  $\rho = 1.0$  m。

i) 在  $\rho = 5$  m 时计算  $F_{zA}(\rho)$ 。

表 3.6 给出了这个两线圈系统的计算得到的互感 vs. 中心距数据,  $M_{AB}(\rho)$ 。

j) 证明, 系统存储的总能量  $E_m$  在运行电流 65 A、 $\rho = 1.0$  m 时, 近似为 1 MJ。使用  $L = 216.8$  H。

k) 在系统上应用方程 3.105b, 由  $M_{AB}(\rho)$  数据计算  $F_{zA}(\rho)$ 。

表 3.6

### 问题 3.13 之解

a) 根据 3.108a, 有:

$$\lambda J = \frac{NI}{2b(a_2 - a_1)} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(8900)(65 \text{ A})}{(1.5 \text{ m})} \left( \frac{0.336}{0.4} \right) = 0.4 \text{ T} \quad (3.108a)$$

b) 导体总长度  $\ell$  为:  $\ell = N\pi(a_2 + a_1) \simeq 50.3$  km。于是这个两线圈系统的总导体长度为  $\sim 100$  km。

c) 我们可以将其中的一个线圈近似为  $\alpha = 1.4$  的饼式线圈。通过应用 3.111f, 我们得到线圈 A 的轴向中心场  $B_{zA}$ :

$$B_{zA} \simeq B_z(0, 0) = \frac{\mu_o NI}{2a_1} \left( \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \right) = 0.4 \text{ T} \quad (3.111f)$$

d) 从图 3.14, 我们得到  $L(\alpha = 1.4, \beta = 0.067) \simeq 2.8$ 。根据方程 3.81, 有:

$$L = \mu_o a_1 N^2 \mathcal{L}(\alpha, \beta) = 2.9 \text{ H} \quad (3.81)$$

f) 图 3.42b 中的  $B_r(r, z)$  在  $z \geq 0$  时成立, 表明  $B_r(r, z)$  是正的, 沿半径向外。不过, 当线圈 B 产生的  $B_r(r, z)$  施于线圈 A 时, 因为线圈 A 相对于线圈 B 的轴向中点处于  $z < 0$ , 线圈 B 施于线圈 A 的  $B_r(r, z)$  是沿半径向内的。如果对图 3.41 中的线圈 A 的顶部绕组截面应用  $I\vec{i}_\theta \times -B_r(r, z)\vec{i}_r$ , 线圈 B 施于线圈 A 的轴向力是  $+z$  向的, 表明这个力是引力。

g)  $F_{zA}(\rho)$  是 Lorentz 力, 可由下式计算:

$$F_{zA}(\rho) \simeq (\text{平均绕组周长}) \times (NI) \times (B_r) = \pi(1.8)(8900 \times 65)(0.06) = 196 \text{ kN}$$

h) 线圈 B 施于线圈 A 的力  $F_{zA}(\rho)$  为:

$$\begin{aligned} F_{zA}(\rho) &= \frac{\mu_o}{2}(N_A I_A)(N_B I_B) \frac{\rho \sqrt{(a_A + a_B)^2 + \rho^2}}{(a_A - a_B)^2 + \rho^2} \\ &\quad \times k^2 K(k) + (k^2 - 2)[K(k) - E(k)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

式中  $K(k)$  和  $E(k)$  分别是第一类和第二类完全椭圆积分:

$$k^2 = \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2 + \rho^2} \quad (3.36)$$

这里, 我们有  $N_A = N_B = N = 8900; a_A = a_B = (a_1 + a_2)/2 = 0.9 \text{ m}; \rho = 1 \text{ m}$ :

$$k^2 = \frac{4(0.9)(0.9)}{(0.9 + 0.9)^2 + (1.0)^2} = 0.764151 \Rightarrow k = 0.874157$$

我们有  $K(k) = 2.100000$  和  $E(k) = 1.200000$ , 于是:

$$F_{zA}(1 \text{ m}) = \text{long numbers} \simeq -213.2 \text{ kN}$$

i) 在极限  $\rho^2 \gg (a_A + a_B)^2$  下, 方程 3.34 简化为:

$$F_{zA}(\rho) = \frac{3\mu_o}{2\pi} \left( \frac{\pi a_A^2 N_A I_A}{\rho^2} \right) \left( \frac{\pi a_B^2 N_B I_B}{\rho^2} \right) \quad (3.39c)$$

$\rho^2 = 25.0 \text{ m}^2$  以及  $(a_A + a_B)^2 = 3.24 \text{ m}^2$ , 可知  $\rho^2 \gg (a_A + a_B)^2$  是满足的。因为  $N_A = N_B = N = 8900, I_A = I_B = 65 \text{ A}, a_A = b_B = 0.9 \text{ m}$ , 方程 3.39c 成为:

$$F_{zA}(\rho) = \frac{3(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})}{2\pi} \left[ \frac{\pi(0.9)^2(8900)(65)}{(5)^2} \right]^2 = 2.08 \text{ kN}$$

一个 2 kN ( $\sim 200 \text{ kg}$ ) 的力仅大约相当于单个线圈重量的 13%。

j) 系统总磁能  $E_m$  可以由方程 3.92 给出:

$$E_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{12}I_1I_2 \quad (3.92)$$

已知  $L_1 = L_A = L_2 = L_B \equiv L = 216.8$  H,  $I_1 = I_A = I_2 = I_B \equiv I = 65$  A, 从表中可知  $M_{AB} \simeq 29.8$  H, 我们有:

$$E_m = LI^2 + M_{AB}I^2 = (L + M_{AB})I^2 = 1.04 \text{ MJ}$$

k) 式 3.105b 如下给出:

$$F_{zR}(\rho) = \frac{\partial E_{AB}}{\partial \rho} = I_A I_B \frac{\partial M_{AB}(\rho)}{\partial \rho} \quad (3.105b)$$

从表中可知,  $M_{AB}(\rho = 0.9 \text{ m}) = 34.873$  H 以及  $M_{AB}(\rho = 1.1 \text{ m}) = 25.650$  H。于是:

$$\frac{\partial M_{AB}(\rho)}{\partial \rho} \simeq \frac{(25.650 \text{ H} - 34.875 \text{ H})}{(1.1 \text{ m} - 0.9 \text{ m})} = -46.115 \text{ H/m} \quad (\text{S17.1})$$

将 S17.1 代入 3.105b, 并取  $I_A = I_B = I = 65$  A, 有:

$$F_{zR}(\rho) \simeq (65)^2(-46.115) = -194.8 \text{ kN}$$

毫不奇怪, 这个数值和程序计算的  $-193$  kN 很接近。

### 3.9.25 问题 3.14: 螺管中平面上的轴向力

本题我们使用 3.5 部分对  $2a_1 = 10$  cm;  $2a_2 = 14$  cm;  $2b = 25$  cm;  $NI = 1.5 \times 10^6$  A(见图 3.43a) 的一个螺管中推导出来的表达式。

- a) 尽管这个螺管 ( $\alpha = 1.4, \beta = 2.5$ ) 实际上是既不“薄壁”也不“长”, 用方程 3.111d 计算  $B_z(0,0)$ 。
- b) 将这个螺管视为“薄壁”, 应用方程 3.41a 计算轴向中平面力  $F_z(0)$ 。某程序计算结果是  $-187.8$  kN。使用  $2a = 10$  cm。
- c) 使用对“长”螺管有效的方程 3.41b, 计算  $F_z(0)$ 。选择螺管平均直径: 1)  $2a = 10$  cm; 2)  $2a = 12$  cm。
- d) 现在, 将螺管分为两个子螺管 A 和 B, 如图 3.43b 所示。子线圈具有相同的半径 1 cm, 同时  $2a_A = 10$  cm,  $2a_B = 12$  cm,  $NI = 0.75 \times 10^6$  A。计算  $B_z(0,0)$ 。

e) 应用方程 3.54 计算，并与某程序的计算值  $F_{zT}(0) = -187.8 \text{ kN}$  对比。

f) 应用对“长”螺管成立的方程 3.55 计算  $F_{zT}(0)$ 。

g) 在“薄壁”且“长”的、有均匀表面电流密度  $NI/2b$  的螺管的一半的整个表面应用  $\nabla \cdot B = 0$ 。需要考虑的表面是线圈的  $x-y$  平面上的  $z=0$  和  $z=b$  截面区域，分别为  $\pi a^2$ ；以及在  $r=a$  时，从  $z=0$  到  $z=b$  的圆柱表面区域， $2\pi ab$ 。

h) 对一个长螺管 ( $\beta \gg 1$ )，解释为什么在它的长度方向从中平面到近末端的大部分区域的轴向力是常数，并可由相应的中平面值给出。试着评估长螺管一半结构上  $z$  的位置，在该位置  $B_z$  开始从  $B_z(0,0)$  显著下降。

表 3.7 给出了部分完全椭圆积分的值。

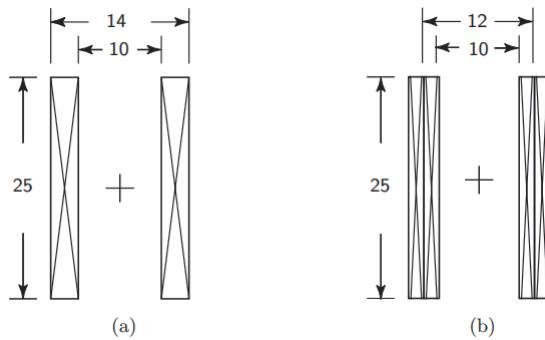


图 3.43: (a) 参数为  $2a_1 = 10 \text{ cm}; 2a_2 = 14 \text{ cm}; 2b = 25 \text{ cm}$  的螺管。(b) 螺管分为两个子螺管 A 和 B，参数为  $2a_A = 10 \text{ cm}; 2a_B = 12 \text{ cm}; 2b = 25 \text{ cm}$ 。

表 3.7

### 问题 3.14 之解

a) 应用 3.111d，我们有：

$$B_z(0,0) = \frac{\mu_o NI}{2b} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(1.5 \times 10^6 \text{ A})}{(0.25 \text{ m})} = 7.55 \text{ T} \quad (3.111d)$$

方程 3.109 对这个  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 2.5$  的螺管给出的值时  $B_z(0,0) = 6.8 \text{ T}$ 。可知方程 3.111d 的误差大约是 10%，考虑到它的简单性，这个结果不算太坏。

b) 再次给出 3.41a 式:

$$F_z(0) = -\frac{\mu_o}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right)^2 \{2b\sqrt{4a^2 + b^2}[K(k_b) - E(k_b)] - 2b\sqrt{4a^2 + 4b^2}[K(k_{2b}) - E(k_{2b})]\} \quad (3.41a)$$

式中的模为:

$$\begin{aligned} k_b^2 &= \frac{4a^2}{4a^2 + b^2} = \frac{4(5)^2}{4(5)^2 + (12.5)^2} \simeq 0.390244 \\ k_{2b}^2 &= \frac{4a^2}{4a^2 + (2b)^2} = \frac{4(5)^2}{4(5)^2 + (25)^2} \simeq 0.137931 \end{aligned}$$

使用表 3.7 中给出的  $K(k)$  和  $E(k)$  合适值:

$$F_z(0) = xxxxxxxx \simeq -157.8 \text{ kN}$$

上面这个值时某程序给出的值-187.8kN 的 84%。

c) 式 3.41b 如下给出:

$$F_z(0) \simeq -\frac{\mu_o}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right)^2 \pi a^2 \quad (3.41b)$$

将  $a = 5 \text{ cm}$  和  $a = 6 \text{ cm}$  代入, 有:

$$\begin{aligned} 1) \quad F_z(0) &\simeq XXXXXX = -177.7 \text{ kN} \\ 2) \quad F_z(0) &\simeq YYYYYY = -255.8 \text{ kN} \end{aligned}$$

方程 3.41b 在  $a = 5 \text{ cm}$  时相比于程序值低估了大约 5%; 在  $a = 6 \text{ cm}$  时高估了大约 36%。

d) 对每个子螺管应用方程 2.111d; 我们得到  $B_z(0, 0)$  不变。

$$B_z(0, 0) = B_{zA}(0, 0) + B_{zB}(0, 0)$$

e) 再次给出式 3.54:

$$\begin{aligned} F_{zT}(0) &= -\frac{\mu_o}{2} \left(\frac{NI}{4b}\right)^2 \times \\ &(2b\sqrt{4a_A^2 + b^2}[K(k_{bA}) - E(k_{bA})] - 2b\sqrt{4a_A^2 + 4b^2}[K(k_{2bA}) - E(k_{2bA})] \\ &+ 2b\sqrt{4a_B^2 + b^2}[K(k_{bB}) - E(k_{bB})] - 2b\sqrt{4a_B^2 + 4b^2}[K(k_{2bB}) - E(k_{2bB})] \\ &- \frac{4b}{\sqrt{a_T^2 + b^2}} \{(a_T^2 + b^2)[K(k_b) - E(k_b)] - \Upsilon(c^2, k_b)\} \\ &+ \frac{4b}{\sqrt{a_T^2 + 4b^2}} \{(a_T^2 + 4b^2)[K(k_{2b}) - E(k_{2b})] - \Upsilon(c^2, k_{2b})\}) \quad (3.54) \end{aligned}$$

式中的  $c^2$  和其他模为:

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2} \simeq 0.991736 \\ k_{b_A}^2 &= \frac{4a_A^2}{4a_A^2 + b^2} \simeq 0.390244 \\ k_{2b_A}^2 &= \frac{4a_A^2}{4a_A^2 + (2b)^2} \simeq 0.137931 \\ k_{b_B}^2 &= \frac{4a_B^2}{4a_B^2 + b^2} \simeq 0.479600 \\ k_{2b_B}^2 &= \frac{4a_B^2}{4a_B^2 + (2b)^2} \simeq 0.187256 \\ k_b^2 &= \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2 + b^2} \simeq 0.432822 \Rightarrow k_b \simeq 0.657892 \\ k_{2b}^2 &= \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2 + (2b)^2} \simeq 0.160858 \Rightarrow k_b \simeq 0.401071 \end{aligned}$$

将这些值和其他必要的值代入方程 3.54, 有:

$$F_z(0) = XXXXX \simeq -168.9 \text{ kN}$$

计算值仍然相比程序值 ( $-187.8 \text{ kN}$ ) 有所低估, 但是现在它是 90%。尽管方程 3.54 给出的值相比 3.41a 要准确, 但它相当繁琐, 并不推荐用来作为快速估算力的方法。很明显, 将螺管分为两部分, 应用方程 3.54 是口袋计算器手算的极限了。方程 3.41b 在  $a = 5 \text{ cm}$  时的良好结果更像是巧合, 而不是一般规律。

f) 在  $a_A = 5 \text{ cm}$  和  $a_B = 6 \text{ cm}$  时应用 3.55, 有:

$$F_z(0) \simeq XXXXXX = -187.3 \text{ kN}$$

方程 3.55 相比于方程 3.54 更为简单, 同样给出了至少对这个特殊的例子而言比 3.54 更好的结果。

g) 施加于  $z \geq 0$  部分所有匝上载流微元  $dI$  的力微元为:

$$dF_z(z \geq 0) = -2\pi a B_r(z) dI$$

符号表示这个力是指向中平面的。做替换  $dI = (NI/2b)dz$  并在螺管的整个半区从  $z = 0$  到  $z = b$  积分:

$$F_z(0) = - \int_0^b 2\pi a B_r(r) \frac{NI}{2} dz = - \frac{NI}{2b} \int_0^b 2\pi a B_r(z) dz \quad (\text{S14.1})$$

积分  $\int_0^b 2\pi a B_r(z) dz$  是离开这半个螺管的总径向磁通。根据  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , 这等于从中平面 ( $z = 0$ ) 圆面区域进入这一半螺管的总轴向磁通与在  $z = b$  处圆面区域离开的磁通之差, 也即:

$$\int_0^b 2\pi a B_r(z) dz = \pi a^2 [B_z(0) - B_z(b)] \quad (\text{S14.2})$$

方程 3.41b 的有效性是在假定螺管是“长”的 ( $k^2 \ll 1$  或者  $\beta \gg 1$ ) 而得到的。 $B_z(0,0), B_z(0,b)$  可以假定在圆平面区域  $\pi a^2$  上保持不变。对于长螺管, 同时还有  $B_z(0,b) \simeq 0.5 B_z(0,0)$ (讨论 3.4), 于是 S14.2 可如下给出:

$$\int_0^b 2\pi a B_r(z) dz \simeq \frac{\pi a^2}{2} B_z(0) \quad (\text{S14.3})$$

对长螺管,  $B_z(0,0) = \mu_0 NI / 2b$  (方程 3.111), 于是:

$$\int_0^b 2\pi a B_r(z) dz \simeq \frac{\pi a^2}{2} \times \frac{\mu_0 NI}{2b} \quad (\text{S14.4})$$

联立 S14.1 和 S14.4, 有:

$$F_z(0) \simeq -\frac{NI}{2b} \times \frac{\pi a^2}{2} \times \frac{\mu_0 NI}{2b} \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{NI}{2B}\right)^2 \pi a^2 \quad (3.41b)$$

h) 对一个“长”螺管,  $B_z(z)$  不随  $z$  变化。 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  要求径向分量  $B_r(z)$  总是零。因为  $F_z(z)$  是由  $B_r(z)$  产生的 (方程 S14.1),  $dF_z(z) = 0$  在线圈长度的大部分成立。从而  $F_z(z)$  在  $z = b$  范围内保持常数, 到了  $z = b$ , 磁通线开始偏离磁场轴线, 产生了  $B_r(z)$ , 从而产生  $F_z(z)$ 。对于  $4b^2 \gg 4a^2$  和  $(b+z)^2 \gg 4a^2$ , 可以证明方程 3.40 中括号内的 2 阶和 3 阶项抵消了, 仅剩一阶项, 如下:

$$F_z(z \simeq b) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right)^2 \{(b-z)\sqrt{4a^2 + (b-z)^2} [K(k_{b-}) - E(k_{b-})]\} \quad (\text{S14.5})$$

