Decay summary

Rocco Suanno, Lorenzo Tasca

September 2023

1 Introduction

Risultati al 28/09 della discussione sui decadimenti.

2 Problemi aperti (da Govoni)

- Calcolare la distribuzione della distanza tra due decadimenti **successivi** e vedere se è distribuita secondo un esponenziale (Govoni).
- Controllare se τ è veramente la distanza media tra due decadimenti **successivi** (Govoni).

3 Legge dei decadimenti N(t) da principi primi

3.1 Principi primi affini con MQ (p*dt)

Assumiamo che gli N atomi siano dei sistemi **indipendenti** e che ciascun sistema abbia una probabilità di decadere **per unità di tempo** costante **p**. Quindi

Ogni ATOMO $p \cdot dt$ Prob. di Decade

$$\Rightarrow N(t+dt) = N(t)\left[1 - p\,dt\right]$$

$$\Rightarrow N(t+dt) - N(t) = -p\,dt\,N(t)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dN}{dt}\right|_t = -pN(t)$$

$$\Rightarrow \log \frac{N(t)}{N(t_0)} = -p(t-t_0)$$

$$\Rightarrow N(t) = N(t_0)\, e^{-p(t-t_0)}$$

3.2 Principi primi più deboli

Qui assumo che il decadimento sia un processo indipendente da come suddivido il campione in campioni più piccoli e che sia una funzione solo di N(t0) e t-t0 (non dipenda da t e t0 separatamente).

• $N(t) = f(N(t_0), t - t_0)$

↳ $N(t) = f(N(t_1), t - t_1) = f(f(N_0, t_1 - t_0), t - t_1)$

• Se $N(t_0) \begin{cases} \to x\, N(t_0) \\ \to (1-x)\, N(t_0) \end{cases}$ lo SPEZZO $(x \in [0,1])$

il # di DEC. NON DEVE CAMB.!

$$\Rightarrow f(x N(t_0), t - t_0) + f((1-x) N(t_0), t - t_0) = f(N(t_0), t - t_0)$$

OVVERO
- $f(N_0, \Delta t)$ è LINEARE in N_0
- $f(N_0, \Delta t) = f(f(N_0, \Delta t_1), \Delta t_2)$ CON $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$

1) $\Rightarrow f(N_0, \Delta t) = N_0\, g(\Delta t)$

$\Rightarrow$ ②: $N_0\, g(\Delta t) = f(N_0, \Delta t_1)\, g(\Delta t) = N_0\, g(\Delta t_1)\, g(\Delta t_2)$

$$\Rightarrow \boxed{g(\Delta t) = g(\Delta t_1) \cdot g(\Delta t_2)} \iff g(\Delta t) = g_0 e^{\alpha \Delta t}$$

$$\Rightarrow N(t) = f(N(t_0), t - t_0) = \boxed{N(t_0)\, g_0\, e^{\alpha (t - t_0)}}$$

• Altra proprietà: $N(t = t_0) = N(t_0) \Rightarrow \boxed{g_0 = 1}$

$$↳ \boxed{N(t) = N(t_0)\, e^{\alpha (t - t_0)}}$$

4 Poissoniana

Ogni atomo è un sistema indipendente. Data p la probabilità di decadimento per unità di tempo, allora p*dt è la probabilità di decadere in un tempo **piccolo** dt.

Fissando dt, avere N atomi che possono decadere con probabilità p*dt è come fare N tentativi di un processo con probabilità p*dt, quindi il numero di decadimenti (nel tempo dt) è descritto da una binomiale.

Nel limite in cui la probabilità del singolo evento (p*dt) è piccola ed il numero di tentativi (N) è grande, la binomiale tende ad una Poissoniana, dove $\lambda = N * p * dt$ è il numero medio di successi (decadimenti) nel tempo dt.

ATTENZIONE: $p{\cdot}dt$ è SOLO una approssimazione della probabilità di decadimento corretta $(1 - e^{-pdt}$ al primo ordine utile.

FRAZ. DECADUTA in Δt (t_0, t)

$$\frac{N(t_0)-N(t)}{N(t_0)} = 1 - e^{-p(t-t_0)} = 1-e^{-p\Delta t}$$

DA $t_0 \longrightarrow t$ [in Δt] OGNI ATOMO ha prob. di decadere $\boxed{1-e^{-p\Delta t}}$

Prob di avere k dec. su n atomi in dt è

$$\binom{n}{k}\left(1-e^{-p\Delta t}\right)^k \left(e^{-p\Delta t}\right)^{n-k}$$

$n=N(t)$ Grande

$1-e^{-p\Delta t}$ piccolo

(Δt piccolo)

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Prob. di avere k dec. al tempo t in Δt

$$\boxed{\lambda = \left(1-e^{-p\Delta t}\right) N(t_0)}$$

Che è il #o di ATOMI DECADUTI DOPO Δt

5 Distribuzione di probabilità del decadimento di un singolo atomo

La legge $N(t) = N(t_0)e^{-p(t-t_0)}$ descrive il numero di atomi sopravvissuti al tempo t. Quindi $N(t_0) - N(t)$ descrive il numero di atomi decaduti tra gli istanti t_0 e t, ovvero **entro il tempo t**.

