Práctico 2

Distribuciones de probabilidad y remuestreo

▷ **1.** *Funciones generadoras*
Sean X e Y variables aleatorias (V.A.), y $Z = X + Y$. Muestre que si X e Y tienen distribuciones de Poisson, entonces la V.A. Z posee también una distribución de Poisson. Ayuda: la función generadora de momentos de la suma de dos V.A. independientes es el producto de las funciones generadoras de momentos de ambas.

▷ **2.** *Distribuciones marginales*
Sea una función de densidad de probabilidad conjunta de dos V.A. X e Y está dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = 1 - \alpha(1 - 2\,x)(1 - 2\,y)$$

con α una constante positiva, en el intervalo $[0, 1]$ en ambas variables.

(a) Calcule las distribuciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ y los valores de expectación $E(X)$ y $E(Y)$.
(b) Intente probar o refutar la siguiente afirmación: *"En este ejemplo, las variables X e Y son independientes sii no están correlacionadas."*

► **3.** *Método de la transformada inversa: distribución de Fisher-Tippett*
Diseñe, implemente y verifique una función en PYTHON que retorne un número aleatorio con una distribución de *Fisher-Tippett* con parámetro λ, calculado mediante el método de inversión. Ayuda: Para testear la función se puede calcular la media de los números generados y comparala con el valor de expectación de la distribución de Fisher-Tippett, que es $E(F) = 0.57721/\lambda$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\, t(x)^{\xi+1}\, e^{-t(x)}$$

donde $T(x)$ para $\xi = 0$ viene dada por:

$$t(x) = e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}$$

y para $\xi \neq 0$

$$t(x) = \left(1 + \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

con σ,μ y ξ son los parámetros de la distribución.

▷ **4.** *Teorema de cambio de V.A.*
Se espera que cierto tipo de evento ocurra en el cielo con igual probabilidad en todas las direcciones. Suponga que se registran los valores de distancia cenital z de estos eventos, y se calcula $x = cos(z)$. ¿Cuál es la distribución esperada de x ?

▷ **5.** *Método de Box-Muller para generar una V.A. con distribución normal*
Una variable aleatoria normal estándar es aquella que tiene una función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

es decir, $N(\mu = 0, \sigma = 1)$. Existen varios métodos para generar esta variable en una computadora, que tienen distintas eficiencias, lo cual surge del hecho de que la cantidad de valores generados es menor que la cantidad de variables aleatorias uniformes que se usan. Uno de los métodos más eficientes es el método de Box-Muller.

Este método permite obtener dos variables aleatorias normales estándar a partir de dos variables aleatorias uniformes, usando las transformaciones de Box-Muller: $R^2 = X^2 + Y^2$; $tan(\theta) = \dfrac{X}{Y}$

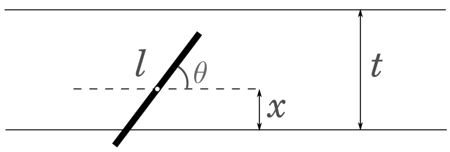
- Explique el desarrollo teórico del método
- Desarrolle un programa para generar variables aleatorias normales utilizando el método de Box-Muller
- Mejorar la eficiencia del código generando pares de números aleatorios (X,Y) dentro del círculo de radio unidad.

Bibliografía:

- Ross, S. M., “Simulation”, Academic Press Ed.
- “Numerical Recipes: the art of scientific computing”, Press et al., Cambridge University Press

▶ **6.** *Experimento de Buffon*

Suponga que tiene una mesa con rayas paralelas y equiespaciadas, separadas por una distancia t. Se lanza una aguja sobre la mesa, que cae en una ubicación aleatoria (uniforme) sobre la mesa, a una distancia x de la raya más cercana (medida desde el centro de la aguja) y con una orientación también aleatoria θ dada por el ángulo agudo que forma con la dirección de las rayas (ver figura).



(a) Escriba la función densidad de probabilidad de que la aguja caiga con parámetros (x, θ)

(b) Suponga que $l < t$, ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja toque una raya?

(c) Este procedimiento se puede usar para estimar el número π. Para ello escriba un programa que simule arrojar una aguja y determine su cruza alguna raya de un patrón dado de rayas paralelas. Luego utilice la probabilidad clásica para estimar π a partir de muchas realizaciones del experimento. Este procedimiento es parte de lo que se conoce como métodos de MonteCarlo.

Este problema fue planteado en el siglo XVIII por Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, y se lo conoce como el problema de la ”aguja de Buffon”.

▶ **7.** *Remuestreo Bootstrap*

Diseñe, implemente y verifique una función, que estime la varianza de una V.A. a partir de una muestra de datos. A continuación, implemente una función que utilize *boostrap resampling* para calcular los intervalos de confidencia del estimador de la varianza con un nivel de significancia dado α.

▶ **8.** *Test de chi–cuadrado*

Diseñe, implemente y verifique una función que calcule el test de *“chi-cuadrado”* para comparar un histograma H_1 con un modelo dado por una distribución Binomial, $f(x) \sim \mathcal{B}(n = 10, p = 0.4)$.

Para ello, realice los siguientes puntos:

(a) Simule 100 observaciones de la V.A. binomial y calcule las frecuencias de cada valor.

(b) Calcule el estadístico χ^2 a partir del modelo y de los datos simulados.

(c) Realice una prueba de hipótesis completa para decidir si los datos están en acuerdo con el modelo.

(d) Calcule el *valor-p* de la prueba.

(e) Simule muestras de 100 observaciones de una V.A. N(μ, σ), con σ=2.5 y μ que varíe entre 2 y 7. Estudie cómo varía el *valor-p* y determine si en algún rango de μ se puede “confundir” el modelo.

(f) Simule una muestra de 10000 realizaciones de una V.A. con $f(x) \sim \mathcal{B}(n = 1000, p = 0.4)$ y repita el punto anterior.

Deberá entregar un informe sobre los ejercicios marcados con "►". En dicho informe deberá incluir la resolución de los ejercicios, junto con los códigos empleados y los gráficos correspondientes, acompañados de una breve introducción y conclusiones. Fecha límite de entrega de informes: miércoles 26 de septiembre, a las 13 horas, por medio del Aula Virtual.