因为  $z$  接近  $b$ ,  $k_{b-}^2 = 4a^2/[4a^2 + (b-z)^2]$  不满足  $\ll 1$ 。于是,  $K(k_{b-}) - E(k_{b-})$  不能由  $k_{b-}^2$  近似。我们简单的猜想  $z$  在  $b$  附近的位置, 此处  $F_z(z \sim b)$  与方程 3.41b 给出的近似。如果我们猜  $z = b - 2a$ , 然后:

$$F_z(z = b - 2a) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right)^2 \{2a\sqrt{4a^2 + 4a^2} [K(k_{b-}) - E(k_{b-})]\} \quad (\text{S14.6})$$

式中,  $k_{b-}^2 = 4a^2/8a^2 = 0.5$ , 可由表 3.1 查到,  $K(k_{b-} = 0.7071) = 1.8541$ ,  $E(k_{b-}) = 1.3506$ 。将这些值代入 S14.6, 有:

$$F_z(z = b - 2a) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right)^2 4a^2 \sqrt{2}(0.5035) = -\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{NI}{2b}\right)^2 2.85a^2 \quad (\text{S14.7})$$

因为 2.85 大约是  $\pi$  的 90%， $F_z(z)$  实际上是长螺管两端向内大约  $2a$  处的中平面力。这个在长螺管轴向大部分区域的  $F_z(z)$  不变性也暗示了  $B_z(z)$  在轴向的同样长度区间内 ( $2b - 4a$ ) 差不多保持  $B_z(0, 0)$ 。

### 3.9.26 问题 3.15：嵌套两线圈磁体的中平面上的力

本问题中，我们计算由两个嵌套线圈组成的磁体中螺管 A 和螺管 B 的轴向压缩力，如图 3.44 所示。两个螺管的轴向场都是指向  $z$  向的。线圈参数如下： $2a_A = 10 \text{ cm}$ ;  $2b_A = 50 \text{ cm}$ ;  $N_A I_A = 3 \times 10^6 \text{ A}$ ;  $2a_B = 14 \text{ cm}$ ;  $2b_B = 100 \text{ cm}$ ;  $N_B I_B = 8 \times 10^6 \text{ A}$ 。各线圈的径向绕组厚度均为 1 cm。

- a) 视各螺管为“薄壁”( $\alpha = 1$ ) 和“长”( $\beta \gg 1$ )，计算各线圈产生的中心场  $B_{zA}(0, 0)$  和  $B_{zB}(0, 0)$ 。证明，这个嵌套线圈磁体的中心场是  $\sim 17.5 \text{ T}$  (准确值为  $17.31 \text{ T}$ )。
- b) 使用方程 3.57b，计算螺管 A 承受的总的中平面轴向力  $F_{zA}(0)$ 。某程序给出  $F_{zA}(0) = -200.9 \text{ kN}$ 。
- c) 使用方程 3.57a，再次计算  $F_{zA}(0)$ 。计算结果值应该比 b) 得到的更接近-200.9。
- d) 使用方程 3.59a，计算螺管 B 承受的总的中平面轴向力  $F_{zB}(0)$ 。某程序给出  $F_{zB}(0) = -1207.5 \text{ kN}$ 。
- e) 解释为什么螺管 A 绕组内的最大场  $B_{TA} = \sqrt{B_{zA}^2 + B_{rA}^2}$  最可能出现在  $r = a_A$  和  $z = 0$ 。
- f) 解释为什么螺管 B 绕组内的最大场  $B_{TB} = \sqrt{B_{zB}^2 + B_{rB}^2}$  不会出现，甚至也不会靠近  $z = 0$ 。那它可能出现在什么位置呢？

表 3.8 给出了部分  $\prod(c^2, k)$  值。

表 3.8

### 问题 3.15 之解

- a) 根据  $B_z(0, 0) = \mu_0 H_z(0, 0)$  以及方程 3.111d，我们有：

$$B_{zA}(0, 0) = XXX \simeq 7.5 \text{ T}$$

$$B_{zb}(0, 0) = XXX \simeq 10.0 \text{ T}$$

$$B_z(0, 0) = XXX \simeq 17.5 \text{ T}$$

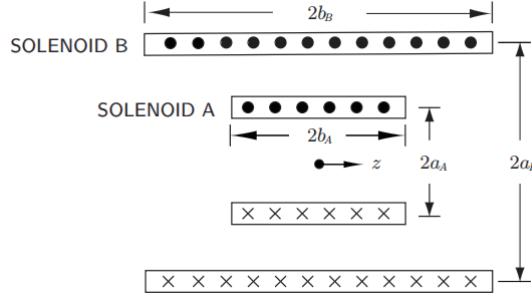


图 3.44: 由两个“薄壁”( $\alpha = 1$ )线圈嵌套而成的两线圈磁体示意图。螺管 A 有  $2a_A = 10$  cm;  $2b_A = 50$  cm。螺管 B 有  $2a_B = 14$  cm;  $2b_B = 100$  cm。

如问题中给出的, 准确的中心场值为 17.32 T。

b) 式 3.57b 由下式给出:

$$F_{zA}(0) \simeq F_{zAA}(0) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right)^2 \pi a_A^2 \quad (3.57b)$$

代入合适的值, 我们有:

$$F_{zA} \simeq -177.7 \text{ kN}$$

可见, 方程 3.57b 的结果是程序计算值的 88%; 两者的区别的部分原因是方程 3.57b 没有涵盖  $F_{zAB}(0)$  的贡献。

c) 式 3.57a 由下式给出:

$$F_{zA}(0) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left\{ \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right)^2 \pi a_A^2 + \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \times (a_A - a_B)^2 [\Pi(c^2, k_D) + \Pi(c^2, k_r) - 2\Pi(c^2, k_B)] \right\} \quad (3.57a)$$

式中,

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{4a_A a_B}{(a_A + a_B)^2} = 0.972222 \\ k_B^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_B^2} = 0.052950 \Rightarrow k_B \simeq 0.230109 \\ k_D^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_D^2} = 0.182055 \Rightarrow k_D \simeq 0.426679 \\ k_T^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_T^2} = 0.024268 \Rightarrow k_T \simeq 0.155781 \end{aligned}$$

向方程 3.57a 中代入必要的值:

$$F_{zA} \simeq -183.7 \text{ kN}$$

这个值是  $-200.9 \text{ kN}$  的 91%; 如我们所料, 相对于 b) 有所提升, 尽管不足以抵消增加的复杂性。

d) 式 3.59a 由下式给出:

$$F_{zA}(0) \simeq -\frac{\mu_0}{2} \left\{ \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right)^2 \pi a_B^2 + \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) [\pi(a_A^2 + a_B^2) - (a_A - a_B)^2 [2 \prod(c^2, k_A) + \prod(c^2, k_D) - \prod(c^2, k_T)]] \right\} \quad (3.59a)$$

式中,  $c^2, k_D^2, k_T^2$  已在上面给出; 本例中, 因为  $b_A = b_D, k_A^2 = k_D^2$ , 有:

$$F_{zB} \simeq -1063.4 \text{ kN}$$

这是程序值的 88%。

e) 因为  $(2b_B)^2 \gg (2b_A)^2$ , 在螺管 A 的室温孔内, 螺管 B 产生的磁场和螺管 A 产生的磁场都是均匀的且仅有轴向。所以, 螺管 A 内部的最大场, 大约 17.5 T, 出现在  $z = 0$  处的最内侧半径上。根据同一个程序的计算结果, 最大场 17.32 T 出现在 ( $r = 5 \text{ cm}, z = 0$ )。

f) 再次, 因为  $(2b_B)^2 \gg (2b_A)^2$ , the radial field component of Solenoid A impinges on Solenoid B away from its center point where the axial field of Solenoid B is still essentially the same as that at its midplane. 因此, 很可能螺管 B 的最大场可能超过 10.0 T, 螺管 B 的中平面场 (程序给出为 9.94 T), 出现在轴向距离中心  $\sim \pm b_A$  的地方。程序给出的螺管 B 中的最大场是 9.96 T ( $B_r = \pm 1.70 \text{ T}; B_z = 9.81 \text{ T}$ ), 出现在 ( $r = 7 \text{ cm}, z = \pm 25 \text{ cm}$ )。注意,  $b_A = 25 \text{ cm}$ 。

### 3.9.27 问题 3.16: 环氧浸渍螺管的应力

本例简单的近似处理环氧浸渍磁体的应力计算。我们使用一个 FBNML 制造于 1970 年代的 500-MHz (12 T) NMR 超导磁体作为实例 [3.57]。该磁体有一个高场内插磁体, 一个主线圈和多个矫正补偿线圈。主磁体绕组的内半径  $a_1$  为 72.6 mm, 绕组的外半径 ( $a_2$ ) 为 102 mm, 绕组长 (2b) 是 488 mm。主线圈由 Nb-Ti 导体绕成; 铜和 NiTi 的体积比是 2.1。这种复合导线的直径是裸线 0.63 mm ( $D_{cd}$ ), 绝缘后 0.71 mm ( $D_{ov}$ )。绕组是紧凑的六边

形配置。导线之间的间隙填充了环氧树脂。图 3.45 给出了该配置下的三条相邻导线。

当所有线圈都励磁后, 磁场  $B_z$  的轴向 ( $z$ ) 分量在主线圈范围内随径向距离  $r$  线性减小。在主线圈的中平面 ( $z = 0$ ) 上, 当  $r = a_1$  时  $B_z = 8.22 \text{ T}$ , 当  $r = a_2$  时  $B_z = -0.21 \text{ T}$ 。 $B_z$  的线性降低在  $z = 0$  是相当准确。主线圈的总运行电流密度为  $248 \text{ MA/m}^2$ 。

承受体力负荷的各向异性圆柱的解析方法用来计算主线圈的中平面的应力。内半径和外半径上的环箍应力计算得到的分别为  $105 \text{ MPa}$  和  $65 \text{ MPa}$ ; 环箍力大致上是从内半径到外半径线性减小。

- 从简单的力平衡考虑, 证明这些应力值与负荷条件是一致的。
- 假定绕组模式是紧绕(线挨线)六边形配置, 计算 NbTi, 铜, 有机材料(环氧 + 绝缘)三种材料的面积占比。
- 基于上述面积占比和三种材料在  $4.2 \text{ K}$  时的近似杨氏模量 ( $E_{sc} = 85 \text{ GPa}$ ;  $E_{cu} = 100 \text{ GPa}$ ;  $E_{in} = 30 \text{ GPa}$ ), 计算绕组最内层的 NbTi 和铜的环箍力。

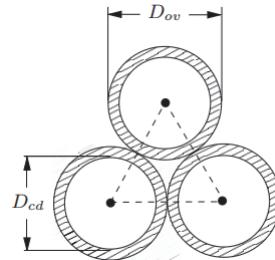


图 3.45: 紧绕六边形配置下的三根相邻导线。

### 问题 3.16 之解

- 绕组中的平均环箍力为:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_i + \sigma_o}{2} = \frac{105 \text{ MPa} + 65 \text{ MPa}}{2} = 85 \text{ MPa} \quad (\text{S16.1})$$

平均绕组半径  $\tilde{R} = (a_1 + a_2)/2 = 87.3 \text{ mm}$ ; 平均磁场  $\tilde{B}_z = (B_i + B_o)/2 = 4.0 \text{ T}$ 。于是, 绕组中的平均环箍力为:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{R}(\lambda J)\tilde{B}_z = (87.3 \times 10^{-3} \text{ m})(248 \times 10^6 \text{ A/m}^2)(4.0 \text{ T}) = 86.6 \text{ MPa} \quad (\text{S16.2})$$

这和上文(方程 S16.1)计算的  $\bar{\sigma} = (\sigma_i + \sigma_o)/2$  几乎一致。

b) 看图 3.45 中由虚线连城的三角形区域  $A_{tr}$ , 它可由总体导体直径定义:  $A_{tr} = \sqrt{3}D_{ov}^2/4$ 。三角形内的导体面积  $A_{cd} = \pi D_{cd}^2/8$ , 其中  $2.1/3.1$  是铜的面积  $A_{cu}$ ,  $1/3.1$  是 NbTi 的面积  $A_{sc}$ 。环氧和绝缘的面积  $A_{in} = A_{tr} - A_{cd}$ 。于是:

$$f_{cu} = \frac{A_{cu}}{A_{ir}} = \frac{\frac{2.1}{3.1} \frac{\pi D_{cd}^2}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4} D_{ov}^2} = \frac{(2.1)(\pi)(4)(0.63 \text{ mm})^2}{(3.1)(\sqrt{3})(8)(0.71 \text{ mm})^2} = 0.484 \quad (\text{S16.3a})$$

$$f_{sc} = \frac{A_{sc}}{A_{tr}} = \frac{1}{2.1} \frac{A_{cu}}{A_{tr}} = 0.230 \quad (\text{S16.3b})$$

$$f_{in} = \frac{A_{in}}{A_{tr}} = 1 - \frac{A_{cu} + A_{sc}}{A_{tr}} = 1 - 0.484 - 0.230 = 0.286 \quad (\text{S16.3c})$$

c) 复合材料的杨氏模量  $\tilde{E}$  由平行混合法则给出:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= f_{cu} E_{cu} + f_{sc} E_{sc} + f_{in} E_{in} \\ &= (0.48)(100 \text{ GPa}) + (0.23)(85 \text{ GPa}) + (0.29)(30 \text{ GPa}) \simeq 76 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (\text{S16.4})$$

我们可以计算绕组各组分最内侧半径处的应力:

$$\sigma_{cu} = \sigma_i \frac{E_{cu}}{\tilde{E}} = (105 \text{ MPa}) \frac{100 \text{ GPa}}{76 \text{ GPa}} \simeq 137 \text{ MPa} \quad (\text{S16.5a})$$

$$\sigma_{sc} = \sigma_i \frac{E_{sc}}{\tilde{E}} = (105 \text{ MPa}) \frac{85 \text{ GPa}}{76 \text{ GPa}} \simeq 117 \text{ MPa} \quad (\text{S16.5b})$$

$$\sigma_{in} = \sigma_i \frac{E_{in}}{\tilde{E}} = (105 \text{ MPa}) \frac{30 \text{ GPa}}{76 \text{ GPa}} \simeq 41 \text{ MPa} \quad (\text{S16.5c})$$

这些值都忽略了残余应力, 而实际上这个力可能很大。

### 3.9.28 问题 3.17: HTS 磁体中的应力和轴向力

这里我们演示对 1.75-T (75 MHz) 高温超导内插螺管磁体(由 48 个双饼线圈堆叠组成)的应力分析 [3.58]。每一个双饼都是由高强度 HTS 带材绕成的。HTS 内插磁体, 运行电流 86.7 A, 与一个 14.1-T (600 MHz) 低温超导背景 NMR 磁体共同组成了 675 MHz LTS/HTS NMR 磁体——以后内插磁体将运行电流提高到 115.95 A 以实现组合磁场 16.26 T (692.2 MHz) [3.59]。表 3.9 给出了内插磁体和 HTS 带材 (Bi2223/Ag 和两层不锈钢层复合材料) 的关键参数。本例使用的混合法则基于银和不锈钢的机械性能。表中给出的是双饼线圈的轴向场在中平面外侧的数值  $B_z$  和  $B_r$ , 这里有最大的应力和应变。

### 应力应变方程

螺管绕组的径向应力  $\sigma_r(r, z)$ ; 环向应力  $\sigma_\theta(r, z)$ ; 轴向应力  $\sigma_z(r, z)$ ; 剪切应力  $\tau_{rz}$  满足的平衡方程已有 3.62 给出。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\lambda J B_z(r, z) \quad (3.62a)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\lambda J B_r(r, z) \quad (3.62b)$$

边界条件为:  $\sigma_r(r = a_1, z) = 0; \sigma_r(a_2, z) = 0; \sigma_z(r, z = \pm b) = 0; \tau_{rz}(r, \pm b) = 0; \tau_{rz}(a_2, \pm b) = 0$ , HTS 复合材料可以视为正交各向异性的, 可以使用 Hook 定律。当不考虑热应变时, 有:

$$\epsilon_r = \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{v_{rh}}{E_h} \sigma_\theta - \frac{v_{rz}}{E_z} \sigma_z \quad (3.171a)$$

$$\epsilon_\theta = -\frac{v_{hr}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_h} \sigma_\theta - \frac{v_{hz}}{E_z} \sigma_z \quad (3.171b)$$

$$\epsilon_z = -\frac{v_{zr}}{E_r} \sigma_r - \frac{v_{zh}}{E_h} \sigma_\theta + \frac{1}{E_z} \sigma_z \quad (3.171c)$$

$$(3.171d)$$

式中,  $v_{\xi\eta}$  是给定  $\epsilon_\xi$  和  $\sigma_\eta$  的 Poisson 比。

**表格 3.9**

**表格 3.10**

表 3.10 给出了一个饼的忠平面上最内、中点、最外三个点处的应力和环箍应变的数值 [3.32]。中平面轴向力是  $-16$  kN。注意到, 最大应力出现在绕组最内侧 ( $a_1 = 39.10$  mm)。银的最大组合应力, 即 Tresca 应力 ( $\sigma_T = \sigma_\theta - \sigma_z$ ) 是  $56.4$  MPa, 这比允许应力 ( $\sigma_{allow} = 2\sigma/3(0.2\%)$ ) 要小: 银在  $77K$  时的允许应力为  $\sigma_{allow} \simeq 120$  MPa。

通过解方程 3.62 和 3.171 可以得到应力和应变。但是, 3.5 部分推导的方程可以用来估计中平面的轴向力。如上面讨论 3.5 指出的, HTS 磁体在它的中平面上的轴向力计算数值为  $-16.2$  kN (即压缩力), 来自 HTS 磁体磁场以及 HTS 和 LTS 磁体的相互作用。此处, 我们计算 HTS 磁体的仅由自身磁场贡献的中平面力的近似值。上面的分析给出的数值是  $-8.6$  kN [3.32]。

