

비스듬한 방향으로 물을 뿜어내는 분수의 물줄기는
이차식으로 나타낼 수 있는 곡선을 그리며 떨어진다.



IV

이차함수와 그래프

- 1 이차함수의 뜻
- 2 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프
- 3 이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프
- 4 이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프
- 5 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프
- 6 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프



되짚어 보기

함숫값

중 2

- ▶ 함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 정해지면 그에 따라 정해지는 y 의 값, 즉 $f(x)$ 를 x 의 함숫값이라고 한다.

일차함수

중 2

평행이동

중 2

- ▶ 한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라고 한다.

완전제곱식

중 3

1 함수 $f(x) = -2x + 10$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) $f(3)$
- (2) $f(-1)$
- (3) $f(-2) + f(0)$

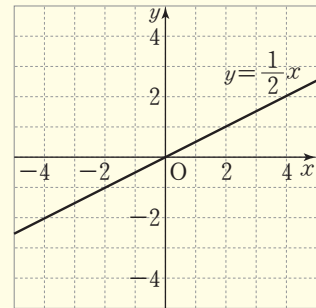
2 다음 보기 중에서 일차함수인 것을 모두 찾으시오.

보기

㉠. $y = -\frac{2}{3}x$ ㉡. $y = x(x+1)$ ㉢. $y = \frac{10}{x}$ ㉣. $y = 5x - 4$

3 오른쪽 그림은 일차함수 $y = \frac{1}{2}x$ 의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 좌표평면 위에 각각 그리시오.

- (1) $y = \frac{1}{2}x - 2$
- (2) $y = \frac{1}{2}x + 3$



4 다음 식이 완전제곱식이 되도록 \square 안에 알맞은 양수를 써넣으시오.

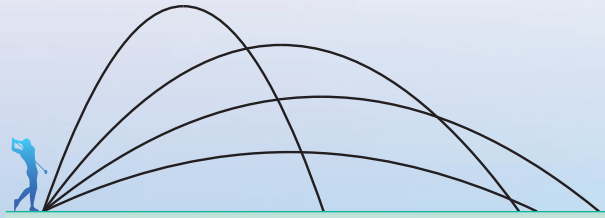
- (1) $x^2 - 4x + \square$
- (2) $x^2 + \square x + 1$
- (3) $\square x^2 - 12x + 9$



골프공은 어떤 모양으로 날아갈까?

골프공을 치면 공은 어떤 모양을 그리며 날아갈까?

골프공은 어느 정도 올라가다가 아래로 떨어진다. 공이 날아가며 그리는 모양은 공이 날아가는 방향과 지면이 이루는 각도, 공의 초기 속력 등에 의하여 결정된다.



공기와의 마찰 등 중력 외의 다른 힘을 고려하지 않으면 지면으로부터의 골프공의 높이는 시간에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.

❖ 이 단원에서는 골프공이 날아가는 모양에서 찾아볼 수 있는 이차함수의 그래프를 알아보고, 이차함수의 그래프의 성질을 이해한다.



이차함수의 뜻

이차함수의 의미를 이해한다.

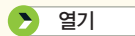


물체가 높은 곳에서 떨어질 때 물체의 낙하한 거리는 낙하한 시간에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.



탐구 학습

이차함수는 무엇인가요?

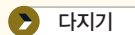
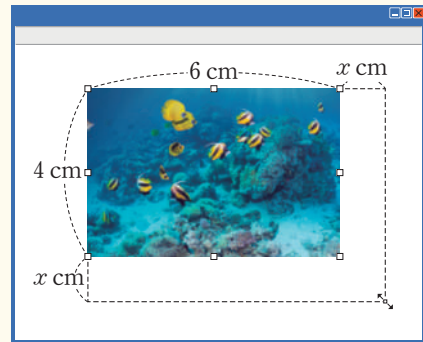


열기

가로와 세로의 길이가 각각 6 cm, 4 cm인 직사각형 모양의 사진을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 가로와 세로의 길이를 똑같이 늘려 새로운 직사각형 모양의 사진으로 만들었다. 이때 늘인 길이를 x cm, 새로 만든 사진의 넓이를 y cm²라고 하자. 물음에 답하여 보자.

(1) y 를 x 의 식으로 나타내 보자.

(2) y 는 x 의 함수인지 말하여 보자.

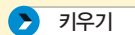


다지기

(1) 새로 만든 직사각형 모양의 사진의 가로와 세로의 길이는 각각 $(x+6)$ cm, $(x+4)$ cm 이므로 넓이 y 는 $y = (x + \square)(\square + 4)$ (cm²)와 같다.

이를 정리하면 $y = x^2 + 10x + \square$ 이다.

(2) x 의 값이 변함에 따라 y 의 값이 하나씩 정해지는 대응 관계가 성립하므로 y 는 x 의 \square 이다.



키우기

y 가 x 에 대한 이차식으로 나타나는 함수를 무엇이라고 할까?

이차함수의 뜻

탐구 학습의 $y = x^2 + 10x + 24$ 에서 y 는 x 에 대한 이차식이고, x 의 값이 변함에 따라 y 의 값이 하나씩 정해지므로 y 는 x 의 함수이다.

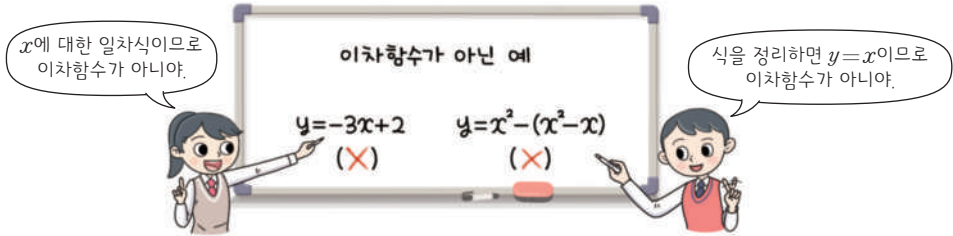
일반적으로 함수 $y = f(x)$ 에서 y 가 x 에 대한 이차식

$$y = ax^2 + bx + c \text{ (단, } a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)}$$

로 나타낼 때, 이 함수를 x 에 대한 **이차함수**라고 한다.

[참고] $y = ax^2 + bx + c$ 를 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 로 나타내기도 한다.

✓ 개념 확인



문제 1 다음 중에서 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

- (1) $y = 3x(2 - x)$ (2) $y = -x^3 + 2$
 (3) $y = x^2 - (x + 1)^2$ (4) $y = x(x - 2) + 2$

| 이차함수 이해하기

예제 1 다음에서 y 를 x 의 식으로 나타내고, y 가 x 에 대한 이차함수인지 말하시오.

- (1) 시속 60 km로 달리는 자동차가 x 시간 동안 달린 거리 y km
 (2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이 y cm²

풀이 (1) (거리) = (속력) × (시간)이므로 y 를 x 의 식으로 나타내면 $y = 60x$ 이다.
 이때 $60x$ 는 x 에 대한 이차식이 아니므로 y 는 x 에 대한 이차함수가 아니다.

(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이는 x^2 cm²이므로 y 를 x 의 식으로 나타내면 $y = x^2$ 이다.

이때 x^2 은 x 에 대한 이차식이므로 y 는 x 에 대한 이차함수이다.

답 (1) $y = 60x$, 이차함수가 아니다. (2) $y = x^2$, 이차함수이다.



문제 2 다음에서 y 를 x 의 식으로 나타내고, y 가 x 에 대한 이차함수인지 말하시오.

- (1) 반지름의 길이가 x cm인 원의 둘레의 길이 y cm
 (2) 꼭짓점의 개수가 x 인 정다각형의 대각선의 개수 y
 (3) 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 겉넓이 y cm²

예제 2

이차함수 $f(x) = x^2 + 4x - 5$ 에서 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 을 구하시오.

풀이 $f(x) = x^2 + 4x - 5$ 에 $x=1$, $x=-1$ 을 각각 대입하면

$$f(1) = 1^2 + 4 \times 1 - 5$$

$$= 1 + 4 - 5 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 4 \times (-1) - 5$$

$$= 1 - 4 - 5 = -8$$

$$\text{답 } f(1) = 0, f(-1) = -8$$

따라 하기

함숫값 이해하기

이차함수 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 에서 $f(2)$ 와 $f(-2)$ 를 구하시오.

풀이 $f(x) = x^2 - 3x + 4$ 에 $x=2$, $x=-2$ 를 각각 대입하면

$$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{답 } f(2) = \underline{\hspace{2cm}}, f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

문제 3 이차함수 $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$ 에서 다음을 구하시오.

