泛函分析讲义

A Course in Functional Analysis

朱森 ◦ 编

2024

泛函分析讲义

朱森　编

2024 年 9 月

吉林大学内部教材

未出版前禁止外传！

前言

经典分析以欧氏空间$\mathbb{R}^n$及上面的函数或映射为研究对象. 数学分析中的微积分、高等代数中的矩阵理论、复变函数论中的解析函数论、实变函数中的Lebesgue 积分理论皆属于此范畴. 十九世纪末至二十世纪初数学物理及量子力学的发展, 迫切需要人们发展包括诸多函数空间在内的无穷维空间上的分析学. 泛函分析在这一背景下应运而生.

泛函分析以无穷维空间为主要研究对象, 重点关注无穷维空间的结构、上面的函数以及相互之间的映射, 它综合运用分析、代数、几何的观点和方法处理问题, 建立了现代分析的研究框架, 成为数学、物理、工程技术中重要的数学工具.

19世纪八十年代至20世纪二十年代, 是泛函分析的萌芽时期; 20世纪三十年代, 泛函分析成为一个独立的数学分支. 泛函分析学科的形成得益于众多数学家的工作, 其中尤以弗雷歇(Fréchet)、希尔伯特(Hilbert)、巴拿赫(Banach)的工作影响巨大. 弗雷歇利用集合论在建立函数空间和泛函的抽象理论中获得了第一个深刻结果, 开拓了距离空间的完整理论. 希尔伯特针对积分方程的系统研究, 建立了希尔伯特空间理论. 巴拿赫给出赋范线性空间的一般定义和公理体系, 被称为泛函分析的奠基人.

本书重点介绍泛函分析中的基本概念、典型例子、重要结果, 旨在以温和的方式向读者渗透泛函分析的基本理论和思想方法, 以领会泛函分析的精神. 为此, 在介绍概念时, 我们常以有限维情形为背景, 提出自然的问题, 引导学生思考, 以便于初学者了解本课程与前期课程的逻辑关系, 或将有助于培养学生发现问题、提出问题的能力.

本书包含了线性泛函分析的主要内容. 前四章主要为本科泛函分析的内容.

第一章将介绍距离空间基本理论, 包含典型例子、可分性、完备性、紧性及相关联的Baire纲定理、压缩映像原理、Arzelá-Ascoli定理等.

第二章将介绍赋范线性空间以及有界线性算子的基本理论, 包括线性空间、赋范线性空间、有界线性算子、对偶空间、弱拓扑、Banach共轭算子等概念, 以及线性泛函及线性算子理论中的重要定理, 诸如Hahn-Banach定理、共鸣定理、开映射定理、逆算子定理、闭图形定理、闭值域定理. 作为有界线性算子的应用, 这一章还包含了非线性泛函分析的内容, 包括Fréchet导数的概念以及相关的反函数定理、隐函数定理.

第三章将讨论Hilbert空间及上面的线性算子, 包括内积空间、正规正交基、Hilbert共轭算子等概念, 以及射影定理、Fréchet-Riesz表现定理、Lax-Milgram定理等.

第四章将介绍有界线性算子谱理论, 包括了谱、点谱、连续谱、剩余谱等概念和基本性质, 以及射影算子、紧算子、自伴算子、酉算子的基本理论.

目录

第 1 章　距离空间

欧氏空间$\mathbb{R}^n$由所有n元实数组构成, 它是数学分析、复变函数等前期课程的主要研究对象. 我们已对其代数、几何结构有了一定程度的了解. 对于$\mathbb{R}^n$中两个元素$x = (a_1, \cdots, a_n), y = (b_1, \cdots, b_n)$, 它们之间的距离$\rho(x, y)$ 定义为

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

有了距离, $\mathbb{R}^n$中的元素即有了远近, 进而可定义序列的收敛(愈来愈近)以及函数的连续等. 随着研究的深入, 人们需要在更广泛、抽象的集合中研究收敛以及它们上的连续函数. 因此有必要将距离的概念推广至抽象的集合中, 便得到距离空间的概念. 本章将介绍这方面的基本理论.

1.1　距离

定义

定义1.1. 设X是非空集合. 若$d(\cdot,\cdot)$是X上的一个二元函数, 即$d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, 满足: 对任意$x, y, z \in X$, 成立

1. (正定性) $d(x, y) \geq 0$, 且$d(x, y) = 0$当且仅当$x = y$;
2. (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;
3. (三角不等式) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

则称$d(\cdot,\cdot)$是X上的一个距离, 称(X, d)为一个距离空间, 称$d(x, y)$为x, y 之间的d-距离(无歧义时也称为x, y之间的距离).

(1)中定义的$\mathbb{R}^n$上的二元函数ρ满足正定性、对称性、三角不等式, 是一个距离(称为欧氏距离), $(\mathbb{R}^n, \rho)$是一个距离空间. 事实上, 距离定义中的三条公设恰抽象于欧氏距离.

注1.2.
1. 距离是用以量化不同研究对象之间差别或远近的一个概念. 差别大则距离远, 差别小则距离近. 这是一种几何化的观点.
2. 距离也称作度量, 距离空间也称作度量空间.

3. 在数学中, "空间"一般是指赋予了某种结构的集合. 这是弗雷歇(Fréchet) 通过采用康托(Cantor)创立的集合论思想, 而对空间的概念所做的推广. 这一推广符合泛函分析追求一般性和统一性的思想, 使得数学中的许多问题都可转化为空间上的函数或映射的研究. 基于上述思想, 距离空间即为赋予了"距离"的集合.

定义1.3. 若d是X上的距离, $\emptyset \neq Y \subset X$, 则$d$也是$Y$上的距离, 进而$(Y, d)$也是距离空间, 称之为$(X, d)$的一个距离子空间.

例1.4. 以$\mathbb{C}$表示复数集. 记$\mathbb{C}^n = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, \cdots, n\}$. 对$x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), y = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$\rho(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2\Big)^{1/2}.$$

易见, ρ是$\mathbb{C}^n$上的距离. $\mathbb{C}^n$实质是$\mathbb{R}^{2n}$, ρ其实就是欧氏距离. 不加其他说明时, $\mathbb{C}^n$上的距离默认为欧氏距离. $(\mathbb{R}^n, \rho)$是$(\mathbb{C}^n, \rho)$的距离子空间. 不加其他说明时, $\mathbb{R}^n$上的距离也默认为欧氏距离.

例1.5. 设$a, b \in \mathbb{R}$且$a < b$. 以$C[a, b]$表示$[a, b]$上所有复值连续函数构成的集合. 对于$f, g \in C[a, b]$, 定义

$$d(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

那么d是一个距离. 称$C[a, b]$为$[a, b]$ 上的连续函数空间. 除非另加说明, $C[a, b]$上的距离默认为上述定义的距离.

球、邻域、开集、闭包

距离自然决定了空间中点与点、点与集合乃至集合与集合的位置关系.

定义1.6. 设(X, d) 是距离空间, $x_0 \in X$, $E \subset X$.

1. 对$x \in X, \varepsilon > 0$, 记$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$, 称之为$X$ 中以x为心、ε 为半径的球.
2. 若存在$\varepsilon > 0$使得$B(x_0, \varepsilon) \subset E$, 则称$x_0$是$E$的一个内点, 称$E$为$x_0$ 的一个邻域. 显然, 以x_0为心的球都是x_0的邻域. E的所有内点构成的集合记作E°, 称为E的内部.
3. 若x_0是E^c的内点，则称x_0是E的外点. E 的所有外点构成的集合称作E的外部.

4. 若x_0既不是E的内点也不是E的外点, 则称x_0是E的一个<u>边界点</u>. E的所有边界点构成的集合称为E的<u>边界</u>, 记为∂E.

5. 若$E = E^\circ$, 则称E为X的一个<u>开</u>子集或X中的一个<u>开集</u>. 显然, 球是开集, 空集也是开集; 开集或者是空集, 或者是若干球的并. 开集的余集称为<u>闭集</u>.

6. 称$E \cup \partial E$为E的<u>闭包</u>, 记作$\overline{E}$. 易见, $x_0 \in \overline{E}$当且仅当x_0不是E的外点，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$都有$B(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$. 另外, 不难证明, E是闭集当且仅当$E = \overline{E}$.

7. 若$x \in \overline{E \setminus \{x\}}$, 则称$x$是$E$的一个<u>聚点</u>. E的所有聚点构成的集合称为E的<u>导集</u>, 记为E'.

8. 若$x_0 \in (\partial E) \setminus E'$, 则称$x_0$是$E$的一个<u>孤立点</u>. 显然, E的孤立点必在E中. 若E中每一点都是其孤立点, 则称E是一个<u>孤立集合</u>.

9. 若$E' = \emptyset$, 则称E是一个<u>离散集合</u>.

例1.7. $\mathbb{R}$中的球形如$(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\mathbb{R}^2$中的球是一个圆面, 形如$\{z = a + \mathrm{i}b : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

序列的收敛

集合上定义了距离, 即定义了其中元素的远近, 进而可定义“愈来愈近”.

定义1.8. 设(X, d)为距离空间, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$是X中的序列. 若存在$x_0 \in X$ 使得$\lim_n d(x_n, x_0) = 0$, 则称$\{x_n\}$是一个<u>收敛序列</u>且<u>收敛</u>到x_0, 称x_0 是$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个<u>极限</u>, 记为$\lim_n x_n = x_0$或$x_n \xrightarrow{d} x_0 (n \to \infty)$. 无歧义时也可直接写成$x_n \longrightarrow x_0$.

注1.9. 1. 距离空间中序列的极限若存在则必唯一(见习题1.1.5).

2. 在距离空间中, 序列的收敛可以刻画集合的聚点、边界、闭包(见习题1.1.23).

3. 不难验证, 连续函数空间$C[a, b]$中序列$\{f_n\}$收敛于$f_0 \in C[a, b]$恰为其作为函数列的一致收敛.

连续映射

与函数的情形类似, 可定义距离空间之间的连续映射.

定义1.10. 设$(X, d), (Y, d')$是距离空间, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.

1. 称f在x_0处连续, 若对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.
2. 称f是连续的, 若f在X中每点处都连续. 常以$C(X, Y)$表示从X到Y的所有连续映射构成的集合. $C(X, \mathbb{C})$简记为$C(X)$.

因此, 与$\mathbb{R}^n$上连续函数的定义一致, 映射连续的要义仍是"自变量变化小时, 因变量变化也小".

与$\mathbb{R}^n$的情况类似, 不难证明距离空间中的Heine定理.

定理1.11. 设$(X, d), (Y, d')$是距离空间, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. 那么下述等价:

(i) f在x_0处连续;

(ii) "$\{x_n\} \subset X, x_n \xrightarrow{d} x_0 \in X$"恒蕴含"$f(x_n) \xrightarrow{d'} f(x_0)$".

定义1.12. 设(X, d)是距离空间, $f : X \to X$. 若存在$q \geq 0$ 使得

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

则称f是(X, d)上的一个Lipschitz映射或满足Lipschitz条件, 称q是f的一个Lipschitz常数；进一步地, 若f有小于1的Lipschitz常数, 则称f是一个压缩映射.

显然, Lipshcitz映射是连续的.

下面的定理给出了距离空间之间映射连续性的若干等价刻画.

定理1.13. 设$(X, d), (Y, d')$是距离空间, $f : X \to Y$. 那么下述等价:

(i) f 是连续的;

(ii) f保持序列的收敛, 即"$\{x_n\} \subset X, x_n \xrightarrow{d} x_0 \in X$"恒蕴含"$f(x_n) \xrightarrow{d'} f(x_0)$";

(iii) 对Y中任一开集G, $f^{-1}(G)$是X中的开集;

(iv) 对Y中任一闭集F, $f^{-1}(F)$是X中的闭集.

证明: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). 这可由定理1.11推出.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 任意固定Y中一开集G. 下证$f^{-1}(G)$是X中的开集. 若不然, 则存在$x_0 \in f^{-1}(G)$使得X中任意以x_0为心的球都不含于$f^{-1}(G)$, 特别地, $B(x_0, 1/n) \not\subseteq f^{-1}(G), \forall n \geq 1$.

于是可取$x_n \in B(x_0,1/n)\setminus f^{-1}(G),\forall n\geq 1$. 那么$x_n\to x_0$, 但$f(x_n)\notin G,\forall n\geq 1$. 注意到$f(x_0)\in G,G$是开集, 则$f(x_n)\overset{d'}{\nrightarrow} f(x_0)$. 矛盾.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 任取$x_0\in X$. 下证f在x_0处连续. 任取$\varepsilon>0$, 下证存在$\delta>0$使得$f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$, 等价地, $B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$. 注意到$x_0\in f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$, 只需证$f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$是开集. 由于$B(f(x_0),\varepsilon)$是$Y$中开集, 因此由(iii)可知结论成立.

(iii)$\Longrightarrow$(iv). 对每一闭集$E\subset Y$, E^c是开集，则$f^{-1}(E)^c=f^{-1}(E^c)$是开集, 进而$f^{-1}(E)$是闭集.

(iv)$\Longrightarrow$(iii). 对每一开集$E\subset Y$, E^c是闭集，则$f^{-1}(E)^c=f^{-1}(E^c)$是闭集, 进而$f^{-1}(E)$是开集. □

上面的结论表明, 距离空间之间映射的连续性既可以由开集或闭集来刻画, 也可利用序列的收敛刻画.

定义1.14. 设$(X,d),(Y,d')$是距离空间.

1. 若$f:X\to Y$双射且$f\in C(X,Y)$, $f^{-1}\in C(Y,X)$, 则称f是一个同胚映射.
2. 称X,Y是同胚的, 若存在X,Y之间的同胚映射.
3. 若$f:X\to Y$保持距离(即$d(x,y)=d'(f(x),f(y)),\forall x,y\in X$), 则称$f$是一个保距映射或等距映射. 保距映射是Lipschitz映射.
4. 称X,Y是等距同胚的或等距同构的, 若存在X,Y之间的保距的同胚映射.

不难验证, $((0,1),\rho)$与$((0,2),\rho)$是同胚的, 但不是等距同胚的.

集合之间的距离

定义1.15. 设(X,d)是距离空间. X的非空子集E,F的距离定义为

$$\operatorname{dist}(E,F)=\inf_{x\in E,y\in F} d(x,y).$$

我们将$\operatorname{dist}(\{x\},F)$简记为$\operatorname{dist}(x,F)$. X上的非负实值函数$x\mapsto \operatorname{dist}(x,E)$称为$E$的距离函数.

非空集合的距离函数是连续的(见习题1.1.22), 利用距离函数可刻画集合的闭包、导集、边界(见习题1.1.23).

定义1.16. 设(X,d)是距离空间.

1. 对于非空$E \subset X$及$\varepsilon > 0$, 记$E_\varepsilon = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, E) < \varepsilon\}$. 显然, $E_\varepsilon = \cup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$ 是开集, 称之为E的ε-邻域.

2. 若$E, F \subset X$且$F \subset E_\varepsilon$, 则称E是F的一个ε-网.

更多距离空间的例子

是否任意非空集合上都可定义一个距离？下面的概念给出了一个肯定的回答.

定义1.17. 设X是非空集合. 对$x, y \in X$, 定义

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{2}$$

那么d是X上的一个距离, 称之为X上的离散距离, 称(X, d)是一个离散距离空间.

离散距离只能用以区分元素是否相同, 不能区分元素之间距离的远近.

数列是各分析学科中的基本研究对象. 如何在所有复数列构成的集合上定义距离？下面的例子给出了一个合理的回答.

例1.18. 以(s)表示所有的复数列构成的集合. 对于$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in (s)$, 定义

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

可验证d是(s)上的一个距离. 除非另加说明, 以后(s)上的距离都采用用上述定义的距离. 称$((s), d)$为所有序列空间. 可验证(s)中序列的收敛是按坐标收敛.

例1.19. 所有的有界复数列构成的集合, 记为(m)或l^∞. 对于$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, 定义

$$d(x,y) = \sup_{n \geq 1} |x_n - y_n|.$$

可验证d是l^∞上的一个距离. 在d 下, 称l^∞为有界序列空间. 除非另加说明, l^∞上的距离都采用用上述定义的距离.

下面介绍l^∞的两个距离子空间.

例1.20. 以(c)表示所有的收敛复数列构成的集合, 以(c_0)表示所有收敛于0的复数列构成的集合. 显然, $(c_0) \subset (c) \subset l^\infty$. 因此$(c_0)$, (c)继承l^∞的距离成为距离空间. 除非另加说明, $(c_0), (c)$上的距离都采用上述定义的距离. 称(c)为收敛序列空间.

习题

1.1.1. 设X是非空集合, d_1, d_2是X上的距离, $\delta > 0$. 证明: $d_1 + d_2, \delta d_1$是X 上的距离.

1.1.2. 设(X, d)是距离空间, 定义

$$\rho_1(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}, \ \ \rho_2(x,y) = \ln(d(x,y)+1), \ \ \rho_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}.$$

证明: (X, ρ_i)均是距离空间, $i = 1, 2, 3$, 并且对任意序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$, 成立

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \iff x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0 \iff x_n \xrightarrow{\rho_2} x_0 \iff x_n \xrightarrow{\rho_3} x_0.$$

1.1.3. 设X是非空集合, $\{d_m : m = 1, 2, 3, \cdots\}$是$X$上的一列距离. 对$x, y \in X$, 定义

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}.$$

证明:

(a) d是X 上的一个距离.

(b) X中的序列$\{x_n\}$按距离d收敛到$x_0 \in X$当且仅当对任意$m \geq 1$, 成立$x_n \xrightarrow{d_m} x_0$.

1.1.4. 设(X, d)是距离空间, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$. 证明: 若$x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 则$\lim_n d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$.

1.1.5. 设(X, d)是距离空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 证明: 若$x_n \to x_0 \in X, x_n \to y_0 \in X$, 则$x_0 = y_0$.

1.1.6. 以X表示$[0, 1]$上实值Lebesgue可测函数构成的集合(几乎处处相等的函数视作同一个). 对$f, g \in X$, 定义

$$d(f,g) = \int_{[0,1]} \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dm.$$

证明: d是X上的距离, 且X中函数列的依测度收敛恰与按距离d收敛一致.

1.1.7. 设Ω是复平面$\mathbb{C}$的一个非空区域(即连通开集). 以$\mathrm{Hol}(\Omega)$表示Ω 上的所有解析函数构成的集合. $\{K_n\}$是含于Ω的一列上升的有界闭集且$\cup_n K_n^\circ = \Omega$. 这里$K_n^\circ$是$K_n$ 的内部, 即K_n的所有内点构成的集合. 对于$f, g \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, 定义

$$d(f,g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|}{1 + \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|}.$$

证明: d是$\mathrm{Hol}(\Omega)$上的一个距离, $\mathrm{Hol}(\Omega)$中序列按距离d的收敛恰为"内紧一致收敛"(即在任意含于Ω的紧子集上都是一致收敛的).

1.1.8. 设Ω是非空集合. 以$\mathbb{C}^\Omega$表示Ω上所有复值函数构成的集合. 对任意$f,g\in\mathbb{C}^\Omega$, 定义

$$d(f,g)=\sup_{\omega\in\Omega}\frac{|f(\omega)-g(\omega)|}{1+|f(\omega)-g(\omega)|}.$$

(a) 验证d是$\mathbb{C}^\Omega$上的距离.

(b) 设$\{f_n\}_{n=0}^\infty\subset\mathbb{C}^\Omega$. 证明: $f_n\xrightarrow{d}f_0$当且仅当$\{f_n\}$一致收敛于f_0, 即对任意$\varepsilon>0$, 存在N, 使得

$$\sup_{n\geq N}\sup_{\omega\in\Omega}|f_n(\omega)-f_0(\omega)|<\varepsilon.$$

1.1.9. 设Ω是非空集合, $\mathbb{C}_B^\Omega$表示Ω上所有有界复值函数构成的集合. 对于$f,g\in\mathbb{C}_B^\Omega$, 定义

$$d(f,g)=\sup_{x\in\Omega}|f(x)-g(x)|.$$

证明: d是$\mathbb{C}_B^\Omega$上的一个距离, $(\mathbb{C}_B^\Omega,d)$中序列的收敛恰为函数列的一致收敛. 不另加说明时, $\mathbb{C}_B^\Omega$上默认使用上述距离.

1.1.10. 设$(X,d),(Y,d')$是距离空间. $C_B(X),C_B(Y)$分别表示X,Y上的有界复值连续函数构成的集合, 它们分别是$\mathbb{C}_B^X$,$\mathbb{C}_B^Y$的距离子空间. 证明: 若$(X,d),(Y,d')$是同胚的, 则$\mathbb{C}_B^X$与$\mathbb{C}_B^Y$是等距同胚的, $C_B(X)$与$C_B(Y)$是等距同胚的. 思考逆命题是否成立.

1.1.11. 设Ω是非空集合, $\{f_n\}_{n=0}^\infty\subset\mathbb{C}^\Omega$. 称$\{f_n\}_{n=1}^\infty$<u>逐点收敛</u>于$f_0$, 若对任意$\omega\in\Omega$成立$\lim_n f_n(\omega)=f_0(\omega)$.

(a) 证明: Ω是至多可数集合当且仅当存在$\mathbb{C}^\Omega$上的距离d, 使得$(\mathbb{C}^\Omega,d)$中序列的收敛恰为其作为函数列的逐点收敛.

(b) 证明: Ω是有限集合当且仅当$\mathbb{C}^\Omega$中函数序列的逐点收敛恰为一致收敛.

1.1.12. 对$x,y\in\mathbb{R}$, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ \max\{|x|,|y|\}, & x\neq y.\end{cases}$$

(a) 证明: d是$\mathbb{R}$上的距离, 并且$\forall\delta>0,x\in\mathbb{R}$, $B(x,\delta)=\begin{cases}\{x\}, & \delta\leq|x|,\\ (-\delta,\delta), & \delta>|x|.\end{cases}$

(b) 试确定$(\mathbb{R},d)$中收敛到1和收敛到0的序列.

(c) 举例说明: 在$(\mathbb{R},d)$中"$x_n \to x_0, y_n \to y_0$"未必蕴含"$x_n + y_n \to x_0 + y_0$".

1.1.13. 设$X \neq \emptyset$, 记$\mathcal{F} = \{A \subset X : A$是有限集合$\}$. 对$A, B \in \mathcal{F}$, 定义$d(A,B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$, 其中$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, card 表示集合的基数. 证明: $(\mathcal{F}, d)$是一个距离空间.

1.1.14. 设$2 \leq n \in \mathbb{N}$, 令$X = M_n(\mathbb{R})$. 对$A, B \in X$, 定义$d(A,B) = \mathrm{rank}(A-B)$. 证明: (X,d)是一个距离空间.

1.1.15. 设$X \neq \emptyset$, $f : X \to [0,\infty)$, 且至多存在一个点$x_0 \in X$, 使得$f(x_0) = 0$. 对$x, y \in X$, 定义

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ f(x) + f(y), & x \neq y. \end{cases}$$

证明: (X,d)是一个距离空间.

1.1.16. 记$V[0,1] = \{[0,]$上在*0*处取*0*的有界变差函数$\}$. 对$f, g \in V[0,1]$, 定义$d(f,g) = V_0^1(f-g)$(即$f-g$在$[0,1]$上的全变差). 证明: d是$V[0,1]$上的距离.

1.1.17. 设(X,d)是距离空间, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. 称$\overline{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$为以$x_0$为心以$\varepsilon$为半径的<u>闭球</u>. 证明: $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset \overline{B}(x_0,\varepsilon)$. 举例说明, $\overline{B(x_0,\varepsilon)}$未必等于$\overline{B}(x_0,\varepsilon)$.

1.1.18. 设(X,d)是距离空间, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. 证明:

(a) $B(x_0,\varepsilon)$是开集;

(b) $\{z \in X : d(x_0,z) > \varepsilon\}$ 是开集;

(c) $\{z \in X : d(x_0,z) = \varepsilon\}$是闭集;

(d) 若$y \in B(x_0,\varepsilon)$, 则存在$\delta > 0$使得$\overline{B(y,\delta)} \subset B(x_0,\varepsilon)$.

1.1.19. 称非空集合X上的两个距离d_1, d_2是<u>等价</u>的, 若存在$\delta_1, \delta_2 > 0$使得

$$\delta_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \delta_2 d_1(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

证明: 若d_1, d_2等价, 则$(X,d_1), (X,d_2)$中的收敛列相同. 试举例说明反之未必成立, 即(X,d_1)和(X,d_2)中的收敛列相同未必意味着d_1, d_2等价.

1.1.20. 称距离空间$(X,d_X), (Y,d_Y)$是<u>粗等价</u>的[1], 若存在$f : X \to Y$ 满足下面的条件:

[1]粗等价是A. Connes创立的非交换几何中的一个基本概念. 粗等价这一术语源于这一几何直观: 粗等价的两个距离空间粗看之下是接近或一样的. 比如, 从很远的地方看去, $\mathbb{N}$中的点近似地连成一条直线, 形如$\mathbb{R}$.

(a) 存在单调不减函数$\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$, 使得$\lim\limits_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$, 而且对任意$x, z \in X$,

$$\rho_-(d_X(x,z)) \le d_Y(f(x), f(z)) \le \rho_+(d_X(x,z));$$

(b) 存在$\varepsilon > 0$, 使得$f(X)$是Y的一个ε-网.

证明: $\mathbb{Z}$和$\mathbb{R}$是粗等价的, $\mathbb{N}^2$和$\mathbb{N}^3$是粗等价的.

1.1.21. 证明: 离散距离空间X中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是收敛列当且仅当存在N使得$x_n = x_N$, $\forall n \ge N$.

1.1.22. 设(X,d)是距离空间, $E \subset X$非空. 证明: $|\operatorname{dist}(x,E) - \operatorname{dist}(y,E)| \le d(x,y), \forall x, y \in X$.

1.1.23. 设(X,d)是距离空间, $E \subset X$非空. 证明:

(a) 若$x \in X$, 则$\operatorname{dist}(x,E) = 0$当且仅当存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$使得$\lim_n x_n = x$.

(b) $E' = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, E \setminus \{x\}) = 0\}$.

(c) $\overline{E} = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,E) = 0\} = \cap_{\varepsilon>0} E_\varepsilon$.

(d) $\partial E = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,E) = 0 = \operatorname{dist}(x, E^c)\}$.

1.1.24. 设(X,d)是距离空间. $x \in X, E \subset X$. 请证明下述等价:

(a) E是闭集;

(b) E^c是开集;

(c) $E' \subset E$;

(d) E中任一序列若收敛则极限必含于E中;

(e) $\operatorname{dist}(x,E) > 0, \forall x \in X \setminus E$.

1.1.25. 证明: $E = \{$收敛复数列$\}$和$F = \{$收敛于0的复数列$\}$均是l^∞的闭子集. 思考$G = \{$有界复数列$\}$是不是(s)的闭子集.

1.1.26. (X,d)是距离空间, E, F是两个非空不交闭集. 证明：

(a) 存在连续$f : X \to [0,1]$使得$f|_E \equiv 1$且$f|_F \equiv 0$.

(b) 存在不交开集U, V分别包含E, F.

1.1.27. 设(X, d)是距离空间, $E, F \subset X$非空且$F \subset E_\varepsilon$. 证明: 存在F的非空子集G, 使得G的基数小于等于E的基数且$F \subset G_{2\varepsilon}$.

1.1.28. 设$(X, d), (Y, d')$是距离空间, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. 若存在$y_0 \in Y$, 使得对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$满足$f(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset B(y_0, \varepsilon)$, 则称映射<u>$f$在$x_0$处有极限</u>, 称$y_0$是$f$在$x_0$处的极限, 记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$或$f(x) \to y_0$(当$x \to x_0$). 证明: f在x_0处连续当且仅当$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

1.2 可分性

$\mathbb{R}$有一个特殊的可数子集，即有理数集$\mathbb{Q}$. 每个实数附近都可找到有理数(换言之, 总可找到有理数列收敛于它). $\mathbb{R}$的这一性质为研究欧氏空间上的分析问题提供了极大的方便. $\mathbb{R}$的这一性质可抽象至一般的距离空间.

定义1.21. 设(X, d)是距离空间, $S, E \subset X$.

1. 若$S \subset E \subset \overline{S}$, 则称$S$在$E$中<u>稠密</u>, 也称$S$是$E$ 的一个<u>稠密子集</u>. 由习题1.1.23, 此时E中每一点都是S中某个序列的极限.
2. 若E有一个至多可数的稠密子集, 则称E是<u>可分</u>的.
3. 若X是可分的, 则称(X, d)是<u>可分的距离空间</u>.

注1.22.
1. 可利用ε-网给出稠密子集的一个等价定义(见习题1.2.2).
2. 可分距离空间是相对容易把握的空间, 如Lindeloff定理成立(见习题1.2.12), 并且可分距离空间上的连续函数和常值函数一样多(见习题1.2.7).

下面的定理给出了可分集合的两个等价刻画.

定理1.23. 设(X, d)是距离空间, $E \subset X$. 证明下述等价:

(i) E是可分的.

(ii) 存在至多可数集合F使得$E \subset \overline{F}$.

(iii) 对任意$\varepsilon > 0$, E有至多可数的ε-网.

证明: (i)$\Longrightarrow$(ii). 这是显然的.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). 对任意$\varepsilon > 0$, 由习题1.1.23, 成立$\overline{F} \subset F_\varepsilon$. 则可见结论成立.

(iii)$\Longrightarrow$(i). 对任意n, 假设F_n是E的至多可数$\frac{1}{n}$-网. 那么$E \subset (F_n)_{\frac{1}{n}}$. 由习题1.1.27, 可取$E$的至多可数子集$E_n$使得$E \subset (E_n)_{\frac{2}{n}}$. 令$G = \cup_n E_n$. 显然$G$至多可数, 而且$E \subset (E_n)_{\frac{2}{n}} \subset G_{\frac{2}{n}}, \forall n$. 这表明$E \subset \overline{G}$. □

由上述定理中的(ii)可见, 可分集合的子集还是可分的(见习题1.2.3).

平常遇到的可分距离空间大都与$\mathbb{R}$的可分性或与有理数集$\mathbb{Q}$有关. 不难看出, $\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$ 都是可分的.

例1.24. (s)是可分的距离空间. 事实上, 下面的可数集合是(s)的一个稠密子集

$$E = \{(\alpha_n)_{n=1}^\infty \in (s) : \forall n \geq 1, \mathrm{Re}\, \alpha_n, \mathrm{Im}\, \alpha_n \in \mathbb{Q}\text{且至多有限个}\alpha_n\text{非零}\}.$$

例1.25. 对于$a < b$, $C[a,b]$是可分的距离空间. 事实上, 由Weierstrass逼近定理, 下面的可数集合是$C[a,b]$的一个稠密子集

$$E = \{p(t) + \mathrm{i}q(t) : p(t), q(t)\text{是有理系数多项式}\}.$$

例1.26. 有界序列空间l^∞ 不可分. 用反证法. 假设$E = \{x_i : i \geq 1\}$是l^∞的一至多可数稠密子集. 则$l^\infty \subset E_\varepsilon = \cup_{i\geq 1} B(x_i, \frac{1}{2})$. 另取$l^\infty$的一个不可数子集$F = \{1, 0\text{做成的序列}\}$. 则

$$F \subset \cup_{i\geq 1} B(x_i, \frac{1}{2}), \;\; F = \bigcup_{i\geq 1} [F \cap B(x_i, \frac{1}{2})].$$

于是存在x_i使得$F \cap B(x_i, \frac{1}{2})]$是无穷集合. 则可取$F$中不同的$y_1, y_2$落在$B(x_i, \frac{1}{2})$中. 于是

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x) + d(x, y_2) < 1.$$

但y_1, y_2是由$0, 1$做成的不同序列, $d(y_1, y_2) = 1$, 矛盾.

从上例的证明中可见下面的结论.

推论1.27. 设(X, d)是距离空间. 若$\exists \delta > 0$, 使得X中包含一个不可数子集，其中的点两两之间的距离不小于δ, 则X 不是可分的.

习题

1.2.1. 设(X, d)是距离空间, $E \subset X$. 证明: E是X的稠密子集当且仅当E^c没有内点.

1.2.2. 设(X, d)是距离空间, $S \subset E \subset X$. 证明: S是E的稠密子集当且仅当对任意$\varepsilon > 0$, $E \subset S_\varepsilon$, 即S是E的ε-网(ε-网的概念参见定义1.16).

1.2.3. 证明: 可分集合的子集仍是可分的.

1.2.4. 证明: 收敛序列空间(c)是可分的.

1.2.5. 证明: Hol($\mathbb{D}$)是可分的.

1.2.6. (X, d)是距离空间, E是X的稠密子集. 证明: X上的两个连续函数f, g满足$f = g$当且仅当它们在$f|_E = g|_E$.

1.2.7. 证明: 可分距离空间上的连续函数构成一连续基数集.

1.2.8. (X, d)是距离空间, E是X的稠密子集. 证明: 若$f \in C(E)$是Lipschitz连续的, 则存在唯一的$g \in C(X)$使得$g|_E = f$.

1.2.9. 举例说明, 上题中的"Lipschitz连续"减弱为"连续"时，结论不再成立.

1.2.10. 证明推论1.27.

1.2.11. 证明: 非空集合X在离散距离下可分当且仅当X是至多可数集合.

1.2.12 (Lindeloff定理). (X, d)是距离空间，$E \subset X$是可分的. 证明: 若X中的一族开子集$\mathcal{W}$满足$E \subset \cup_{G \in \mathcal{W}} G$, 则存在$\mathcal{W}$ 的至多可数子族$\mathcal{W}_0$ 使得$E \subset \cup_{G \in \mathcal{W}_0} G$.

1.3 完备性

$\mathbb{R}$中的Cauchy列都是收敛的. 这一性质有很多重要的应用(比如有区间套定理成立), 可推广至一般的距离空间.

完备的距离空间

定义1.28. 设(X,d)是距离空间.

1. 称X中的列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$是一个Cauchy列或基本列, 若对任意$\varepsilon>0$, 存在N, 使得
$$d(x_m,x_n)<\varepsilon,\ \ \forall m,n\geq N.$$

2. 称(X,d)是完备的, 若X中的任意Cauchy列都是收敛的.

完备性是距离空间(X,d)的一个整体性质, 不同于集合的闭性. (X,d)完备与否和集合X及距离d都有关系.

注1.29. 1. 完备性不可遗传. 比如, $(\mathbb{R},\rho)$是完备的, 但$(\mathbb{Q},\rho)$是不完备的.

2. 空间是否完备会影响到解的存在性. 比如, 方程$x^2=2$在有理数域$\mathbb{Q}$中无解, 但在实数域$\mathbb{R}$中有两解.

3. $(0,1)$在离散距离下是完备的. 事实上, 离散的距离空间都是完备的.

例1.30. $C[0,1]$是完备的. 设$\{f_n\}_{n=1}^\infty$是$C[0,1]$中的一个Cauchy 序列. 则对每一$t\in[0,1]$, $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 是Cauchy 列, 记$f_0(t)=\lim_n f_n(t)$. 这样即得到了$[0,1]$上的一个函数f_0. 下面证明$f_0\in C[0,1]$且$\lim_n\max_{t\in[0,1]}|f_n(t)-f_0(t)|=0$.

对任意$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$, 使得当$m,n\geq N$时, $\max\limits_{t\in[0,1]}|f_m(t)-f_n(t)|\leq\varepsilon$. 固定$n\geq N$. 对每一$t\in[0,1]$, 在上式中令$m\to\infty$ 可得到$|f_0(t)-f_n(t)|\leq\varepsilon$. 因此$\max_{t\in[0,1]}|f_0(t)-f_n(t)|<\varepsilon$. 这说明$\{f_n\}$一致收敛于$f_0$. 由数学分析的知识可知$f_0$是连续的. 那么上面的讨论说明$\{f_n\}$按$C[0,1]$中的距离收敛于$f_0$. 故$C[0,1]$是完备的.

与区间套定理类似，可证明完备距离空间中的“球套”定理.

定理1.31. 若(X,d)是完备距离空间, $\{B(x_n,\delta_n)\}_{n\geq1}$是$X$中一列单调下降的球且$\lim_n\delta_n=0$, 则存在唯一$x_0\in\cap_{n\geq1}\overline{B(x_n,\delta_n)}$ 且有$x_n\to x_0$.

距离空间不完备, 本质原因在于空间中缺少了Cauchy列的极限. 自然要问, 是否可以通过添加一些元素将不完备的距离空间变成完备的距离空间? 这在等距同构的意义下是可以做到的.

定义1.32. 称距离空间$(X,d),(Y,d')$是等距同构的, 若存在自X至Y的保持距离(即$d'(Tx,Ty)=d(x,y),\forall x,y\in X$) 的双射.

等距同构的距离空间具有几乎完全一样的结构, 可视作同一(见习题1.3.10).

例1.33. *1.* $((0,1),\rho)$和$((1,2),\rho)$ 是等距同构的.

2. $((0,1],\rho)$和$([1,2),\rho)$ 是等距同构的.

定义1.34. 设(X,d)是距离空间. 若(Y,d')是完备的距离空间且存在Y的稠密子集Y_1使得(X,d)等距同构于(Y_1,d'), 则称(Y,d')是(X,d)的一个<u>完备化</u>.

注1.35. *1.* $\mathbb{R}$是$\mathbb{Q}$的完备化.

2. $C[0,1]$是$[0,1]$上的多项式函数空间的完备化.

下面定理的证明参见习题1.3.8.

定理1.36. 任意距离空间都有完备化.

完备化一般不唯一, 但在等距同构的意义下是唯一的(见习题1.3.9).

距离空间的完备性非常重要, 下面我们将介绍两个与完备性有关的重要结果.

Baire纲定理

集合的大小, 可以通过比较所包含元素的多少(即基数)来衡量. 在距离空间中, 还可以用"纲"的语言来衡量集合的大小.

定义1.37. 设(X,d)是距离空间, $E\subset X$.

1. 称E是<u>无处稠密</u>的(或<u>疏朗</u>的), 若E的闭包不含内点(等价地, 不包含球). 比如, 自然数集是$\mathbb{R}$的无处稠密子集.
2. 若E是X中可数多个无处稠密子集的并, 则称E是<u>第一纲</u>的, 否则称为是<u>第二纲</u>的.
3. 若X是第一纲(第二纲), 则称(X,d)是第一纲(第二纲)的距离空间.

无处稠密集合是稀疏、稀薄的，因此第一纲集可理解为较稀疏的集合, 即使它可能是整个空间的一个稠密子集. 易见, 可数个第一纲集合的并仍是第一纲.

例1.38. $\mathbb{R}$的可数子集(比如有理数集)均是第一纲集.

下面的结果表明, 距离空间的完备性蕴含第二纲性质.

定理1.39 (Baire纲定理)**.** 完备的距离空间是第二纲的.

上述定理的证明用到了下面的基本事实.

引理1.40. 设(X,d)是距离空间.

1. 若G是非空开集, F无处稠密闭集, 则$G \not\subseteq F, G\cap F^c$ 是非空开集.
2. 若G是非空开集, $x \in G$, 则有$\delta > 0$ 使得$\overline{B(x,\delta)} \subset G$.

证明(定理1.39): . 设(X,d)是一完备的距离空间. 任取一列无处稠密集合$\{E_n\}$, 只需证明$X \neq \cup_n E_n$. 记$\overline{F_n} = E_n$, 则F_n是不包含球的闭集. 只需证$X \neq \cup_n F_n$. 任取开球$B(x_0,\delta_0)$.

因$B(x_0,\delta_0)\cap F_1^c \neq \emptyset$, 可取$\overline{B(x_1,\delta_1)} \subset B(x_0,\delta_0)\cap F_1^c$ (不妨设$\delta_1 < 1$).

因$B(x_1,\delta_1)\cap F_2^c \neq \emptyset$, 可取$\overline{B(x_2,\delta_2)} \subset B(x_1,\delta_1)\cap F_2^c$ (不妨设$\delta_2 < 1/2$).

因$B(x_2,\delta_2)\cap F_3^c \neq \emptyset$, 可取$\overline{B(x_3,\delta_3)} \subset B(x_2,\delta_2)\cap F_3^c$ (不妨设$\delta_3 < 1/3$).

这样不断做下去, 可取到$\{x_n\}_{n\geq 1}$及$\{\delta_n\}_{n\geq 1}$, 使得

$$[\cap_{n\geq 1}\overline{B(x_n,\delta_n)}] \subset [\cap_{n\geq 1}B(x_{n-1},\delta_{n-1})]\cap[\cap_{n\geq 1}F_n^c], \quad \delta_n < 1/n, \quad \forall n = 1,2,3,\cdots.$$

由球套定理存在

$$y \in [\cap_n \overline{B(x_n,\delta_n)}] \subset B(x_0,\delta_0)\cap[\cap_n F_n^c].$$

这说明$(\cup_n F_n)^c = \cap_n F_n^c$非空(进而$X \neq \cup_n F_n$)而且在$X$中稠密, 进而$(\cup_n E_n)^c$不仅非空且在$X$中稠密. □

推论1.41. 在完备距离空间中, 第一纲集合的余集是稠密的第二纲集.

推论1.42. 在完备距离空间中, 一列稠密开集的交是稠密的第二纲集.

推论1.43. 在完备距离空间中, 非空开集是第二纲集.

推论1.44. 若(X,d)是完备的距离空间且$X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则存在$n$使得$E_n$是第二纲的, 进而$\overline{E_n}$包含内点.

例1.45. 无理数集是$\mathbb{R}$的第二纲子集. 因为有理数构成之集合$\mathbb{Q}$是第一纲的, 若无理数之集合也是第一纲, 则推出$\mathbb{R}$ 是第一纲. 矛盾于$\mathbb{R}$ 作为完备距离空间是第二纲的.

注1.46. 完备度量空间中第二纲的集合的余集未必是第一纲的. 比如$[0,1]$是和$\mathbb{R}\setminus[0,1]$都是$\mathbb{R}$的第二纲子集.

Baire纲定理是分析学中的一把利器, 常常有意想不到的妙用, 经常用于证明完备距离空间中特定元素的存在性.

例1.47. 我们将证明$[0,1]$上存在处处连续但处处不可微的函数. 以X表示$\mathbb{R}$上周期为*1*的实值连续函数全体. 显然$d(f,g)=\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)-g(t)|$是$X$上的一个距离且使得$X$成为完备的距离空间. 对每个$n\in\mathbb{N}$, 定义

$$X_n=\{f\in X:\exists t_0\in\mathbb{R}\text{ s.t. }|f(t_0+h)-f(t_0)|\le nh,\forall h\ge 0\}.$$

可验证, X_n为X的无处稠密的闭集, 因此$\cup_n X_n$是X的第一纲的真子集. 注意到, 若$f\in X$ 在某点可微, 则必在某X_n中. 因此X中那些处处不可微的函数构成了X的一个第二纲子集. 进而说明$[0,1]$上存在处处连续但处处不可微的函数.

关于具体的处处连续但处处不可微的函数的例子, 可参见习题1.3.21和1.3.22.

命题1.48. 设$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$是实值连续函数, 这里$\mathbb{R}^+=[0,\infty)$. 那么, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$当且仅当对任意$x>0$, 成立$\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)=0$.

证明: 必要性显然. 只需证明充分性.

$\Longleftarrow$. 任意固定$\varepsilon>0$. 令

$$K_n=\bigcap_{m\ge n}\{x\in\mathbb{R}^+:|f(mx)|\le\varepsilon\}.$$

则K_n是闭集, 且$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n=\mathbb{R}^+$. 因为$(\mathbb{R}^+,\rho)$是完备的距离空间, 由Baire 纲定理, 存在$n$ 使得K_n包含内点, 进而K_n包含一个非退化闭区间$[a,b]$. 因此, 对每个

$$x\in[na,nb]\cup[(n+1)a,(n+1)b]\cup[(n+2)a,(n+2)b]\cup\cdots,$$

成立$|f(x)|\le\varepsilon$. 注意到上述可数个区间的并一定包含某个$[M,\infty)$, 这里$M\in\mathbb{R}^+$. 因此, $|f(x)|\le\varepsilon,\forall x\in[M,\infty)$. 由$\varepsilon$ 的任意性可知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. □

命题1.49. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是实值连续函数. 对于任意非空开区间$U$和$V$, 存在$n\in\mathbb{N}$, 使得$f^n(U)\cap V\neq\emptyset$. 则存在$x\in\mathbb{R}$, 使得$\{f^n(x):n\in\mathbb{N}\}$在$\mathbb{R}$中是稠密的.

证明: 任意取定非空开区间V. 由于$\cup_{n\ge1}f^{-n}(V)$与$\mathbb{R}$ 中的任意非空开区间交非空, 且f是连续映射, 故$\cup_{n\ge1}f^{-n}(V)$是$\mathbb{R}$中的稠密开集.

将全体以有理数为心, 正的有理数为半径的"有理开区间"排成一列$\{V_1,V_2,V_3,\cdots\}$. 由于$\mathbb{R}$是完备的, 故$Y\doteq\cap_{k\ge1}(\cup_{n\ge1}f^{-n}(V_k))$ 在$\mathbb{R}$中稠密. 这里$\doteq$代表将该符号右边的式子记作左边的符号. 任取$x\in Y$. 则对任意$k\in\mathbb{N}$, 存在某个自然数n, 使得$f^n(x)\in V_k$. 这说明$\{f^n(x):n\in\mathbb{N}\}$ 在$\mathbb{R}$ 中稠密. □

命题1.50. 设(X,d)是一个完备距离空间, $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset C(X)$. 对任意$x \in X$, $K_x \doteq \sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x)| < \infty$. 则存在非空开集$G \subset X$, 使得$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{x\in G} |f(x)| < \infty$.

证明: 对$n \in \mathbb{N}$, 定义$X_n = \{x \in X : K_x \leq n\}$. 那么$X_n$是$X$的闭子集且$X = \cup_{n\geq 1} X_n$.

由于(X,d)是完备的, 由Baire纲定理, 存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 使得X_{n_0}有内点, 进而包含某个开球G. 令$K = n_0$, 则易见$|f(x)| \leq K$, $\forall x \in G, f \in \mathcal{F}$. □

压缩映像原理

压缩映像原理(Contraction mapping principle), 又称Banach不动点定理, 是解决不动点问题的一个经典结果.

定义1.51. 设X是非空集合, $f : X \to X$. 若$x \in X$, $f(x) = x$, 则称x为f的一个不动点.

微分方程中的许多求解问题可转化为映射的不动点问题. 比如, 如果ϕ是$\mathbb{R}$上实值函数, 那么求方程

$$\phi(x) = 0$$

的根即等价于求$\mathbb{R}$上的映射

$$f(x) = x - \phi(x)$$

的不动点的问题.

定理1.52 (压缩映像原理)**.** 完备距离空间上的压缩映射恰有一个不动点.