Perciò è possibile calcolare quanti atomi decadono per unità di tempo, al tempo t, derivando l'espressione $N(t_0) - N(t)$ rispetto a t. Siccome gli $N(t_0)$ sistemi iniziali sono indipendenti, allora dividendo il risultato trovato (facendo la derivata) per $N(t_0)$ (numero di sistemi identici considerati), trovo la probabilità di decadimento per unità di tempo del singolo sistema indipendente (atomo):

$$\text{Prob(t)} = \frac{d}{dt}\frac{N(t_0) - N(t)}{N(t_0)} = \frac{d}{dt}(1 - e^{-p(t-t_0)}) = pe^{-p(t-t_0)}$$

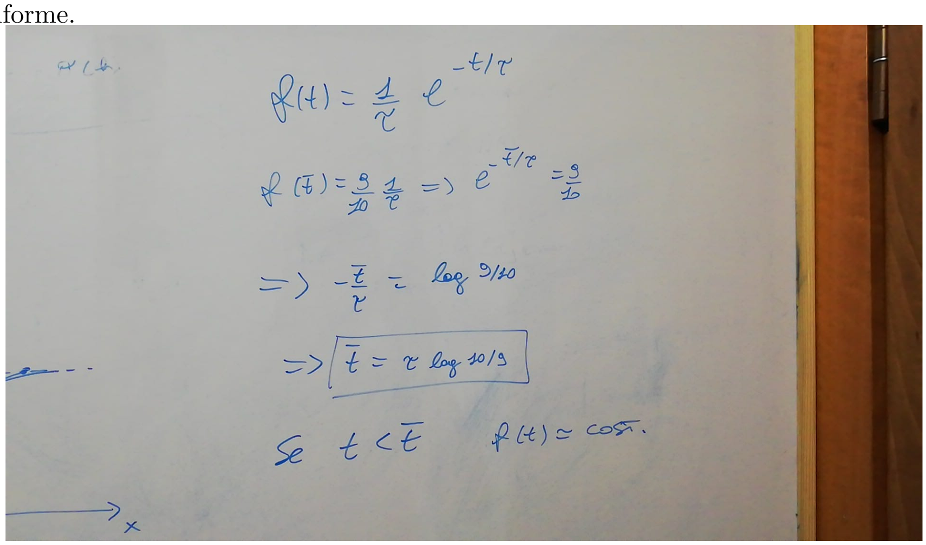
dove Prob(t)*dt è la probabilità che un singolo atomo decada nell'intervallo di tempo infinitesimo (t,t+dt).

6 Misure di breve durata e con numero di atomi non decrescente

6.1 Approssimazione per tempi corti rispetto τ

Questa riflessione è possibile grazie alla presenza del fattore p moltiplicativo nella probabilità Prob(t). Il tempo caratteristico di decadimento è $\tau = \frac{1}{p}$.

Il tempo che deve passare affinché Prob(t) si riduca del 10% rispetto al suo valore iniziale al tempo t_0, è circa $1/10\tau$. Quindi se τ è molto più grande del tempo dell'esperimento, allora i decadimenti sembrano seguire una distribuzione uniforme.



6.2 Se in numero di atomi non decresce $N(t) = N(t_0)$

Il decadimento è un processo che dipende solo da N_0 e $t - t0$ Se $N(t) = N_0$ costante, allora il numero di decadimenti deve essere lo stesso in un intervallo di tempo δt, indipendentemente da dove collochi δt, spieghiamo meglio:

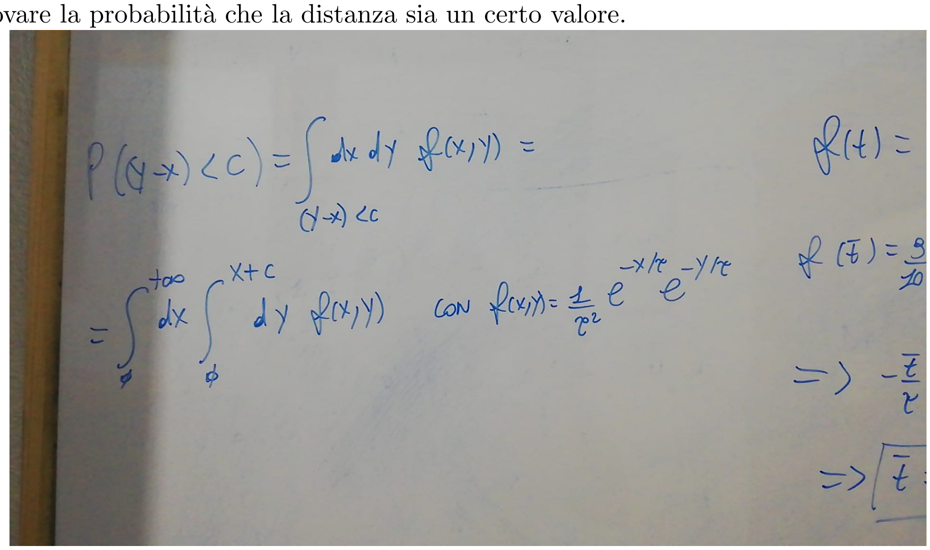
Se prendi degli istanti t_0, t_1, t_2 dove $\delta t = t_2 - t_1 = t_1 - t_0$, allora al tempo t_0 hai N_0 atomi, ma pure al tempo t_1 hai N_0 atomi. Siccome il numero di decadimenti entro $t2 - t_1$ dipende solo da $t_2 - t_1 = \delta t = t_1 - t_0$ ed $N1 = N0$, allora tra t_1 e t_2 vedo lo stesso numero di decadimenti che vedo tra t_0 e t_1.

Quindi gli istanti dei decadimenti sono **uniformemente** distribuiti.

NOTA: δt in questo ragionamento non è necessariamente infinitesimo.

6.3 Distribuzione della distanza tra due decadimenti

Considerando che due decadimenti sono indipendenti e conoscendo la distribuzione del tempo di decadimento (esponenziale), è possibile calcolare la probabilità che la distanza tra due decadimenti sia minore di un certo valore e quindi, derivando, trovare la probabilità che la distanza sia un certo valore.



Esce anche qui un esponenziale.