Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών ΕΜΠ

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Όραση Υπολογιστών
1η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

1)Όνομα: Σερλής Εμμανουήλ Αναστάσιος
2)Αριθμός Μητρώου: el18125
3) Εξάμηνο: 8ο
4) Ακαδημαϊκό έτος: 2021-2022

Σερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03118125.

Όραση Υπολογιστών.
1η Σειρά Ασκήσεων.

Ασκ. 14 (B) / 5.13 α)

$C = \text{Chroma} = \max(R,G,B) - \min(R,G,B) =$

$= \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{C = \frac{7}{15}}$

$C_2 = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - RG - RB - GB} =$

$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} - \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15} + \frac{12}{25}\right)}$

$= \sqrt{\frac{10}{9} - \frac{94}{100}} \Rightarrow \boxed{C_2 = 0.413}$

$H_2 = \begin{cases} \theta, & G \geq B \\ 360^\circ - \theta, & G \leq B \end{cases}, \quad \theta = \cos^{-1}\left[0.5(2R-G-B)/C_2\right]$

με: $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{0.5 \cdot (-0.733)}{0.413}\right] \Rightarrow$

$\theta = 152,5^\circ$ και $G \leq B$

Άρα: $\boxed{H_2 = 360^\circ - \theta = 207.5^\circ}$

β). Για τον HSV χώρο:

$V = C_{max} = \max(R', G', B') = \cancel{\max\left(\frac{R}{255}, \frac{G}{255}, \frac{B}{255}\right)}$

$\Rightarrow \boxed{V = \frac{4}{5}}$

<u>Έχουμε:</u> $\max(R,G,B) = B \rightarrow$

$\rightarrow H = 60^\circ\left(\frac{R-G}{C_{max}-C_{min}} + 4\right) = 60^\circ\left(\frac{R-G}{B-G} + 4\right)$

$\Rightarrow \boxed{H = 205{,}7^\circ}$

και $S = \frac{C}{V} = \frac{7/15}{4/5} \Rightarrow \boxed{S = \frac{7}{12}}$

<u>Για τον HSL:</u>

$L = \frac{\max(R,G,B) + \min(R,G,B)}{2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{17}{30}}$

$S = \frac{C}{1 - |2L-1|} \Rightarrow \boxed{S = \frac{7}{13}}$

$\boxed{H = H_{HSV} = 205{,}7^\circ}$

<u>Για τον HSI:</u>

$I = \frac{R+G+B}{3} \Rightarrow \boxed{I = \frac{20}{45}}$

$$S = 1 - \frac{\min(A,O,B)}{I} \Rightarrow$$

$$\boxed{S = \frac{11}{20}}$$ kai $$\boxed{H = H_2 = 207{,}5^\circ}$$

Άσκηση 1.5/10.8

α) Υπολογισμός $\nabla^2 I = \dfrac{d^2 I}{dx^2} + \dfrac{d^2 I}{dy^2}$, με:

- $\dfrac{dI}{dx} = -u_0 \sin(u_0 x) + \dfrac{m}{2}\Big[-u_0 \sin(u_0 x + v_0 y)$

$- \sin(u_0 x - v_0 y) \cdot u_0\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dI}{dx} = -u_0\Big[\sin(u_0 x) + \dfrac{m}{2}\Big\{\sin(u_0 x + v_0 y) +$

$+ \sin(u_0 x - v_0 y)\Big\}\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d^2 I}{dx^2} = -u_0^2\Big[\cos(u_0 x) + \dfrac{m}{2}\Big\{\cos(u_0 x + v_0 y)$

$+ \cos(u_0 x - v_0 y)\Big\}\Big]$

- $\dfrac{dI}{dy} = \dfrac{m}{2} v_0 \Big[-\sin(u_0 x + v_0 y) + \sin(u_0 x - v_0 y)\Big]$

$\dfrac{d^2 I}{dy^2} = -\dfrac{m}{2} v_0^2 \Big[\cos(u_0 x + v_0 y) + \cos(u_0 x - v_0 y)\Big]$

~~Άρα~~ $\cancel{\nabla^2 I(x,y) = -u_0^2 \cos(u_0 x) + \dots}$

Άρα: $$\boxed{\nabla^2 I(x,y) = \frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{d^2 I}{dy^2} = -u_0^2 \cos(u_0 x) - \frac{m}{2}(u_0^2+v_0^2)\cdot\{\cos(u_0x+v_0y) + \cos(u_0x-v_0y)\}}$$

Έχουμε: $$G_\sigma(x,y) = \exp\left\{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{2\pi\sigma^2}$$