证明*:* 设(X,d)是一完备的距离空间, $f : X \to X$是压缩映射, $q \in [0,1)$满足$d(f(x), f(y)) \leq qd(x,y), \forall x, y \in X$,

存在性. 任取$x \in X$. 定义$x_1 = f(x)$; $x_n = f(x_{n-1}), \forall n \geq 2$.

断言：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy列.

记$r = d(x, f(x))$. 易见$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n r, \forall n \geq 1$. 则对任意$n < m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq r(q^n + \cdots + q^{m-1}) \\ &\leq \frac{rq^n}{1-q}. \end{aligned}$$

则易见断言成立.

由于(X,d)是一完备的距离空间, 则存在$x_0 \in X$ 使得$x_n \to x_0$. 由于f连续, 映收敛列为收敛列, 我们得到$x_{n+1} = f(x_n) \to f(x_0)$, 即$x_n \to f(x_0)$. 又

$$d(x_0, f(x_0)) \le d(x_0, x_n) + d(x_n, f(x_0)) \to 0,$$

便有$d(x_0, f(x_0)) = 0$, 即$x_0 = f(x_0)$, x_0是f的不动点.

唯一性. 若还有$y_0 \in X$使得$f(y_0) = y_0$, 那么

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \le q d(x_0, y_0).$$

注意到$0 \le q < 1$, 则有$d(x_0, y_0) = 0$, 即$x_0 = y_0$. □

注1.53. 设f是上述证明中的压缩映射. 如果以x_0表示f的唯一的不动点, 那么由证明可看出：对任意$x \in X$, 有

$$d(x_0, f^n(x)) \le \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x, f(x)).$$

这提供了一个求压缩映射不动点的近似解的办法.

“原理”提供了一个工具, 在应用中应该灵活使用, 依具体情况作具体分析. 下面的例子表明, 压缩映射的条件一般是不可去掉的.

例1.54. 设$X = [1, \infty)$, 在通常的欧氏度量下, 是一个完备的度量空间. 定义$f : X \to X$作$x \mapsto x + \frac{1}{x}$. 则对任意不同的$x, y \in X$, 成立

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

但f显然没有不动点.

注1.55. 压缩映象原理有非常广泛、重要的应用, 如Picard定理(见定理1.56)、反函数定理(见定理2.91)、隐函数定理(见定理2.94). 通常的做法是, 将问题转化为某个映射是否存在唯一不动点, 只需证明该映射是压缩映射即可.

定理1.56 (Picard定理)**.** 设$\delta > 0, x_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $f(t,s)$是$(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times \mathbb{R}$上的连续函数, 且存在$k > 0$ 使得

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le k|x-y|, \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

令$\beta = \min\{\frac{1}{1+k}, \delta\}$. 那么存在$J_\beta = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$上唯一的连续函数$x(t)$满足

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in (t_0 - \beta, t_0 + \beta).$$

证明: 设X是连续函数空间$C[t_0-\beta,t_0+\beta]$. 定义$T:X\to X$作

$$(Tx)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[t_0-\beta,t_0+\beta].$$

那么只需证T有唯一不动点.

对于$x,y\in X$, 注意到

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=\sup_t|\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))-f(s,y(s))\mathrm{d}s|\\&\le\sup_{t\in I_\beta}|t-t_0|kd(x,y)\\&\le\frac{k}{k+1}d(x,y).\end{aligned}$$

那么T是压缩映射. 由压缩映像原理, T有唯一不动点. □

下面的引理说明, 距离空间子集上的Lipschitz函数可以保Lipschitz常数地扩张为全空间上的Lipschitz函数.

引理1.57 (MacShane引理, [18])**.** 设(X,d)是距离空间, $\emptyset\ne A\subset X$, $f:A\to\mathbb{R}$. 若存在$k>0$满足

$$|f(x)-f(y)|\le kd(x,y),\quad\forall x,y\in A.$$

则存在映射$\tilde f:X\to\mathbb{R}$, 使得

1. $\tilde f(x)=f(x)$, $\forall x\in A$;
2. $|\tilde f(x)-\tilde f(y)|\le kd(x,y)$, $\forall x,y\in X$.

证明: 对$z\in X$, 定义$\tilde f(z)=\sup\limits_{x\in A}\{f(x)-kd(x,z)\}$. 则对$z\in A$, 由于$|f(x)-f(z)|\le kd(x,z)$, 故$f(z)\ge f(x)-kd(x,z)$, $\forall x\in A$. 因此,

$$f(z)=f(z)-kd(z,z)\le\tilde f(z)=\sup_{x\in A}\{f(x)-kd(x,z)\}\le f(z).$$

对$z\in X$, 任取$z_1\in A$. 不妨设$\tilde f(z)\ge\tilde f(z_1)=f(z_1)$. 由于$f(z_1)$ 为有限数, 故$\tilde f(z)-\tilde f(z_1)$有意义且

$$\begin{aligned}0\le\tilde f(z)-\tilde f(z_1)&=\sup_{x\in A}\{f(x)-kd(x,z)\}-\sup_{x\in A}\{f(x)-kd(x,z_1)\}\\&\le\sup_{x\in A}\{f(x)-kd(x,z)-(f(x)-kd(x,z_1))\}\\&\le\sup_{x\in A}\{kd(x,z_1)-kd(x,z)\}\\&\le kd(z_1,z).\end{aligned}$$

因此$\tilde{f}(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in X$. 此时, 任取$z_1, z_2 \in X$, 不妨设$\tilde{f}(z_2) \geq \tilde{f}(z_1)$. 仿照上面的讨论可知

$$0 \leq \tilde{f}(z_2) - \tilde{f}(z_1) \leq kd(z_1, z_2),$$

即有$|\tilde{f}(z_2) - \tilde{f}(z_1)| \leq kd(z_2, z_1)$. □

习题

1.3.1. 证明*:* 距离空间中有收敛子列的Cauchy列也是收敛列.

1.3.2. 设(X, d)是距离空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是$X$中的两个Cauchy列. 证明*:* $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy数列.

1.3.3. 设(X, d)是距离空间. 称X的某子集E是有界的, 若它包含于某个球中. 证明*:* 距离空间中的任一Cauchy列构成一有界集.

1.3.4. 设(X, d)是距离空间, $E \subset X$. 证明下述等价*:*

(a) E是有界集合.

(b) 对任意$x \in X$, 存在$\delta > 0$, 使得$E \subset B(x, \delta)$.

1.3.5. 证明*:* 在离散距离空间中, Cauchy列都是收敛列.

1.3.6. 证明*:* (s), l^{∞}, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$是完备的.

1.3.7. (X, d)是完备距离空间, $\emptyset \neq Y \subset X$. 证明*:* (Y, d)是完备的当且仅当Y是X的闭子集.

1.3.8. 设(X, d)是距离空间. 以Y_0表示X中所有Cauchy列构成的集合. 对$\xi = (a_i), \eta = (b_i) \in Y_0$, 习题1.3.2表明, $\lim_i d(a_i, b_i)$必然存在, 记作$\triangle(\xi, \eta)$.

(a) 对$\xi \in Y_0$, 记$[\xi] = \{\eta \in Y_0 : \triangle(\xi, \eta) = 0\}$. 证明*:* 对任意$\xi, \eta \in Y_0$, 或者$[\xi] = [\eta]$或者$[\xi] \cap [\eta] = \emptyset$.

(b) 记$Y = \{[\xi] : \xi \in Y_0\}$. 对$[\xi], [\eta] \in Y$, 定义$d'([\xi], [\eta]) = \triangle(\xi, \eta)$. 证明*:* d'是Y上的距离且(Y, d')是完备的.

(c) 对$x \in X$, 定义$T : x \mapsto [(x, x, x, \cdots)] \in Y$. 证明*:* T保持距离且$T(X)$在Y中稠密, 进而Y是X的一个完备化.

1.3.9. 证明*:* 距离空间的任何两个完备化都是等距同构的.

1.3.10. 设距离空间$(X,d),(Y,d')$是等距同构的. 证明*:*

(a) (X,d)完备当且仅当(Y,d')完备,

(b) (X,d)可分当且仅当(Y,d')可分.

1.3.11. 设(X,d)是距离空间, $E\subset X$. 证明*:*

(a) E是无处稠密的闭集当且仅当E^c是稠密的开集.

(b) E是无处稠密集当且仅当它是某个无处稠密的闭集的子集.

1.3.12. 证明*:* 在完备距离空间X中, 下述成立*:*

(a) 有内点的集合是第二纲的(换言之, 第一纲集没有内点)*;*

(b) 一列无内点的闭集的并仍无内点*;*

(c) 一列稠密开集的交是稠密的第二纲集.

1.3.13. 举例说明, 距离空间(X,d)的稠密子集未必是第二纲的, 第二纲子集也未必是X的稠密子集.

1.3.14. 证明*:* 在离散距离空间中, 只有空集是第一纲的.

1.3.15. 证明*:* 对任意$g\in C[0,1]$, 存在唯一$f\in C[0,1]$ 满足

$$f(t)-\int_0^t f(t-s)e^{-s^2}\mathrm{d}s=g(t),\qquad \forall t\in[0,1].$$

1.3.16. 证明*:* 压缩映射T的n次迭代$T^k=T\circ T\circ\cdots\circ T$仍是压缩映射. 举例说明反之未必成立.

1.3.17. E是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, T是E上的映射且满足$d(Tx,Ty)<d(x,y)\ \forall x,y\in X,x\neq y$. 证明*:* T 有唯一不动点.

1.3.18. 给出一个满足上题的条件但非压缩映射的T的例子.

1.3.19. 设$T:X\to X$, 其中(X,d)是一个完备的距离空间. 证明*:* 若存在正整数k, 使得T^k是X上的一个压缩映射, 则T在X中恰有一个不动点.

1.3.20. 设(X,d)是完备的距离空间, $R,T:X\to X$是压缩映射且$R\circ T=T\circ R$. 证明: R和T有唯一共同的不动点. 思考: 如果R,T中只有一个是压缩映射, 结论是否依然成立?

1.3.21 (Van Der Waerden函数)**.** 对每个$x\in\mathbb{R}$, 定义

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(2^n x,\mathbb{Z})}{2^n}.$$

证明: f在$\mathbb{R}$上处处连续、处处不可微.

1.3.22 (折线函数)**.** 设$f_0(x)=\min\{x-[x],[x]+1-x\}$, $x\in\mathbb{R}$. 这里$[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}:n\le x\}$. 定义

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_0(4^n x)}{4^n},\quad x\in\mathbb{R}.$$

证明: f在$\mathbb{R}$上处处连续、处处不可微.

1.4 列紧性

数学分析的知识告诉我们, $\mathbb{R}$的有界子集中的任意序列都有收敛子列. 本节里, 我们在一般距离空间中考虑具有这一性质的集合.

列紧集、完全有界集、紧集

定义1.58. 称距离空间(X,d)的子集E是列紧的, 若E中的任意序列都有收敛子列(极限未必仍在E中). 闭的列紧集合称为自列紧集合.

注1.59.

1. 易见, 列紧性是可遗传的, 即列紧集的子集仍是列紧集.
2. $\mathbb{R}^n$ 中的列紧集恰为有界集.

列紧集中的序列总有收敛子列，这一性质非常重要. 本节中的主要目标是给出距离空间中列紧集的等价刻画. 我们先介绍几个概念.

定义1.60. (X,d)是距离空间, $E\subset X$.

1. 若$\mathcal{W}$是X的一族开子集且它们的并集包含了E, 则称$\mathcal{W}$为E的一个开覆盖；若$\mathcal{W}_0$是$\mathcal{W}$的子集族且仍构成E的一个开覆盖, 则称$\mathcal{W}_0$为$\mathcal{W}$的(关于E的)一个子覆盖.

2. 称E是紧的, 若E的任意开覆盖都有关于E的有限子覆盖.

3. 称E是完全有界的, 若对任意$\varepsilon > 0$, 存在有限子集F使得$E \subset F_\varepsilon$. $F = \emptyset$时, 默认$F_\varepsilon = \emptyset$.

注1.61. *1.* 有限集是紧的. 紧性可理解为某种有限性质.

2. 紧性蕴含完全有界性. 事实上, E是紧的, 则对任意$\varepsilon > 0$, E的开覆盖$\{B(x,\varepsilon) : x \in E\}$有有限子覆盖$\{B(x_1,\varepsilon), \cdots, B(x_n,\varepsilon)\}$, 即$E \subset \cup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$.

3. 由习题1.1.27, 若E是完全有界的, 则对任意$\varepsilon > 0$, 可取E之有限子集F使得$E \subset F_\varepsilon$.

4. 完全有界性是一种"有限逼近"性质. 集合E是完全有界的意味着, 对任意$\varepsilon > 0$, 可将E中的点分装在有限个半径为ε 的小球中.

5. 与列紧性一样，完全有界性质也可遗传. 紧性是不可遗传的性质.

下面的定理是本节的主要结果, 厘清了紧、自列紧、列紧、完全有界之间的关系.

定理1.62. (X,d)是距离空间, $E \subset X$. 则下述成立:

(i) 若E是列紧的，则E是完全有界的.

(ii) 若E是完全有界的，则E是有界、可分集合.

(iii) 若(X,d)是完备的, 则E是列紧的当且仅当E是完全有界的.

(iv) E是紧的当且仅当E是自列紧的.

证明(定理1.62 (i)-(ii)): (i) 若不然, 则存在$\varepsilon > 0$使得$\{B(x,\varepsilon) : x \in E\}$没有有限子覆盖. 那么按照数学归纳法, 可取$\{x_k\}$使得$x_{k+1} \in E \setminus (\cup_{i=1}^k B(x_i, 1/n))$. 则$d(x_i,x_j) \geq \varepsilon$, $\forall i \neq j$. 则$\{x_k\}$没有Cauchy子列, 矛盾于E是列紧的.

(ii) 可分性可由定理1.23看出. 只需证E是有界的. 任取$y_0 \in X$. 若E无界, 则对任意$n \geq 1$, $E \not\subseteq B(y_0,n)$. 则存在$x_n \in E$ 使得$d(x_n,y_0) \geq n$. 由于E列紧, 那么$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$收敛, 设极限是x_0. 那么$n_k \leq d(x_{n_k},y_0) \to d(x_0,y_0)$, 矛盾. □

为证明定理1.62 (iii), 我们给出一个引理.

引理1.63. 设(X,d)是距离空间, $E \subset X$是完全有界的无穷集合. 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在$y \in X$使得$E \cap B(y,\varepsilon)$ 是无穷集合.

证明(定理1.62 (iii)): 只需证明充分性. 任取E中的一个序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 我们将证明它有收敛子列. 由X完备，只需证明它有Cauchy子列. 不妨设$F=\{x_n : n\geq 1\}$是无穷集合.

由E完全有界, 则F也完全有界. 由前一个引理，存在$y_1\in X$使得$B(y_1,1/2)\cap F$是无穷集合. $B(y_1,1/2)\cap F$仍是完全有界集合. 则存在$y_2\in X$使得$B(y_2,\frac{1}{2^2})\cap B(y_1,1/2)\cap F$ 是无穷集合. 这样不断做下去, 对每个k, 存在$y_k\in X$使得$\left(\cap_{i=1}^{k}B(y_i,\frac{1}{2^i})\right)\cap F$ 是无穷集合.

对每个k, 可找到n_k使得$x_{n_k}\in\left(\cap_{i=1}^{k}B(y_i,\frac{1}{2^i})\right)\cap F$, 且$n_k<n_{k+1}$. 这样$n_j>n_k$时$x_{n_j},x_{n_k}\in B(y_k,\frac{1}{2^k})$, 则$d(x_{n_j},x_{n_k})<\frac{1}{2^{k-1}}$. 这说明$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的Cauchy子列. 证完. □

注1.64. $\mathbb{R}^n$及$\mathbb{C}^n$中的有界集恰为完全有界集.

为证明定理1.62 (iv), 需要一个辅助引理.

引理1.65. 设(X,d)是距离空间.

(i) 若$\{x_n\}_{n\geq 1}\subset X, x_0\in X$, 则$\{x_n\}$有子列收敛于$x_0$当且仅当对任意$\varepsilon>0$, $\{i : x_i\in B(x_0,\varepsilon)\}$都是无穷集.

(ii) 若$E\subset X$是紧的, 则它是有界闭集.

证明*:* (i) 证明略去不写.

(ii) 只需证明闭性. 任取$x_0\in E^c$. 只需证明$\mathrm{dist}(x_0,E)>0$. 对任意$n\geq 1$, 定义$G_n=\{y\in X : d(x_0,y)>1/n\}$. 则$\{G_n : n\geq 1\}$ 是E的一个开覆盖. 因E是紧的, 则存在N使得$E\subset\cup_{n=1}^{N}G_n$. 即$E\subset G_N$. 那么$d(x_0,y)>1/N$, $\forall y\in E$, 即有$\mathrm{dist}(x_0,E)\geq 1/N>0$. 证毕. □

证明(定理1.62 (iv)): "$\Longleftarrow$". 假设E是自列紧的, 往证它也是紧的. 只需证明E的任意开覆盖都有有限子覆盖.

由于E是自列紧的, 引理1.65表明E有至多可数的稠密子集. 利用Lindeloff定理(见习题1.2.12), 可知E的任意开覆盖有至多可数子覆盖. 因此只需证明E的任意可数开覆盖都有有限子覆盖.

任取E的一个可数开覆盖$\{G_n : n=1,2,3,\cdots\}$. 下面证明它有有限子覆盖. 用反证法. 若不然, 则对任意n, $E\not\subseteq\cup_{i=1}^{n}G_i$, 则可取$x_n\in E\setminus\cup_{i=1}^{n}G_i$. 由$E$自列紧, 知$\{x_n\}$有收敛子列, 设为$\{x_{n_k}\}$, 而且$x_{n_k}\to x_0\in E$. 设$x_0\in G_m$. 则$k$足够大时有$x_{n_k}\in G_m$. 特别地, n_k足够大且$n_k>m$时$x_{n_k}\in G_m\subset\cup_{i=1}^{n_k}G_i$, 矛盾.

"$\Longrightarrow$". 任取E中的一个序列$\{x_n\}$. 往证它有子列收敛于E中的点. 用反证法, 假设$\{x_n\}$无子列收敛于E中的点. 则由引理1.65 (i), 对任意$y \in E$, 存在$\varepsilon_y > 0$, 使得至多存在有限个x_n含于$B(y, \varepsilon_y)$. 则$\{B(y, \varepsilon_y) : y \in E\}$是$E$的一个开覆盖. 由紧性, 存在有限子覆盖, 设为$\{B(y_k, \varepsilon_{y_k}) : k = 1, 2, \cdots, n\}$. 则$\{i : x_i \in \cup_{k=1}^n B(y_k, \varepsilon_{y_k})\}$是至多有限集合, $\{i : x_i \in E\}$是至多有限集合. 矛盾于$\{x_i\}$是E中的序列. □

注1.66. *1.* 本节中介绍的诸多概念之间的关系可总结如下*:*

$$\text{紧} \Longleftrightarrow \text{自列紧} \Longrightarrow \text{列紧} \Longrightarrow \text{完全有界} \Longrightarrow \text{有界、可分}.$$

2. 对于$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{C}^n$的子集, 列紧性、完全有界性、有界性是一致的，紧性、自列紧性、有界闭性是一致的.

我们在数学分析的学习中已经知道, 欧氏空间的非空有界闭集上的连续函数有一系列好的性质. 类似地, 可以证明下面的结论.

命题1.67. 设(X, d)是紧距离空间. 那么,

1. X上的每个连续函数f都是有界的, 即$\sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$*;*

2. $|f|$在X上能取到最大值和最小值, 即存在$x_0, x_1 \in X$, 使得

$$|f(x_0)| = \inf_{x\in X} |f(x)|, \quad |f(x_1)| = \sup_{x\in X} |f(x)|;$$

3. X上的每个连续函数f必是一致连续的, 即对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$\sup_{x,y\in X, d(x,y)<\delta} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

由上面的结果, 紧距离空间上的连续函数总是有界的. Hewitt 于1948年证明了"连续函数皆有界"蕴含着距离空间的紧性.

定理1.68 (Hewitt)**.** 设(X, d)是距离空间. 那么X是紧的当且仅当X上的每个连续函数都是有界的.

Arzelá-Ascoli定理

本小节的主要目标是证明下面的定理, 它刻画了连续函数空间里的列紧集.

定理1.69 (Arzelá-Ascoli定理). 设(X,d)是紧距离空间, $E\subset C(X)$. 那么, E是列紧的当且仅当

1. E中的函数是一致有界的, 即$\sup_{f\in E}\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty$,
2. E中的函数是同等连续的, 即对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得
$$\sup_{f\in E}\sup_{x,y\in X,d(x,y)<\delta}|f(x)-f(y)|\le\varepsilon.$$

为证明上述结果, 我们需要一个关于抽子列的引理.

引理1.70. 对每个$k\ge 1$, $x_k=\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$是一个有界数列. 那么存在$\mathbb{N}$的子列$\{n_s\}$ 使得对任意$k\ge 1$, $\{x_{k,n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ 是收敛列.

证明: 经典的抽子列办法是抽取一个有界序列中部分位置的坐标来构成一个收敛列. 我们要进行可数多次抽子列的过程.

$\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$是一个有界数列, 则存在自然数列的子列$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 使得$\{x_{1,n_1(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛. 即x_1 的$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 这些位置的坐标构成一个收敛数列.

x_2 的$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 这些位置的坐标构成一个有界数列. 因此可抽取$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 的一个子列$\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty}$, 使得$x_2$ 的$\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 这些位置的坐标构成一个收敛数列. 易见, x_1 的$\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 这些位置的坐标也构成一个收敛数列.

类似上述办法, 可抽取$\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty}$的子列$\{n_3(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 使得序列x_1,x_2,x_3 在$\{n_3(j)\}_{j=1}^{\infty}$ 这些位置的坐标均构成收敛列.

一直这样做下去, 可得到可数个自然数列的子列$\{n_k(j)\}_{j=1}^{\infty}, k=1,2,3,\cdots$, 满足(a)后一个序列是前一个列的子列, (b) 对每个k 而言, $x_1,\cdots,x_k$在$\{n_k(j)\}_{j=1}^{\infty}$位置的坐标都构成收敛列.

将这一串数列$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty},\{n_2(j)\}_{j=1}^{\infty},\{n_3(j)\}_{j=1}^{\infty},\cdots$ 写成下面的矩阵
$$\begin{array}{ccccc}
n_1(1), & n_1(2), & n_1(3), & n_1(4), & \cdots\\
n_2(1), & n_2(2), & n_2(3), & n_2(4), & \cdots\\
n_3(1), & n_3(2), & n_3(3), & n_3(4), & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
n_k(1), & n_k(2), & n_k(3), & n_k(4), & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}.$$

抽取上述无穷矩阵的对角线$\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$. 注意到, 对每个$i \geq 1$, $\{n_k(k)\}_{k=i}^{\infty}$ 是前i 个序列$\{n_1(j)\}_{j=1}^{\infty}, \cdots, \{n_i(j)\}_{j=1}^{\infty}$的子列. 那么$x_1, \cdots, x_i$ 在$\{n_k(k)\}_{k=i}^{\infty}$ 这些位置的元素构成收敛列. 进一步地, $x_1, \cdots, x_i$在$\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$这些位置的元素也构成收敛列.

令$n_s = n_s(s)$. 那么$\{n_s\}_{s\geq 1}$ 即为所求. □

上述结果中所用的抽子列的办法称为**对角线方法**(diagonal process), 可推广它用于证明下面的结果.

推论1.71. 对每个自然数n, (X_n, d_n)是距离空间, y_n是X_n中的一个序列, 且任意子列都有收敛子列. 那么存在$\mathbb{N}$的子列$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得对任意n, y_n 的$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ 位置的元素构成y_n的一个收敛子列.

证明(定理1.69): "$\Longrightarrow$". 前面已经证明列紧集都是有界集合,即有$M > 0$使得$E \subset B(0, M)$, 进而$\sup_{f\in E}\sup_{x\in X}|f(x)| \leq M$. 因此只需证明$E$中函数是同等连续的. 由于$E$是列紧集，进而完全有界, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在$f_1, \cdots, f_n \in C(X)$, 使得$E \subset \cup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon/3)$. 由于$X$是紧的, 因此上面的连续函数都是一致连续的, 则存在$\delta > 0$使得

$$\sup_{1\leq i\leq n}\sup_{x,y\in X, d(x,y)<\delta}|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3.$$

那么, 对任意$f \in E$, 有$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$使得$\sup_{x\in X}|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon/3$. 则对任意$x, y \in X$, $d(x, y) < \delta$时, 必有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

于是必要性得证.

"$\Longleftarrow$". 任取E中的一个列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 只需证明它有收敛子列. 证明将分为两步.

步骤一. 证明存在$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列在X的某可数稠子集上逐点收敛.

任意取定X的一个可数稠密子集$\{t_k : k = 1, 2, \cdots\}$. 任意$k$固定后, 由条件知$\{f_n(t_k)\}_{n=1}^{\infty}$是有界列. 利用对角线方法, 可取到$\mathbb{N}$子列$\{n_i\}$使得对任意$t_k$, $\{f_{n_i}(t_k)\}_{i=1}^{\infty}$是收敛列. 这样便完成了步骤一的证明. 注意此步只用到了E中函数的一致有界性.

步骤二. 证明$\{f_{n_i}\}$是$C(X)$中的一个收敛列.

因为我们已经证明$C(X)$是完备的距离空间, 因此只需证明$\{f_{n_i}\}$是Cauchy列.

由于E中的函数是同等连续的, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x,y\in X, d(x,y)<\delta}|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3.$$

对前述的$\delta > 0$, $\{B(t_k, \delta) : k \geq 1\}$是$X$的一个可数开覆盖. 由于$X$的紧性, 存在$m$使得$X \subset \cup_{k=1}^m B(t_k, \delta)$.

注意到$\{f_{n_i}(t_1)\}_{i=1}^\infty, \{f_{n_i}(t_2)\}_{i=1}^\infty, \cdots, \{f_{n_i}(t_m)\}_{i=1}^\infty$ 是收敛列. 则对前述的$\varepsilon > 0$, 存在N使得$i, j \geq N$时,

$$\sup_{1\leq k\leq m} |f_{n_i}(t_k) - f_{n_j}(t_k)| < \varepsilon/3.$$

对任意$x \in X$, 设$d(x, t_k) < \delta$. 则对任意$i, j \geq N$, 有

$$\begin{aligned}|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| &= |[f_{n_i}(x) - f_{n_i}(t_k)] + [f_{n_i}(t_k) - f_{n_j}(t_k)] + [f_{n_j}(t_k) - f_{n_j}(x)]| \\ &\leq |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(t_k)| + |f_{n_i}(t_k) - f_{n_j}(t_k)| + |f_{n_j}(t_k) - f_{n_j}(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

即有$\sup_{x\in X} |f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \varepsilon$. 这说明$\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$是$C(X)$中的Cauchy列. 证完. □

特别地, 若X是$\mathbb{R}^n$的有界闭集，则X是紧集，因此定理1.69的结论也是成立的.

例1.72. 对$n = 1, 2, \cdots$, 定义$f_n(x) = (-1)^n + x^n$, $x \in \mathbb{R}$. 则

1. $\{f_n : n \geq 1\}$作为$C[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$中的函数是一致有界且同等连续的;
2. $\{f_n : n \geq 1\}$作为$C[-1, 1]$中的函数是一致有界且但非同等连续的;
3. $\{f_n : n \geq 1\}$作为$C[-2, 2]$中的函数是既非一致有界也非同等连续的.

定理1.73 (Montel定理)**.** 设$\{f_n\}_{n=1}^\infty$是区域Ω上一致有界的解析函数序列, 则对任意完全位于Ω 内的有界区域D（即$\bar{D} \subset \Omega$）恒有子列$\{f_{n_i}\}$在D上一致收敛.

证明*:* 对任意$z \in \overline{D}$, 存在$\delta_z > 0$ 使得$B(z, \delta_z) \subset \Omega$. $\{B(z, \delta_z/3) : z \in \Omega\}$ 是$\overline{D}$的一个开覆盖, 由它的紧性, 存在有限子覆盖, 记为$\{B(z_i, \delta_{z_i}/3) : i = 1, 2, \cdots, m\}$.

断言: $\{f_n\}$ 在每个$\overline{B(z_i, \delta_{z_i}/3)}$上是同等连续的.

为简便, 记$\delta_i = \delta_{z_i}$. 假设$M > 0$且$\sup_n \sup_{z\in\Omega} |f_n(z)| < M$. 由Cauchy积分公式,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\xi - z_i| = \delta_i/2} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \overline{B(z_i, \delta_i/3)}.$$

那么$\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{B(z_i, \delta_i/3)}$时,

$$|f_n(\lambda_1) - f_n(\lambda_2)| \leq \frac{M\pi\delta_i}{2\pi} \sup_{|\xi - z_i| = \delta_i/2} \left|\frac{1}{\xi - \lambda_1} - \frac{1}{\xi - \lambda_2}\right| \leq \frac{18M}{\delta_i} |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

则证得断言.

对每个i, 根据Arzelá-Ascoli定理, $\{f_n\}$的任何一个子列都有子列在$\overline{B(z_i,\delta_{z_i}/3)}$一致收敛. 通过有限次抽子列, 可以抽得$\{f_n\}$的子列在$D$上一致收敛. □

Arzelá-Ascoli定理在常微分方程理论中有着重要的应用, 可用于证明下面的常微分方程初值问题解的存在性.

定理1.74 (Peano定理)**.** 设$a,b>0, x_0,t_0\in\mathbb{R}$, $f(t,x)$是$J\doteq[t_0-a,t_0+a]\times[x_0-b,x_0+b]$上的连续函数. 设$M=\max\limits_{(t,x)\in J}|f(t,x)|$. 令$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$. 那么初值问题

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t)=f(t,x(t)),\quad t\in(t_0-h,t_0+h)$$

有解.

证明存在性的方法是先构造初值问题的近似解$\{x_n\}$, 再利用列紧性和Arzelá-Ascoli定理, 寻找一串一致收敛的子列，最后证明其极限恰为原初值问题的解.

习题

1.4.1. 设(X,d)是距离空间, $E\subset X$且E中的任意由两两不同元素做成的序列都无收敛子列. 证明: E是闭集.

1.4.2. 证明: 在距离空间中, 一个集合是列紧的当且仅当其闭包是列紧的.

1.4.3. 证明: 在距离空间中, 一个集合是完全有界的当且仅当其闭包是完全有界的.

1.4.4. 证明: 距离空间X是完备的当且仅当X中的每一完全有界集都是列紧的.

1.4.5. 设(X,d)是距离空间, $E_i\subset X, i=1,2,\cdots,n$. 证明: 若每个$E_i$都是紧(列紧)的, 则$\cup_{i=1}^n E_i$是紧(列紧)的.

1.4.6. 证明: 离散距离空间中的子集E是列紧的当且仅当它是至多有限集合.

1.4.7. (X,d), (Y,d')是距离空间, $f:X\to Y$连续. 证明: 若E是X的紧子集, 则$f(E)$ 是Y 的紧子集.

1.4.8. 证明命题1.67.

1.4.9. 设(X,d)是距离空间, $E,K\subset X$非空且K是紧集. 证明: 存在$y\in K$ 使得$\mathrm{dist}(y,E)=\inf_{x\in K}\mathrm{dist}(x,E)$.

1.4.10. (X,d)是紧距离空间, $T:X\to X$满足

$$d(Tx,Ty)<d(x,y),\qquad \forall x,y\in X, x\neq y.$$

证明：T有唯一不动点.

1.4.11. 设$E\subset \mathrm{Hol}(\Omega)$, 其中$\Omega$是复平面一区域, $\mathrm{Hol}(\Omega)$ 是习题1.1.7中定义的距离空间. 证明: E是列紧的当且仅当

$$\sup_{f\in E}\sup_{x\in K_n}|f(x)|<\infty,\quad \forall n\geq 1.$$

1.4.12. 对$n\geq 1$, 定义$\mathbb{R}$上的连续函数$f_n(x)=x^n$, $0<\varepsilon<\infty$. 证明：$E=\{f_n:n\geq 1\}$是$C[0,\varepsilon]$中的列紧集当且仅当$\varepsilon<1$.

1.4.13. 设E是由$\mathbb{R}$上的若干可微函数构成的非空集合. 证明: 若

$$\sup_{f\in E}\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|<\infty,$$

则E中的函数作为$[0,1]$上的函数是同等连续的.

1.4.14. 设(X,d)是可分距离空间, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(X)$. 证明: 若$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是一致有界且同等连续的, 则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$是逐点收敛的.

1.4.15. 举例说明: $C[0,1], l^{\infty}$中均有非列紧的有界闭集.

第 2 章 Banach空间

距离空间是欧氏空间的推广, 但仅涉及拓扑结构, 而未考虑元素之间的线性关系(加法、数乘). 本章将要介绍的Banach空间, 不仅有拓扑结构, 而且赋予了与其相容的线性结构. 我们先从线性空间开始讲起.

2.1 线性空间

在前期课程的学习中, 我们已遇到各种各样的函数. 连续函数、可微函数是数学分析课程的主要研究对象；复变函数中研究解析函数, 而实变函数主要处理实值可测函数、可积函数. 上述函数类皆封闭于加法和数乘运算. 以$\mathbb{C}$上所有解析函数构成的集合$\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$为例, 对于$f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}$, 定义加法、数乘运算如下

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$(\alpha f)(z) = \alpha f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

显然, 加法是$\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$上的运算且使得$\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$成为一个交换群, 并且加法和数乘满足一些非常好的相容性条件, 比如分配律.

线性空间是加法、数乘运算下封闭的各种函数空间的抽象化. 线性空间的概念基于数域. 我们已经知道, 数域是加、减、乘、除封闭且包含非零元素的数构成的集合. 有理数域是最小的数域.

定义

定义2.1. 设V是一个非空集合, $\mathbb{F}$是复数域或实数域. 若

1. 在V上定义了一种运算“$+$”, 称为<u>加法</u>, 即

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V, \\ (x, y) &\longmapsto x + y, \end{aligned}$$

称$x+y$为x与y的<u>和</u>*;*

2. 在$\mathbb{F}$与V之间定义了一种运算“$\cdot$”, 称为<u>数乘</u>, 即

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times V &\longrightarrow V, \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x; \end{aligned}$$

3. 上述的加法、数乘满足以下条件: a) $x+y=y+x, \forall x,y\in V$;

   b) $(x+y)+z=x+(y+z), \forall x,y,z\in V$;

   c) 存在一个元素$\theta\in V$使得$x+\theta=x, \forall x\in V$; 元素$\theta$称为$V$的零元;

   d) 对任一$x\in V$, 都存在唯一元$y\in V$使得$x+y=\theta$, 称y为x的负元, 记为$-x$;

   e) 对$\mathbb{F}$中的数1, 有$1\cdot x=x, \forall x\in V$;

   f) 对任意$\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $x\in V$有$(\alpha\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$;

   g) 对任意$\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $x\in V$有$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$;

   h) 对任意$\alpha\in\mathbb{F}$, $x,y\in V$有$\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$;

则称V为域$\mathbb{F}$上的一个线性空间（或向量空间）. V中元素称为向量, V的零元称为零向量, $\mathbb{F}$称为线性空间的基域. 当$\mathbb{F}$是实数域时, V称为实线性空间. 当$\mathbb{F}$是复数域时, V 称为复线性空间.

注2.2. 1. 线性空间依赖于数域. 我们称$(V,\mathbb{F})$是一个线性空间时, 即意味着V是数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间.

2. 若$(V,\mathbb{C})$是线性空间, 则$(V,\mathbb{R})$也是一个线性空间.

3. $(\mathbb{F},\mathbb{F})$是一个线性空间.

4. 数乘向量, 是对向量做伸缩. $\alpha\cdot x$常简记为αx.

5. $x+(-y)$ 简记为$x-y$.

6. θ常简记为0.

定义2.3. 设X是数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间, $Y\subset X$.

1. 称Y是X的一个线性子空间或线性子空间(或简称为子空间), 若$Y\neq\emptyset$且Y 封闭于加法、数乘运算. 此时, Y 作为X 的子集继承的加法、数乘使得它也成为一个线性空间.

2. $\{0\}, X$分别是X的最小的和最大的线性子空间, 称为X的平凡的线性子空间.

3. 若X的线性子空间是X的真子集, 则称之为一个真线性子空间.

最常见的线性空间的例子是由函数构成的, 其上的加法、数乘定义为函数的“逐点”加法和数乘.

记号2.4. 对于非空集合E, F, 以F^E表示从E到F的所有映射构成的集合. 这一记号源于这一事实: 若E是n元集, F是m元集，则从E到F的所有映射恰构成一m^n元集.

例2.5. 设Ω是非空集合, $\mathbb{F}$是一数域. 对于$f, g \in \mathbb{F}^\Omega, \alpha \in \mathbb{F}$, 定义

$$(f+g)(w) = f(w) + g(w), \quad \forall w \in \Omega,$$

$$(\alpha f)(w) = \alpha f(w), \quad \forall w \in \Omega.$$

那么$f+g, \alpha f \in \mathbb{F}^\Omega$; 而且易证$(\mathbb{F}^\Omega, \mathbb{F})$在上述定义的“逐点加法”和“逐点数乘”下是线性空间. $\mathbb{F}^\Omega$中的零元是Ω上的常值函数0, $\mathbb{F}^\Omega$中元素f的负元是其相反函数$-f$.

例2.6. 设Ω是非空集合, $\mathbb{F}$是一数域. 记

$$\mathbb{F}_B^\Omega = \{g \in \mathbb{F}^\Omega : g\text{是有界函数}\},$$

$$\mathbb{F}_F^\Omega = \{g \in \mathbb{F}^\Omega : g\text{于至多有限个点处取值非零}\}.$$

那么$\mathbb{F}_B^\Omega, \mathbb{F}_F^\Omega$在“逐点加法”、“逐点数乘”下是线性空间, 皆为$\mathbb{F}^\Omega$的线性子空间.

例2.7. 1. 以$\mathbb{C}[z]$表示所有复变量的复系数多项式构成的集合. 则$\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}^\mathbb{C}$且在逐点定义的加法和数乘之下是一个复线性空间, 是$\mathbb{C}^\mathbb{C}$ 的线性子空间.

2. 若Ω是复平面的一个开子集, 则$\mathrm{Hol}(\Omega) = \{\Omega\text{上的解析函数全体}\}$ 在逐点定义的加法和数乘之下是一个复线性空间, 是复线性空间$\mathbb{C}^\Omega$的线性子空间. 显然, 每个复系数多项式都可看作$\mathrm{Hol}(\Omega)$中的元素, 因此$\mathbb{C}[z]$也可看作$\mathbb{C}^\Omega$的线性子空间.

3. $C[a,b] = \{[a,b]\text{上全体复值连续函数}\}$是复线性空间$\mathbb{C}^{[a,b]}$的线性子空间. $\mathbb{C}[z]$也可看作$C[a,b]$的线性子空间.

4. $\mathbb{R}$上的实值可微函数构成实线性空间, 是实线性空间$\mathbb{R}^\mathbb{R}$的线性子空间.

5. $\mathbb{R}$上的复Lebesgue可测函数构成的集合$\mathfrak{L}(\mathbb{R})$是一个复线性空间, 是复线性空间$\mathbb{C}^\mathbb{R}$ 的线性子空间.

下面我们介绍几个常用线性空间的例子.

例2.8. 1. 对于欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的元素$x = (x_1, \cdots, x_n)$和$y = (y_1, \cdots, y_n)$, 以及实数a, 定义

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \;\; ax = (ax_1, \cdots, ax_n),$$

则$\mathbb{R}^n$在上述定义的加法和数乘下是实线性空间. 显然, 对每个元素$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$恰存在唯一的$f \in \mathbb{R}^E$ 使得$x = (f(1), \cdots, f(n))$, 其中$E = \{1, 2, \cdots, n\}$.

2. n阶复方阵全体构成的集合$M_n(\mathbb{C})$在通常矩阵的加法和数乘下构成一个复线性空间. 显然, 对每个元素$[\alpha_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$, 恰存在唯一的$f \in \mathbb{R}^{E\times E}$ 使得$[\alpha_{i,j}]_{1\le i,j\le n} = [f(i,j)]_{1\le i,j\le n}$, 其中$E=\{1,2,\cdots,n\}$.

3. 对$x=\{x_i\}_{i\ge 1}, y=\{y_i\}_{i\ge 1}\in (s)$, 以及复数$\alpha$, 定义
$$x+y=\{x_i+y_i\}_{i\ge 1},\ \ \alpha x=\{\alpha x_i\}_{i\ge 1}.$$
则(s)在上述定义的按坐标的加法和数乘下是复线性空间. 显然, 对每个元素$x=\{x_i\}\in (s)$恰存在唯一的$f\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 使得$x=\{f(i)\}_{i\ge 1}$.

4. 记$(c_0)=\{$收敛于0的复数列$\}$, $(c)=\{$收敛复数列$\}$, $l^\infty=\{$有界复数列$\}$. 那么(c_0), $(c), l^\infty$是(s) 的线性子空间.

上述几类线性空间是非常基本的数学对象, 它们仍可看作由函数构成的线性空间. 这需要线性同构的概念.

线性算子与线性同构

下面我们考虑线性空间的分类. 秉持分类的原则, 两个线性空间是否可视作一个应取决于两者之间是否存在保持线性结构的双射. 在数学分析、实变函数的学习中, 我们知道求导和求积分预算都保持加法和数乘. 比如下面定义的
$$\begin{aligned} D:\mathrm{Hol}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{C}),\\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$
即保持加法和数乘.

本节里我们讨论线性空间之间保持加法和数乘的映射, 这就是线性算子.

定义2.9. X, Y为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $T\in Y^X$.

1. 若T满足
$$T(x+y)=T(x)+T(y),\quad T(\alpha x)=\alpha T(x),\quad \forall \alpha\in\mathbb{F}, \forall x,y\in X,$$
则称T是从X到Y的一个<u>线性算子</u>. 简言之, 线性算子即线性空间之间保持加法、数乘运算的映射. $Y=\mathbb{F}$时, 称T为一个<u>线性泛函</u>.

2. 若存在从$(X,\mathbb{F})$ 到$(Y,\mathbb{F})$的双射的线性算子, 则称X,Y是线性同构的, 这样的线性算子称作一个线性同构映射.

注2.10. 设X,Y为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $T:X\to Y$是线性算子. 常记$\mathrm{ran}(T)=\{T(x):x\in X\}$, $\ker(T)=\{x\in X:T(x)=0\}$, 分别称为$T$的值域和零空间. 易见, $\ker(T)$是X的线性子空间, $\mathrm{ran}(T)$是Y的线性子空间. 另外, 容易验证

1. T把X的零元映为Y的零元;
2. T是单射当且仅当$\ker(T)=\{0\}$;
3. T是双射时, 其逆映射$T^{-1}:Y\to X$也是线性算子.
4. 为简便, $T(x)$常简记为Tx, $\mathrm{ran}(T)$, $\ker(T)$也可分别记作$R(T)$和$N(T)$.

注2.11. 若X,Y为数域$\mathbb{F}$上的线性空间, 则容易证明从X到Y的全体线性算子构成的集合在逐点定义的加法、数乘下是数域$\mathbb{F}$上的线性空间.

为刻画线性空间之间的线性同构, 我们需要线性组合、线性相关、线性无关、Hamel基等概念.

Hamel基

线性空间X的一些子集继承X上的加法和数乘可以成为线性空间.

定义2.12. 设X是数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间, $Y\subset X$.

1. 若$x_1,\cdots,x_n\in X$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{F}$, 则称$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$为$x_1,\cdots,x_n$的一个线性组合, 也记作$\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i$, α_i称作x_i 的系数.
2. 由Y中元素的所有线性组合构成的集合是一个线性子空间, 称之为Y的线性张开或由Y张成的线性子空间, 记为$\mathrm{span}\,Y$. 易证, $\mathrm{span}\,Y$ 是包含Y 的最小的线性子空间. 显然, $\mathrm{span}\{x_0\}=\{\alpha x_0:\alpha\in\mathbb{F}\}$, 简记为$\mathbb{F}x_0$.
3. 若$x_1,\cdots,x_n\in X$且存在不全为0的数$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使得$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0$, 则称$n$元组$x_1,\cdots,x_n$是线性相关的, 否则称为线性无关的.
4. 若Y非空且Y中任意两两不同的元素$x_1,\cdots,x_n$均构成线性无关组, 则称Y是一个线性无关集. 否则称之为一个线性相关集.

5. 若Y是一个线性无关集且$\operatorname{span} Y = X$, 则称$Y$是$X$的一个Hamel基.

线性空间的Hamel基中的向量做线性组合可以表示线性空间中每一个向量. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$有明显的Hamel基. 自然要问, 一般的线性空间是否也一定有Hamel基？显然, 零线性空间(即只含零元的线性空间)没有线性无关子集, 因此没有Hamel基. 但对于非零的线性空间, Hamel基总是存在的.

定理2.13. 任意非零线性空间都有Hamel基.

为证明上述定理, 需要Zorn引理. 我们先介绍偏序集及有向集的概念.

定义2.14. 设Λ是一非空集合, $\mathcal{R}$是Λ上一个二元关系, 即$\mathcal{R}$是$\Lambda \times \Lambda$的一个子集. 若$(x, y) \in \mathcal{R}$, 则称x, y 具有关系$\mathcal{R}$, 记作$x\mathcal{R}y$. 若$\mathcal{R}$还满足

1. (反身性) $x\mathcal{R}x, \forall x \in \Lambda$,
2. (反对称性) "$x, y \in \Lambda, x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x$"恒蕴含"$x = y$".
3. (传递性) "$x, y, z \in \Lambda, x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z$"恒蕴含"$x\mathcal{R}z$",

则称$\mathcal{R}$是X上一个部分序关系或偏序关系, 称$(\Lambda, \mathcal{R})$ 是一个部分有序集或偏序集.

注2.15. 偏序关系可理解为大小关系或次序关系. 比如, 可验证实数的“小于等于”关系是$\mathbb{R}$上的一个偏序关系. 由于这个原因, 常用$\leq$ 或$\preccurlyeq$表示偏序关系, 读作“小于等于”; $x \preccurlyeq y$也可记为$y \succcurlyeq x$，读作"y大于等于x".

例2.16. 设S是非空集合, $\mathcal{W}$是S的一个非空子集族. 对$A, B \in \mathcal{W}$, 定义$A \preccurlyeq B$, 若$A \subset B$. 那么$\preccurlyeq$是$\mathcal{W}$上的一个偏序关系.

例2.17. 以$\mathbb{N}$代表正整数构成的集合. 对于m, n, 定义$m \preccurlyeq n$, 若$m \leq n$. 则$(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$是一个偏序集合. 事实上, 它还是一个"良序集"(即其中任意两个元素都有$\preccurlyeq$ 关系且任意非空子集均有最小元).