- a) 将 HTS 磁体视为“薄壁”的, 使用方程 3.41a 计算  $F_z(0)$ 。选择  $a = 39.1$  mm,  $b = 203.3$  mm,  $NI = 5.91 \times 10^6$  A。
- b) 使用方程 3.41b 计算  $F_z(0)$ 。分两种情况: 1) 取 HTS 磁体的  $a_1$ ,  $a = 39.1$  mm; 2) HTS 磁体的绕组平均半, 径  $a = 51.2$  mm。

c) 将 HTS 磁体视为两个“薄壁”且“长”的子螺管 A 和 B, 两者具有相同的绕组厚度。使用方程 3.55 计算  $F_{zT}(0)$ 。取  $a_A = 39.1$  mm,  $a_B = 51.2$  mm。

d) 围绕 HTS 磁体的是一个 14.1 T 的 LTS 嵌套磁体。将这个 LTS 磁体建模为薄壁螺管, 参数为:  $a_B = 191.3$  mm;  $b_B = 337.5$  mm;  $N_B I_B = 7.535$  MA; HTS 内插磁体为薄壁螺管, 参数为:  $a_A = 51.2$  mm;  $b_A = 203.3$  mm;  $N_A I_A = 0.591$  MA。使用方程 3.57a, 计算 HTS 内插磁体的总平面轴向力  $F_{zA}(0)$ 。这个值是 -16.2 kN。解释为什么方程 3.57a 没有给出正确的值。

e) 两个磁体采用相同的模型, 使用方程 3.60 来计算当 HTS 内插磁体偏心 5 mm 后其上承受的轴向恢复力。某程序给出的数值是 -2.1 kN。

下面的表 3.11-3.14 给出了需要的椭圆积分值。

### 问题 3.17 之解

表 3.11

a) 我们得到 3.41a:

$$F_z(0) = -\frac{\mu_o}{2} \left( \frac{NI}{2b} \right)^2 \left\{ 2b\sqrt{4a^2 + b^2} [K(k_b) - E(k_b)] - 2b\sqrt{4a^2 + 4b^2} [K(k_{2b}) - E(k_{2b})] \right\} \quad (3.41a)$$

式中,  $k_b, k_{2b}$  是由  $a$  和  $b$  决定的模量。本例下,  $a = 39.1$  mm,  $b = 203.3$  mm, 我们有:

$$k_b^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + b^2} = 0.128888$$

$$k_{2b}^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + (2b)^2} = 0.035670$$

所需的完全椭圆积分参数见表 3.11。如果应用方程 3.38c 到  $k^6$  项, 我们可以在  $k^2 \ll 1$  条件下计算  $K(k) - E(k)$ :

$$K(k_{2b}) - E(k_{2b}) \simeq XXXX = 0.106515$$

这大致上和表 3.11 中的计算值  $K(k) - E(k) = 0.106557$  是一致的。

代入  $NI = 0.591 \times 10^6 A$  和其他值到方程 3.41a, 有:

$$F_z(0) = XXXXXX = -6.2 \text{ kN}$$

这个计算值相比程序值低估了 28%。

表 3.12

b) 方程 3.41b 得到:

$$\begin{aligned} F_z(0) &\simeq -\frac{\mu_o}{2}\left(\frac{NI}{2b}\right)^2\pi a^2 \\ &\simeq -\frac{(4\pi \times 10^{-7}H/m)}{2}\left[\frac{(5.91 \times 10^5 A)}{0.4066m}\right]^2\pi(0.0391m)^2 \quad (3.41b) \\ &= -6.4 \text{ kN} \end{aligned}$$

这是程序值的 74%。用平均半径 51.2 mm 替代 39.1 mm 得到的力为 10.9 kN, 比程序值大 27%。

c) 如果磁体建模为两个“薄壁”且“长”的螺管, 应用方程 3.55:

$$F_{zT}(0) \simeq -\mu_o\left(\frac{NI}{4b}\right)^2\pi(a_A^2 + a_B^2)1 - \frac{(a_A - a_B)^2}{\pi(a_A^2 + a_B^2)}[2\prod(c^2, k_b) - \prod(c^2, k_{2b})] \quad (3.55)$$

对模量  $k_b, k_{2b}, c^2$ , 已知  $a_T = a_A + a_B, a_A = 39.1 \text{ mm}, a_B = 51.2 \text{ mm}, b = 203.3 \text{ mm}, a_T = 90.3 \text{ mm}$ 。有:

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2} = 0.982045 \\ k_b^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b^2} = 0.161820 \Rightarrow k_b = 0.402269 \\ k_{2b}^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + 4b^2} = 0.046160 \Rightarrow k_{2b} = 0.214848 \end{aligned}$$

于是:

$$F_z(0) = -7.4 \text{ kN}$$

相比于程序值, 低估了 15%。

表 3.13

d) 式 3.57a 下式给出:

$$\begin{aligned} F_{zA}(0) &\simeq -\frac{\mu_o}{2}\left\{ \left(\frac{N_A I_A}{2b_A}\right)^2\pi a_A^2 + \left(\frac{N_B I_B}{2b_B}\right)\left(\frac{N_A I_A}{2b_A}\right) \times \right. \\ &\quad \left. (a_A - a_B)^2[\prod(c^2, k_D) + \prod(c^2, k_T) - 2\prod(c^2, k_B)] \right\} \quad (3.57a) \end{aligned}$$

不同的参数为:  $a_T = a_A + a_B = 242.5 \text{ mm}; b_T = b_A + b_B = 540.8 \text{ mm}; b_D =$

$b_A - b_B = -134.2 \text{ mm}$ ; 以及:

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2} = 0.666266 \\ k_D^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_D^2} = 0.510028 \Rightarrow k_D = 0.0.714162 \\ k_T^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_T^2} = 0.111533 \Rightarrow k_{2b} = 0.333965 \\ k_B^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + b_B^2} = 0.226841 \Rightarrow k_B = 0.476278 \end{aligned}$$

将这些值代入方程 3.57a, 有:

$$F_{zA}(0) \simeq XXXXX = -43.3 \text{ kN}$$

这是程序值 16.2 kN 的 2.7 倍。主要的错误来自方程 3.57a 的近似涉及到了相互作用力  $F_{zAB}$ 。为了让方程 3.57a 可用, 正如在推导时指出的, 条件  $b_A^2 \gg 4a_A^2, b_B^2 \gg a_T^2, b_D^2 \gg a_T^2$  必须要满足。在这个特殊的粒子中, 我们有  $b_A^2/4a_T^2 = 0.176; b_B^2/a_T^2 = 1.94; b_D^2/a_T^2 = 0.306$ , 也就是说, 没有一个条件满足。

表 3.14

e) 式 3.60 由下式给出:

$$\begin{aligned} F_{zR}(\rho) = & -\frac{\mu_o}{2} \left( \frac{N_A I_A}{2b_A} \right) \left( \frac{N_B I_B}{2b_B} \right) \times \\ & \left( \frac{b_T - \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_T - \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (b_T - \rho)^2] [K(k_{T-}) - E(k_{T-})] - \Upsilon(C^2, K_{T-}) \} \right. \\ & + \frac{b_D + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_D + \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (b_D + \rho)^2] [K(k_{D+}) - E(k_{D+})] - \Upsilon(C^2, K_{D+}) \} \\ & - \frac{b_T + \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_T + \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (b_T + \rho)^2] [K(k_{T+}) - E(k_{T+})] - \Upsilon(c^2, k_{T+}) \} \\ & \left. - \frac{b_D - \rho}{\sqrt{a_T^2 + (b_D - \rho)^2}} \{ [a_T^2 + (b_D - \rho)^2] [K(k_{D-}) - E(k_{D-})] - \Upsilon(c^2, k_{D-}) \} \right) \end{aligned}$$

不同的参数为:  $a_T = a_A + a_B = 242.5 \text{ mm}; b_T = b_A + b_B = 540.8 \text{ mm}; b_D =$

$b_A - b_B = -134.2 \text{ mm}$ ; 以及

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2} = 0.666266 \\ k_{T+}^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_T + \rho)^2} = 0.109834 \Rightarrow k_{T+} = 0.331412 \\ k_{T-}^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_T - \rho)^2} = 0.0113269 \Rightarrow k_{T-} = 0.336554 \\ k_{D+}^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_D + \rho)^2} = 0.0518925 \Rightarrow k_{D+} = 0.720364 \\ k_{D-}^2 &= \frac{4a_A a_B}{a_T^2 + (b_D - \rho)^2} = 0.501110 \Rightarrow k_{D-} = 0.707891 \end{aligned}$$

表 3.15

应用表 3.15 中的数值到方程 3.60, 我们计算:

$$F_{zR}(\rho) = -2.2 \text{ kN}$$

相比程序值 (2.1 kN), 这个计算值高估了大约 4%; 负号表示这个力是恢复力。磁体间的“弹性常数”大约 400 kN/m。

紧绕六边形绕组线圈的半径公式:

$$a_2 - a_1 = [1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(N_\ell - 1)]D_{ov} \quad (3.172)$$

### 3.9.29 讨论 3.12: 铁球上的磁力

出于安全考虑, 将铁磁物体远离大型磁体放置时很重要的。举 45T 混合磁体为例, 我们在这里推导“远离”磁体的铁球(图 3.46)受到的磁力。螺管的边缘场(远场)已在问题 311 论及, 可由双极场给出:

$$\vec{H}_f = H_0 \left( \frac{R_e}{r} \right)^3 (\cos \theta \vec{i}_r + \frac{1}{2} \sin \theta \vec{i}_\theta) \quad (3.163)$$

当一个磁性物体, 比如铁球, 处于空间变化的磁场中时, 它会受到一个磁场力  $\vec{f}_m$ :

$$\vec{f}_m(r, \theta) = \nabla e_m \quad (3.173)$$

式中,  $\nabla$  是球坐标下的梯度算符,  $e_m$  是铁球因磁化而存储的磁能密度。对于一个  $\mu/\mu_0 \gg 1$  的铁磁球, 球内的磁场  $\vec{B}_{sp}$  是外加“均匀”磁场的三倍:  $\vec{B}_{sp} \simeq 3\mu_0 \vec{H}_f = 3\vec{B}_f$  (问题 2.1)。对于一个直径远小于其到磁体中心的距离的球,  $\vec{B}_f$  可以认为在球上各处是一致的:

$$e_m = \frac{\vec{B}_{sp} \cdot \vec{B}_f}{2\mu_o} = \frac{3|\vec{B}_f|^2}{2\mu_o} \quad (3.174)$$

当铁球在磁化  $M_{sa}$  下饱和时, 它的磁场近似为  $\vec{B}_{sa} (= \mu_0)M_{sa}$ , 该值是一个常数且与  $\vec{B}_f$  同向。磁能密度于是可以写为:

$$e_{ms} \simeq \frac{\vec{B}_{sa} \cdot \vec{B}_f}{2\mu_0} \quad (3.175)$$

在方程 3.174 和 3.175 中, 我们假定在计算能量密度时边缘场是均匀的, 但是在计算力密度时是不均匀的。

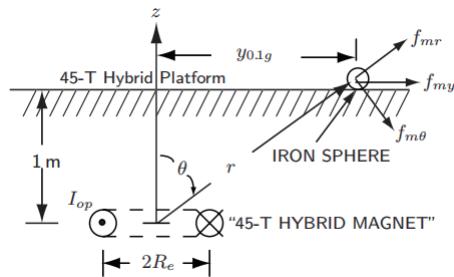


图 3.46: 处于 45T 混合磁体平台中的铁球。

### A. 不饱和球上的力

为了推导不饱和铁球上的  $\vec{f}_m(r, \theta)$  表达式, 我们首先从方程 3.163 中计算  $|\vec{B}_f|^2$ 。

$$|\vec{B}_f|^2 = \mu_0^2 H_0^2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^6 (\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta)$$

联立上式和方程 3.174, 对 3.173 使用球坐标中的梯度算符, 我们得到:

$$\begin{aligned} \vec{f}_m(r, \theta) &= \frac{3\mu_0 H_0^2}{2} \left[ (\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{R_e}{r} \right)^6 \vec{i}_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left( \frac{R_e}{r} \right)^6 \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) \vec{i}_\theta \right] \\ &= \frac{3\mu_0 H_0^2}{2R_e} \left( \frac{R_e}{r} \right)^7 \left[ -6(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) \vec{i}_r - \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta \vec{i}_\theta \right] \end{aligned}$$

我们可以简化为:

$$\vec{f}_m(r, \theta) = -\frac{9\mu_0 H_0^2}{4R_e} \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 [(1 + 3 \cos^2 \theta) \vec{i}_r + \sin \theta \cos \theta \vec{i}_\theta] \quad (3.176)$$

可见,  $\vec{f}_m(r, \theta)$  随  $1/r^7$  变化。如我们所期的, 对于任何铁磁物体,  $\vec{f}_m(r, \theta)$  的  $r$  分量指向磁体中心。

### B. 饱和球上的力

方程 3.175 给出的磁能密度为:

$$e_{ms} = \mu_0 M_{sa} H_0 \left(\frac{R_e}{r}\right)^3 \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta}$$

类似的, 对磁能密度求梯度, 我们得到:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{ms}(r\theta) &= -\frac{3\mu_0 M_{sa} H_0}{2R_e} \left(\frac{R_e}{r}\right)^4 \\ &\times \left( \sqrt{1+3\cos^2 \theta} \vec{i}_r + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1+3\cos^2 \theta}} \vec{\theta} \right) \end{aligned} \quad (3.176b)$$

可见, 当铁球饱和时, 磁力随  $1/r^4$  变化。因为它和不饱和球中一样, 是  $-r$  向的, 铁球被磁体中心所吸引。

**演示** 就 45T 混合磁体 (仅考虑超导磁体的磁场) 而言, 其  $B_0 = 14$  T,  $R_e = 0.67$  m (问题 3.11), 我们可以计算  $y_{0.1g}$ 。该点位于磁体平台中心 ( $z = 2.75$  m) 为起点的 y 轴上, 该处施于密度为  $\rho$  的非饱和铁球磁力密度上的磁力恰为  $f_{my} = 0.1\rho g$ (0.1 倍重力加速度)。 $f_{my}$  为:

$$f_{my} = f_{mr} \sin \theta + f_{m\theta} \cos \theta \quad (3.177)$$

式中,  $f_{mr}$  和  $f_{m\theta}$  分别是磁力的  $r$  分量和  $\theta$  分量。联立方程 3.176a 和 3.177, 我们得到:

$$\begin{aligned} f_{my} &= \frac{9\mu_0 H_0^2}{4R_e} \left(\frac{R_e}{r}\right)^7 [-(1+3\cos^2 \theta) \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta] \\ &= -\frac{9\mu_0 H_0^2}{4R_e} \left(\frac{R_e}{r}\right)^7 (1+4\cos^2 \theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.178)$$

方程 3.178 中的符号表示  $f_{my}$  实际上指向图 3.46 中所示的相反方向。在  $x = 0$  时的  $r, \sin \theta, \cos \theta$  分别为:

$$r = \sqrt{y_{0.1g}^2 + z^2}; \quad \sin \theta = \frac{y_{0.1g}}{\sqrt{y_{0.1g}^2 + z^2}}; \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{y_{0.1g}^2 + z^2}}$$

联立上面的表达式和方程 3.178, 代入  $f_{my} = 0.1\rho g$ , 得到:

$$0.1\rho g = \frac{9(\mu_0 H_0)^2 R_e^6}{4\mu_0} \left(\frac{1}{y_{0.1g}^2 + z^2}\right)^{3.5} \left(1 + \frac{4z^2}{y_{0.1g}^2 + z^2}\right) \frac{y_{0.1g}}{y_{0.1g}^2 + z^2}$$

代入上面表达式的合适值, 并代入  $z = 2.75$  m, 我们得到:

$$0.1(8000)(9.81) = \frac{9(14)^2(0.67)^6}{4(4\pi \times 10^{-7})} \left[\frac{1}{y_{0.1g}^2 + 2.75^2}\right]^{3.5} \times \left[1 + \frac{4(2.75)}{y_{0.1g}^2 + 2.75^2}\right] \frac{y_{0.1g}}{\sqrt{y_{0.1g}^2 + 2.75^2}}$$

解得,  $y_{0.1g} \simeq 2.42$  m

我们可以算出球上的总场, 然后看球是否如计算时假设的那样非饱和。

已知  $r_{0.1g} = \sqrt{(2.42 \text{ m})^2 + (2.75 \text{ m})^2} \simeq 3.66$  m 以及  $\theta = \tan^{-1}(2.42 \text{ m}/2.75 \text{ m}) = 41.3^\circ$ , 代入方程 3.163, 有:

$$\begin{aligned} |\mu_0 \vec{H}_f| &= (14.0) \left( \frac{0.67}{3.66} \right) \sqrt{\cos^2 41.3^\circ + \frac{1}{4} \sin^2 41.3^\circ} \\ &= (14.0)(6.1 \times 10^{-3})(0.82) = 0.070 \text{ T} \quad (\vec{M} = 3\mu_0 \vec{H}_f = 0.21 \text{ T}) \end{aligned}$$

### 3.9.30 讨论 3.13: 两线圈磁体的径向力

图 3.47 给出了两线圈磁体的一种布局, 其中内线圈 1 的轴垂直于  $z$  轴, 但相对于外线圈 2 的轴偏移  $\Delta x$ 。两个线圈的轴向场都是指向  $+z$  方向, 中平面都位于  $z = 0$ 。

当线圈 1 和线圈 2 同心, 也即  $\Delta x = 0, \Delta y = 0$  时, 单位绕组体积上的作用力  $J_\theta \times B_z$  是  $r$  向的; 根据对称性, 可被消除: 净轴向力为零。如果线圈 1 失配  $+\Delta x$ , 如图所示, 那么施加于绕组体积的一半 ( $xy$  平面上  $+x$  侧的  $180^\circ$  弧度) 上的  $B_{z2}$  平均起来要大于另一半上的  $B_{z2}$ 。最终的净不平衡力  $F_{x1}$  可以近似表示为:

$$F_{x1} \simeq 4\pi \Delta x \int_0^b \int_{a_1}^{a_2} J_{\theta 1} \frac{\partial B_{z2}(r, z)}{\partial r} r dr dz \quad (3.179)$$