(1) $f(-1)$

(2) $f(0)$

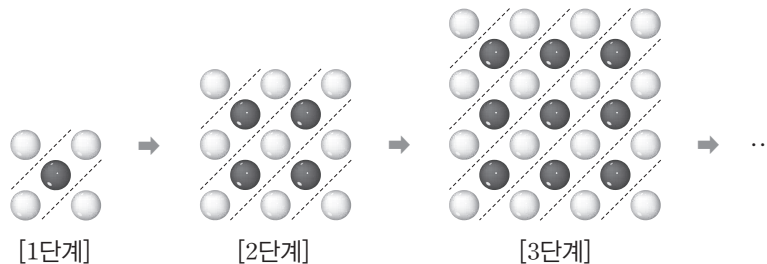
(3) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

(4) $f(2)$



문제 해결

다음 그림과 같은 규칙으로 바둑돌을 배열하려고 한다. x 단계에서 사용한 바둑돌의 개수를 y 라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



(1) x 단계에서 흰 돌의 개수를 x 의 식으로 나타내 보자.

(2) x 단계에서 검은 돌의 개수를 x 의 식으로 나타내 보자.

(3) y 를 x 의 식으로 나타내고, y 가 x 에 대한 이차함수인지 말하여 보자.



1

다음 보기 중에서 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

보기

$$\begin{array}{ll} \text{㉠. } y=3(x-1)+1 & \text{㉡. } y=\frac{x(1-x)}{2} \\ \text{㉢. } y=x^2-x(x+3) & \text{㉣. } y=-x^2+\frac{2}{3}x \end{array}$$

2

다음에서 y 를 x 의 식으로 나타내고, y 가 x 에 대한 이차함수인지 말하시오.

- (1) 밑변의 길이가 x cm, 높이가 $(16-x)$ cm인 삼각형의 넓이 y cm²
- (2) 반지름의 길이가 x cm인 구의 부피 y cm³
- (3) 한 변의 길이가 $(x+2)$ cm인 정사각형의 넓이 y cm²
- (4) 꼭짓점의 개수가 x 인 다각형의 내각의 크기의 합 y°

3

함수 $y=ax(x-1)+(x+2)(x-1)$ 이 x 에 대한 이차함수가 아닐 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

4

이차함수 $f(x)=x^2-3x+2$ 에서 다음을 구하시오.

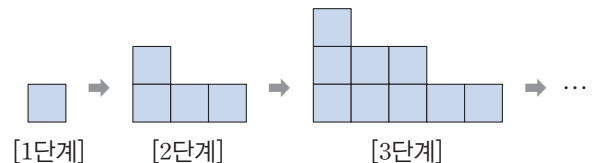
- (1) $f(0)$
- (2) $f(1)+f(-1)$

5

이차함수 $f(x)=-x^2+5x+a$ 에서 $f(1)=2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

6 창의·융합

다음 그림과 같은 규칙으로 타일을 붙이려고 한다. x 단계에서 사용한 타일의 개수를 y 라고 할 때, 물음에 답하시오.



(1) 다음 표를 완성하시오.

x	1	2	3	4	...
y	1				...

(2) y 를 x 의 식으로 나타내시오.

(3) y 가 x 에 대한 이차함수인지 말하시오.

2

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해할 수 있다.

우리 주변에서 찾아볼 수 있는 현수교에서 부드러운 곡선을 관찰할 수 있다.



탐구 학습

이차함수 $y=x^2$ 의 그래프는 어떻게 그리나요?



열기

이차함수 $y=x^2$ 에 대하여 다음 표를 완성하고, 표에서 얻어지는 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내 보자.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

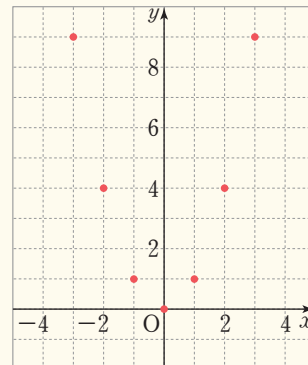


다지기

표를 완성하면 다음과 같다.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1				

이때 표에서 얻어지는 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



키우기

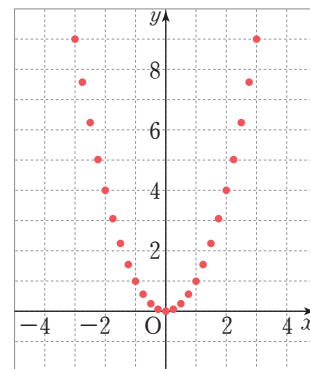
이차함수 $y=x^2$ 에서 x 의 값의 범위가 실수 전체이면 어떤 그래프가 그려질까?

$y=x^2$ 의 그래프

탐구 학습에서 x 의 값이 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3일 때 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 그려 보았다.

이제 x 의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 그려 보자.

먼저 이차함수 $y=x^2$ 에서 x 의 값의 간격을 0.25로 작게 하고 각각에 대응하는 y 의 값을 구하여 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 <그림 1>과 같이 곡선에 가까운 형태가 된다.



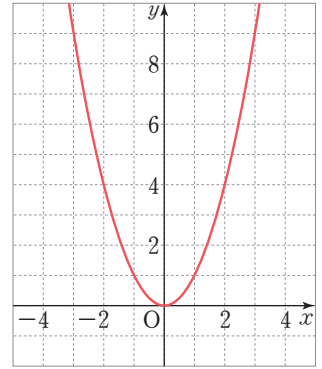
<그림 1>

④ y 축에 대칭이라는 말은 y 축을 접는 선으로 하여 접었을 때, 그래프가 완전히 포개어진다는 의미이다.

이를 x 의 값의 범위가 실수 전체일 때까지 계속하면 <그림 2>와 같이 매끈한 곡선이 된다. 이 곡선이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프이다.

이때 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y 축에 대칭인 곡선임을 알 수 있다.

또, $x < 0$ 일 때에는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하고, $x > 0$ 일 때에는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가함을 알 수 있다.

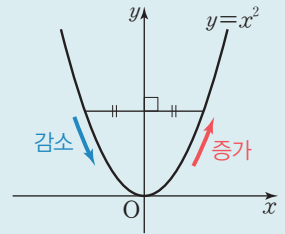


<그림 2>

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=x^2$ 의 그래프

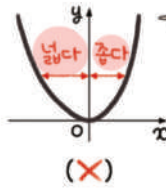
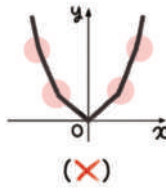
- ① 원점을 지나고 아래로 볼록한 곡선이다.
- ② y 축에 대칭이다.
- ③ $x < 0$ 일 때
 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 $x > 0$ 일 때
 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.



개념 확인

이차함수의 그래프 그리기

그래프가 꺾이지
않아야 해!



y 축에 대칭이
되게 그려야 해!

문제 1 다음 보기 중에서 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾으시오.

보기

- ㄱ. 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.
- ㄴ. 제1사분면, 제2사분면을 지난다.
- ㄷ. x 의 값이 1에서 4까지 증가할 때, y 의 값은 감소한다.
- ㄹ. x 의 값이 -5 에서 -3 까지 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

✚ 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프는 어떻게 그리나요?

$y=ax^2$ (단, $a>0$)의
그래프

$a>0$ 일 때, 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프는 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 이용하여
그릴 수 있다.

| 이차함수 $y=ax^2$ (단, $a>0$)의 그래프 그리기

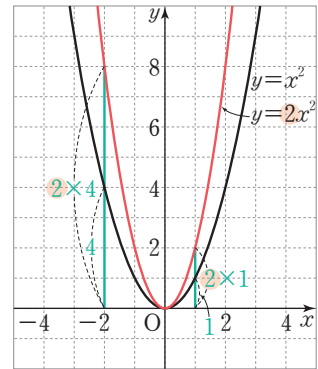
☐ 예제 ① 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프를 그리시오.

풀이 두 이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$ 에 대하여 x 의 값에 대응하는 y 의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$2x^2$...	18	8	2	0	2	8	18	...

위의 표에서 같은 x 의 값에 대하여 $y=2x^2$ 의 함숫값은 $y=x^2$ 의 함숫값의 2배임을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프의 각 점의 y 좌표를 2배로 하는 점을 연결하여 그리면 된다.

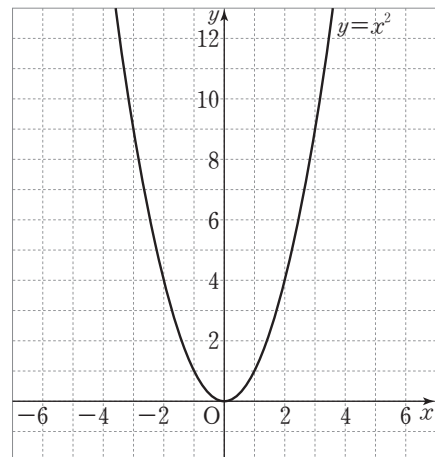


☐ 풀이 참조

문제 2 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=3x^2$

(2) $y=\frac{1}{3}x^2$



$y = -ax^2$ (단, $a > 0$)
의 그래프

$a > 0$ 일 때, 이차함수 $y = -ax^2$ 의 그래프는 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프를 이용하여 그릴 수 있다.

| 이차함수 $y = -ax^2$ (단, $a > 0$)의 그래프 그리기

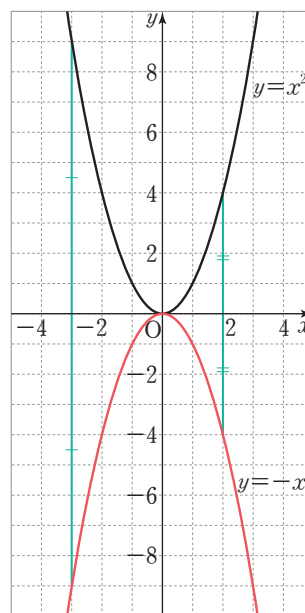
예제 2 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 그리시오.