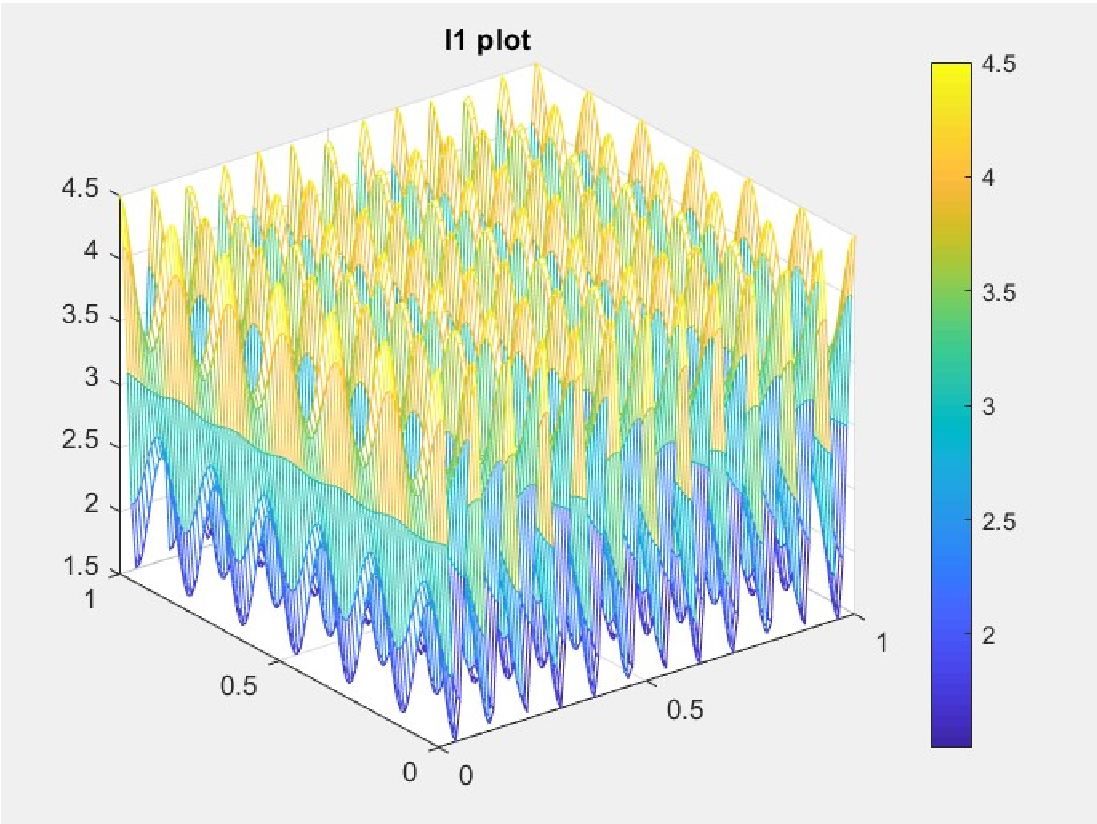
με: $$\nabla^2 G_\sigma(x,y) = \dots = \left(\frac{x^2+y^2-2\sigma^2}{2\pi\sigma^6}\right)\exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right)$$

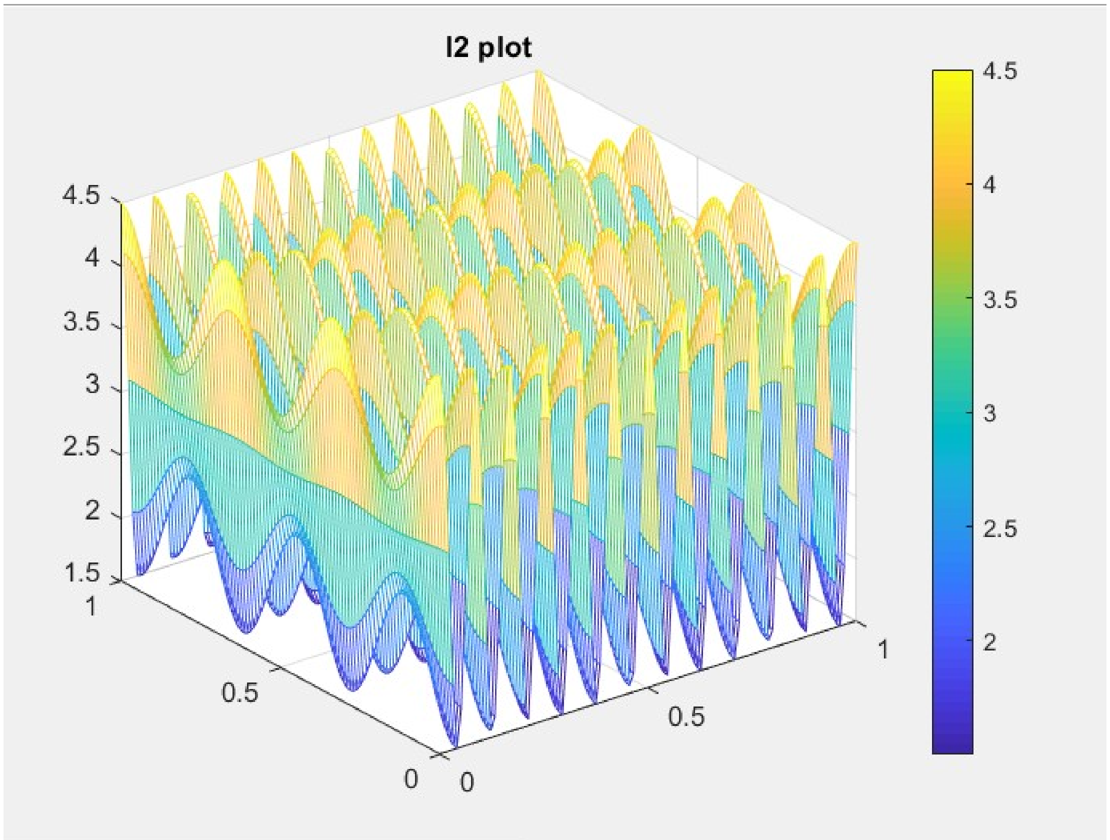
Γνωρίζουμε ότι η συνέλιξη μιας συνάρτησης με μια ημιτονοειδή μένει ημιτονοειδής. Το τελικό αποτέλεσμα λαμβάνεται αν πολλαπλασιαστεί κάθε όρος του αποτελέσματος $\nabla^2 I(x,y)$ με τον κατάλληλο όρο της μορφής $\exp[-(u^2+v^2)\sigma^2]$. Έτσι, έχουμε:

$$\boxed{G_\sigma(x,y) * \nabla^2 I(x,y) = \nabla^2 G_\sigma(x,y) * I(x,y) = \exp(-u_0^2\sigma^2)\cdot\cos(u_0x) + \exp[-(u_0^2+v_0^2)\sigma^2]\frac{m}{2}(u_0^2+v_0^2)\cdot\{\cos(u_0x+v_0y) + \cos(u_0x-v_0y)\}}$$

β)

Ο σχεδιασμός των παραπάνω εικόνων σε Matlab και με τις ζητούμενες παραμέτρους φαίνεται παρακάτω:





Πράγματι, παρατηρείται το διαφορετικό φασματικό περιεχόμενο των 2 παραπάνω εικόνων (γ) Επαναδιατυπώνουμε την σχέση του ερωτ.(α) ως εξής:

- σ -

$$\nabla^2 G_\sigma(x,y) * I(x,y) = -\exp(-u_0^2\sigma^2)\, u_0^2 \cos(u_0 x) \cdot \left[1 + m\frac{u_0^2+v_0^2}{u_0^2}\exp(-v_0^2\sigma^2)\cos(v_0 y)\right]$$

, αφού έχουμε $|m| < \frac{u_0^2}{u_0^2+v_0^2}$, ο όρος $[1+m\cdots]$ βγαίνει καθαρά θετικός.

Συνεπώς, για τα zero-crossings $\nabla^2 G_\sigma(x,y) * I(x,y) = 0$ έχουμε ότι: $\exp(-u_0^2\sigma^2)\, u_0^2 \cos(u_0 x) = 0$, , δηλαδή εξάρτηση τους μονάχα απο u_0

Άρα, για διαφορετικές τιμές της κλίμακας σ, η LoG μηδενίζεται στα ίδια σημεία, άρα απεικονίζονται οι ίδιες ακμές.

Άσκηση 17 / 10.10. $E(x) = [f * h_e(x)]^2 +$

$+ [f * h_o(x)]^2$

Έστω ότι $\forall c_1, c_2$ μία συλλογή γραμμικών φίλτρων $(f*h_1, f*h_2)$ μπορεί να ανιχνεύσει κάθε μεικτή ακμή.

Ισοδύναμα, $\forall c_1, c_2$ υπάρχει μέγιστο στο $x_0 = 0$. Για κάθε φίλτρο h_i, η απόκριση του έχει μέγιστο στο $x_0 = 0$ αν και μόνο αν:

$$(f(x) * h_i(x))'(0) = 0 \Rightarrow$$

$(f*h_i)' = c_1 h_i' + c_2 h_i$ γεγονός που συνεπάγεται ότι ο πίνακας $[c_1 \ c_2]$ είναι ορθοκανονικός στον πίνακα $[h_i'(0), h_i(0)]$. Έτσι αρκεί κανείς να επιλέξει ένα σύνολο $[h_i'(0) \ h_i(0)]$ ώστε να μην είναι ορθοκανονικό στον πίνακα $[c_1 \ c_2]$

Για να αποφευχθεί αυτό αρκεί κανείς να επιλέξει 2 φίλτρα μόνο, ένα άρτιο $h_e(x)$ και ένα περιττό $h_o(x)$ και στην συνέχεια να επιλέξει την παράμετρο η οποία μεγιστοποιεί την απόκριση του φίλτρου $\forall$ σημείο.

<u>Ορίζουμε</u>: $h_a(x) = \cos a \, h_e(x) + \sin a \, h_o(x) \rightarrow$ $\rightarrow$ φίλτρο

$f(x) = c_1 \delta + c_2 \delta^{(-1)} \rightarrow$ εικόνα

$U(a, x) = [f * h_a](x) \rightarrow$ απόκριση

$V(x) = \max U(a,x) \rightarrow$ μέγιστο απόκρισης (ως συνάρτηση).

