Il ruolo del rumore nella misura dello stato di un qubit superconduttivo

Rocco Suanno

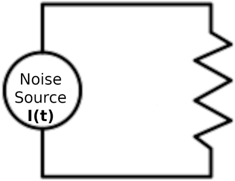
Dipartimento di Fisica "Giuseppe Occhialini"
Università degli Studi di Milano-Bicocca

Argomenti

- Noise power spectrum
- Misura dello stato di un qubit superconduttivo
- Misure lente
- QND
- Limite quantistico

Noise power spectrum

Introduciamo alcuni strumenti



$I(t)$ r.v. $< I(t) >= 0$

Correlatore: $G_{II}(t,t') =< I(t)I(t') >$

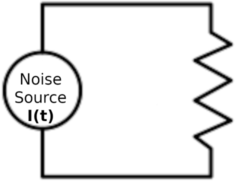
- x,y indipendenti $\implies$ $< xy >= 0$
- $t = t' \implies G_I(t,t) = \sigma^2_{I(t)}$.

Autocorrelazione: $R_I(t) =< I(t)I(0) >$
Noise power spectrum:

$$S_{II}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dte^{-i\omega t} < I(t)I(0) >$$

Noise power spectrum (Interpretazioni)

1) Potenza del rumore



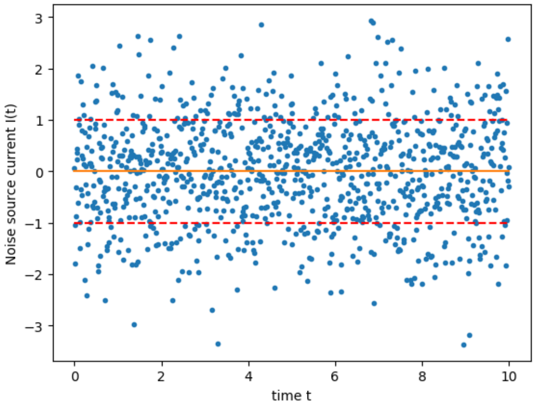
Potenza istantanea: $P(t) = RI^2(t)$
Potenza media: $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T dt I^2(t)$

$$\bar{P} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{II}(\omega) d\omega \qquad (R = 1)$$

$S(\omega)d\omega$ è la potenza trasferita al sistema alla frequenza ω.

Noise power spectrum (Interpretazioni)

2) Varianza



Varianza di $I(t)$:

$$\sigma^2_{I(t)} = < I^2(t) >$$

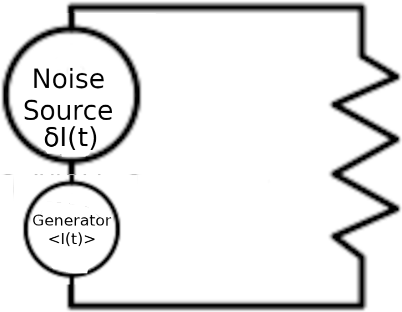
Rumore è stazionario:

$$\sigma^2_{I(t)} = \sigma^2_{I(0)} = R_I(0)$$

$$\sigma^2_I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{II}(\omega)$$

Noise power spectrum (Interpretazioni)

2) Varianza



Correlatore reale

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{II}(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} d\omega S_{II}(\omega)$$

In presenza di filtri

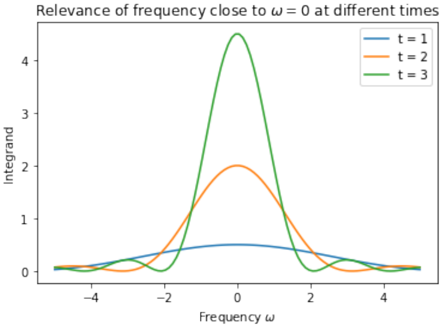
$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega S_{II}(\omega)$$

In generale $I(t) = < I(t) > + \delta I(t)$

$$S_{II}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} < \delta I(t)\delta I(0) >$$

Noise power spectrum (Interpretazioni)

2) Varianza osservabile integrata



Osservabile integrata:

$$m(T) = \int_0^T I(t)dt$$

$$\sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{S_{II}(\omega)}{\omega^2}(1 - cos(\omega T)) \sim S_{II}(\omega = 0) * T$$

Noise power spectrum (TCL)

Media dell'osservabile: $\bar{I}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt = \frac{m(T)}{T}$