풀이 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2$ 에 대하여 x 의 값에 대응하는 y 의 값을 각각 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$-x^2$...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

위의 표에서 같은 x 의 값에 대하여 $y = -x^2$ 의 함수값은 $y = x^2$ 의 함수값과 절댓값은 같고 부호는 반대임을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프의 각 점과 x 축에 대칭인 점을 연결하여 그리면 된다.

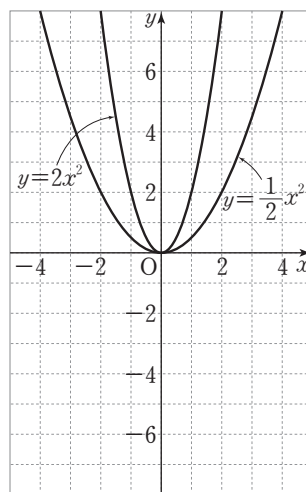


답 풀이 참조

문제 3 이차함수 $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y = -2x^2$

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2$



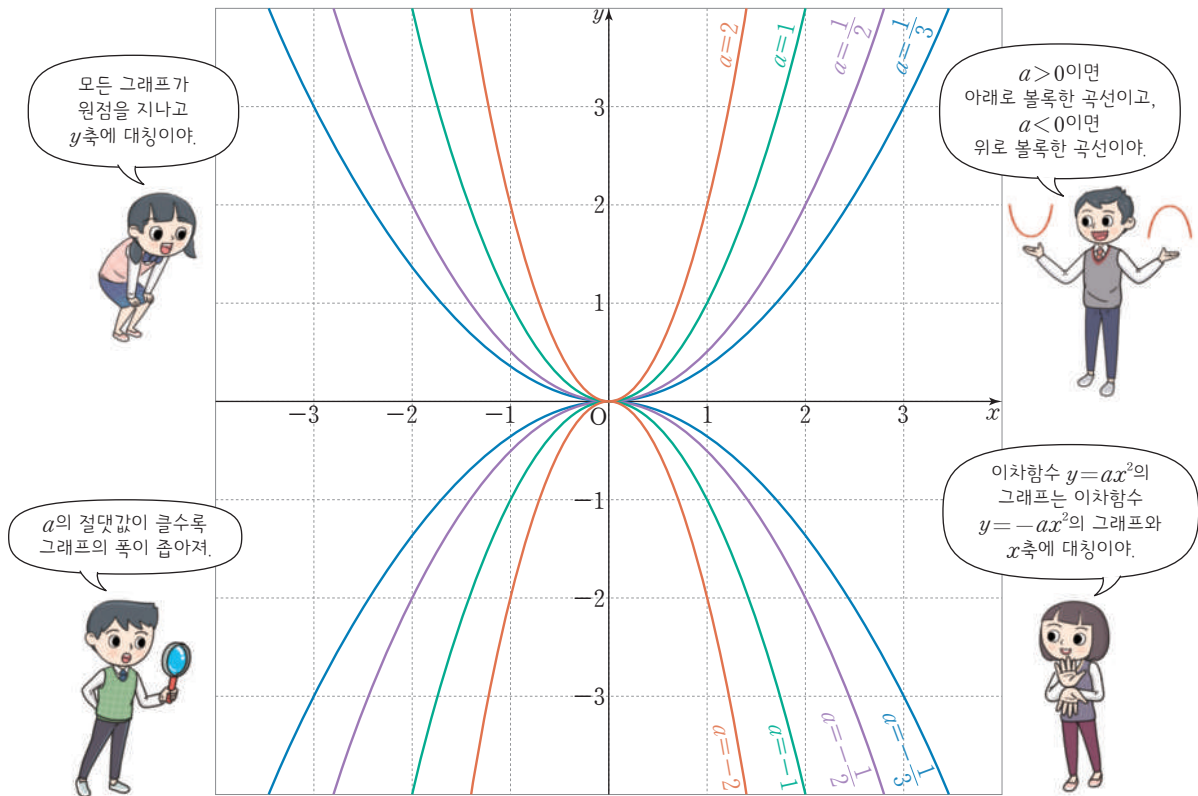
이차함수의 그래프는 어떤 성질이 있나요?

$y=ax^2$ (단, $a \neq 0$)의
그래프의 성질

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프의 성질을 알아보자.

이차함수 $y=ax^2$ 에서 a 의 값이 $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2$ 일 때의 그래프를 한 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.

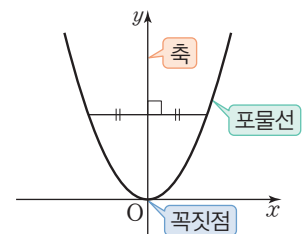
이 그래프들을 통해 다음과 같은 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프의 성질을 관찰할 수 있다.



❖ 포물선의 한자는 던질 포(抛), 물건 물(物), 줄 선(線)이다. 즉, 포물선이란 어떤 물건을 던질 때 그 물건이 날아가며 그리는 곡선을 의미한다.

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 한다.

포물선은 선대칭도형으로 그 대칭축을 포물선의 **축**이라 하고, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.



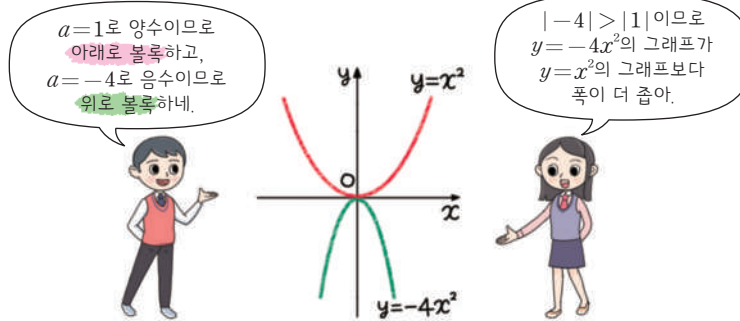
일반적으로 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프는 다음과 같은 성질이 있다.

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프

- ① 원점을 꼭짓점으로 하고, y 축을 축으로 하는 포물선이다.
- ② $a > 0$ 이면 아래로 볼록하고, $a < 0$ 이면 위로 볼록하다.
- ③ a 의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
- ④ 이차함수 $y = -ax^2$ 의 그래프와 x 축에 대칭이다.

개념 확인

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프



문제 4

다음 보기의 이차함수에 대하여 물음에 답하시오.

보기

㉠. $y = \frac{1}{2}x^2$

㉡. $y = -2x^2$

㉢. $y = -\frac{2}{3}x^2$

㉣. $y = 3x^2$

㉤. $y = -\frac{1}{2}x^2$

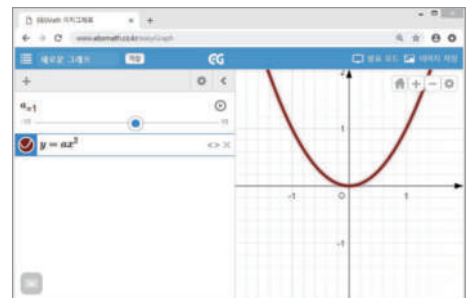
㉥. $y = 4x^2$

- (1) 그래프가 위로 볼록한 것을 모두 찾으시오.
- (2) 그래프의 폭이 가장 좁은 것을 찾으시오.
- (3) 그래프가 x 축에 서로 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

정보 처리



이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 a 의 값을 변화시키며 그려 보고, a 의 값에 따라 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프가 어떤 성질을 나타내는지 확인하여 보자.



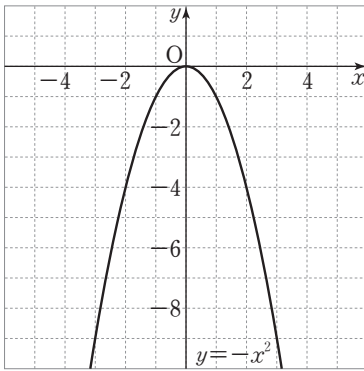
1

다음 이차함수의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하시오.

- (1) $y = \frac{1}{4}x^2$
(2) $y = -7x^2$

2

이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 그리시오.



3

다음 보기의 이차함수에 대하여 물음에 답하시오.

보기

- ㄱ. $y = -2x^2$ ㄴ. $y = 3x^2$ ㄷ. $y = \frac{2}{3}x^2$
ㄹ. $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㅁ. $y = 2x^2$ ㅂ. $y = -x^2$

- (1) 그래프가 아래로 볼록한 것을 모두 찾으시오.
(2) 그래프의 폭이 가장 좁은 것을 찾으시오.
(3) 그래프가 x 축에 서로 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

4

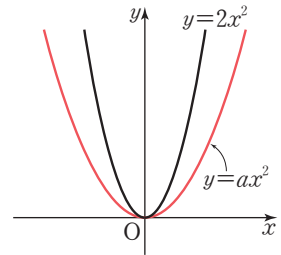
다음 보기 중에서 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾으시오.

