(Εξηγείστε επαρκώς την εργασία σας. Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Εξηγείστε επαρκώς την εργασία σας. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην HELIOS ιστοσελίδα του μαθήματος `https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=964` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `cv22_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναριμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας. Συμπεριλάβετε και τον κώδικα προγραμμάτων, π.χ. Matlab or Python, που πιθανώς χρησιμοποιήσατε για αριθμητική επίλυση.)
Σημ.: οι ακόλουθες ασκήσεις δεν ειναι ισοβαρείς.

Ασκηση 3.1: (Ανάλυση Σχήματος με Μετ/σμό Απόστασης και Σκελετό)
(a) Θεωρούμε μια οποιαδήποτε μη-κενή ψηφιακή δυαδική εικόνα X (η οποία παριστάνει κάποιο σχήμα) και ένα δομικό στοιχείο B (που προσεγγίζει τον δίσκο με βάση τον οποίο γίνεται η σκελετικοποίηση του σχήματος), όπου $X, B \subseteq \mathbb{Z}^2$. Εάν $(0,0) \in B$ και $\mathrm{card}(B) \geq 2$, να αποδειχθεί ότι τα σκελετικά υποσύνολα της εικόνας έχουν μεταξύ τους κενή τομή, δηλ.

$$S_n = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B] \implies S_n \cap S_{n+1} = \varnothing, \quad \forall n.$$

$nB = B \oplus B \oplus \ldots \oplus B$ είναι το δομικό στοιχείο σε κλίμακα $n = 0, 1, 2, ..., N = \max\{k : X \ominus kB \neq \varnothing\}$.
(b) Θεωρούμε μια δυαδική εικόνα (σύνολο) X που εγγράφεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 6×9 pixels. (Βλ. επισυναπτόμενο Σχήμα στο τέλος).
(b1) Να υπολογισθεί ο εσωτερικός μετασχηματισμός απόστασης $DT(X)$ του συνόλου X με τον two-pass forward-backward αλγόριθμο chamfer χρησιμοποιώντας την απόσταση cityblock. Να βρεθούν οι τιμές των εικόνων u_0 ($0/\infty$ indicator function του X), u_1 (ενδιάμεσο στάδιο απόστασης), και $u_2 = DT(X)$ (τελική απόσταση).
(b2) Να υπολογισθεί ο μορφολογικός σκελετός $SK(X) = \bigcup_{n \geq 0} S_n(X)$, ως ένωση των σκελετικών υποσυνόλων $S_n(X)$, όπου B είναι ο 5-pixel ρόμβος. Επίσης, να βρεθούν τα σημεία των: erosions $X \ominus nB$, skeleton subsets $S_n(X)$, partial unions of skeleton subsets $U_{k \geq n} S_k(X)$, openings $X \circ nB$, για $n = 0, 1, 2, \ldots$. (Σημεία ενός συνόλου συμβολίζονται με '$\bullet$', ενώ σημεία του συμπληρώματος του συμβολίζονται με '$\cdot$')
(b3) Να επαληθεύσετε υπολογιστικά για το ανωτέρω παράδειγμα ότι τα σημεία του σκελετού στο μέρος (b2) είναι ακριβώς τα σημεία τοπικού μεγίστου του μετ/σμού απόστασης στο μέρος (b1), όπου τα τοπικά μέγιστα υπολογίζονται με βάση την γειτονιά B.
Το μέρος **(b)** να επιστραφεί στην επισυναπτόμενη σελίδα με τον πίνακα σχημάτων.

Ασκηση 3.2: (Υφή, ανάλυση με ενεργειακά μοντέλα)
Εστω ο 2Δ ενεργειακός τελεστής $\Phi(f)(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|^2 - f(x,y)\nabla^2 f(x,y)$. Να αποδείξετε ότι η εφαρμογή του σε μια ημιτονοειδή υφή $f(x,y)$ δίνει ένα τετραγωνικό γινόμενο πλάτους και συχνότητας:

$$f(x,y) = A\cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \phi_0) \Longrightarrow \Phi[f(x,y)] = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

Στο Κεφ.13 (Ενότητα 13.3 του βιβλίου Ο.Υ. 2005) περιγράφεται ένας αλγόριθμος που υπολογίζει ακριβώς τις τιμές των απολύτων παραμέτρων $|A|$, $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ συνδυάζοντας το ανωτέρω αποτέλεσμα και τις ενέργειες $\Phi(f_x), \Phi(f_y)$ των μερικών παραγώγων της υφής. Βασιζόμενοι στις ανωτέρω ιδέες, να βρείτε ένα παρόμοιο αλγόριθμο που να υπολογίζει τις τιμές των συχνοτήτων ω_1 και ω_2 με τα ορθά πρόσημα, χρησιμοποιώντας και την μεικτή παράγωγο f_{xy}.