式中,  $B_{z2}$  是由线圈 2 产生的轴向力。如方程 3.12b 以及 3.117a - 3.117c(问题 3.2) 所指出的,  $B_{z2}$  随着在  $xy$  平面上的失配增加而增大, 也即  $\partial B_{z2}/\partial r > 0$ 。于是,  $F_{x1}$  是正的, 并且在  $x$  方向增大; 进而线圈 1 的失配继续扩大: 系统不稳定。

另一种看待这种情况的方法是认识到励磁线圈 1 总是被吸引到最高场区域。因此, 如果线圈 1 径向移位, 则它继续沿径向朝线圈 2 移动。原因如上所述:  $B_{z2}$  随着  $xy$  平面上的位移而增加;  $B_{z2}$  在线圈 2 的绕组最内圈半径处最大。相同的理由可用于解释为什么  $z$  方向上的位移是稳定的: 如果线圈 1 轴向移位  $\Delta z$ , 因为每个线圈的轴向场在中平面 ( $z = 0$ ) 处最大, 线圈 1 试图将其最大场区域与线圈 2 的区域对齐, 从而在  $z$  方向的失配是稳定的。

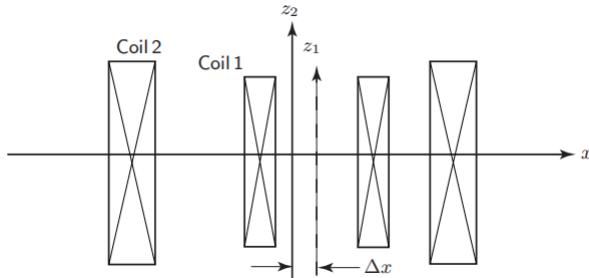


图 3.47: Two nested solenoidal coils, one displaced radially from the other

### 3.9.31 讨论 3.14: 45 T 混合磁体的结构支撑

45 T 混合磁体的设计具有后续通过将 24 MW 内插电阻磁体提至 35 MW 从而可在 50 T 运行的潜力。设计中的一个关键要点是插入磁体和 SCM 之间传递故障力的结构。特别关键的是在低温恒温器内部提供热间隙的结构部件。在 45 T 混合磁体中，该部件是单个圆柱形钢柱，与 SCM 同轴，with heat intercepts at  $\sim 80$  K and  $\sim 20$  K。为了计算在插入磁体失效时支撑结构上的潜在故障负荷上限，我们对升级 50T 进行了下面的分析。

1. 分析在以下基础上进行：获取 45 T 电阻内插磁体的尺寸，每个子线圈在峰值时具有均匀电流密度，调节每个子线圈中的电流水平调节至 50 T。该分析给出了一种插入磁体，与具有  $1/r$  电流分布的线圈相比，该插入磁体相对于 SCM 具有固有的更高的磁能和更高的失配力。
2. 基于这种配置，假设最坏情况的故障，即每个子线圈的中平面突然短路，导致电流加倍（恒定电压假设）和每个子线圈的磁中心的轴向移位  $b_i$ （第  $i$  个线圈的半高）。对于假设的子线圈几何结构，这个假设的故障分别导致线圈 A, B 和 C 中的力为  $\sim 1.7$  MN  $\sim 1.8$  MN 和  $\sim 2.5$  MN，即 SCM 上的力总共约 6 MN。精心选择支撑柱的壁厚以确保故障期间的平均应力不超过其  $2/3$  屈服。按照 1.8–20 K; 20–80 K 和 80–300 K 对壁厚进行分级以匹配奥氏体钢屈服应力的温度依赖性。由此产生的传导热输入是系统总低温负荷的一小部分。由此产生的支撑柱设计具有额外的优点，即对轴向和横向载荷都非常坚硬。因此，对于典型的失配力，插入磁体和插入磁体之间的相对偏移非常小。

### 3.9.32 讨论 3.15: Nb<sub>3</sub>Sn 导体上的应力

这里我们将讨论 Nb<sub>3</sub>Sn 导体的应力问题，主要考虑这种复合导体的青铜、紫铜和 Nb<sub>3</sub>Sn 三种材料的应力关系 [3.60]。因为超导体的临界电流密度会因应变而退降——在拉伸时尤甚，所以，超导体的最大应变水平是磁体设计的关键参数。应变的效果，特别是 NbTi 和 Nb<sub>3</sub>Sn 复合超导体，已获得全面的研究 [3.61, 3.62]；高温超导体的数据也已成形 [3.63, 3.64]。

当 Nb<sub>3</sub>Sn 被冷却到 4.2 K，各组分都经历了一个 ~ 1000 K 的温度下降：从 ~ 1000 K 的反应温度到 4.2 K 的运行温度。因为各组分的热缩系数不同，各组分中将出现参与残余应力。

图 3.48 示意了三种应变状态：a) 复合物处理反应温度 ~ 1000 K；b) 如果三种组分可以独立收缩时的 4.2 K 状态；c) 复合物处于 4.2 K。尽管有所放大，示意图指出了三种组分各自热缩系数从反应温度到运行温度的相对大小，分别记为  $\epsilon_{br_0}, \epsilon_{cu_0}, \epsilon_{s_0}$ 。与此同时，复合物在 4.2 K 的残余应变  $\epsilon_{br_r}, \epsilon_{cu_r}, \epsilon_{s_r}$  也在图中给出。可以看出，青铜和紫铜都将处于拉伸状态，而 Nb<sub>3</sub>Sn 处于压缩状态。图中的  $E$  和  $A$  分别代表杨氏模量和截面积，下标指示了组分。另外，图中的各应变是按照标量处理的。

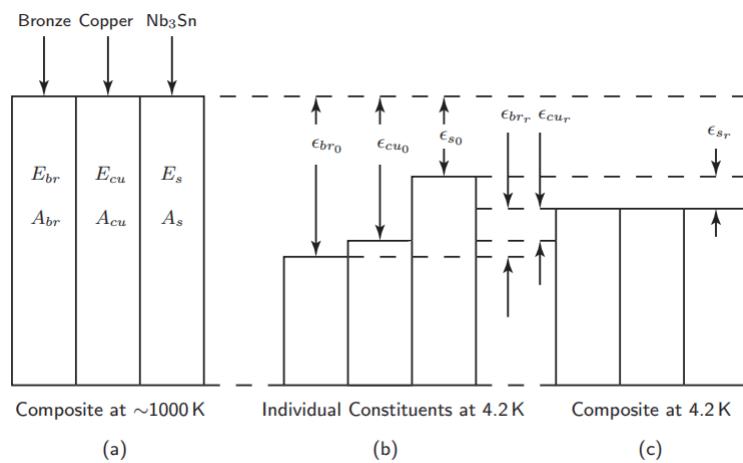


图 3.48: Nb<sub>3</sub>Sn 复合材料冷却后的应力应变。

#### A. 平衡方程

处于 4.2 K 的复合材料的应力应变平衡方程为:

$$\epsilon_{br_r} A_{br} E_{br} + \epsilon_{cu_r} A_{cu} E_{cu} - \epsilon_{s_r} A_s E_s = 0 \quad (3.180a)$$

$$+ \epsilon_{br_r} + \epsilon_{s_r} = \epsilon_{br_0} - \epsilon_{s_0} \quad (3.180b)$$

$$- \epsilon_{cu_r} + \epsilon_{s_r} = \epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0} \quad (3.180c)$$

$$- \epsilon_{cu_r} + \epsilon_{br_r} = \epsilon_{cu_0} - \epsilon_{br_0} \quad (3.180d)$$

方程 3.180a 表明净内力为零。方程 3.180b - 3.180d 给出了青铜/ $Nb_3Sn$ 、紫铜/ $Nb_3Sn$ 、青铜/紫铜各自的应变相容性。注意方程 3.180 隐含假定了各组分都处于塑性范围, 而事实并不总是这样。

### B. 残余应变

从方程 3.180b 和 3.180c, 我们可以得到  $\epsilon_{s_r}$  和  $\epsilon_{cu_r}$  的表达式:

$$\epsilon_{s_r} = \epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0} - \epsilon_{cu_r}$$

$$\epsilon_{cu_r} = \epsilon_{br_r} - \epsilon_{br_0} + \epsilon_{cu_0}$$

将上面的式子与方程 3.180 联立, 有:

$$\epsilon_{br_r} A_{br} E_{br} + (\epsilon_{br_r} - \epsilon_{br_0} + \epsilon_{cu_0}) A_{cu} E_{cu} + (\epsilon_{br_r} - \epsilon_{br_0} + \epsilon_{s_0}) A_s E_s = 0$$

从上面的方程解出  $\epsilon_{br_r}$ , 有:

$$\epsilon_{br_r} = \frac{(\epsilon_{br_0} - \epsilon_{cu_0}) A_{cu} E_{cu} + (\epsilon_{br_0} - \epsilon_{s_0}) A_s E_s}{A_{cu} E_{cu} + A_{br} E_{br} + A_s E_s} \quad (3.181)$$

类似的, 从方程 3.180b-3.180d, 我们可以得到  $\epsilon_{s_r}$  和  $\epsilon_{br_r}$ :

$$\epsilon_{s_r} = \epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0} - \epsilon_{cu_r}$$

$$\epsilon_{br_r} = \epsilon_{br_0} - \epsilon_{cu_0} + \epsilon_{cu_r}$$

于是:

$$(\epsilon_{br_0} - \epsilon_{cu_0} + \epsilon_{cu_r}) A_{br} E_{br} + \epsilon_{cu_r} A_{cu} E_{cu} + (\epsilon_{cu_r} - \epsilon_{cu_0} + \epsilon_{s_0}) A_s E_s = 0$$

从上面的方程中解出  $\epsilon_{cu_r}$ :

$$\epsilon_{cu_r} = \frac{(\epsilon_{cu_0} - \epsilon_{br_0}) A_{br} E_{br} + (\epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0}) A_s E_s}{A_{cu} E_{cu} + A_{br} E_{br} + A_s E_s} \quad (3.181b)$$

同时,

$$\epsilon_{br_r} = \epsilon_{br_0} - \epsilon_{s_0} - \epsilon_{s_r}$$

$$\epsilon_{cu_r} = \epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0} - \epsilon_{s_r}$$

于是

$$(\epsilon_{br_0} - \epsilon_{s_0} - \epsilon_{s_r})A_{br}E_{br} + (\epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0} - \epsilon_{s_r})A_{cu}E_{cu} - \epsilon_{s_r}A_sE_s = 0$$

从上面的方程解出  $\epsilon_{s_r}$ , 有:

$$\epsilon_{s_r} = \frac{(\epsilon_{cu_0} - \epsilon_{s_0})A_{cu}E_{cu} + (\epsilon_{br_0} - \epsilon_{s_0})A_{br}E_{br}}{A_{cu}E_{cu} + A_{br}E_{br} + A_sE_s} \quad (3.181c)$$

**数值解** 使用方程 3.181a — 3.181c, 以及表 3.16 给出的各组分数值, 我们可以计算  $\epsilon_{br_r}, \epsilon_{cu_r}, \epsilon_{s_r}$ :

$$\begin{aligned}\epsilon_{br_r} &= \frac{(1.66 - 1.62)(0.62)(100 \text{ GPa}) + (1.66 - 0.72)(0.14)(165 \text{ GPa})}{(0.24)(100 \text{ GPa}) + (0.62)(100 \text{ GPa}) + (0.14)(165 \text{ GPa})} \\ &= \left(\frac{22.19}{109.1} \text{ GPa}\right) \% \simeq 0.22\% \\ \epsilon_{cu_r} &= \frac{(1.62 - 1.66)(0.24)(100 \text{ GPa}) + (1.62 - 0.72)(0.14)(165 \text{ GPa})}{62.9 \text{ GPa}} \\ &= \left(\frac{19.83}{109.1} \text{ GPa}\right) \% \simeq 0.18\% \\ \epsilon_{s_r} &= \frac{(1.62 - 0.72)(0.62)(100 \text{ GPa}) + (1.66 - 0.72)(0.24)(100 \text{ GPa})}{62.9 \text{ GPa}} \\ &= \left(\frac{78.36}{109.1} \text{ GPa}\right) \% \simeq 0.72\%\end{aligned}$$

注意到两种基底材料都处于拉伸状态, 而  $Nb_3Sn$  处于压缩状态; 0.72% 的  $\epsilon_{s_r}$  还是太大了, 几乎可以肯定会破坏导体。不过, 当磁体励磁后, 导体基本处于拉伸张力状态, 这会令  $\epsilon_{s_r}$  有零应变的倾向; 通常, 磁体励磁后, Lorentz 应力足以让  $Nb_3Sn$  处于拉伸应变状态了。

### C. 青铜和紫铜中的应力

从上文计算的  $\epsilon_{br_r}, \epsilon_{cu_r}$ , 我们可以计算响应的应力:

$$\sigma_{br_r} = \epsilon_{br_r}E_{br} \simeq (2.2 \times 10^{-3})(100 \times 10^9 Pa) \simeq 220 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cu_r} = \epsilon_{cu_r}E_{cu} \simeq (1.8 \times 10^{-3})(100 \times 10^9 Pa) \simeq 180 \text{ MPa}$$

退火青铜的屈服应力  $\sigma_{br_y}$ , 退火紫铜的屈服应力  $\sigma_{cu_y}$  仅  $\sim 100 \text{ MPa}$ ; 青铜和紫铜在冷却过程中都是塑性屈服的。

表格 3.16

#### 3.9.33 问题 3.18: 部分系统的自感

推导 3.7.3 节给出的“低频”自感公式。

a) 半径为  $a$  的导线内部的单位长度电感为:

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (3.83)$$

b)  $N$  匝 “特别长” ( $\beta \gg \alpha$ ) 的薄线圈的自感:

$$L = \mu a_1 N^2 \left( \frac{\pi}{2\beta} \right) \quad (3.84c)$$

c) “理想”  $N$  匝双极线圈单位长度自感:

$$L = \frac{1}{8} \mu_0 \pi N^2 \quad (3.87)$$

使用两种表达式: 1)  $L = 2E_m/I^2$ ; 和 2)  $L = N\Phi$  推导上式 (方程 3.87)。

$$L = \frac{1}{16} \mu_0 \pi N^2 \quad (3.88)$$

e) 主半径为  $R$ , 圆形截面半径  $a$ , 共  $N$  匝的“理想”环形线圈的自感:

$$L = \mu_0 R N^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a}{R} \right)} \right] \quad (3.89a)$$

f) 在极限  $a \ll R$  下, e) 中理想环线圈的自感:

$$L = \mu_0 a N^2 \left( \frac{a}{2R} \right) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{a}{R} \right)^4 \dots \right] \quad (3.89b)$$

g) 主半径为  $R$ , 矩形截面宽  $2a$ (r 轴)、高  $2b$ (z 轴), 共  $N$  匝的“理想”环形线圈的自感:

$$L = \mu_0 b N^2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) \right] \quad (3.90a)$$

h) 在极限  $a \ll R$  下, g) 中理想环线圈的自感:

$$L = \mu_0 b N^2 \left( \frac{2a}{\pi R} \right) \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{a}{R} \right)^4 \dots \right] \quad (3.90b)$$

### 问题 3.18 之解

a) 一条半径为  $a$  的导线, 通过均匀分布于其截面的电流  $I$ , 内部的磁场为:

$$H_\theta(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r \quad (\text{S18.1})$$

导体内部单位长度储存的磁场能  $e_m$  为:

$$e_m = \frac{1}{2} \mu_0 \int_0^a 2\pi H_\theta^2(r) r dr \quad (\text{S18.2})$$

联立方程 S18.1 和 S18.2, 我们有:

$$e_m = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 \quad (S18.3)$$

联立方程 3.79 ( $E_m = LI^2/2$ ; 单位长度  $e_m = LI^2/2$ ) 和 S18.3, 解出导线内部的自感  $L$ :

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (3.83)$$

b) 根据方程 3.111d, 长螺管 ( $\beta \gg \alpha$ ) 的中心场  $B_z(0, 0)$  为  $\mu_0 NI/2b$ 。从方程 3.117c 可以得出, “薄壁” 和 “长” 螺管的磁场在轴向和径向都是均匀分布的, 并且等于中心场。于是, 螺管的 N 匝交链的总磁链为:

$$\Phi = \int_0^{a_1} 2\pi r H_z(0, 0) dr = N \left( \frac{\pi a_1^2 \mu_0 NI}{2b} \right) \quad (S18.4)$$

联立方程 3.78 ( $\Phi = LI$ ) 和 S18.4, 我们得到:

$$L = \mu_0 a_1 N^2 \left( \frac{\pi}{2\beta} \right) \quad (3.84c)$$

c) 方法一: 能量 如问题 3.8 所给出的, 理想双极线圈的总安匝 ( $NI$ ):

$$NI = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K_f R d\theta \quad (S18.5)$$

式中,  $R$  是双极半径。联立 3.140 ( $\vec{K}_f$ ) 和 S18.5, 有:

$$NI = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2H_0 R \cos \theta d\theta = 4H_0 R \quad (S18.6)$$