보기

- ㄱ. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 x 축에 대칭이다.
ㄴ. y 축을 축으로 한다.
ㄷ. 아래로 볼록한 포물선이다.
ㄹ. $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

5

이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.



6 발전 문제

이차함수 $y = 4x^2$ 의 그래프는 점 $(1, a)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 의 그래프와 x 축에 대칭이다. 이때 $a - b$ 의 값을 구하시오. (단, b 는 상수)



갈릴레이와 물체의 낙하 법칙

고대 그리스의 철학자인 아리스토텔레스(Aristoteles, B.C. 384~B.C. 322)는 물체가 낙하할 때 무거운 물체일수록 더 빨리 땅에 떨어질 것으로 생각하였다.

그러나 갈릴레이(Galilei, Galileo, 1564~1642)는 물체의 무게와 관계없이 물체의 낙하 거리는 낙하 시간의 제곱에 비례한다는 사실을 알아내었다. 이를 자유 낙하의 법칙이라고 한다.

자유 낙하의 법칙

물체의 낙하 거리를 y m, 낙하 시간을 x 초라고 할 때, x 초 후 물체의 낙하 거리를 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = \frac{1}{2}gx^2 \text{ (단, } g \text{는 중력 가속도)}$$

y 는 x 에 대한 이차함수네!



위의 식에서 중력 가속도 g 를 10 m/s^2 이라고 하면 $y=5x^2$ 이다. (하워드 이브스, “수학의 위대한 순간들”)

무거운 물체일수록 빨리 떨어집니다.

아리스토텔레스

그렇지 않습니다. 공기의 저항을 생각하지 않는다면 같은 높이에서 떨어뜨린 무거운 공과 가벼운 공은 동시에 땅에 닿게 됩니다.

갈릴레이



수행 과제

모눈종이에 이차함수 $y=5x^2$ 의 그래프를 그리고, 낙하 시간이 2배가 되면 낙하 거리는 몇 배가 되는지 구하여 보자.

문제 해결



이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프

이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해할 수 있다.

고소 작업대는 수직 방향으로 평행하게 이동하며 작업할 수 있는 장비이다.



탐구 학습

이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프는 어떻게 그리나요?

열기

두 이차함수 $y=x^2$, $y=x^2+3$ 에 대하여 다음 표를 완성하고, x 의 값이 같을 때 $y=x^2$ 과 $y=x^2+3$ 의 함숫값을 비교하여 보자.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2
x^2+3

다지기

표를 완성하면 다음과 같다.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2	...	9	4	1	0	1	4	9	...
x^2+3	...	12	7	4	3				...

이때 위의 표에서 x 의 값이 같을 때 $y=x^2+3$ 의 함숫값은 $y=x^2$ 의 함숫값보다 항상 만큼 크다.

키우기

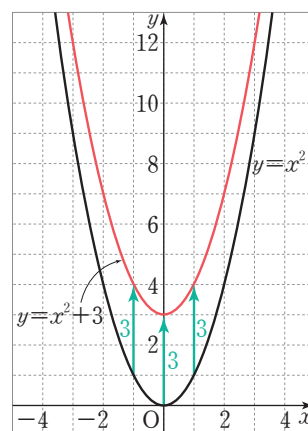
이차함수 $y=x^2+3$ 의 그래프는 어떻게 그럴까?

$y=ax^2+q$
(단, $a \neq 0$)의 그래프

탐구 학습에서 $y=x^2+3$ 의 함숫값은 $y=x^2$ 의 함숫값보다 항상 3만큼 크다.

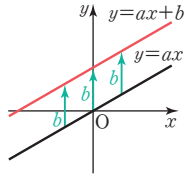
따라서 이차함수 $y=x^2+3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하여 그리면 된다.

이때 이차함수 $y=x^2+3$ 의 그래프는 점 $(0, 3)$ 을 꼭짓점으로 하고, y 축을 축으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.



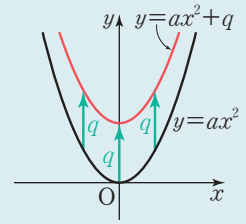
일반적으로 이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

❖ 일차함수의 그래프의 평행 이동



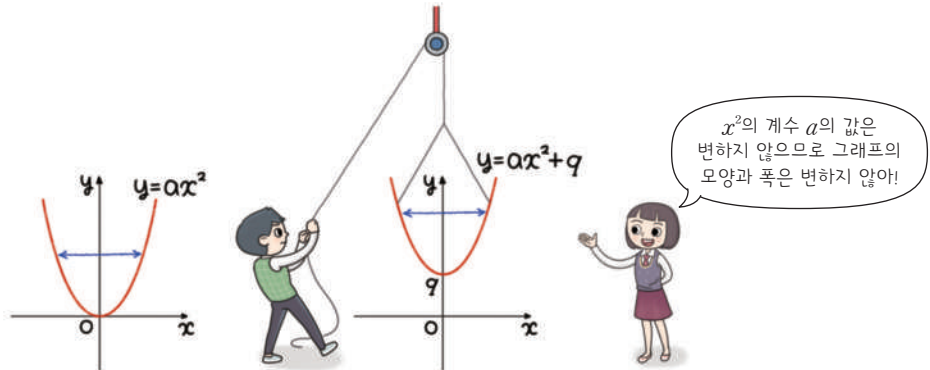
이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프

- ❶ 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.
- ❷ 점 $(0, q)$ 를 꼭짓점으로 하고, y 축을 축으로 하는 포물선이다.



✓ 개념 확인

이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프



문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=3x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

(1) $y=3x^2+2$

(2) $y=3x^2-4$

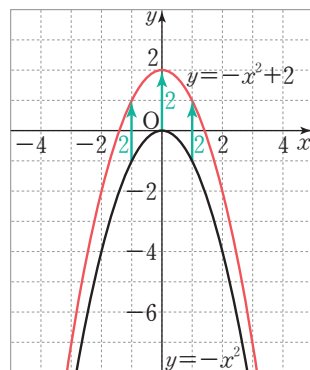
문제 2 다음 이차함수의 그래프를 y 축의 방향으로 [] 안의 수만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하고, 그 함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=6x^2$ [4]

(2) $y=-\frac{2}{5}x^2$ [-2]

예제 1 이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-x^2+2$ 의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

풀이 이차함수 $y=-x^2+2$ 의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 축의 방정식은 $x=0$ 이고, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

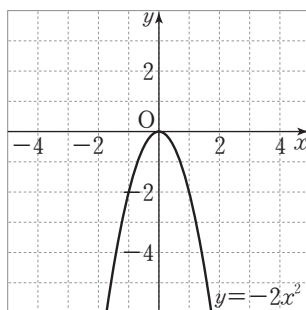
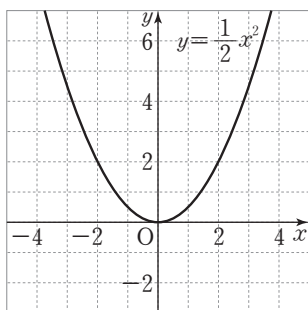


답 풀이 참조

문제 3 아래 그림은 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 $y=-2x^2$ 의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 각각 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{2}x^2-2$

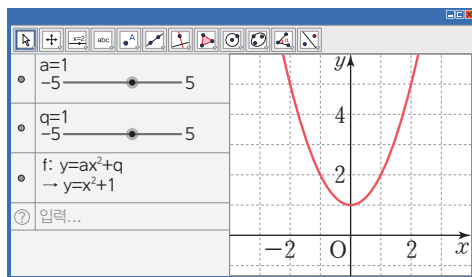
(2) $y=-2x^2+3$



정보 처리



이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 a, q 의 값을 변화시키며 그려 보고, a, q 의 부호에 따라 그래프가 지나는 사분면을 다음 표에 ○표로 표시하여 보자.



부호	이차함수 $y=ax^2+q$ 의 그래프가 지나는 사분면			
	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
$a>0, q>0$				
$a>0, q<0$				
$a<0, q>0$				
$a<0, q<0$				

1

다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

- (1) $y = -2x^2 - 3$
- (2) $y = -2x^2 + 1$

2

다음 이차함수의 그래프를 y 축의 방향으로 [] 안의 수만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

- (1) $y = \frac{1}{3}x^2$ [2]
- (2) $y = -4x^2$ [-3]

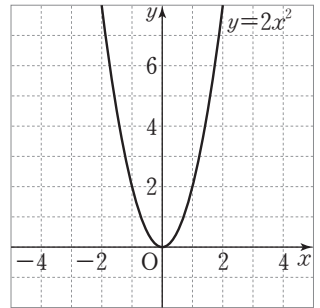
3

다음 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

- (1) $y = 4x^2 - 1$
- (2) $y = -\frac{3}{4}x^2 + 5$

4

오른쪽 그림은 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.