定义2.18. 设$(S, \preccurlyeq)$是一个偏序集, $E \subset S$.

1. 若$s_0 \in S$, 且$s \preccurlyeq s_0, \forall s \in E$, 则称$s_0$是$E$的一个上界.
2. 若$s_0 \in S$且不存在$s \in S \setminus \{s_0\}$使得$s_0 \preccurlyeq s$, 则称$s_0$ 是S的一个极大元.
3. 若对任意$s_1, s_2 \in E$, 必有$s_1 \preccurlyeq s_2$或$s_2 \preccurlyeq s_1$成立, 则称E是S的一个全序子集.

下面的Zorn引理给出了偏序集中存在极大元的一个充分条件.

定理2.19 (Zorn引理, 1935)**.** 若部分有序集S中的任意全序子集都有上界, 那么S中有极大元.

Zorn引理是分析学中一个基本且重要的工具, 常用于证明关于存在性的结论. 要证明上述定理需要承认下面的选择公理(Zermelo)：**设S是非空集合, $\mathcal{W}$是S的若干非空子集构成的非空子集族. 则存在映射$f : \mathcal{W} \to S$, 使得$f(E) \in E, \forall E \in \mathcal{W}$.** 它与下面的良序化定理也是等价的.

定理2.20. *若X是非空集合, 则存在X上的偏序关系$\leq$, 使得$(X, \leq)$成为一个良序集(即满足: X的每一非空子集E都包含唯一元素x_0使得$x_0 \leq x, \forall x \in E$).*

泛函分析课程承认选择公理. 下面我们用Zorn引理证明下面这个关于Hamel基的结果.

定理2.21. 线性空间X的任意线性无关子集都可以扩充为一个Hamel基.

证明: 设$(X, \mathbb{F})$是线性空间, $E \subset X$是一线性无关子集. 记$\mathcal{W} = \{X$的所有包含了E的线性无关子集$\}$. 则$\mathcal{W} \neq \emptyset$. 对$F, G \in \mathcal{W}$, 定义$F \preccurlyeq G$, 若$F \subset G$. 则$\preccurlyeq$是$\mathcal{W}$上一偏序关系.

易见, 根据Zorn引理, 我们能证明$\mathcal{W}$中有极大元E_0, 并且易验证E_0就是包含了E的X的一个Hamel基. □

注2.22. 由证明可见, 线性空间的Hamel基即它的“极大”的线性无关子集.

非零线性空间中的任意非零元构成的单元集是线性无关的, 因此任意非零线性空间都有Hamel基, 即证明了定理2.13.

容易看出线性空间的Hamel基如果存在则必不唯一. 那么, 同一线性空间的不同Hamel基有什么共同点?

定理2.23 (*)**.** 同一线性空间任意两个Hamel基具有相同的基数.

定义2.24. 设$(X, \mathbb{F})$是线性空间.

1. 若X没有Hamel基, 即X是零线性空间, 则定义它的维数为0.

2. 若X有Hamel基, 则定义它的维数为其某Hamel基的基数.

X的维数记作$\dim X$, 有限时X称为有限维线性空间; 否则称为无穷维线性空间.

Hamel基对于研究线性空间的结构非常重要. 借助于Hamel基的概念, 可以证明：任意线性空间都与某个函数空间是线性同构的(见习题2.1.8).

下面我们给出Hamel基在线性空间结构方面的应用.

代数补

与前期课程相比,泛函分析课程主要关注的是无穷维的线性空间. 无穷维数带来许多困难, 因此通过把线性空间分解成若干线性子空间的和是一个常见的办法.

定义2.25. 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, Y,Z为X的两个非空子集.

1. 称$Y+Z=\{y+z:y\in Y,z\in Z\}$为$Y,Z$的和. 显然, 和不同于并. $Y=\{y\}$ 时, $Y+Z$常简记为$y+Z$.
2. 若Y,Z为线性子空间, 易证$Y+Z$也是线性子空间；若还有$Y\cap Z=\{0\}$, 则它们的和$Y+Z$ 称为直接和, 也记作$Y\oplus Z$. 此时, $Y+Z$中的元素写出Y,Z中元素的和时, 表示是唯一的.
3. 若Y,Z为线性子空间, $X=Y+Z$且$Y\cap Z=\{0\}$, 则称Y,Z是代数互补的, 称Y是Z 的一个代数补.

线性泛函的核空间总有代数补.

引理2.26. 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, f是X上一个线性泛函. 若$x_0\in X\backslash\ker f$, 则$X=\ker(f)\oplus\mathbb{F}x_0$.

证明: 任取$x_0\in X\backslash\ker(f)$. 则$f(x_0)\neq 0,\mathbb{F}x_0\cap\ker(f)=\{0\}$. 余下只需证明$X=\ker(f)+\mathbb{F}x_0$.

令$y_0=x_0/f(x_0)$. 那么$f(y_0)=1$, 而且对任意$x\in M$, 我们有

$$x-f(x)y_0\in\ker(f),\quad x=(x-f(x)y_0)+f(x)y_0.$$

这意味着$x\in\ker(f)+\mathbb{F}y_0=\ker(f)+\mathbb{F}x_0$. 进而$X=\ker(f)+\mathbb{F}x_0$. 证完. □

上面的结果表明，线性子空间的代数补一般来说不唯一. 利用Hamel基, 我们可证明：

定理2.27. 线性空间的任意线性子空间都有代数补.

证明: 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, Y为X的线性子空间. 不妨设$X\neq Y\neq\{0\}$. 则Y有Hamel基, 设为E_0. 利用定理2.21, 存在X的Hamel基E包含了E_0. 记$Z=\mathrm{span}(E\setminus E_0)$. 只需证明$Y,Z$互为代数补. 留给读者完成. □

代数补对于线性泛函的拼接、扩张十分有用, 参见习题2.1.23及2.1.24.

乘积线性空间与商线性空间*

定义2.28. $(Y_1,\mathbb{F})$,$(Y_2,\mathbb{F})$是线性空间. 对$(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in Y_1\times Y_2$及$\alpha\in\mathbb{F}$, 定义

$$\alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2),\quad (x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2).$$

验证$Y_1\times Y_2$在上述定义的加法、数乘下是数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间, 称之为$(Y_1,\mathbb{F})$和$(Y_2,\mathbb{F})$的乘积线性空间.

定义2.29. 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, M为X的线性子空间. 那么

(i) 对任意$x,y\in X$, 或者$(x+M)\cap(y+M)=\emptyset$, 或者$x+M=y+M$. 记$X/M=\{x+M: x\in X\}$

(ii) 在X/M上定义加法、数乘如下

$$(x+M)+(y+M)=(x+y)+M,\quad \alpha(x+M)=\alpha x+M,$$

则X/M在上述加法、数乘下是线性空间, 零元是$0+M$, $x+M$的负元为$(-x)+M$. 称X/M为X 关于M的商线性空间.

(iii) $\pi: x\longmapsto x+M$是从X到X/M的线性算子, 称为自然同态, 或商映射.

引理2.30. 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, M,N为X的线性子空间且$M\cap N=\{0\}$. 那么$\dim N\le\dim X/M$. 若还有$M\oplus N=X$, 则N与X/M是线性同构的.

证明: 不妨设$N\neq\{0\}$. 假设$\{e_\lambda\}_\lambda$是N是一个Hamel基. 易验证$\{e_\lambda+M\}_\lambda$是X/M的线性无关子集. 若还有$M\oplus N=X$, 则可证明$\{e_\lambda+M\}_\lambda$是X/M的Hamel基. 因此引理的结论成立. □

注2.31. 上述引理表明, 线性空间X的任意线性子空间M的任意两个代数补的维数皆相同, 恰为$\dim X/M$, 称之为M的余维数. 而引理2.26表明, 非零线性泛函的核空间的余维数是1.

习题

2.1.1. 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, $x,y,z\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. 证明:

(a) $x+y=x+z$当且仅当$y=z$.

(a) 若$\alpha\neq 0$, 则$\alpha x=\alpha y$ 当且仅当$x=y$.

(c) 若$x \neq 0$, 则$\alpha x = \beta x$ 当且仅当$\alpha = \beta$.

(d) $0x = 0, -x = (-1)x, \alpha 0 = 0$.

2.1.2. *(a)* 证明: (s)和$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$是线性同构的.

(b) 证明:若E是一个n元集, 则$\mathbb{C}^E$与$\mathbb{C}^n$是线性同构的, $\mathbb{R}^E$与$\mathbb{R}^n$ 是线性同构的, $\mathbb{C}^{E\times E}$与$M_n(\mathbb{C})$ 是线性同构的.

2.1.3. 设$(X,\mathbb{C})$是复线性空间.

(a) $f:(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$是线性泛函, 令$F(x) = f(x) - \mathrm{i}f(\mathrm{i}x), x\in X$. 证明: $F:(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$是一复线性泛函.

(b) 证明: 若$F:(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$是线性泛函, 则存在$(X,\mathbb{R})$ 上的线性泛函f使得$F(x) = f(x) - \mathrm{i}f(\mathrm{i}x), \forall x\in X$.

2.1.4. 设$(X,\mathbb{F})$是线性空间, $x_1,\cdots,x_n\in X$. 证明:

(a) x_1是一元线性无关组当且仅当$x_1\neq 0$;

(b) 若$n>1$, 则$x_1,\cdots,x_n$是线性相关组当且仅当存在i使得$x_i\in\operatorname{span}\{x_j : j\neq i\}$.

2.1.5. Y是线性空间X的非空子集. 证明:

(a) Y是线性无关的当且仅当Y是$\operatorname{span}Y$ 的Hamel基.

(b) Y是X的Hamel基当且仅当Y是X的一个极大的线性无关子集, 即Y是线性无关集且X没有线性无关集真包含Y.

2.1.6. 证明: 线性空间$(X,\mathbb{F}),(Y,\mathbb{F})$是线性同构的当且仅当$\dim X = \dim Y$.

2.1.7. 设$f,g:X\to Y$是线性算子, E是X的Hamel基. 证明: $f=g$当且仅当$f|_E = g|_E$.

2.1.8. 证明: 若Y是线性空间$(X,\mathbb{F})$的一个Hamel基, 则映射

$$\begin{aligned}\Phi:\mathbb{F}_F^Y &\longrightarrow X\\ g &\longmapsto \sum_{y\in Y} g(y)y\end{aligned}$$

是一个线性同构映射.

2.1.9. $(X, \mathbb{F})$是线性空间, $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$为X的一个Hamel基. 证明:

(a) 对任意$y \in (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n$, 如下定义的$\varphi_y$是$X$上的线性泛函:

$$\varphi_y\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \qquad \forall \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in X.$$

(b) 若f是X 上的一个线性泛函, 则存在唯一的$y \in (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n$使得$f = \varphi_y$.

(c) $\mathbb{F}^n$与$L(X, \mathbb{F})$ 是线性同构的.

2.1.10. 设$(X, \mathbb{F})$是线性空间. 以$L(X, \mathbb{F})$表示X上所有线性泛函构成的集合. 证明:

(a) $L(X, \mathbb{F})$是$\mathbb{F}^X$的线性子空间.

(b) $\dim X < \infty$当且仅当$\dim L(X, \mathbb{F}) < \infty$, 并且此时两者维数相等.

2.1.11. $(X, \mathbb{C})$是线性空间, $E = \{e_i : i \in J\}$为X的一个Hamel基. 证明: X 看作实线性空间时, $E \cup \{\mathrm{i}e_i : i \in J\}$ 是它的一个Hamel基.

2.1.12. $(X, \mathbb{C})$是线性空间, E为X的一个Hamel基. 证明: 对任意$x_0 \in X \setminus \{0\}$, 存在$y \in E$, 使得$\{x_0\} \cup [E \setminus \{y\}]$ 仍是X的一个Hamel基.

2.1.13. $(X, \mathbb{F})$, $M \subset X$非空.证明: $\operatorname{span} M$是X的包含M的最小线性子空间, 恰为V的所有包含M的线性子空间的交.

2.1.14. 设$(X, \mathbb{F})$, $(Y, \mathbb{F})$是线性空间, $T : X \to Y$是单射线性算子, $x_1, \cdots, x_n \in X$. 证明: $x_1, \cdots, x_n$线性无关当且仅当$Tx_1, \cdots, Tx_n$ 线性无关.

2.1.15. 给出$C[0, 1]$的一个具有连续基数的线性无关子集.

2.1.16. 证明: 若Y, Z为线性空间X的线性子空间, 则Y, Z是代数互补当且仅当对任意$x \in X$, 存在唯一的$y \in Y$以及唯一的$z \in Z$使得$x = y + z$.

2.1.17. 在$\mathbb{R}^2$中举例说明线性子空间的代数补可能不唯一.

2.1.18. 证明: 若G是$\mathbb{R}^3$的一个不只包含零元的真的线性子空间, 则存在$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ 使得或者

$$G = \{(\alpha a, \alpha b, \alpha c) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

或者

$$G = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = 0\}.$$

2.1.19. $(X,\mathbb{F})$是线性空间, E,F_1,F_2是X的线性子空间, 且F_1,F_2都是E的代数补. 证明: 若$\dim X<\infty$, 则$\dim F_1=\dim F_2$.

2.1.20. $(X,\mathbb{C})$是线性空间, $\{f_i\}_{i=1}^n$是X上线性泛函, $M=\cap_{i=1}^n\ker f_i$, N是M的一个代数补. 令$g_i=f_i|_N, i=1,2,\cdots,n$. 证明:

(a) 对$x\in N$, 定义$\varphi(x)=(g_1(x),\cdots,g_n(x))$. 则$\varphi:N\to\mathbb{C}^n$是线性单射.

(b) $\dim N\leq n$.

(c) $f_1,\cdots,f_n$线性无关当且仅当$g_1,\cdots,g_n$线性无关.

(d) 若$f_1,\cdots,f_n$线性无关, 则$\dim N=n$.

2.1.21. $(X,\mathbb{F})$是线性空间, $\{f_i\}_{i=1}^n$是X上线性泛函. 证明下述等价:

(a) $f_1,\cdots,f_n$线性无关.

(b) $\cap_{i=1}^n\ker f_i$ 有一个维数为n的代数补.

(c) $\{(f_1(x),\cdots,f_n(x)):x\in X\}=\mathbb{F}^n$.

(d) 存在$x_1,\cdots,x_n\subset X$使得$f_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

2.1.22. $(X,\mathbb{F})$是线性空间, $\{f_i\}_{i=0}^n$是X上线性泛函. 证明: 若$\cap_{i=1}^n\ker f_i\subset\ker f_0$, 则$f_0$可表为$\{f_i\}_{i=1}^n$的线性组合.

2.1.23. X是数域$\mathbb{F}$上的线性空间, G_1,G_2为X的互为代数补的线性子空间. 证明: 若f_i为G_i上的线性泛函$(i=1,2)$, 则存在X上的线性泛函f使得$f|_{G_i}=f_i, i=1,2$.

2.1.24. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, G为X的线性子空间, g为G上的线性泛函. 证明: 存在X上的线性泛函f使得$f|_G=g$.

2.1.25. $(X,\mathbb{F})$是线性空间, $\{e_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是$X$的一个线性无关子集. 证明: 若$\{\alpha_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\subset\mathbb{F}$, 则存在$(X,\mathbb{F})$上的线性泛函$f$ 使得$f(e_\lambda)=\alpha_\lambda, \forall\lambda\in\Lambda$.

2.1.26. 证明: 若B为无穷集合, 则B与$B\times\mathbb{N}$的基数相同.

2.1.27. 证明: 同一线性空间任意两个Hamel基具有相同的基数.

2.2 赋范线性空间

在线性空间中, 要量化向量的长度, 需要范数的概念.

范数

定义2.32. $(X,\mathbb{F})$是线性空间, 其中$\mathbb{F}$是$\mathbb{C}$或$\mathbb{R}$. 若$\|\cdot\|:X\to[0,+\infty)$ 满足

1. 正定性：$\forall x\in X,\|x\|\geq 0$且$\|x\|=0$当且仅当$x=0$;
2. 正齐次性：$\forall\alpha\in\mathbb{F},x\in X$, 有$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$;
3. 三角不等式: $\forall x,y\in X$, 有$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$;

则称$\|\cdot\|$是X上的一个范数, 此时 称$(X,\|\cdot\|)$是一个赋范线性空间. 称$\|x\|$为x的范数.

注2.33. 在上述定义中, 若函数$\|\cdot\|:X\to[0,+\infty)$仅满足正齐次性和三角不等式, 则称之为$X$上的一个半范数.

给了线性空间上一个范数, 即等于给定了该空间中向量的长度一个定量的刻画.

赋范线性空间上的范数可自然诱导出一个距离.

命题2.34. 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间. 对$x,y\in X$, 定义$d(x,y)=\|x-y\|$. 那么d是X上的一个距离, 且$\|\cdot\|$是(X,d)上的连续函数.

注2.35. 由上述命题, 赋范线性空间天然地是距离空间, 因此针对距离空间的诸多概念都可在赋范线性空间的框架内讨论, 如映射的连续、可分性、序列收敛等等. 如无特殊说明, 视赋范线性空间为距离空间时, 总是默认为其距离由范数诱导的. 赋范线性空间中序列$\{x_n\}$按范数诱导的距离收敛到x_0, 我们称为它按范数收敛到x_0, 记为$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$.

若$\|\cdot\|$是线性空间X上的范数, 则易证$2\|\cdot\|$也是X上的范数. 因此非零赋范线性空间上的范数必然是不唯一的. 下面我们定义范数之间的强弱关系.

定义2.36. 设X是线性空间, $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$是X上两个范数.

1. 若存在$\delta>0$使得$\|x\|_1\leq\delta\|x\|_2,\forall x\in X$, 则称$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$或者$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$.
2. 若$\|\cdot\|_2$既强于$\|\cdot\|_1$也弱于$\|\cdot\|_1$, 则称两个范数等价.

常见的赋范线性空间

例2.37. 对$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$(相应地, $\mathbb{R}^n$), 定义

$$\|(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\|_2=\left(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2\right)^{1/2}.$$

那么$\|\cdot\|_2$是$\mathbb{C}^n$(相应地, $\mathbb{R}^n$)上的一个范数, 它诱导的$\mathbb{C}^n$上的距离恰为欧氏距离(见例1.4).

记号2.38. 若f是非空集合S上的函数, 记$\|f\|_S=\sup_{s\in S}|f(s)|$.

例2.39. 设(S,d)是一紧距离空间. 那么$\|\cdot\|_S$ 是$C(S)$上的一个范数, 称为<u>上确界范数</u>或<u>最大模范数</u>. 称$C(S)$ 为S 上的<u>连续函数空间</u>. $S=[a,b]$时, $C(S)$由上确界范数诱导的距离恰为$C(S)$上的常用距离(见例1.5).

例2.40. 设Ω是非空集合. 那么$\|\cdot\|_\Omega$是$\mathbb{F}_B^\Omega$上的一个范数.

是否线性空间X的距离d必可由范数诱导, 即存在范数$\|\cdot\|$使得$d(x,y)=\|x-y\|(\forall x,y,\in X)$?

例2.41. (s)上的常用距离不可由范数诱导.

例2.42 (有界序列空间)**.** 对$\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty\in l^\infty$, 定义

$$\|\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty\|_\infty=\sup_{i\geq 1}|\alpha_i|.$$

那么$\|\cdot\|_\infty$是l^∞上的一个范数, 称为<u>无穷范数</u>. 除非另加说明, 以后l^∞上的范数都采用上述范数. 称l^∞在上述范数下为<u>有界序列空间</u>.

例2.43 (p-幂可积函数空间)**.** 设$p\in[1,\infty)$, $E\subset\mathbb{R}^n$为Lebesgue可测集合. 以$L^p(E)$表示E上所有绝对值的p次幂Lebesgue可积的复Lebesgue可测函数构成的集合(几乎处处相等的函数视作同一个函数). 易见, $L^p(E)$在逐点定义的加法和数乘下是一个复线性空间. 对$f\in L^p(E)$, 定义

$$\|f\|_p=\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}.$$

这里m表示Lebesgue测度. 则$\|\cdot\|_p$是$L^p(E)$上的范数.

例2.44. 对任意$p\in[1,\infty)$, $\|\cdot\|_p$是$C[0,1]$上的范数, 且弱于$\|\cdot\|_{[0,1]}$.

例2.45 (p-幂可和序列空间)**.** 设$p \in [1, \infty)$. 以l^p表示满足下式的所有复数列$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$构成的集合

$$\sum_{i \geq 1} |\alpha_i|^p < \infty.$$

易验证l^p 在序列按坐标的加法和数乘下是一个复线性空间.

对$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^p$, 定义

$$\|\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{i \geq 1} |\alpha_i|^p\right)^{1/p}.$$

那么$\|\cdot\|_p$是l^p上的一个范数, 称为<u>p-范数</u>. 以后l^p上的范数都采用上述范数. 称l^p 在上述范数下为<u>p-幂可和序列空间</u>.

例2.46 (本质有界可测函数空间)**.** 设$E \subset \mathbb{R}^n$为Lebesgue可测集合.

1. 若f是E上的Lebesgue可测函数且存在$M \geq 0$使得$|f|$在E上几乎处处小于等于M, 则称f 是<u>本质有界的</u>, 称M为$|f|$的一个<u>本质上界</u>.

2. 以$L^{\infty}(E)$表示E上所有复的本质有界可测函数构成的集合, 其中几乎处处相等的函数视作同一函数. 易见, $L^{\infty}(E)$在逐点定义的加法和数乘下是一个线性空间.

3. 对$g \in L^{\infty}(E)$, 定义$\|g\|_{\infty}$为$|g|$的所有本质上界的下确界, 称为$|g|$的<u>本质上确界</u>(亦可记作$\mathrm{esssup}|g|$). 那么$\|\cdot\|_{\infty}$是$L^{\infty}(E)$上的范数, 称为<u>本质上确界范数</u>. 称$(L^{\infty}(E), \|\cdot\|_{\infty})$是$E$ 上的<u>本质有界可测函数空间</u>.

赋范线性空间都是距离空间, 因此可讨论其完备性.

完备的赋范线性空间

定义2.47. 完备的赋范线性空间称为<u>Banach空间</u>.

下面介绍一个证明赋范线性空间完备性的方法.

定义2.48. $(X, \|\cdot\|)$是一赋范线性空间. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$.

1. 称$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ 是X中的一个<u>级数</u>, 称$\{\sum_{i=1}^{n} x_i\}_{n=1}^{\infty}$为其<u>部分和序列</u>.

2. 若$\{\sum_{i=1}^{n} x_i\}_{n=1}^{\infty}$是$X$中的收敛序列, 则称级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$<u>收敛</u>, 也称序列$\{x_n\}$是<u>可和</u>的.

3. 若数列$\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\}_{n=1}^{\infty}$收敛, 则称级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$<u>绝对收敛</u>, 也称序列$\{x_n\}$是<u>绝对可和</u>的.

下面定理的证明留作练习.

定理2.49. $(X, \|\cdot\|)$是一赋范线性空间. 则$(X, \|\cdot\|)$是一个Banach空间当且仅当X中的绝对收敛级数都是收敛的.

利用上述定理可证明, $L^p[a,b], l^p$ 以及$C[a,b]$ 是Banach空间. 它们是泛函分析中最受关注的具体Banach空间.

Banach空间是完备的距离空间, 因此Baire纲定理适用. 下面是它在Banach空间理论中的一个巧妙应用.

命题2.50. 无穷维Banach空间的Hamel基是不可数集合.

证明: 反证法. 若结论不成立, 则可取到一Banach空间X以及它的一个可数无穷的Hamel基$E = \{e_i : i = 1, 2, 3, \cdots\}$.

对每个n, 定义$M_n = \mathrm{span}\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$. 由于$E$是Hamel基, 则可见$\cup_n M_n = X$. 由$X$是Banach空间, Baire纲定理表明存在$n$使得$\overline{M_n}$有内点. 注意到$\dim M_n < \infty$, 则$M_n$是$X$的闭子空间(为什么是闭的?), M_n有内点. 但显然对任意$x \in M_n$以及$\varepsilon > 0$, $y \doteq x + \frac{\varepsilon e_{n+1}}{1+\|e_{n+1}\|} \notin M_n$ 且$\|x - y\| < \varepsilon$. 这说明M_n 没有内点, 矛盾. □

事实上, G.W. Mackey证明无穷维Banach空间的Hamel基的基数至少是连续基数 [17]. 这一结论的简短证明也可见 [14].

推论2.51. 设M是Banach空间X的真、闭子空间. 则M是X的无处稠密子集, 进而是第一纲子集.

最后我们介绍赋范线性空间的乘积以及商Banach空间的概念.

乘积Banach空间、商Banach空间*

定义2.52. 设X, Y是赋范线性空间. 易证乘积线性空间$X \times Y$上的函数

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

是$X \times Y$ 上的范数, 使得$X \times Y$成为一个赋范线性空间, 称之为X, Y的<u>乘积赋范线性空间</u>.

注2.53. 设X, Y是赋范线性空间. 可以证明如下定义的函数也是$X \times Y$上的范数

$$\|(x,y)\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

这里的$p \in [1, \infty)$. 可以证明, $\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_\infty$是$X \times Y$上等价的范数.

定义2.54. 设$(X,\mathbb{F})$是Banach空间, M为X的闭子空间. 可验证, X/M上如下定义的函数

$$\|x+M\|=\inf_{y\in x+M}\|y\|,\quad x+M\in X/M$$

是X/M上的范数(称为商范数), 而且X/M在商范数下是一个Banach 空间.

习题

2.2.1. 设X是线性空间. 证明: 若$\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$是X上两个范数, 则下述等价:

(a) $\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$;

(b) 从$(X,\|\cdot\|_2)$到$(X,\|\cdot\|_1)$的映射$f:x\longmapsto x$是连续的;

(c) $(X,\|\cdot\|_2)$中的收敛列必是$(X,\|\cdot\|_1)$中的收敛列.

2.2.2. 给出定理2.49的证明.

2.2.3. 证明: $C[a,b]$, $L^p(E)$, l^p是Banach空间, 这里$1\le p\le\infty$.

2.2.4. 设(S,d)是一紧距离空间. 证明: 连续函数空间$C(S)$ 在$\|\cdot\|_S$下是一个Banach空间.

2.2.5. 以$H^\infty(\mathbb{D})$表示$\mathbb{D}$上的有界解析函数构成的集合. 证明: $H^\infty(\mathbb{D})$ 在逐点定义的加法和数乘下是一个线性空间, 在上确界范数$\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ 下是一个赋范线性空间且是一个Banach空间.

2.2.6. 设$f\in L^\infty(E)$. 证明: 存在$S\subset E$使得$m(S)=0$且$\|f\|_\infty=\|f\|_{E\setminus S}$.

2.2.7. 设$f\in L^\infty[a,b]$. 证明: $\|f\|_\infty=\inf\limits_{g=f,a.e.}\|g\|_{[a,b]}$.

2.2.8. $\{f_n\}_{n=0}^\infty\subset L^\infty[a,b]$. 证明：$\{f_n\}_{n=1}^\infty$按范数收敛到$f_0$当且仅当存在$[a,b]$的Lebesgue零测子集$E$ 使得$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在$[a,b]\setminus E$ 上一致收敛到f_0.

2.2.9. 证明: $l^p(1\le p<\infty)$中子集S是列紧的充要条件是:

(a) 存在常数$M>0$, 使得对一切$x=\{\xi_j\}_{j=1}^\infty\in S$, 都有$\sum_{j=1}^\infty|\xi_j|^p\le M$.

(b) 任给$\varepsilon>0$, 存在$N\in\mathbb{N}$, 使得对一切的$x=\{\xi_j\}_{j=1}^\infty\in S$, 都有$\sum_{j=N}^\infty|\xi_j|^p\le\varepsilon$.

2.2.10. 证明: $L^p[a,b],l^p(1\le p<\infty)$ 是可分的.

2.2.11. 证明: $L^\infty[a,b](a<b)$是不可分的.

2.2.12. 证明:

(a) 若$f \in L^\infty[0,1]$, 则$f \in \cap_{p=1}^\infty L^p[0,1]$, 且$\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p$.

(b) 若$f \in \cap_{p=1}^\infty L^p[0,1]$且$\limsup\limits_{p\to\infty}\|f\|_p < \infty$, 则$f \in L^\infty[0,1]$.

2.2.13. 证明：在乘积赋范线性空间$X \times Y$中, 序列$\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$收敛到$(x_0, y_0) \in X \times Y$当且仅当$x_n \longrightarrow x_0$且$y_n \longrightarrow y_0$.

2.2.14. 证明: 若X, Y是Banach空间, 则它们的乘积赋范线性空间也是Banach空间.

2.3 有界线性算子

本节我们讨论赋范线性空间之间的有界线性算子, 这类映射与赋范线性空间的分类有关, 也在赋范线性空间之间连续映射的研究中扮演着重要的角色.

赋范线性空间的同构

赋范线性空间是赋予了范数的线性空间. 因此, 两个赋范线性空间存在保持范数的线性同构映射时视为同一是非常自然的.

定义2.55. 称赋范线性空间X, Y<u>等距同构</u>, 若存在从X到Y的保持范数的线性双射.

等距同构是非常强的等价关系. 对于赋范线性空间，人们更多关注下面的稍弱的等价关系.

定义2.56. 设X, Y是赋范线性空间.

(i) 称赋范线性空间X, Y是<u>同构</u>的, 若存在双射的线性算子T以及$m, M > 0$ 使得

$$m\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

称这样的线性算子T是<u>有界可逆</u>的. 因此, X, Y是同构的当且仅当存在从X 到Y 的有界可逆的线性算子.

(ii) 若$A : X \to Y$是线性算子且存在$M > 0$使得

$$\|Ax\| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

等价地, $\sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Ax\| < \infty$, 则称$A$ 是(上方)<u>有界</u>的；否则称之为<u>无界</u>的. 以$\mathcal{B}(X, Y)$表示从X到Y的所有有界线性算子构成的集合, 将$\mathcal{B}(X, X)$ 简记为$\mathcal{B}(X)$.

(iii) 若$A: X \to Y$是线性算子且存在$M > 0$使得

$$M\|x\| \le \|Ax\|, \quad \forall x \in X,$$

等价地, $\inf_{x\in X, \|x\|=1} \|Ax\| > 0$, 则称$A$是<u>下方有界</u>的.

注2.57. 在*(i)*中, 因T是双射, 故$m\|x\| \le \|Tx\|, \forall x \in X$当且仅当$\|T^{-1}y\| \le \|y\|, \forall y \in Y$, 即$T^{-1}$是有界线性算子. 因此, 有界可逆的线性算子即双射、“双有界”的线性算子.

同构、等距同构都是赋范线性空间空间上的等价关系. 两个同构的赋范线性空间的诸多性质是一致的(见习题2.3.18).

我们给出有界线性算子的若干等价刻画.

定理2.58. X, Y为数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $T: X \to Y$是线性算子. 那么下述等价*:*

(i) T是有界的*;*

(ii) T映有界集为有界集*;*

(iii) T是Lipschitz映射.

(iv) T是连续的*;*

(v) T在0处连续*;*

(vi) T在X中某点处连续*;*

注2.59. 由上述结果, 线性算子的连续性和有界性等价, 有界可逆的线性算子即双射、双连续的线性算子.

证明(定理2.58): (i)$\Longrightarrow$(ii). 设$M \ge 0$且$\|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in X$. 那么对任意$x \in B(0,1)$, $\|Tx\| \le M < M+1$, 即$T(B(0,1)) \subset B(0, M+1)$. 对$X$的任意有界集合$E$, 存在$\delta > 0$使得$E \subset B(0,\delta)$. 因此

$$T(E) \subset T(B(0,\delta)) = \delta T(B(0,1)) \subset \delta B(0, M+1) = B(0, \delta(M+1))$$

是有界集.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). 由条件, $T(B(0,1))$是有界集合，则存在$\delta > 0$使得$T(B(0,1)) \subset B(0,\delta)$. 则$x \in X \setminus \{0\}$时$\|T\frac{x}{2\|x\|}\| < \delta$, 进而$\|Tx\| < 2\delta\|x\|$. 由此可见

$$\|Tx\| \le 2\delta\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

因此$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2\delta\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X$, 即$T$是一个Lipschitz映射.

(iii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(vi). 显然成立.

(vi)$\Longrightarrow$(i). 假设T在x_0处连续. 那么对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得

$$T(B(x_0, \delta)) \subset B(Tx_0, \varepsilon).$$

那么$\|x\| < \delta$时, $x + x_0 \in B(x_0, \delta)$, 进而$T(x + x_0) \in B(Tx_0, \varepsilon)$, $\|T(x + x_0) - Tx_0\| < \varepsilon$, 即$\|Tx\| < \varepsilon$.

对任意非零的$x \in X$, $\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\| < \delta$, 则$\|T(\frac{\delta x}{2\|x\|})\| < \varepsilon$. 即有$\|Tx\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$. 可知$\|Tx\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|, \forall x \in X$, 即$T$是有界的. 证完. □

定义2.60. X, Y为数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $T : X \to Y$是有界线性算子. 记

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|,$$

称之为T的<u>范数</u>. 显然, $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \forall x \in X$.

注2.61. 有界线性算子的范数表征了向量被该算子作用后范数改变的程度. 算子范数还有若干等价形式. 详见课后习题2.3.4.

例2.62 (Volterra积分算子)**.** 对$f \in C[0, 1]$, 定义

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall f \in C[0, 1].$$

易证, V是$C[0, 1]$上一个有界线性算子. 易证, $\ker(V) = \{0\}$ (因此V是单射), $\|V\| = 1$且

$$\mathrm{ran}(V) = \{g \in C[0, 1] : g' \in C[0, 1], g(0) = 0\}.$$

例2.63 (无界线性算子的例子)**.** 令$X = \{f \in C[0, 1] : f' \in C[0, 1]\}$. 则$X$是$C[0, 1]$的一个线性子空间, 在上确界范数下是一个赋范线性空间. 对$f \in X$, 定义$Df = f'$. 那么D是X上一个线性算子, 但不是有界的. 事实上, 对任意$n \geq 1$, $f_n(t) = t^n \in X$且$\|f_n\| = 1$, 但$\|Tf_n\| = n$; 因n可取任意的自然数, 故可推知T不是有界的.

事实上, 在$L^2[0, 1]$上我们也可以定义并研究相应的Volterra积分算子.

有限维赋范线性空间

下面的结果完成了有限维赋范线性空间在同构关系下的分类.

定理2.64. n维实(复)赋范线性空间同构于$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

证明: 我们只证明实的情况. 复的情况的证明是类似的.

假设X是n维实的赋范线性空间, $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是X的一个Hamel基. 那么, 对任意$x\in X$, 则x可表示为$x=\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. 这一表示还是唯一的.

定义映射$T:\mathbb{R}^n\to X$作$T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. 那么, 易证$T$是一线性算子、双射. 只需证明$T$和$T^{-1}$是有界可逆的.

先证 $T\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,X)$. 注意到, 对任意$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\|T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\|=\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|\le\sum_{i=1}^n|\alpha_i|\|e_i\|\le\Big(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{i=1}^n\|e_i\|^2\Big)^{1/2},$$

即

$$\|T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\|\le\Big(\sum_{i=1}^n\|e_i\|^2\Big)^{1/2}\|(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\|.$$

这说明T有界.

再证T是下方有界的, 即$\inf_{z\in\mathbb{R}^n,\|z\|=1}\|Tz\|>0$. 反证法. 若不然, 则存在$\{z_i\}\subset\mathbb{R}^n$ 使得$\|z_i\|=1,\forall i$, 而且$\lim_i\|Tz_i\|=0$. 由于$\{z_i\}$为$\mathbb{R}^n$中的有界列, 因此有收敛子列$\{z_{i_k}\}$, 假设$z_{i_k}\to z_0\in\mathbb{R}^n$, 那么

$$\|z_{i_k}\|\to\|z_0\|=1,\ \text{且}Tz_{i_k}\to Tz_0.$$

这样$z_0\ne 0, Tz_0=0$. 矛盾于T是单射. 证完. □

推论2.65. 设X是$\mathbb{F}$上的赋范线性空间，$x_1,\cdots,x_n\in X$线性无关, 则$\exists m,M>0$使得

$$m\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)^{1/2}\le\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|\le M\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)^{1/2},\quad\forall(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{F}^n.$$

推论2.66. 设X是数域$\mathbb{F}$上的有限维赋范线性空间. 那么X上的任何两个范数都是等价的.

推论2.67. 若X是有限维赋范线性空间, 则

1. X完备且可分;

2. 有界集合等价于列紧集合, 有界闭集等价于紧等价于自列紧;

3. 有Bolzano-Weierstrass聚点原则成立, 即有界无穷集必有聚点.

上述推论表明,有限维赋范线性空间中的有界集必是列紧集. 这恰为有限维赋范线性空间区别于无穷维赋范线性空间的本质特征.

定理2.68. 若X是赋范线性空间, 则下述等价:

1. $\dim X < \infty$;
2. X中任意有界集都是列紧的;
3. X中的单位球是列紧的.

记号2.69.
1. 赋范线性空间X中的开单位球是指$B(0,1)$; 单位球(又称闭单位球)是指$\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, 常记作$(X)_1$.
2. 对于赋范线性空间X中的向量x和X的非空子集E, 若$y_0 \in E$满足$\mathrm{dist}(x,E) = \|x - y_0\|$, 则称$y_0$ 为x在E上的最佳逼近元.

注2.70. 在赋范线性空间中, 点与闭集之间的距离未必可取到最佳逼近元. 试在l^∞中给出一个这样的例子.

为证明定理2.68, 还需要作一些必要的准备.

赋范线性空间的闭子空间$\mathcal{M}$外的单位向量x_0与$\mathcal{M}$的距离必然大于0且不大于1. 如果$\mathrm{dist}(x_0,\mathcal{M})$接近1, 意味着$x_0$与0 的距离接近于$x_0$与$\mathcal{M}$的距离. 从几何直观上看, 这意味着$x_0$ 与$\mathcal{M}$ 接近于正交或垂直. 那么是否总可在真闭子空间$\mathcal{M}$外找到单位向量与$\mathcal{M}$的距离接近1?

下面的Riesz引理对上述问题给出了肯定的回答.

定理2.71 (Riesz引理, 1918)**.** $\mathcal{M}$是赋范线性空间X的真闭子空间, 那么对任意$0 < \varepsilon < 1$存在单位向量x_0 使得$\mathrm{dist}(x_0,\mathcal{M}) \geq \varepsilon$.

证明: 取$x \in X \backslash \mathcal{M}$. 那么$\mathrm{dist}(x,\mathcal{M}) > 0$, 记为$\delta$. 存在$y \in \mathcal{M}$, 使得$\|x-y\| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$. 令$x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. 那么$x_0 \in X \setminus \mathcal{M}$是单位向量, 且对任意$z \in \mathcal{M}$

$$\|x_0 - z\| = \|\frac{x-y}{\|x-y\|} - z\| = \frac{1}{\|x-y\|}\|x - y - \|x-y\| \cdot z\| \geq \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon.$$

□

证明(定理2.68): 只需证(3)$\Longrightarrow$(1). 反证法. 若不然, 则$\dim X = \infty$, 于是可取单位向量x_1, 令$\mathcal{M}_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$. 由Riesz 引理, 可取单位向量$x_2$ 使得$\mathrm{dist}(x_2, \mathcal{M}_1) \geq 1/2$.

令$\mathcal{M}_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$. 则可取单位向量$x_3$使得$\mathrm{dist}(x_3, \mathcal{M}_2) \geq 1/2$. 这样不断做下去, 可取到单位向量列$\{x_n : n \geq 1\}$使得$\mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}) \geq 1/2, \forall n \geq 1$. 那么$m \neq n$时恒有$\|x_m - x_n\| \geq 1/2$. 则$\{x_n\}$无收敛子列, 矛盾于$(X)_1$是列紧的. □

事实上, 人们得还到了更强的结论.

定理2.72 ([10]). 设X是无穷维赋范线性空间, 则存在$\varepsilon > 0$, 及$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x : x \in X, \|x\| = 1\}$, 使得

$$\|x_m - x_n\| \geq 1 + \varepsilon, \ \ \forall x \neq y \in X.$$

算子空间

这一小节我们介绍由有界线性算子构成的赋范线性空间的一些基本性质.

X, Y是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间. 我们将证明$\mathcal{B}(X, Y)$构成一个赋范线性空间.

对$A, B \in \mathcal{B}(X, Y), \alpha \in \mathbb{F}$, 定义$A + B : X \to Y$ 作

$$(A + B)x = Ax + Bx, \quad \forall x \in X;$$

定义$\alpha A : X \to Y$ 作

$$(\alpha A)x = \alpha Ax, \quad \forall x \in X.$$

易证, $A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$. 事实上, $A + B, \alpha A$是线性算子是明显的. 另外, 对任意$x \in X$,

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|,$$

$$\|(\alpha A)x\| = \|\alpha Ax\| = |\alpha| \cdot \|Ax\|.$$

这意味着$A + B, \alpha A \in \mathcal{B}(X, Y)$, 且$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.

进一步地, 不难验证

命题2.73. $\mathcal{B}(X, Y)$在上述逐点定义的加法和数乘下是数域$\mathbb{F}$上的一个线性空间, 算子范数是$\mathcal{B}(X, Y)$ 上的一个范数. 因此$\mathcal{B}(X, Y)$是一个赋范线性空间.

命题2.74. X, Y是赋范线性空间. 若Y是Banach空间, 则$\mathcal{B}(X, Y)$是Banach空间.

证明: 设$\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(X,Y)$是一个Cauchy列. 往证$\{T_n\}$是收敛列.

注意到, 对任意$x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|.$$

这意味着$\{T_n x\}_{n=1}^\infty$是Y中的Cauchy列. 由Y完备, 则$\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ 是收敛列. 记$T_0 x = \lim_n T_n x$. 那么$T_0 : X \to Y$.

易证$T_0 \in \mathcal{B}(X,Y)$. 余下只需证明$T_n \to T_0$.

由$\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(X,Y)$是一个Cauchy列, 则对任意$\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ s.t.

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall m,n \ge N.$$

则对任意单位向量$x \in X$, 有

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon, \quad \forall m,n \ge N.$$

固定住x, n, 让$m \to \infty$, 得到

$$\|T_n x - T_0 x\| \le \varepsilon, \quad \forall n \ge N.$$

再由x可取作任意的单位向量, 可知

$$\|T_n - T_0\| \le \varepsilon, \quad \forall n \ge N.$$

这说明$\lim_n \|T_n - T_0\| = 0$, 即$\lim_n T_n = T_0$. □

由证明可见, $\mathcal{B}(X,Y)$的完备性取决于Y的完备性.

推论2.75. 数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间X的对偶空间X'(即$\mathcal{B}(X,\mathbb{F})$)是Banach空间.

注2.76. 设X, Y是赋范线性空间, X包含非零向量. 若$\mathcal{B}(X,Y)$是Banach空间, 则Y也必是Banach空间. 在我们学过Hahn-Banach 扩张定理后便可给出其证明.

下面结果的证明是简单的.

命题2.77. 设$(X, \|\cdot\|)$是一赋范线性空间. 那么

1. $A, B \in \mathcal{B}(X)$蕴含着$AB \in \mathcal{B}(X)$ 且$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$. 特别地, $\|A^n\| \le \|A\|^n, \forall n \ge 1$.

2. $\{A_n, B_n : n \ge 1\} \subset \mathcal{B}(X)$. 若$A_n \to A_0 \in \mathcal{B}(X)$, $B_n \to B_0 \in \mathcal{B}(X)$, 则$A_n B_n \to A_0 B_0$.

定理2.78. 设X是Banach空间, 以$\mathcal{G}(X)$表示$\mathcal{B}(X)$中全体有界可逆算子构成的集合. 那么

(i) $I_X \in \mathcal{G}(X)$且$I_X^{-1} = I_X$;

(ii) $\mathcal{G}(X)$是乘法封闭的, 即$A, B \in \mathcal{G}(X)$意味着$AB \in \mathcal{G}(X)$; 明显地, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(iii) $\mathcal{G}(X)$是$\mathcal{B}(X)$中的开集;

(iv) $\mathcal{G}(X)$上的求逆运算$A \longmapsto A^{-1}$是连续的.

我们先做一点准备.

定理2.79. 设X是Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$, 且$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| < \infty$, 则$I - A$是有界可逆的, 且

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

特别地, 若$\|A\| < 1$, 则

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

这里$A^0 = I$是恒等算子.

证明: 由$\mathcal{B}(X)$是Banach空间可知$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ 按范数收敛, 且其和在$\mathcal{B}(X)$中. 直接验证可知

$$(I - A)(\sum_{n=0}^{\infty} A^n) = (\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I - A) = I.$$

故$I - A$是双射, 且$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$是有界的.

若$\|A\| < 1$, 注意到$\|A^n\| \leq \|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

$\square$

由正项级数的根式判别法可知: 若$\varlimsup_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, 则$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| < +\infty$.

推论2.80. 若X是Banach空间, 则$B(I, 1) \subset \mathcal{G}(X)$且$A \in B(I, 1)$时

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n, \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - A\|}.$$

证明(定理2.78): 只需证明(iii)和(iv).

假设$T \in \mathcal{G}(X)$. 注意到对任意$A \in \mathcal{B}(X)$

$$A = T - (T - A) = T[I - T^{-1}(T - A)].$$

因为T有界可逆, 则欲使A有界可逆, 只需$I - T^{-1}(T - A)$有界可逆. 根据前面的引理, 只需$\|T^{-1}(T - A)\| < 1$. 显然, 这只需$\|T - A\| < 1/\|T^{-1}\|$. 因此$B(T, 1/\|T^{-1}) \subset \mathcal{G}(X)$, 即证得(iii)成立.

进一步地, $A \in B(T, 1/\|T^{-1}\|)$时,

$$A^{-1} = [I - T^{-1}(T - A)]^{-1}T^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}[T^{-1}(T - A)]^n\right) T^{-1}.$$

则$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1-\|T^{-1}\|\cdot\|(T-A)\|}$,

$$\|A^{-1} - T^{-1}\| = \|A^{-1}(T - A)T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2\|T - A\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|(T - A)\|}.$$

即证得(iv)成立. □

例2.81. 若T是$C[0,1]$上以$J = [0,1] \times [0,1]$上二元连续函数$K(s,t)$为符号的Volterra型积分算子, 即

$$(Tf)(s) = \int_{[0,1]} f(t)K(s,t)dt, \quad \forall s \in [0,1],$$

则T是有界线性算子且$\|T\| \leq \|K(s,t)\|_J$, 且$\|K(s,t)\|_J < 1$时$\|I - T\|$有界可逆, 则对每个$g \in C[0,1]$, 方程

$$f - Tf = g$$

在$C[0,1]$中有且只有一个解.

注2.82. 上例中, 可计算得$\|T\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \int_{[0,1]} |K(s,t)|\mathrm{d}s$.