Με βάση τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε μέγιστο της $V(x)$ στο $x_0=0$:

$$V'(0) = [U_a \, a'(x) + U_x] = 0 \xrightarrow{U_x(a(0),0)=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} V'(0) = U_x(a(0),0) = 0 \\ \text{και} \\ h_o(0) = h_e^{(-1)}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} U_x(a(0),0) = 0 \\ = \dfrac{dU}{dx} = c_1 \sin a \, h_o'(0) \\ + c_2 \cos a \; e(0) \quad (1) \end{array}$$

Επίσης, πρέπει: $\dfrac{dU}{da} = 0 \xrightarrow{x=0}$

$$\Rightarrow \frac{d[c_1 \cos a \, h_e(x) + c_2 \sin a \, h_o^{(-1)}(x)]}{da} = 0$$

$$\xrightarrow{x_0=0} -c_1 \sin a \, h_e(0) + c_2 \cos a \, h_o^{(-1)}(0) = 0 \quad (2)$$

Από (2),(1): $\boxed{h_e^2(0) = -h_o^{(-1)}(0) \, h_o'(0)}$

, η οποία αποτελεί συνθήκη ώστε να γίνεται ανίχνευση της μικτής ακμής $f(x)$ ανεξάρτητη των c_1, c_2.

Γενίκευση: Έστω ότι έχουμε το σύνολο φίλτρων $H(x) = [h_e(x) \;\; h_o(x)]^T$, τότε

$$W(x) = |f * H|^2 = \{f * h_e\}^2 + \{f * h_o\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} = 2[f * h_e][f * h_e]' +$$

$+\lambda [f * h_o] [f * h_o]' \Longrightarrow$

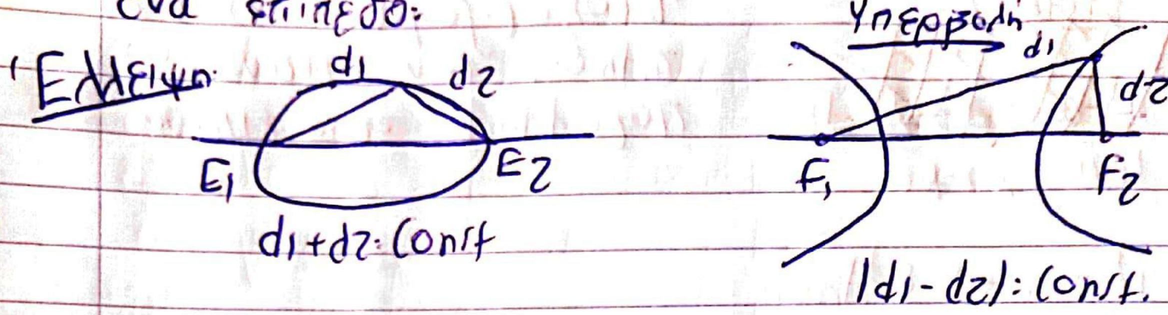
$\Rightarrow \cdots \Rightarrow c_1 c_2 h_e^2(0) - c_1 c_2 h'_o(0) h_o'^{(-1)}(0) = 0$

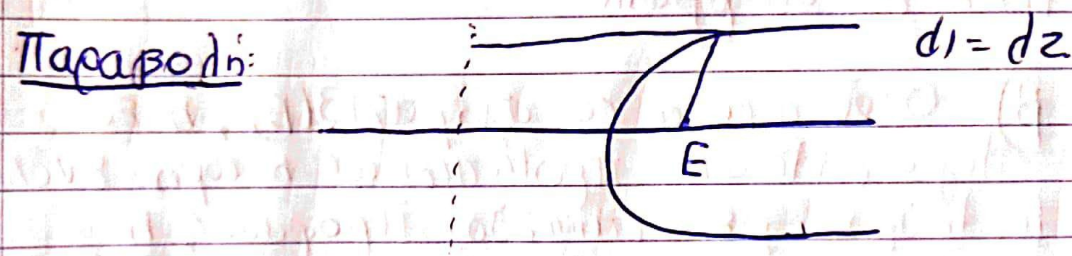
$\Rightarrow h_e^2(0) = -h_o^{(-1)}(0) h'_o(0)$, καταλήξαμε στην ίδια σχέση η οποία μπορεί να επαληθευτεί μέσω κατάλληλης επιλογής των φίλτρων h_e, h_o.

Έτσι, αρκεί η αναζήτηση πολλαπλών ακμών να αντιστοιχισθεί στην εύρεση του μεγίστου της απόκρισης της εικόνας με ένα φίλτρο της μορφής $\Sigma [f * h_i]^2$

α).