Ασκηση 3.3: (Σχήμα, Καμπυλότητα)
Η καρδιοϊδής καμπύλη είναι μια επίπεδη καμπύλη που ιχνηλατείται από ένα συγκεκριμένο σημείο επί ενός κύκλου ο οποίος περιστρέφεται εφαπτομενικά γύρω από ένα σταθερό κύκλο της ίδιας ακτίνας a. Ο σταθερός κύκλος έχει κέντρο το σημείο $(-a, 0)$, ο περιστρεφόμενος κύκλος στην αρχική θέση έχει το κέντρο του στο σημείο $(a, 0)$, και θεωρούμε ως αρχικό σημείο της καμπύλης το σημείο $(0, 0)$ που είναι η αρχική επαφή των δύο κύκλων.
(a) Να αποδειχθεί ότι η παραμετροποίηση της καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) είναι

$$x(\gamma) = 2a(1 - \cos\gamma)\cos(\gamma), \quad y(\gamma) = 2a(1 - \cos\gamma)\sin(\gamma)$$

ή ισοδύναμα σε πολικές συντεταγμένες (r, γ)

$$r(\gamma) = 2a(1 - \cos\gamma)$$

όπου $\gamma \in [0, 2\pi)$ είναι η γωνία περιστροφής. Επίσης σχεδιάστε την καμπύλη.
(b) Να βρεθούν οι συναρτήσεις μήκους τόξου $s(\gamma)$ και καμπυλότητας $\kappa(\gamma)$ της καμπύλης.

Ασκηση 3.4: (Κίνηση, 3Δ):
Ενα στερεό 3Δ αντικείμενο με επιφάνεια Z κινείται μπροστά από μια κάμερα (με $f = 1$) με άγνωστη μεταφορική ταχύτητα (U, V, W) και άγνωστη περιστροφική ταχύτητα (A, B, C). Εστω το 2Δ πεδίο ταχύτητας (οπτικής ροής) $(u = dx/dt, v = dy/dt)$ στο επίπεδο της εικόνας και έστω $u = u_t + u_r$, $v = v_t + v_r$ όπου u_t, v_t και u_r, v_r εκφράζουν συνιστώσες μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης αντίστοιχα. Δεδομένα: Θεωρούμε γνωστά τα (u, v) σε κάθε σημείο στο επίπεδο της εικόνας καθώς και το *σημείο φυγής* (x_0, y_0) όπου $(u_t, v_t) = (0, 0)$.
(a) Να βρεθούν τα u_r, u_t, v_r, v_t σε αυθαίρετα σημεία (x, y) της εικόνας συναρτήσει κάποιων από U, V, W, A, B, C, x_0, y_0.
(b) Να βρεθεί η κατεύθυνση της μεταφορικής κίνησης $U : V : W$ συναρτήσει των x_0, y_0.
(c) Από την γνώση των $u(x_0, y)$ και $v(x, y_0)$, περιγράψετε ένα αλγόριθμο για να βρεθεί η περιστροφική κίνηση (A, B, C).
(d) Περιγράψετε πως μπορεί να βρεθεί το σχετικό βάθος $Z(x, y)/W$ αν γνωρίζετε το (c).

Ασκηση 3.5: (Κίνηση, Gabor φίλτρα): Στην επεξεργασία και ανάλυση βίντεο για την εκτίμηση της κίνησης ή την εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος συχνά χρησιμοποιούνται συστοιχίες από 3Δ Gabor φίλτρα. Ωστόσο, η απευθείας συνέλιξη με 3Δ αποκρίσεις έχει μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα και συχνά αναζητούνται τρόποι για την επιτάχυνση του φιλτραρίσματος στις 3Δ διαστάσεις. Προς αυτή την κατεύθυνση συμβάλει η ιδιότητα του να έχουμε separable φίλτρα. Θεωρήστε μια ακολουθία εικόνων βίντεο $I(x, y, t)$ και το συνημιτονικό 3Δ Gabor φίλτρο:

$$g_c(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_t} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right)\right] \cdot \cos(\omega_{x_0}x + \omega_{y_0}y + \omega_{t_0}t)$$

α) Να αποδείξετε ότι το 3Δ Gabor φίλτρο είναι separable.
β) Να δείξετε πως το 3Δ φιλτράρισμα μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση separable 1Δ φίλτρων. Ποια η διαφορά στην πολυπλοκότητα σε σχέση με την απευθείας 3Δ συνέλιξη;
γ) Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του 3Δ φίλτρου.
δ) Τι μορφή θα έχουν οι ισοϋψείς επιφάνειες που προκύπτουν από την 3Δ απόκριση συχνότητας; Περιγράψτε ή σχεδιάστε τη γεωμετρία τους στις 3Δ.