习题

2.3.1. 证明: 赋范线性空间X的有限维子空间都是它的闭子空间, 线性子空间的闭包也是闭子空间.

2.3.2. 设X是全体一元多项式构成的复线性空间. 证明: X在任何范数下构成的赋范线性空间都是第一纲的.

2.3.3. 设X是赋范线性空间, f是X上的一个非零线性泛函. 证明下述等价:

(a) f是有界的;

(b) $\ker f$是X的闭子空间;

(c) $\ker f$不是X的稠密子集.

2.3.4. T是赋范线性空间X, Y之间的有界线性算子. 证明：

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| < 1\}\\ &= \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

2.3.5. 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ 是下方有界的. 证明: T是单射、具有闭的值域且X与$\operatorname{ran} T$是同构的.

2.3.6. 设X, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 证明: T是有界可逆的当且仅当存在有界的$S \in \mathcal{B}(Y, X)$ 使得$ST = I_X, TS = I_Y$, 其中I_X, I_Y分别是X, Y上的单位算子.

2.3.7. 设X是线性空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是X上两个范数. 证明：$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是等价的当且仅当$(X, \|\cdot\|_1)$ 与$(X, \|\cdot\|_2)$是同构的.

2.3.8. 设X是赋范线性空间, $A, B \in \mathcal{B}(X)$. 证明: 若A有界可逆, 则AB有界可逆当且仅当BA有界可逆当且仅当B 有界可逆.

2.3.9. 设X是赋范线性空间. 证明: X可分当且仅当存在X的至多可数子集E使得$\vee E = X$, 这里$\vee E$表示$\operatorname{span} E$的闭包, 称为E的<u>闭线性张开</u>.

2.3.10. 设X, Y是非零的赋范线性空间. 证明下述等价:

(a) $\dim X = \infty$.

(b) X上存在无界的线性泛函.

(c) 存在从X到X的无界线性算子.

(d) 存在从X到Y的无界线性算子.

2.3.11. 设$T \in L(L^2[0,1])$满足: “$f \in L^2[0,1], f \geq 0$ *a.e.*” 蕴含“$Tf \geq 0$ *a.e.*” 证明: $T \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$.

2.3.12. 给出推论2.67的证明.

2.3.13. 设X, Y, Z是赋范线性空间. 证明: 若赋范线性空间X, Y是同构的, 则$\mathcal{B}(X, Z)$, $\mathcal{B}(Y, Z)$是同构的; 特别地, X', Y'是同构的.

2.3.14. M, N是赋范线性空间X的闭子空间, 且$\dim N < \infty$. 证明：$\{x + y : x \in M, y \in N\}$是$X$的闭子空间.

2.3.15. M是赋范线性空间X的闭子空间. 证明：对任意$x_0 \in X \setminus M$都有$0 < \mathrm{dist}(x_0, M) \leq \|x_0\|$.

2.3.16. M是赋范线性空间X的非平凡闭子空间. 证明：对任意$\varepsilon > 0$, 存在单位向量$x_0 \in X \setminus M$ 使得$\mathrm{dist}(x_0, M) < \varepsilon$.

2.3.17. 证明: 赋范线性空间X中的单位球$(X)_1$恰为开单位球$B(0, 1)$的闭包.

2.3.18. 设X, Y是赋范线性空间, 线性算子$T : X \to Y$是有界可逆的, $E \subset X$, $x \in X$. 证明：

(a) E有界当且仅当$T(E)$有界;

(b) E闭当且仅当$T(E)$闭;

(c) E列紧当且仅当$T(E)$列紧;

(d) E 紧当且仅当$T(E)$ 紧;

(e) E是X的稠密子集当前且仅当$T(E)$是Y的稠密子集;

(f) $x \in E'$当且仅当$Tx \in T(E)'$.

(g) X中的序列$\{x_n\}$是收敛列当且仅当$\{Tx_n\}$是Y中的收敛列;

(h) X可分当且仅当Y可分;

(i) X完备当且仅当Y完备.

2.3.19. X为赋范线性空间, $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$为X的一列闭子空间. 证明：

(a) 若$\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \cdots$, 则存在单位向量列$\{x_k\}_{k\geq 1}$ 使得$x_k \in M_k$且

$$\mathrm{dist}(x_k, M_{k-1}) \geq 1/2, \quad \forall k \geq 2.$$

(b) 若$M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq M_3 \supsetneq \cdots$, 则存在单位向量列$\{x_k\}_{k\geq 1}$使得$x_k \in M_k$且

$$\mathrm{dist}(x_k, M_{k+1}) \geq 1/2, \quad \forall k \geq 1.$$

2.3.20. 设X为赋范线性空间, $x_0 \in X$, M是X的线性子空间. 证明:

(a) $\mathrm{dist}(x_0, M) = \mathrm{dist}(x_0, \overline{M})$.

(b) $\mathrm{dist}(x_0 - x, M) = \mathrm{dist}(x_0, M)$, $\forall x \in M$.

(c) $\mathrm{dist}(\alpha x_0, M) = |\alpha|\, \mathrm{dist}(x_0, M)$, $\forall \alpha \neq 0$.

2.3.21. 设X为赋范线性空间, $f \in X'$且范数为1. 证明: 对任意$x_0 \in X$, 成立$|f(x_0)| = \mathrm{dist}(x_0, \ker f)$.

2.3.22. 设X为赋范线性空间, $f \in X'$且$\|f\| = 1$. 证明下述等价:

(a) 存在范数为1的$x_0 \in X$, 使得$|f(x_0)| = 1$;

(b) 存在范数为1的$x_0 \in X$, 使得$\mathrm{dist}(x_0, \ker f) = 1$;

(c) 存在$x \in X \setminus \ker f$以及$y \in \ker f$, 使得$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, \ker f)$;

(d) 对任意$x \in X$, 存在$y \in \ker f$, 使得$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, \ker f)$.

2.3.23. 设$M = \{(\alpha_n)_{n\geq 1} \in l^1 : \sum_n \frac{n\alpha_n}{n+1} = 0\}$. 证明: M是l^1的真闭子空间, 且对任意单位向量$x_0 \in l^1 \setminus M$, 成立$\mathrm{dist}(x_0, M) < 1$.

2.3.24. X是有限维赋范线性空间, M是其真子空间. 证明: 存在单位向量$x_0 \in X \setminus M$, 成立$\mathrm{dist}(x_0, M) = 1$.

2.3.25. 设X, Y是Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. 证明: 若A下方有界，则A是闭映射, 即A映闭集为闭集.

2.3.26. (a) 设$y = (\eta_1, \cdots \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. 对$(\xi_1, \cdots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义$\varphi_y(\xi_1, \cdots \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$.证明：$\varphi_y \in (\mathbb{R}^n)'$且$\|\varphi_y\| = \|y\|$.

(b) 证明: 若$\varphi \in (\mathbb{R}^n)'$, 则存在$y \in \mathbb{R}^n$使得$\varphi_y = \varphi$.

(c) 证明: $(\mathbb{R}^n)'$与$\mathbb{R}^n$等距同构.

2.3.27. 证明: $(\mathbb{C}^n)'$与$\mathbb{C}^n$等距同构.

2.3.28. 证明: n维复(实)赋范线性空间X的对偶空间与$\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$同构.

2.4 Fréchet导数

本节将介绍Banach空间之间映射的导数, 并给出它的两个应用, 即反函数定理与隐函数定理.

在实际问题的研究中, 人们常常遇到的是Banach空间上的非线性映射, 研究起来具有较大难度. 一个十分有效的研究思路就是用线性算子在局部逼近非线性映射, 恰如微积分中的求微分运算.

例2.83. 设Ω是$\mathbb{R}^2$的开区域, $f(x,y)$为Ω上的实值函数, $(x_0,y_0)\in\Omega$.

称f在(x_0,y_0) 处可微, 若存在实数a,b使得

$$f(x_0+x,y_0+y)-f(x_0,y_0)=ax+by+o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

对于$h=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 定义$Lh=ax+by$. 那么$L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是有界线性算子. 事实上, $\|Lh\|\le\sqrt{a^2+b^2}\cdot\|h\|$.

记$z_0=(x_0,y_0)$. 注意到$h=(x,y)$时, $\|h\|=\sqrt{x^2+y^2}$. 那么, 我们有

$$f(z_0+h)-f(z_0)=Lh+o(\|h\|)$$

或等价地

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(z_0+h)-f(z_0)-Lh\|}{\|h\|}=0.$$

我们对Banach空间之间的映射定义可微.

定义2.84. 设X,Y是Banach空间, Ω是X中的开子集, $f:\Omega\to Y$, $x_0\in\Omega$. 若存在$T\in\mathcal{B}(X,Y)$使得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+Th+o(\|h\|)$$

或等价地

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-Th\|}{\|h\|}=0,$$

则称f在x_0处Fréchet可微 *(也称为F-可微或可微)*, 称T 为f在x_0处的Fréchet导数*(也称为F-导数或导数)*, 记作$f'(x_0)$或$Df(x_0)$.

若f在Ω内每一点都F-可微, 则称f在Ω内可微; 进一步地, 若$f'(x)$ 还在Ω内连续, 则称f在Ω内连续可微.

例2.85. 假设Ω是$\mathbb{R}^n$中的开子集, $f = (f_1, \cdots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$连续可微. 则$f$在$\Omega$处每点处$x = (x_1, \cdots, x_n)$都是*Fréchet*可微的, 相应的*Fréchet*导数即为f在x处的*Jacobi*矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

例2.86. 设X, Y是Banach空间, $y_0 \in Y$, $f(x) = y_0, \forall x \in X$. 则$f$连续可微且$f'(x) \equiv 0, \forall x \in X$.

例2.87. 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $f(x) = Tx$, $\forall x \in X$. 则f连续可微且$f'(x) = Tx, \forall x \in X$.

引理2.88. 设X, Y是Banach空间, Ω是X中的开子集, $f : \Omega \to Y$,

(i) 若f在$x_0 \in \Omega$处可微, 则$\overline{\lim}_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \|f'(x_0)\|$, f在x_0处连续.

(ii) 若Ω是凸集, f在Ω内连续可微, 且$\sup_{x \in \Omega} \|f'(x)\| \leq M$, 则$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \forall x, y \in \Omega$.

证明: (i) 事实上, 若记$A = f'(x_0)$, 则$x \neq x_0$时有

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\| \\ &\leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\| + \|A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\| \\ &\leq \left(\frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \|A\| \right) \cdot \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

那么可见结论成立.

(ii) 固定$x, y \in \Omega$. 令$g(t) = f(x + t(y - x)), t \in [0, 1]$. 则$g : [0, 1] \to Y$ 是连续可微的向量值函数, $g'(t) = f'(x + t(y - x))(y - x), t \in [0, 1]$, 且

$$\int_0^1 g'(t) \mathrm{d}t = g(1) - g(0) = f(y) - f(x).$$

据此可见$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|$. □

定义2.89. 设X, Y是Banach空间, Ω是X中的开子集, Ω_1是Y中的开子集, $f : \Omega \to \Omega_1$. 若f是同胚且f, f^{-1}分别在Ω和Ω_1内可微, 则称f是一个微分同胚.

引理2.90. 设X, Y是Banach空间, Ω是X中的开子集, Ω_1是Y中的开子集, $f : \Omega \to \Omega_1$是一个同胚. 若f在$x_0 \in \Omega$处可微且导数$A := f'(x_0)$是有界可逆的, 则f^{-1}在$f(x_0)$处可微, 且导数为A^{-1}.

证明: 先证明$\underline{\lim}_{x\to x_0}\|f(x)-f(x_0)\|/\|x-x_0\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}$. 事实上,

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} &\geq \frac{\|A(x-x_0)\| - \|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\ &\geq \frac{\|A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} - \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \\ &\geq \|A^{-1}\|^{-1} - \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}.\end{aligned}$$

这说明$\overline{\lim}_{x\to x_0}\frac{\|x-x_0\|}{\|f(x)-f(x_0)\|} \leq \|A^{-1}\|$.

记$g = f^{-1}, y_0 = f(x_0)$. 计算可知

$$\begin{aligned}&\frac{\|g(y)-g(y_0)-A^{-1}(y-y_0)\|}{\|y-y_0\|} \\ \leq&\frac{\|A^{-1}\|\|A(g(y)-g(y_0))-(y-y_0)\|}{\|y-y_0\|} \\ \leq&\frac{\|A^{-1}\|\|A(g(y)-g(y_0))-(f(g(y))-f(g(y_0)))\|}{\|f(g(y))-f(g(y_0))\|} \\ =&\frac{\|A^{-1}\|\|A(g(y)-g(y_0))-(f(g(y))-f(g(y_0)))\|}{\|g(y)-g(y_0)\|}\cdot\frac{\|g(y)-g(y_0)\|}{\|f(g(y))-f(g(y_0))\|}\end{aligned}$$

由g连续, 可得到$\lim_{y\to y_0}\frac{\|g(y)-g(y_0)-A^{-1}(y-y_0)\|}{\|y-y_0\|} = 0$. 即$g'(y_0) = A^{-1}$. □

定理2.91 (反函数定理)**.** 设X, Y是Banach空间, Ω是X中的开子集, $x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to Y$. 若f在Ω内连续可微且$f'(x_0)$是有界可逆的, 则存在X中的开集U以及Y中的开集V 使得

$$x_0 \in U \subset \Omega, \quad f(x_0) \in V$$

且$f : U \to V$是微分同胚(即f, f^{-1}分别在U, V内可微).

证明: 本结果的证明关键在于压缩映像原理的应用.

记$A = f'(x_0), y_0 = f(x_0)$. 对每一$y \in Y$, $x \in \Omega$, 定义$g_y(x) = x - A^{-1}f(x) + A^{-1}y$. 则$g_y : \Omega \to Y$, 且易验证

$$g_y'(x) = I - A^{-1}f'(x), \;\; g_y'(x_0) = 0.$$

由f连续可微, 知$g_y'(x)$连续, 且$\exists\delta>0$ s.t. $\|g_y'(x)\|<1/2,\forall x\in\overline{B(x_0,2\delta)},\forall y\in Y$.

令$V=A(B(0,\delta))+y_0$. 则V为Y中开集. 对每一固定的$y\in V$, $x_1,x_2\in\overline{B(x_0,2\delta)}$ 时, 根据引理2.88我们有

$$\|g_y(x_1)-g_y(x_2)\|\leq\|x_1-x_2\|/2,$$

$$\begin{aligned}\|g_y(x_1)-x_0\|&\leq\|g_y(x_1)-g_y(x_0)\|+\|g_y(x_0)-x_0\|\\&\leq\delta+\|g_y(x_0)-g_{y_0}(x_0)\|\\&=\delta+\|A^{-1}(y-y_0)\|<2\delta.\end{aligned}$$

则$g_y:\overline{B(x_0,2\delta)}\to B(x_0,2\delta)$是压缩映射. 则存在唯一的$x^*\in\overline{B(x_0,2\delta)}$使得$g_y(x^*)=x^*(\in B(x_0,2\delta))$, 即$f(x^*)=y$. 令$h(y)=x^*$. 则$h:V\to f^{-1}(V)\cap B(x_0,2\delta)\doteq U$恰为$f:U\to V$的逆映射.

另外, $x\in B(x_0,2\delta)$时, $\|g_{y_0}'(x)\|=\|I-A^{-1}f'(x)\|<1/2$, 由推论2.79 知$f'(x)$可逆. 根据引理2.90, $f:U\to V$是一个微分同胚. □

本小节的余下部分致力于介绍隐函数定理.

设X,Y是Banach空间. 由例2.52可见, $X\times Y$在

$$\|(x,y)\|=\max\{\|x\|,\|y\|\}$$

下是一个Banach空间. 对于$X\times Y$中的开集Ω以及$(x_0,y_0)\in\Omega$, 我们定义f在(x_0,y_0)处的偏导数.

定义2.92. 若$g(x)=f(x,y_0)$在x_0处可微, 则称$g'(x_0)$为f在(x_0,y_0)的<u>X-偏导数</u>, 记为$D_Xf(x_0,x_0)$. 同理可定义$D_Y(x_0,y_0)$.

引理2.93. *X,Y是Banach空间, Ω是$X\times Y$中的开子集, $f:\Omega\to Z$. 那么f在Ω内连续可微当且仅当f在Ω内有连续的X-偏导数和Y-偏数.*

定理2.94 (隐函数定理)**.** *X,Y,Z是Banach空间, Ω是$X\times Y$中的开子集, $(x_0,y_0)\in\Omega$, $f:\Omega\to Z$. 若*

1. $f(x_0,y_0)=0$,
2. f在Ω内连续可微, 且$D_Yf(x_0,y_0)$有界可逆,

则存在X中包含x_0的开集U以及可微的$\varphi:U\to Y$使得

$$\varphi(x_0)=y_0,\quad f(x,\varphi(x))=0,\forall x\in U.$$

证明: 对$(x,y)\in\Omega$, 定义$h(x,y)=(x,f(x,y))$. 则$h:\Omega\to X\times Z$, 且h 在Ω内连续可微, 且

$$h'(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} I_X & 0 \\ D_Xf(x_0,y_0) & D_Yf(x_0,y_0)\end{bmatrix}$$

有界可逆. 由反函数定理, 存在$X\times Y, X\times Z$中的开集G_1,G_2使得$(x_0,y_0)\in G_1\subset\Omega, h(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0,y_0))\in G_2$, 且$h:G_1\to G_2$ 是微分同胚.

取$\delta_0>0$使得$B(x_0,\delta)\times B(0,\delta)\subset G_2$. 假设$h^{-1}(x,0)=(\psi(x),\varphi(x)),\forall x\in B(x_0,\delta)$. 则$\psi:B(x_0,\delta)\to X,\varphi:B(x_0,\delta)\to Z$可微, 且两端同时被$h$作用后有

$$(x,0)=(\psi(x),f(\psi(x),\varphi(x)),\quad\forall x\in B(x_0,\delta)).$$

即有$\psi(x)=x, f(x,\varphi(x))=0$. 注意到$h(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0,y_0))=(x_0,0)$, 则$\varphi(x_0)=y_0$. □

2.5 有界线性泛函

本节我们关注赋范线性空间上的有界线性泛函.

定义2.95. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间.

1. 从X到$\mathbb{F}$的（有界）线性算子称为X上的（有界）线性泛函.
2. 若$f:X\to\mathbb{C}$使得$x\longmapsto\overline{f(x)}$是线性泛函, 则称$f$是共轭线性泛函.
3. 以X'表示X上所有有界线性泛函构成的集合, 称为X的对偶空间或共轭空间 *(dual space)*. 显然$X'=\mathcal{B}(X,\mathbb{F})$.

我们将介绍线性泛函的若干扩张定理, 它们可用于回答一些满足特定条件的有界线性泛函是否存在的问题, 比如:

问题2.96. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, M为X闭子空间, $x_0\in X\setminus M$. 是否存在$f\in X'$满足下面的条件?

$$f(x_0)=1,\quad f(x)=0,\ \forall x\in M.$$

问题2.97. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $\{x_n\}_{n\geq1}\subset X,\{a_n\}_{n\geq1}\subset\mathbb{F}$. 是否存在$f\in X'$满足下面的条件?

$$f(x_n)=a_n,\quad\forall n\geq1.$$

Hahn-Banach定理

定义2.98. 设G是线性空间X的线性子空间, f是G上的线性泛函. 若存在X上的线性泛函F使得$F|_G = f$, 即

$$F(x) = f(x), \qquad \forall x \in G,$$

则称F是f在X上的一个线性扩张, 称f可以扩张为X上的线性泛函.

之所以想到扩张的办法, 主要原因在于对于一些简单或特殊的子空间很容易构造出有界线性泛函. 利用代数补的存在性, 若不考虑连续性, 则线性泛函的扩张是容易做到的(参见本章第一节的课后习题).

命题2.99. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, M为X的闭子空间, $x_0 \in X \setminus M$, $r \in \mathbb{F}$. 则如下定义的函数f 为$M \oplus \mathbb{F}x_0$上范数为$\frac{|r|}{\operatorname{dist}(x_0,M)}$的有界线性泛函:

$$f(x + \alpha x_0) = \alpha r, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

证明: 直接验证可知: f是良定义且是线性泛函, 下面证明其有界性.

因为$M \oplus \mathbb{F}x_0$中每个元素都形如$\alpha x_0 + y$, 其中$\alpha \in \mathbb{F}, y \in M$. 那么

$$\begin{aligned}
&\sup\{\frac{|f(\alpha x_0 + y)|}{\|\alpha x_0 + y\|} : \alpha \in \mathbb{F}, y \in M, \alpha x_0 + y \neq 0\} \\
&= \sup\{\frac{|\alpha r|}{\|\alpha x_0 + y\|} : \alpha \in \mathbb{F}, y \in M, \alpha x_0 + y \neq 0\} \\
&= \sup\{\frac{|\alpha r|}{\|\alpha x_0 + y\|} : \alpha \in \mathbb{F}, y \in M, \alpha \neq 0\} \\
&= \sup\{\frac{|r|}{\|x_0 + \frac{y}{\alpha}\|} : \alpha \in \mathbb{F}, y \in M, \alpha \neq 0\} \\
&= \sup\{\frac{|r|}{\|x_0 - z\|} : \alpha \in \mathbb{F}, z \in M, \alpha \neq 0\} \\
&= \frac{|r|}{\operatorname{dist}(x_0, M)}.
\end{aligned}$$

那么$f \in (M \oplus \mathbb{F}x_0)'$, 而且$\|f\| = \frac{|r|}{\operatorname{dist}(x_0,M)}$. □

推论2.100. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $0 \neq x_0 \in X$, $r \in \mathbb{F}$. 则如下定义的函数f 为$\mathbb{F}x_0$ 上范数为$|r|/\|x_0\|$的有界线性泛函:

$$f(\alpha x_0) = \alpha r, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

下面的定理解决了有界线性泛函的扩张问题.

定理2.101 (Hahn-Banach定理)**.** X为赋范线性空间, G为X的线性子空间, $f \in G'$, 则存在$F \in X'$使得$F|_G = f$且$\|f\| = \|F\|$.

上述定理表明, 赋范线性空间X的线性子空间G上的任意有界线性泛函f可以保范扩张为X上的一个有界线性泛函.

为证明Hahn-Banach定理, 我们先介绍它的另外一个更为一般的形式. 尽管它形式上仅讨论实线性空间, 但却是Hahn-Banach定理以及后续将要介绍的凸集分离定理的关键.

定理2.102 (Banach扩张定理)**.** $p(\cdot)$是实线性空间X上的实值函数且

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \;\; p(tx) = tp(x), \;\; \forall x, y \in X, t \in (0, \infty). \tag{3}$$

若f是X的线性子空间G上的实线性泛函且满足

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G,$$

则存在X上的线性泛函F 满足

$$F|_G = f, \quad F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

注2.103. 线性空间X上满足*(3)*的实函数$p(\cdot)$被称为<u>次线性泛函</u>. 显然, X上的范数、半范数均是次线性泛函.

证明(定理2.102): 我们利用Zorn引理完成证明.

令$\mathcal{W} = \{(h, Y) : Y$ 为X的包含G的线性子空间, h为Y上的线性泛函满足$h(x) \leq p(x), \forall x \in Y\}$. 则$\mathcal{W} \neq \emptyset$.

对于$(h_1, Y_1), (h_2, Y_2) \in \mathcal{W}$, 定义$(h_1, Y_1) \preccurlyeq (h_2, Y_2)$, 若$Y_1 \subset Y_2, h_2|_{Y_1} = h_1$. 易见$(\mathcal{W}, \preccurlyeq)$为偏序集. 显然, 若所求的$F$存在, 则必有$(F, X) \in \mathcal{W}$且为$\mathcal{W}$的极大元.

断言一: $(\mathcal{W}, \preccurlyeq)$有极大元.

由Zorn引理, 只需证明$(\mathcal{W}, \preccurlyeq)$中任意全序子集$\mathcal{W}_0 = \{(h_i, Y_i) : i \in \Lambda\}$ 都有上界.

令$Y_0 = \cup_{i \in \Lambda} Y_i$. 则$Y_0$为线性子空间且$G \subset Y_0$. 对$x \in Y_0$, 则存在$i_0 \in \Lambda$使得$x \in Y_{i_0}$, 则令$h_0(x) = h_{i_0}(x)$, 则$h_0(x) \leq p(x)$. 易见$h_0$定义合理, 且是$Y_0$上线性泛函. 又注意到$h_0|_{Y_i} = h_i, \forall i \in \Lambda$. 则$(h_0, Y_0)$为$\mathcal{W}_0$的上界. 则证明断言.

为完成整个结论的证明只需证明下面的断言.

断言二. 若(F,Y)为$(\mathcal{W},\preccurlyeq)$的一个极大元, 则$Y=X$.

我们用反证法完成证明. 若不然, 则$Y\neq X$. 则可取$x_0\in X\setminus Y$. 我们将证明F可扩张为$Y+\mathbb{R}x_0$上的线性泛函且满足限制性条件, 这样即可推出矛盾完成证明.

明显地, 对任意$r\in\mathbb{R}$, 如下定义的F_r是F在$Y_0\doteq \operatorname{span} Y\cup\{x_0\}$上的一个线性扩张:

$$F_r(x+\alpha x_0)=F(x)+\alpha r,\qquad \forall x\in Y,\alpha\in\mathbb{R}.$$

而且F在X上的任意线性扩张必为某个F_r. 因此只需证明: 存在$r\in\mathbb{R}$使得$F_r(y)\leq p(y),\quad \forall y\in Y_0$.

上式等价于

$$F_r(x+\alpha x_0)\leq p(x+\alpha x_0),\ \ \forall x\in Y,\forall\alpha\in\mathbb{R};$$

即

$$\alpha r+F(x)\leq p(\alpha x_0+x),\ \ \forall x\in Y,\forall\alpha\in\mathbb{R};$$

即

$$\alpha r\leq p(\alpha x_0+x)-F(x),\ \ \forall x\in Y,\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$$

即

$$\frac{\alpha}{|\alpha|}r\leq p(\frac{\alpha}{|\alpha|}x_0+\frac{x}{|\alpha|})-F(\frac{x}{|\alpha|}),\ \ \forall x\in Y,\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$$

即

$$\begin{cases} r\leq p(x_0+\frac{x}{|\alpha|})-F(\frac{x}{|\alpha|}),\forall x\in Y, & \forall\alpha>0,\\ -r\leq p(-x_0+\frac{x}{|\alpha|})-F(\frac{x}{|\alpha|}),\forall x\in Y, & \forall\alpha<0;\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} r\leq p(x_0+x)-F(x),\forall x\in Y,\\ -r\leq p(-x_0+x)-F(x),\forall x\in Y;\end{cases}$$

即

$$-p(-x_0+x)+F(x)\leq r\leq p(x_0+x)-F(x),\ \ \forall x\in Y.$$

因此只需证

$$-p(-x_0+x)+F(x)\leq p(x_0+y)-F(y),\ \ \forall x,y\in Y;$$

即

$$F(x+y)\leq p(x_0+y)+p(-x_0+x),\ \ \forall x,y\in Y.$$

根据条件, $x,y\in Y$时,

$$F(x+y)\leq p(x+y)=p(x-x_0+y+x_0)\leq p(x-x_0)+p(y+x_0),$$

则证得断言. 那么可取到r使得$(F,Y)\preccurlyeq(F_r,Y_0)$且$(F,Y)\neq(F_r,Y_0)$, 矛盾于$(F,Y)$是$\mathcal{W}$ 的极大元. 这样证明了断言二，也完成了定理结论的证明. $\square$

为得到复线性空间上线性泛函的扩张定理, 我们还需要厘清复线性空间上复线性泛函和实线性泛函的关系.

引理2.104. 设$(X,\mathbb{C})$是复线性空间.

1. $f:(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$是线性泛函, 令$F(x)=f(x)-\mathrm{i}f(\mathrm{i}x), x\in X$. 那么$F:(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$是一复线性泛函.
2. 若$F:(X,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$是线性泛函, 则存在$(X,\mathbb{R})$ 上的线性泛函f使得$F(x)=f(x)-\mathrm{i}f(\mathrm{i}x)$, $\forall x\in X$.

上面引理表明复线性空间上的线性泛函本质上由其实部所决定, 其证明是简单的验证, 见习题2.1.3.

定理2.105. $p(\cdot)$是线性空间X上的半范数，若f是X的子空间G上的线性泛函且满足

$$|f(x)|\le p(x),\quad \forall x\in G,$$

则存在X上的线性泛函F 满足

$$F|_G=f,\quad |F(x)|\le p(x),\quad \forall x\in X.$$

证明: 半范数是次线性泛函. 因此, 若X为实线性空间, 则由定理2.102, 存在X上的线性泛函F 满足

$$F|_G=f,\quad F(x)\le p(x),\quad \forall x\in X.$$

因而$-F(x)=F(-x)\le p(-x)=p(x),\forall x\in X$, 进而$|F(x)|\le p(x),\forall x\in X$. 余下我们考虑$X$为复线性空间的情形.

由引理2.104, 存在$(G,\mathbb{R})$上的实线性泛函f_0使得$f(x)=f_0(x)-\mathrm{i}f_0(\mathrm{i}x),\forall x\in G$. 显然$f_0$是$(G,\mathbb{R})$上的实线性泛函, 而且$|f_0(x)|\le p(x),\quad \forall x\in G$. 那么由实的情形下的证明, 存在$(X,\mathbb{R})$上实线性泛函$F_0$使得$F_0(x)=f_0(x),\forall x\in G$, $|f_0(x)|\le p(x),\quad \forall x\in X$.

对$x\in X$, 令$F(x)=F_0(x)-\mathrm{i}F_0(\mathrm{i}x)$. 那么$F$是$(X,\mathbb{C})$上复的线性泛函, 且$F$ 是f的线性扩张. 另外, 对任意$x\in X$, 设$F(x)=e^{\mathrm{i}\theta}r$. 那么

$$|F(x)|=r=F(e^{-\mathrm{i}\theta}x)=F_0(e^{-\mathrm{i}\theta}x)\le p(e^{-\mathrm{i}\theta}x)=p(x),$$

即证得结论. $\square$

证明(定理2.101): 对$x \in X$, 令$p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. 那么$p(\cdot)$ 是X上的半范数, 而且

$$|f(x)| \le p(x), \quad \forall x \in G.$$

由定理2.105, 存在X上线性泛函F使得$F|_G = f$且$|F(x)| \le p(x) = \|f\|\|x\|, \forall x \in X$. 这说明$F \in X'$且$\|F\| \le \|f\|$. 而$\|f\| \le \|F\|$是显然的. 于是$\|F\| = \|f\|$. □

注2.106. 上面所说的延拓一般来说不是唯一的. 事实上, Taylor-Foguel定理指出保范扩张是唯一的当且仅当X'是严格凸的[*12*]. 称赋范线性空间X是严格凸的, 若当$x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$且$x \ne y$ 时, 有$\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$. 从Banach扩张定理的证明可见, Hahn-Banach定理的证明依赖于Zorn引理, 等价地, 依赖于选择公理.

Hahn-Banach定理是泛函分析中的基础性定理, 为无穷维线性空间上许多理论问题的研究提供了重要的工具，应用非常广泛.

应用举例

本节给出Hahn-Banach定理的一些应用. 首先根据Hahn-Banach定理以及命题2.99, 下面的结论是明显的.

推论2.107. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, M为X的闭子空间, $x_0 \in X \setminus M$. 那么存在$f \in X'$使得$f(x_0) = 1$, $f|_M = 0$, $\|f\| = 1/\operatorname{dist}(x_0, M)$.

推论2.108. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, M为X的子空间. 那么, M在X中稠密当且仅当“$f \in X', f|_M = 0$” 恒蕴含$f = 0$.

推论2.109. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $0 \ne x_0 \in X$. 则存在$f \in X'$使得$f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$.

证明: 在前述推论中, 若取$M = \{0\}$, 则几乎可见所欲证结论. □

推论2.110. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $x_0, y_0 \in X, x_0 \ne y_0$. 则存在$f \in X'$使得$f(x_0) \ne f(y_0)$.

推论2.111. 若X是赋范线性空间, $x \in X$, 则$\|x\| = \sup\limits_{f \in X', \|f\| \le 1} |f(x)|$.

推论2.112. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $\{x_n\}_{n=1}^m \subset X$ 线性无关, $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$, 那么存在$f \in X'$使得$f(x_n) = a_n, \forall 1 \le n \le m$.

下面给出Hahn-Banach定理在赋范线性空间的空间结构方面的一个应用.

命题2.113. 若Y是赋范线性空间X的有限维子空间, 则一定存在X的闭子空间Z, 使得Y, Z互为代数补.

证明: 设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是Y的一组基, 不妨设$\|e_j\| = 1, 1 \leq j \leq n$. 则定义$Y$上的线性泛函$f_j(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k) = \lambda_j, 1 \leq j \leq n$. 注意到由推论2.65可知: f_j是Y 上的有界线性泛函, 故由Hahn-Banach定理可知: 存在f_j的保范扩张$F_j \in X', 1 \leq j \leq n$. 此时定义

$$P : X \to X, x \mapsto \sum_{j=1}^n F_j(x) e_j.$$

易验证$P \in \mathcal{B}(X)$, 且对任意$x \in Y$,

$$Px = P(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k) = \sum_{j=1}^n F_j(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k) e_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = x.$$

因此, $\operatorname{ran} P = Y$, 且$Y = \{x : Px = x\} = \ker(I - P)$.

从而, $\forall x \in X, Px \in Y$, 故

$$P(Px) = P(x).$$

因此, $P^2 = P$.

令$Z = \ker P$, 则由P是连续的可知: Z是X的闭子空间. 注意到对任意$x \in X$, 由于

$$P(x - Px) = Px - P^2 x = 0,$$

故$x - Px \in \ker P$, 从而,

$$x = Px + (x - Px) \in Y + Z.$$

另外, 设$y \in Y \cap Z$, 从而, $Py = y$, 且$Py = 0$. 因此, $y = 0$. 继而, $X = Y \oplus Z$. □

注2.114. *1.* 在赋范线性空间中, 互为代数补的两个闭子空间称为是拓扑互补的, 也称它们互为拓扑补.

2. 前述命题说明, 赋范线性空间的有限维闭子空间一定存在拓扑补. 一般而言, 无穷维闭子空间未必存在拓扑补*(*参见[19]*)*. 事实上, 若Banach 空间X的任一闭子空间都有拓扑补, 则X线性同胚于一类特殊的Banach空间*(*参见[16]*)*, 即第三章将要介绍的Hilbert空间.

凸集分离定理

在应用中，时常遇到下述类型的问题.

问题2.115. *X是实数域上的赋范线性空间, E,F为X的非空不交子集. 是否存在$f\in X'$满足下面的条件?*

$$f(x)<f(y),\quad \forall x\in E,\forall y\in F.$$

利用Banach扩张定理可以给出上述问题的答案. 先介绍赋范线性空间中的“平面”.

定义2.116. *X是赋范线性空间.*

1. *若f是X上非0的有界线性泛函, c是一常数, 则称集合*

$$H(f,c)\doteq\{x\in X:f(x)=c\}$$

为X中的一个<u>超平面</u>.

2. *若$x_0\in X$, M是X的一个子空间, 则称集合*

$$x_0+M\doteq\{x+x_0:x\in M\}$$

为X中的一个<u>线性簇</u>. 线性簇即为子空间的平移.

注2.117. 易见, $\mathbb{R}^3$中的线性簇恰包括单点集、直线、平面、整个空间. 因$\mathbb{R}^3$上的非零有界线性泛函形如$(x_1,x_2,x_3)\longmapsto a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$(其中$a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$且不全为0), 则$\mathbb{R}^3$中的超平面形如

$$\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=c\},$$

恰为一个平面. 因此赋范线性空间中的超平面恰为三维空间中平面的推广.

定义2.118. *E,F是实赋范线性空间X的两个非空子集. 称E,F可由<u>超平面分离</u>, 若存在$f\in X',c\in\mathbb{R}$使得*

$$f(x)\le c\le f(y),\quad \forall x\in E,\forall y\in F.$$

称E,F可由<u>超平面严格分离</u>, 若存在$f\in X',c\in\mathbb{R}$使得

$$f(x)\le c<f(y),\quad \forall x\in E,\forall y\in F.$$

这意味着E 包含于闭集$f^{-1}((-\infty,c])$, F 包含于开集$f^{-1}((c,+\infty))$. 从直观上, 这意味着E中的点落在超平面$H(f,c)$ 内或超平面的一侧, 而F 在$H(f,c)$ 的另一侧.

定义2.119. E, F是复赋范线性空间X的两个非空子集. 称E, F可由超平面分离, 若存在$f \in X', c \in \mathbb{R}$使得

$$\mathrm{Re} f(x) \le c \le \mathrm{Re} f(y), \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$$

称E, F可由超平面严格分离, 若存在$f \in X', c \in \mathbb{R}$使得

$$\mathrm{Re} f(x) \le c < \mathrm{Re} f(y), \quad \forall x \in E, \forall y \in F.$$

显然, X看作实赋范线性空间时, $\mathrm{Re} f$是它上面的有界线性泛函. 因此, 复赋范线性空间X的两个非空子集E, F是否可由超平面分离归结为其看作实空间时E, F是否可由超平面分离.

下面的定理是本节的第一个凸集分离定理.

定理2.120. E, F是实赋范线性空间X中两个不交的非空凸集. 若E为开集, 则E, F可由超平面分离.

为证明上述定理, 我们先做些准备.

定义2.121. $(X, \mathbb{F})$是线性空间, $E \subset X$.

1. 称E是凸集, 若“$x, y \in E$” $\Longrightarrow$ “$tx + (1-t)y \in E, \forall t \in [0, 1]$”.
2. 称E是吸收集, 若“$x \in X$” $\Longrightarrow$ “$\exists \varepsilon > 0$ *s.t.* $tx \in E, \forall t \in \{t \in \mathbb{F} : 0 < |t| \le \varepsilon\}$”.

定义2.122. $(X, \mathbb{F})$是线性空间, $K \subset X$是非空的凸、吸收集合. K的Minkowski 泛函定义为

$$p_K(x) \doteq \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in K\}, \quad x \in X.$$

引理2.123. 若K是赋范线性空间中包含*0*的凸、开集, 则它是吸收集, 它的Minkowski泛函$p_K(\cdot)$ 是一个次线性泛函且

1. $\exists \delta > 0$使得$p_K(x) \le \delta \|x\|, \forall x \in X$;
2. 对于$x \in X$，$p_K(x) \in [0, 1)$当且仅当$x \in K$.

证明(定理2.120): 显然, $E-F$为X的非空凸、开子集, 不含0. 于是可找到非零$x_0 \in X$使得$0 \in x_0+(E-F)$. 记$K = x_0+(E-F)$. 显然$x_0 \notin K$. 以p表示K的Minkowski泛函. 那么p是一个次线性泛函且对于$x \in X$成立

$$p(x) \in [0,1) \Longleftrightarrow x \in K.$$

那么$p(x_0) \geq 1$. 令

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0), \alpha \in \mathbb{R}.$$

那么$f_0 \in (\mathbb{R}x_0)'$且$f_0(x) \leq p(x), \forall x \in \mathbb{R}x_0$. 由Banach扩张定理, 存在$X$上的线性泛函$f$使得

$$f|_{\mathbb{R}x_0} = f_0, \quad f(x) \leq p(x), \forall x \in X.$$

因此$f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0) \geq 1$, 而对于任意$x \in E, y \in F$, 成立$f(x_0+x-y) \leq p(x_0+x-y) < 1$, 即

$$f(x) < 1 + f(y) - f(x_0) \leq f(y).$$

若$f \in X'$, 则意味着E, F可由超平面分离. 余下只需证明f在0处是连续的.

前面已证明"$f(x) \leq p(x), \forall x \in X$", 结合引理2.123, 可见$|f(x)| \leq \delta\|x\|, \forall x \in X$. 因此所欲证结论成立. □

定理2.124 (Mazur定理)**.** E, F是实赋范线性空间X中交空的两个非空凸集. 若

$$\operatorname{dist}(E,F) = \inf\{\|x-y\| : x \in E, y \in F\} > 0,$$

则E, F可由超平面严格分离.

证明: 令$\delta = \operatorname{dist}(E,F)$. 令$K = E-F$. 则$K$, $B(0,\delta/2)$为交空的凸集. 注意到$B(0,\delta/2)$为开集, 则由定理2.120, 可取到非零的$f \in X'$使得

$$f(x-y) \leq f(z), \quad \forall, x \in E, y \in F, z \in B(0,\delta/2),$$

这可推出

$$f(x-y) \leq -\frac{\delta}{2}\|f\|, \quad \forall, x \in E, y \in F;$$

进而

$$f(x) \leq f(y) - \frac{\delta}{2}\|f\|, \quad \forall, x \in E, y \in F.$$

则

$$\sup_{x \in E} f(x) \leq \inf_{y \in F} f(y) - \frac{\delta}{2}\|f\| < \inf_{y \in F} f(y).$$

令$c = \inf_{y \in F} f(y) - \frac{\delta}{2}\|f\|$. 则超平面$H(f,c)$严格分离$E, F$. □

推论2.125. E, F是实赋范线性空间X中交空的两个非空凸集. 若E是紧集、F是闭集, 则E, F可由超平面严格分离.

定义2.126. $(X, \mathbb{F})$是线性空间, $E \subset X$. 称E是平衡集, 若"$x \in E, |t| = 1$" $\Longrightarrow$ "$tx \in E$".

推论2.127. M是赋范线性空间X中的凸、平衡的闭集, x_0为M外一点, 则存在$f \in X'$使得

$$\sup_{x \in M} |f(x)| < f(x_0).$$

证明: 显然, $0 \in M$. 由Mazur定理, 可取实有界线性泛函g_1及c使得

$$g_1(x) \le c < g_1(x_0), \quad \forall x \in M.$$

由M是平衡集，可知$c \ge 0$. 不妨设$c = 1$. 则

$$|g_1(x)| \le 1 < g_1(x_0), \quad \forall x \in M.$$

若X是实空间，则已证完. 余下考虑X是复空间的情形. 令$g(x) = g_1(x) - \mathrm{i} g_1(\mathrm{i}x), \forall x \in X$. 则$g$是复有界线性泛函.

对于复数α, 记

$$\mathrm{sgn}\alpha = \begin{cases} \overline{\alpha}/|\alpha|, & \alpha \ne 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases}$$

令

$$f(x) = [\mathrm{sgn} g(x_0)] g(x), \ \forall x \in X.$$

对任意$x \in M$, 容易看出$[\mathrm{sgn} g(x)] x \in M$, 而且

$$\begin{aligned} |f(x)| = |g(x)| &= [\mathrm{sgn} g(x)] g(x) = g[(\mathrm{sgn} g(x)) x]) \\ &= \mathrm{Re} g[(\mathrm{sgn} g(x)) x] = g_1[(\mathrm{sgn} g(x)) x] \\ &\le 1 < g_1(x_0) \le |g(x_0)| = f(x_0). \end{aligned}$$

□

习题

2.5.1. 设$a < b$, $1 \le p \le \infty$. 对$f \in L^p[a, b]$, 定义$\varphi(f) = \int_{[a, \frac{a+b}{2}]} f \mathrm{d}m$. 证明: $\varphi \in (L^p[a, b])'$.

2.5.2. 对$x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^p$, $1 \le p \le \infty$. 定义$\varphi(x) = x_1 + x_2$. 证明: $\varphi \in (l^p)'$.

2.5.3. 对$f\in C[a,b]$, 定义$\varphi_1(f)=f(0)+2f(1)$, $\varphi_2(f)=\int_{[a,b]}f(t)\mathrm{d}t$. 证明: $\varphi_1,\varphi_2\in(C[a,b])'$.

2.5.4. X,Y赋范线性空间. $T:X\to Y$. 证明: 若T有界, 则$\ker(T)$是X的闭子空间. 反之未必成立, 请举例说明.

2.5.5. X赋范线性空间, $x,y\in X$. 证明: 若$\forall f\in X'$, 有$f(x)=f(y)$, 则$x=y$.

2.5.6. X,Y赋范线性空间, $f\in X',y_0\in X$. 对任意$x\in X$, 定义$Tx=f(x)y_0$. 证明: $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ 且$\|T\|=\|f\|\cdot\|y_0\|$.

2.5.7. 设X,Y是赋范线性空间, X包含非零向量. 证明: $\mathcal{B}(X,Y)$是Banach空间当且仅当Y是Banach空间.

2.5.8. G是赋范线性空间X的线性子空间, $x_0\in X$. 证明: $x_0\in\overline{G}\iff$ "$f\in X',f|_G=0$"蕴含"$f(x_0)=0$".

2.5.9. G是赋范线性空间X的线性子空间, $x_0\in X$. 证明: $\exists f\in X'$ *s.t.* $f|_G=0,f(x_0)=1$ 当且仅当$\mathrm{dist}(x_0,G)>0$.

2.5.10. 设G是赋范线性空间X的非零线性子空间, $\phi:X'\to G'$定义作$\phi(f)=f|_G$. 证明: $\phi\in\mathcal{B}(X',G')$是满射且$\|\phi\|=1$.

2.5.11. 设X是实赋范线性空间. 若$f\in X',c\in\mathbb{R}$, 则称$H_+(f,c)\doteq\{x\in X:f(x)>c\}$为$X$ 中的一个半空间. 证明：若$K\subset X$为一非空凸闭子集. 则K恰为所有包含K的半空间的交.

2.5.12. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $\{x_n\}_{n\geq1}\subset X,\{a_n\}_{n\geq1}\subset\mathbb{F}$. 那么下述等价：

(a) 存在$f\in X'$使得$f(x_n)=a_n,\forall n\geq1$.

(b) 存在$M\geq0$, 使得对任意n以及$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{F}^n$, 都有

$$|\sum_{i=1}^n\lambda_ia_i|\leq M\|\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\|.$$

2.5.13. 设X,Y是赋范线性空间, $\{x_i\}_{i=1}^n\subset X,\{y_i\}_{i=1}^n\subset Y$. 证明: 若$x_1,\cdots,x_n$是线性无关的, 则存在$T\in\mathcal{B}(X,Y)$, 使得$Tx_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$.

2.5.14. 设X是一个赋范线性空间, $A,B\in\mathcal{B}(X)$, 且$AB=I$. 证明: $\ker A$和$\mathrm{ran}\,B=X$互为拓扑补.

2.5.15. 赋范线性空间X中的超平面形如$S = x_0 + \ker(f)$, 其中$x_0 \in X, f \in X'$, 因此超平面必是线性簇. 进一步地, 存在$y_0 \in X$ 使得$\mathrm{span}(S \cup \{y_0\}) = X$.

2.5.16. X是数域$\mathbb{F}$上的赋范线性空间, $x_0 \in X$, M是线性子空间, $f \in X'$, $c \in \mathbb{F}$. 证明: $x_0 + M \subset H(f, c)$当且仅当$f|_M = 0, f(x_0) = c$.