双极磁体的单位长度总磁能  $E_m$  由方程 3.143 表示:

$$E_m = \frac{\pi R^2 B_0^2}{\mu_0} \quad (3.143)$$

下面我们从方程 S18.6 计算  $H_0 R = NI/4$ 。联立 3.143 和 3.79, 解出  $L_\ell$  (单位长度的  $L$ ), 有:

$$L_\ell = \frac{1}{8} \mu_0 \pi N^2 \quad (3.87)$$

**方法二: 磁链** 首先, 表面电流密度  $\vec{K}_f$  在双极绕组上不均匀。方程 3.140 指出,  $\vec{K}_f = -2H_0 \cos \theta \vec{i}_z$ 。如果  $I$  在绕组中均匀分布, 则 “匝密度”  $n(\theta)$  必须如下随  $\theta$  变化:

$$n(\theta) = \frac{1}{2} N \cos \theta \quad (S18.7)$$

因为双极磁体有一个均匀分布的磁场  $H_0$ , 双极的 N 匝总交链为:

$$\begin{aligned} N\Phi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n(\theta)\mu_0 H_0(2R \cos \theta)d\theta = \mu_0 N H_0 R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \pi H_0 R = \frac{1}{8}\mu_0 \pi N^2 I \end{aligned} \quad (\text{S18.8})$$

联立方程 S18.8 和 3.78, 我们有:

$$L_\ell = \frac{1}{8}\mu_0 \pi N^2 \quad (3.78)$$

d) **方法一:** 能量 理想四极磁体 (问题 3.9) 的总安匝  $NI$  为:

$$NI = 2 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} K_f R d\theta \quad (\text{S18.9})$$

$R$  是四极磁体的半径。积分前面的乘数 2 的原因可由图 3.35(b) 看出, 即电流分布被分到两个区域, 我们只考虑了一极。联立方程 3.146 和 ( $\vec{K}_f$ ) 和 S18.9, 我们有:

$$NI = 2 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2H_0 R \cos 2\theta d\theta = 4H_0 R \quad (\text{S18.10})$$

四极磁体单位长度的总磁能在整个表面积分  $\mu_0 |H(r, \theta)|^2 / 2$  获得。方程 3.145 给出的  $|H(r, \theta)|^2$  与  $\theta$  无关, 因为  $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{H_0}{R}\right)^2 \int_0^R 2\pi r^3 dr + \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 R^6 \int_R^\infty \frac{2\pi dr}{r^5} \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 \pi H_0^2 R^2 \end{aligned} \quad (\text{S18.11})$$

联立 3.79、S18.10 和 S18.11, 我们得到:

$$L_\ell = \frac{1}{16}\mu_0 \pi N^2 \quad (3.88)$$

理想四极磁体的  $E_m$  是理想双极磁体的  $1/2$  很容易理解: 四极磁场在室温孔内是从 0 到  $H_0$  变化的, 而不是像双极磁场是均匀的; 同时, 四极磁体在外部按  $1/r^3$  衰减, 而不是像双极磁体按  $1/r^2$  衰减。

**方法二: 磁链** 类似于上面处理的双极磁体的“匝密度”, 四极磁体的匝密度也必须随  $\theta$  按下式变化:

$$n(\theta) = \frac{1}{2}N \cos 2\theta \quad (\text{S18.12})$$

注意到，对上式在  $1/4$  区域内积分，比如从  $-45^\circ$  到  $45^\circ$ ，它将给出也必须给出该部分的总匝数  $N/2$ 。对理想四极磁体，总磁链  $\Phi$  由下式给出：

$$n\Phi = 2 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} n(\theta)\phi(R, \theta)d\theta \quad (\text{S18.13b})$$

因为  $H_{1r} = H_0(r/R) \sin 2\theta$  (方程 3.145a)，我们有：

$$\phi(R, \theta)d\theta = 2\mu_0 H_0 R \int_0^\theta \sin 2\omega d\omega = \mu_0 H_0 R \cos 2\theta \quad (18.13b)$$

于是：

$$N\Phi = \mu_0 N H_0 R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos)^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \mu_0 \pi N H_0 R = \frac{1}{16} \mu_0 \pi N^2 I \quad (\text{S18.4})$$

联立 3.78 和 S18.14，我们有：

$$L_\ell = \frac{1}{16} \mu_0 \pi N^2 \quad (3.88)$$

e) 正如在问题 3.10 中讨论的，理想圆截面环线圈内部的场  $H(r)$  是绕向角 ( $\phi$ ) 向的。根据方程 3.161：

$$H_\varphi(r) = \frac{NI}{2\pi r} \quad (\text{S18.15})$$

环形线圈的总磁链  $\Phi$  于是为：

$$\Phi = \mu_0 N \int_{R-a}^{R+a} \int_{z=-a}^{z=+a} H(r) dz dr \quad (\text{S18.16})$$

定义圆截面的方程为：

$$z^2 + (R - r)^2 = a^2 \quad (\text{S18.17})$$

在方程 S18.16 的积分中，对  $r$  和常数从 S18.17 中解出  $z$  并与方程 S18.15 联立后，有：

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \int_{R-a}^{R+a} \int_{-\sqrt{a^2-(R-r)^2}}^{\sqrt{a^2-(R-r)^2}} \frac{dz dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I}{\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{\sqrt{a^2 - R^2 + 2Rr - r^2}}{r} dr \end{aligned} \quad (\text{S18.18})$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\mu_0 N^2 I}{\pi} \left| R(\sin)^{-1}\left(\frac{2r-2R}{2a}\right) + \frac{(a^2-R^2)}{\sqrt{R^2-a^2}}(\sin)^{-1}\left(\frac{2Rr+2a^2-2R^2}{2ra}\right) \right|_{R-a}^{R+a} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I}{\pi} \left( R\pi + \pi \frac{a^2-R^2}{\sqrt{R^2-a^2}} \right) = \mu_0 N^2 RI \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2} \right]\end{aligned}\quad (\text{S18.19})$$

联立 3.78 和 S18.19, 我们得到:

$$L = \mu_0 RN^2 \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2} \right] \quad (3.89a)$$

f) 对  $a \ll R$ , 我们有:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{R}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{a}{R}\right)^6 \dots \quad (\text{S18.20})$$

从 3.89a 和 S18.20,

$$L = \mu_0 RN^2 \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{a}{R}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{a}{R}\right)^6 \dots \right]$$

于是

$$L = \frac{\mu_0 a^2 N^2}{2R} \left[ 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{a}{R}\right)^4 \dots \right] \quad (3.89b)$$

g) 本理想矩形截面环线圈内部的磁场与上面研究过的圆截面环线圈是一样的, 即:

$$N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \int_{R-a}^{R+a} \int_{z=-b}^{z=+b} \frac{1}{r} dz dr = \frac{\mu_0 N^2 b I}{\pi} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) \quad (\text{S18.21})$$

联立 3.78 和 S18.21, 我们有:

$$L = \frac{\mu_0 b N^2}{\pi} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) \quad (3.90a)$$

h) 对  $a \ll R$ , 我们可以展开  $\ln(1 \pm a/R)$ :

$$\ln(1 \pm \frac{a}{R}) = \pm \frac{a}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 \pm \frac{1}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^4 \pm \frac{1}{5}\left(\frac{a}{R}\right)^5 \dots \quad (\text{S18.22})$$

联立 3.90a 和 S18.22, 我们得到:

$$\begin{aligned}L &= \frac{\mu_0 b N^2}{\pi} \left[ 2\left(\frac{a}{R}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{a}{R}\right)^5 \dots \right] \\ L &= \frac{2\mu_0 ab N^2}{\pi R} \left[ 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{R}\right)^4 \dots \right]\end{aligned}\quad (3.90b)$$

### 3.9.34 讨论 3.16: Rogowski 线圈的互感

问题 2.11 中研究过的 Rogowski 线圈的总磁链表达式为:

$$\Phi(t) \simeq \frac{\mu_0 N c^2}{2R} I(t) \quad (2.69)$$

式中,  $R$  是 Rogowski 线圈半径,  $c$  是每一匝的半径。方程 2.69 在  $(c/R)^4 \ll 1$  时有效的, 大多数 Rogowski 线圈通常都能满足这个条件。电流源和 Rogowski 线圈之间的互感  $M_{ri}$  于是可由下式给出:

$$M_{ri} \equiv \frac{\Phi}{I} \simeq \frac{\mu_0 N c^2}{2R} \quad (3.182)$$

### 3.9.35 讨论 3.17: 力 vs. 互感

根据讨论 3.12 中的方程 3.173,  $\vec{f}_m(r, \theta) = \nabla e_m$ , 我们可以由两个“环”线圈的互感  $M_{AB}$  导出其轴向力的表达式, 反之亦然。这里, 我们研究一个简单情况: 两个“环”线圈距离“很远”,  $F_{zA}(\rho)$  由方程 3.39c 给出,  $M_{AB}$  由方程 3.97 给出。即:

$$F_{zA}(\rho) = \frac{3\mu_0}{2\pi} \left( \frac{\pi a_A^2 N_A I_A}{\rho^2} \right) \left( \frac{\pi a_B^2 N_B I_B}{\rho^2} \right) \quad (3.39c)$$

以及

$$M_{AB} \simeq \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{(\pi a_A^2 N_A)(\pi a_B^2 N_B)}{\rho^3} \right] \quad (3.97)$$

对这个系统, 我们有:

$$e_m = I_A I_B M_{AB} \quad (3.183)$$

在  $\rho$  方向应用方程 3.173, 并与方程 3.97 和 3.182 联立, 得:

$$F_{zB}(\rho) = I_A I_B \frac{dM_{AB}}{d\rho} \quad (3.184a)$$

$$= I_A I_B \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{(\pi a_A^2 N_A)(\pi a_B^2 N_B)}{\rho^3} \right] \right\} \quad (3.184b)$$

$$= -\frac{3\mu_0}{2\pi} \left( \frac{\pi a_A^2 N_A I_A}{\rho^2} \right) \left( \frac{\pi a_B^2 N_B I_B}{\rho^2} \right) \quad (3.184c)$$

注意方程 3.184a 中的  $d/d\rho$  运算。它是线圈 B 运动了距离  $\partial\rho$ , 于是  $F_{zB}(\rho)$  指向  $\rho$  相反的方向。也即:

$$F_{zA}(\rho) = -F_{zB}(\rho) = \frac{3\mu_0}{2\pi} \left( \frac{\pi a_A^2 N_A I_A}{\rho^2} \right) \left( \frac{\pi a_B^2 N_B I_B}{\rho^2} \right) \quad (3.39c)$$

很明显，上面的过程反过来就可以用于在已知  $F_{zA}(\rho)$  时求  $M_{AB}$ 。再次提醒注意：一定要注意符号。

$$M_{AB} = -\frac{1}{I_A I_B} \int_0^\rho F_{zA}(y) dy \quad (3.185)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{(\pi a_A^2 N_A)(\pi a_B^2 N_B)}{\rho^3} \right] \quad (3.97)$$

# 第四章 制冷

## 4.1 引言

制冷对超导非常重要。对制冷的依赖性是超导广泛应用（如电力应用）的主要因素。然而，我们不以因为其重要性而过分强调它的作用。单从制冷角度看，显然将超导磁体运行于最高的许可温度下是更高效的。但是，如果超导磁体是某系统的一部分，就必须评估运行温度对整个系统的影响。“超导磁体的最佳运行温度”这个问题就成了现实且极端重要的设计/运行问题，对高温超导磁体尤其如此。比如，对运行于 77K 的超导磁体，如果产生相同的磁场，无疑需要比运行于 20K 更多的超导体；制冷上的节省可能并不能补偿超导体费用的增加。

另一个不可忽略的是每一个超导系统的绝热要求：最好的绝热是真空。温度低于 20K（氢的冰点）时，热学“有效”的真空在低温容器内是相对容易实现的。已抽真空的低温容器表面逸出的氢气是容器内最主要的传热介质。于是，整个高温超导磁体系统若运行于 20K 之下（而不是之上）可能经济性更好。如果我们选择一个更高的运行温度——比如很多人希望的 70K——系统中可能不再需要真空绝热，这时“干扰”又少了一点。

本部分，将简要讨论以下超导磁体的制冷设计、运行问题：1) 两种超导体的冷却方式，“干式”和“湿式”；2) 冷源、热源和制冷测量；3) 湿式磁体的制冷剂；4) 可能对干式磁体有用的固体制冷剂。上述论题的更多细节将在“专题”部分有更深入的涉及和研究。

## 4.2 “湿式” 磁体和“干式” 磁体

在 1990s 前，所有的超导磁体都是“湿式”的，即靠液氦冷却。1990s 早期开的，随着高温超导的发现以及制冷机技术的进步，由制冷机冷却的干

式（无制冷剂）LTS 和 HTS 磁体都得以发展。一方面，干式低温系统在运行、维护上更轻便；另一方面，干式低温系统更易实现“少干扰”。这使得干式磁体在多数应用中是更优的选项——如果磁体自身在正常运行条件下完全无耗散（如交流损耗）的话。

## 超导磁体的冷却方式

如表 4.1 可见，超导磁体可以使用五种冷却方式（四种湿式和一种湿式）的任一种。尽管本节使用的“制冷??”、“绝热”、“准稳定性”等术语在第六章会有更详细的讨论，但为了读者的可理解性，此处给出这些术语的简要定性解释。

**浸泡冷却 cryostable?** 1980s 以前建造的磁体基本都是浸泡式冷却的。这些磁体的一个关键制冷特征是为了便于制冷剂渗入的绕组的“通孔”设计。通孔让绕组的几乎所有部分都暴露于制冷工质。此时，下文定性讨论的对流传热是重要的。第六章会给出一些数据。

**浸泡冷却绝热** 为了实现高性能，浸泡冷却的“绝热”磁体在 1980s 早期开始发展。此处，绕组是实心的，完全没有制冷剂的浸入。这样，绕组中的总体电流密度显著高于浸泡制冷??。绕组仅在其外表面被冷却。

**迫冷 cryostable** 为了保持制冷剂为单相（一般对浸泡式制冷磁体不容易），以及为了加强绕组导体本身的强度，在 1970s 早期发展了所谓的“cable-in-conduit,CIC，特别是大型磁体”。此处，冷却和绕组高度耦合。重要的传热数据是哪些强迫对流参数。典型的传热数据在第六章给出。

**迫冷准稳定性** 为了保持绕组鲁棒性，绕组上没有通孔。为实现比浸泡冷却绝热磁体更好的稳定性，制冷剂被强迫进入绕组。不是经由导体，而是仅在导体的临近边缘。和绝热绕组一样，导体是传导冷却的。

**制冷机冷却** 磁体和制冷机相连；绕组内的冷却主要通过传导。如第六章将会更详细讨论的，LTS 磁体运行于准稳定态，而 HTS 磁体运行于稳定态。“制冷循环器（cryocirculator）”对作为干式磁体冷源的制冷机是非常需要的，特别是对 LTS 磁体。

表 4.1：湿式和干式超导磁体的冷却方式

冷却方式	冷却-导体耦合性	传热方式
浸泡冷却, cryostable	好; 全部导体	对流
浸泡冷却, 绝热	基本不存在	(磁体绕组表面的) 传导
迫冷, cryostable	好; 全部导体	对流
迫冷, 准稳定	临近表面处, 间接	传导
制冷机, 准稳定	间接	传导

## 4.3 制冷问题：冷却、热、测量

三个基本制冷问题是与超导磁体技术相关的：1) 冷源；2) 热源；3) 测量。这些问题将在本部分简要讨论。专题部分以及后续章节将对某些特定问题做更详细的讨论。

### 4.3.1 冷源

如表 4.1 总结的，超导磁体靠制冷工质或制冷机冷却并维持在其运行温度。下面将简明的讨论制冷剂。制冷机仅给出基本的热力学关系和性能数据。

### 4.3.2 热源

一般的，在超导磁体的低温容器内的冷环境中，主要有五个热源：1) 低温容器壁间的辐射；2) 低温容器壁间“真空”空间的热对流；3) 磁体支撑和低温容器结构单元的热传导；4) 电流引线的传导和焦耳热耗散；5) 磁体内的耗散。专题部分将会涉及到辐射、对流和电流引线。磁体的耗散将在第七章讨论。

### 4.3.3 测量

超导磁体运行中，通常测量的低温参数包括：1) 温度；2) 压力（低温容器真重度、工质压力）；3) 工质流速（迫冷湿式磁体）；4) 蒸发率（湿式磁体的电流引线）。本书中，专题部分仅涉及温度的测量简要讨论。

## 4.4 液体工质：湿式磁体

1990s 前，仅液氦适用于磁体运行。某些液氦低温容器使用液氮来隔断热量。由于磁体要从室温冷却到 4.2K，液氮也用于预冷液氦冷却磁体，以减少液氦的消耗。

大气压下饱和（沸腾）温度低于 100K 的 6 种工质是：氧 (90.18K)、氩 (87.28K)、氮 (77.36K)、氖 (27.09K)、氢 (20.39K)、氦 (4.22K)。对于湿式高温超导磁体和设备，工质的备选顺序为氮、氖、氢。对于湿式低温超导或低温/高温混合磁体，如高场 NMR 磁体，仍然主要使用氦。五种液体的沸腾热传递参数在表 4.2 列出。作为对比，还列出了水的参数。

表 4.2: 沸腾传热参数

液体	$T_a [K]$	$h_l [J/cm^3]$	$q_{pk} [W/cm^2]$	$\Delta T_{pk} [K]$	$q_{fm} [W/cm^2]$
氦	4.22	2.6	~ 1	~ 1	~ 0.3
氢	20.39	31.3	~ 10	~ 5	~ 0.5
氖	27.09	104	~ 15	~ 10	~ 1
氮	77.36	161	~ 25	~ 15	~ 2
水	373.15	2255	~ 100	~ 30	~ 10

### 沸腾传热参数

在湿式超导磁体中，特别是浸泡冷却 cryostable 磁体，冷却依靠核态沸腾传热。由于核态沸腾传热中，冷却是靠液体蒸发实现的，故液体的体积蒸发热  $h_l$  是一个关键参数。这也意味着沸腾热流密度和温度的关系图像（两坐标轴均为对数坐标，如图 4.1）对大多数液体都是看上去类似的。这里的 x 轴温度是浸入液体的物体的避免温度和液体饱和温度之差，即  $\Delta T = T - T_s$ 。图中的其他参数为： $q_{pk}$ ，最大核态沸腾热流密度； $\Delta T_{pk}$ ，是  $q_{pk}$  出现时的  $\Delta T$ ； $q_{fm}$ ，最小膜态沸腾热流密度。