Άσκηση 1.2/2.11 Ταξινόμηση των δευτεροβάθμιων κωνικών τομών με βάση τις αποστάσεις τους από 2 σταθερές εστίες ή μία εστία και ένα επίπεδο:





Με βάση το σχήμα 2.13, ορίζουμε ως προοπτικό κέντρο την κορυφή ενός κυκλικού κώνου, ενώ το επίπεδο τομής του κώνου είναι το επίπεδο εικόνας. Επίσης, ως θ_1 ορίζουμε την μισή γωνία του κώνου και ως θ_2 την γωνία που σχηματίζει το επίπεδο εικόνας με τον άξονα συμμετρίας του κώνου. Έτσι, έχουμε τις κάτωθι περιπτώσεις:

1) $\theta_1 > \theta_2 \rightarrow$ έλλειψη
2) $\theta_1 = \theta_2 \rightarrow$ παραβολή
3) $\theta_1 < \theta_2 \rightarrow$ υπερβολή

Ισοδύναμα, και μέσω χρήσης των ιδανικών στοιχείων του προβολικού επιπέδου, γνωρίζουμε ότι οι παράλληλες απέναντι προβολές αντιστοιχούν σε ιδανικά σημεία, το σύνολο των οποίων ορίζει την ιδανική ευθεία.

Έτσι, ορίζουμε ως n το πλήθος των ακτίνων παράλληλων στην εικόνα και έχουμε

i) n=0 → έλλειψη
ii) n=1 → παραβολή
iii) n=2 → υπερβολή

β) Όσον αφορά το σχήμα 2.13(β), η εν λόγω έλλειψη προκύπτει ως η τομή ενός κυλίνδρου με επίπεδο. Προφανώς, η άνωθι σχηματισμός της έλλειψης δεν δημιουργεί ακτίνες παράλληλες στο επίπεδο της έλλειψης, άρα ορθώς έχουμε n=0. Σημειώνεται ότι η αντιστοιχία μεταξύ κύκλου (ως 3D αντικείμενο) και έλλειψης στο τέμνον επίπεδο εικόνας μπορεί να εξηγηθεί και ως ορθογραφική προβολή.

Άσκηση 1 σ.

(b) (b1) Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} f\oplus B &= \bigvee_{b\in B} f(x-b) \geq f \\ f\ominus B &= \bigwedge_{b\in B} f(x+b) \leq f \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\ominus B \leq f \leq f\oplus B \quad (1)$$

Επίσης: για $f \to f\oplus B$ και $f \to f\ominus B$ στην σχέση (1) έχουμε: $\{ f\circ B \leq f \leq f\bullet B \}$ και

$$\left\{\begin{aligned} &\underbrace{[f\oplus B]\ominus B}_{f\bullet B} \leq f\oplus B \\ &\text{και} \\ &\underbrace{[f\ominus B]\oplus B}_{f\circ B} \geq f\ominus B \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(f\oplus B)\ominus B = f\bullet B \\ &(f\ominus B)\oplus B = f\circ B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{ 0\in B : f\ominus B \leq f\circ B \leq f \leq f\bullet B \leq f\oplus B \}}$$

(b2) Έχουμε: $\psi(x) = (f\circ g)\bullet g$ και

$$\psi(\psi(x)) = \psi^2(x) = f\circ g\bullet g\circ g\bullet g \leq f\circ g\bullet \underset{g}{g}\bullet g$$

, αφού $\left\{\begin{aligned} &f\circ g \leq f \\ &\text{και } f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1\bullet g \leq f_2\bullet g \end{aligned}\right\}$

Άρα: $\psi(\psi(x)) \leq f\circ g\bullet g = \psi(x)$ (1)

Επίσης: $\psi^2(x) = f\circ g\bullet \underbrace{g\circ g}_{g\circ g = g}\bullet g \geq f\circ g\circ g\bullet g$

, αφού $\left\{\begin{aligned} &f\bullet g \geq f \\ &\text{και } f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_1\circ g \leq f_2\circ g \end{aligned}\right\}$

Άρα: $\psi^2(x) \geq f\circ g\circ g$ (2)

Από (1), (2): $\boxed{\psi^2(x) = f\circ g\circ g = \psi(x)\text{: idempotent filter.}}$

(γ). Έχουμε: $\phi(x) = X\bullet B = (X\oplus B)\ominus B$, με:

$$X\oplus B = \bigcup_{b\in B} X_{+b}$$

$$X\ominus B = \bigcap_{a\in B} X_{-a}$$

Άρα: $\phi(x) = \bigcap_{a\in B}\left[\bigcup_{b\in B} X_{b-a}\right] =$

$$= \bigcap_{a\in B}\left[X_{(0,0)-a} \cup X_{(0,1)-a} \cup X_{(1,0)-a} \cup X_{(1,1)-a}\right]$$

$$= \left[X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)} \cup X_{(1,0)} \cup X_{(1,1)}\right] \cap$$

$$\cap \left[X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(1,-1)} \cup X_{(1,0)}\right] \cap$$

$$\cap \left[X_{(-1,0)} \cup X_{(-1,1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)}\right]$$

$$\cap \left[X_{(-1,-1)} \cup X_{(-1,0)} \cup X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)}\right]$$

Σε boolean μορφή: $\cup \to +$ και $\cap \to \cdot$

$$\boxed{\begin{aligned}\beta(u_1,\dots,u_n) = {} & [u_{0,0} + u_{0,1} + u_{1,0} + u_{1,1}] \\ & \cdot [u_{0,-1} + u_{0,0} + u_{1,-1} + u_{1,0}] \cdot\end{aligned}}$$

$$\cdot [u_{-1,0} + u_{-1,1} + u_{0,0} + u_{0,1}] \cdot$$
$$\cdot [u_{-1,-1} + u_{-1,0} + u_{0,-1} + u_{0,0}]$$