2.5.17. 设$l^\infty_{\mathbb{R}}$是全体有界实数列构成的实线性空间. 令τ为$l^\infty_{\mathbb{R}}$上的平移算子, 即

$$(\tau x)(n) = x(n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明: 存在$l^\infty_{\mathbb{R}}$上的一个线性泛函Λ满足:

(a) 设$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty_{\mathbb{R}}$. 若$\{x_n\}_{n=1}^\infty$按照$C$-1收敛, 即$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$存在, 则$\Lambda(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. 特别地, 若$\{x_n\}_{n=1}^\infty$收敛, 则$\Lambda(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(b) $\Lambda(\tau x) = \Lambda(x), \forall x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$;

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} x(n) \le \Lambda(x) \le \limsup\limits_{n\to\infty} x(n), \forall x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$.

我们称此线性泛函为一个Banach极限.

2.6 共鸣定理、Banach逆算子定理、闭图形定理

本节, 我们将介绍Baire纲定理在Banach空间上线性算子的若干重要应用. 首先是共鸣定理.

定理2.128 (共鸣定理)**.** X是Banach空间, Y是赋范线性空间, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. 若对任意$x \in X$, $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty$, 则

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty.$$

注2.129. 1. 若$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| = \infty$, 则称$x$是$\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$的一个共鸣点. 因此共鸣定理可叙述为“若Banach空间上的一族有界线性算子无共鸣点，则必定是一致有界的”.

2. 共鸣定理也称为一致有界原理.

证明(共鸣定理): 对任意自然数$n \ge 1$, 记

$$M_n = \{x \in X : \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| \le n\}.$$

易见每个M_n都是X的闭子集, 且$X = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$. 因为$X$是完备的距离空间, 由Baire 纲定理知存在$n \geq 1$, 使得$M_n$包含内点. 则有$x_0 \in X, \delta > 0$ s.t.

$$B(x_0, \delta) \subset M_n.$$

对任意非零的$x \in X$,

$$x_0 + \frac{\delta x}{2\|x\|} \in B(x_0, \delta).$$

那么

$$\|T_\lambda \left(x_0 + \frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \| \leq n, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

则

$$\|T_\lambda \left(\frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \| \leq n + \|T_\lambda x_0\| \leq 2n, \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

$$\|T_\lambda x\| \leq \frac{4n}{\delta} \|x\|, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

由于$x \in X \setminus \{0\}$是任意的, 结论得证. □

开映射是距离空间之间映开集为开集的映射. 易见, 一个连续双射是同胚当且仅当它是开映射. 因此判断映射是否为开映射是重要的.

不难验证, 赋范线性空间之间的线性算子若是开映射，则必是满射. 下面的定理给出了判断开映射的充分条件.

定理2.130 (开映射定理)**.** 设X是Banach空间, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若$\mathrm{ran}(T)$是Y的第二纲子集, 则T是开映射, 即T映X中的开集为Y中的开集.

先做一些准备.

记号2.131. 设$(X, \mathbb{F})$是线性空间, $E, F \subset X, a \in \mathbb{F}$. 记

$$E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}, \ \ aE = \{ax : x \in E\}.$$

下面的证明是直接的, 略去不写.

引理2.132. 设$(X, \mathbb{F})$是赋范线性空间, $x, y \in X, E \subset X$.

1. 若$r, \delta > 0$, 则$rB(x, \delta) = B(rx, r\delta)$*;*

2. 若x是E内点, $r > 0$, 则rx是rE内点*;*

3. 若$x \in X, r > 0$, 则$-B(x,r) = B(-x,r)$;

4. 若x是E内点, 则$-x$是$-E$内点;

5. 若$r \in \mathbb{F}$, 则$\overline{rE} = r\overline{E}$;

6. 若$r > 0$, 则$x + B(y,r) = B(x+y,r)$.

7. 若$A, B \subset X$, 则$\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$.

8. 若$A, B \subset X$, x是A的内点, $y \in B$, 则$x+y$是$A+B$的内点.

引理2.133. 设X是Banach空间, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. 则下述等价:

(i) T是开映射;

(ii) $T(B(0_X,1))$是开集;

(iii) 0是$T(B(0_X,1))$的内点;

(iv) 0是$\overline{T(B(0_X,1))}$的内点.

证明: 只需证明(iv)$\Longrightarrow$(i). 假设$B(0_Y,\delta) \subset \overline{T(B(0_X,1))}$.

断言: $B(0_Y,\delta/2) \subset T(B(0_X,1))$.

令$\eta_i = \frac{\delta}{2^i}, i \geq 1$. 根据条件, 可知

$$B(0_Y,\eta_i) \subset \overline{T(B(0_X,\frac{1}{2^i}))}, \quad i = 1,2,\cdots. \tag{4}$$

往证$B(0_Y,\eta_1) \subset T(B(0_X,1))$. 先取$y_0 \in B(0_Y,\eta_1)$. 由(4), 存在$x_1 \in B(0_X,\frac{1}{2})$, 使得

$$\|y_0 - Tx_1\| < \eta_2.$$

再一次由(4), 存在$x_2 \in B(0_X,\frac{1}{2^2})$, 使得

$$\|y_0 - Tx_1 - Tx_2\| < \eta_3.$$

这样不断做下去, 可得到一串$\{x_n : n \geq 1\}$使得

$$x_n \in B(0_X,\frac{1}{2^n}), \quad \|y_0 - Tx_1 - Tx_2 - \cdots - Tx_n\| < \eta_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

则$T(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n Tx_i \to y_0$, 且$\lim_n \sum_{i=1}^n x_i$ 存在, 记为x_0. 明显地, $\|x_0\| < 1$, 而且

$$Tx_0 = \lim_n T(\sum_{i=1}^n x_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n Tx_i = y_0.$$

这样便证明了断言.

余下证明T映开集为开集. 设G是X中非空开集. 往证$T(G)$为Y中开集. 对任意$y_0 \in T(G)$, 存在$x_0 \in G$ 使得$Tx_0 = y_0$. 设$\varepsilon > 0$满足$B(x_0, \varepsilon) \subset G$. 注意到$B(0_Y, \delta\varepsilon/2) \subset T(B(0_X, \varepsilon))$, 那么

$$\begin{aligned} B(y_0, \delta\varepsilon/2) &= y_0 + B(0, \delta\varepsilon/2) = Tx_0 + B(0, \delta\varepsilon/2) \subset Tx_0 + T(B(0_X, \varepsilon)) \\ &= T(x_0 + B(0_X, \varepsilon)) = T(B(x_0, \varepsilon)) \subset T(G). \end{aligned}$$

这说明y_0是$T(G)$的内点. 由$y_0 \in T(G)$的任意性, 即可见结论. □

证明(开映射定理)*:* 由引理2.133, 只需证明下面的断言.

断言: 0_Y是$\overline{T(B(0_X, 1))}$的内点.

记$V = B(0_X, 1), W = B(0_X, 1/2)$. 那么$W + W \subset V, T(W) + T(W) \subset T(V)$. 进一步地,

$$\overline{T(W)} + \overline{T(W)} \subset \overline{T(W) + T(W)} \subset \overline{T(V)}.$$

注意到$\cup_{k=1}^\infty kW = X$, $\cup_{k=1}^\infty kT(W) = T(X) = \text{ran}(T)$. 由ran$(T)$第二纲, 必有$k \geq 1$使得$\overline{kT(W)}$有内点, 于是$\overline{T(W)}$有内点. 设$B(y, \delta) \subset \overline{T(W)}$. 则$B(-y, \delta) = -B(y, \delta) \subset \overline{T(-W)} = \overline{T(W)}$. 那么$B(y, \delta) + B(-y, \delta) \subset \overline{T(W)} + \overline{T(W)} \subset \overline{T(V)}$. 于是$0_Y$是$\overline{T(V)}$内点. 这样就完成了证明. □

结合Baire纲定理, 我们可看到下面的结果.

推论2.134. 设T是Banach空间之间的有界线性算子. 那么

1. T是满射当且仅当ran(T) 是第二纲的当且仅当T是开映射;
2. 或者ran(T)是第一纲的, 或者T是满射.

下面的定理是开映射定理一个直接的应用.

定理2.135 (Banach逆算子定理)**.** 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若T是双射, 则T是有界可逆的.

证明: 显然, $T^{-1}:Y\to X$是线性算子. 由定义, 只需证明T^{-1}连续. 注意到对X中任意开集G, $(T^{-1})^{-1}(G)=T(G)$. 因为ran$(T)=Y$ 是第二纲的, 则由开映射定理, T是开映射. 于是$T(G)$为Y中开集. 这说明T^{-1} 是连续的. □

注2.136. 一般而言, 赋范线性空间之间的有界线性算子是双射不能推出它是有界可逆的.

定理2.137. 设X是线性空间, $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$是X上两个范数且$(X,\|\cdot\|_1),(X,\|\cdot\|_2)$ 是Banach空间. 若$\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$中有一者强于另一者, 则两者等价.

证明: 不妨假设, $\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|_2$, 即存在$\delta>0$使得$\|x\|_2\le\delta\|x\|_1,\forall x\in X$. 定义

$$\begin{aligned} T:(X,\|\cdot\|_1)&\longrightarrow(X,\|\cdot\|_2)\\ x&\longmapsto x. \end{aligned}$$

易见, T是线性算子且为双射. 再由$\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|_2$, 可见T连续. 由Banach逆算子定理知T^{-1}有界. 则

$$\|T^{-1}x\|_1\le\|T^{-1}\|\|x\|_2,\quad\forall x\in X.$$

即

$$\|x\|_1\le\|T^{-1}\|\|x\|_2,\quad\forall x\in X.$$

即证得$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$. 总之两者等价. □

闭图形定理

定义2.138. 设X,Y是赋范线性空间. T是从X的线性子空间G到Y的线性算子. 若"G中序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$收敛于$x_0\in X$, $Tx_n\to y_0\in Y$"恒蕴含"$x_0\in G,Tx_0=y_0$", 则称T 是一个<u>闭算子</u>.

注2.139. 显然, 上述定义中的T是闭算子当且仅当$\{(x,Tx):x\in G\}$是乘积赋范线性空间$X\times Y$中的闭集.

例2.140. $C[0,1]$中那些在$(0,1)$上连续可微的函数构成$C[0,1]$的子空间, 它上面的微分算子是闭算子, 但不是有界的.

定理2.141 (闭图形定理)**.** 设$(X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$是Banach空间, $T:X\to Y$是线性算子. 若T是一个闭算子, 则T是有界的.

证明：. 对$x \in X$, 定义$\|x\| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$. 则$\|\cdot\|$是$X$上的范数且强于$\|\cdot\|_X$. 欲证$T$有界只需证明$\|\cdot\|$弱于$\|\cdot\|_X$. 根据前述定理, 只需证明下面的断言成立.

断言: X在范数$\|\cdot\|$下是Banach空间.

$\{x_n\}$是$(X, \|\cdot\|)$中的Cauchy列. 那么$\{x_n\}$ 是$(X, \|\cdot\|_X)$中的Cauchy列, $\{Tx_n\}$是Y中的Cauchy 列. 由X, Y完备, 存在x_0使得$\|x_n - x_0\|_X \to 0$, 存在y_0使得$\|Tx_n - y_0\|_Y \to 0$. 由T 是闭算子, 可知$Tx_0 = y_0$. 那么

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n - x_0\|_X + \|T(x_n - x_0)\|_Y = \|x_n - x_0\|_X + \|Tx_n - y_0\|_Y \to 0.$$

于是$\{x_n\}$是$(X, \|\cdot\|)$中的收敛列. 断言得证. □

要懂得闭图形定理的好处, 可对线性算子T考虑下面三个叙述:

1. $x_n \to x_0$;
2. $Tx_n \to y_0$;
3. $Tx_0 = y_0$.

通常证明T在x_0处连续, 需要从(1)推出(2)和(3). 现在由闭图形定理, 则只需从(1)和(2)推出(3)即可, 多了一个假设, 当然要省力些!

习题

2.6.1. 证明: 赋范线性空间X的真子空间M是无处稠密的, 因此是X的第一纲子集.

2.6.2. 设X, Y是Banach空间, $\{T_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$满足：对任意$x \in X$, $\lim_n T_n x$存在. 证明：存在$T \in \mathcal{B}(X, Y)$使得$\lim_n T_n x = Tx, \forall x \in X$.

2.6.3. 设X是一赋范线性空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1 < p < \infty$. 对任意$f \in X'$, 恒有$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$. 证明下式定义的$T$是从$X'$到$l^p$的有界线性算子:

$$\begin{aligned} T : X' &\longrightarrow l^p, \\ f &\longmapsto \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

2.6.4. 设g是$[a, b]$上的一复值Lebesgue可测函数, 且对任意$f \in L^1[a, b]$, 恒有$fg \in L^1[a, b]$. 证明：$g \in L^{\infty}[a, b]$.

2.6.5. X是赋范线性空间, f是X上的一个线性泛函. 证明: $\ker f$是X的闭子空间当且仅当$f \in X'$.

2.6.6. 设X是有限维线性空间. 证明: 若$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$是X上的两个范数, 则它们等价.

2.6.7. 设X是线性空间, $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$是$X$上一族分离点的线性泛函(即对任意$x, y \in X$, "$x \neq y$"$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda$ *s.t.* $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$). $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$是X上的范数且均使得X成为*Banach*空间. 证明: 若$\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 在$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$ 下都是连续的, 则$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$是等价的范数.

2.6.8. 证明：若X, Y是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 则T是下方有界的当且仅当T是单射且具有闭的值域.

2.6.9. 设$\{a_{i,j}\}_{i,j\geq 1} \subset \mathbb{C}$. 证明: 若对任意$x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$ 以及任意$i \in \mathbb{N}$ 都有$\sum_{j=1}^\infty a_{i,j}\xi_j$收敛且$\{\sum_{j=1}^\infty a_{i,j}\xi_j\}_{i=1}^\infty \in l^2$, 则如下定义的$A$

$$A : x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \longmapsto \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\xi_j\right\}_{i=1}^{\infty}$$

是l^2上的有界线性算子.

2.6.10. 设X是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$, 且存在X的有限维子空间M, 使得$\mathrm{ran}T \oplus M = X$. 证明：$T$是闭值域的.

2.6.11. 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 证明：若T是开映射, 则$\exists \delta > 0$ *s.t.* 对任意$y \in Y$, 存在$x \in X$使得$Tx = y$, $\|x\| \leq \delta \cdot \|y\|$.

2.6.12. 设X是可分复Banach空间. 证明：存在有界线性算子$Q : l^1 \to X$, 使得Q是满射.

2.7 对偶空间、二次对偶

Hahn-Banach定理解决了有界线性泛函的存在性, 也说明存在足够多的有界线性泛函. 本节里, 我们考虑Banach空间X与其对偶X'之间的联系, 并利用这一联系加深对Banach空间X的结构以及其上算子的理解. 此即所谓的对偶理论的精神.

例2.142. 设$x \in X$, 则由Hahn-Banach定理的推论可知: $\|x\| = \sup\limits_{f \in X', \|f\| \leq 1} |f(x)|$. 特别地, $x = 0$当且仅当$f(x) = 0, \forall f \in X'$. 在某种意义下, 连续线性泛函正类似于点的坐标. 即有对应: $x \mapsto \{f(x)\}_{f \in (X')_1}$, 这里$(X')_1 \doteq \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$.

下面, 我们将刻画几个具体Banach空间的对偶空间.

具体对偶空间

在前面的习题2.3.28中我们已可看出:

(i) n维实赋范线性空间X的对偶空间与$\mathbb{R}^n$同构.

(ii) n维复赋范线性空间的对偶空间与$\mathbb{C}^n$同构.

定义2.143. 若$1 < p, q < \infty$且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则称$p, q$互为<u>共轭指数</u>; 1 的共轭指数定义为∞.

定理2.144. 设$p, q \in (1, \infty)$互为共轭指数. 那么下述成立.

(i) 设$y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^q$, 对$\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^p$, 定义

$$\varphi_y(\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i.$$

那么$\varphi_y \in (l^p)'$且$\|\varphi_y\| = \|y\|_q$

(ii) 若$\varphi \in (l^p)'$, 则存在唯一$y \in l^q$ 使得$\varphi = \varphi_y$.

(iii) $\Phi : y \longmapsto \varphi_y$是一个保范的线性双射, 进而$l^q$与$(l^p)'$等距同构.

证明: (i) $\varphi_y \in (l^p)'$且$\|\varphi_y\| \le \|y\|_q$是简单的验证.

对于$n \ge 1$, 定义$\xi_i = \mathrm{sgn}\eta_i |\eta_i|^{q-1}, 1 \le i \le n; \xi_i = 0, i \ge n+1$. 那么$\{\xi_i\} \in l^p$, $|\varphi_y(\{\xi_i\})| = \sum_i |\eta_i|^q$, $\|\{\xi_i\}\|_p = (\sum |\eta_i|^q)^{1/p}$. 那么

$$\|\varphi_y\| \ge (\sum_i |\eta_i|^q)^{1/q} = \|y\|_q.$$

(ii) 唯一性由(i)可见. 只需证明存在性.

设e_n为第n个坐标为1, 其余位置坐标为0的数列, 则$e_n \in l^p$. 令$\eta_n = \varphi(e_n)$, 则$|\eta_n| \le \|\varphi\| \cdot \|e_n\|_p = \|\varphi\|$, $y \triangleq \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$. 对每个$n$, 定义

$$y_n = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, 0, 0, \cdots).$$

则$y_n \in l^q, \|\varphi_{y_n}\| = \|y_n\|_q, n = 1, 2, \cdots$.

对任意$x = \{\xi_i\} \in l^p$, 注意到$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, 则

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \lim_n \varphi_{y_n}(x). \tag{5}$$

因此, $\sup_n |\varphi_{y_n}(x)| < \infty, \forall x \in l^p$. 由共鸣定理可见, $\sup_n \|\varphi_{y_n}\| < \infty$, 即

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q)^{1/q} = \sup_n \|y_n\|_q < \infty.$$

这说明$y \in l^q$. 由(5)易见$\varphi_y = \varphi$.

(iii) 由(i)和(ii), 结论是显然的. □

定理2.145. *(i)* 设$y = \{\eta_i\} \in l^\infty$, 对$\{\xi_i\} \in l^1$, 定义$\varphi_y(\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$. 那么$\varphi_y \in (l^1)'$且$\|\varphi_y\| = \|y\|_\infty$

(ii) 若$\varphi \in (l^1)'$, 则存在$y \in l^\infty$ 使得$\varphi_y = \varphi$

(iii) l^∞与$(l^1)'$等距同构.

证明: (i) $\varphi_y \in (l^1)'$且$\|\varphi_y\| \leq \|y\|_\infty$是简单的验证.

对任意$\varepsilon > 0$, 存在n使得$|\eta_n| + \varepsilon > \|y\|_\infty$. 定义$\xi_n = 1, i \neq n$时$\xi_i = 0$. 那么$x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^1$, $\|x\|_1 = 1$, $|\varphi_y(x)| = |\eta_n| > \|y\|_\infty - \varepsilon$. 那么$\|\varphi_y\| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性, $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_\infty$. 则有$\|\varphi_y\| = \|y\|_\infty$.

(ii) 以e_n表示第n个坐标为1, 其余位置坐标为0的序列, 则$e_n \in l^1$. 令$\eta_n = \varphi(e_n)$, $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$. 易知$y \in l^\infty$. 由于$M := \mathrm{span}\{e_n : n \geq 1\}$是$l^1$的稠密子集, 且$\varphi|_M = \varphi_y|_M$, 故$\varphi_y = \varphi$.

(iii) 定义

$$F : l^\infty \longrightarrow (l^1)',$$
$$y \longmapsto \varphi_y.$$

那么F是线性双射且保持范数. □

注2.146. 上例表明, 可分Banach空间的对偶空间未必可分

下面我们将刻画$L^p[a,b]$的对偶空间. 先作一些准备.

记号2.147. 以1_E代表E的示性函数, 即$1_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \in E^c. \end{cases}$

根据《实变函数论》中所学知识, 下面的引理是明显的.

引理2.148. 设$1 \leq p < \infty$, 那么下述成立*:*

(i) 对开集$G \subset [a,b]$, 存在$\{J_n\}$, 其中每个J_n都是有限个两两不交开区间的并, 使得$1_{J_n} \to 1_G$ 且按$L^p[a,b]$范数收敛.

(ii) 对可测$E \subset [a,b]$, 存在开集$\{G_n\}$ 使得$1_{G_n} \to 1_E$ *a.e.* 且按$L^p[a,b]$范数收敛.

(iii) 对$[a,b]$上任意有界可测函数x, 存在一致有界的简单可测函数$\{x_n\}$ 使得$x_n(t) \to x(t)$ *a.e.*于$[a,b]$, 且$\{x_n\}$按$L^p[a,b]$范数收敛于x.

(iv) 对任意$x \in L^p[a,b]$, 存在有界可测函数$\{x_n\}$ 使得$|x_n(t)| \le |x(t)|, \forall n \in \mathbb{N}$, $t \in [a,b]$, $x_n \to x$ *a.e.*于$[a,b]$,且$\{x_n\}$按$L^p[a,b]$范数收敛于x.

定理2.149. $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. 那么

(i) 设$y \in L^q[a,b]$, 对$x \in L^p[a,b]$, 定义

$$\varphi_y(x) = \int_{[a,b]} xy\mathrm{d}t,$$

则$\varphi_y \in (L^p[a,b])'$且$\|\varphi_y\| = \|y\|_q$.

(ii) 若$\varphi \in (L^p[a,b])'$, 则存在$y \in L^q[a,b]$ *s.t.* $\varphi = \varphi_y$.

(iii) $L^q[a,b]$与$(L^p[a,b])'$等距同构. 事实上, $\Phi : y \longmapsto \varphi_y$ 是一个保范的线性双射.

证明: （i）由Hölder不等式, $|\varphi_y(x)| \le \|y\|_q \|x\|_p$. 则$\varphi \in (L^p[a,b])'$ 且范数不大于$\|y\|_q$.

令$x = (\mathrm{sgn}\, y)|y|^{q-1}$, 那么$x \in L^p[a,b]$, $\|x\|_p = (\int |y|^q \mathrm{d}t)^{1/p}$. $\varphi_y(x) = \int |y|^q \mathrm{d}t$. 那么$\|\varphi_y\| \ge \|y\|_q$.

(ii) 定义$x_s = 1_{[a,s]}$, $s \in [a,b]$. 那么$x_s \in L^p[a,b]$.

定义$g(s) = \varphi(x_s), s \in [a,b]$.

断言一: g是绝对连续的.

设$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n \le b$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |g(a_i) - g(b_i)| &\overset{\varepsilon_i = \mathrm{sgn}[g(a_i) - g(b_i)]}{=} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (g(a_i) - g(b_i)) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [\varphi(x_{a_i}) - \varphi(x_{b_i})] \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi(x_{a_i} - x_{b_i}) = \varphi(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (x_{a_i} - x_{b_i})) \\ &\le \|\varphi\| \cdot \| \sum_{i=1}^n (x_{a_i} - x_{b_i})\|_p \le \|\varphi\| \cdot (\sum_{i=1}^n (b_i - a_i))^{1/p}.\end{aligned}$$

记$y=g'$, 则$y\in L^1[a,b]$. 余下证明y即为所求.

断言二： 对任意可测集合E, $\varphi(1_E)=\int 1_E y\mathrm{d}m$.

若$E=[a,s]$, 则$\varphi(1_{[a,s]})=g(s)=g(s)-g(a)=\int_{[a,s]}y\mathrm{d}m=\int_{[a,s]}y\mathrm{d}m=\int 1_{[a,s]}y\mathrm{d}t$.

若E是区间, 则

$$\begin{aligned}\varphi(1_{[s_1,s_2]})&=\varphi(1_{[a,s_2]})-\varphi(1_{[a,s_1]})\\&=\int 1_{[a,s_2]}y\mathrm{d}m-\int 1_{[a,s_1]}y\mathrm{d}m\\&=\int 1_{[s_1,s_2]}y\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

若E是开集, 则E是至多可数个开区间的并. 不妨设$E=\cup_n J_n$, $\{J_n:n\geq 1\}$是两两不交的开区间. 那么$\{1_{\cup_{n=1}^m J_n}\}_{m=1}^\infty$一致有界几乎处处收敛于$1_E$且$1_{\cup_{n=1}^m J_n}\xrightarrow{\|\cdot\|_p}1_E$. 那么$\varphi(1_{\cup_{n=1}^m J_n})\to\varphi(1_E)$. 又

$$\begin{aligned}\varphi(1_{\cup_{n=1}^m J_n})&=\varphi(\sum_{n=1}^m 1_{J_n})=\sum_{n=1}^m\varphi(1_{J_n})\\&=\sum_{n=1}^m\int 1_{J_n}y\mathrm{d}m=\int\sum_{n=1}^m 1_{J_n}y\mathrm{d}m\\&=\int 1_{\cup_{n=1}^m J_n}y\mathrm{d}m\to\int 1_E y\mathrm{d}m\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

最后的极限过程是根据Lebesgue控制收敛定理. 于是$\varphi(1_E)=\int 1_E y\mathrm{d}m$.

若E是可测集, 则有开集$\{G_n\}$使得$\{1_{G_n}\}$几乎处处且按L^p范数收敛于1_E. 那么$\varphi(1_{G_n})\to\varphi(1_E)$ 且

$$\varphi(1_{G_n})=\int 1_{G_n}y\mathrm{d}m\to\int 1_E y\mathrm{d}m\quad(n\to\infty).$$

最后的极限过程是根据Lebesgue控制收敛定理. 于是$\varphi(1_E)=\int 1_E y\mathrm{d}m$.

断言三： 对任意有界可测函数x, $\varphi(x)=\int xy\mathrm{d}m$.

可取一致有界简单函数$\{x_n\}$使得$\{x_n\}$几乎处处且按L^p范数收敛于x. 那么$\varphi(x_n)\to\varphi(x)$ 且

$$\varphi(x_n)=\int x_n y\mathrm{d}m\to\int xy\mathrm{d}m\quad(n\to\infty).$$

最后的极限过程是根据Lebesgue控制收敛定理. 于是$\varphi(x)=\int xy\mathrm{d}m$.

断言四： $y \in L^q[a,b]$.

对任意$N \in \mathbb{N}$, 定义

$$x_N(t) = \begin{cases} (\operatorname{sgn} y(t))|y(t)|^{q-1}, & |y(t)| \le N \\ 0, & |y(t)| > N. \end{cases}$$

那么x_N是有界可测函数$\|x_N\|_p = (\int_{\{t:|y(t)|\le N\}} |y|^q \mathrm{d}m)^{1/p}$,

$$\|\varphi\| \cdot \|x_N\|_p \ge \varphi(x_N) = \int_{\{t:|y(t)|\le N\}} |y|^q \mathrm{d}m.$$

即$\|\varphi\| \ge \left(\int_{\{t:|y(t)|\le N\}} |y|^q \mathrm{d}m\right)^{1/q}$. 则$N \to \infty$时，$\|\varphi\| \ge \left(\int |y|^q \mathrm{d}m\right)^{1/q}$. 则$y \in L^q[a,b]$且$\|y\|_q \le \|\varphi\|$.

最后证明$\varphi = \varphi_y$.

任意取定$x \in L^p[a,b]$. 对任意$n \in \mathbb{N}$, 定义$x_n = x1_{[|x|\le n]}$. 那么$\{x_n\}$ 有界函数、几乎处处收敛于x且按L^p范数收敛于x. 则$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ 且

$$\varphi(x_n) = \int x_n y \mathrm{d}m \to \int xy \mathrm{d}m \quad (n \to \infty).$$

最后的极限过程是根据Lebesgue控制收敛定理. 于是$\varphi(x) = \varphi_y(x)$. 进而$\varphi = \varphi_y$. □

同前述定理的证明类似, 可证明$L^\infty(E)$与$(L^1(E))'$等距同构. 我们就$E = [a,b]$的情形给出相应具体结果.

定理2.150. *(i)* 设$y \in L^\infty[a,b]$, 对$x \in L^1[a,b]$, 定义

$$\varphi_y(x) = \int xy \mathrm{d}m.$$

那么$\varphi_y \in (L^1[a,b])'$且$\|\varphi_y\| = \|y\|_\infty$

(ii) 若$\varphi \in (L^1[a,b])'$, 则存在$y \in L^\infty[a,b]$ *s.t.* $\varphi = \varphi_y$.

(iii) $\Phi : y \longmapsto \varphi_y$是保范的线性双射, 进而$L^\infty[a,b]$与$(L^1[a,b])'$等距同构.

上述证明的前半段与L^p情形一样, 后半段略微调整.

例2.151. 设$t_0 \in [a,b]$. 对$f \in C[a,b]$, 定义

$$\varphi_{t_0}(f) = f(t_0).$$

那么$\varphi_{t_0} \in (C[a,b])'$且$\|\varphi_{t_0}\| = 1$. 注意到, $t_1, t_2 \in [a,b]$且$t_1 \ne t_2$时, $\|\varphi_{t_1} - \varphi_{t_2}\| = 1$. 根据推论*1.27*, 这意味着$(C[a,b])'$不可分.

例2.152. 设$g \in L^1[a,b]$. 对$f \in C[a,b]$, 定义

$$\varphi_g(f) = \int_{[a,b]} fg\mathrm{d}m.$$

那么$\varphi_g \in (C[a,b])'$且$\|\varphi_g\| \leq \|g\|_1$.

连续函数空间上的有界线性泛函可由$[a,b]$上的测度表示. 事实上. 对紧度量空间X, $C(X)' \cong M(X)$, 这里$M(X)$代表X上的全体正则的复Borel测度按照"全变差范数" 构成的赋范线性空间, 这就是著名的Riesz-Markov表示定理(可参[15]-Appendix A).

根据定理2.145, 可分Banach空间的对偶空间未必可分. 在本小节的最后, 我们证明对偶空间的可分性蕴含着Banach空间的可分性.

定理2.153. 若X的对偶空间X'是可分的, 则X是可分的.

证明: 设X'可分. 我们将证明X可分. 假设$E = \{f_n : n \in \Lambda\}$是$X'$的一个至多可数稠密子集. 则对每个$n \in \Lambda$存在单位向量$x_n$使得$\|f_n(x_n)\| \geq \|f_n\|/2$.

显然, 欲证明X可分, 只需证明$\vee E = X$(参见习题2.3.9). 这里$\vee E$表示$\mathrm{span}\, E$的闭包, 称为E的闭线性张开. 反证法, 若不然, 则$\vee E$ 是X的真子空间, 则有$f \in X'$使得$\|f\| = 1$ 而且$f|_{\vee E} = 0$. 存在$\{n_k\}$使得$f_{n_k} \to f$, 进而$\|f_{n_k}\| \to \|f\| = 1$, $f_{n_k}/\|f_{n_k}\| \to f$. 那么$k$足够大时

$$\|f - f_{n_k}/\|f_{n_k}\|\| \geq \|f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})/\|f_{n_k}\|\| \geq 1/2.$$

矛盾. □

上面的结果初步反映出Banach空间与其对偶空间之间的紧密联系. 借助对偶的思想, 赋范线性空间可看作由线性泛函构成的赋范线性空间. 为介绍这一结果, 我们需要二次对偶及典型映射的概念.

二次对偶、典型映射、自反空间

定义2.154. 对于赋范线性空间X, 称X'的对偶空间X''为X的<u>二次对偶空间</u>.

定义2.155. 设X是数域$\mathbb{F}$上的Banach空间, $x \in X$. 定义

$$\begin{aligned} \tau_x :& X' \longrightarrow \mathbb{F} \\ & f \longmapsto f(x). \end{aligned}$$

易证, $\tau_x \in X''$且$\|\tau_x\| = \|x\|$.

这样每个$x \in X$皆对应X''中一个向量, 即X'上的一个有界线性泛函.

映射$\tau : X \to X''$, $x \mapsto \tau_x$称为X上的典型映射.

易证$\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$, $\tau(ax) = a\tau(x)$, 且τ保持范数, 是一个有界线性算子. 那么, $\tau(X)$是Banach空间X''的线性子空间, $x \mapsto \tau_x$是从X到赋范线性空间$\tau(X)$ 的等距同构.

注2.156. 通过典型映射, 赋范线性空间中的向量可视作X'上的有界线性泛函, 进而赋范线性空间可视作某个Banach空间上的某些有界线性泛函构成的子空间, 这使得我们有时可用处理算子的办法处理向量.

命题2.157. 设X是赋范线性空间, $\emptyset \neq E \subset X$. 若对任意$f \in X'$, $\sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$, 则$\sup_{x\in E} \|x\| < \infty$.

证明: 注意到$\|\tau_x\| = \|x\|$恒成立, 应用共鸣定理即可. □

定义2.158. 若赋范线性空间X上的典型映射是满射, 则称X是自反的.

注2.159. 赋范线性空间X是自反的一个必要条件: X与X''等距同构(这意味着X必是Banach空间). 但这一条件并不充分. 事实上, James [13]构造了一个Banach空间J(现在通称之为James空间), 使得尽管J, J'' 是同构的, 但J不是自反的, 即典型映射τ不是满射.

下面我们将给出一些自反以及不自反的Banach空间的例子.

定理2.160. *(i)* 有限维Banach空间都是自反的.

(ii) 若$1 < p < \infty$, 则$L^p[a,b]$ 和l^p自反.

(iii) $l^1, L^1[a,b], C[a,b]$不自反, 其中$a < b$.

证明: (i) 设X是n维Banach空间. 我们已经指出$\dim X' = \dim X'' = n$. 而τ是单射, $\dim \tau(X) = \dim X = n$. 这说明$X''$与它的闭子空间$\tau(X)$维数都是有限的$n$. 则$\tau(X) = X''$.

(ii) 设q是p的共轭指数, $a < b$.

根据定理2.149, 对$x \in L^p, y \in L^q$, 设

$$\begin{aligned} \varphi_y : L^p[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto \int_{[a,b]} zy\mathrm{d}m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_x : L^q[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C},\\ z &\longmapsto \int_{[a,b]} zx\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

那么

$$(L^p[a,b])' = \{\varphi_y : y \in L^q[a,b]\}, \quad (L^q[a,b])' = \{\psi_x : x \in L^p[a,b]\}. \tag{6}$$

任取$F \in (L^p[a,b])''$. 只需证明$\exists x_0 \in L^p[a,b]$ s.t. $F(f) = f(x_0), \forall f \in (L^p[a,b])'$；由(6), 即$F(\varphi_y) = \varphi_y(x_0), \forall y \in L^q[a,b]$; 即

$$F(\varphi_y) = \int yx_0\mathrm{d}m = \psi_{x_0}(y), \forall y \in L^q[a,b].$$

再由(2.7), 只需证明

$$\begin{aligned}G : L^q[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C},\\ y &\longmapsto F(\varphi_y).\end{aligned}$$

是$L^q[a,b]$上的有界线性泛函即可, 留作练习.

l^p的证明是类似的, 亦留做练习.

(iii) 由习题2.7.4, 若X可分，X'不可分，则X不自反. 注意到$l^1, L^1[a,b], C[a,b]$均可分, $(l^1)', (L^1[a,b])', (C[a,b])'$均不可分, 则$l^1, L^1[a,b], C[a,b]$均不自反. □

注2.161. 自反空间结构具有丰富的几何性质. 自反空间上算子的结构也相对整齐.

命题2.162 (Pettis定理)**.** 自反性是可遗传的, 即自反Banach空间的闭子空间也是自反的.

证明: 假设X是自反的Banach空间, M是X的闭子空间. 不妨设$X \neq M \neq \{0\}$.

假设$F \in M''$. 只需证明存在$x_0 \in M$使得$F(f) = f(x_0), \forall f \in M'$.

为与“X是自反的”这一条件建立联系, 我们定义

$$\begin{aligned}\phi : X' &\longrightarrow \mathbb{F}\\ g &\longmapsto F(g|_M).\end{aligned}$$

那么易证明ϕ是X'上的有界线性泛函. 则由X自反, 存在$x_0 \in X$, 使得

$$\phi(g) = g(x_0), \ \forall g \in X'.$$

我们断言$x_0 \in M$. 若不然, 则由Hahn-Banach定理, 存在$g_0 \in X'$使得$g_0|_M = 0$, $g_0(x_0) = 1$. 则$0 = F(g_0|_M) = \phi(g_0) = g_0(x_0) = 1$, 矛盾.

往证对任意$f \in M'$, $F(f) = f(x_0), \forall f \in M'$. 由Hahn-Banach定理, 存在$g \in X'$使得$g|_M = f$. 那么

$$f(x_0) = g(x_0) = \phi(g) = F(g|_M) = F(f).$$

证完. □

弱收敛、弱*收敛

借助典型映射, 赋范线性空间中的向量可看作函数. 据此可定义向量列的逐点收敛.

定义2.163. 设X是赋范线性空间.

(i) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 若存在$x_0 \in X$使得$\{\tau_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$逐点收敛到$\tau_{x_0}$, 即

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0), \quad \forall f \in X',$$

则称$\{x_n\}$是弱收敛的且弱收敛到x_0, 记作$x_n \xrightarrow{w} x_0$, 称x_0是它的弱极限.

(ii) $E \subset X$. 若E中的任意序列都有弱收敛的子列, 则称E是弱列紧的. 若E中的任意弱收敛序列的极限仍在E中, 则称E是弱列闭的.

(iii) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$. 若存在$f_0 \in X'$使得$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$逐点收敛到$f_0$, 即

$$\lim_n f_n(x) = f_0(x), \quad \forall x \in X,$$

则称$\{f_n\}$是弱*收敛的且弱*收敛到f_0, 记作$f_n \xrightarrow{w*} f_0$, 称f_0是它的弱*极限.

注2.164. *(i)* 显然, 范数收敛蕴含着弱收敛, 即范数拓扑下收敛的序列必是弱收敛的.

(ii) 赋范线性空间中弱收敛的序列一定是有界序列, 因此弱列紧集合是有界集合.

引理2.165. X是赋范线性空间. 那么下述成立:

(i) 若$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in X$, 则存在$x_1, x_2, x_3, \cdots$的凸组合做成的序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$按照范数收敛于$x_0$.

(ii) X中的凸闭集必是弱列闭的.

证明: (i) 以K表示$x_1, x_2, x_3, \cdots$的所有凸组合做成的集合的闭包. 则K是凸闭集. 只需证明$x_0 \in K$. 若不然, 应用凸集分离定理2.124, 则存在$f \in X'$使得

$$\mathrm{Re} f(x_0) < \inf_{y \in K} \mathrm{Re} f(y).$$

则$\mathrm{Re} f(x_0) < \inf_n \mathrm{Re} f(x_n), \forall n$. 矛盾于$f(x_n) \to f(x_0)$.

(ii) 由(i)可见结论成立. □

在无穷维空间中, 有界集未必是列紧集, 但在一定条件下必是弱列紧的.

定理2.166. *(i)* 若Banach空间X是可分的, 则X'中的有界列总有弱*收敛子列.

(ii) 自反Banach空间X的子集E是弱列紧的当且仅当E是有界的.

证明: (i) 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$且$\sup_n \|f_n\| \leq \delta < \infty$. 往证$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$存在弱*收敛的子列.

设$\Gamma = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. 那么$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 视作Γ上的函数时是连续函数序列, 且$\sup_n \sup_{x\in\Gamma} |f_n(x)| \leq \delta < \infty$, 因此是一致有界的. 另外, 对任意$x, y \in \Gamma$,

$$\sup_n |f_n(x) - f_n(y)| = \sup_n |f_n(x-y)| \leq \delta \|x - y\|.$$

因此$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是Γ上同等连续的连续函数序列. 由习题1.4.14, 存在$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$在$\Gamma$上是逐点收敛的. 由$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$是线性泛函, 因此$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$在$X$上是逐点收敛的. 由习题2.6.2, 存在$f_0 \in X'$, 使得$f_0(x) = \lim_k f_{n_k}(x), \forall x \in X$. 因此$f_{n_k} \xrightarrow{w*} f_0$.

(ii) 我们只需证明充分性. 任取有界列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 只需证明它有弱收敛的子列.

定义$M = \vee\{x_n : n \geq 1\}$. 这里$\vee$表示闭线性张开. 根据前面的结果, M是自反的. 又M是可分的, 因此M'', M'也是可分的.

注意到$\{\tau_{x_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset M''$是有界列. 又$M'$是可分的, 则由(i), 存在$F \in M''$以及$\{\tau_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$的子列, 设为$\{\tau_{x_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得对每个$f \in M'$有$\lim_k \tau_{x_{n_k}}(f) = F(f)$, 即$\lim_k f(x_{n_k}) = F(f)$.

由M是自反的, 则存在$x_0 \in M$使得$F = \tau_{x_0}$. 因此$\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0), \forall f \in M'$. 进而对任意$f \in X'$, 成立$\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0)$, 即$x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$. 证完. □

下面的结果是上述定理的一个应用.

定理2.167 (最佳逼近元存在定理)**.** 设F是自反Banach空间X中非空子集, 且是弱序列闭的. 那么对任意的$x_0 \in X$, 必有$y_0 \in F$ 使得$\|x_0 - y_0\| = \mathrm{dist}(x_0, F)$.

证明: 根据$\mathrm{dist}(x_0,F)$的定义, 存在$\{y_n\}\in F$使得$\|x_0-y_n\|\searrow \mathrm{dist}(x_0,F)$. 显然, $\{y_n\}$是有界列. 根据定理2.166, 它有弱收敛子列, 不妨设为其自身, 且弱收敛到y_0. 由F是弱列闭的, 可知$y_0\in F$. 由于x_0-y_n弱收敛于x_0-y_0, 利用Hahn-Banach定理易证(见习题2.7.8): $\|x_0-y_0\|\le \liminf_n\|x_0-y_n\|=\mathrm{dist}(x_0,F)$. □

习题

2.7.1. 计算上确界$\sup\left\{|\int_{[0,1/2]}f\mathrm{d}m|: f\in L^3[0,1] \text{ 且 } \int_{[0,1]}|f|^3\mathrm{d}m\le 1\right\}$.

2.7.2. 计算上确界

$$\sup\left\{|f(0)-2f(1)|: f \text{ 是 } [0,1] \text{ 上的复值连续函数且 } \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|\le 1\right\}.$$

2.7.3. 定义$X=\{\{\xi_i\}_{i=1}^\infty\in l^\infty: \lim_i\xi_i=0\}$. 证明: *(i)* X是l^∞的闭子空间, *(ii)* 对任意$\varphi\in X'$, 存在$y=\{\eta_i\}_{i=1}^\infty\in l^1$ 使得

$$\varphi(\{\xi_i\})=\sum_{i=1}^\infty\xi_i\eta_i,\quad \forall\{\xi_i\}\in X,$$

而且$\|\varphi\|=\|y\|_1$.

2.7.4. 证明: 若Banach空间X是自反的, 则X可分当且仅当X'可分.

2.7.5. X赋范线性空间. 证明: $\dim X<\infty$ 当且仅当$\dim X'<\infty$, 且此时$\dim X=\dim X'$.

2.7.6. 设X是复线性空间, $f,f_1,f_2,\cdots$是X上的线性泛函, 且对任意$x\in X$, $|f(x)|^3\le\sum_{n=1}^\infty|f_n(x)|^3<\infty$. 证明: 存在复数$b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$, 使得$f(x)=\sum_{n=1}^\infty b_nf_n(x)$, $\forall x\in X$.

2.7.7. 设X是线性空间, $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$是X上的两个范数. 证明下述等价:

(a) X上凡按$\|\cdot\|_1$连续的线性泛函也按$\|\cdot\|_2$连续;

(b) $\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$.

(提示: 考虑从$(X,\|\cdot\|_1)$的对偶空间到$(X,\|\cdot\|_2)$的对偶空间的线性算子$f\mapsto f'$的有界性)

2.7.8. X赋范线性空间, 其中的序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$弱收敛到$x_0\in X$, 证明: $\|x_0\|\le\liminf_n\|x_n\|$.

2.7.9. 设F是自反Banach空间X中非空凸闭子集. 证明: 若E是X的非空紧子集, 则存在$x_0\in E, y_0\in F$使得$\|x_0-y_0\|=\inf\{\|x-y\|: x\in E, y\in F\}$.

2.7.10. 试在$L^p[0,1](1<p<\infty)$中构造一个弱收敛但不是范数收敛的序列.

2.7.11. 设X为一个自反的Banach空间, $f\in X'$. 证明: 存在单位向量$x_0\in X$, 使得$\|f\|=|f(x_0)|$.

2.8 Banach共轭算子

矩阵可以定义转置, 而且一个矩阵与其转置有着非常密切的联系. 本节将对有界线性算子定义"转置", 即Banach共轭算子.

Banach共轭算子

定义2.168. 设X, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 对$f \in Y'$, 因为

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{f} \mathbb{F}.$$

则$f \circ T \in X'$. 定义

$$\begin{aligned} T' : Y' &\longrightarrow X', \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

则$T' \in \mathcal{B}(Y', X')$, $\|T'f\| \leq \|f\|\|T\|$. 称T'为T 的Banach共轭算子.

下面我们通过考虑有限维的情形, 解释Banach共轭算子为何可看作转置概念的推广.

设A是$n \times n$阶矩阵, 以B表示其转置. 则A决定了$\mathbb{C}^n$到$\mathbb{C}^n$的有界线性算子, 即$x \mapsto Ax$. 仍记作A. 容易证明, $\forall y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, $\varphi_y(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 是$\mathbb{C}^n$ 上的有界线性泛函, 且$\mathbb{C}^n$ 上的有界线性泛函皆具有这一形式. 容易证明$A'(\varphi_y) = \varphi_{By}, \forall y \in \mathbb{C}^n$. 这意味着$A'$把$y$诱导的有界线性泛函恰映为$By$所对应的有界线性泛函. 若把$y$与其诱导的有界线性泛函视为一个, 则$A'$作用于$y$恰为其转置$B$作用于$y$. 这样$A'$与$A$的转置可视作一个.

下面的定理总结了Banach共轭算子的基本性质.

定理2.169. 设X, Y, Z为数域$\mathbb{F}$上的非零赋范线性空间. 那么下述成立:

(i) 对$A, B \in \mathcal{B}(X, Y), \alpha \in \mathbb{F}$, 有

$$\|A\| = \|A'\|, \quad (A+B)' = A' + B', \quad (\alpha A)' = \alpha A'.$$

(ii) 对$A \in \mathcal{B}(Y, Z), B \in \mathcal{B}(X, Y)$, 则

$$AB \in \mathcal{B}(X, Z), \quad B'A' \in \mathcal{B}(Z', X'), \quad (AB)' = B'A'.$$

(iii) $(I_X)' = I_{X'}$, 这里I_X是X上的单位算子, $I_{X'}$是X'上的单位算子.

(iv) 若$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ 有界可逆, 则$T' \in \mathcal{B}(Y',X')$ 有界可逆且$(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

(v) 若X, Y线性同胚, 则X', Y'线性同胚.

证明: (i) 我们只证明$\|A\| = \|A'\|$.

"$\|A\| \le \|A'\|$". 对任意单位向量x, 存在$f \in Y'$, $\|f\| = 1$, 使得$f(Ax) = \|Ax\|$. 那么

$$\|Ax\| = f(Ax) = (f \circ A)(x) = (A'f)(x) \le \|A'f\| \le \|A'\|.$$

由x的任意性知$\|A\| \le \|A'\|$.

"$\|A'\| \le \|A\|$". 对任意$\varepsilon > 0$, 存在$f \in Y'$, $\|f\| = 1$，使得$\|A'\| \le \|f \circ A\| + \varepsilon$. 于是存在单位向量$x \in X$使得$\|f \circ A\| \le \|f \circ A(x)\| + \varepsilon$. 于是

$$\|A'\| \le \|f \circ A\| + \varepsilon \le \|f \circ A(x)\| + 2\varepsilon \le \|A\| + 2\varepsilon.$$

由ε的任意性即知$\|A'\| \le \|A\|$.

(ii),(iii),(iv)的证明是直接的验证, 留作练习.

(v) 若X, Y线性同胚, 则存在有界可逆的$T \in \mathcal{B}(X,Y)$. 那么由(iv), $T' \in \mathcal{B}(Y',X')$且是有界可逆的. 因此$X', Y'$是线性同胚的. □

推论2.170. X是n维的复*(*实*)*赋范线性空间. 则X'线性同胚于$\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$.

关于有界线性算子T与T''的关系, 我们有下面的定理.

定理2.171. 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, 则T''是T的扩张, 即对任意$x \in X$,

$$T''[\tau_X(x)] = \tau_Y(Tx).$$

即图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ X'' & \xrightarrow{T''} & Y'' \end{array}$$

是交换的, 这里$\tau_X : X \to X''$, $\tau_Y : Y \to Y''$是典型映射.

证明: 对任意$y' \in Y'$,

$$T''[\tau_X(x)](y') = \tau_X(x)(T'y') = T'y'(x) = y'(Tx) = \tau_Y(Tx)(y'),$$

因此, $T''[\tau_X(x)] = \tau_Y(Tx), \forall x \in X$. □

命题2.172. 设X, Y是Banach空间, $T \in L(X, Y)$, 则T有界可逆当且仅当T' 是有界可逆的.

证明: 我们只证明充分性即可. 设T'有界可逆, 则T''有界可逆, 故T是下方有界的, 特别地, T是单射. 我们断言$\operatorname{ran} T = Y$. 否则, $M \doteq \operatorname{ran} T$是$Y$的真子空间, 故存在$0 \neq g \in Y'$, 使得$g(y) = 0, \forall y \in M$. 因此, $(T'g)(x) = g(Tx) = 0, \forall x \in X$. 故$T'g = 0$, 故由$T'$ 单射可知: $g = 0$, 矛盾! 因此, T是满射, 故由Banach逆算子定理可知: T是有界可逆的. $\square$

下面我们将建立有界线性算子与其Banach共轭算子之间的关系, 这需要"零化子"的概念.

零化子

定义2.173. X是赋范线性空间, $E \subset X$非空. 定义

$$E^0 = \{f \in X' : f|_E = 0\},$$

称之为E在X'中的<u>零化子</u> 或E的<u>上零化子</u>.

定义2.174. X是赋范线性空间, $F \subset X'$非空. 定义

$${}^0F = \Big\{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in F\Big\}.$$

称为F在X中的<u>零化子</u> 或F的<u>下零化子</u>.

命题2.175. 设X是赋范线性空间, $E \subset X$非空, $F \subset X'$非空. 证明*:*

(i) $E^0 = (\overline{E})^0$为X'的子空间, ${}^0F = {}^0(\overline{F})$为$X$的子空间.

(ii) $X^0 = \{0\}$.

(iii) $E^0 = X'$ 当且仅当$E = \{0\}$.

(iv) ${}^0(X') = \{0\}$.

(v) ${}^0F = X$ 当且仅当$F = \{0\}$.

证明: (ii), (iv), (v)的证明借助Hahn-Banach定理容易给出, 略去不写.

(i) 可直接证明

$$\begin{aligned} E^0 &= \{f \in X' : f|_E = 0\} \\ &= \{f \in X' : E \subset \ker f\} \\ &= \{f \in X' : \overline{E} \subset \ker f\} = (\overline{E})^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0F &= \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in F\} \\ &= \{x \in X : \tau_x(f) = 0, \forall f \in F\} \\ &= \{x \in X : F \subset \ker \tau_x\} \\ &= \{x \in X : \overline{F} \subset \ker \tau_x\} =^0 \overline{F}. \end{aligned}$$

另外, 易见

$$E^0 = \bigcap_{x \in E} \ker(\tau_x) =^0 \tau(E), \quad {}^0F = \bigcap_{f \in F} \ker(f).$$

因此, E^0和${}^0F$分别是X'和X的闭子空间.

(iii) 易见

$$E^0 = X' \Leftrightarrow X' \subset E^0 \Leftrightarrow X' \subset \bigcap_{x \in E} \ker \tau_x \Leftrightarrow \tau_x = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow E = \{0\}.$$

□

引理2.176. 设X是赋范线性空间, $\tau : X \to X''$是典型映射, $M \subset X$是闭子空间, $G \subset X'$是闭子空间. 那么

(i) ${}^0(M^0) = M$*;*

(ii) $G \subset ({}^0G)^0$*;*

(iii) 若X自反, 则$G = ({}^0G)^0$.

证明: (i) 任取$x \in X$. 注意到$x \notin M$ 当且仅当存在$f \in X'$使得$f|_M = 0$, $f(x) \neq 0$. 因此$x \in M$ 当且仅当“$f \in M^0$”蕴含“$f(x) = 0$”. 于是, $x \in M$ 当且仅当$x \in^0 (M^0)$. 即看出结论成立.

(ii) 易证, 留作练习.

(iii) 因X自反, 则$\tau(X)=X''$. 由(i),

$$\begin{aligned}G &={}^0(G^0)={}^0\{F\in X'':F|_G=0\}\\&={}^0\{\tau_x:x\in X,\tau_x|_G=0\}\\&={}^0\{\tau_x:x\in X,f(x)=0,\forall f\in G\}\\&={}^0\{\tau_x:x\in{}^0G\}\\&=\{f\in X':\tau_x(f)=0,\forall x\in{}^0G\}\\&=\{f\in X':f(x)=0,\forall x\in{}^0G\}=({}^0G)^0.\end{aligned}$$

□

定理2.177. X是Banach空间, $A\in\mathcal{B}(X)$. 那么

(i) $\ker A'=(\operatorname{ran}A)^0$,

(ii) $\ker A={}^0(\operatorname{ran}A')$

(iii) $\overline{\operatorname{ran}A}={}^0(\ker A')$,

(iv) $\overline{\operatorname{ran}A'}\subset(\ker A)^0$,

(v) X自反时, *(iv)*中的“$\subset$”可替换为“$=$”.

证明: (i) 对于$f\in X'$,

$$A'f=0\Longleftrightarrow f\circ A=0\Longleftrightarrow f|_{\text{ran}(A)}=0\Longleftrightarrow f\in\text{ran}(A)^0.$$

(ii) 对于$x\in X$,

$$Ax=0\Longleftrightarrow f(Ax)=0,\forall f\in X'\Longleftrightarrow(f\circ A)x=0,\forall f\in X'\Longleftrightarrow x\in{}^0\text{ran}(A').$$

(iii) 由引理2.176 (i), ${}^0(\ker A')={}^0\left((\operatorname{ran}A)^0\right)={}^0\left((\overline{\operatorname{ran}A})^0\right)=\overline{\operatorname{ran}A}$.

(iv) 只需证明$\text{ran}(A')\subset\ker(A)^0$. 对任意$f\in X'$, $A'f|_{\ker(A)}=f\circ A|_{\ker(A)}=0$.

(v) 因X自反, 由引理2.176 (iii), $(\ker A)^0={}^0(\operatorname{ran}A')^0={}^0(\overline{\operatorname{ran}A'})^0=\overline{\operatorname{ran}A'}$. □

推论2.178. 设X是Banach空间, $A\in\mathcal{B}(X)$. 那么

(i) A具有稠值域当且仅当A'是单射的,

(ii) 若A'具有稠值域, 则A是单射.

(iii) 若X自反, 则A'具有稠值域当且仅当A是单射.

闭值域定理

下面的定理说明了一个有界线性算子具有闭的值域十分重要.

定理2.179 (闭值域定理)**.** *设X是Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$. 那么下述等价:*

(i) $\mathrm{ran}(A)$是闭的*;*

(ii) $\mathrm{ran}(A) =^0 (\mathrm{ker} A')$*;*

(iii) $\mathrm{ran}(A')$是闭的*;*

(iv) $\mathrm{ran}(A') = (\mathrm{ker} A)^0$.

为证明定理2.179, 我们做些准备.

引理2.180. 设$(X, \mathbb{F}), (Y, \mathbb{F})$是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 定义

$$\begin{aligned} \widehat{T} : X/\ker T &\longrightarrow Y, \\ x + \ker T &\longmapsto Tx. \end{aligned}$$

那么$\widehat{T} \in \mathcal{B}(X/\ker T, Y)$是单射且$\mathrm{ran}\, T = \mathrm{ran}\, \widehat{T}$.

推论2.181. 设X是Banach空间, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 则T是开映射当且仅当T是满射且Y是Banach空间.

证明*:* 充分性可由开映射定理看出.

只需证明必要性. T是开映射蕴含着T是满射，而且$\widehat{T} : X/\ker T \to Y$是线性同胚. 则$Y$与$X/\ker A$同构，因此$Y$是完备的，进而是Banach闭子空间. $\square$

证明(定理2.179)*:* (i)$\Longrightarrow$(ii) 可由定理2.177看出.

“(ii)$\Longrightarrow$(iv)”. 只需证明$(\mathrm{ker} A)^0 \subset \mathrm{ran}(A')$. 任取$f \in (\ker A)^0$, 往证存在$h \in X'$使得$h \circ A = f$. 由Hahn-Banach定理, 显然只需证明存在$g \in (\mathrm{ran}\, A)'$使得$g \circ A = f$.

以$\pi : X \to X/\ker A$表示商映射$x \mapsto x + \ker A$, $\widehat{f} : X/\ker A \to \mathbb{F}$表示映射$x + \ker A \mapsto f(x)$, $\widehat{A} : X/\ker A \to X$ 表示映射$x + \ker A \mapsto Ax$. 显然, $f = \widehat{f} \circ \pi, A = \widehat{A} \circ \pi$. 由于$\widehat{A}$是单射, $\mathrm{ran}\, A = \mathrm{ran}\, \widehat{A}$闭的, 则存在有界可逆的$B \in \mathcal{B}(\mathrm{ran}\, A, X/\ker A)$ 使得$B\widehat{A} = I_{X/\ker A}$. 那么

$$f = \widehat{f} \circ \pi = \widehat{f} \circ B \circ \widehat{A} \circ \pi = (\widehat{f} \circ B) \circ A.$$

显然$g \doteq \widehat{f} \circ B \in (\operatorname{ran} A)'$即为所求.

(iv)$\Longrightarrow$(iii) 是明显的.

"(iii)$\Longrightarrow$(i)". 定义$T: X \to Z \doteq \overline{\operatorname{ran} A}$作$x \longmapsto Ax$. 那么$\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} T$. 因此只需证明$T$是闭值域的. 不难证明$\operatorname{ran} T' = \operatorname{ran} A'$, 则它是闭的; 而且由于$T$ 稠值域可推知T'是单射. 进而T'下方有界, 于是存在$\delta > 0$ 使得

$$\delta\|f\| \le \|f \circ T\|, \quad \forall f \in Z'. \tag{7}$$

下面我们将证明T是满射, 只需证明T是开映射. 根据引理2.133, 只需证明：存在$\varepsilon > 0$使得$B(0_Z, \varepsilon) \subset \overline{T(B(0_X, 1))}$.

反证法. 若不然, 则

$$B(0_Z, 1/n) \not\subseteq \overline{T(B(0_X, 1))}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

因此可取$y_n \in B(0_Z, 1/n) \setminus \overline{T(B(0_X, 1))}, \forall n$. 因为$\overline{T(B(0_X, 1))}$凸闭、平衡集，根据推论2.127, 存在$f_n \in Z'$ 使得$\|f_n\| = 1$,

$$\sup_{y \in \overline{T(B(0_X,1))}} |f_n(y)| < |f_n(y_n)|, \quad \forall n.$$

结合(7), 我们有

$$\delta = \delta\|f_n\| \le \|f_n \circ T\| = \sup_{y \in \overline{T(B(0_X,1))}} |f_n(y)| < \|y_n\| \to 0,$$

矛盾. $\square$

下面的推论是闭值域定理的直接推论.

推论2.182. X是Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$具有闭的值域. 那么

(i) A是满射当且仅当A'是单射;

(ii) A'是满射当且仅当A是单射.

推论2.183. X是Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$. 证明:

(a) A下方有界当且仅当A'是满射;

(b) A'下方有界当且仅当A是满射.

推论2.184. 若X是Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$, 则下述等价:

(i) A是有界可逆的.

(ii) A'是有界可逆的.

(iii) A和A'均是下方有界的.

根据Hahn-Banach扩张定理, Banach空间X的闭子空间M的有界线性泛函可以保范延拓到整个空间X上. 反过来, X上的有界线性泛函限制在M上仍然是有界的. 由此产生一个很自然的问题: M'与X'的关系是怎样的? 本节的最后, 我们利用零化子刻画闭子空间与商空间的对偶空间.

对偶定理

定理2.185. 设$(X, \mathbb{F})$是Banach空间, M为X的闭子空间. 那么

(i) M'与X'/M^0等距同构;

(ii) $(X/M)'$与M^0等距同构.

证明: (i) 定义

$$\begin{aligned} \Phi : X'/M^0 &\longrightarrow M' \\ f + M^0 &\longmapsto f|_M. \end{aligned}$$

只需验证Φ定义合理、线性、双射且保持范数.

(ii) 定义

$$\begin{aligned} \Psi : M^0 &\longrightarrow (X/M)' \\ f &\longmapsto \dot{f}, \end{aligned}$$

其中$\dot{f}(x+M) = f(x), \forall x \in X$. 只需验证$\Psi$定义合理、线性、双射且保持范数. □

习题

2.8.1. 设X是赋范线性空间, $E \subset X$, $F \subset X'$. 证明:

(a) 若E是n元线性无关集, 则E^0余维为n.

(b) 若F是n元线性无关集, 则${}^0F$余维为n.

2.8.2. 证明: Banach空间X是自反的当且仅当X'是自反的.

2.8.3. X, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 证明: 若$\dim \mathrm{ran}(T) < \infty$, 则$\dim \mathrm{ran}(T') = \dim \mathrm{ran}(T)$.

2.8.4. X, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$是保范双射. 证明: $T' : Y' \to X'$是保范、线性双射.

2.8.5. 设$a, b \in \mathbb{R}, a < b$. 证明: $L^\infty[a, b]$, l^∞不自反.

2.8.6. 设X是自反Banach空间, M是X的闭子空间. 证明: X/M为自反空间.

2.8.7. 设X, Y是Banach空间, $T : X \to Y$是线性算子. 对任意$g \in Y'$, $g(Tx)$ 是X上的有界线性泛函. 证明：T是连续的.

2.8.8. X, Y是赋范线性空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 证明: 若$\{x_n\} \subset X, x_n \xrightarrow{w} x_0 \in X$, 则$Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$.

2.8.9. $A \in \mathcal{B}(l^1)$ 定义作$A : \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \longmapsto \{\frac{\xi_n}{n}\}_{n=1}^\infty$. 证明: $\overline{\mathrm{ran}\, A'} \subsetneq (\ker A)^0$.

2.8.10. X是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$具有闭的值域. 证明: 若M是X闭子空间且$\ker(T) \subset M$, 则$T(M)$是X的闭子空间.

2.8.11. X是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$的核空间是有限维的且具有闭的值域. 证明: T映X的闭子空间为闭子空间.

第 3 章 Hilbert空间

在我们熟悉的三维空间, 向量之间可以定义角度. 这一性质可推广至一般的欧氏空间$\mathbb{R}^n$, 使其表现出很好的几何性质. 本节我们将要介绍与欧氏空间非常接近的一类Banach空间, 即Hilbert空间.

3.1 内积空间

定义3.1. X是数域$\mathbb{C}$上的一个线性空间. 若$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$X$上的一个二元复值函数, 且满足

(i) $\forall x\in X$, 成立$\langle x,x\rangle\geq 0$, 而且$\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当$x=0$,

(ii) $\forall x,y,z\in X,\alpha\in\mathbb{C}$, 成立$\langle\alpha x+y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$,

(iii) $\forall x,y\in X$, 成立$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$,

则称$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$X$上的一个<u>内积</u>, 称$X$在$\langle\cdot,\cdot\rangle$下是一个<u>内积空间</u>, 称$\langle x,y\rangle$为$x,y$ 的内积. $\langle x,y\rangle=0$时称x,y<u>正交</u>, 记作$x\perp y$.

类似地, 可定义实内积空间. 本书里我们只讨论复内积空间.

注3.2. $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间, 那么

(i) $\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$.

(ii) $x\perp y$蕴含着$\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle$, 且$\mathbb{C}x$与$\mathbb{C}y$ 中的向量均正交.

(iii) $\langle x,y\rangle$是X上关于x的线性泛函. 另注意到, $\forall x,y,z\in X,\alpha\in\mathbb{C}$, 有

$$\langle z,\alpha x+y\rangle=\overline{\alpha}\langle z,x\rangle+\langle z,y\rangle.$$

这表明$\langle x,y\rangle$ 是X 上关于y的共轭线性泛函.

(iv) “$y\perp x,\forall x\in X$” $\Longleftrightarrow y=0$.

(v) “$\langle x,z\rangle=\langle y,z\rangle,\forall z\in X$” $\Longleftrightarrow x=y$.

下面介绍一些具体的内积空间的例子.

例3.3. 对$x=(x_i)_{i=1}^n, y=(y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, 定义

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}.$$

可以验证, $\langle\cdot,\cdot\rangle$是$\mathbb{C}^n$上的一个内积且$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}, \forall x\in\mathbb{C}^n$.

例3.4. 对$x=(x_i)_{i=1}^\infty, y=(y_i)_{i=1}^\infty \in l^2$, 定义

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i}.$$

可以验证, $\langle\cdot,\cdot\rangle$是$l^2$上的一个内积且$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}, \forall x\in l^2$.

例3.5. 对$f,g\in L^2[a,b]$, 定义

$$\langle f,g\rangle = \int_{[a,b]} f\overline{g}\mathrm{d}m.$$

可以验证$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$L^2[a,b]$上的一个内积, 且$\|f\| = \langle f,f\rangle^{1/2}, \forall f\in L^2[a,b]$.

上述三例表明, $\mathbb{C}^n, l^2, L^2[a,b]$是内积空间, 而且其上的范数均可由内积诱导. 自然要问, 是否每个内积空间上的内积是否都可诱导出其上的一个范数?答案是肯定的.

定理3.6. 设$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是内积空间. 对每个$x\in X$, 定义$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$. 那么下述成立.

(i) (Schwartz不等式) $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|, \forall x,y\in X$.

(ii) $\|\cdot\|$是范数, $(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间.

(iii) $x\perp y$蕴含着$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$.

(iv) "$\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X$是收敛列"蕴含着$\lim_n\langle x_n,y_n\rangle = \langle \lim_n x_n, \lim_n y_n\rangle$.

证明: (i) 若$y=0$, 则$\langle x,y\rangle = \langle x,y+y\rangle = \langle x,y\rangle+\langle x,y\rangle$, 即有$\langle x,y\rangle=0$. 所欲证不等式成立.

若$y\neq 0$, 则$\|y\| = \langle y,y\rangle^{1/2}\neq 0$. 欲证的不等式等价于

$$|\langle x,\frac{y}{\|y\|}\rangle| \le \|x\|.$$

记$z=\frac{y}{\|y\|}$. 易见$\langle z,z\rangle = 1 = \|z\|$.

记$w = x - \langle x, z\rangle z$. 那么$x = w + \langle x, z\rangle z$. 注意到$\langle w, z\rangle = 0$, 即$w \perp z$. 可知$w \perp \langle x, z\rangle z$. 进一步地,

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle w, w\rangle + \langle\langle x, z\rangle z, \langle x, z\rangle z\rangle \geq \langle\langle x, z\rangle z, \langle x, z\rangle z\rangle = |\langle x, z\rangle|^2,$$

即得所欲证者.

(ii) 易证$\|\cdot\|$满足正定性、正齐次性. 余下我们只证$\|\cdot\|$满足三角不等式. 对于$x, y \in X$, 有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

则证得.

(iii)和(iv) 易证, 留作练习. □

注3.7. *1.* 内积空间是赋范线性空间, 其中的收敛、范数都是由内积诱导的.

2. 习惯上称上述定理中的*(iii)*为内积空间中的“勾股定理”.

一个自然的问题, 范数是否均可由内积诱导？答案是否定的. 内积空间中的范数必须满足下面的“平行四边形法则”.

定理3.8 (平行四边形法则)**.** 若$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$是内积空间, 则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X.$$

证明: 利用内积和范数的关系, 易见所欲证者成立. □

由上可见, 赋范线性空间中的范数$\|\cdot\|$满足平行四边形法则是它可由某内积诱导的一个必要条件. 这一条件事实上还是充分的.

定理3.9 (*)**.** 若$(X, \|\cdot\|)$是赋范线性空间, 则$\|\cdot\|$可由内积诱导当且仅当它满足平行四边形法则.

上述定理的证明可参考[7]. 这里我们仍关心这样一个自然的问题: 内积空间中的内积可否由范数表示？下面的定理给出了圆满的回答, 同时表明: 在内积空间中, 知道了每一向量的范数等价于知道了任意两个向量的内积.

定理3.10 (极化恒等式)**.** 若X是内积空间, 则对任意$x, y \in X$, 成立

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big] + \frac{\mathrm{i}}{4}\big[\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \|x-\mathrm{i}y\|^2\big].$$

证明: 利用内积和范数的关系, 易见所欲证等式成立. □

例3.11. $C[a,b](a<b), l^p(p\neq 2), L^p[a,b](p\neq 2)$ 均不是内积空间, 即它们的范数不可由内积诱导.

定义3.12. 称完备的内积空间为Hilbert空间.

根据前述,$\mathbb{C}^n, l^2.L^2[a,b]$都是Hilbert空间. 此后, 如无特别声明, 总以H表示一个复Hilbert空间.

更多例子

例3.13 (Bergman空间)**.** 令$A^2(\mathbb{D}) = \{f : f$在$\mathbb{D}$内解析, 且$\int\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty\}$, 这里$z = x + \mathrm{i}y$. 在$A^2(\mathbb{D})$中引入内积

$$\langle f, g\rangle = \int\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad f, g \in A^2(\mathbb{D}).$$

容易证明$A^2(\mathbb{D})$是一个内积空间, 且为Hilbert空间$L^2(\mathbb{D})$的线性子空间. 由于$L^2(\mathbb{D})$是完备的, 为了证明$A^2(\mathbb{D})$是完备的, 只需证明其是闭的即可.

设$f_n \in A^2(\mathbb{D})$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \in L^2(\mathbb{D})$, 只需证$f$是解析的即可. 设$R \in (0,1)$, 令$\rho = \frac{1-R}{2}$, 则对任意$z_0 \in \overline{B(0,R)}$, 由于$f_n(z) - f_m(z)$在$D \doteq \overline{B(z_0,\rho)}$ 上解析, 故其Taylor 展开式绝对一致收敛. 令

$$f_n(z) - f_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j.$$

从而利用复数的指数形式$z - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 可得:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_2^2 &\geq \int\int_{\mathbb{D}} |f_m(z) - f_n(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\rho}\Big[\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j r^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\overline{c_k} r^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\Big)\mathrm{d}\theta\Big] r\mathrm{d}r \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} 2\pi\int_0^{\rho} |c_j|^2 r^{2j+1}\mathrm{d}r = 2\pi\sum_{j=0}^{\infty}|c_j|^2\frac{\rho^{2j+2}}{2j+2} \\
&\geq \pi\rho^2|c_0|^2 = \pi\rho^2|f_n(z_0) - f_m(z_0)|^2.
\end{aligned}$$

从而, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\overline{B(0,R)}$上一致收敛于f. 故由R的任意性，可知f在$\mathbb{D}$内解析.

例3.14 ([8, p.115,1.2])**.** 设Ω是$\mathbb{R}^2$中的开集, 令$C_0^1(\Omega)=\{f: f$在Ω内有1阶连续的偏导数, 且supp$(f)\subset\Omega$是紧的$\}$, 这里supp$(f)=\overline{\{z\in\Omega: f(z)\neq 0\}}$. 定义内积

$$\langle f,g\rangle_1=\int_\Omega[f(x,y)\overline{g(x,y)}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\overline{\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\overline{\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$C_0^1(\Omega)$ 按此内积形成的内积空间记为$\hat{H}_0^1(\Omega)$.

以$H_0^1(\Omega)$表示$\hat{H}_0^1(\Omega)$在此内积诱导的范数的完备化, 则$H_0^1(\Omega)$是Hilbert空间.此空间在偏微分方程中有着重要的应用.

习题

3.1.1. 设X是内积空间, $x,y\in X$是非零元.

(a) $x\perp y$.

(b) $\|x+\alpha y\|\geq\|x\|,\forall\alpha\in\mathbb{C}$.

(c) $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|,\forall\alpha\in\mathbb{C}$.

(d) x,y线性无关.

证明: *(a)*$\Longleftrightarrow$*(b)*$\Longleftrightarrow$*(c)* $\Longrightarrow$*(d)*.

3.1.2. 设X是内积空间, $x\in X$是非零元. 证明:

$$\|x\|=\sup_{y\in X,\|y\|=1}|\langle x,y\rangle|.$$

3.1.3. 设H是Hilbert空间, $T\in\mathcal{B}(H)$. 证明：

$$\|T\|=\sup_{x,y\in H,\|x\|=\|y\|=1}|\langle Tx,y\rangle|.$$

3.1.4. 证明: 若E是内积空间X的一个稠密子集, 则不存在非零的向量与E中每一个向量都正交.

3.1.5. 证明: $l^p(1\leq p\leq\infty,p\neq 2)$不是Hilbert空间.

3.1.6. 证明: $L^p[a,b](1\leq p\leq\infty,p\neq 2)$不是Hilbert空间.

3.1.7. 证明: $C[a,b](a<b,1\leq p\leq\infty,p\neq 2)$不是Hilbert空间.

3.2 正规正交基

$\mathbb{R}^3$中的直角坐标系为人们提供了很大的方便. 本节将要介绍的正规正交基是直角坐标系在Hilbert空间中的对应物. 我们从正规正交集谈起.

本节中我们总以H表示一个复Hilbert空间.

定义3.15. 称H的非空子集E 是一个正规正交集 *(*orthonormal subset, 简记为ONS*)*, 若E 中的向量都是单位长度且不同的向量皆正交, 即$x, y \in E$时, 成立

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

注3.16. *1.* 由单位向量做成的单元集都是ONS.

2. ONS中不同元素之间的距离为$\sqrt{2}$.

3. 若Hilbert空间H是可分的, 则它的每个正规正交集都是至多可数的.

定义3.17. S是H的非空子集.

1. 若x与S中任一向量都正交, 则记为$x \perp S$.

2. 定义$S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$, 称之为$S$的正交补.

3. 若S是H的一个ONS且$S^\perp = \{0\}$, 则称S是H的一个正规正交基 *(*orthonormal basis, 简记为ONB*)*.

注3.18. *1.* 设S是Hilbert空间H的非空子集. 那么易证$S^\perp = (\vee S)^\perp$. 这里$\vee S$表示S的闭线性张开, 即$\vee S = \overline{\operatorname{span} S}$.

2. 若S是H的ONS且$\vee S = H$, 则S是H的一个ONB.

3. 易见, Hilbert空间的ONB恰为"极大"的ONS.

与Hamel基存在性的证明类似, 可利用Zorn引理证得下面的结论.

定理3.19. Hilbert空间的ONS均可扩充为它的一个ONB, 进而非零Hilbert空间一定存在ONB.

下面我们介绍几个将要用的基本结果.

引理3.20. 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是H的一个正规正交集.

(i) 若$n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, 则$\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$.

(ii) 若$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in (s)$, 则$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$收敛当且仅当$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$; 此时$\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$.

(iii) 若$x \in H, n \in \mathbb{N}$, 则$\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$与$x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ 正交, 进而

$$\| \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

(iv) 若$x \in H$, 则$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$收敛, 其极限$y$满足$y \perp (x-y)$, 进而

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

证明: (i) 直接验证即可.

(ii) 只需证明结论的前半部分. 对$n \geq 1$, 记$x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. 则$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$收敛当且仅当$\{x_n\}_{n\geq 1}$是Cauchy列. 注意到, $n < m$ 时,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\alpha_i|^2.$$

因此, $\{x_n\}_{n\geq 1}$是Cauchy列当且仅当$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$收敛, 即$\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$.

(iii)-(iv) 记$y_n = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$. 可直接验证$y_n \perp x - y_n$. 那么,

$$\|x\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 \geq \|y_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

由n的任意性, 可知$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \infty$. 根据(ii), $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$收敛, 即$\{y_n\}$收敛, 将其极限记为$y$. 那么$0 = \lim_n \langle y_n, x - y_n\rangle = \langle y, x-y\rangle$, 进而

$$\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

□

由上述引理中的(i), 可见下面的推论.

推论3.21. H的正规正交集是线性无关集合.

正规正交基类似于$\mathbb{R}^3$中的直角坐标系, 它可以方便地表示空间中的向量.

定理3.22. 设$S=\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是$H$的一个ONB. 若$x\in H, x\neq 0$, 则

(i) $\Lambda_1\doteq\{\alpha\in\Lambda:\langle x,e_\alpha\rangle\neq 0\}$非空且至多可数, 记为$\Lambda_1=\{\alpha_i:1\le i<m\}$, 其中$m\in\mathbb{N}$或$m=\infty$.

(ii) $\sum_{1\le i<m}\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$收敛, 且$x=\sum_{1\le i<m}\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$, $\|x\|^2=\sum_{1\le i<m}|\langle x,e_{\alpha_i}\rangle|^2$.

证明: (i) 若$\Lambda_1=\emptyset$, 则$0\neq x\in S^\perp=\{0\}$, 矛盾. 若Λ_1是不可数集合, 则存在$n\in\mathbb{N}$使得

$$\Lambda_0\doteq\{\alpha\in\Lambda:|\langle x,e_\alpha\rangle|\ge 1/n\}$$

为无穷集合; 据此可取Λ_0 的一个可数无穷子集$\{\beta_i:i=1,2,3,\cdots\}$. 那么根据引理3.20,

$$\|x\|^2\ge\sum_{i\ge 1}|\langle x,e_{\beta_i}\rangle|^2\ge\sum_{i\ge 1}1/n^2=\infty,$$

矛盾.

(ii) 根据引理3.20, 级数$\sum_{1\le i<m}\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$是收敛的. 只需证明

$$y\doteq x-\sum_{1\le i<m}\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}=0.$$

因为$\{e_\alpha\}$是ONB, 只需证明$\langle y,e_\alpha\rangle=0,\forall\alpha\in\Lambda$.

若$\alpha\in\Lambda_1$, 则恰为某α_{i_0}, 于是

$$\begin{aligned}\langle y,e_{\alpha_{i_0}}\rangle&=\langle x,e_{\alpha_{i_0}}\rangle-\langle\sum_{1\le i<m}\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i},e_{\alpha_{i_0}}\rangle\\&=\langle x,e_{\alpha_{i_0}}\rangle-\sum_{1\le i<m}\langle\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i},e_{\alpha_{i_0}}\rangle\\&=\langle x,e_{\alpha_{i_0}}\rangle-\langle x,e_{\alpha_{i_0}}\rangle=0.\end{aligned}$$

若$\alpha\notin\Lambda_1$, 则$\langle x,e_\alpha\rangle=0=\langle e_{\alpha_i},e_\alpha\rangle$. 进而, $\langle y,e_\alpha\rangle=0$. 证完. □

注3.23. *(i)* 级数$\sum_{1\le i<m}\langle x,e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$无条件收敛.

(ii) 上述定理*(ii)*中的式子可写成$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$,而且

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2. \qquad \text{(Parseval公式)}$$

特别地, $x=0$时也成立.

(iii) $\{e_\alpha\}$可视作H的一个坐标系, $\{\langle x, e_\alpha\rangle\}$ 可视作x关于$\{e_\alpha\}$的坐标.

推论3.24. 若H非零是可分的, 则可取其一个正规正交基$\{e_i\}_{1\le i<m}$, 其中$m<\infty$ 或$m=\infty$, 并且对任意$x\in H, x=\sum_{1\le i<m}\langle x, e_i\rangle e_i$, $\|x\|^2=\sum_{1\le i<m}|\langle x, e_i\rangle|^2$.

推论3.25. 若S是H的ONS, 则S是H的ONB当且仅当$H=\vee S$.

推论3.26. 设$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是$H$的ONS. 那么对每个$x\in H$, 成立

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2\le\|x\|^2. \qquad \text{(Bessel不等式)}$$

例3.27. l^2的一个典型的正规正交基$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, e_n为只在第n个位置取*1*其它位置为*0*的数列, $n\in\mathbb{N}$.

例3.28 ([1, p141-148])**.** $L^2[0,2\pi]$的常用的正规正交基为三角系统$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$; $L^2[0,1]$的常用的正规正交基为Haar基和Walsh基. 这两组基在Banach空间理论和数值逼近、小波分析中有重要的应用.

定理3.29. 设H是非零、可分的Hilbert空间.

(i) 若$\dim H=n<\infty$, 则H 与$\mathbb{C}^n$等距同构.

(ii) 若$\dim H=\infty$, 则H 与l^2等距同构.

证明: 假设$\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是$H$的一个ONB.

若$\dim H=n<\infty$, 则card$\Lambda=n$. 不妨设$\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=\{e_i:1\le i\le n\}$. 对于$x\in H$, 定义$U:x\mapsto\{\langle x, e_i\rangle\}_{i=1}^n$.

若$\dim H=\infty$, 则H的ONB都是可数无穷集. 不妨设$\{e_\alpha:\alpha\in\Lambda\}=\{e_i:i=1,2,3,\cdots\}$. 对于$x\in H$, 定义$U:x\mapsto\{\langle x, e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$.

根据定理3.22, 易见U是有界线性算子, 且它有界可逆、保持范数, 因此是一个等距同构映射. □

与Hamel基类似, 非零Hilbert空间H的任意两个ONB的基数皆相同.

定理3.30 (*)**.** Hilbert空间的任意两个ONB都具有相同的基数.

利用上述结论不难证明下面的结果.

定理3.31 (*)**.** 两个非零Hilbert空间等距同构当且仅当它们的ONB具有相同的基数.

习题

3.2.1. 设M, N是Hilbert空间H的子集且$M \subset N^{\perp}$. 证明: $M + N$是闭集当且仅当M, N 均为闭集.

3.2.2. 设S是H的一个ONB. 证明: S是H的Hamel基当且仅当S是有限集合.

3.2.3. 证明: 若$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$, 则$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是$H$ 的ONB当且仅当对任意$x \in H$, 成立$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

3.2.4. 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为H的一个ONB. 证明: 对任意$x, y \in H$, 有

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle,$$

且右端级数绝对收敛.

3.2.5. 证明: 若S是H的ONS, 则$\vee S$是Hilbert空间且S是$\vee S$的一个ONB.

3.2.6. 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为$H$ 的两个ONS. 证明: 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1,$$

则$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是ONB当且仅当$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是ONB. 思考: 如果前述的条件减弱为$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty$, 那么结论是否依然成立?

3.3 射影定理、Fréchet-Riesz表现定理

本节课我们将介绍Hilbert空间理论中一个重要的定理—射影定理. 这个定理是Hilbert空间以及相关的算子理论、算子代数研究中非常有用的工具. 我们先回顾正交补的概念.

对Hilbert空间H的非空子集E, 我们定义它的正交补

$$E^{\perp} = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in E\}.$$

利用内积的性质, 容易证明$E^{\perp}$是H的闭子空间, 即E封闭于加法、数乘, 而且是H的闭子集.

本节的第一个主要结果是下面的射影定理.

定理3.32 (射影定理)**.** 若M是H的闭子空间, 则$M, M^{\perp}$互为代数补, 即$M \cap M^{\perp} = \{0\}$, $M + M^{\perp} = H$.

注3.33. 对于给定的Hilbert空间H及其闭子空间M, 上述定理表明, 对任意$x \in H$, 存在唯一的$y \in M$和唯一的$z \in M^{\perp}$, 使得$x = y + z$. 称y为x在M上的投影或分量. 定义$P : x \longmapsto y$. 那么$P \in \mathcal{B}(H)$且$P^2 = P$, 称P为H上到M 的正交射影算子.

为证明射影定理, 我们需做点准备.

命题3.34. 设M是Hilbert空间H的闭子空间. 那么

(i) $M^{\perp}$是H闭子空间且$M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

(ii) $M^{\perp} = \{0\}$ 当且仅当$M = H$.

(iii) $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

证明: (i) 显然.

(ii) 充分性显然. 只证必要性. 假设$M^{\perp} = \{0\}$. 显然只需考虑$M \neq \{0\}$的情况. 任取M的一个ONB, 记作S. 那么$\vee S = M$, 进而$S^{\perp} = (\operatorname{span} S)^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} S})^{\perp} = M^{\perp} = \{0\}$. 这说明$S$是$H$的ONB. 则$H = \vee S = M$.

(iii) "$\supset$"显然成立. 若等式不成立, 则M为$(M^{\perp})^{\perp}$的真闭子空间. 由(ii)可取单位向量$x \in (M^{\perp})^{\perp}$, 使得$x \perp M$, 即有$x \in M^{\perp} \cap (M^{\perp})^{\perp} = \{0\}$, 矛盾. □

下面我们证明射影定理.

证明(定理3.32): 只需证明$M + M^{\perp} = H$. 根据命题3.34 (ii), 只需证明$M + M^{\perp}$是H的闭子空间且$(M + M^{\perp})^{\perp} = \{0\}$.

由于M,$M^{\perp}$是H的闭子空间且正交, 由习题3.2.1可见$M + M^{\perp}$是H的闭子空间.

往证$(M + M^{\perp})^{\perp} = \{0\}$. 任取$x \in (M + M^{\perp})^{\perp}$. 那么$x \perp M, x \perp (M^{\perp})$; 进而$x \in M^{\perp} \cap M$, $x = 0$. □

推论3.35. 若f是Hilbert空间H上的一个非零的有界线性泛函, 则$\dim(\ker f)^{\perp} = 1$.

证明: 根据射影定理, $(\ker f)^{\perp}$恰为$\ker f$的一个代数补. 记$f_0 = f|_{(\ker f)^{\perp}}$. 则$f_0 : (\ker f)^{\perp} \to \mathbb{C}$是单射. 又显然有$\operatorname{ran}(f_0) = \operatorname{ran}(f) = \mathbb{C}$, 即$f_0$是满射. 则$\mathbb{C}$与$(\ker f)^{\perp}$是线性同构的, 因此$\dim(\ker f)^{\perp} = 1$. □

利用ONB可以方便地表示出Hilbert空间中一个向量在一个闭子空间上的分量.

推论3.36. 设M是Hilbert空间H的闭子空间, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为$M$的一个ONB. 那么, x在M上的分量为$\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$, x在$M^\perp$上的分量为$x-\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$.

证明: 假设$x=y+z$, 其中$y\in M, z\in M^\perp$. 那么$y=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle y,e_\alpha\rangle e_\alpha$收敛. 由于$z\perp e_\alpha, \forall\alpha\in\Lambda$, 则

$$y=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle y+z,e_\alpha\rangle e_\alpha=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha.$$

□

引理3.37. 设M是H闭子空间, $x\in H\setminus M$. 则存在单位向量e使得

$$e\perp M,\quad \operatorname{span}\big(M\cup\{x\}\big)=\operatorname{span}\big(M\cup\{e\}\big).$$

证明: 由$H=M\oplus M^\perp$, $x=y+z$, 其中$y\in M, z\in M^\perp$. 则$x\in\operatorname{span}\{z\}\cup M$, 进而$\operatorname{span}\{x\}\cup M\subset\operatorname{span}\{z\}\cup M$.

同样地, $z\in\operatorname{span}\{x\}\cup M$, 进而$\operatorname{span}\{z\}\cup M\subset\operatorname{span}\{x\}\cup M$. 所以$\operatorname{span}\{x\}\cup M=\operatorname{span}\{z\}\cup M$. 令$e=z/\|z\|$即满足题意. 由上述证明可见, e 恰为x在$M^\perp$上的分量的单位化. □

命题3.38 (Schmidt正交化方法)**.** $\{x_i:n\geq i\geq 1\}$是内积空间X的一个线性无关子集, 那么存在ONS $\{e_i:n\geq i\geq 1\}$使得$\operatorname{span}\{x_i:1\leq i\leq k\}=\operatorname{span}\{e_i:1\leq i\leq k\}, \forall 1\leq k\leq n$.

证明: 令$M_0=\{0\}, M_i=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_i\}, i=1,2,\cdots,n$. 若对每个$i=1,2,\cdots,n$, 令$e_i$为$x_i$在$M_{i-1}^\perp$上的分量的单位化, 则$\{e_1,\cdots,e_n\}$即满足所有的条件.

下面我们具体来实现这一过程.

令$e_1=x_1/\|x_1\|$.

令$f_2=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$, $e_2=f_2/\|f_2\|$.

令$f_3=x_3-\langle x_3,e_1\rangle e_1-\langle x_3,e_2\rangle e_2$, $e_3=f_3/\|f_3\|$.

$\vdots$

令$f_n=x_n-\sum_{i=1}^{n-1}\langle x_n,e_i\rangle e_i$, $e_n=f_n/\|f_n\|$.

容易验证$\{e_i:n\geq i\geq 1\}$是ONS, 满足题意. □

推论3.39. 设$E=\{x_i:i\geq 1\}$是H的线性无关子集且$E^\perp=\{0\}$. 那么存在H的正规正交基$S=\{e_i:i\geq 1\}$使得$\operatorname{span}\{x_i:1\leq i\leq n\}=\operatorname{span}\{e_i:1\leq i\leq n\}, \forall n\geq 1$.

证明: 利用Schmidt正交化方法和数学归纳法, 可得到正规正交集$S=\{e_i: i\geq 1\}$使得$\mathrm{span}\{x_i: 1\leq i\leq n\}=\mathrm{span}\{e_i: 1\leq i\leq n\}, \forall n\geq 1$. 上述条件蕴含着$S^\perp=E^\perp=\{0\}$. 那么$S$ 是ONB. □

下面我们确定Hilbert空间上的有界线性泛函的具体形式.

首先, 根据Schwarz不等式, 内积可自然诱导出Hilbert空间上的有界线性泛函.

引理3.40. 设H是Hilbert空间. 对$y\in H$, 定义$\varphi_y(x)=\langle x,y\rangle,\forall x\in H$. 那么$\varphi_y\in H'$且$\|\varphi_y\|=\|y\|$.

下面的结果表明, 任意$f\in H'$都形如φ_y.

定理3.41 (Fréchet-Riesz表示定理)**.** 对任意$f\in H'$, 存在唯一的$z_f\in H$ 使得

$$f(x)=\langle x,z_f\rangle,\quad \forall x\in H, \tag{8}$$

并且$\|f\|=\|z_f\|$.

证明: 不妨设$f\neq 0$, 即$\ker(f)\neq H$. 那么$\ker(f)^\perp\neq\{0\}$.

注意到, 如果存在$z_f\in H$满足(8), 那么必有$z_f\in\ker(f)^\perp$. 而根据推论3.36, $\dim(\ker(f))^\perp=1$. 因此若我们先取一个非零的$x_0\in(\ker(f))^\perp$, 则$(\ker(f))^\perp=\mathbb{C}x_0$, $z_f\in\mathbb{C}x_0$, 即z_f是x_0的一个数乘. 于是我们只需找到复数$\beta\in\mathbb{C}$使得$f(x)=\langle x,\beta x_0\rangle,\forall x\in H$.

由于$H=\ker(f)\oplus\mathbb{C}x_0$, 因此只需找到复数$\beta\in\mathbb{C}$使得

$$f(y+\alpha x_0)=\langle y+\alpha x_0,\beta x_0\rangle,\quad \forall y\in\ker f,\forall\alpha\in\mathbb{C},$$

即

$$\alpha f(x_0)=\alpha\overline{\beta}\langle x_0,x_0\rangle,\quad \forall\alpha\in\mathbb{C},$$

即$\beta=\frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2}$.

令$z_f=\frac{\overline{f(x_0)}x_0}{\|x_0\|^2}$, 则$z_f$符合题意. 定理的其余部分容易验证, 略去不写. □

推论3.42. 设H是Hilbert空间. 那么

(i) H与其对偶空间H'是共轭等距同构的, 即存在从H到H' 的保范的、双射的共轭线性算子.

(ii) H的对偶空间是Hilbert空间且与H等距同构.

(iii) H是自反的.

证明: (i) 对$y \in H$, 以φ_y表示H上映x为$\langle x, y\rangle$的有界线性泛函. 那么可以验证：H到H'的映y为φ_y的映射是保范的、双射的共轭线性算子.

(ii) 先证明H'上的范数可由H'上的某个内积诱导即可. 注意到$H' = \{\varphi_y : y \in H\}$. 对$\varphi_{y_1}, \varphi_{y_2} \in H'$, 定义

$$\langle \varphi_{y_1}, \varphi_{y_2}\rangle = \langle y_2, y_1\rangle.$$

容易验证这定义了H'上的一个内积, 诱导出的范数恰为H'作为H 对偶空间的范数.

设$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为$H$的一个ONB. 不难验证, $\{\varphi_{e_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$为$H'$的ONB, 因其与$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$具有相同的基数, 可见$H$与$H'$是等距同构的.

(iii) 设$F \in H''$. 根据定义只需证明存在$z \in H$ 使得$F(f) = f(z), \forall f \in H'$. 注意到$H' = \{\varphi_y : y \in H\}$. 因此只需证明$\exists z \in H$ 使得$F(\varphi_y) = \langle z, y\rangle, \forall y \in H$, 即

$$\overline{F(\varphi_y)} = \langle y, z\rangle, \forall y \in H.$$

根据Riesz表示定理, 只需证明

$$y \longmapsto \overline{F(\varphi_y)}$$

是H上的一个有界线性泛函. 这一点容易验证. □

由上述推论中的(i), $y \mapsto \varphi_y$实现了H与H' 的共轭等距同构. 所以, 常常将二者视为同一空间. Hilbert空间的这一性质称为自共轭性. 这是Hilbert 空间的基本性质之一.

习题

3.3.1. 设$\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$是$H$的一族闭子空间, 记$\vee_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \vee(\cup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$. 证明:

$$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)^\perp = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\perp.$$

3.3.2. 设$f_1, f_2, f_3 \in L^2[0,1]$, 满足

$$f_1(t) = 1, \;\; f_2(t) = t, \;\; f_3(t) = t^2.$$

给出$L^2[0,1]$的一个正规正交集$\{e_1, e_2, e_3\}$使得

$$\operatorname{span}\{f_i : 1 \le i \le k\} = \operatorname{span}\{e_i : 1 \le i \le k\}, \quad \forall k = 1, 2, 3.$$

3.3.3. 设F是$L^2[0,1]$上的函数, 满足

$$F(f) = \int_{[0,1/2]} f\mathrm{d}m.$$

请证明$F \in (L^2[0,1])'$, 并计算其范数.

3.3.4. 设$\{x_i : i = 1, 2, \cdots, n\} \subset H$是线性无关$n$元集, $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$. 证明*:* 存在$x_0 \in H$使得$\langle x_0, x_i\rangle = a_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

3.3.5. 设$f \in H'$, $0 \neq x_0 \in \ker(f)^\perp$. 证明*:* $\ker(f)^\perp = \mathbb{C}x_0$.

3.3.6. 设$x_0 \in H$, $f : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$是线性泛函, 且存在$M \geq 0$, 使得

$$|f(A)| \leq M\|Ax_0\|, \quad \forall A \in \mathcal{B}(H).$$

证明*:* 存在$y_0 \in H$使得$f(A) = \langle Ax_0, y_0\rangle, \forall A \in \mathcal{B}(H)$.

3.3.7 (变分原理**).** 设$x_0 \in H$, $E \subset H$是非空凸闭集. 证明*:* 存在唯一的$y_0 \in E$使得$\|x_0 - y_0\| = \mathrm{dist}(x_0, E)$.

3.3.8. 设 $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\max})$, $\|(a,b)\|_{\max} = \max\{|a|, |b|\}$. 则 X 是一个完备的 Banach 空间. 在X中举例说明, 上一习题中y_0的存在性成立, 唯一性可能不成立.

3.4 Hilbert共轭算子

本节我们讨论Hilbert空间上有界线性算子所构成集合上的一个重要的对合运算.

定义3.43. 设H是Hilbert空间, $\varphi \in \mathbb{C}^{H\times H}$.

(i) 若$\varphi(x,y)$关于x、关于y都是线性泛函, 则称φ是一个双线性泛函.

(ii) 若$\varphi(x,y)$关于x是线性泛函、关于y是共轭线性泛函, 则称φ是一个共轭双线性泛函.

(iii) 若$\varphi(x,y)$是双线性泛函或共轭双线性泛函, 而且存在常数$M \geq 0$使得

$$|\varphi(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in H,$$

则称φ是有界的.

例3.44. 设$A \in \mathcal{B}(H)$, 对$x, y \in H$, 定义$\varphi_1(x, y) = \langle Ax, y\rangle$, $\varphi_2(x, y) = \langle x, Ay\rangle$. 那么$\varphi_1, \varphi_2$是有界的共轭双线性泛函. 特别地, $A = I$时, $\varphi_1 = \varphi_2$恰为H上的内积.

下面我们将证明H上的有界共轭双线性泛函皆具有上述例子中的形式.

命题3.45. 若φ是H上有界的共轭双线性泛函, 则存在唯一的$A \in \mathcal{B}(H)$和唯一的$B \in \mathcal{B}(H)$使得

$$\varphi(x, y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle, \ \forall x, y \in H.$$

证明: 我们只证明A的存在性和唯一性. B的存在性和唯一性的证明是类似的.

显然, 对任意$x \in H$, $f_x : y \longmapsto \overline{\varphi(x, y)}$ 是H上的有界线性泛函. 利用Riesz 表示定理, 存在唯一的z_x使得$f_x(y) = \langle y, z_x\rangle, \forall y \in H$, 等价地

$$\varphi(x, y) = \langle z_x, y\rangle, \quad \forall y \in H.$$

定义$A : x \longmapsto z_x$. 则A是合理定义的, 且$\varphi(x, y) = \langle Ax, y\rangle, \forall y \in H$.

容易验证, A是线性算子. 下面证明A的有界性. 根据假设, 存在$M > 0$, 使得$|\langle Ax, y\rangle| \leq M\|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y$. 则

$$|\langle Ax, Ax\rangle| \leq M\|x\| \cdot \|Ax\|, \quad \forall x \in H.$$

这意味着$\|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in H$. 则$A$有界.

若另有A_1使得$\varphi(x, y) = \langle A_1 x, y\rangle, \forall y \in H$, 则有

$$\langle Ax, y\rangle = \langle A_1 x, y\rangle, \ \forall y \in H.$$

这表明$A = A_1$. □

下面我们利用共轭算子将共轭线性泛函和线性泛函联系起来.

定义3.46. 设$\mathcal{H}$是Hilbert空间, 若$C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$满足

(i) C是共轭线性的, 即$C(\alpha x + y) = \overline{\alpha} Cx + Cy$,

(ii) C是双射且$C^{-1} = C$,

(iii) $\|Cx\| = \|x\|, \forall\, x \in \mathcal{H}$.

则称C是$\mathcal{H}$上的一个共轭算子.

例3.47. 设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为空间$\mathcal{H}$的一个ONB, 定义

$$\begin{aligned} C : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i e_i &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_i} e_i. \end{aligned}$$

则C是$\mathcal{H}$上的一个共轭算子.

引理3.48. 设$\mathcal{H}$是Hilbert空间, $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$是共轭算子, $f : H \to \mathbb{C}$. 定义$g(x) = f(Cx)$, $\forall x \in H$. 那么f是线性泛函当且仅当g是共轭线性泛函.

下面的结论容易证明.

推论3.49. 设H是Hilbert空间, φ是H上的有界双线性泛函, C是H上的一个共轭算子. 那么, 存在唯一的$A \in \mathcal{B}(H)$使得

$$\varphi(x, y) = \langle x, ACy \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

定义3.50. 设$A \in \mathcal{B}(H)$. 根据命题3.45, 存在唯一的有界线性算子$B \in \mathcal{B}(H)$使得

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle, \ \forall x, y \in H.$$

称B为A的Hilbert共轭算子或伴随算子, 记作A^*.

下面我们给出求伴随算子$A \mapsto A^*$这一运算的若干基本性质.

定理3.51. 设H是Hilbert空间, $\alpha \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathcal{B}(H)$. 那么

(i) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \quad (A+B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(AB)^* = B^* A^*$.

(iii) $(A^*)^* = A$.

(iv) A有界可逆当且仅当A^*有界可逆, 而且此时$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(v) $\|A\| = \|A^*\|$.

证明*:* (i)-(iv)的证明是直接的.

(v)的结论可由公式$\|x\| = \sup_{y \in H, \|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$ 看出. □

Hilbert空间上的有界线性算子A和它的伴随算子A^*有紧密的联系. 利用这一点, 两者常常结合起来研究, 带来极大方便.

定理3.52 (值域定理)**.** H是Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(H)$. 那么

$$\ker(A) = \mathrm{ran}(A^*)^{\perp}, \quad \ker(A)^{\perp} = \overline{\mathrm{ran}(A^*)},$$

$$\ker(A^*) = \mathrm{ran}(A)^{\perp}, \quad \ker(A^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{ran}(A)}.$$

证明: 由A和A^*的对称性, 只需证明前两个等式成立. 对任意$x \in H$, 易见

$$x \in \ker(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \langle Ax, y \rangle = 0, \forall y \in H \Leftrightarrow \langle x, A^*y \rangle = 0, \forall y \in H \Leftrightarrow x \perp \mathrm{ran}\, A^*.$$

这说明$\ker(A) = \mathrm{ran}(A^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{ran}(A^*)}^{\perp}$. 进一步地，则$\ker(A)^{\perp} = \overline{\mathrm{ran}(A^*)}$. □

推论3.53. 设H是Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(H)$. 那么, A是有界可逆的当且仅当A, A^*都是下方有界的.

证明: $\Longrightarrow$. 易见, $\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$. 则$\|A^{-1}\|^{-1}\|x\| \le \|Ax\|$. 类似可证$A^*$下方有界.

$\Longleftarrow$. A是下方有界的意味着A是单射且$\mathrm{ran}\, A$是H的闭子空间. 同样地, A^* 是下方有界的意味着A^*是单射且$\mathrm{ran}\, A^*$是H的闭子空间. 那么$\mathrm{ran}\, A = (\ker A^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. 那么$A$是双射. 由Banach逆算子定理可知$A$有界可逆. □

下面的定理揭示了A^*与A'的关系.

定理3.54. H是Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(H)$. 若以Φ表示从H到H'的映y为φ_y的共轭线性等距, 这里

$$\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle, \ \ \forall y \in H,$$

则$\Phi \circ A^* = A' \circ \Phi$.

证明: 直接验证即可. □

推论3.55. 设H是Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(H)$. 那么A具有闭的值域当且仅当A^*具有闭的值域.

证明: 由定理3.54, $\mathrm{ran}(A') = \Phi(\mathrm{ran}(A^*))$. 因为$\Phi$是共轭线性等距, 易见$\mathrm{ran}(A')$ 是闭的当且仅当$\mathrm{ran}(A^*)$是闭的. 再由闭值域定理(定理2.179)可知欲证之结论成立. □

下面我们介绍一个在偏微分方程研究中非常有用的结果.

定理3.56 (Lax-Milgram定理,1954)**.** H是Hilbert空间, φ是H上一个有界的共轭双线性泛函, 并且存在$M>0$使得$|\varphi(x,x)|\geq M\|x\|^2, \forall x\in H$. 那么, 对任意$f\in H'$, 恰有一个$z\in H$ 使得

$$f(x)=\varphi(x,z),\quad \forall x\in H.$$

上述定理表明Hilbert空间H上有界且"下方有界"的共轭双线性泛函可以像内积一样表示H上的每一个有界线性泛函. 注意到到内积是有界且"下方有界"的共轭双线性泛函. 因此Lax-Milgram定理是Frechet-Riesz表示定理的推广形式.

为证明上述定理, 我们需要一个引理.

引理3.57. H是Hilbert空间. 若$A\in\mathcal{B}(H)$, $r>0$, 而且

$$|\langle Ax,x\rangle|\geq r\|x\|^2,\quad \forall x\in H,$$

则A, A^*均下方有界，进一步地, 均是有界可逆的.

证明: 注意到

$$\|Ax\|\cdot\|x\|\geq|\langle Ax,x\rangle|, \forall x\in H.$$

这一不等式和已知条件结合, 可推出

$$\|Ax\|\geq r\|x\|,\ \forall x\in H.$$

这说明A是下方有界的.

另外根据条件可知

$$|\langle A^*x,x\rangle|\geq r\|x\|^2,\quad \forall x\in H.$$

与上面类似可证

$$\|A^*x\|\geq r\|x\|,\quad \forall x\in H.$$

即A^*是下方有界的. 总之, A是有界可逆的. □

证明(定理3.56): 由命题3.45,存在唯一的$A\in\mathcal{B}(H)$使得

$$\varphi(x,y)=\langle Ax,y\rangle,\ \forall x,y\in H.$$

由Frechet-Riesz表示定理, 存在$y\in H$使得$f(x)=\langle x,y\rangle, \forall x\in H$. 因此现在只需证明存在唯一的$z\in H$使得

$$\langle Ax,z\rangle=\langle x,y\rangle,\ \forall x\in H,$$

即

$$\langle x, A^* z\rangle = \langle x, y\rangle, \ \ \forall x \in H,$$

即$A^*z = y$. 显然只需证明A^*是双射. 而根据引理3.57, A是有界可逆的, 即证得结论. □

注3.58. 根据上述定理, 若算子$A \in \mathcal{B}(H)$, A诱导的有界共轭双线性泛函$\varphi_A(x, y) = \langle Ax, y\rangle$下方有界，则$A$有界可逆；反之是否成立? 答案是否定的. 确有有界可逆的线性算子A, 其诱导的φ_A不是下方有界的. 这归结为对复数集$\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$的研究. 上述集合称为$A$的数值域.

Lax-Milgram定理对于椭圆型线性偏微分方程的求解是一个简单而有效的工具.

例3.59. 考虑方程$\mathbb{R}^2$有界开集Ω上的Possion方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(z), \ \ z \in \Omega \\ \ \ u(z) = 0, \ \ z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

正如在[8, 122]中讨论的一样, $u \in C^2(\Omega)$是上述方程的解当且仅当

$$\begin{aligned} a(u, v) &\doteq \int_\Omega \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega f(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{9}$$

易验证$a(u, v)$是$C_0^1(\Omega)$的有界双线性泛函, 故可唯一扩张为$H_0^1(\Omega)$上的有界双线性泛函. 称$u \in H_1^0(\Omega)$为此Possion方程边值问题的弱解, 若对任意$v \in H_0^1(\Omega)$, u均满足(9)式.

为了方便, 记$H_1 = L^2(\Omega), H_2 = H_0^1(\Omega)$. 由命题3.45可知: 存在$J \in \mathcal{B}(H_2)$, 使得$a(u, v) = (Ju, v)_{H_2}$. 从而, $Ju = Kf$. 定义$I : H_2 \to H_1, v \mapsto v$. 则$I \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, 令$K = I^*$, 则$K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, 且则$(v, f)_{H_1} = (Iv, f)_{H_1} = (v, Kf)_{H_2}$. 因此,

$$(Ju, v)_{H_2} = (Kf, v)_{H_2}, \ \ \forall v \in H_2.$$

从Poincare不等式可知, 存在常数$\chi > 0$, 使得

$$|a(u, u)| = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \chi \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此,

$$(1 + \frac{1}{\chi})|a(u, u)| \geq \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|u\|_2^2.$$

从而, 由Lax-Milgram定理可知, J可逆, 从而, 此Possion方程边值问题的弱解存在且唯一, 并且还是稳定的.

关于Lax-Milgram定理的具体应用可参见见H. Brezis《泛函分析》(叶东, 周风译).

习题

3.4.1. 设M为Hilbert空间H的非平凡闭子空间, 即$\{0\} \neq M \neq H$. 证明: M 的ONB并$M^{\perp}$的ONB为H 的ONB.

3.4.2. $\forall \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2$, $f(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i-1}}{2^i}$. 证明:$f \in (l^2)'$, 并计算$f$ 的范数.

3.4.3. $\forall \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^1$, $f(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i-1}}{2^i}$. 证明$f \in (l^1)'$, 并计算$f$ 的范数.

3.4.4. 设f_1, f_2都是$\mathbb{C}^2$的有界线性泛函, 而且

$$f_1(1,0) = 1, \quad f_1(0,1) = 0,$$

$$f_2(1,0) = 1, \quad f_2(1,1) = 0.$$

计算f_1, f_2的范数.

3.4.5. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset H$. 证明: $\{x_n\}$按范数收敛于x_0 当且仅当$\{x_n\}$弱收敛于x_0且$\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$.

3.4.6. 设H是Hilbert空间, $\{T_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}(H)$满足：对任意$x, y \in H$, $\lim_n \langle T_n x, y\rangle$ 存在. 证明: 存在$T \in \mathcal{B}(H)$ 使得$\lim_n \langle T_n x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle, \forall x, y \in H$.

3.4.7. 设H是Hilbert空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$弱收敛到$x_0$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$范数收敛到$y_0 \in H$. 证明: $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$.

3.4.8. 设H是Hilbert空间, 序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$分别弱收敛到$x_0$和$y_0$. 是否必有$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$?

3.4.9. H是Hilbert空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为H的ONB, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, $x_0 \in H$. 证明: $\{x_n\}$弱收敛于x_0当且仅当(a) $\sup_n \|x_n\| < \infty$, (b) 对任意$k \geq 1$, $\lim_n \langle x_n, e_k\rangle = \langle x_0, e_k\rangle$.

3.4.10. 设$\phi(\cdot,\cdot)$是H上的共轭双线性泛函, 对$x \in H$, 定义$q(x) = \phi(x, x)$. 证明: 对任意$x, y \in H$, 成立

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y) + \mathrm{i}q(x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}q(x-\mathrm{i}y)].$$

3.4.11. 设H是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(H)$. 证明：$T = 0$当且仅当$\langle Tx, x\rangle = 0, \forall x \in H$.

3.4.12. 设H是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(H)$. 证明：$T + T^* = 0$当且仅当$\mathrm{Re}(Tx, x) = 0, \forall x \in H$.

3.4.13. 设$(H_1,\langle\cdot,\cdot\rangle_1),(H_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$,是Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(H_1,H_2)$. 证明: 存在$\mathcal{B}(H_2,H_1)$中唯一的算子, 记作A^*, 使得

$$\langle Ax,y\rangle_2=\langle x,A^*y\rangle_1,\ \ \forall x\in H_1,y\in H_2.$$

称A^*为A的Hilbert 共轭算子或伴随算子.

3.4.14 (Hellinger-Toeplitz定理)**.** 设H是Hilbert空间, $T:H\to H$是线性算子. 证明: 若

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle,\ \ \forall x,y\in H,$$

则$T\in\mathcal{B}(H)$.

3.4.15. 设H是Hilbert空间, $A,B:H\to H$是线性算子. 若

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,By\rangle,\ \ \forall x,y\in H,$$

则$A,B\in\mathcal{B}(H)$且$A=B^*$.

3.4.16. 对$f\in L^2[0,1]$, 定义$(Tf)(t)=tf(t)$. 称T是$L^2[0,1]$上乘以自变量的乘法算子. 证明: T是$L^2[0,1]$上的有界线性算子, $T=T^*$, $\|T\|=1$.

3.5 Hilbert空间上算子的表示矩阵*

线性代数的知识告诉我们，有限维线性空间上的线性算子均可关于基底表示为矩阵. 因此, 有限维空间上的线性算子理论本质上是矩阵论. 对于Hilbert空间上的算子，也可借助正规正交基表示为矩阵.

表示矩阵

我们先介绍无穷矩阵的形式乘积.

对于一组复数$\{a_{i,j}\}_{i,j\geq1}$, 可排成一个无穷阶的方阵；复数列$x=\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, 可写成无穷列向量的形式, 如下:

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}&a_{1,4}&\cdots\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}&a_{2,4}&\cdots\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}&a_{3,4}&\cdots\\a_{4,1}&a_{4,2}&a_{4,3}&a_{4,4}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\qquad x=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\vdots\end{pmatrix}.$$

可分别简记为$A = \Big[a_{i,j}\Big]_{i,j\geq 1}$和$x = \{\alpha_i\}_{i\geq 1}$. 两者的形式乘积定义为

$$Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{3,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{4,j}\alpha_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

类似地, 可定义两个无穷矩阵的形式计算

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & \cdots \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & \cdots \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & \cdots \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

M_1M_2的(i,j)位置的元素恰为M_1的第i行和M_2的第j列对应位置的元素相乘后作形式求和.

命题3.60. 设$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$为H的一个ONB, $A \in \mathcal{B}(H)$. 对$i, j \in \mathbb{N}$, 定义$a_{i,j} = \langle Ae_j, e_i\rangle$, 进而得到下面的无穷矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

若$x \in H$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, 那么

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

称$\big[a_{i,j}\big]_{i,j\geq 1}$为$A$关于$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$的<u>表示矩阵</u>.

证明: 显然，$Ax = A(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i Ae_i$. 那么对任意$k \geq 1$, 我们有

$$\beta_k = \langle Ax, e_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i Ae_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \alpha_i Ae_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle Ae_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{k,i}.$$

证毕. $\square$

推论3.61. 设$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$为H的一个ONB, $A, B \in \mathcal{B}(H)$. 若A, B关于$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$的矩阵表示分别为$\left[a_{i,j}\right]_{i,j\geq 1}$和$\left[b_{i,j}\right]_{i,j\geq 1}$, 则$A^*$ 关于$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$的矩阵表示为$\left[\overline{a_{j,i}}\right]_{i,j\geq 1}$, AB 关于$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$的矩阵表示为$\left[a_{i,j}\right]$和$\left[b_{i,j}\right]_{i,j\geq 1}$的乘积.

在应用上非常重要的许多算子都具有特殊的表示矩阵.

定义3.62. 设H是可分Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(H)$.

1. 若T在H的某ONB $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$下的表示矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

   则称T是一个<u>Toeplitz算子</u>.

2. 若T在H的某ONB $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$下的表示矩阵是一个上三角矩阵, 即对角线以下的元素皆为*0*，则称T是一个<u>三角算子</u>.

3. 若T在H的某ONB$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$下的表示矩阵是一个对角矩阵, 即对角线以外的元素皆为*0*，则称T是一个<u>对角算子</u>.

矩阵的分块技巧可以简化矩阵计算，是矩阵论中的常用技巧. 在研究线性算子时, 也可基于空间的分解引入分块技巧.

分块表示矩阵

首先介绍Hilbert空间的正交直和分解.

记号3.63. 一族非空集合$\{X_i\}_{i\in\Lambda}$的笛卡尔积记为$\prod_{i\in\Lambda} X_i$, 即

$$\prod_{i\in\Lambda} X_i = \{x = \{x_i\}_{i\in\Lambda} : x_i \in X_i, i \in \Lambda\}.$$

定义3.64. 设$\{(\mathcal{H}_i, \langle\cdot,\cdot\rangle_i)\}_{i\in\Lambda}$是一族Hilbert空间, 记

$$\oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i = \left\{x = \{x_i\}_{i\in\Lambda} \in \prod_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i : \sum_{i\in\Lambda}\|x_i\|^2 < \infty\right\}.$$

$\oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i$在按坐标的加法和数乘下是线性空间, 在如下定义的内积下成为一个Hilbert 空间

$$\langle\{x_i\}_{i\in\Lambda}, \{y_i\}_{i\in\Lambda}\rangle = \sum_{i\in\Lambda}\langle x_i, y_i\rangle_i,$$

称$\oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i$为$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\Lambda}$的<u>正交直和</u>, 其中的元素也可写为$x = \oplus_{i\in\Lambda}x_i$.

类似地, 可定义有限个Hilbert空间的正交直和.

引理3.65. 设$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\Lambda}$是Hilbert空间$\mathcal{H}$的两两正交的一族闭子空间且$(\cup_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i)^\perp = \{0\}$. 那么映射

$$U : \oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}, \tag{10}$$

$$\oplus_{i\in\Lambda}x_i \longmapsto \sum_{i\in\Lambda}x_i \tag{11}$$

是一个保范的线性双射*(称为<u>酉算子</u>);* 进一步地, 对每个$x \in H$, 存在唯一的$\{x_i\}_{i\in\Lambda} \in \oplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_i$ 使得$x = \sum_{i\in\Lambda}x_i$. 因此$\mathcal{H}$与$\oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i$中的元素一一对应, 可称$\mathcal{H}$是$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\Lambda}$的<u>正交直和</u>, 仍记作$\mathcal{H} = \oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i$.

类似地, 若$\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^n$是Hilbert空间$\mathcal{H}$的两两正交的闭子空间且$(\cup_{i=1}^n\mathcal{H}_i)^\perp = \{0\}$, 那么称$\mathcal{H}$为$\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^n$的<u>正交直和</u>, 记作$\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^n\mathcal{H}_i$. 特别地, $n = 2$时，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

下面我们基于Hilbert空间的分解，给出有界线性算子的分块表示矩阵.

设$\mathcal{H}$是Hilbert空间, $\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_i$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. 每个$x \in \mathcal{H}$, 可唯一地表示为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty}x_i, \quad x_i \in \mathcal{H}_i.$$

类似地, Ax可唯一地表示为

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty}y_i, \quad y_i \in \mathcal{H}_i.$$

亦可写作$x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$或$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$, $Ax = (y_i)_{i=1}^{\infty}$或$Ax = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$. 即有$A : (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (y_i)_{i=1}^{\infty}$. 那么向量$\{x_i : i \geq 1\}$与$\{y_i : i \geq 1\}$有何种关系?

以P_i表示$\mathcal{H}$上到$\mathcal{H}_i$的正交射影. 那么

$$y_i = P_iAx = P_iA\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P_iAx_j = \sum_{j=1}^{\infty} P_iAP_jx_j.$$

以$A_{i,j}$表示从$\mathcal{H}_j$到$\mathcal{H}_i$的有界线性算子$z \mapsto P_iAP_jz$. 那么

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} A_{i,j}x_j = (A_{i,j}, A_{i,j}, A_{i,j}, \cdots)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

那么

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

称(*)中的以算子为元素的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

为A关于$\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_i$的<u>分块表示矩阵</u>.

类似地，可定义算子关于空间的有限正交直和分解的分块表示矩阵, 此时的算子矩阵为有限阶的.

有时候我们可能需要把算子关于Hilbert空间的两种分解进行分块.

假设$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_i = \oplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{K}_i$. 以$P_i, Q_i$分别表示$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i$的正交射影. 定义有界线性算子$A_{i,j} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{K}_i$作

$$A_{i,j}z = Q_iAP_jz.$$

对任意$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, 其中$x_i \in \mathcal{H}_i$, 若$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, y_i \in \mathcal{K}_i$, 则

$$\begin{aligned} y_i &= Q_iAx = Q_iA\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_iAx_j = \sum_{j=1}^{\infty} Q_iAP_jx_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} A_{i,j}x_j = (A_{i,1}, A_{i,2}, A_{i,3}, \cdots)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

那么

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

上述$[A_{i,j}]$即为A关于分解$\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i = \oplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$ 的分块表示矩阵.

习题

3.5.1. 设$T \in \mathcal{B}(H)$, 其中H是可分Hilbert空间. 证明*:* T是对角算子当且仅当存在H的一个正规正交基$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$恰由T的一些特征向量构成.

3.5.2. 设$T \in \mathcal{B}(H)$, 其中H是非零的可分Hilbert空间. 证明*:* 若T不是对角算子, 则对任意$M > 0$, 存在$A \sim T$, 使得$\|A\| > M$. 这里$A \sim T$表示存在有界可逆的$W \in \mathcal{B}(H)$, 使得$WA = TW$.

3.5.3. 设$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{M}$为$\mathcal{H}$的闭子空间，T关于空间分解$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$的分块表示矩阵设为

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}.$$

证明*:*

(a) T^*关于空间分解$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$的分块表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} A^* & D^* \\ C^* & B^* \end{pmatrix}.$$

(b) 若$\mathcal{M} = \overline{\operatorname{ran} T + \operatorname{ran} T^*}$, 则$B = 0, C = 0, D = 0$.

(c) 若S关于空间分解$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$的分块表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} E & G \\ H & F \end{pmatrix},$$

则ST关于空间分解$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$的分块表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} E & G \\ H & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA + GD & EC + GB \\ HA + FD & HC + FB \end{pmatrix}.$$

3.5.4. 设$\mathcal{H}$是Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. 证明:

(a) 存在可分的闭子空间$\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\Lambda}$使得$\mathcal{H} = \oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i$ 且$A(\mathcal{H}_i) \subset \mathcal{H}_i, \forall i \in \Lambda$.

(b) 记$A_i = T|_{\mathcal{H}_i}, \forall i \in \Lambda$. 则对任意$x = \oplus_{i\in\Lambda_i} x_i \in \oplus_{i\in\Lambda}\mathcal{H}_i$, 成立$Ax = \oplus_{i\in\Lambda_i} A_i x_i$.

第 4 章　有界线性算子谱论

有界线性算子的谱是矩阵特征值的推广, 包含了算子的很多信息, 是极其重要的不变量. 本章将介绍有界线性算子的基本谱理论.

4.1　谱

矩阵的特征值是一个重要的不变量. n阶矩阵可看作$\mathbb{C}^n$上的有界线性算子. 特征值的概念可推广到Banach空间上的有界线性算子上.

定义4.1. X是非零Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$.

1. 定义$\sigma(T) \doteq \{z \in \mathbb{C} : zI - T$不是有界可逆的$\}$, 称之为$T$的<u>谱</u>*(spectrum)*, 其补集$\rho(T)$称之为T的<u>预解集</u>, $(zI - T)^{-1}$称之为T的<u>预解式</u>$(z \in \rho(T))$;
2. 若$z \in \mathbb{C}$且$zI - T$不是单射, 则称z为T的一个<u>特征值</u>. T的所有特征值构成之集合记为$\sigma_p(T)$, 称为T 的<u>点谱</u>*(point spectrum)*. 显然, $z \in \sigma_p(T)$时, 存在非零的$x \in X$使得$Tx = zx$, 称x为T的与z相关的一个<u>特征向量</u>;
3. 记$\sigma_c(T) =: \{z \in \sigma(T) : zI - T$是单射, 值域在$X$中稠密$\}$, $\sigma_r(T) =: \{z \in \sigma(T) : zI - T$是单射,值域在$X$中不稠密$\}$, 分别称为$T$的<u>连续谱</u> *(continuous spectrum)*和<u>剩余谱</u>（*residual spectrum*）.

注4.2.

1. Banach空间上有界线性算子$T \in \mathcal{B}(X)$的谱是点谱、连续谱、剩余谱的不交并.
2. 若X是只含零元的Banach空间, 则X上只有一个映射，即恒等映射，是有界可逆的, 因此谱是空集. 因此本章中我们只考虑非零Banach空间上的有界线性算子.
3. $zI - T$常简记为$z - T$.

本节的主要结果是下面的定理, 总结了有界线性算子的谱的一般性质.

定理4.3. 设X是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$. 那么

(i) $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$;

(ii) $\sigma(T)$是有界闭集;

(iii) $\sigma(T') = \sigma(T)$;

(iv) 若X是Hilbert空间, 则$\sigma(T^*) = \{\overline{z} : z \in \sigma(T)\}$;

(v) $\sigma(T)$非空;

(vi) 定义T的<u>谱半径</u>为$r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, 则

$$r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}. \tag{$*$}$$

注4.4. 等式(*)是利用T^n的范数估计$r(T)$, 称为<u>谱半径公式</u>.

证明(定理4.3 (i)-(iv)): (i)-(ii) 首先, X上全体有界可逆线性算子构成的集合$\mathcal{G}(X)$构成了$\mathcal{B}(X)$的一个开子集. 又$z \mapsto zI - T$是$\mathbb{C}$到$\mathcal{B}(X)$的一个连续映射. 因此, $\mathcal{G}(X)$关于该映射的原象也是$\mathbb{C}$开集, 易见该集合恰为T的预解集. 因此$\sigma(T)$为$\mathbb{C}$的闭子集.

当$|\lambda| > \|T\|$时, 算子值级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$绝对收敛, 因此极限存在, 记为$A$. 易见

$$A(I - \frac{T}{\lambda}) = I = (I - \frac{T}{\lambda})A.$$

因此$I - \frac{T}{\lambda}$有界可逆, 且其逆为A. 进一步地, $\lambda I - T$有界可逆, 且其逆为

$$A/\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}.$$

这说明$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$. 易验证

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

(iii) 对任意$z \in \mathbb{C}$, 根据推论2.184, $z - T$有界可逆当且仅当$z - T'$有界可逆. 则易见结论成立.

(iv) 对任意$z \in \mathbb{C}$, 根据定理3.51, $z - T$有界可逆当且仅当$\overline{z} - T^*$ 有界可逆. 则易见结论成立. □

为证明定理4.3的(v), 需要做些准备.

定义4.5. 设X是Banach空间, $\Omega \subset \mathbb{C}$为非空开集, $\phi : \Omega \to X$.

(i) 若$z_0 \in \Omega$且下面的极限存在

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0},$$

则称ϕ在z_0处<u>可导</u>, 极限记为$\phi'(z_0)$, 称为ϕ在z_0的<u>导数</u>.

(ii) 若ϕ在Ω中每一点处皆可导, 则称ϕ 是Ω上的<u>向量值解析函数</u>.

(iii) 若对任意$f \in X'$, 复值函数$f \circ \phi$是Ω上的解析函数, 则称ϕ 是<u>弱解析</u>的.

注4.6. 易见, 向量值函数的解析性蕴含弱解析性. 事实上,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0}$$

存在意味着$z_n \to z_0$ 时

$$\lim_n \frac{\phi(z_n) - \phi(z_0)}{z_n - z_0}$$

存在. 则由$f \in X'$时把收敛列映为收敛列. 则

$$\lim_n \frac{f \circ \phi(z_n) - f \circ \phi(z_0)}{z_n - z_0}$$

存在. 则由$\{z_n\}$是收敛于z_0 的序列的任意性, 应用Heine 定理可知

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f \circ \phi(z) - f \circ \phi(z_0)}{z - z_0}$$

存在.

向量值函数的解析性和弱解析性事实上是一致的. 这使得我们可以在处理向量值解析函数时方便地应用复值解析函数理论.

定理4.7. 设X是Banach空间, $\Omega \subset$为非空开集, $f : \Omega \to X$. 那么f是解析的当且仅当f是弱解析的.

证明: 只需证明充分性. 任取$z_0 \in \Omega$. 只需证明

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在. 可取到$\delta > 0$使得$B(z_0, 3\delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 3\delta\} \subset \Omega$. 任取收敛到$z_0$的复数列$\{z_n\}_{n=1} \subset B(z_0, \delta) \backslash \{z_0\}$, 且$m \neq n$时$z_n \neq z_m$. 由Heine定理只需证明$\{\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy列.

任取$\phi \in X'$. 由假设，复值函数$\phi \circ f$在$\overline{B(z_0, 3\delta)}$上解析. 利用Cauchy积分公式, 有

$$\phi \circ f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=2\delta} \frac{\phi \circ f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \in B(z_0, \delta).$$

那么

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0}\right) &= \frac{\phi \circ f(z_n) - \phi \circ f(z_0)}{z_n - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=2\delta} \frac{\phi \circ f(\xi)}{(\xi - z_n)(\xi - z_0)} d\xi. \end{aligned}$$

进一步地，

$$\phi\left(\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0} - \frac{f(z_m)-f(z_0)}{z_m-z_0}\right) = \frac{z_n - z_m}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=2\delta} \frac{\phi \circ f(\xi)}{(\xi - z_n)(\xi - z_m)(\xi - z_0)} d\xi.$$

易见, 对任意$m, n \geq 1$, 我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=2\delta} \frac{\phi \circ f(\xi)}{(\xi - z_n)(\xi - z_m)(\xi - z_0)} d\xi\right| \leq 2\delta^{-2} \cdot \sup_{|\xi - z_0|=2\delta} |\phi \circ f(\xi)| < \infty,$$

即

$$\sup_{m,n\geq 1} \left|\frac{1}{z_n - z_m} \phi\left(\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0} - \frac{f(z_m)-f(z_0)}{z_m-z_0}\right)\right| < \infty,$$

则由共鸣定理

$$M \doteq \sup_{m,n\geq 1} \left\|\frac{1}{z_n - z_m} \left(\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0} - \frac{f(z_m)-f(z_0)}{z_m-z_0}\right)\right\| < \infty.$$

于是得到

$$\left\|\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0} - \frac{f(z_m)-f(z_0)}{z_m-z_0}\right\| \leq M|z_n - z_m|, \quad \forall m, n \geq 1.$$

由此可见, $\{\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0}\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy列. □

对应复值解析函数的唯一性定理, 我们也有下面的结果.

命题4.8 (向量值解析函数的唯一性). 设X是Banach空间, Ω为复平面的非空连通开子集, $\phi : \Omega \to X$. 若存在$\{z_n : n \geq 1\}$使得*(i)* $z_n \to z_0 \in \Omega$, $z_n \neq z, \forall n$, 而且*(ii)* $\phi(z_n) = 0, \forall n \geq 1$, 则$\phi \equiv 0$.

证明: 对任意$f \in X'$, 注意到$f \circ \phi$是数值解析函数, 且在每个z_n上取值为0, $z_n \to z_0 \in \Omega$. 由于Ω是连通开集, 数值解析函数的唯一性定理意味着$f \circ \phi \equiv 0$, 即$f \circ \phi(z) = 0, \forall f \in X, \forall z \in \Omega$. 由Hahn-Banach 定理的推论, $\phi(z) = 0, \forall z \in \Omega$. □

例4.9. 预解式函数是预解集上的强解析函数. 事实上, 对$T \in \mathcal{B}(X)$, $z \in \rho(T)$, 定义$\phi(z) = (zI - T)^{-1}$. 对任意$z, z_0 \in \rho(T), z \neq z_0$时,

$$\begin{aligned}\frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0}(zI - T)^{-1}(z_0 - z)(z_0 I - T)^{-1} \\ &= -(zI - T)^{-1}(z_0 I - T)^{-1} \\ &\to -[(z_0 I - T)^{-1}]^2 \qquad (z \to z_0).\end{aligned}$$

由上述例子的证明可见下面的公式.

定理4.10 (第一预解公式)**.** X是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$. 那么对$\lambda, \mu \in \rho(T)$,

$$(\lambda - T)^{-1} - (\mu - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1}$$

证明(定理4.3(v)): 反证法. 若$\sigma(T) = \emptyset$, 则$(\lambda I - T)^{-1}$是$\mathbb{C}$上的向量值解析函数. 对任意$f \in \mathcal{B}(X)'$, $f((\lambda I - T)^{-1})$是整函数. 注意到

$$|f((\lambda I - T)^{-1})| \leq \|f\| \cdot \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|T\|} \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty).$$

则$f((\lambda I - T)^{-1}) \equiv 0$. 由$f \in \mathcal{B}(X)'$任意知$(\lambda I - T)^{-1} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. 矛盾. □

证明(定理4.3(vi)): 证明归结为证明下面三个断言.

断言一: $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$ 存在.

记$r = \inf_n \|T^n\|^{1/n}$. 那么只需证明$\overline{\lim}_n \|T^n\|^{1/n} \leq r$. 这样的话$r = \lim_n \|T^n\|^{1/n}$.

对任意$\varepsilon > 0$, $\exists m \geq 1$ s.t. $\|T^m\|^{1/m} < r + \varepsilon$.

$n > m$时, $n = km + s$, 其中$k \geq 0, 0 \leq s \leq m - 1$. 则

$$\|T^n\|^{1/n} = \|T^{km+s}\|^{1/n} \leq \|T^m\|^{\frac{1}{m} \cdot \frac{n-s}{n}} \cdot \|T\|^{s/n} \leq (r + \varepsilon)^{(n-s)/n} \|T\|^{s/n}.$$

这意味着$\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \leq r + \varepsilon$. 由$\varepsilon > 0$是任意的, 断言成立.

断言二: $r(T) \leq r$.

$|\lambda| > r$时, 则存在$\varepsilon > 0$ s.t. $|\lambda| > r + \varepsilon$, 且存在$N_0$, 使得$n > N_0$时$\|T^n\|^{1/n} < r + \varepsilon$. 于是

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{|\lambda|^n} \leq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{(r + \varepsilon)^n}{|\lambda|^n} < \infty.$$

这说明级数
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n}$$
收敛, 极限记为A. 易见$A(\lambda-T)=I=(\lambda-T)A$. 那么$\lambda\in\rho(T)$. 于是$r(T)\le r$.

断言三: $r\le r(T)$.

$(\lambda I-T)^{-1}$ 是$\rho(T)$上关于λ的解析函数, 则对任意$f\in X'$, $f[(\lambda I-T)^{-1}]$ 是$\rho(T)$上关于λ的复值解析函数. 注意到$|\lambda|>r$时,
$$(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$
则
$$f[(\lambda I-T)^{-1}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}.$$
注意到$f((\lambda I-T)^{-1})$在$\{z:|z|>r(T)\}$上也解析, 利用解析函数的唯一性, 在$\{z:|z|>r(T)\}$上$f[(\lambda I-T)^{-1}]$也具有上面形式的洛朗展式.

任意固定$\varepsilon>0$. 易见
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(T^n)}{(r(T)+\varepsilon)^n}=0.$$
则存在$M_f>0$ s.t. $\sup_n\frac{|f(T^n)|}{(r(T)+\varepsilon)^n}\le M_f$. 由于$f\in\mathcal{B}(X)'$任意, 根据一致有界原理, 存在$M>0$
$$\sup_n\frac{\|T^n\|}{(r(T)+\varepsilon)^n}<M.$$
那么$\|T^n\|\le M(r(T)+\varepsilon)^n,\forall n$, 且$\|T^n\|^{1/n}\le M^{1/n}(r(T)+\varepsilon)$. 于是$r\le r(T)+\varepsilon$. 由于$\varepsilon$ 是任意的, 我们得到$r\le r(T)$. 证毕. □

定义4.11. X是Banach空间, $T\in\mathcal{B}(X)$.

(i) 若存在$m\in\mathbb{N}$使得$T^m=0$, 则称T是<u>幂零算子</u>.

(ii) 谱只含*0*一个点的有界线性算子称为<u>拟幂零算子</u>.

显然, 根据谱半径公式, 幂零算子都是拟幂零的.

例4.12. 若V是$C[0,1]$上Volterra积分算子, 即对$f\in C[0,1]$,
$$(Vf)(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s,\quad\forall t\in[0,1].$$
则$\sigma(V)=\{0\}$, 即V是拟幂零算子.

定义4.13. 对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots)\in l^2$, 定义

$$S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots)=(0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots).$$

称S是l^2 上的单侧移位. 易见S是一个有界线性算子且保持范数.

定理4.14. 设S是l^2上的单侧移位. 那么

$$S^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots)=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\cdots),\quad \forall(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots)\in l^2.$$

$$\sigma(S)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\},$$

$$\sigma_p(S)=\emptyset,$$

$$\sigma_r(S)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\},$$

$$\sigma_c(S)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}.$$

习题

4.1.1. 设X是非零Banach空间, $A\in\mathcal{B}(X)$有界可逆. 证明:

$$\sigma(A^{-1})=\{1/z:z\in\sigma(A)\}.$$

4.1.2. 设X是非零Banach空间, $A\in\mathcal{B}(X)$, $\lambda_0\in\mathbb{C}$. 证明:

$$\sigma(A+\lambda_0 I)=\{z+\lambda_0:z\in\sigma(A)\}.$$

4.1.3. 设X是非零Banach空间, $A\in\mathcal{B}(X)$, $n\in\mathbb{N}$. 证明:

$$\sigma\left(A^n\right)=\left\{\lambda^n:\lambda\in\sigma(A)\right\}.$$

4.1.4. 设X是非零Banach空间, $T\in\mathcal{B}(X)$. 证明: 若$|\lambda|>\|T\|$, 则$\|(\lambda-T)^{-1}\|\leq\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}$.

4.1.5. 以S表示l^2上的单侧移位. 证明: $|\lambda|>1$时,

$$\|(\lambda-S)^{-1}\|=\frac{1}{|\lambda|-1}.$$

4.1.6. 在l^2上构造一个非零的幂零算子.

4.1.7. X是非零Banach空间, $T\in\mathcal{B}(X)$. $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是T的两两不同的特征值, $u_1,\cdots,u_n\in X$是非零向量且$Tu_i=\lambda_i u_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明:

(a) $u_1, \cdots, u_n$ 线性无关;

(a) $\forall x \in \vee\{u_1, \cdots, u_n\}$, 恒有$(T-\lambda_n)x \in \vee\{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$.

4.1.8. X是非零Banach空间, $A, B \in \mathcal{B}(X)$. 证明: 对任意$\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, 成立

$$(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(A - B)(\lambda - B)^{-1}.$$

这个等式称为<u>第二预解公式</u>.

4.2 射影算子

本节我们关注一类特殊的线性算子, 它们与线性空间的直和分解有关.

定义4.15. X是赋范线性空间, M, N是X的互为代数补的两个线性子空间. 对任意$x \in X$, 存在唯一的$x_1 \in M$ 和唯一的$x_2 \in N$, 使得$x = x_1 + x_2$. 此时, 定义$Px = x_1$. 则P是X上的线性算子, 称之为X上与$\{M, N\}$相关的到M的<u>射影算子</u>.

注4.16. X是赋范线性空间. M, N是X的互为代数补的两个线性子空间. M, N决定的到M的射影算子P满足

(i) $P^2 = P, \operatorname{ran}(P) = M, \ker(P) = N$,

(ii) $I - P$是射影且值域、零空间分别等于与P的零空间和值域.

定义4.17. 若H是Hilbert空间, M是H的闭子空间, 则根据射影定理, M和$M^\perp$互为代数补. 将H上与$\{M, M^\perp\}$相关的到M 的射影算子简称为从H 到M的<u>正交射影</u>.

显然, 正交射影是有界线性算子, 且范数不大于1. 自然要问，一般的射影算子是否有界？

下面的定理回答了上述问题, 是本节的主要结果.

定理4.18. 设M, N是非零Banach空间X的互为代数补的线性子空间, P是与$\{M, N\}$相关的从X到M的射影算子. 那么

(i) P有界当且仅当M, N是闭子空间.

(ii) 若P有界, 则

$$\sigma(P)=\begin{cases}\{0\}, & M=\{0\},\\ \{1\}, & M=X,\\ \{0,1\}, & \{0\}\subsetneq M\subsetneq X.\end{cases}$$

证明: 显然, $\operatorname{ran}(P)=M, \ker(P)=N$.

(i) 注意到$\operatorname{ran}(P)=\ker(I-P)$. 因此$P$有界时$\operatorname{ran}(P),\ker(P)$显然是闭的. 下面证明充分性.

我们利用闭图形定理. 假设$\{x_n\}\subset X, x_n\to x_0, Px_n\to y_0$. 往证$Px_0=y_0$.

根据定义$x_n=x_{n,1}+x_{n,2}$, 其中$x_{n,1}\in M, x_{n,2}\in N$. 那么$Px_n=x_{n,1}$. 则由条件$x_{n,1}\to y_0\in M$, $x_{n,2}\to x_0-y_0\in N$. 那么$x_0=y_0+(x_0-y_0)$, $Px_0=y_0$. 证完.

(ii) 若$M=\{0\}$, 则易见$P=0, \sigma(P)=\{0\}$; 若$M=X$, 则易见$P=I, \sigma(P)=\{1\}$. 余下假设$\{0\}\subsetneq M\subsetneq X$.

"$\sigma(P)\subset\{0,1\}$". 设$z\in\mathbb{C}, 1\neq z\neq 0$. 往证$P-zI$既单且满.

设$x\in\ker(P-zI)$, $x=x_1+x_2$, 其中$x_1\in M, x_2\in N$. 则$0=(P-zI)x=x_1-zx_1-zx_2=(1-z)x_1-zx_2$. 则$(1-z)x_1=zx_2\in M\cap N=\{0\}$. 这说明$x_1=x_2=0$, 进而$x=0$.

对任意$y\in X$, $y=y_1+y_2$, 其中$y_1\in M, y_2\in N$. 易见$(P-zI)(\frac{y_1}{1-z}-\frac{y_2}{z})=y$. 于是$P-zI$是双射, 因此是有界可逆的.