- (1) $y = 2x^2 + 2$
- (2) $y = 2x^2 - 1$

5

이차함수 $y = -4x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 점 $(1, k)$ 를 지날 때, k 의 값을 구하시오.

6 **발전 문제**

이차함수 $y = ax^2 + 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프와 일치하였다. 이때 $a + q$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수)



이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프

이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해할 수 있다.



육상 경기에서 레일 위를 경주로와 평행하게 이동하는 카메라를 이용하면 달리는 선수의 모습을 생생하게 촬영할 수 있다.



탐구 학습

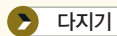
이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프는 어떻게 그리나요?



열기

두 이차함수 $y=x^2$, $y=(x-2)^2$ 에 대하여 다음 표를 완성하고, $y=x^2$ 의 함숫값을 오른쪽으로 몇 칸씩 이동하면 $y=(x-2)^2$ 의 함숫값과 같아지는지 말하여 보자.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2
$(x-2)^2$

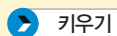


다지기

표를 완성하면 다음과 같다.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$(x-2)^2$...	25	16	9	4	1	0	1	...

위의 표에서 $y=x^2$ 의 함숫값을 오른쪽으로 칸씩 이동하면 $y=(x-2)^2$ 의 함숫값과 같다.



키우기

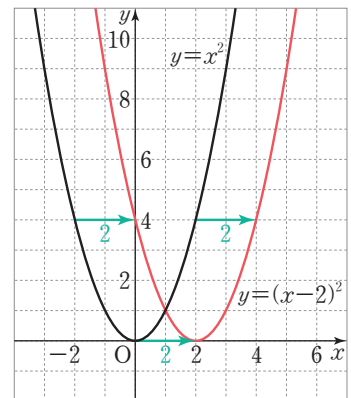
이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프는 어떻게 그릴까?

$y=a(x-p)^2$ (단, $a \neq 0$)의 그래프

탐구 학습의 이차함수 $y=(x-2)^2$ 에서 x 의 값이 -1, 0, 1, 2, 3일 때의 함숫값은 이차함수 $y=x^2$ 에서 x 의 값이 각각 -3, -2, -1, 0, 1일 때의 함숫값과 같다.

따라서 이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하여 그리면 된다.

이때 이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프는 점 (2, 0)을 꼭짓점으로 하고, 직선 $x=2$ 를 축으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

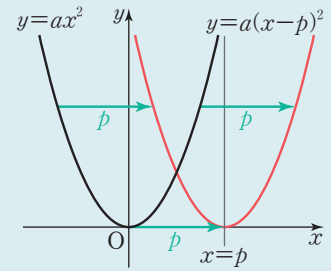


❖ 직선 $x=2$ 는 y 축에 평행한 직선이다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

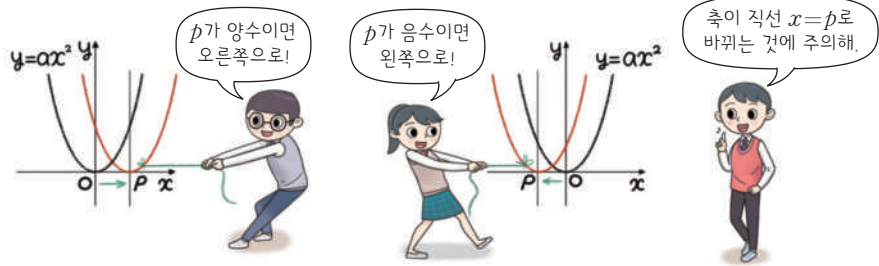
이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프

- ❶ 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동한 것이다.
- ❷ 점 $(p, 0)$ 을 꼭짓점으로 하고, 직선 $x=p$ 를 축으로 하는 포물선이다.



개념 확인

이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프



문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=-3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

(1) $y=-3(x+5)^2$

(2) $y=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2$

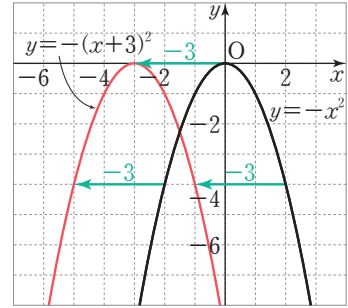
문제 2 다음 이차함수의 그래프를 x 축의 방향으로 [] 안의 수만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하고, 그 함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=2x^2$ [4]

(2) $y=-\frac{2}{3}x^2$ [-5]

예제 1 이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x+3)^2$ 의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

풀이 이차함수 $y=-(x+3)^2$ 의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 축의 방정식은 $x=-3$ 이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 0)$ 이다.

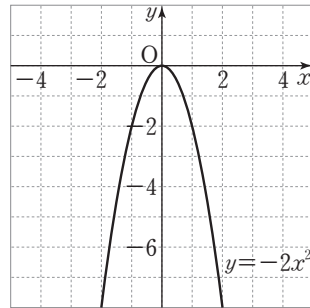
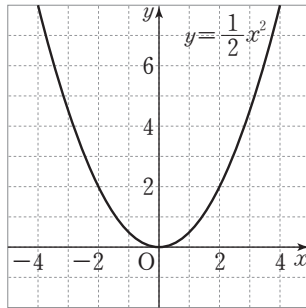


풀이 참조

문제 3 아래 그림은 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 $y=-2x^2$ 의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 각각 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$

(2) $y=-2(x+2)^2$



의사소통



이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 다음과 같이 평행이동할 때, 보기 중에서 변하는 것은 무엇이고 변하지 않는 것은 무엇인지 설명하여 보자. (단, $p \neq 0, q \neq 0$)

보기

축, 꼭짓점의 x 좌표, 꼭짓점의 y 좌표, 폭

	변하는 것	변하지 않는 것
x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동		
y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동		

1

다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

- (1) $y=(x-3)^2$ (2) $y=(x+1)^2$
(3) $y=(x-5)^2$ (4) $y=(x+4)^2$

2

다음 이차함수의 그래프를 x 축의 방향으로 [] 안의 수만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

- (1) $y=\frac{1}{2}x^2$ [3]
(2) $y=-3x^2$ [-2]

3

다음 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

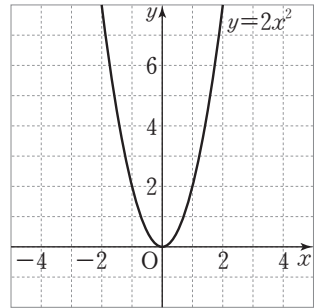
- (1) $y=3(x+2)^2$
(2) $y=-\frac{4}{3}(x-1)^2$

4

오른쪽 그림은 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프이다.

이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

- (1) $y=2(x+2)^2$
(2) $y=2(x-1)^2$

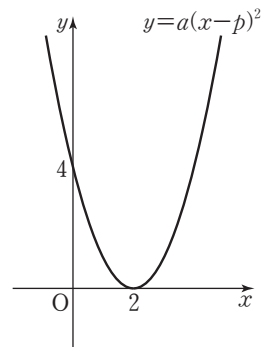


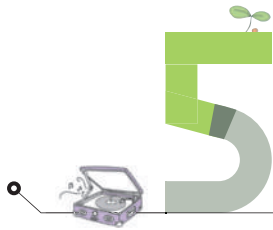
5

이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 점 $(1, k)$ 를 지날 때, k 의 값을 구하시오.

6 **발전 문제**

이차함수 $y=a(x-p)^2$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, p 의 값을 구하시오.

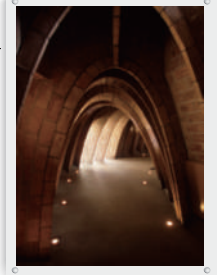




이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해할 수 있다.

가우디(Gaudí, A., 1852~1926)의 작품 중에 포물선을 여러 방향으로 평행이동하여 벽과 천장을 설계한 건축물이 있다.

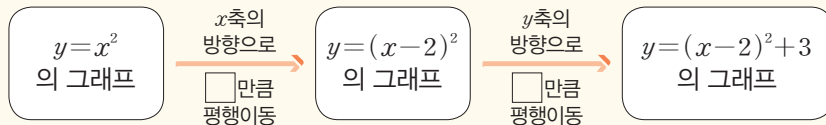


탐구 학습

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프는 어떻게 그리나요?

열기

세 이차함수 $y=x^2$, $y=(x-2)^2$, $y=(x-2)^2+3$ 의 그래프에 대하여 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.



다지기

이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프는 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 □만큼 평행이동한 것이다.