Ασκηση 3.6: (Ενεργές Καμπύλες)
(α) Θεωρήστε ένα μοντέλο εξέλιξης καμπυλών που χρησιμοποιεί μια γενικευμένη αρχή του Huygens για την δημιουργία του νέου ορίου κύματος $\Gamma(t + \Delta t)$ διαστέλλοντας το προηγούμενο όριο κύματος $\Gamma(t)$ με σχήματα $\Delta t B$, όπου B είναι μια έλλειψη με άξονες παράλληλους ως προς τους άξονες x, y και με αντίστοιχα μήκη αξόνων $a > b$. Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση εξωτερικής κάθετης ταχύτητας V

της καμπύλης χρησιμοποιώντας την μέθοδο επιπεδοσυνόλων όπου η καμπύλη εμβυθίζεται ως η ισοϋψής (σε ύψος $u = 0$) μιας συνάρτησης $u = u(x, y, t)$ που για $t = 0$ είναι αρνητική απόσταση ($u < 0$) στο εσωτερικό της καμπύλης, και θετική στο εξεωτερικό.
(β) Αν τώρα ορίσουμε την συνάρτηση u ως τον χώρο κλίμακας $u(x, y, t) = f(x, y) \oplus tB$, όπου f μια αρχική γκρίζα εικόνα, με βάση το μέρος (α) να βρεθεί μια μερική διαφορική εξίσωση που να μοντελοποιεί την γένεση της u απο την αρχική συνθήκη $u(x, y, 0) = f(x, y)$.

Ασκηση 3.7: (Προβολική Γεωμετρία - Στερέοψη)
(α) Αφινικοί μετασχηματισμοί. Να αποδείξετε ότι για την περίπτωση των αφινικών μετασχηματισμών στο επίπεδο, είναι δυνατό να μετασχηματιστεί ένας κύκλος σε μία έλλειψη, ενώ είναι αδύνατο να μετασχηματιστεί μία έλλειψη σε υπερβολή ή παραβολή. [Κεφ.2, HS2003].

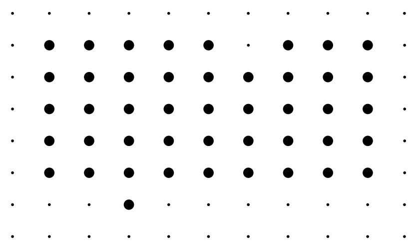
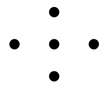
(β) Ιδιότητες προβολικής κάμερας. Θεωρήστε τον 3×4 προβολικό πίνακα κάμερας (camera projection matrix) $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ (όπου με M συμβολίζεται ο αριστερός 3×3 υποπίνακας του P και με $\mathbf{p}_4$ η τέταρτη στήλη του). Να αποδείξετε ότι το κέντρο $\mathbf{C}$ της κάμερας αποτελεί τον μονοδιάστατο δεξιό μηδενοχώρο του P, δηλαδή $P\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Επίσης, να βρείτε και να αποδείξετε σε ποια μορφή θα είναι τα κέντρα των καμερών $\mathbf{C}$ στην περίπτωση των πεπερασμένων καμερών και καμερών στο άπειρο. Τέλος, η κάμερα που περιγράφεται από τον πίνακα $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μία πεπερασμένη κάμερα ή μία κάμερα στο άπειρο και γιατί; Ποιο είναι το κέντρο της; [Κεφ.6, HS2003].