Varianza della media:

$$\sigma^2_{\bar{I}} = \frac{1}{T^2}\sigma^2_m \sim \frac{1}{T}$$

come nel **Teorema centrale del limite (TCL)**

Tempo di decorrelazione τ

$$< I(t)I(0) > \sim e^{-t/\tau}$$

$$\sigma^2_{m(t)} \sim S_{II}(\omega = 0)t \quad \text{se } t >> \tau$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Meccanica quantistica

$$I(t) \rightarrow \hat{I}_H(t)$$

$$< I(t) > \rightarrow Tr[\rho \hat{I}_H(t)]$$

$$S_{II}(\omega) = \int e^{-i\omega t} < \hat{I}_H(t)\hat{I}_H(0) > dt$$

Oscillatore armonico

Oscillatore **classico** (all'equilibrio):

$$S_{xx}(\omega) = \frac{k_b T}{M\Omega^2}[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)]$$

Ma in un oscillatore quantistico:
Zero point fluctuations

Classicamente $< x^2 > \sim k_b T$,
ma in MQ

$$x_{ZPF}^2 = \langle 0 | \hat{x^2} | 0 \rangle = \hbar / 2M\Omega$$

non dipende da T!

Oscillatore armonico

Oscillatore **quantistico** (all'equilibrio)

$$S_{xx}(\omega) = x^2_{ZPF}\{n_{BE}(\hbar\Omega)\delta(\Omega+\omega) + [n_{BE}(\hbar\Omega)+\mathbf{1}]\delta(\Omega-\omega)\}$$

$$\Gamma_{ass} \sim (n_{BE}(\hbar\Omega)+1), \quad \omega > 0$$

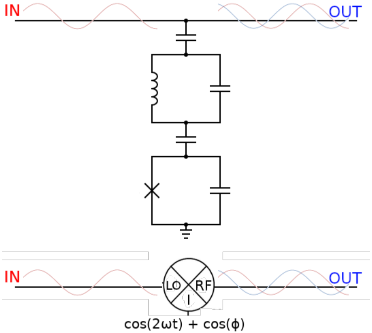
$$\Gamma_{em} \sim n_{BE}(\hbar\Omega), \quad \omega < 0$$

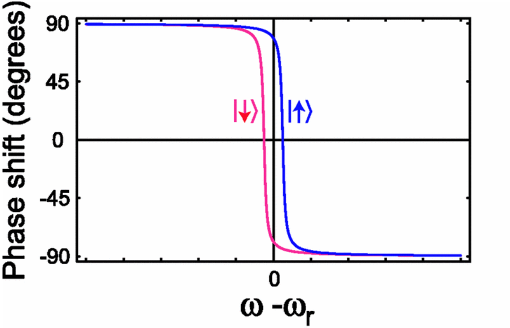
La potenza **netta** è descritta da

$$\bar{S}_{xx}(\omega) = \frac{1}{2}(S_{xx}(\omega) + S_{xx}(-\omega))$$

Misura dello stato di un qubit

$$H = \hbar(\omega_r - \chi\hat{\sigma_3})\hat{n} - \frac{\tilde{\omega_q}}{2}\hat{\sigma_3}$$

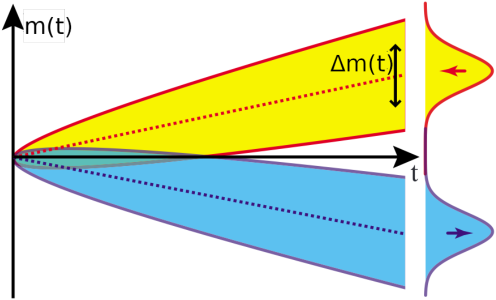




$$I(t) = \pm\theta_0 + \delta\theta(t)$$

Misura lenta

$$m(T) = \int_0^T I(t)dt = \pm\theta_0 + \int_0^T \delta\theta(t)dt$$



$$< m(t) > = \pm\theta_0 t$$

$$\sigma^2_{m(t)} \sim \bar{S}_{II} t$$

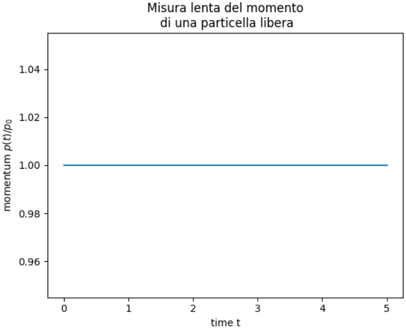
Risoluzione della misura

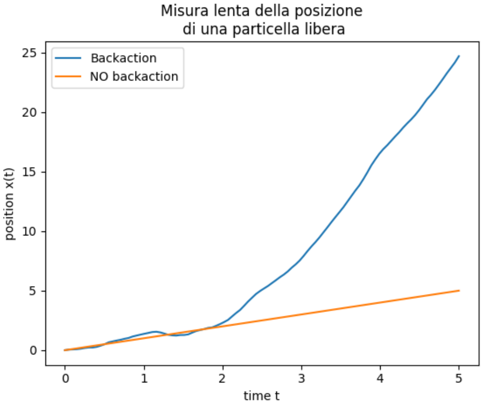
$$\eta = \frac{| < m(t) >_+ - < m(t) >_- |^2}{\sigma^2_m(t)} \sim t \implies \tau_{measure} = \frac{2\bar{S}_{II}}{\theta_0^2}$$