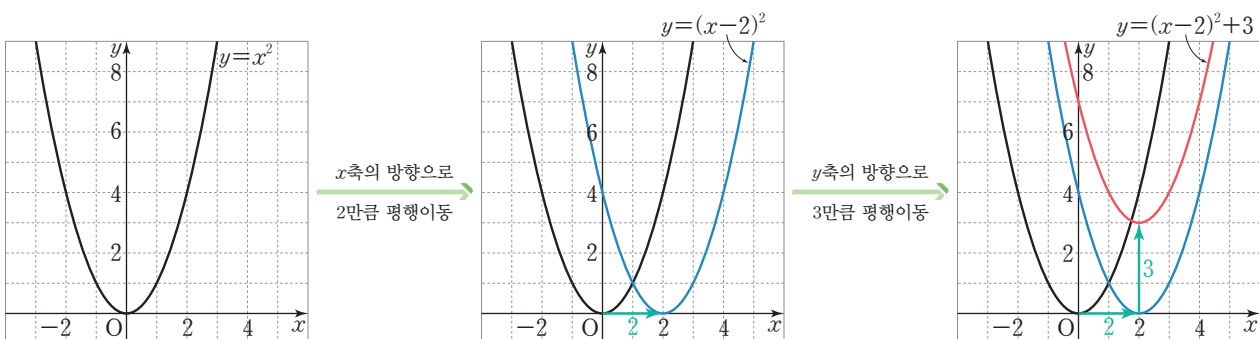
또, 이차함수 $y=(x-2)^2+3$ 의 그래프는 이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 □만큼 평행이동한 것이다.

키우기

이차함수 $y=(x-2)^2+3$ 의 그래프는 어떻게 그럴까?

$y=a(x-p)^2+q$
(단, $a \neq 0$)의 그래프

다음 그림과 같이 이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프는 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 이차함수 $y=(x-2)^2+3$ 의 그래프는 이차함수 $y=(x-2)^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



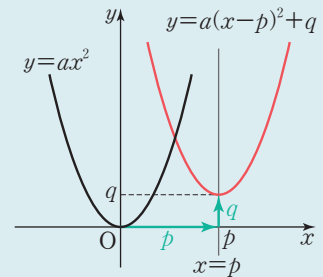
따라서 이차함수 $y=(x-2)^2+3$ 의 그래프는 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 이차함수 $y=(x-2)^2+3$ 의 그래프는 점 $(2, 3)$ 을 꼭짓점으로 하고, 직선 $x=2$ 를 축으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

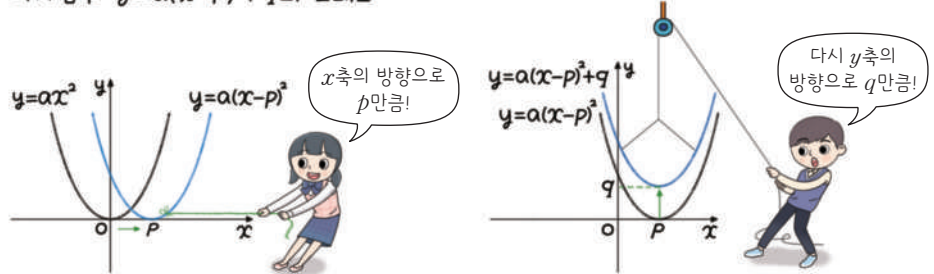
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프

- ① 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.
- ② 점 (p, q) 를 꼭짓점으로 하고, 직선 $x=p$ 를 축으로 하는 포물선이다.



개념 확인

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프



문제 1 다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=-2x^2$ 의 그래프를 x 축과 y 축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

(1) $y=-2(x+1)^2-3$

(2) $y=-2(x-5)^2+2$

문제 2 다음 이차함수의 그래프를 x 축과 y 축의 방향으로 [] 안의 수만큼 차례로 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

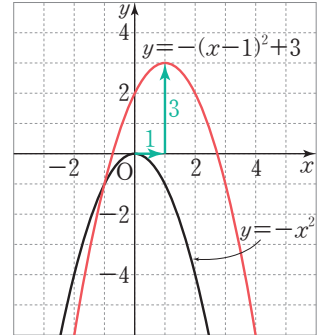
(1) $y=2x^2$ $[-1, 4]$

(2) $y=-\frac{2}{3}x^2$ $[2, -5]$

예제 1

이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x-1)^2+3$ 의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

풀이 이차함수 $y=-(x-1)^2+3$ 의 그래프는 이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 축의 방정식은 $x=1$ 이고, 꼭짓점의 좌표는 $(1, 3)$ 이다.

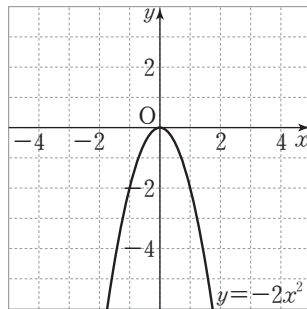
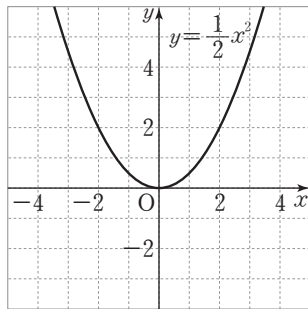


답 풀이 참조

문제 3 아래 그림은 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 $y=-2x^2$ 의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 각각 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$

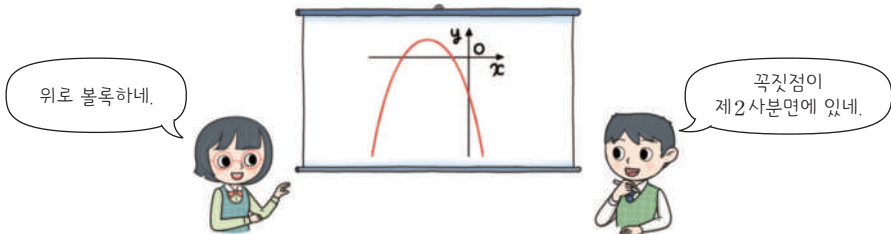
(2) $y=-2(x+1)^2+2$



추론



이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 a, p, q 의 부호를 추측하여 보자.



1

다음 이차함수의 그래프는 이차함수 $y=2x^2$ 의 그래프를 x 축과 y 축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하시오.

- (1) $y=2(x+3)^2+2$ (2) $y=2(x+1)^2-3$
 (3) $y=2(x-2)^2+1$ (4) $y=2(x-4)^2-5$

2

다음 이차함수의 그래프를 x 축과 y 축의 방향으로 [] 안의 수만큼 차례로 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

- (1) $y=-2x^2$ [-3, 6] (2) $y=\frac{1}{3}x^2$ [3, -5]
 (3) $y=5x^2$ [2, 1] (4) $y=-\frac{2}{3}x^2$ [-1, -5]

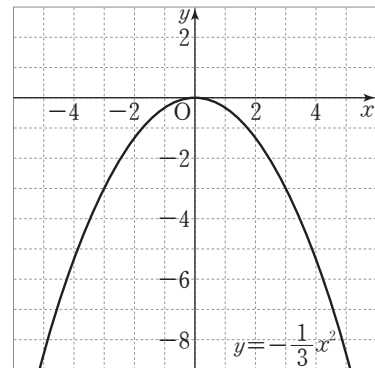
3

다음 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

- (1) $y=4(x+3)^2+2$ (2) $y=-5(x-6)^2+7$
 (3) $y=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4$ (4) $y=-\frac{1}{2}(x-5)^2-3$

4

아래 그림은 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 다음 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.



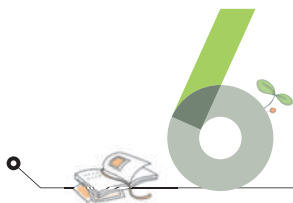
- (1) $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+2$
 (2) $y=-\frac{1}{3}(x+1)^2-3$

5

이차함수 $y=a(x-2)^2+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=-4(x+b)^2+c$ 의 그래프와 일치하였다. 이때 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

6 **발전 문제**

이차함수 $y=a(x+2)^2-3$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나도록 하는 양수 a 의 값의 범위를 구하시오.



이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해할 수 있다.

이차방정식 $x^2-2x-1=0$ 을 완전제곱식을 이용하여 나타낼 수 있듯이
이차함수 $y=x^2-2x-1$ 도 완전제곱식을 이용하여 나타낼 수 있다.



이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프는 어떻게 그리나요?

열기

이차함수 $y=x^2-6x+11$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고쳐 보자.

다지기

이차함수 $y=x^2-6x+11$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고치면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 11 \\ &= (x^2 - 6x + 9 - 9) + 11 \\ &= (x - \square)^2 + \square \end{aligned}$$

키우기

이차함수 $y=x^2-6x+11$ 의 그래프는 어떻게 그릴까?

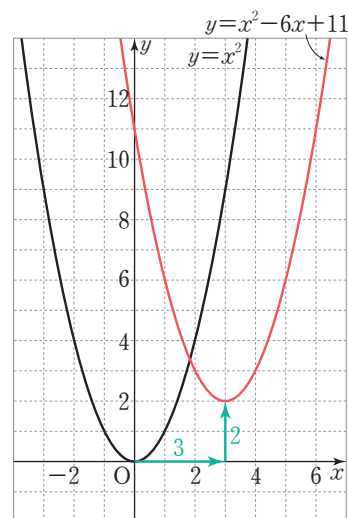
$y=ax^2+bx+c$ (단, $a \neq 0$)의 그래프

탐구 학습에서 이차함수 $y=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$ 이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-6x+11$ 의 그래프는
이차함수 $y=x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼,
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 이차함수 $y=x^2-6x+11$ 의 그래프는 점
(3, 2)를 꼭짓점으로 하고, 직선 $x=3$ 을 축으로
하는 아래로 볼록한 포물선이다. 또, $x=0$ 일 때
 $y=11$ 이므로 이 그래프는 점 (0, 11)을 지난다.

이처럼 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프는
주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴
로 고쳐서 그릴 수 있다.

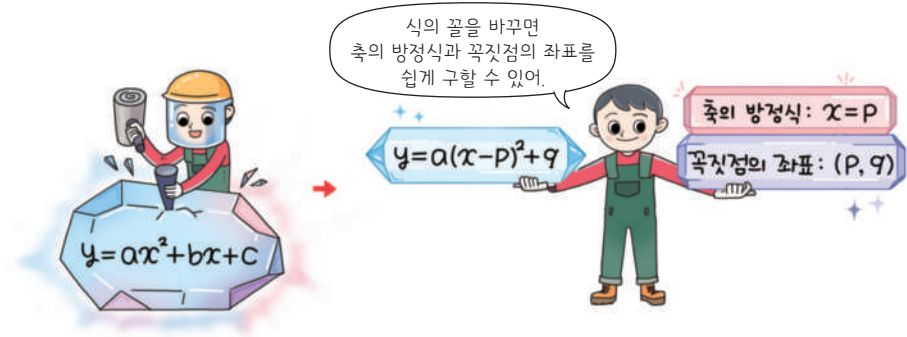


일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에 대하여 다음을 알 수 있다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프

- ① $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고쳐서 그린 그래프와 같다.
- ② y 축 위의 점 $(0, c)$ 를 지난다.
- ③ $a>0$ 이면 아래로 볼록하고, $a<0$ 이면 위로 볼록하다.

개념 확인



문제 1 다음 이차함수를 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고쳐 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=x^2+2x+7$

(2) $y=-x^2+x+3$

| 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프 그리기

예제 1 이차함수 $y=-x^2+6x-5$ 의 그래프를 그리시오.

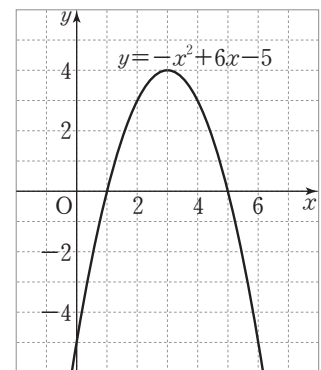
풀이 주어진 이차함수를 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고치면

$$\begin{aligned} y &= -x^2+6x-5 \\ &= -(x^2-6x)-5 \\ &= -(x^2-6x+9-9)-5 \\ &= -(x-3)^2+4 \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, 4)$ 이고, 이 그래프는 점 $(0, -5)$ 를 지난다.

따라서 이차함수 $y=-x^2+6x-5$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



문제 2 다음 이차함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=2x^2+4x+3$

(2) $y=-x^2-4x-4$

예제 2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 1)$ 이고 점 $(2, -1)$ 을 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수)

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(1, 1)$ 이므로 구하는 이차함수의 식을

$$y=a(x-1)^2+1 \quad \dots\dots ①$$

과 같이 나타낼 수 있다.

또, 점 $(2, -1)$ 을 지나므로 ①에

$x=2, y=-1$ 을 대입하면

$$-1=a(2-1)^2+1, a=-2$$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+1 \\ &= -2x^2+4x-1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{답}} \quad y = -2x^2 + 4x - 1$$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 식 구하기

따라 하기

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$ 이고 점 $(1, 4)$ 를 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수)

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(\underline{\quad}, \underline{\quad})$ 이므로 구하는 이차함수의 식을

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \dots\dots ①$$

와/과 같이 나타낼 수 있다.

또, 점 $(\underline{\quad}, \underline{\quad})$ 을/를 지나므로 ①에

$x=\underline{\quad}, y=\underline{\quad}$ 을/를 대입하면

$$\underline{\hspace{2cm}}, a=\underline{\hspace{2cm}}$$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$$y=\underline{\hspace{2cm}}$$

$$=\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\boxed{\text{답}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

문제 3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 1)$ 이고 점 $(0, -3)$ 을 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수)



추론

다음은 이차함수 $y=-2x^2+4x+6$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하는 과정이다. 두 사람의 계산 과정에서 틀린 부분을 찾아 바르게 고쳐 보자.

소미

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+4x+6 \\ &= -2(x^2-2x+1-1)+6 \\ &= -2(x-1)^2-1+6 \\ &= -2(x-1)^2+5 \end{aligned}$$

꼭짓점의 좌표: $(1, 5)$

헤림

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+4x+6 \\ &= x^2-2x-3 \\ &= (x^2-2x+1-1)-3 \\ &= (x-1)^2-4 \end{aligned}$$

꼭짓점의 좌표: $(1, -4)$



1

다음 이차함수를 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 나타내시오.

(1) $y=x^2+2x+5$

(2) $y=-3x^2+6x-1$

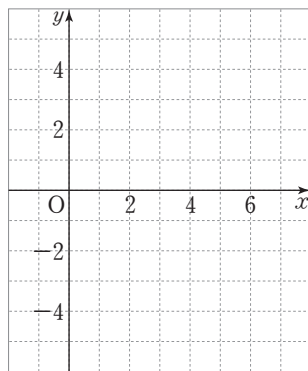
2

이차함수

$y=x^2-6x+4$ 의 그래

프를 오른쪽 좌표평면

위에 그리시오.



3

이차함수 $y=3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=3x^2-12x+7$ 의 그래프와 일치하였다. 이때 $p+q$ 의 값을 구하시오.

4

이차함수 $y=-x^2+4x+a$ 의 그래프의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

5

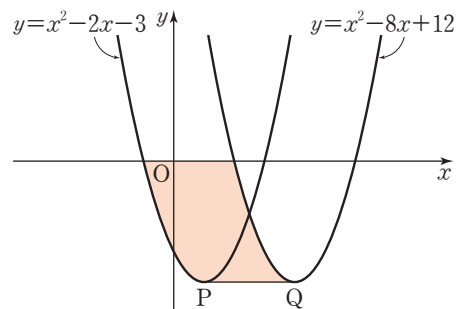
이차함수 $y=ax^2+bx+6$ 의 그래프가 두 점 $A(3, 0)$, $B(-2, 0)$ 을 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하시오.

(단, a, b 는 상수)

6 **창의·융합**

두 이차함수 $y=x^2-2x-3$, $y=x^2-8x+12$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.

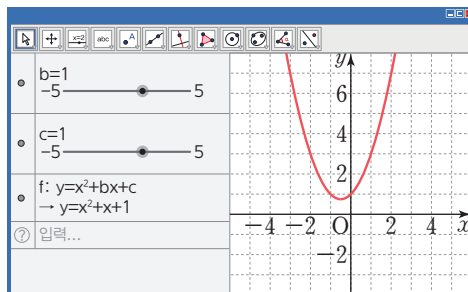
(단, 두 점 P, Q는 각 그래프의 꼭짓점이다.)



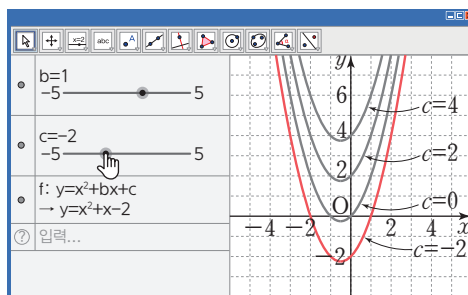
이차함수의 그래프 탐구하기

컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수 $y=x^2+bx+c$ 에서 상수 b, c 의 값을 각각 변화시키면서 그 그래프를 그려 보고, b, c 의 값에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 관찰하여 보자.

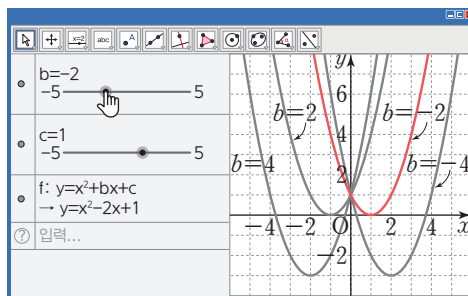
- ❶ 입력란에 $y=x^2+bx+c$ 를 입력하여 b, c 의 값을 변화시킬 수 있는 슬라이더를 만든다.



- ❷ $b=1$ 로 고정한 후, 마우스로 슬라이더 위의 점을 움직여 c 의 값을 변화시키면서 이차함수 $y=x^2+x+c$ 의 그래프의 변화를 관찰한다.



- ❸ $c=1$ 로 고정한 후, 마우스로 슬라이더 위의 점을 움직여 b 의 값을 변화시키면서 이차함수 $y=x^2+bx+1$ 의 그래프의 변화를 관찰한다.



수행 과제

정보 처리

위와 같은 방법으로 컴퓨터 프로그램을 이용하여 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 에서 상수 a, b, c 중 두 값이 정해져 있을 때 나머지 한 값을 변화시키면서 그래프를 그려 보고, a, b, c 의 값에 따라 그래프가 어떻게 변화하는지 관찰하여 알게 된 사실을 친구들과 이야기하여 보자.