(γ) Υπολογισμός σημείου φυγής από την 'περιστροφική' - conjugate ομογραφία. Θεωρήστε δύο εικόνες που σχηματίζονται από την περιστροφή μιας κάμερας χωρίς μεταβολή στις εσωτερικές παραμέτρους της. Η περιστροφή γίνεται γύρω από ένα άξονα $\mathbf{a}$ που διέρχεται από το κέντρο της, όπου το διάνυσμα $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ είναι μοναδιαίο και δείχνει την κατεύθυνση του άξονα. Εστω $P = K[I \mid \mathbf{0}]$ και $P' = K[R \mid \mathbf{0}]$ οι πίνακες προβολής της κάμερας πριν και μετά την περιστροφή. Να αποδειχθεί ότι η ομογραφία H που δημιουργείται μεταξύ σημείων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ ισούται με $H = KRK^{-1}$. Έπειτα, να αποδείξετε ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα H ισούται (up to scale) με το σημείο φυγής $\mathbf{v}$ που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του άξονα περιστροφής $\mathbf{a}$. Με υπολογισμένο αυτό το σημείο φυγής $\mathbf{v}$ πώς θα μπορούσατε να ανακτήσετε τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής $\mathbf{a}$;
Βοήθεια: οι πίνακες H και R έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (up to scale). [Κεφ.2, 8, HS2003].

δ) Θεμελιώδης πίνακας F. Θεωρήστε ότι δύο κάμερες 'στοχεύουν' σε κάποιο σημείο του χώρου, με τέτοιο τρόπο ώστε οι δύο κύριοι άξονες (principal axis) των καμερών να τέμνονται σε αυτό το σημείο. Εάν οι συντεταγμένες της εικόνας είναι κανονικοποιημένες ούτως ώστε η αρχή των αξόνων τους $(0, 0)$ να συμπίπτει με το κύριο σημείο (principal point) του επιπέδου της εικόνας, τότε το στοιχείο F_{33} του θεμελιώδους πίνακα F είναι ίσο με μηδέν. Σημείωση: Το κύριο σημείο του επιπέδου της εικόνας ορίζεται ως το σημείο τομής του κύριου άξονα της κάμερας με το επίπεδο της εικόνας. [Κεφ.9, HS2003].

(ε) Θεμελιώδης πίνακας F υπό απλή μεταφορική κίνηση. Έστω $P = K[I \mid \mathbf{0}]$ και $P' = K[I \mid \mathbf{t}]$ οι προβολικοί πίνακες δύο καμερών, με $K = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{t} = (2, 2, 2)^\top$. Για αυτή την απλή μεταφορική κίνηση: i) Να προσδιορίσετε τα επιπολικά σημεία $\mathbf{e}$ και $\mathbf{e}'$ και ii) Να βρεθεί ο θεμελιώδης πίνακας F. [Κεφ.9, HS2003].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:
[ΗΣ2003] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2003.

$X =$  , $B =$  $= B^s$.

Chamfer Distance $(a, b) = (1, +\infty)$

u_0 $(+ = +\infty)$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

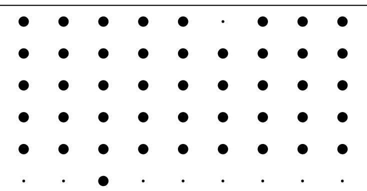
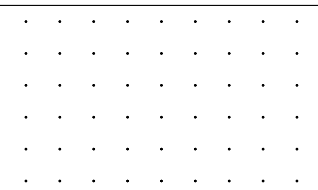
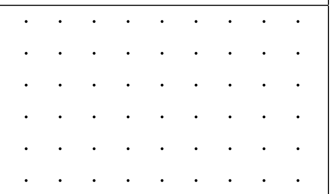
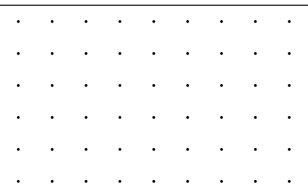
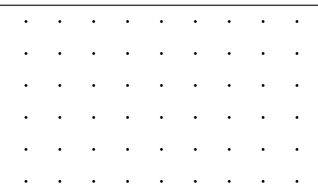
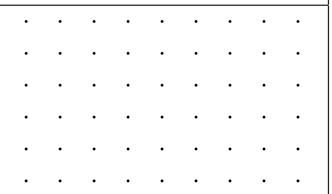
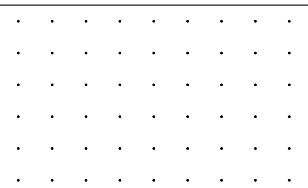
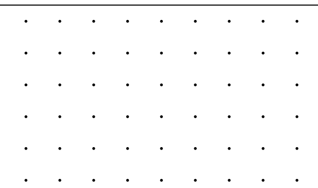
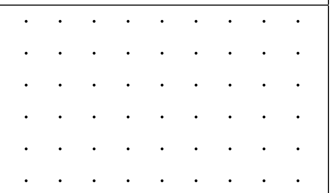
u_1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

u_2

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0										0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Skeleton

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$X \ominus nB$			
$S_n(X)$			
$\bigcup_{k \geq n} S_k$			
$X \circ nB$