从表 4.2 中我们可以得到，唯一适合 LTS 磁体的制冷剂液氦，蒸发时吸收的能量密度最小，是效果最差的。尽管 HTS 磁体最好是干式运行，但如果它湿式运行，氢、氖、氮能够覆盖大多数 HTS 磁体的温度范围。燃料电池在电动汽车领域应用中发展出的一个重要成果就是液氢技术，包括安全性方面的技术。这可能会为液氢冷却 HTS 磁体提供与有益促进。

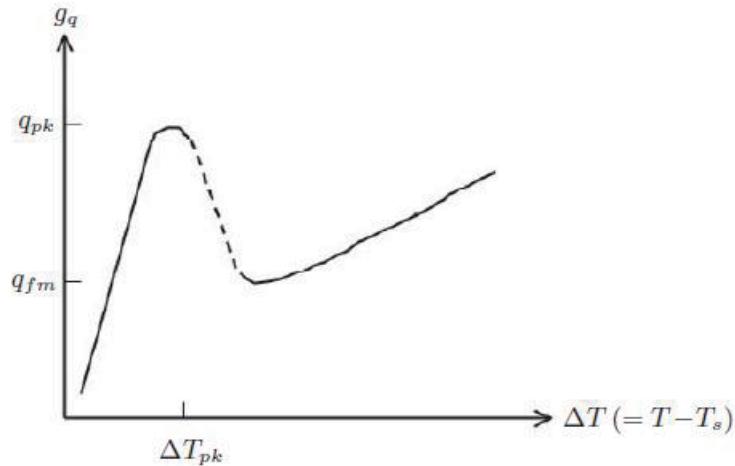


图 4.1: 典型流体的沸腾热流密度 vs. 温度

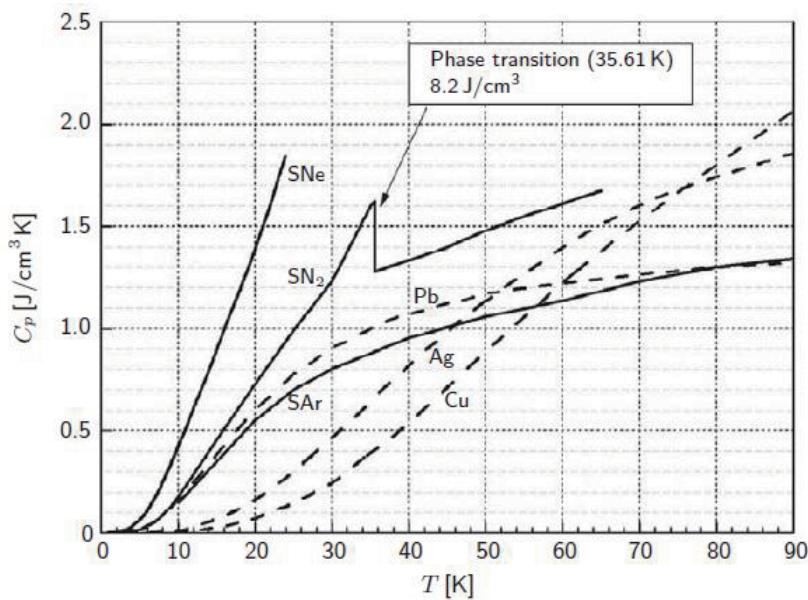
## 4.5 固体工质：干式磁体

正如前文所讲，干式低温磁体，特别是运行电流小于 1kA 的，很可能逐渐替代湿式小电流 LTS 磁体。如果当前的高温超导体 (BSCCO、YBCO 和  $MgB_2$ ) 中的一种、两种甚至三种发展为完全的“磁体级导体”，那在不久的将来，干式 HTS 磁体不仅会取代干式 LTS 磁体，还将找到仅适用于 HTS 磁体的其他应用。

### 4.5.1 湿 LTS 磁体 vs. 干 HTS 磁体——热容

湿式 LTS 磁体经常被忽略的一个优势是其巨大的热容，这是由作为湿式 LTS 磁体的一部分的大量液氦提供的。液氦的焓密度在 4.2K 时“高”达  $2.6 J/cm^3$ ——此处所谓高，是和铜相比的。铜在 4.2-4.5K 的焓密度仅为  $\sim 0.0003 J/cm^3$ ——是铜的 1000 倍。于是，在大多数情况下，液氦将牢牢将磁体的温度“铆”住。

干式磁体同样需要提供一个大的热容以便“铆”住温度。固态制冷剂是这种功能的很好选项。图 4.2 给出了多种固体制冷剂（固氮、固氩）以及部分金属（铅、银、铜）的热容和温度的关系。铅在低温设备中常用为热容增强部件；铜是 LTS 中广为使用的基底金属；银是 BSCCO 的基底金属。

图 4.2: 几种物质的热容  $C_p$  vs. 温度  $T$  特性

#### 4.5.2 固体工质——氮、氮、氩

下面将简要讨论三种可能用于干式 HTS 磁体的固体工质：氮、氮、氩。附录中给出了他们的一些热力学性质。

尽管是高热容使得固体工质成为优秀的浸渍材料。此外，还有两个其他的性质让固体工质在一些应用中优于环氧：1) 热导率；2) 机械强度。在 10-15K 温度区间，在 HTS 绕组上的温度均匀性上，固氮比环氧的效果更好。同时，固氮也使得绕组比环氧浸渍更具鲁棒性。

**固氮， $SN_2$**  因为它能在高达 64.2K 仍保持固态且不贵、重量很轻（铅的密度的 1/10）、具有电绝缘性，固氮是运行于 64K 温度下温区的干式 HTS 磁体的有效热容增强剂。例如，BSCCO 和 YBCO 磁体在 20-60K 温区肯定能运行； $MgB_2$  磁体则是在 10-15K 甚至 20-30K。从图 4.2 中看出，固氮在 35.61K 存在一个固-固态的相变，额外吸收能量  $8.2 J/cm^3$ 。由于在转变点古今的热容是约  $1.5 J/cm^3 K$ ，额外的  $8.2 J/cm^3$  能量吸收等价于 5K 多的温升。对于运行于这个温区的 HTS 磁体，这是一个极佳的“温度池”。

**固氮** 图 4.2 中的热容数据表明，固氮体积费用比固氮贵 200 倍，它将是

4-10K 温区的最佳热容增强剂。不过，10K 左右时，固氮对于大多数情况就足够用了。尽管也有其他物质，比如  $Er_3Ni$ ，在 4-24K 温区能提供更好的热容增强效果。但是对磁体，固氮可能更合适。除了价格之外的最大缺点（相比于固氮），是固氮相对低的熔点，仅 24.6K。这限制了固氮系统运行的温区。

**固氩** 作为大气中含量最高的惰性气体，氩在价格上比氮至少便宜一个数量级，不过比氮还是贵不少。固氩仅适用于运行于 64.2K（固氮熔点）-83.8K（固氩熔点）温区的干式磁体。

## 4.6 专题

### 4.6.1 问题 4.1：Carnot 制冷机

$$W_{ca} = Q \left( \frac{T_{wm}}{T_{op}} - 1 \right) \quad (4.1)$$

$$Q_{wm} = Q + W_{ca} = 0$$

$$\begin{aligned} S_{wm} - S_{cl} &= \frac{Q}{T_{op}} \\ S_{wm} - S_{cl} &= \frac{Q_{wm}}{T_{wm}} \end{aligned}$$

$$\frac{Q}{T_{op}} = \frac{Q_{wm}}{T_{wm}} \quad (4.2)$$

$$\frac{Q}{T_{op}} = \frac{Q + W_{ca}}{T_{wm}}$$

$$W_{ca} = Q \left( \frac{T_{wm}}{T_{op}} - 1 \right) \quad (4.1)$$

#### 4.6.2 讨论 4.1：制冷机性能

#### 4.6.3 讨论 4.2：浸泡磁体的冷却模式

$$\frac{M_{be}}{M_{mg}} = \int_{4.2K}^{T_i} \frac{c_{cu}(T) dT}{h_{he}(T) - h_{he}(4.2K, liq.)} \quad (4.3)$$

$$\left[ \frac{M_{be}}{M_{mg}} \right]_{dk} = \frac{[h_{cu}(T_i) - h_{cu}(4.2K)]}{h_L} \quad (4.4)$$

#### 4.6.4 讨论 4.3：“冷却” HTS 磁体

$$-Q_r(T) = \left( \frac{M_{cu}}{\varrho_{cu}} \right) C_{cu}(T) \frac{dT}{dt} \quad (4.5)$$

$$\tau_{cn} = \frac{M_{cu}}{\varrho_{cu}} \int_{T_{op}}^{T_i} \frac{C_{cu}(T)}{Q_r(T)} dT = \frac{M_{cu}}{\varrho_{cu}} \int_{T_{op}}^{T_i} \kappa(T) dT \quad (4.6a)$$

$$M_{cu} = \frac{\varrho_{cu} \tau_{cn}}{\int_{T_{op}}^{T_i} \kappa(T) dT} \quad (4.6b)$$

#### 4.6.5 讨论 4.4：超流

$$X(T_{cl}) - X(T_{wm}) = q^{3.4} L \quad (4.7)$$

$$X(T_b) = q_c^{3.4} L \quad (4.8)$$

$$X(T_b) = \frac{q_c^{3.4}}{4.4} L \quad (4.9)$$

$$q_k = a_k (T_{cd}^{nk} - T_b^{nk}) \quad (4.10)$$

#### 4.6.6 讨论 4.5：1.8 K 过冷低温容器

$$Q_{out} - Q_{in} = Q_{1.8} \quad (4.11)$$

$$Q_{1.8} = \dot{m}_h (h_3 - h_2) \quad (4.12)$$

$$Q_{1.8} = \dot{m}_h (24.02J/g - 5.64J/g) = 20W$$

$$P_s = Q_{1.8} = \dot{m}_h \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) (P_4 \nu_4) \left[ \left( \frac{P_5}{P_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (4.13)$$

$$T(z) = -\frac{\tilde{\rho} I_t^2}{2A^2 \tilde{k}} z^2 + \left[ \frac{(T_\ell - T_0)}{\ell} + \frac{\tilde{\rho} I_t^2 \ell}{2A^2 \tilde{k}} \right] z + T_0 \quad (4.14)$$

$$\left( \frac{I_0 \ell}{A} \right)_{dr} = \sqrt{\frac{2\tilde{k}(T_\ell - T_0)}{\dot{\rho}}} \quad (4.15)$$

$$T(\xi) = -(T_\ell - T_0)\xi^2 + 2(T_\ell - T_0)\xi + T_0 \quad (4.16)$$

#### 4.6.7 讨论 4.6: J-T 过程

$$h_g(6K, 10atm) = x_\ell h_\ell(4.2K, 1atm) + (1 - x_\ell)h_g(4.2K, 1atm) \quad (4.17)$$

#### 4.6.8 问题 4.2: 基于制冷机的小型氦液化器

##### 问题 4.2 之解

$$h_{he}(7K, 10atm) = x_\ell h_\ell(4.22K, 1atm) + (1 - x_\ell)h_v(4.22K, 1atm)$$

$$x_\ell = \frac{h_{he}(7K, 10atm) - h_v(4.22K, 1atm)}{h_\ell(4.22K, 1atm) - h_v(4.22K, 1atm)} = \frac{(26.00J/g - 30.13J/g)}{(9.71J/g - 30.13J/g)} = 0.202$$

$$\dot{m}_{he} h_{he}(8K, 10atm) = Q_2 + \dot{e}_{he} h_{he}(7K, 10atm)$$

$$Q_2 = \dot{m}_{he} [h_{he}(8K, 10atm) - h_{he}(7K, 10atm)] = (1g/s)(33.44J/g - 26.00J/g) = 7.44W$$

$$\dot{m}_{he} h_{he}(46K, 10atm) = Q_1 + \dot{m}_{he} h_{he}(30K, 10atm)$$

$$Q_1 = \dot{m}[h_{he}(46K, 10atm) - h_{he}(30K, 10atm)] = (1g/s)(252J/g - 168J/g) \simeq 84W$$

$$\dot{m}[h_{he}(30K, 10atm) - h_{he}(8K, 10atm)] = (\dot{m}_v + \dot{m}_{\ell r})h_v(30K, 1atm) - [\dot{m}_v h_v(4.22K, 1atm) + \dot{m}_{\ell r} h_l(4.22K, 1atm)]$$

$$\dot{m}_{\ell r} = \frac{\{\dot{m}_{he}[h_{he}(30K, 10atm) - h_{he}(8K, 10atm)] - \dot{m}_v[h_v(30K, 1atm) - h_v(4.22K, 1atm)]\}}{h_v(30K, 1atm) - h_l(4.22K, 1atm)} = \frac{(1g/s)(252J/g - 168J/g)}{(1g/s)(252J/g - 168J/g)}$$

$$\dot{m}_{\ell r}[h_{he}(295K, 10atm) - h_{he}(46K, 10atm)] = (\dot{m}_v + \dot{m}_{\ell r})[h_v(295K, 1atm) - h_v(30K, 1atm)]$$

$$\dot{m}_{he}[h_{he}(295K, 10atm) - h_{he}(46K, 10atm)] = (1g/s)(1550.0J/g - 1547.0J/g) \simeq 1296W$$

$$(\dot{m}_v + \dot{m}_{\ell r})[h_{he}(295K, 1atm) - h_{he}(30K, 1atm)] \simeq (0.798g/s + 0.144g/s)(1547.0J/g - 1547.0J/g) \simeq 1296W$$

$$P_s = \dot{m}_h \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) (P_j v_j) \left[ \left( \frac{P_a}{P_j} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

#### 4.6.9 讨论 4.7: 制冷机 vs. 制冷回环器

#### 4.6.10 讨论 4.8: 辐射传热

$$q_r = \epsilon_r \sigma T^4 \quad (4.18)$$

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_{cl} \epsilon_{wm}}{\epsilon_{cl} + \epsilon_{wm} - \epsilon_{cl} \epsilon_{wm}} \quad (4.19)$$

$$q_r = \epsilon_r \sigma (T_{wm}^4 - T_{cl}^4) \quad (4.20)$$

$$q_r = \frac{\epsilon_r}{N_i + 1} \sigma (T_{wm}^4 - T_{cl}^4) \quad (4.21)$$

#### 4.6.11 讨论 4.9: 残余气体的对流传热

$$q_g = \eta_g P_g (T_{wm} - T_{cl}) \quad (4.22)$$

#### 4.6.12 讨论 4.10: 真空泵系统

#### 4.6.13 讨论 4.11: 固态制冷工质/磁体

$$D_{th} = \frac{k}{\varrho c_p} \quad (4.23)$$

$$T_{sd} = \frac{1}{D_{th}} \left( \frac{\delta_{sd}}{\pi} \right)^2 \quad (4.24)$$

#### 4.6.14 问题 4.3: 固态制冷剂冷却的磁体

$$h(15K) - h(10K) \simeq \frac{C_p(10K) + C_p(15K)}{2} (15K - 10K) \simeq \frac{(0.175J/cm^3K + 0.475J/cm^3K)}{2} (5K) \simeq 1.625J/cm^3$$

$$[\Delta(10K \rightarrow 15K)]_{15liter}^{0.25W} = \frac{(15000cm^3)(1.625J/cm^3)}{(0.25W)(3600s/h)} \simeq 27.1h \ 30h$$

$$\nu_{N2} = \pi D\ell \Delta r_{N2} \Delta r_{N2} = \frac{\mu_{N2}}{\pi D\ell} = \frac{(15000cm^3)}{\pi(90cm)(30cm)} = 1.8cm$$

$$\tau_{sd} = \frac{1}{D_{th}} \left( \frac{\delta_{sd}}{\pi} \right)^2 = \frac{1}{(55 \times 10^{-2}cm^2/s)} \left( \frac{1.8cm}{\pi} \right)^2 0.6s \quad (4.25)$$

$$h(15K) - h(10K) \simeq \frac{C_p(10K) + C_p(15K)}{2} (15K - 10K) \simeq \frac{(0.400J/cm^3K + 0.875J/cm^3K)}{2} (5K) \simeq 3.2J/cm^3$$

$$V_{Ne}(10K \rightarrow 15K) = \frac{(27.1h)(3600s/h)(2.5W)}{(3.2J/cm^3)(1000cm^3/liter)} \simeq 7.6liter \ \frac{1}{2} \times 15liter$$

$$V_{Ne}(10K \rightarrow 15K) = \frac{(0.486h)}{0.89h} (15liter) \simeq 8.2liter \simeq \frac{1}{2} \times (15liter)$$

$$[\Delta t(15K \rightarrow 60K)]_{15liter}^{3.3W} = \left( \frac{15liter}{1liter} \right) \left( \frac{1W}{3.3W} \right) [\Delta t(15K \rightarrow 60K)]_{1liter}^{1W} \simeq (15)(0.303)(17.15h) = 78h \ 80h$$

$$\int_{20K}^{T_i} [C_p(T)]_{cu} dT = 5J/cm^3$$

$$h(35K) - h(30K) \simeq \frac{C_p(30K) + C_p(35K)}{2} (35K - 30K) \simeq \frac{(1.24J/cm^3K + 1.55J/cm^3K)}{2} (5K) \simeq 7.0J/cm^3$$

$$[\Delta t(30K \rightarrow 35K)]_{15liter}^{10W} = \frac{(15000cm^3)(7.0J/cm^3)}{(10W)(3,600s/h)} \simeq 2.9h \ 3h$$

$$h(40K) - h(35K) \simeq \frac{C_p(35K) + C_p(35.61K)}{2} (35.61K - 35K) + \Delta h(35.61K) + \frac{C_p(35.61K) + C_p(40K)}{2} (40K - 35.61K)$$

$$\tau_{sd} = \frac{1}{D_{th}} \left( \frac{\delta_{sd}}{\pi} \right)^2 \quad (4.26)$$

$$p_{sd} = [h(35K) - h(30K)] \frac{\delta_{sd}}{\tau_{sd}} = (7.0 J/cm^3) \frac{(0.04cm)}{(0.067s)} = 4.2 W/cm^2$$