개념 콕콕

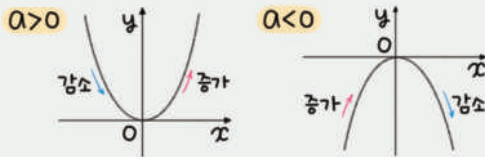
1 이차함수의 뜻

함수 $y=f(x)$ 에서 y 가 x 에 대한 이차식

$$y=ax^2+bx+c \text{ (단, } a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)}$$

로 나타낼 때, 이 함수를 x 에 대한 이차함수라고 한다.

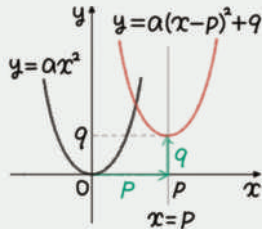
2 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프



- (1) 축: y 축, 꼭짓점: 원점
- (2) $a > 0$ 인 경우: 아래로 볼록
 $a < 0$ 인 경우: 위로 볼록
- (3) a 의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
- (4) 이차함수 $y = -ax^2$ 의 그래프와 x 축에 대칭이다.

3 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프

- (1) 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.



- (2) 축: 직선 $x=p$, 꼭짓점: 점 (p, q)

4 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프

- (1) $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 고쳐서 그릴 수 있다.
- (2) y 축 위의 점 $(0, c)$ 를 지난다.
- (3) $a > 0$ 인 경우: 아래로 볼록
 $a < 0$ 인 경우: 위로 볼록

- 01 함수 $y=2x^2-x(ax-2)-5$ 가 x 에 대한 이차함수가 되도록 하는 실수 a 의 값의 조건을 구하시오.

- 02 이차함수 $f(x)=3x^2-2x+1$ 에서 $f(-1)+f(1)$ 의 값을 구하시오.

- 03 다음 중에서 이차함수 $y=-4x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

- ① 위로 볼록한 포물선이다.
- ② 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.
- ③ 이차함수 $y=4x^2$ 의 그래프와 x 축에 대칭이다.
- ④ 점 $(-2, 16)$ 을 지난다.
- ⑤ y 축을 축으로 한다.

- 04 다음 보기의 이차함수에서 그 그래프의 폭이 넓은 것부터 차례로 쓰시오.

보기

㉠. $y=5x^2$

㉡. $y=-3x^2-4$

㉢. $y=2(x-4)^2$

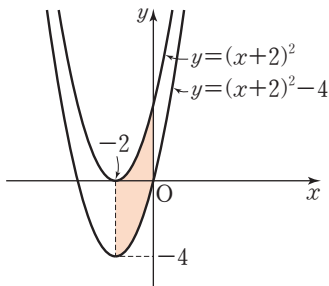
㉣. $y=-\frac{1}{4}(x-3)^2+1$



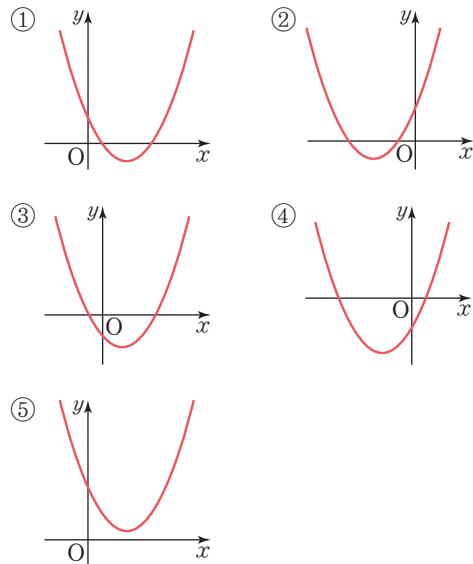
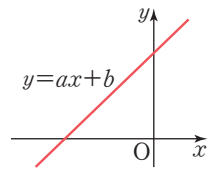
- 05 이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 점 $(1, -1)$ 을 지난다. 이때 상수 a 의 값을 구하시오.

- 06 이차함수 $y=a(x+p)^2$ 의 그래프는 이차함수 $y=-3x^2$ 의 그래프를 평행이동한 것이고, 꼭짓점의 좌표가 $(2, r)$ 이다. 이때 $a-p+r$ 의 값을 구하시오. (단, a, p 는 상수)

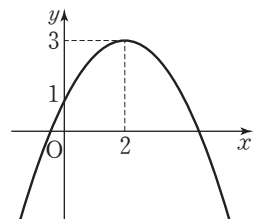
- 07 두 이차함수 $y=(x+2)^2$, $y=(x+2)^2-4$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.



- 08 일차함수 $y=ax+b$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중에서 이차함수 $y=x^2+ax-b$ 의 그래프로 알맞은 것은? (단, a, b 는 상수)



- 09 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 이차함수의 식을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수)

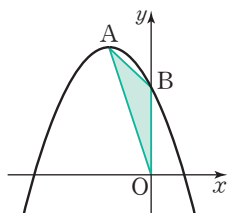


- 10 이차함수 $y=x^2-8x+12$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

서술형

- 11 두 이차함수 $y = -x^2 + 2$, $y = a(x+2)^2 + b$ 의 그래프가 서로의 꼭짓점을 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오.

- 12 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + k$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 축과의 교점을 B라고 하면 $\triangle AOB$ 의 넓이는 3이다. 이때 상수 k 의 값을 구하시오.



사고력 높이기

- 13 두 이차함수 $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ 의 그래프가 각각 제1사분면 위의 두 점 A, B를 지난다고 하자. 두 점 A, B의 y 좌표가 모두 k 이고 $\overline{AB} = 4$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

- 14 이차함수 $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - 1$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 축과의 교점을 B라고 할 때, \overline{AB} 의 길이를 구하시오.

학습 내용 점검

1. 이차함수의 뜻	▶ 01, 02번	😊 😐 😞
2. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프	▶ 03, 04, 13번	😊 😐 😞
3. 이차함수 $y = ax^2 + q$ 의 그래프	▶ 05번	😊 😐 😞
4. 이차함수 $y = a(x-p)^2$ 의 그래프	▶ 06번	😊 😐 😞
5. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프	▶ 07, 11번	😊 😐 😞
6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프	▶ 08, 09, 10, 12, 14번	😊 😐 😞

학습 태도 점검

흥미도
☆☆☆☆☆

집중도
☆☆☆☆☆

참여도
☆☆☆☆☆

협동심
☆☆☆☆☆

나의 학습 일기

이 단원을 배우고 나서 새롭게 알게 된 점이나 부족한 점을 적어 보세요.

투명 종이를 이용한 이차함수의 식 구하기

투명 종이에 모눈이 그려진 좌표평면을 복사한 후 이를 이용하여 다음과 같은 방법으로 포물선 모양을 찾아 그 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구하는 활동을 하여 보자.

- 1 주변에서 직접 포물선 모양을 찾아 촬영하거나 인터넷을 통해 포물선 모양의 사진을 찾는다.
- 2 좌표평면이 복사된 투명 종이를 포물선의 꼭짓점과 한 점을 지나도록 사진 위에 올려놓는다.
- 3 사진 속 포물선 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구한다.

예시

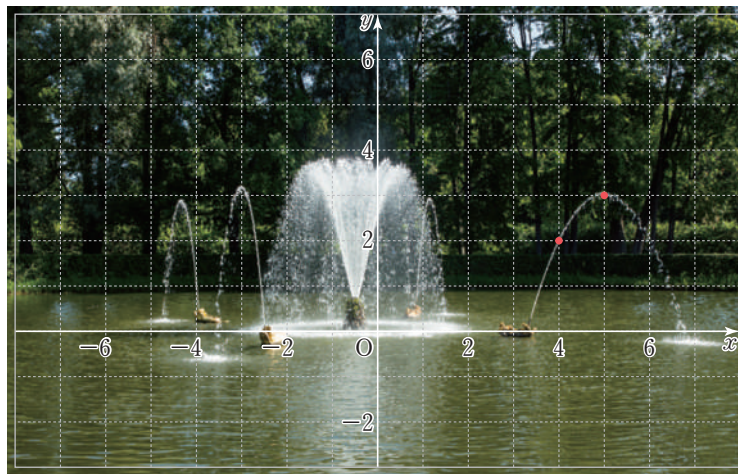


사진 위에 투명 종이를 위와 같이 올려놓으면 꼭짓점의 좌표가 (5, 3)이므로 이차함수의 식은 $y=a(x-5)^2+3$ 과 같이 나타낼 수 있다.

그런데 이 포물선 모양이 점 (4, 2)를 지나므로 위의 식에 $x=4$, $y=2$ 를 대입하면 $a=-1$ 이다.

따라서 이 포물선 모양을 나타내는 이차함수의 식은 $y=-(x-5)^2+3$, 즉 $y=-x^2+10x-22$ 이다.

탐구 과제

예시와 같은 방법으로 포물선 모양의 사진을 이용하여 그 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구하여 보자.