Και το αντίστοιχο κλειστό φίλτρο: ($\cap \to \min$, $\cup \to \max$).

$$\phi(f)(x,y) = \min\{ \max[f(x,y), f(x,y-1), f(x-1,y), f(x-1,y-1)], \max[f(x,y+1), f(x,y), f(x-1,y+1), f(x-1,y)], \max[f(x,y+1), f(x+1,y-1), f(x,y), f(x,y-1)], \max[f(x+1,y+1), f(x+1,y), f(x,y+1), f(x,y)]\}$$

(C) $\phi(X) = X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \Rightarrow \phi(X) = \phi_2(\phi_1(X))$, με:

$$\phi_1(X) = X \ominus B$$
$$\phi_2(X) = X \oplus B$$

Τα γκρίζα φίλτρα έχουν την μορφή:

$$\phi_i(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R} : x \in \phi_i[X_u(f)]\}.$$

Γνωρίζουμε από θεωρία ότι:

$$\phi_1(X) = X \ominus B \longrightarrow \phi_1(f) = f \ominus B$$

$$\phi_2(X) = X \oplus B \rightarrow \phi_2(f) = f \oplus B$$

Άρα: $\phi(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R}: x \in \phi[X_u(f)]\}$

$= \sup\{u: x \in \phi_2[\phi_1[X_u(f)]]\} =$

$= \sup\{u: x \in \phi_2[X_u[\phi_1(f)]]\} =$

$= \sup\{u: x \in X_u[\phi_2[\phi_1(f)]]\} = \phi_2(\phi_1(f))(x)$

$= [f \ominus B] \oplus B(x) = f \circ B(x) \Rightarrow \boxed{\phi(f)(x) = f \circ B(x)}$

(α)(1). $X \circ B = \bigcup_{B_{+p} \subseteq X} B_{+p}$

$X \circ (B+z) = \bigcup_{B+z+p} B_{z+p} \xrightarrow{z+p=q} \bigcup_{B+q \subseteq X} B+q = X \circ B$

Άρα: $\boxed{X \circ B = X \circ (B+z)}$

(2). $[X \ominus A] \ominus B = \bigcap_{b \in B} [\bigcap_{a \in A} X_{-b-a}] = \bigcap_{b \in B} [\bigcap_{a \in A} X_{-(b+a)}]$

$\xrightarrow{b+a=q} \bigcap_{q \in A \oplus B} X_{-q} = X \ominus (A \oplus B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{[X \ominus A] \ominus B = [X \ominus (A \oplus B)]}$

α)

Άσκηση 1.4.1 / Σ.σ. Από το χρωματικό διάγραμμα CIE του σχήματος, παρατηρούμε ότι τα πραγματικά χρώματα, δηλαδή αυτά που είναι αντιληπτά από τον άνθρωπο, επεκτείνονται και εκτός του χώρου/τριγώνου που ορίζεται από τα πρωταρχικά χρώματα RGB. Αυτό συνεπάγεται ότι τα πρωταρχικά χρώματα RGB πρέπει να λάβουν τιμές αρνητικές ή/και μεγαλύτερες της μονάδας, κάτι που αντικατοπτρίζεται από την σχέση Μ/Σ (RGB)→(XYZ):

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,24 & -1,54 & -0.5 \\ -0,97 & 1,89 & 0,04 \\ 0,06 & -0,2 & 1,06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$ Foy

(π.χ για $(x,y)=(0,1,0,7)\rightarrow(R,G,B)=(-1,22,1.75,0.11)$)

β) Το εν λόγω ερώτημα αποτελεί την αντιστροφοαντίθετη πρόταση του ερωτήματος α, η οποία και αποδείχθηκε παραπάνω.

Άσκηση 1.1 (ψ) 2.3(α) Έχουμε για $X_0 = Y_0 = 0$.

$$w = fL \left| \frac{a z_0}{z_0^2 - \frac{L^2 c^2}{4}} \right| = \frac{4fL\,|a z_0|}{|4z_0^2 - L^2c^2|}$$

$$L = \frac{4fL\,|b z_0|}{|4z_0^2 - L^2c^2|}$$

$$l = \sqrt{w^2 + L^2} = \frac{4fL\sqrt{a^2+b^2}}{|4z_0^2 - L^2c^2|}$$

Μεγιστοποίηση μήκους για: $\frac{dl}{dc} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pm 4fL\sqrt{a^2+b^2}\,(2cL^2)}{(4z_0^2 - L^2c^2} = 0 \Rightarrow c = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\cos 90^\circ = \overset{=0}{c}}$, άρα έχουμε μεγιστοποίηση του μήκους όταν το 3D τμήμα είναι παράλληλο στο επίπεδο της εικόνας, δηλαδή κάθετο στον $z'z$ άξονα