#### 4.6.15 讨论 4.12: 温升和场均匀性

$$\alpha(T) = \frac{1}{L_o} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_P \quad (4.27)$$

$$\alpha(T) = aT + bT^3 \quad (4.28)$$

$$\left( \frac{\Delta L}{L_o} \right)_{cu} = \int_{10K}^{15K} (5 \times 10^{-9}T + 3 \times 10^{-11}T^3) dT = 0.62 \times 10^{-6} \quad (4.29)$$

#### 4.6.16 讨论 4.13: 低温热测

#### 4.6.17 讨论 4.14: 气冷铜电流引线

$$Q_{in} = [Ak(T) \frac{dT}{dz}]_{z+\Delta z} + \dot{m}_I c_p(T) T + \frac{\rho(T) I_o^2}{A} \Delta z \quad (4.30)$$

$$Q_{out} = [Ak(T) \frac{dT}{dz}]_z + \dot{m}_I c_p(T) (T + \Delta T) \quad (4.31)$$

$$[Ak(T) \frac{dT}{dz}]_{z+\Delta z} - [Ak(T) \frac{dT}{dz}]_z - \dot{m}_I c_p(T) \Delta T + \frac{\rho(T) I_o^2}{A} \Delta z = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{d[Ak(T) \frac{dT}{dz}]}{dz} - \dot{m}_I c_p(T) \frac{dT}{dz} + \frac{\rho(T) I_o^2}{A} = 0 \quad (4.33)$$

$$-\dot{m}_I c_{p0} \frac{dT}{dz} |_{z=0} + \frac{\rho(T) I_o^2}{A} \simeq 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{dT}{dz} |_{z=0} \simeq \frac{\rho_0 I_o^2}{A \dot{m}_I c_{p0}} \quad (4.35)$$

$$Q_{I_o} = Ak(T_0) \frac{dT}{dz} |_{z=0} = \frac{k_0 \rho_0 I_0^2}{\dot{m}_I c_{p0}} \quad (4.36)$$

$$\dot{m}_I = \frac{Q_{I_o}}{h_L} \quad (4.37)$$

$$\dot{m}_I = I_o \sqrt{\frac{k_0 \rho_0}{c_{p0} h_L}} \quad (4.38)$$

$$\frac{Q_{I_o}}{I_o} = \sqrt{\frac{h_L k_0 \rho_0}{c_{p0}}} \quad (4.39)$$

$$\frac{Q_{I_o}}{I_o} \simeq \sqrt{\frac{(20.7 \times 10^3 J/kg)(600 W/mK)(2.5 \times 10^{-10} \Omega m)}{5.26 \times 10^3 J/kgK}} = 7.7 \times 10^{-4} W/A = 0.77 mW/A \text{ 1mW/A} \quad (4.40)$$

$$\dot{m}_I c_p(T) \frac{dT}{dz} + \frac{\rho(T) I_o^2}{A} = 0 \quad (4.41)$$

$$\int_{T_o}^{T_i} \frac{dT}{\rho(T)} = \int_0^\ell \frac{I_o^2 dz}{A \dot{m}_I \tilde{c}_p} = \frac{I_o^2 \ell}{A \dot{m}_I \tilde{c}_p} \quad (4.42)$$

$$\int_{T_o}^{T_i} \frac{dT}{\rho(T)} \simeq 1.2 \times 10^{11} K \Omega m \quad (4.43)$$

$$\int_{T_o}^{T_i} \frac{dT}{\rho(T)} \simeq \left( \frac{I_o^2 \ell}{A c_{p0}} \right) \frac{1}{I_o} \sqrt{\frac{c_{p0} h_L}{k_0 \rho_0}} \quad (4.44)$$

$$\left( \frac{I_o \ell}{A} \right)_{ot} \equiv \zeta_o \simeq \left[ \int_{T_o}^{T_i} \frac{dT}{\rho(T)} \right] \sqrt{\frac{c_{p0} k_0 \rho_0}{h_L}} \quad (4.45)$$



# 第五章 磁化

## 5.1 引言

本章我们使用 Bean 于 1962 年提出的唯象磁化理论来讨论第 II 类超导体的磁化问题。如第一章指出的，对多数超导磁体应用所关注的磁场范围 ( $>\sim 0.5T$ )，第 II 类超导体处于混合态，即在超导态的“海”中还存在正常态的“岛”。当第 II 类超导体处于时变磁场或时变传输电流中时，这些岛中将产生耗散，体现为磁通跳跃（一种暂态现象）或交流损耗。所谓的 Bean 临界态模型，以闭式表达式阐明了消除磁通跳跃和最小化交流损耗的必要条件。

如今，已经有了可以完全消除磁通跳跃的生产 LTS 线/缆的成熟方法。我们在本章将学习到，磁通跳跃在 HTS 中并不像在 LTS 中是那么重要。如果仅在消除磁通跳跃方面磁化是重要的，那在 HTS 应用中可将其视为次要考虑问题。然而，由于磁化在 LTS 和 HTS 的交流损耗中也起到重要作用，所以我们用一章来研究它。交流损耗将在第七章有更详细的讨论。

## 5.2 第 II 类超导体的 Bean 理论

### 5.2.1 无传输电流

和很多成功的理论一样，Bean 模型通过一些假设，可用简单的数学推导出闭式表达式，与实验结果取得了很好的一致性。在 Bean 模型中，超导体有最简单的几何结构—— $x$  方向宽度为  $2a$ ， $y$  和  $z$  向无限长。磁场  $(H, B, M)$  指向  $y$  向，而电流  $(I, J)$  在  $z$  向流动。在 Bean 模型中， $J = J_c$ （临界电流密度），并假定其不依赖于磁场和温度。

于是，磁场本构关系可以简化为下式：

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (5.1)$$

根据 Bean 模型，磁感应强度  $B$  在硬超导体内的次表面内不为 0，而是等于超导体的体平均  $\mu_0 H_s$ ， $H_s$  是超导体内的磁场。

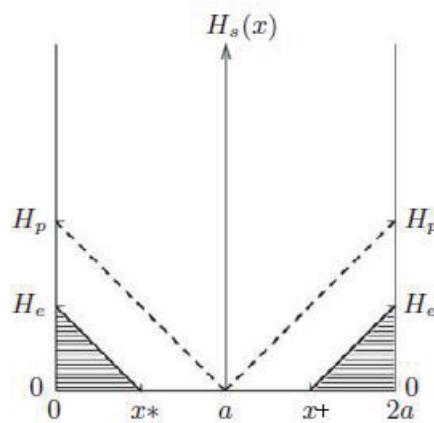


图 5.1：置于外磁场中的第 II 类超导体板

图 5.1展示了第无限高 ( $y$  向)、无限深 ( $z$  向)、 $2a$  宽 ( $x$  向) 第 II 类超导体板的。板此前未处于磁场中，外磁场  $H_e$  平行于板施加，将在板内产生  $H_s(x)$ 。根据安培定律  $\nabla \times H = J = J_c$ ，我们可以得到超导体内的磁场  $H_s(x)$ ：注意到， $H_s(x)$  的斜率等于  $J_c$ ，当  $J_c$  大于 0 时 ( $z$  向，朝向纸面外) 大于 0， $J_c$  小于 0 时小于 0。 $x^*$  和  $2a - x^+$  给出磁场的穿透程度，表示为

$$x^* = \frac{H_e}{J_c} \quad (5.2)$$

在  $H_e = H_p \equiv J_c a$  时， $x^* = x^+ = a$ ，整个板处于临界态。 $H_p$  是所谓的穿透磁场，定义为

$$H_p \equiv J_c a \quad (5.3)$$

板内的平均磁感应强度由下式给出：

$$\begin{aligned}
 B_s &= \frac{\mu_0}{2a} \int_0^{2a} H_s(x) dx \\
 &= \frac{\mu_0}{2a} \times <\text{图 5.1 中的阴影面积}> \\
 &= 2 \times \frac{\mu_0}{2a} \times \frac{H_e x^*}{2} = \frac{\mu_0 H_e^2}{2a J_c} \\
 &= \frac{\mu_0 H_e^2}{2H_p}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

根据定义  $M = B_s / \mu_0 - H_e$ , 可得

$$-M = H_e - \frac{H_e^2}{2H_p} \quad (0 \leq H_e \leq H_p) \tag{5.5}$$

超导体是抗磁性的,  $-M$  是它的磁化强度。

随着外磁场的进一步增加, 磁场将最终穿透整个板 ( $H_e \geq H_p$ ), 根据  $B_s = H_e - H_p/2$ , 有

$$-M = \frac{1}{2} H_p = \frac{1}{2} J_c a, \quad (H_e \geq H_p) \tag{5.6}$$

图中的虚线磁化线对应  $H_e = H_p$  情况。

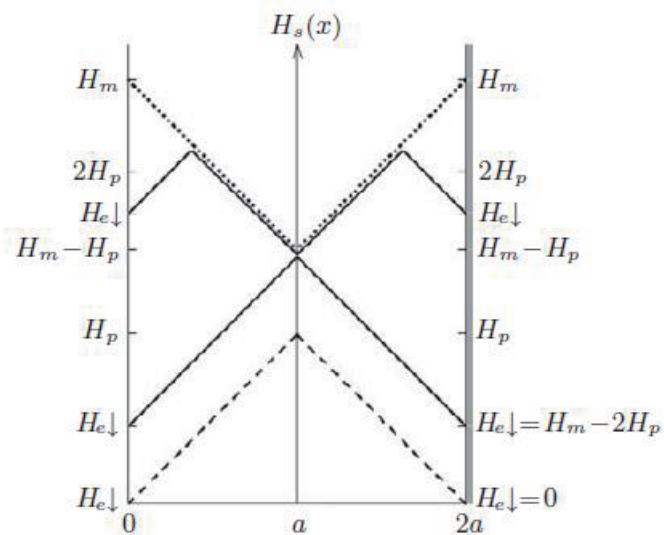


图 5.2: 退场过程中的  $H_s(x)$ :  $H_e \downarrow = H_m \rightarrow 0$

图 5.2 中的点线表示的是  $H_s(x)$  在  $H_e = H_m > 2H_p$  时的情况。其中， $H_m$  是外施磁场序列的最大值。

当  $H_e$  从  $H_m$  减至 0 的过程中， $H_s(x)$  如图 5.2 中的实线所示。当  $H_e = H_m - 2H_p$  时， $-M$  成为  $-H_p/2$ 。可以看到，外场从  $H_m$  到  $H_e \downarrow= 0$  的退场过程中， $-M(H_e)$  由下式给出

$$\begin{aligned} -M(H_e) &= \frac{1}{2}H_p - (H_m - H_e) + \frac{(H_m - H_e)^2}{4H_p} & (5.7) \\ &, (H_e \downarrow= H_m \rightarrow H_m - 2H_p) \\ -M(H_e) &= -\frac{1}{2}H_p, \quad (H_e \downarrow= H_m - 2H_p \rightarrow 0) \end{aligned}$$

当外场施于“纯”板时， $-M$  是  $H_e$  的二次函数。而在  $H_e$  退回 0 时， $-M(H_e) = -H_p/2$ 。“剩余”磁化如图 5.2 中的虚划线所示。可知当置于外场中，第 II 类超导体将会被磁化。剩余磁场不能通过外施磁场的方法去除。一种去除它的方法是加热超导体至临界温度  $T_c$  以上。图 5.3 给出

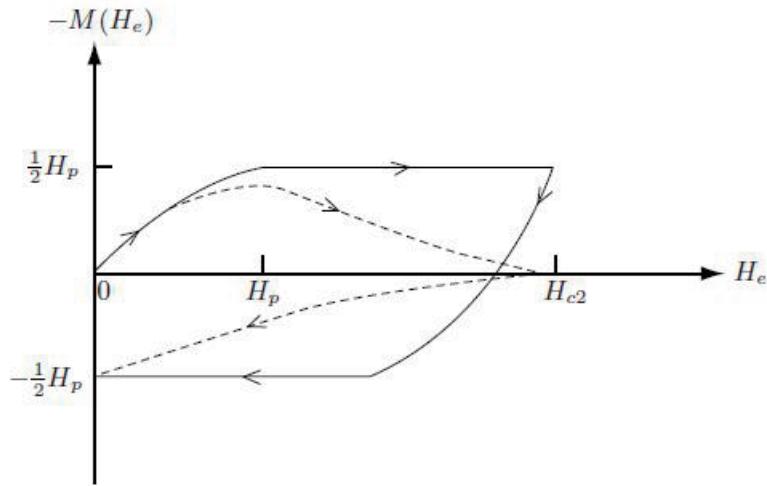


图 5.3：某硬超导体在外磁场 ( $0 \rightarrow H_{c2} \rightarrow 0$ ) 下的磁化和磁场的关系。其中，实线表示  $J_c = \text{const}$ ；虚线定性表示了电流随磁场下降的事实。

了完整的磁场从 0 增至  $H_m = H_{c2}$  又退回 0 的完整图像。其中， $H_{c2}$  是超导体的上临界场。实线是基于由 Bean 的关于  $J_c$  不依赖磁场的假设而导出的 5.5-5.7 式确定的。虚划线是对更接近实际情况的定性修正，反映了  $J_c$  随磁场衰减的事实，在  $H_{c2}$  时为 0。注意到，磁化是有回滞的，在  $H_p < H_e < H_m - 2H_p$ ， $\Delta M = -M(H_e \uparrow) + M(H_e \downarrow)$  范围内，磁场的

幅值为  $H_p = J_c a$ 。于是，有时通过获得  $J_e(H_e)$  数据来做磁化的测量。图

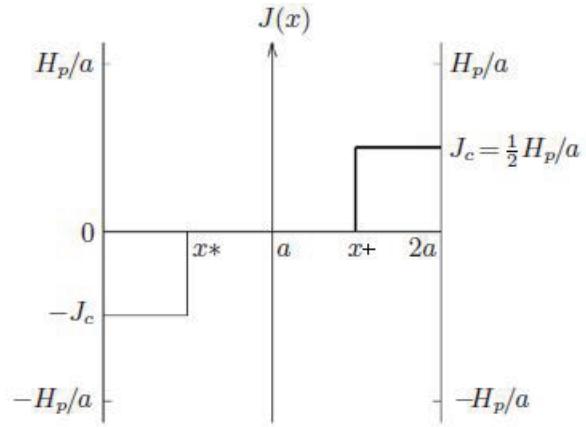


图 5.4: 在图 5.1 给出的磁场  $H_s(x)$  下的  $J(x)$

5.4给出了在施加图 5.1分布磁场下的板内电流分布。注意到  $J_c = H_p/2a$ 。 $y$  向的单位长度净电流沿板的  $z$  向流动，由下式给出

$$I = \int_0^{2a} J(x) dx = 0 \quad (5.8)$$

### 5.2.2 传输电流对磁化的效应

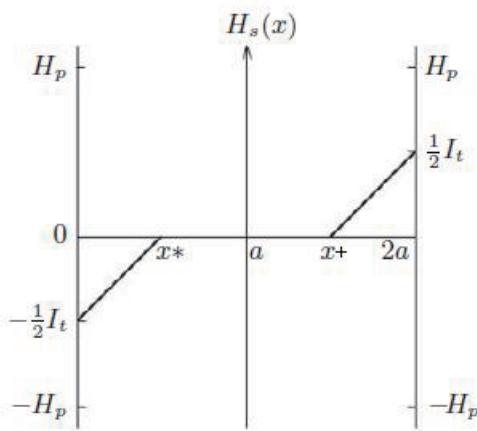
当有传输电流  $I_t$  ( $y$  向单位长度) 在板中沿  $+z$  方向 (流出纸面) 时，我们看到在  $x = 2a$  处磁场有一个  $I_t/2$  的增长，在  $x = 0$  处有一个  $I_t/2$  的减少。

因为板内屏蔽电流是从每一个表面逐渐进入内部的，板内的场分布  $H_s(x)$  如图 5.5所示。图中的  $x^*$  和  $x^+$  由下式给出：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}I_t + J_c x^* &= 0 \\ J_c(x^* - 2a) + \frac{1}{2}I_t &= 0 \\ x^* = \frac{I_t}{2J_c} \quad \& \quad x^+ = 2a - \frac{I_t}{2J_c} \end{aligned} \quad (5.9)$$

图 5.6 给出了板内的电流分布  $J(x)$ 。沿着板宽度方向积分，我们可以得到板内的净电流就是  $I_t$ ：

$$I = \int_0^{2a} J(x) dx = J_c x^* + J_c(2a - x^+) = 1/2I_t + 1/2I_t = I_t \quad (5.10)$$

图 5.5: 板内存在传输电流  $I_t$  时的磁场  $H_s(x)$ 

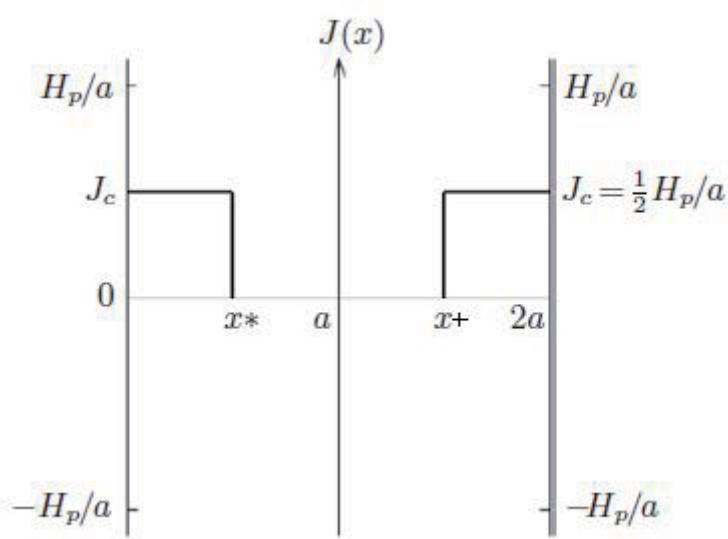
也即，板内的净电流就是外施电流。注意到，若外磁场  $H_e \vec{i}_y$  在  $I_t$  通入后施加，基本不会改变电流的分布（图 5.5 和 5.6）；但若外磁场先于电流施加，则会出现不同的  $H_s(x)$  和  $J(x)$ 。