Backaction

Particella libera

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$





BICOCCA

Quantum non demolition (QND)

Qubit

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c + \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{int}} = -\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma_3}(\omega_q + \chi + \mathbf{2g}\chi\hat{\mathbf{n}}) + \hbar\omega_r\hat{n}$$

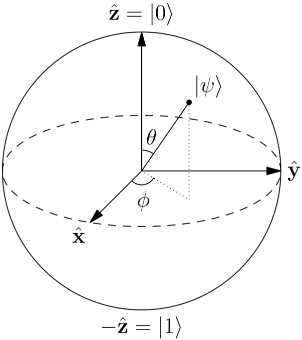
Heisemberg picture

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma_3}_H}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H} + \hat{H}_{int}, \hat{\sigma_3}]_H = 0$$

$$\textbf{QND} \iff [H_{int}, \sigma_3] = 0$$

Dephasing

$$\hat{H} : \hat{\sigma_3}\omega_q \rightarrow \hat{\sigma_3}(\omega_q + \chi + \mathbf{2}\chi\hat{\mathbf{n}})$$



$$|\Psi\rangle = cos(\theta/2)\,|0\rangle + ie^{i\mathbf{\Phi}} sin(\theta/2)\,|1\rangle$$

$$\Delta\omega(t) = \chi + 2\chi\hat{n}$$

$$\Phi(t) = \Phi_0 + (\omega_q + \chi + 2\chi < n >)t + \mathbf{2}\chi \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{dt'}\delta\mathbf{n}(\mathbf{t'})$$

Dephasing

Evoluzione incontrollata della fase: $\delta\Phi(t) = 2\chi \int_0^t dt' \delta n(t')$

$$\Delta(\delta\Phi)(t) \sim 4\chi^2 \bar{S}_{nn} t$$

$$\Delta(\delta\Phi) = 2\pi \implies \tau_{deph} \simeq \frac{2\pi}{4\chi^2 \bar{S}_{nn}}$$

Matrice densità stato puro

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & \rho_{11} \end{bmatrix} \quad \text{con } \rho_{01} = -ie^{-i\mathbf{\Phi}} \frac{sin(\theta)}{2}$$

Perdita di informazione sulla fase Φ

$$\rho_{01}(t) \sim e^{-\Gamma_{deph} t} \quad \text{con } \Gamma_{deph} = \frac{1}{\tau_{deph}} = 2\chi^2 \bar{S}_{nn}$$

Limite quantistico

Confrontiamo

$$\Gamma_{measure} = \frac{\theta_0^2}{2\bar{S}_{II}} \quad ; \quad \Gamma_{deph} = 2\chi^2 \bar{S}_{nn}$$

$$\frac{\Gamma_{deph}}{\Gamma_{measure}} = \frac{4\chi^2}{\theta_0^2} \bar{S}_{II} \bar{S}_{nn}$$

Se l'onda di probe è in uno stato coerente

$$\Gamma_{deph} = \Gamma_{measure}$$

E non è possibile fare di meglio (**limite quantistico**).

Limite quantistico

Il limite è generale: la misura implica il dephasing

Prima dell'interazione

$$|\Psi(t=0)\rangle = (\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle) \otimes |D_0\rangle$$

Completata la misura

$$|\Psi(t=\tau_{measure})\rangle = (\alpha\,|\uparrow\rangle\,|D_\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle\,|D_\downarrow\rangle)$$

La misura è risoluta $\langle D_\downarrow | D_\uparrow \rangle = 0$

$$\rho_q(t=\tau_{measure}) = Tr_D(\rho) = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}$$

Quindi, in ogni apparato

$$\tau_{measure} \geq \tau_{deph}$$

Limite quantistico

Formulazione alternativa

Rumore equivalente:

$$I(t) = \pm\theta_0 + \delta\theta(t) = [(\pm) + \delta_{eq} z(t)]\theta_0$$

$$\delta_{eq} z = \frac{\delta\theta}{\theta_0} \implies S_{zz} = \frac{S_{II}}{\theta_0^2}$$

Strumento di misura generico

$$H_{int} = -\hat{z}\hat{F}$$

$$\text{(in questo caso: } \hat{z} = \hat{\sigma}_3; \hat{F} = \hbar\chi\hat{n}) \implies S_{FF} = \hbar^2\chi^2 S_{nn}$$

$$\frac{\Gamma_{deph}}{\Gamma_{measure}} = \frac{4\chi^2}{\theta_0^2} S_{II} S_{nn} = \frac{4}{\hbar^2} S_{zz} S_{FF}$$

Limite quantistico

Formulazione alternativa

Il limite quantistico è

$$\frac{\Gamma_{deph}}{\Gamma_{measure}} \geq 1 \iff S_{zz}S_{FF} \geq (\frac{\hbar}{2})^2$$

Ma esiste anche un limite classico, che si sovrappone

$$S_{zz}S_{FF} \geq |S_{zF}|^2$$

In generale

$$S_{zz}S_{FF} \geq (\frac{\hbar}{2})^2 + |S_{zF}|^2$$

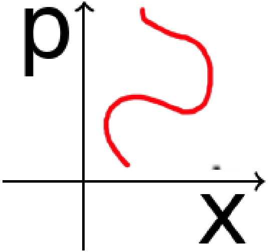
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

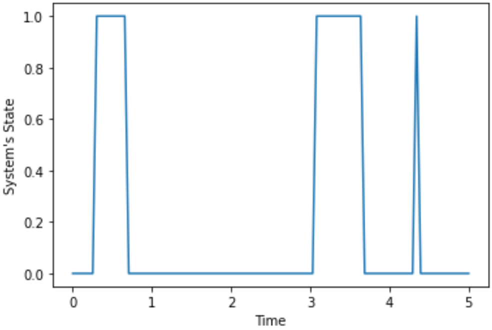
Conclusione

- $\bar{S}_{zz}(\omega)$ quantifica σ_z^2
- Limite quantistico: $\bar{S}_{zz}(\omega) > 0$
- Misure lente QND: risoluzione arbitraria
- Misure non-QND: Γ_{deph} rate di perdita dell'informazione

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Medie statistiche





Probabilità stato $\mathbf{x}$: $P(\mathbf{x}) \propto \delta T(\mathbf{x})$: Tempo trascorso in $\mathbf{x}$

Fuori dall'equilibrio

$$P(\mathbf{x}) \neq \frac{1}{Z} e^{-\beta \epsilon(\mathbf{x})}$$

Limite quantistico

E' una implicazione del principio di indeterminazione

Nella linea viaggia un'onda in uno *stato coerente* con N fotoni e fase θ

$$\Delta N \Delta\theta = \frac{1}{2}$$

Come misuro N, θ in una *misura lenta*?

- $\theta = I \rightarrow$media integrale misure di $I(t)$: $(\Delta\theta)^2 = \frac{S_{II}}{t}$
- $N \rightarrow$ integrale nel tempo misure di $\dot{N}(t)$: $(\Delta N)^2 = S_{\dot{N}\dot{N}} t$

$$S_{II} S_{\dot{N}\dot{N}} = \frac{1}{4}$$

La linea scambia fotoni con la cavità: $S_{nn} \propto S_{\dot{N}\dot{N}}$

$$\frac{\Gamma_{deph}}{\Gamma_{measure}} = \frac{4\chi^2}{\theta_0^2} S_{II} S_{nn} \propto S_{II} S_{\dot{N}\dot{N}}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA

Misura non-QND

Il limite è valido solo per misure QND
Se è presente una backaction sull'osservabile misurata

$$z(t) =< z(t) > +\delta_{eq} z(t) + \delta_{\mathbf{BA}} \mathbf{z(t)}$$

Esempio: Oscillatore armonico

$$x(t) = x(0) cos(\Omega t) + p(0) \frac{1}{M\Omega} sin(\Omega t)$$

Misurare la posizione $\iff$ misurare $\hat{x}, \hat{p}$ **coniugate!**

Γ_{deph} è una velocità di perdita dell'informazione.

Limite quantistico Amplificatori (cenni)

Cosa è un amplificatore?

- Rivelatore di posizione $x(t)$ di un oscillatore
- Rivelatore con un guadagno alto

E' sempre presente un bagno termico, oltre al rivelatore

$$\bar{S}_{zz}(\omega) = \bar{S}_{zz}^{eq}(\omega, T) + \bar{S}_{zz}^{add}(\omega)$$

Limite quantistico

$$\bar{S}_{zz}^{add}(\omega) \geq \bar{S}_{zz}^{eq}(\omega, T = 0K)$$