Σημειώνεται ότι το επίπεδο xy είναι το επίπεδο της εικόνας

Άσκηση 1.1(β)/27

α) Όσον αφορά το στερ. πλέγμα, οι ευθείες παράλληλες στον άξονα είναι οι (AB), (CD). Θέλουμε νδο δεν έχουν πεπερασμένο σημείο φυγής, με:

$$\left\{\begin{array}{l} x_{+\infty} = f\,\frac{a}{c} \\ y_{+\infty} = f\,\frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{+\infty} = y_{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow c = \cos 90^\circ \text{ ή } \theta z = 90^\circ$$

Άρα, οι εν λόγω ευθείες μένουν κάθετες στον άξονα z'z, δηλαδή παράλληλες στο επίπεδο του πλέγματος (xy) και κατ' επέκταση παράλληλες στο αρχικό στερ. πλέγμα

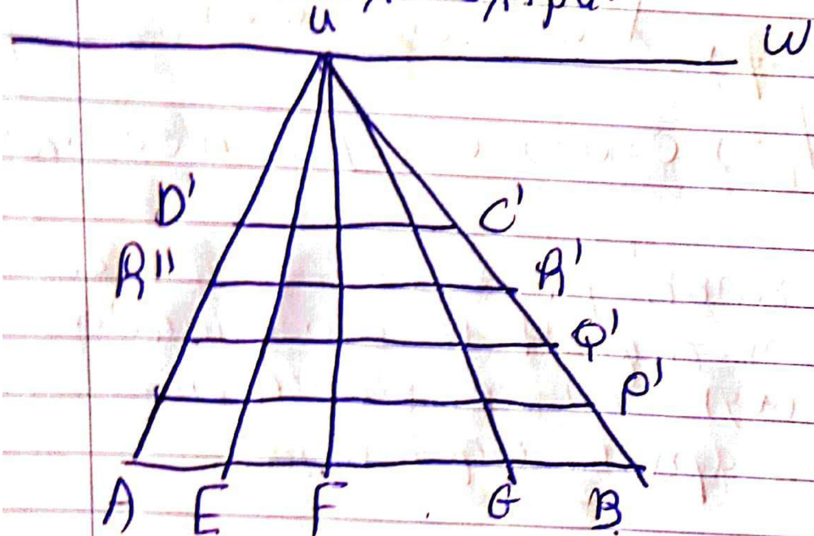
β). Γνωρίζοντας τα σημεία C' D' και αφού A'=A || B'=B γνωρίζουμε την εξίσωση των ευθειών (AD') και (C'B). Λύνοντας (AD') = (C'B), βρίσκουμε το κοινό τους σημείο U, που αποτελεί κεντρικό σημείο φυγής

Με παρόμοια λογική, παρατηρούμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{r \to +\infty} (AC') = W \\ \lim\limits_{r \to +\infty} (BD') = U \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{ορίζεται η ευθεία (UW) δηλαδή η ευθεία φυγής}}$$

γ). Αφού γνωρίζουμε το σημείο ρ' - όπως γνωρίζουμε τα σημεία C,D' προηγουμένως - καθώς και την ευθεία φυγής, μπορούμε να ρφούμε την ευθεία ρ'ρ'' η οποία διέρχεται απ' το ρ' και είναι παράλληλη στην ευθεία φυγής.

Το αντίστοιχο σχήμα:



Άσκηση 13 / 2.15.

a). $C_{sr}(\tau) = \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} r(t)\, s(t+\tau)\, dt =$

$= \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} \left[b + a\rho\, [1+\cos(\omega_m t - \phi)]\right] \cdot$

$\cdot \left[\rho\, [1+\cos(\omega_m t + \omega_m \tau)]\right] dt =$

$\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} \left[b + a \cdot (1+\cos(\omega_m t - \phi))\right] \cdot$

$\cdot \left[1+\cos(\omega_m t + \omega_m \tau)\right] dt$, αφού:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho[1+\cos(\omega_m t + \underbrace{\omega_m \tau}_{\phi_c})] = 1+\cos(\omega_m t + \omega_m \tau) \\ \rho[1+\cos(\omega_m t - \phi)] = 1+\cos(\omega_m t - \phi) \end{array}\right\}.$$

Άρα: $C_{sr}(\tau) = \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} \left[(b+a) + a\cos(\omega_m t - \phi)\right]$

$\cdot \left[1+\cos(\omega_m t + \omega_m \tau)\right] dt =$

$= \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} (b+a)\, dt + \underbrace{\frac{(b+a)}{T_m}\int_0^{T_m} \cos(\omega_m t + \omega_m \tau)\, dt}_{I_1}$

$+ \underbrace{\frac{a}{T_m}\int_0^{T_m} \cos(\omega_m t - \phi)}_{I_2} + \underbrace{\frac{a}{T_m}\int_0^{T_m} \cos(\cdots)\cdot\cos(\cdots)}_{I_3}$

$$I_1 = \int_0^{T_m} \cos(\omega_m t + \omega_m \tau)\, dt = \left[\sin(\omega_m t + \omega_m \tau) \frac{1}{\omega_m} \right]_0^{T_m}$$

$$\xRightarrow{T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}} \sin(2\pi + \omega_m \tau) - \sin(\omega_m \tau) = 0.$$

Ομοίως $I_2 = 0$.