"$\sigma(P)\supseteq\{0,1\}$". 由$N\subset\ker P$, $M\subset\ker(I-P)$, 可知$0,1\in\sigma_p(P)$. 证毕. □

注4.19. 若T是有界的幂等算子, 则$T^n=T$, $\forall n\geq 1$. 这意味着$\|T^n\|^{1/n}=\|T\|^{1/n}$. 进而$r(T)=1$或者$0$, 而且后者成立当且仅当$T=0$.

射影算子是一类特殊算子, 可用于刻画线性算子的不变子空间.

定义4.20. 非零Banach空间X, M是X闭子空间. 称M是$T\in\mathcal{B}(X)$的<u>不变子空间</u>, 若$T(M)\subset M$.

根据下面的定理, 谱不连通的有界线性算子必然有互为拓扑补的非平凡不变子空间.

定理4.21 (Riesz分解定理*)**.** 设X是非零Banach空间, $T\in\mathcal{B}(X)$. 若$\sigma(T)$是两个非空不交闭集合Γ_1,Γ_2的并, 则存在射影$P\in\mathcal{B}(X)$, 使得

$$TP=TP,\ \ \sigma(T|_{\operatorname{ran}(P)})=\Gamma_1,\ \ \sigma(T|_{\ker(P)})=\Gamma_2.$$

习题

4.2.1. 设P是Banach空间X上的线性算子且$P = P^2$, 则$\mathrm{ran}(P)$和$\ker(P)$互为代数补且P为与$\{\mathrm{ran}(P), \ker(P)\}$ 相关的从X 到$\mathrm{ran}(P)$ 的射影算子.

4.2.2. 证明: Banach空间X上有界的射影算子列的极限仍是射影算子.

4.2.3. 证明: 非零的有界射影算子范数不小于1, 非零正交射影算子的范数等于1.

4.2.4. X是赋范线性空间, M, N是X的互为代数补的两个非平凡的线性子空间. 以P表示X上与$\{M, N\}$相关的到M的射影算子. 证明下述三条等价:

(i) P是有界射影;

(ii) $\inf\{\mathrm{dist}(z, N) : z \in M, \|z\| = 1\} > 0$;

(iii) $\inf\{\mathrm{dist}(z, M) : z \in N, \|z\| = 1\} > 0$;

而且P有界时
$$\|P\| = \frac{1}{\inf\{\mathrm{dist}(z, N) : z \in M, \|z\| = 1\}}.$$

4.2.5. 给出一个赋范线性空间上一个无界射影算子P的例子, 使得$\mathrm{ran}\, P$和$\ker P$互为拓扑补.

4.2.6. 证明: 若M, N为Banach空间X的闭子空间且$M \cap N = \{0\}$, 则$M + N$为X 的闭子空间当且仅当$\inf\{\mathrm{dist}(z, M) : z \in N, \|z\| = 1\} > 0$.

4.2.7. 设P是非零Banach空间X上有界的射影算子, $M = \mathrm{ran}(P)$. 证明: M是$T \in \mathcal{B}(X)$的不变子空间当且仅当$(I - P)TP = 0$.

4.2.8. 设M是非零Banach空间X的闭子空间. 证明: 若M有拓扑补, 则对任意$A \in \mathcal{B}(M)$, 存在$T \in \mathcal{B}(X, M)$, 使得$Ax = Tx, \forall x \in M$.

4.3 紧算子

积分算子是指由积分诱导出的线性算子. 数学物理方程中许多问题可转化为积分方程的问题, 因此积分算子是重要的有界线性算子. 1918年左右, F. Riesz把积分算子推广为下文所谓的紧算子.

定义4.22. 若Banach空间X上的有界线性算子$\overline{T((X)_1)}$为紧集(即T映单位球为列紧集), 则称T 是一个紧算子 (或称全连续算子). 以$K(X)$表示X上所有紧的有界线性算子构成的集合.

例4.23. $C[0,1]$上的Volterra积分算子是紧算子.

例4.24. X是Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$.

1. 若T是有限秩算子, 即$\dim \operatorname{ran}(T) < \infty$, 则$T$是紧的; 特别地, $0 \in K(X)$.

2. 若$\dim X < \infty$, 则$K(X) = \mathcal{B}(X)$.

定义4.25. 设$T \in \mathcal{B}(X)$, M是X的闭子空间.

1. 若存在$\delta > 0$使得
$$\|Tx\| \geq \delta\|x\|, \ \ \forall x \in M,$$
则称T在M上下方有界. 此时易证$T(M)$为X的闭子空间.

2. 若T在X上下方有界, 我们简称T是下方有界的. 可验证, *(a)*对于$\{x_n\} \subset X$, $\{Tx_n\}$为*Cauchy*列蕴含着$\{x_n\}$为*Cauchy* 列, *(b)* T映闭集为闭集.

推论4.26. 设X是无穷维Banach空间, $T \in \mathcal{B}(X)$. 那么

(i) 若T下方有界, 则T不是紧算子.

(ii) $\mathcal{G}(X) \cap \mathcal{B}(X) = \emptyset$. 特别地, $I \notin K(X)$.

(iii) $0 \in \cap_{A \in K(X)} \sigma(A)$.

证明: 只证明(i). 由X是无穷维Banach空间, 知存在$(X)_1$中有序列$\{x_n\}$无收敛子列. 由T下方有界，即存在常数$\delta > 0$使得$\|Tx\| \geq \delta\|x\|, \forall x \in X$. 便有$\|Tx_n - Tx_m\| \geq \delta\|x_n - x_m\|, \forall m, n$. 那么$\{Tx_n\}$无Cauchy子列. 由于$\{Tx_n\} \subset T((X)_1)$，知后者不是列紧的, 因此$T$也不是紧算子. □

定理4.27. 设X是非零Banach空间. 那么,

(i) $K(X)$是$\mathcal{B}(X)$的闭子空间;

(ii) 若$A \in K(X), B \in \mathcal{B}(X)$, 则$AB, BA \in K(X)$;

(iii) 若$A \in K(X), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, x_n \xrightarrow{w} x_0 \in X$, 则$Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax_0$.

(iv) 若$A \in K(X)$, 则$\operatorname{ran} A$ 是可分的.

(v) 若$A \in \mathcal{B}(X)$, 则$A \in K(X)$当且仅当$A' \in K(X')$.

(vi) 若X是Hilbert空间, 则$A \in K(X)$当且仅当$A^* \in K(X)$.

证明: (i) 只需证明$K(X)$封闭于加法、数乘运算, 且是范数闭的. 前两者较为明显. 我们只证明$K(X)$是范数闭的.

设$\{A_n\} \subset K(X)$且$A_n \to A \in \mathcal{B}(X)$. 只需证明$A \in K(X)$, 即证明$A((X)_1)$是列紧集. 因为$X$是Banach空间, 只需证明$A((X)_1)$是完全有界的.

对任意$\varepsilon > 0$, 存在n使得$\|A_n - A\| < \varepsilon/2$. 而$A_n$紧，可知$A_n((X)_1)$是完全有界集. 那么存在有限的$\varepsilon/2$网, 即存在有限个元$x_1, \cdots, x_k \in X$使得$A_n((X)_1) \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon/2)$. 由$\|A_n - A\| < \varepsilon/2$, 不难验证$A((X)_1) \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon)$. 这便证明了$A((X)_1)$是完全有界的.

(ii) 根据定义, 这是简单的练习.

(iii) 设$A \in K(X)$, $\{x_n\} \subset X$且$x_n \xrightarrow{w} x_0 \in X$. 只需证明$Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax_0$.

反证法. 若不然, 则存在$\varepsilon > 0$以及$\{n_i\}$使得$\|Ax_{n_i} - Ax_0\| \geq \varepsilon, \forall i \geq 1$.

由A是紧的, $\{Ax_{n_i}\}$必有收敛子列, 不妨设其本身就是收敛的, 且收敛到$y_0 \in X$. 则$\forall f \in X'$, 有$f(Ax_{n_i}) \to f(y_0)$. 而$f \circ A \in X'$且$x_{n_i} \xrightarrow{w} x_0$, 则$f(Ax_{n_i}) \to f(Ax_0)$, 进而$f(y_0) = f(Ax_0)$. 由$f \in X'$ 是任意的, 知$Ax_0 = y_0$. 于是$Ax_{n_i} \to Ax_0$. 矛盾.

(iv) 设$A \in K(X)$. 由于X可写成一列有界集合的并, 比如$X = \cup_n E_n$, 这里$E_n = \{x \in X : \|x\| \leq n\}$. 那么

$$\operatorname{ran}(A) = A(X) = \cup_n A(E_n).$$

A紧而E_n有界, 则$A(E_n)$是列紧集, 因此有至多可数稠密子集. 进而$\operatorname{ran}(A)$有至多可数稠密子集.

(v) “$\Longrightarrow$”. 设$A \in K(X)$. 下面证明$A' \in K(X')$. 任取X'中的有界列$\{f_n\}$, 只需证明$\{A'f_n\} = \{f_n \circ A\}$ 有Cauchy子列.

记$\Delta = \overline{A((X)_1)}$. 则$\Delta$为$X$的紧子集, 且$\{f_n\} \subset C(\Delta)$是一致有界同等连续的函数列. 因此必有子列$\{f_{n_k}\}$ 作为$C(\Delta)$中函数是Cauchy 列. 那么对任意$\varepsilon > 0$, 存在自然数s, 使得$l, k > s$时, $\sup_{y \in \Delta} |f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y)| < \varepsilon$; 这意味着

$$\sup_{x \in (X)_1} |f_{n_k}(Tx) - f_{n_l}(Tx)| < \varepsilon,$$

即$\|f_{n_k} \circ T - f_{n_l} \circ T\| < \varepsilon$. 那么$\{f_{n_k} \circ T\}$为Cauchy列.

“$\Longleftarrow$”. 假设T'是紧算子, 则由必要性的证明，可知T''是紧算子.

设$\tau : X \to X''$是典型映射. 因τ是等距, $\tau((X)_1)$是X''中有界集合. 则$T''(\tau((X)_1)) = \tau(T((X)_1))$是列紧集. 再由$\tau$是等距，可知$T((X)_1)$是列紧集合. 那么$T$是紧算子.

(vi) 任取X中的有界列$\{x_n\}$. 假设$\varphi_{x_n} \in X'$, 定义作$\varphi_{x_n}(x) = \langle x, x_n\rangle$. 那么$\{\varphi_{x_n}\}$为$X'$中的有界列. 根据(iv), T'紧, 则$\{T'(\varphi_{x_n})\}$有收敛子列$\{T'(\varphi_{x_{n_k}})\}$, 即有$\{\varphi_{T^* x_{n_k}}\}$是Cauchy列. 等价地, $\{T^* x_{n_k}\}$是Cauchy 列. 这说明T^*是紧算子. □

推论4.28. 对每个自然数n, (X_n, d_n)是距离空间, y_n是X_n中的一个序列, 且任意子列都有收敛子列. 那么存在$\mathbb{N}$的子列$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$使得, 对任意n, y_n 的$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ 位置的元素构成y_n的一个收敛子列.

注4.29. 上述定理表明, 紧算子的极限仍为紧算子. 又因为有限秩算子皆为紧算子, 那么有限秩算子的极限也为紧算子. 很自然要问: 是否紧算子必为有限秩算子的极限? P. Enflo于1972 年给出了一个反例(参见[11]). 但对于Hilbert空间，上述问题的答案是肯定的(参见推论4.54).

下面我们对紧算子的谱给出大致的刻画.

注4.30. 若X是n维赋范线性空间, 则$\mathcal{B}(X) = K(X)$. 进而, 对于复平面的紧子集Γ, 下述等价:

(i) Γ是某$T \in K(X)$的谱,

(ii) Γ是某个$T \in \mathcal{B}(X)$的谱,

(iii) $1 \le \operatorname{card} \Gamma \le n$.

无穷维空间上的紧算子T均不是有界可逆的, 即$0 \in \sigma(T)$. 因此, 我们主要关注非零的λ是否落在$\sigma(T)$中.

定理4.31. X是非零Banach空间, $A \in K(X)$, $\lambda \neq 0$. 那么

(i) $\dim \ker(A - \lambda) < \infty$;

(ii) ran$(A - \lambda)$闭;

(iii) ran$(A - \lambda) = {}^0\ker(A' - \lambda)$, ran$(A' - \lambda) = \ker(A - \lambda)^0$;

(iv) 若$\dim \ker(A - \lambda) = 0$, 则$A - \lambda$是满射（因此有界可逆）;

(v) $A-\lambda$是单射当且仅当$A-\lambda$是双射当且仅当$A-\lambda$有界可逆.

证明: (i) 反证法. 若不然, 则$\dim\ker(A-\lambda I)=\infty$, 即$\ker(A-\lambda I)$是$X$的无穷维闭子空间. 根据Riesz 引理, 存在单位向量$\{x_n\}\subset\ker(A-\lambda I)$使得

$$\|x_n-x_m\|\geq 1/2,\quad \forall n,m\geq 1, n\neq m. \tag{12}$$

于是$Tx_n=\lambda x_n, n\geq 1$. 由$T$紧, $\{x_n\}$是有界列, 则$\{Tx_n\}$有收敛子列, 即$\{\lambda x_n\}$ 有收敛子列. 进一步地, $\{x_n\}$ 有收敛子列. 矛盾于(12).

(ii) 由(i), $\ker(A-\lambda)$是至多有限维子空间. 则$\ker(A-\lambda)$有拓扑补, 设$\mathcal{M}$是一个拓扑补. 那么

$$\text{ran}(A-\lambda)=(A-\lambda)(X)=(A-\lambda)(\mathcal{M}).$$

断言: 存在$M>0$ s.t. $\|(A-\lambda)x\|\geq M\|x\|, \forall x\in\mathcal{M}$.

若不然, 则存在单位向量列$\{x_n\}\subset M$使得$(A-\lambda)x_n\to 0$.

由A紧, 则$\{Ax_n\}$有收敛子列, 不妨设本身就收敛, 且收敛到y_0. 则$\lambda x_n\to y_0$. 进而$y_0\in\mathcal{M}, y_0\neq 0$, 且$\lambda Ax_n\to Ay_0$. 于是$Ay_0=\lambda y_0$, $(A-\lambda I)y_0=0$, $y_0\in\ker(A-\lambda)$. 则$y_0\in\mathcal{M}\cap\ker(A-\lambda)$, $y_0=0$. 矛盾.

往证$(A-\lambda)(\mathcal{M})$是闭的. 任取$z_0\in\overline{(A-\lambda)(\mathcal{M})}$. 则有$\{z_n\}\subset\mathcal{M}$使得$(A-\lambda)z_n\to z_0$. 由断言可见, $\{z_n\}$是Cauchy列, 因此是收敛列. 假设$z_n\to z\in\mathcal{M}$. 则$(A-\lambda)z_n\to(A-\lambda)z$. 则$z_0=(A-\lambda)z\in(A-\lambda)(\mathcal{M})$.

(iii) 由(ii)和闭值域定理, 这是显然的.

(iv) 反证法. 若不然, 则$\text{ran}(A-\lambda I)\neq X$.

为简便, 记$T=A-\lambda I$. 则$T(X)\neq X$. 由条件, T是单射, 则$T^2(X)=T(T(X))\neq T(X)$, 即$T^2(X)\subsetneq T(X)$. 进一步地, $T^n(X)\supsetneq T^{n+1}(X), \forall n=1,2,3,\cdots$.

由(ii)的证明, T是下方有界的, 则恒映闭集为闭集. 则$\{T^n(X):n\geq 0\}$是X闭子空间序列, 且严格单调下降. 利用Riesz引理, 存在单位向量列$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$使得$y_n\in T^n(X)$且

$$\text{dist}(y_n,T^{n+1}(X))\geq\frac{1}{2},\quad\forall n\geq 0.$$

易见$m>n$时,

$$\|Ay_n-Ay_m\|=\|\lambda y_n+(A-\lambda I)y_n-Ay_m\|=|\lambda|\|y_n+\frac{1}{\lambda}(A-\lambda I)y_n-\frac{1}{\lambda}Ay_m\|.$$

可验证$\frac{1}{\lambda}(A-\lambda I)y_n-\frac{1}{\lambda}Ay_m\in T^{n+1}(X)$. 这说明$\|Ay_n-Ay_m\|\geq\frac{|\lambda|}{2}$. 则$\{Ay_n\}$没有收敛子列. 由于$\{y_n\}$是有界列, 这矛盾于$A$是紧算子. $\square$

由上述定理, 可见下面的重要推论.

定理4.32 (两择一定理)**.** 若X是非零Banach空间, $A \in K(X)$, $\lambda \neq 0$, 则或者$\lambda \in \sigma_p(T)$, 或者$\lambda \in \rho(T)$.

推论4.33. 若X是非零Banach空间, $A \in K(X)$, 则

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}, \quad \sigma(T) \cup \{0\} = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

推论4.34. 若X是非零Banach空间, $A \in K(X)$, $\lambda \neq 0$, 则下述等价*:*

(i) $A - \lambda$是双射.

(ii) $A - \lambda$是满射.

(iii) $A - \lambda$是单射.

(iv) $A' - \lambda$是单射.

(v) $A' - \lambda$是满射.

(vi) $A' - \lambda$是双射.

证明*:* 由前面的定理可知$A - \lambda$是闭值域的, 进而$A' - \lambda$也是闭值域的. 于是总有

$$\mathrm{ran}(A-\lambda)^0 = \ker(A'-\lambda), \mathrm{ran}(A'-\lambda) = \ker(A-\lambda)^0.$$

则$A - \lambda$满射蕴含着$A' - \lambda$是单射, $A' - \lambda$满射蕴含着$A - \lambda$是单射. 则可按照下面的过程证明结论: (iii)$\Longrightarrow$(i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(iii). □

例4.35. *1.* 存在紧算子T使得$0 \notin \sigma(T)$.

2. 存在紧算子T使得$0 \in \sigma_c(T)$.

3. 存在无穷维空间上非零紧算子T使得$0 \in \sigma_p(T)$.

4. 存在紧算子T使得$0 \in \sigma_r(T)$.

定理4.36. 若X是Banach空间, $T \in K(X)$, 则$\sigma_p(T)$ 没有非零聚点*(*这也说明$\sigma(T)$ 没有非零聚点*)*.

证明: 反证法. 若不然, 则存在两两不同的非零特征值$\{\lambda_n\}$收敛到λ_0, 而λ_0 仍是T的非零特征值. 则$\delta = \inf_n |\lambda_n| > 0$.

对每个n, 取非零向量$x_n \in \ker(\lambda_n - T)$, 并定义$\mathcal{M}_n = \vee\{x_1, \cdots, x_n\}$. 由习题4.1.7, $\{\mathcal{M}_n\}$是X的严格单调递增的有限维子空间.

由Riesz引理, 对每个$n \geq 2$, 可取到单位向量$y_n \in \mathcal{M}_n$使得$\mathrm{dist}(y_n, \mathcal{M}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. 由$T$是紧的, 则$\{Ty_n\}_{n=2}^{\infty}$应该有收敛子列. 但注意到$n < m$时,

$$\begin{aligned}\|Ty_n - Ty_m\| &= \|Ty_n + \lambda_m y_m - Ty_m - \lambda_m y_m\| \\ &= |\lambda_m| \cdot \|y_m - \frac{1}{\lambda_m}[Ty_n + (\lambda_m - T)y_m]\|.\end{aligned}$$

根据习题4.1.7, $\frac{1}{\lambda_m}[Ty_n + (\lambda_m - T)y_m] \in \mathcal{M}_{m-1}$. 则$\|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_m|/2 \geq \delta/2$. 则$\{Ty_n\}_{n=2}^{\infty}$无收敛子列. 矛盾. $\square$

注4.37. 关于紧算子的谱理论称为Riesz-Schauder理论.

定理4.38 (*). 若X是Banach空间, $T \in K(X), \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则$\dim\ker(\lambda I - T) = \dim\ker(\lambda I - T)'$.

证明: 不妨设$\lambda = 1$. 因为T, T'皆为紧算子, 则$\dim\ker(I - T) < \infty, \dim\ker(I - T)' < \infty$. 任取$\mathrm{ran}(I - T)$的一个代数补$M$. 注意到$\ker(I - T)' = \mathrm{ran}(I - T)^0$. 则$M_0$必为有限维, 因此是$X$的闭子空间, 而且$\dim M_0 = \dim\ker(I - T)'$. 往证$\dim\ker(I - T) = \dim M_0$.

由推论4.34, $\dim\ker(I - T) = 0$等价于$\dim M_0 = 0$. 因此我们不妨设$\dim\ker(I - T) \neq 0 \neq \dim M_0$. 取$\ker(I - T)$的一个拓扑补$M_1$.

设$\{x_1, \cdots, x_m\}$为$\ker(I - T)$的Hamel基, $\{y_1, \cdots, y_n\}$为M_0的Hamel基. 下面分情况讨论.

首先假设$m < n$. 可构造算子$F \in \mathcal{B}(X)$使得$F(x_i) = y_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 而且$M_1 \subset \ker F$. 那么$F$是有限秩算子, $\mathrm{ran}\, F = \vee\{y_1, \cdots, y_m\}, T - F \in K(X)$. 可验证$I - (T - F) = I - T + F$是单射，但$\mathrm{ran}(I - (T - F)) \subset \mathrm{ran}(I - T) + \mathrm{ran}\, F \subset \mathrm{ran}(I - T) + \vee\{y_1, \cdots, y_m\} \neq X$. 这矛盾于推论4.34.

其次假设$n < m$. 可构造算子$F \in \mathcal{B}(X)$使得$F(x_i) = y_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 而且$\{x_i : n + 1 \leq i \leq m\} \cup M_1 \subset \ker F$. 那么$F$是有限秩算子, $\mathrm{ran}\, F = \vee\{y_1, \cdots, y_n\}, T - F \in K(X)$. 可验证$I - (T - F) = I - T + F$是满射，但$\{x_i : n + 1 \leq i \leq m\} \subset \ker(I - T) \cap \ker F \subset \ker(I - (T - F))$. 这矛盾于推论4.34. $\square$

习题

4.3.1 (紧算子的等价刻画)**.** 若T是Banach空间X上的有界线性算子, 则下述等价

(a) $T \in K(X)$*;*

(b) T映有界集为列紧集*;*

(c) T映有界列为有收敛子列的序列.

4.3.2. X是有限维赋范线性空间, $\{e_1, \cdots, e_n\}$为X的Hamel基. $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. 对任意$x \in X$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, 定义

$$Tx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i.$$

证明*:* $T \in \mathcal{B}(X)$且$\sigma(T) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

4.3.3. X是Banach空间, $A \in K(X)$. 证明*:* 若M是X的闭子空间, 则$(A-I)(M)$也是X 闭子空间.

4.3.4. 设T是Banach空间X上的紧算子. 证明：存在有限维的闭子空间M使得

(a) $\|Tx\| \geq \|x\|, \forall x \in M$

(b) $\forall y \notin M$, 存在$x \in M$, 使得$\|T(x+y)\| < \|x+y\|$.

4.3.5. 假设$K(s,t)$是$[0,1]$上的二元的复值连续函数. 对$f \in C[0,1]$, 定义

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(s,t) f(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

证明*:* T是$C[0,1]$上的有界线性算子且是紧的.

4.3.6. 证明*:* 若X是无穷维Banach空间, 则$\mathrm{dist}(I, K(X)) = 1$.

4.3.7. 证明*:* 若X是无穷维Banach空间, $K \in K(X)$, 则$\|I + K\| \geq \|K\|/2$.

4.3.8. X是非零且自反的Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$. 证明*:* 若A总是映X中的弱收敛列为X 中的范数收敛列, 则A 是紧算子.

4.4 自伴算子

本节里将介绍Hilbert空间上一类重要的算子–自伴算子.

定义4.39. 称Hilbert空间H上的有界线性算子A是自伴的, 若$A = A^*$.

例4.40. 设$T \in \mathcal{B}(H)$. 那么

1. $T + T^*,\ \ T^*T,\ TT^*$是自伴算子.

2. $0, I$是自伴算子.

3. 正交射影是自伴算子.

4. T可写成自伴算子的线性组合, 即$T = A + \mathrm{i}B$, 其中

$$A = \frac{T + T^*}{2}, \qquad B = \frac{T - T^*}{2\mathrm{i}}$$

均为自伴算子.

5. 若$A, B \in \mathcal{B}(H)$自伴,$\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 则下列算子都是自伴的

$$\alpha A, \quad A + B, \quad A^n, \quad AB + BA.$$

下面我们将研究自伴算子的基本性质. 对每一自伴算子$A \in \mathcal{B}(H)$, 它所决定的复数集$\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$将发挥决定性作用.

定义4.41. 对于$T \in \mathcal{B}(H)$, 定义

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\},$$

称之为T的数值域. 称$\sup_{x\in H, \|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$为$T$的数值半径，记作$w(T)$.

记号4.42. 对于$\mathbb{R}$的非空有界子集Γ, 记$\inf \Gamma = \inf\{a : a \in \Gamma\}$, $\sup \Gamma = \sup\{a : a \in \Gamma\}$.

注4.43. 设$T \in \mathcal{B}(H)$, T诱导的H上的有界双线性泛函φ定义如下:

$$\varphi(x, y) = \langle Tx, y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

显然, φ下方有界当且仅当$\inf_{z\in W(T)} |z| > 0$.

下面的定理总结了关于自伴算子的范数与谱的基本性质.

定理4.44. *(i)* $A \in \mathcal{B}(H)$是自伴的当且仅当 $W(A) \subset \mathbb{R}$.

(ii) 若$A \in \mathcal{B}(H)$是自伴算子, 则
(a) $\|A\| = r(A) = \sup\{|z| : z \in W(A)\}$;
(b) $\inf W(A), \sup W(A) \in \sigma(A) \subset [\inf W(A), \sup W(A)]$.

先介绍一个有用的引理.

引理4.45. 若$T \in \mathcal{B}(H)$, 则$T = 0$ 当且仅当$w(T) = 0$, 等价地, $\langle Tx, x\rangle = 0, \forall x \in H$.

证明. 对任意$T \in \mathcal{B}(H)$, 注意到

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle = &\frac{1}{4}\Big[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\Big] \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{4}\Big[\langle T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y\rangle - \langle T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y\rangle\Big].\end{aligned}$$

因此$T = 0$当且仅当$\langle Tx, y\rangle = 0, \forall x, y \in H$ 当且仅当$\langle Tx, x\rangle = 0, \forall x \in H$. □

证明(定理4.44 (i) & (ii) (a)): (i) $\Longrightarrow$是显然的.

$\Longleftarrow$. 易见

$$\begin{aligned}A = A^* &\Leftrightarrow A - A^* = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (A - A^*)x, x\rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle = \langle A^*x, x\rangle, \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle, \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.\end{aligned}$$

因此$A = A^*$当且仅当$W(A) \subset \mathbb{R}$.

(ii) (a) "$\|A\| = r(A)$". 注意到

$$\begin{aligned}\|A\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax\rangle \\ &= \sup_{\|x\|=1} \langle A^2x, x\rangle \le \|A^2\| \le \|A\|^2.\end{aligned}$$

则$\|A^2\| = \|A\|^2$. 进一步地, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. 则易见结论成立.

"$\|A\| = \sup\{|z| : z \in W(A)\}$". 记$\delta = \sup\{|z| : z \in W(A)\}$. 显然, $\delta \le \|A\|$.

断言: 对任意单位向量$x, y \in H$, 有$\text{Re}\langle Ax, y\rangle \le \delta$.

注意到

$$\begin{aligned} 4\text{Re}\langle Ax, y\rangle &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\le \delta(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ &= 2\delta(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4\delta. \end{aligned}$$

证得断言.

对任意单位向量$x, y \in H$, 存在模为1的复数α使得$\alpha\langle Ax, y\rangle = |\langle Ax, y\rangle|$. 则

$$|\langle Ax, y\rangle| = \langle A(\alpha x), y\rangle = \text{Re}\langle A(\alpha x), y\rangle \le \delta.$$

则$\|A\| \le \delta$. 进一步地, $\|A\| = \delta$. □

为证明定理4.44 (ii)(b) , 我们需要做点准备. 首先, 自伴算子的有界可逆性和下方有界性质是等价的.

引理4.46. 设$A \in \mathcal{B}(H)$. 那么

(i) A有界可逆当且仅当A和A^*均下方有界.

(ii) 若A自伴, 则A有界可逆当且仅当A 下方有界.

(iii) 若$\langle Ax, x\rangle \ge 0, \forall x \in H$, 则$\|A\| \in \sigma(A)$.

证明: (i) 注意到下方有界蕴含着值域是闭的, 而且

$$\overline{\text{ran}\, A}^{\perp} = \ker A^*, \quad \overline{\text{ran}\, A} = (\ker A^*)^{\perp}.$$

(ii) 这是(i) 的直接推论.

(iii) 显然, A是自伴的. 而且由上一定理的(ii), $\|A\| = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$. 则存在单位向量列$\{x_n\}$使得$\langle Ax_n, x_n\rangle \to \|A\|$. 那么

$$\begin{aligned} \|(A - \|A\|I)x_n\|^2 &= \langle (A - \|A\|I)x_n, (A - \|A\|I)x_n\rangle \\ &= \|Ax_n\|^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|\langle Ax_n, x_n\rangle \\ &\le \|A\|^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|\langle Ax_n, x_n\rangle \to 0. \end{aligned}$$

这说明$A - \|A\|I$不是下方有界的, 因此也不是有界可逆的. 则$\|A\| \in \sigma(A)$. □

定义4.47. 若$T \in \mathcal{B}(H)$且$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$, 则称$T$是一个<u>正算子</u>. 显然, 正算子都是自伴的，而且T是正算子当且仅当$W(T) \subset [0, +\infty)$.

证明(定理4.44(ii) (b)): 令$m = \inf W(A), M = \sup W(A)$.

"$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$". 设$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. 可设$\alpha = a + \mathrm{i}b$, 其中$b \neq 0$. 对任意$x \in H$,

$$\begin{aligned}\|(A-\alpha)x\|^2 &= \langle (A-\alpha)x, (A-\alpha)x\rangle \\ &= \langle (A-\alpha)^*(A-\alpha)x, x\rangle \\ &= \langle (A-aI)^2x, x\rangle + |b|^2\langle x, x\rangle \geq |b|^2\langle x, x\rangle.\end{aligned}$$

于是$\|(A-\alpha)x\| \geq |b| \cdot \|x\|, \forall x \in H$. 即$A-\alpha$下方有界. 另外, $(A-\alpha)^* = A - \overline{\alpha}$. 因此可类似地证明$(A-\alpha)^*$下方有界. 则$A-\alpha$ 有界可逆.

"$m \in \sigma(A) \subset [m, \infty)$." 注意到$M-A$是自伴的. 对任意单位向量$x \in H$, $\langle (M-A)x, x\rangle = M - \langle Ax, x\rangle \geq 0$，则

$$\|M-A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle (M-A)x, x\rangle = M - m.$$

则$M-m \in \sigma(M-A)$且$t < m$时$M-t > M-m$, $(M-t)-(M-A)$有界可逆. 即$m \in \sigma(A) \subset [m, \infty)$.

"$M \in \sigma(A) \subset (-\infty, M]$." 注意到$A-M$是自伴的. 对任意单位向量$x \in H$, $\langle (A-m)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - m \geq 0$，则

$$\|A-m\| = \sup_{\|x\|=1} \langle (A-m)x, x\rangle = M - m.$$

则$M-m \in \sigma(A-m)$且$t > M$时$t-m > M-m$, $(t-m)-(A-m)$有界可逆. 即$M \in \sigma(A) \subset (-\infty, M]$.

以上的论证表明$m, M \in \sigma(A) \subset [m, M]$. 证完. □

推论4.48. 设$T \in \mathcal{B}(H)$是自伴算子. 那么, $T \geq 0$当且仅当$\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.

定义4.49. 设X是非零Banach空间, $A \in \mathcal{B}(X)$. 记

$$\sigma_a(A) = \{z \in \mathbb{C} : zI - A\text{不是下方有界的}\},$$

称之为A 的<u>近似点谱</u>. 显然, $z \in \sigma_a(A)$当且仅当存在一列单位向量$\{x_n\}$使得$(z-A)x_n \to 0$. 此即术语" 近似点谱"的由来.

注4.50. 若$T \in \mathcal{B}(X)$, 则$\sigma_p(T) \subset \sigma_a(T) \subset \sigma(T)$.

推论4.51. 设H是Hilbert空间, $A \in \mathcal{B}(H)$是自伴算子. 那么

(i) $\sigma_a(A) = \sigma(A)$.

(ii) $\sigma_r(A) = \emptyset$.

(iii) A的不同特征值对应的特征向量正交.

定理4.52. 若$T \in \mathcal{B}(H)$是紧的自伴算子, 则存在H的ONB恰由T的若干特征向量构成.

证明: 我们先证明一个断言.

断言一. T有特征向量, 等价地, T有特征值, 即点谱非空.

若T有非零谱点z, 则由T紧, 二择一定理意味着z是特征值; 若T没有非零谱点, 则T谱半径为0, 则范数也为0, 则$T = 0$, $0 \in \sigma_p(T)$. 证得断言.

不妨设$\sigma_p(T) = \{\lambda_i : i \in \Lambda\}$.

对每个i, 记$H_i = \ker(T - \lambda_i)$, 并设$S_i$为$H_i$的一个ONB. 由于自伴算子的不同特征值对应的特征向量是正交的, 则易见$S \doteq \cup_i S_i$ 是H 的一个ONS. 往证S是ONB. 只需证明$M = S^{\perp} = \{0\}$. 显然$H_i \perp M, \forall i$.

反证法. 下面假设$M \neq \{0\}$.

断言二: $T(M) \subset M$.

任意固定$x \in M$. 则$\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in S$. 注意到$S$中的任意向量$y$都是$T$的特征向量, 则$Ty$是$y$的一个倍数, 则$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$. 则$Tx \in M$.

断言三: $T|_M$是非零Hilbert空间上的自伴算子且是紧的.

紧是显然的. $\forall x \in M$, $\langle (T|_M)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. 则$T|_M$是自伴算子.

由断言一, 非零Hilbert空间上的紧算子必有特征向量. 则存在非零向量$x \in M$ 以及实数λ s.t. $(T|_M)x = \lambda x$. 即$Tx = \lambda x$. 则λ是T的特征值, λ恰为某个λ_i, $x \in H_i$. 矛盾于$x \in M \subset H_i^{\perp}$. 证完. □

注4.53. 设H是可分无穷维的Hilbert空间, 若$T \in \mathcal{B}(H)$是紧的自伴算子, 则T是一个对角算子，即T关于某正规正交基$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$的表示矩阵是一个对角矩阵.

推论4.54. 若$T \in K(H)$, 则存在有限秩算子$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H)$, 使得$\lim_n T_n = T$.

证明: 显然, 我们不妨假设T是紧自伴算子. 事实上, 存在自伴算子$A, B \in \mathcal{B}(H)$使得$T = A + \mathrm{i}B$. 因T是紧的, 容易看出A, B是紧的. 因此只需证明紧自伴算子是有限秩算子的极限, 便可知T是有限秩算子的极限.

任取$\varepsilon > 0$. 下面我们将取有限秩算子$T_\varepsilon \in \mathcal{B}(H)$使得$\|T_\varepsilon - T\| \le \varepsilon$.

由定理4.52, 可取H的ONB$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$使得$e_\lambda$ 为T的特征向量. 由T自伴, 可取$\{a_\lambda\} \subset \sigma_p(T)$使得$Te_\lambda = a_\lambda e_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$.

记$\Lambda_\varepsilon = \{\lambda \in \Lambda : |a_\lambda| \ge \varepsilon\}$ and $\Lambda' = \Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon$.

断言: Λ_ε至多有限集合.

事实上, 若不然，则Λ_ε是无穷集合, 可取到一可数子集$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\} \subset \Lambda_\varepsilon$. 注意到$\{e_{\lambda_i}\}_{i\ge 1}$是一列有界向量, 但

$$\|Te_{\lambda_i} - Te_{\lambda_j}\| = \|a_{\lambda_i}e_{\lambda_i} - a_{\lambda_j}e_{\lambda_j}\| = (a_{\lambda_i}^2 + a_{\lambda_j})^{1/2} > \sqrt{2}\varepsilon, \quad i \ne j,$$

矛盾于T是紧的, $\{Te_{\lambda_i}\}_{i\ge 1}$有收敛子列.

以P表示从H到$\vee\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_\varepsilon\}$的正交射影. 令$T_\varepsilon = PT$. 则$T_\varepsilon \in \mathcal{B}(H)$ 是有限秩算子, 因为$\mathrm{ran}T_\varepsilon \subset \vee\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_\varepsilon\}$.

对任意$x \in H$, 假设$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda e_\lambda$. 那么$Tx = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda a_\lambda e_\lambda$,

$$T_\varepsilon x = PTx = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda a_\lambda P e_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda_\varepsilon} b_\lambda a_\lambda e_\lambda,$$

$$\|Tx - T_\varepsilon x\|^2 = \|\sum_{\lambda\in\Lambda'} b_\lambda a_\lambda e_\lambda\|^2 \le \sum_{\lambda\in\Lambda'} |b_\lambda a_\lambda|^2 \le \varepsilon^2 \cdot \left(\sum_{\lambda\in\Lambda'} |b_\lambda|^2\right) \le \varepsilon^2\|x\|^2.$$

那么$\|T_\varepsilon - T\| \le \varepsilon$. 证毕. □

定理4.55. Hilbert空间上有界的射影算子是正交射影的充要条件是它是自伴的.

证明: 必要性显然. 只证明充分性.

H_1, H_2是H的互为拓扑补的两个闭子空间. P是Hilbert空间H上的沿着$\{H_1, H_2\}$到H_1 的自伴的射影算子. 只需证明H_1和H_2互为正交补.

反证法. 若不然, 则存在$x \in H_1, y \in H_2$ 使得$\langle x, y\rangle \ne 0$. 则存在$\alpha \in \mathbb{C}$使得$\alpha\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. 那么

$$\langle P(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle = \langle \alpha x, \alpha x + y\rangle \notin \mathbb{R}.$$

矛盾于P是自伴的. □

习题

4.4.1. 设T是$L^2[0,1]$上乘以自变量的乘法算子, 即对任意$f \in L^2[0,1]$,

$$(Tf)(t) = tf(t), \quad t \in [0,1].$$

证明：$\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$.

4.4.2. 设T是Hilbert空间H上的有界线性算子且范数小于等于1. 证明: $\ker(T-I) = \ker(T^*-I)$.

4.4.3. 设$\{e_n : n \geq 1\}$是Hilbert空间H的一个ONB. 证明: 若$T \in \mathcal{B}(H)$ 且$\langle Te_n, e_m\rangle = \langle e_n, Te_m\rangle$, $\forall m,n \geq 1$, 则T是自伴的.

4.4.4. 设T是Hilbert空间H上的有界线性算子且是正算子, $x \in H$. 证明: $Tx = 0$当且仅当$\langle Tx, x\rangle = 0$.

4.4.5. 设A是Hilbert空间H上自伴的有界线性算子. 证明：若A自伴, 则$\|A^n\| = \|A\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.4.6. 设T是Hilbert空间H上的有界线性算子. 称T是<u>正规</u>的, 若$T^*T = TT^*$. 证明：若T是正规算子, 则$\|T^n\| = \|T\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$; 进而$\|T\| = r(T)$.

4.5 酉算子

n阶矩阵可视作Hilbert空间$\mathbb{C}^n$上的有界线性算子, 即$\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$中的元. 本节我们将介绍酉矩阵在$\mathcal{B}(H)$中的对应物–酉算子.

定义4.56. 设H是Hilbert空间, $T \in \mathcal{B}(H)$. 称T是一个<u>酉算子</u>, 若T有界可逆且保持内积, 即

$$\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

例4.57 (酉算子的例子)**.** *(i)* I, αI $(|\alpha| = 1)$

(ii) $L^2[0,1]$上乘以函数$e^{\mathrm{i}t}$的乘法算子$T : x(t) \mapsto e^{\mathrm{i}t}x(t)$.

(iii) $f \in L^2(\mathbb{R})$的Fourier变换$\hat{f}$定义为

$$\hat{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(t)e^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

那么$T : f \longmapsto \hat{f}$是$L^2(\mathbb{R})$上的酉算子.

引理4.58. 设H是Hilbert空间且$T \in \mathcal{B}(H)$. 那么下述等价:

(i) T保持内积;

(ii) T 保持范数;

(iii) $T^*T = I$.

证明: 由于$\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*Tx, y \rangle$, 则$T^*T = I$当且仅当$T$保内积. 即(i)$\Longleftrightarrow$(iii).

由极化恒等式, 易见(i)$\Longleftrightarrow$(ii)成立. □

定理4.59. 设H是Hilbert空间且$T \in \mathcal{B}(H)$. 那么下述等价:

(i) T是酉算子;

(ii) T是有界可逆且保范数（是等距）;

(iii) $T^*T = I = TT^*$.

(iv) T^*是酉算子.

证明: 由上一个引理, 这些条件的等价是显然的. □

定理4.60. 设H是Hilbert空间且$T \in \mathcal{B}(H)$.

(i) 若T是酉算子, 则$\|T\| = 1 = r(T)$.

(ii) 若T是酉算子, 则它的谱含于单位圆周$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

证明: (i)的证明留作练习.

(ii)只需证对任意模非1的复数z, 都有$zI - U$是有界可逆的.

$|z| < 1$时, $zI - U = U(zU^* - I)$. 注意到$\|zU^*\| = |z| < 1$, 则根据推论2.79, $zU^* - I$有界可逆. 进一步地, $zI - U$ 有界可逆.

$|z| > 1$时, $zI - U = z(I - \frac{U}{z})$. 注意到$\|U/z\| < 1$, 则根据推论2.79, $I - \frac{U}{z}$ 有界可逆. 进一步地, $zI - U$ 有界可逆. □

命题4.61. H上酉算子构成的集合$U(H)$是$\mathcal{G}(H)$的子群.

证明: 易见, $A, B \in \mathcal{B}(H)$是酉算子蕴含着AB是酉算子. 这表明$U(H)$是乘法封闭的, 即可见结论成立. □

利用自伴算子可以构造新的酉算子.

定理4.62 (Cayley变换)**.** 若A是自伴算子, 则它的Cayley变换$(A+\mathrm{i}I)(A-\mathrm{i}I)^{-1}$是酉算子.

证明: 因自伴算子的谱含于实直线, 故$A+\mathrm{i}I$, $A-\mathrm{i}I$均有界可逆. 记$T=(A+\mathrm{i}I)(A-\mathrm{i}I)^{-1}$. 注意到$(A+\mathrm{i}I)$,$(A-\mathrm{i}I)^{-1}$ 交换, 那么

$$T^*=(A+\mathrm{i}I)^{-1}(A-\mathrm{i}I)=(A-\mathrm{i}I)(A+\mathrm{i}I)^{-1}.$$

易见$T^*T=TT^*=I$. 则T是酉算子. □

定义4.63. 设H是Hilbert空间, $A,B\in\mathcal{B}(H)$. 若存在酉算子$U\in\mathcal{B}(H)$使得$AU=UB$, 则称A,B是<u>酉等价</u>的.

容易证明下面的命题成立.

命题4.64. 若A,B是酉等价的两个有界线性算子, 则下述成立*:*

(i) A,B的点谱、连续谱、剩余谱、谱、范数相同.

(ii) A是紧算子当且仅当B是紧算子.

(iii) A是自伴算子当且仅当B是自伴算子.

(iv) A是射影算子当且仅当B是射影算子.

习题

4.5.1. 证明*:* 对于$\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$的任意非空紧子集Γ, 存在酉算子U使得$\sigma(U)=\Gamma$.

4.5.2. 试在$L^2[0,1]$上构造一个点谱为空集的酉算子.

4.5.3. 证明命题4.64.

4.5.4. 设H是Hilbert空间且$T\in\mathcal{B}(H)$. 证明*:* T是酉算子当且仅当T^*是酉算子.

4.5.5. 设H是Hilbert空间且$T\in\mathcal{B}(H)$是酉算子. 证明*:* T是自伴的当且仅当存在H 的闭子空间M 使得

$$Tx=x,\ \ \forall x\in M,$$
$$Tx=-x,\ \ \forall x\in M^{\perp}.$$

4.5.6. 设H是Hilbert空间且$T\in\mathcal{B}(H)$是酉算子. 证明*:* T是射影当且仅当$T=I$.

附录

数学分析

数列极限

数列及其极限、基本性质(夹挤定理、唯一性、有界性、保号性、保序性、四则运算)

实数理论基本(单调有界原理、闭区间套定理、确界原理)

上、下极限，Cauchy列与Cauchy收敛准则，子数列与Bolzano-Weierstrass定理

函数与图形，常值函数、三角函数，反三角函数，指数函数，幂函数、Dirichlet函数、Riemann函数

函数极限及其基本性质（唯一性、局部有界性、保号性、保序性、四则运算)

函数极限与序列极限的关系(Heine定理)

函数的连续点、连续性、四则运算与复合

闭区间上连续函数的有界性、最值定理、介值定理、一致连续性

导数的物理背景(曲线在一点处的切线、变速直线运动的瞬时速度、非均匀杆的线密度)

无穷小量（高阶、同阶、等阶）

参考文献

[1] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴, 线性泛函分析入门, 上海科学技术出版社, 1979.

[2] 江泽坚, 孙善利, 泛函分析（第二版）, 高等教育出版社, 北京, 2005.

[3] 江泽坚, 吴智泉, 纪友清, 实变函数论, 高等教育出版社, 2007.

[4] J. L. Kelley, 一般拓扑学, 科学出版社, 1985, 吴从炘、吴让泉译.

[5] 孙善利, 王振鹏, 泛函分析, 北京航空航天大学出版社, 2008.

[6] 王振鹏, 泛函分析, 吉林大学出版社, 1990.

[7] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌，实变函数论与泛函分析(下册), 高等教育出版

[8] 尹景学, 王春朋, 杨成荣, 王泽佳, 数学物理方程, 高等教育出版社, 2010.

[9] N. Dunford, and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory, Wiley-Interscience, Hoboken, 1988

[10] J. Elton and E. Odell, *The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a $(1+\varepsilon)$-separated sequence*, Colloq. Math. **44** (1981), no. 1, 105–109.

[11] P. Enflo, A counterexample to the approximation property in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), pp. 309-317.

[12] Shaul R. Foguel, *On a theorem by A. E. Taylor*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 325.

[13] Robert C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 518–527.

[14] H. Elton Lacey, *The Hamel dimension of any infinite dimensional separable Banach space is c*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 298.

[15] Peter D. Lax, *Functional analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[16] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math. 9 (1971), pp. 263–269.

[17] George W. Mackey, *On infinite-dimensional linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 155–207.

[18] E. J. McShane, *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), no. 12, 837–842.

[19] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–541.

[20] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1987.