### 5.3 测量技术

这里我们描述最经常使用的测量磁化的技术。图 5.7 指示了本项技术的关键组件：1) 初级查找线圈；2) 次级查找线圈；3) 平衡分压计。图中未画出但也同等重要的是积分器，它将桥路输出电压  $V_{bg}$  转换为直接正比于  $M(H_e)$  的电压信号。测试样品置于初级查找线圈内，。当初级查找线圈和次级查找线圈置于在两个线圈所占的空间内基本均匀的时变外磁场  $H_e(t)$  中，各查找线圈的端子上将出现感应电压  $V_{pc}(t)$  和  $V_{sc}(t)$ ：

$$\begin{aligned} V_{pt}(t) &= \mu_0 N_{pc} A_{pc} \left[ \frac{dM}{dt} + \left( \frac{dH_e}{dt} \right)_{pc} \right] \\ V_{sc}(t) &= \mu_0 N_{sc} A_{sc} \left( \frac{dH_e}{dt} \right)_{sc} \end{aligned} \quad (5.11)$$

下标 pc 和 sc 分别表示初级线圈 (primary coil) 和次级线圈 (second coil)。N 是各线圈的匝数。A 是耦合  $H_e(t)$  的每一匝线圈的有限面积。 $H_e$  是磁场在各线圈内的空间平均值。

图 5.6: 在图 5.5 给出的磁场  $H_s(x)$  下的  $J(x)$

桥输出电压  $V_{bg}$  由下式给出：

$$V_{bg}(t) = (k - 1)V_{pt}(t) + kV_{sc}(t) \quad (5.12)$$

其中， $k$  是一个介于 0-1 的常数，表示分压计在初级线圈侧的分压系数（图 5.7）。联立上两式，可得

$$V_{bg}(t) = (k - 1)\mu_0 N_{pc} A_{pc} \frac{dM}{dt} + (k - 1)\mu_0 N_{pc} A_{pc} (\frac{dH_e}{dt})_{pc} + k\mu_0 N_{sc} A_{sc} (\frac{dH_e}{dt})_{sc} \quad (5.13)$$

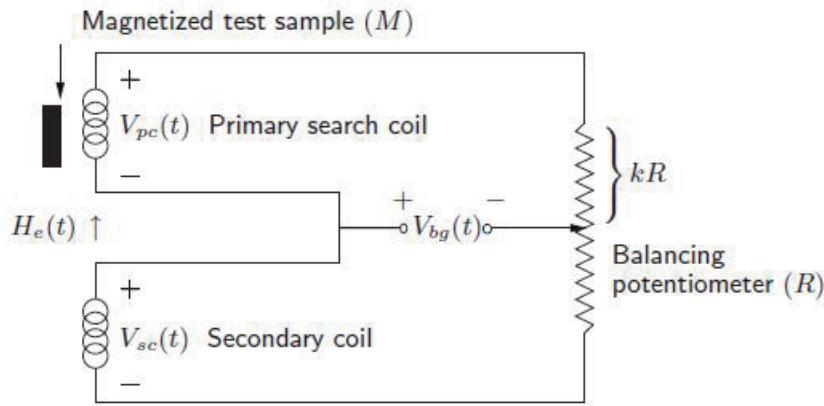


图 5.7：磁化测量原理图

通过调节分压系数  $k$  可以满足以下条件，令  $V_{bg}(t)$  正比于  $dM/dt$ ：

$$(k - 1)\mu_0 N_{pc} A_{pc} (\frac{dH_e}{dt})_{pc} + k\mu_0 N_{sc} A_{sc} (\frac{dH_e}{dt})_{sc} = 0 \quad (5.14)$$

$$V_{bg}(t) = (k - 1)\mu_0 N_{pc} A_{pc} \frac{dM}{dt}$$

尽管实际上上式第一式所给的归零条件在很大范围内不是总能满足，但是第二式对多数情况都是很好的近似。一般， $k$  接近 0.5。 $V_{bg}$  馈入一个积分器，其输出正比于  $M$ 。特别的，如果样品是“纯”的 ( $M = 0$ )，磁场  $H_e(t)$  从 0 ( $t = 0$ ) 增 ( $\uparrow$ ) 至  $H_e$  ( $t = t_1$ ) 时，我们有

$$V_{mz}(H_e \uparrow) = \frac{1}{\tau_{it}} \int_0^{t_1} V_{bg}(t) dt = \frac{(k - 1)\mu_0 N_{pc} A_{pc}}{\tau_{it}} M(H_e) \quad (5.15)$$

式中， $\tau_{it}$  是有效积分常数。如果  $H_e > H_p$ ，此时有  $M(H_e) = -H_p/2 = -J_c a/2$ ，则上式简化为

$$V_{mz}(H_e \uparrow > H_p) = -f_m \frac{(k - 1)\mu_0 N_{pc} A_{pc}}{\tau_{it}} \left( \frac{J_c a}{2} \right) \quad (5.16)$$

因数  $f_m$  是磁性材料体积与样品总体积之比。之所以需要这个因数是因为待磁化测试的样品一般不全是由磁性材料组成。比如多丝（层）导体，样品除了超导丝（层）外，还存在基底金属和其他非磁性材料。如果外场按  $0 \rightarrow H_m > H_p \rightarrow H_e \downarrow < H_m - 2H_p$  顺序，我们有

$$V_{mz}(H_e \downarrow < H_m - 2H_p) = -f_m \frac{(k-1)\mu_0 N_{pc} A_{pc}}{\tau_{it}} \left( \frac{J_c a}{2} \right) \quad (5.17)$$

于是， $\Delta V_{mz} = V_{mz}(H_e > H_p) - V_{mz}(H_e \downarrow < H_m - 2H_p)$  正比于在  $H_e$  处磁化曲线的“宽度”：

$$\Delta V_{mz} = -f_m \frac{(k-1)\mu_0 N_{pc} A_{pc}}{\tau_{it}} J_c a \quad (5.18)$$

上式我们看出， $\Delta V_{mz}$  是直接正比于  $J_c$  和  $a$  的。图 5.8 给出的是  $MgB_2$

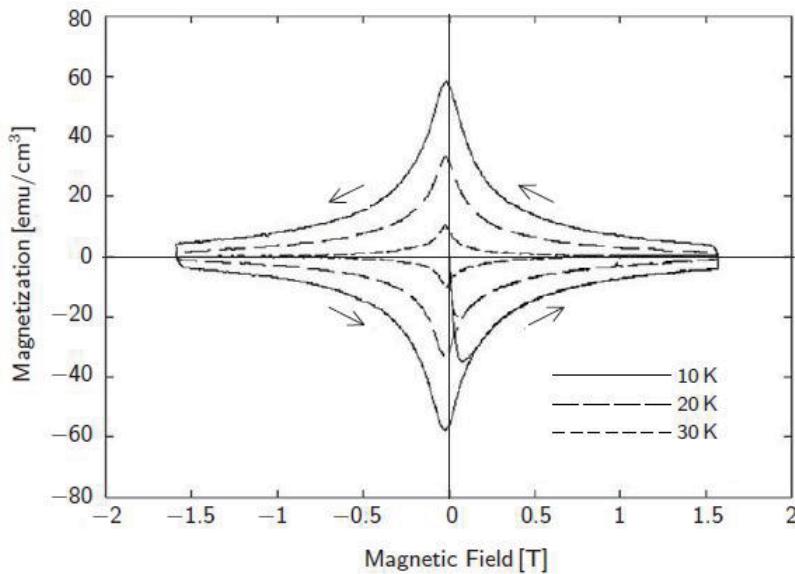


图 5.8:  $MgB_2$  在  $10K, 20K, 30K$  三种温度下的磁化和磁场关系

在  $10K, 20K, 30K$  时，磁场按  $0 \rightarrow 1.7T \rightarrow 0 \rightarrow -1.7T \rightarrow 0$  完整施加时的磁化与磁场的关系。注意到，和图 5.3 不同，本图中还有  $+M(H_e)$ 。因为凸显在  $x$  轴上（磁场）并不偏斜，我们可以认为本测试中初次、二次线圈已得到很好的平衡。

磁化的回滞表明， $MgB_2$  是第 II 类超导体，它的抗磁性在每一个图线的第一部分（磁场从 0 增至  $1.7T$  时）明显可见。

从 Bean 模型可知,  $H_p = J_c a$ , 即磁化直接正比于  $J_c$ 。然而, 实际上  $J_c$  不仅是磁场还是温度的减函数。图 5.8 中明显可见对  $J_c$  和  $T$  的依赖。图中的  $M$  的单位是  $emu/cm^3$ , 不是 SI 单位。

## 5.4 专题

### 5.4.1 讨论 1: 传导电流磁化

#### 5.4.2 讨论 2: SQUID 用于磁化测量

### 5.4.3 讨论 3：“Bean 细丝” 中的磁化

#### 5.4.4 讨论 4：磁化中的 $J_c$

### 5.4.5 问题 5：磁化测量

5.4.6 讨论 6：磁扩散和热扩散

### 5.4.7 问题 7：磁通跳跃判据

5.4.8 问题 8：磁通跳跃

### 5.4.9 问题 9：导线换位

5.4.10 问题 10：导体磁化

### 5.4.11 讨论 11：换位

5.4.12 讨论 12: HTS 中的磁通跳跃?



# 第六章 稳定性

## 6.1 引言

可靠性是所有器件设备都必须满足的一个主要指标，超导磁体当然也不例外。历史上看，可靠性曾是超导磁体中最困难，因而也是最具挑战性的一个方面。如图 1.5 所示，超导电性存在于由三个参数（电流密度  $J$ ，磁场  $H$  和温度  $T$ ）为边界的相体积内部。

这三个参数中的电流密度和磁场，至少在正常运行条件下，设计者是可以很好的定义并控制它们的。甚至在复杂的故障模式条件下，比如含有多个螺管的混合磁体或嵌套多线圈磁体，电流密度和磁场也是可控的。可以说：磁体设计者能够牢牢掌控这两个参数。到了温度参数，就不如此了。温度这三个参数中最难控的。相对运行点的温度偏移，在时间上难以预测，在空间上（即在线圈内部）就更难控制了。储存在磁体内的磁场能和机械能，很容易转化为热能，引起线圈内部某些位置的导体温度上升到超过其临界值。实际上，最终超导磁体的所有“稳定性问题”都可以归为磁体设计者不能控制线圈温度保持在运行点。

本章我们考虑 1) 超导线圈内控制温度的基本物理问题；2) 线圈内不可预测温升发生可能性的稳定性评估方法。第 7 和第 8 章同样讨论不同条件下线圈内温升：第 7 章讨论温升的原因或源；第 8 章讨论控制磁体不可预测温升的保护方法。首先，LTS 和 HTS 磁体的稳定性问题就截然不同。

### LTS vs. HTS

如图 1.6 给出的，稳定性的实现难度和费用随运行温度提高而降低。在下面的讨论中，我们将比较 HTS 和 LTS 的“稳定裕度”，并证明 HTS 磁体实际上是非常稳定的。换句话说，任何 HTS 磁体都会达到其运行电流，且

不会存在“提前失超（premature quench）”。

## 6.2 稳定性理论和标准

### 6.2.1 公式 6.1 涉及的概念

每一个概念……

磁通跳跃 如第五章……

低温稳定性 基本概念……

动态稳定性 第五章……

等效面积 标准……

**MPZ** 最小传播区域……

不稳定情况 最后……

6.3 电流密度 253

6.2.2 热能量

6.2.3 热传导

6.2.4 焦耳热

6.2.5 扰动谱

6.2.6 稳定裕度 vs 扰动能

6.2.7 冷却

### 6.3 电流密度

6.3.1 横截面积

6.3.2 复合物超导体

6.3.3 绕组中的电流密度

### 6.4 专题

6.4.1 讨论 1：低温稳定性——电路模型

#### 6.4.2 问题 2：低温稳定性——温度依赖

### 6.4.3 讨论 3: Stekly 低温稳定性判据

#### 6.4.4 讨论 4：复合物超导体

#### 6.4.5 问题 5：低温稳定性——非线性冷却曲线

#### 6.4.6 讨论 6：等效面积判据

6.4.7 讨论 7：超导体“指数” $n$

#### 6.4.8 问题 8：复合物超导体（n）——电路模型

6.4.9 问题 9：电流脉冲下的 YBCO

#### 6.4.10 讨论 10: CICC 导体

6.4.11 问题 11：冷却复合物导体的伏安关系

#### 6.4.12 问题 12：混合 III SCM 的稳定性分析

6.4.13 讨论 13: cryostable vs 准绝热磁体

#### 6.4.14 讨论 14: MPZ 概念

6.4.15 问题 15：绝热绕组中的耗散能密度





# 第七章 交流及其他损耗

## 7.1 引言

### 7.2 交流损耗

超导体朝向与外磁场的关系

时变磁场

交流损耗的能量密度表

#### 7.2.1 磁滞损耗

Bean 板的磁滞损耗

外磁场时间序列下的 Bean 板

#### 7.2.2 多丝复合物中的耦合损耗

耦合时间常数

有效基底电阻

#### 7.2.3 涡流损耗

### 7.3 其他损耗

#### 7.3.1 分段电阻

搭接电阻（接头）

接触电阻

机械接触开关

#### 7.3.2 机械扰动

导体移动和矫正

填充材料分裂和矫正

### 7.4 声发射技术

### 7.5.2 问题 2：磁滞能量密度——在“中”磁场时间序列的“纯” Bean 板

7.5.3 问题 3：磁滞能量密度——在“大”磁场时间序列的“纯”  
Bean 板

#### 7.5.4 讨论 4：磁滞能量密度——磁化的 Bean 板

### 7.5.5 讨论 5：载有直流电流的 Bean 板

### 7.5.6 问题 6：磁滞能量密度——载有直流电流的 Bean 板

### 7.5.7 问题 7：自场磁滞能量密度——Bean 板

7.5.8 讨论 8：磁体整体的交流损耗

### 7.5.9 讨论 9：测量交流损耗的技术

7.5.10 讨论 10：CICC 中的交流损耗

### 7.5.11 讨论 11：HTS 中的交流损耗

**7.5.12 问题 12:  $Nb_3Sn$  中的磁滞损耗**

### 7.5.13 问题 13：混合 III SCM 中的交流损耗

### 7.5.14 讨论 14：混合 III NbTi 线圈中的分段耗散

### 7.5.15 讨论 15：持续模式运行 & “指数”

# 第八章 保护

## 8.1 引言

保护是五大关键设计和运行项目之一——其他四项是稳定性、机械完整性、制冷和导体。

### 8.1.1 热能密度 vs. 磁能密度

除非绕组得到了保护，不然磁体绕组的一小部分，即“热点”，就要吸收掉存储于绕组中的大部分磁能。这样，该部分将过热并永久性损坏。不过，熔化磁体中单位绕组体积的热能密度要远大于磁体存储的磁能密度。

仅考虑将磁体内部空间内存储的能量全部绝热转换为热，引起铜（绕组的一种代表性材料）的焓密度  $h_{Cu}(T)$  变化。如果是从 4K（或者 80K）加热到它的熔点 1356K，那么初始磁感应密度  $B_0$  将高达 150T：

$$\begin{aligned}\frac{B_0^2}{2\mu_0} &= h_{Cu}(1356K) - h_{Cu}(4K/80K) \approx 5.2 \times 10^9 J/m^3 \\ B_0 &\approx \sqrt{2(4\pi \times 10^{-7} H/m)(5.2 \times 10^9 J/m^3)} \approx 115T\end{aligned}\quad (8.1)$$

8.1.2 热点和热点温度

8.1.3 绕组材料的温度数据

8.1.4  $T_f$  的安全、风险、高度风险区间

8.1.5 温度引起的应变

## 8.2 绝热加热

8.2.1 恒定电流模式下的绝热加热

8.2.2 恒定放电量模式下的绝热加热

8.2.3 引线短接的磁体的绝热加热

8.2.4 恒定电压模式下的绝热加热

## 8.3 高电压

8.3.1 电弧环境

8.3.2 Paschen 电压试验

8.3.3 失超磁体内的电压峰值

## 8.4 正常区传播 (NZP)

8.4.1 轴向 NZP 速度

8.4.2 “制冷” 条件下的 NZP

8.4.3 横向匝间速度

8.4.4 热-流体失超恢复 (THQB)

8.4.5 交流损耗诱导的 NZP

## 8.5 计算机仿真

## 8.6 自保护磁体

8.6.1 尺度限制

## 8.7 孤立磁体的被动保护

## 8.8 主动保护

### 8.9.2 问题 2：6 kA 气冷 HTS 引线的保护

### 8.9.3 问题 3：制冷机制冷的 NbTi 磁体的保护

#### 8.9.4 问题 4：混合 III SCM 的“热点”温度

### 8.9.5 讨论 5：失超电压探测——一个变种

#### 8.9.6 问题 6：抑制电阻的设计

### 8.9.7 讨论 7：磁体的“缓慢”放电模式

### 8.9.8 讨论 8：低阻电阻器设计

### 8.9.9 讨论 9：过热 & 内部电压判据

8.9.10 讨论 10：Bi2223 带电流引线的保护

### 8.9.11 讨论 11: $MgB_2$ 磁体的主动保护

8.9.12 问题 12: NMR 磁体的被动保护

### 8.9.13 讨论 13: HTS 磁体到底要不要保护?

# 第九章 螺管示例, HTS 磁体及结 论

9.1 引言

9.2 螺管磁体示例

9.3 HTS 磁体

9.4 结论