Για το I_3: $I_3 = \frac{a}{T_m} \int_0^{T_m} \cos(\omega_m t + \omega_m \tau) \cdot \cos(\omega_m t - \phi)\, dt$

$$= \frac{a}{T_m} \frac{1}{2} \int_0^{T_m} \left[\cancel{\cos(2\omega_m t)}^{\,0} + \cos(\omega_m \tau + \phi) \right] dt.$$

$$= \frac{a}{T_m} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{T_m} \cos(\omega_m \tau + \phi)\, dt = \frac{a}{\cancel{T_m}} \frac{1}{2} \cos(\omega_m \tau + \phi) \cdot \cancel{T_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{sr}(\tau) = \frac{a \cdot \cos(\omega_m \tau + \phi)}{2}}$$

$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$.

β). $n=0$: $G_{sr}(\tau_0) = \frac{a}{2} \cos(\phi)$.

$n=1$: $G_{sr}(\tau_1) = \frac{a}{2} \cos\left(\omega_m \cdot \frac{T_m}{4} + \phi\right) = \frac{a}{2} \cos\left(\cancel{\omega_m} \frac{\pi}{2\cancel{\omega_m}} + \phi\right).$

$$= \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\frac{a}{2} \sin\phi.$$

$n=2$: $G_{sr}(\tau_2) = \frac{a}{2} \cdot \cos\left(\frac{\omega_m \cdot 2}{4} \cdot T_m + \phi\right) =$

$$= \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\omega_m T_m}{2} + \phi\right) = \frac{a}{2} \cos(\pi + \phi) = -\frac{a}{2} \cos\phi$$

Ομοίως: $C_{sr3} = \frac{a}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\phi\right) =$

$= \frac{a}{2} \cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = \frac{a}{2} \sin\phi.$

Θεωρούμε γνωστές τις τιμές: $C_{sr0} \ldots C_{sr3}$:

Άρα, έχουμε: $\left\{ \begin{array}{l} C_{sr0} = \frac{a}{2}\cos(\phi) \\ C_{sr1} = \frac{a}{2}\sin(\phi) \end{array} \right\} \tan\varphi = \frac{C_{sr1}}{C_{sr0}}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = \arctan\left(\frac{C_{sr1}}{C_{sr0}}\right) \\ \text{και} \\ a = \dfrac{2C_{sr0}}{\cos\left[\arctan\left(\frac{C_{sr1}}{C_{sr0}}\right)\right]} \end{array}}$$

(γ) $\text{distance} = \frac{\lambda\phi}{4\pi}$, με:

$\omega_m = 2\pi f_m \Rightarrow f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$

και $C = \lambda f_m \Rightarrow \lambda = \frac{C}{f_m} = \frac{C \cdot 2\pi}{\omega_m}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\text{distance} = \frac{C \cdot 2\pi \cdot \phi}{\omega_m} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2\pi \cdot \pi/3}{30 \cdot 10^6} \Rightarrow \boxed{\text{distance} = 128{,}02\text{m.}}$

Λύση 1.3.2/3.5.1. Η ζητούμενη σχέση:

$$h(x,y) \propto p\left(\frac{x}{\epsilon d_2}, \frac{y}{\epsilon d_2}\right).$$

Υποθέτουμε σύστημα με λάθος εστίαση

$$\epsilon = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}$$

- Ορίζουμε ως $h(x,y)$ την κατανομή του φωτός που δημιουργεί μία δέσμη στο πεδίο της εικόνας.
Υποθέτουμε ότι το επίπεδο της ~~εικόνας~~ εστιασμένης εικόνας βρίσκεται σε απόσταση d_{20}, ικανοποιώντας την εξίσωση:

$$\frac{1}{d_{20}} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

- Η σκιά σε ένα σημείο στην άκρη του ανοίγματος και σε απόσταση ρ αντιστοιχεί σε σημείο του επιπέδου της εικόνας σε απόσταση ρ_r, με:

$$\frac{\rho_r}{\rho} = \frac{d_{20}-d_2}{d_{20}} = 1 - \frac{d_2}{d_{20}} = 1 - d_2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_1}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$= 1 - d_2\left(\frac{1}{d_2} - \epsilon\right) = \epsilon d_2 .$$

Αν $p(x,y)$ είναι η συνάρτηση διαφράγματος, για την οποία ισχύει ότι $p(x,y)=1$ για σημεία εντός του διαφράγματος και ο εκτός

, τότε η συνάρτηση $h(x,y)$ αποτελεί μία κλιμακούμενη έκδοση της $p(x,y)$ κατά το παράγοντα $\frac{\rho_r}{\varphi} = \epsilon d_2$, ώστε:

$$h(x,y) \propto p\left(\frac{x}{\epsilon d_2}, \frac{y}{\epsilon d_2}\right)$$

→ Κρουστική απόκριση μη εστιασμένου φακού.

Σχήμα: