Σερλής Εμμανουήλ-Αναστάσιος 03119125.

Όραση Υπολογιστών
2^{η} Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 3.1 α). Υποθέτουμε ότι $0 \in B$ και $Card(B) \geq 2$, τότε:

$$X \supseteq X \circ B \supseteq X \ominus B \supseteq X \ominus B \circ B \supseteq X \ominus 2B \supseteq \dots$$

$$\supseteq X \ominus nB$$

S_0 S_1

Άρα, αν ορίσουμε $D_n = [X \ominus nB] \setminus [X \ominus (n+1)B]$

, με $n = 0, 1, \dots, N$ έχουμε τις σχέσεις:

$S_n \subset D_n$, $n = 0, 1, \dots, N$ (1).

Ισχύει ότι $D_n \cap D_{n+1} = \emptyset$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ (2)

Από (1),(2) $\Longrightarrow$ $\boxed{S_n \cap S_{n+1} = \emptyset, \ n = 0, 1, \dots, N-1}$

B1)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+	+	+	+	+	0	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ιο

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0
0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0
0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	0
0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

U1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	1	2	2	1	0
0	1	2	3	3	3	2	3	2	1	0
0	1	2	3	2	2	2	2	2	1	0
0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

U2

B2). $X \ominus nB$

$n=0$:

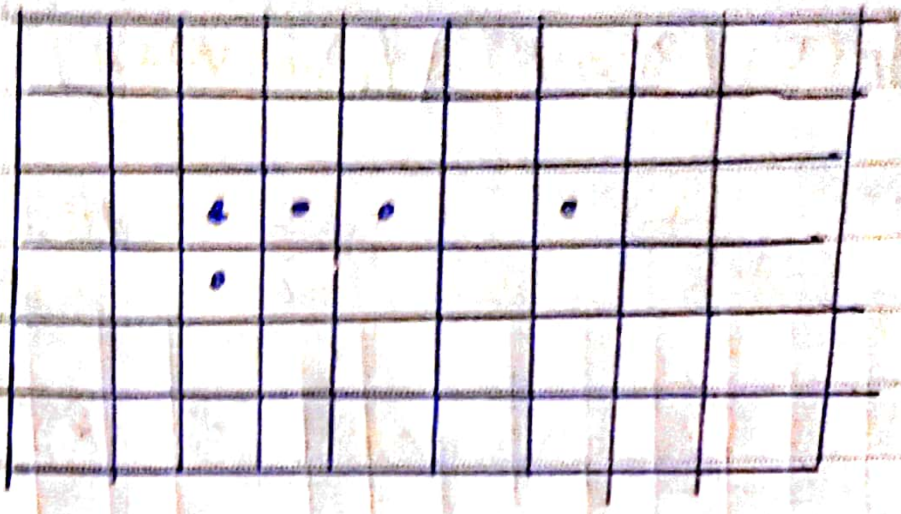
•	•	•	•	•		•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•
		•						

$n=1$:

	•	•	•	•		•	•		
	•	•	•	•	•	•	•		
	•	•	•	•	•	•	•		
		•							

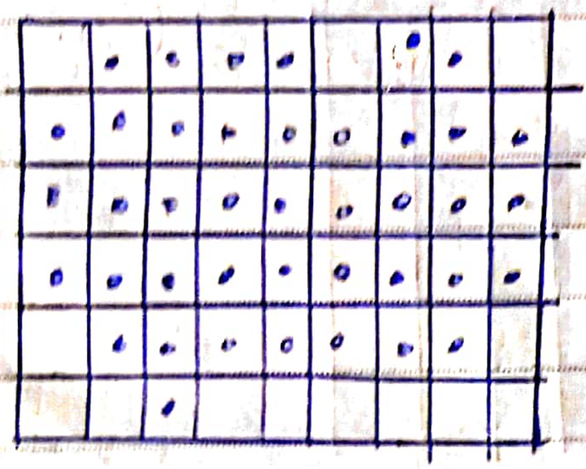
Scanned with CamScanner

$n=2$:

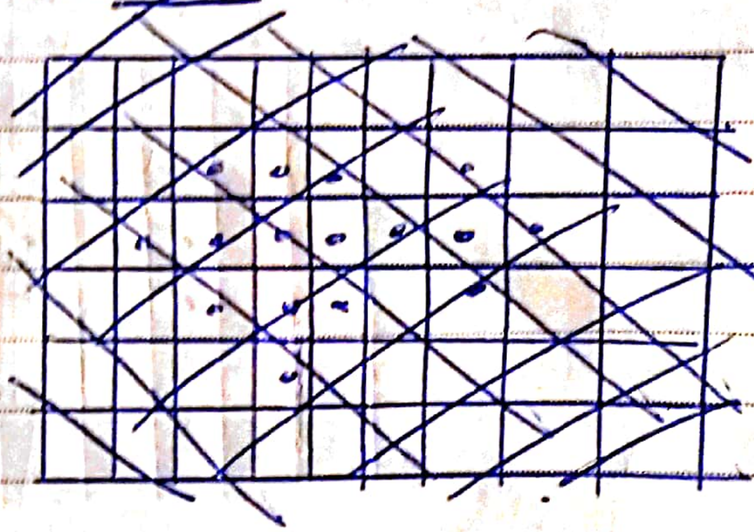


$(X \ominus nB) \circ B$:

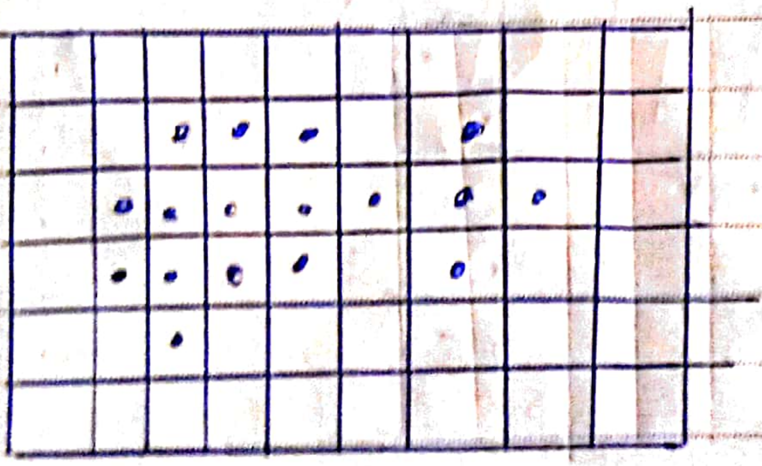
$n=0$:



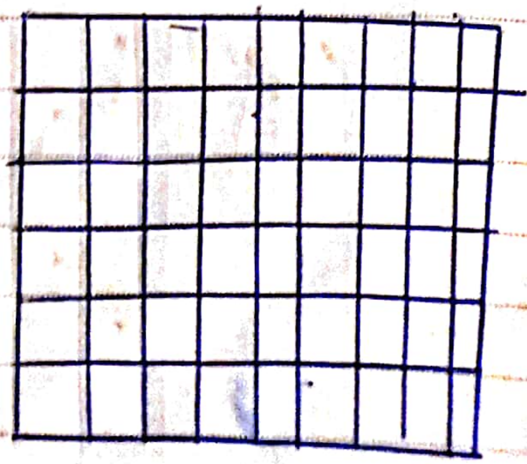
$n=1$:



$n=1$:

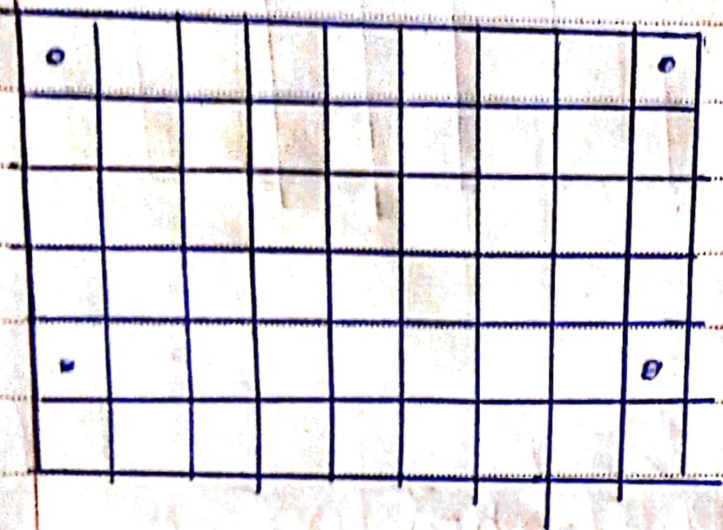


$n=2$:

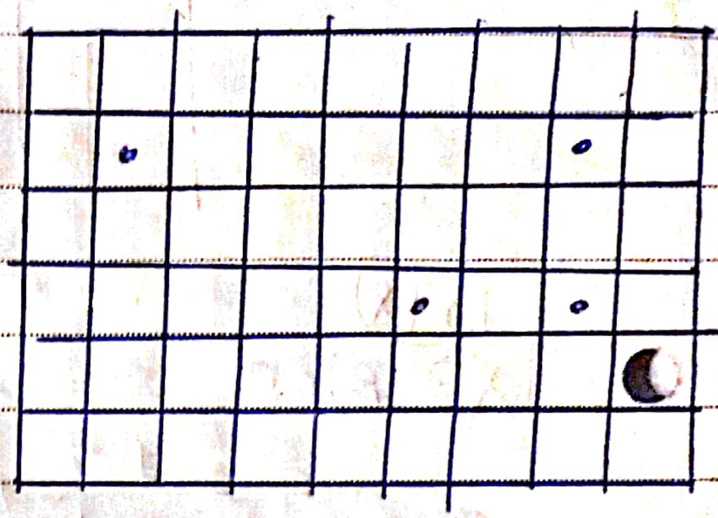


$$S_n(X) = [X \ominus nB] \setminus [(X \ominus nB) \circ B]$$

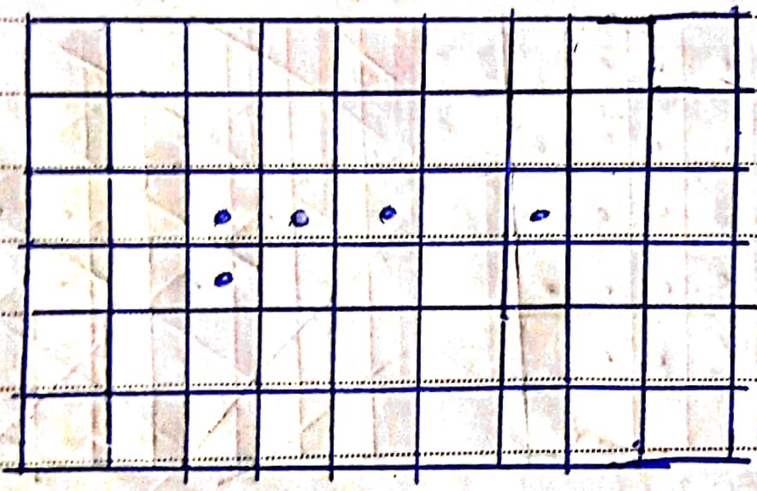
n=0:



n=1:

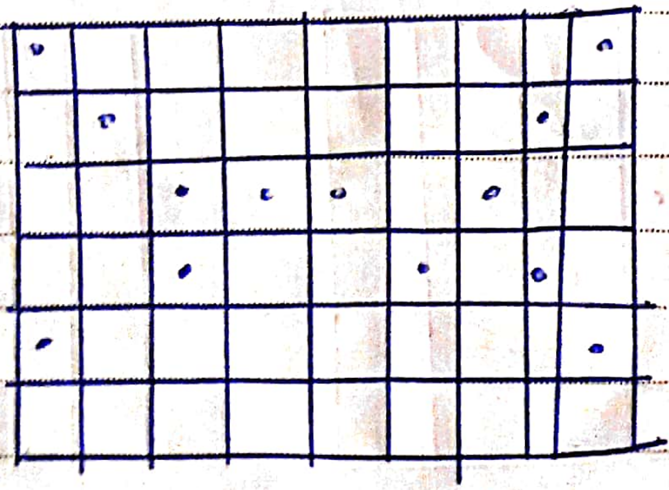


n=2:

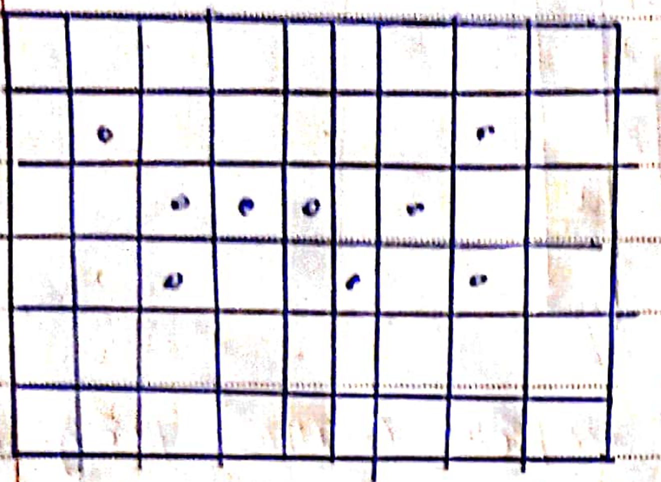


$\bigcup_{n \geq n} S_n$:

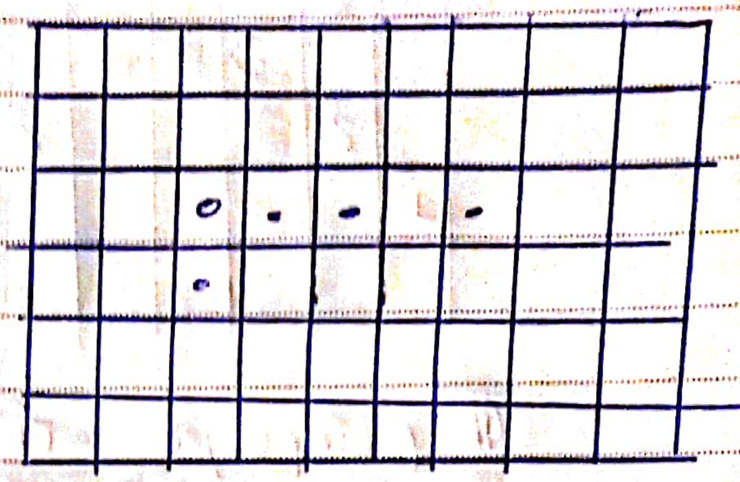
n=0:



$n=1$:



$n=2$:

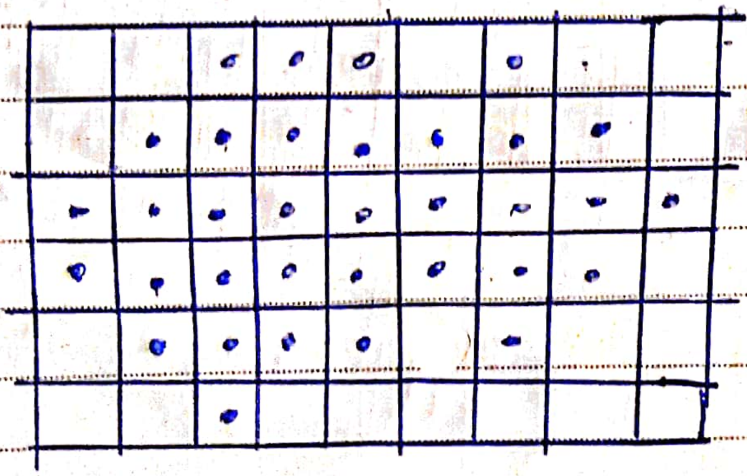


$X \circ nB$:

$n=0$: $X \circ nB = X$ (: αρχικό σύνολο)

$n=1$: $X \circ B = [X \ominus n \cdot B] \circ B \Big|_{n=0}$

$n=2$:



B3). Έχουμε:

Σημεία τοπ. μεγίστου DT(x)

1								1
	2						2	
		3	3	3		3		
		3			2		2	
1								1

Παρατηρούμε ότι τα σημεία τοπικού μεγίστου του αλγορίθμου DT(x) ταυτίζονται με τα σημεία του σκελετού (βλέπε ερώτημα β2 → υλοποίηση$|_{n=0}$).

Άσκηση 32 Έχουμε: $\phi(x,y)$

$$f_x(x,y) = -A\omega_1 \sin(\omega_1 x + \omega_2 y + \phi_0)$$

$$f_y(x,y) = -A\omega_2 \sin(\varphi(x,y))$$

$$f_{xx}(x,y) = -A\omega_1^2 \cos[\varphi(x,y)]$$

$$f_{yy}(x,y) = -A\omega_2^2 \cos[\varphi(x,y)]$$

$$f_{xy} = -A\omega_1\omega_2 \cos[\varphi(x,y)]$$

Έτσι, ο ενεργ. τελεστής $\Phi(f)(x,y)$ γίνεται:

$$\Phi(f)(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|^2 - f(x,y)\,\nabla^2 f(x,y) =$$

$$= \left[\sqrt{f_x^2 + f_y^2}\right]^2 - f\cdot[f_{xx} + f_{yy}]$$

$$= A^2\omega_1^2 \sin^2(\varphi(x,y)) + A^2\omega_2^2 \sin^2[\varphi(x,y)] -$$

$$- A\cdot\cos[\varphi(x,y)]\left[-A\omega_1^2\cos[\varphi(x,y)] - A\omega_2^2\cos[\varphi(x,y)]\right]$$

$$= A^2[\omega_1^2 + \omega_2^2]\,\underbrace{\left[\cos^2[\varphi(x,y)] + \sin^2[\varphi(x,y)]\right]}_{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi[f(x,y)] = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}$$

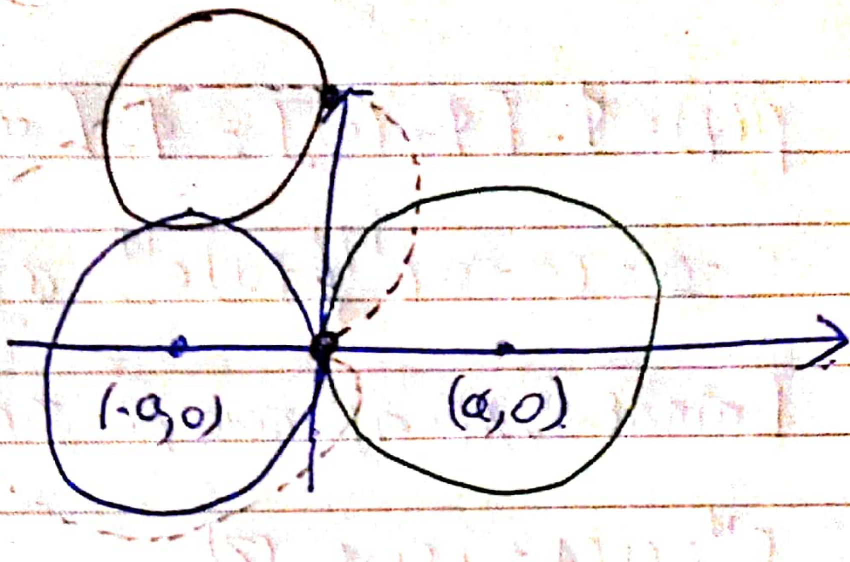
Ορίζουμε έναν μεικτό ενεργειακό τελεστή:

$$\Phi_\mu|f(x,y)| \triangleq f_x f_y - f \cdot f_{xy} =$$

$$= A^2\omega_1\omega_2 \sin^2\phi + A^2\omega_1\omega_2 \cos^2\phi \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\Phi_\mu|f(x,y)| = A^2\omega_1\omega_2}$ → Γνωρίζοντας το πρόσημο του τελεστή δηλαδή το πρόσημο του $\omega_1 \cdot \omega_2$, μπορούμε να βρούμε και το πρόσημο του ω_2 (θεωρώντας το πρόσημο του ω_1 γνωστό).

Άσκηση 3.3 α)



Η κίνηση του αρχικού σημείου επαφής μεταξύ των 2 κύκλων μπορεί να διασπαστεί σε 2 επιμέρους κινήσεις. Στο μιγαδικό επίπεδο μία περιστροφή γύρω από το σημείο (0,0) κατά μία γωνία φ μπορεί να αποδοθεί μέσω της σχέσης $z \cdot \exp\{i\phi\}$. Έτσι,

Φ_+ περιστροφή (γύρω από σημείο (a,0)):

$$z \longmapsto a + (z-a)e^{i\phi}$$

Φ_- περιστροφή (γύρω από σημείο (-a,0)):

$$z \longmapsto -a + (z+a)e^{i\phi}$$

Ένα τυχαίο σημείο $p(\varphi)$ της καρδιοειδούς μπορεί να προκύψει μέσω περιστροφής του αρχικού σημείου (0,0) γύρω από (a,0) κατά φ και ~~ταυτόχρονης περ~~ επόμενης περιστροφής από (-a,0) κατά φ, δηλαδή:

$$\rho(\varphi) = \Phi_-[\Phi_+(0)] = \Phi_-[\alpha - \alpha e^{i\Phi}] =$$

$$= -\alpha + (\alpha - \alpha e^{i\Phi}) + \alpha) e^{i\Phi} = \alpha[-e^{i2\Phi} + 2e^{i\Phi} - 1] \quad (1)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$e^{i\Phi} = \cos\Phi + j\cdot\sin\Phi \quad (2)$$

$$\cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1 \quad (3)$$

$$\cos(2\Phi) = \cos^2\Phi - \sin^2\Phi \quad (4)$$

$$\sin(2\Phi) = 2\sin\Phi\cdot\cos\Phi \quad (5)$$

$$(1),(2),(3),(4),(5) \Rightarrow \begin{cases} x(\Phi) = \alpha[-\cos(2\Phi) + 2\cos\Phi - 1] \\ y(\Phi) = \alpha[-\sin(2\Phi) + 2\sin\Phi] \end{cases}$$

$$\boxed{\text{ή} \begin{cases} x(\gamma) = 2\alpha(1-\cos\gamma)\cdot\cos\gamma \\ y(\gamma) = 2\alpha(1-\cos\gamma)\sin\gamma \end{cases}, \gamma \in [0, 2\pi)}$$

β) <u>Συνάρτηση μήκους τόξου:</u>

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r(\gamma)^2 + [r'(\gamma)]^2}\, d\gamma, \text{ με}$$

$$r(\gamma) = \sqrt{x^2(\gamma) + y^2(\gamma)} = 2a(1-\cos\gamma)$$
$$\dot{r}(\gamma) = 2a\sin\gamma \quad \text{και} \quad \ddot{r}(\gamma) = 2a\cos\gamma.$$

<u>Άρα:</u> $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2(1-\cos\gamma)^2 + 4a^2(\sin\gamma)^2}$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2 + 4a^2 - 8a^2\cos\gamma}\, d\gamma =$$

$$= 8a\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}[1-\cos\gamma]}\, d\gamma. \text{ και}$$

$$\sin^2\gamma = \frac{1}{2}[1-\cos(2\gamma)]$$

<u>Άρα:</u> $L = 8a\int_0^{\pi} \sin\frac{\gamma}{2}\, d\phi \Rightarrow \boxed{L = 16a.}$

<u>Συνάρτηση καμπυλότητας:</u>

$$K(\gamma) = \frac{[r^2(\gamma) + \dot{r}(\gamma)^2]^{3/2}}{r^2(\gamma) + 2[\dot{r}(\gamma)]^2 - r(\gamma)\ddot{r}(\gamma)} =$$

$$= \frac{\left[4a^2(1-\cos\gamma)^2 + 4a^2\sin^2\gamma\right]^{3/2}}{4a^2(1-\cos\gamma)^2 + 8a^2\sin^2\gamma - 4a^2\cos(\gamma)[1-\cos\gamma]}$$

$$= \frac{\left[8a^2 - 8a^2\cos\gamma\right]^{3/2}}{4a^2 + 4a^2\cos^2\gamma - 8a^2\cos\gamma + 8a^2\sin^2\gamma - 4a^2\cos\gamma + 4a^2\cos^2\gamma}$$

$$= \frac{\left[8a^2 - 8a^2\cos\gamma\right]^{3/2}}{12a^2 - 12a^2\cos\gamma}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{8a^2[1-\cos\gamma]}\,\right]^3}{12a^2[1-\cos\gamma]} \qquad \frac{1}{2}[1-\cos\gamma] = \sin^2(\gamma/2)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{16a^2\sin^2(\gamma/2)}\,\right]^3}{24a^2\sin^2(\gamma/2)} = \frac{\left[4a\sin(\gamma/2)\right]^3}{24a^2\sin^2(\gamma/2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K(\gamma) = \frac{8}{3}a\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Άσκηση 3.4. α) Ορίζουμε την μεταφορική και την περιστροφική ταχύτητα της κάμερας μέσω των διανυσμάτων:

$$T = (U, V, \omega)^T \text{ και } \underline{\Omega} = (A, B, C)^T$$

Επίσης, έχουμε $P = (X, Y, Z)^T$ ένα τυχαίο σημείο ~~της επιφάνειας, τότε~~ του περιβάλλοντος, τότε

$$\frac{dP}{dt} \triangleq \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = -T - \underline{\Omega} \times P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{X} = -U - BZ + CY \\ \dot{Y} = -V - CX + AZ \\ \dot{Z} = -W - AY + BX \end{Bmatrix}$$

Αν (x, y) είναι οι συντεταγμένες της προοπτικής προβολής του σημείου P στο image plane, τότε

$$\left\{ x = f\frac{X}{Z}, \; y = f\frac{Y}{Z} \right\} \xrightarrow{f=1}$$

$$\left\{ x = \frac{X}{Z}, \; y = \frac{Y}{Z} \right\}$$

Υπολογισμοί οπτ. ροής:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{X}}{Z} - \frac{X\dot{Z}}{Z^2} = \ldots =$$

$$= \underbrace{\frac{xW - U}{Z}}_{u_t} + \underbrace{\left[Axy - B(x^2+1) + Cy\right]}_{u_r}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\dot{Y}}{Z} - \frac{Y\dot{Z}}{Z^2} = \ldots$$

$$= \underbrace{\frac{yW - V}{Z}}_{u_t} + \underbrace{\left[A(y^2+1) - Bxy - Cx\right]}_{u_r}$$

(B) Αναφορικά με το σημείο φυγής (x_0, y_0):

$$u_t = 0 \Rightarrow \frac{x_0 W - U}{Z} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{U}{W} \quad (1)$$

$$u_r = 0 \Rightarrow \frac{y_0 W - V}{Z} = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{V}{W} \quad (2)$$

Άρα το διάνυσμα (U, V, W) γίνεται:

Scanned with CamScanner

$$\boxed{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}, 1\right) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} (x_0, y_0, 1).}$$

(γ) Έχουμε:

$$u(x_0,y) = \cancel{u_t(x_0,y)}^{\,0} + u_r(x_0,y) =$$

$$= Ax_0y - B(x_0^2+1) + Cy = y[Ax_0+C] - B(x_0^2+1) \quad (1)$$

$$v(x,y_0) = \cancel{v_t(x,y_0)}^{\,0} + v_r(x,y_0) =$$

$$= A(y_0^2+1) - Bxy_0 - Cx = -x[By_0+C] + A(y_0^2+1) \quad (2)$$

Παραπάνω, υπάρχουν 2 εξισώσεις με 3 αγνώστους. Η 3η Εξίσωση για τον υπολογισμό του διανύσματος $(A,B,C)^T$ προκύπτει από την κίνηση Rigid Body και την χρήση Least-Squares αλγορίθμου για την εύρεση των παραμέτρων $(\theta x, \theta y, \theta z)$:

$$\boxed{a_{LS} = (\Psi^T\Psi)^{-1}\Psi^T \beta \quad (3)}$$

Από (1),(2),(3), βρίσκουμε τις παραμέτρους (A,B,C)

(δ) $u_t + u_r = u \Rightarrow u_t = u - u_r$

και

$$\left\{ u_t = \frac{xw - u}{z}, \; x_0 = \frac{u}{w} \right\} \Rightarrow$$

$$u - u_r = u_t = \frac{w}{z}(x_0 - x) \Rightarrow \boxed{\frac{z}{w} = \frac{x_0 - x}{u - u_r}}$$

ομοίως, προκύπτει και $\boxed{\frac{z}{w} = \frac{y_0 - y}{v - v_r}}$

Scanned with CamScanner

Άσκηση 3.5 α) Παρατηρούμε πως το πραγματικό μέρος του δοθέντος φίλτρου μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο 3 επιμέρους gaussian

$$Re[g_c(x,y,t)] = g_x(x)\cdot g_y(y)\cdot g_t(t) \text{, με}$$

$$g_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_a}\cdot \exp\left[-\left(\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right)\right]$$

Επιπλέον, έχουμε: $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Άρα: $\cos(a+b+c) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c$

$= \cos a\cos b\cos c - \sin a\sin b\cos c - \sin a\cos b\sin c -$

$- \cos a\sin b\sin c$, με $\begin{cases} a = \omega_{x0}x \\ b = \omega_{y0}y \\ t = \omega_{t0}t \end{cases}$

Έτσι, παίρνουμε ότι:

$$\boxed{\begin{aligned} g_c(x,y,t) = {} & g_x(x)g_y(y)g_t(t)\cos(\omega_{x0}x)\cos(\omega_{y0}y) \\ & \cos(\omega_{t0}t) - g_x(x)g_y(y)g_t(t)\sin(\omega_{x0}x)\sin(\omega_{y0}y)\cos(\omega_{t0}t) \\ & - g_x(x)g_y(y)g_t(t)\sin(\omega_{x0}x)\cos(\omega_{y0}y)\sin(\omega_{t0}t) - \\ & - g_x(x)g_y(y)g_t(t)\cos(\omega_{x0}x)\sin(\omega_{y0}y)\cos(\omega_{t0}t). \end{aligned}}$$

B). Ορίζουμε τα φίλτρα:

$g_c(x) = g_x(x)\cos(\omega_{xo}x)$ (ομοίως για τα y, t).

$g_s(x) = g_x(x)\sin(\omega_{xo}x)$.

Έτσι, το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) παίρνει την μορφή:

$$\boxed{\begin{aligned} g_c(x,y,t) = {} & g_c(x)\,g_c(y)\,g_c(t) - g_s(x)\,g_s(y)\,g_c(t) \\ & - g_s(x)\,g_c(y)\,g_s(t) - g_c(x)\,g_s(y)\,g_s(t). \end{aligned}} \quad (1)$$

Αναφορικά με το φιλτράρισμα της εικόνας $I(x,y,t)$:

$$y^{3D}(x,y,t) = I(x,y,t) * g_c(x,y,t) \overset{(1)}{=}$$

$$= [(I(x,y,t) * g_c(x)) * g_c(y)] * g_c(t) -$$

$$- [(I(x,y,t) * g_s(x)) * g_s(y)] * g_c(t)$$

$$- [(I(x,y,t) * g_s(x)) * g_c(y)] * g_s(t) -$$

$$- [(I(x,y,t) * g_c(x)) * g_s(y)] * g_s(t)$$

Συγκρίνοντας τις πολυπλοκότητες του 3D Gabor φίλτρου και των 3 διαχωρίσιμων μονοδιάστατων φιλτραρισμάτων, έχουμε:

<u>Εικόνα:</u> $n \times n \times n = n^3$ pixels

<u>3Δ Φίλτρο:</u> $m \times m \times m = m^3$ pixels

$\Big\} \; \boxed{O(n^3 \cdot m^3)}$

<u>1Δ φίλτρο:</u> m pixels $\Longrightarrow O(n^3 \cdot m \cdot 3) = \boxed{O(mn^3)}$

Συνεπώς, η χρήση των 1D-Gabor φίλτρων ρίχνει κατά 2 τάξεις μεγέθους την πολυπλοκότητα της συνέλιξης.

(γ). <u>Από Fourier:</u>

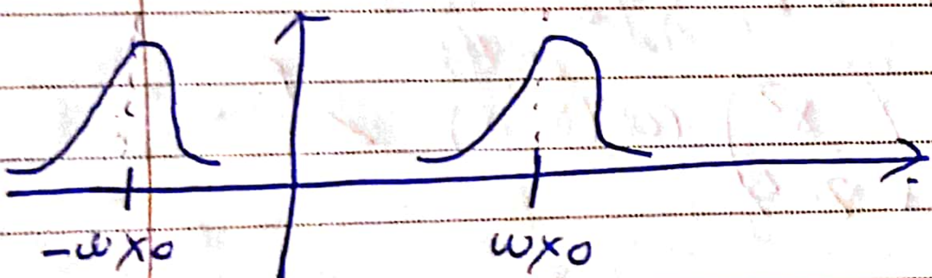
$$g_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cos(\omega_0 x) \xleftrightarrow{F}$$

$$G_c(\omega_x) = \frac{1}{2}\left[\exp\left\{-\frac{\sigma^2(\omega_x - \omega_{x0})^2}{2}\right\} + \exp\left\{-\frac{\sigma^2(\omega_x + \omega_{x0})^2}{2}\right\}\right]$$

<u>Επεκτείνοντας στις 3 διαστάσεις:</u>

$$\boxed{G_c(x,y,t) = 0.5\exp\left\{-\frac{\sigma_x^2(\omega_x-\omega_{x0})^2}{2} - \frac{\sigma_y^2(\omega_y-\omega_{y0})^2}{2} - \frac{\sigma_t^2(\omega_t-\omega_{t0})^2}{2}\right\} + 0.5\exp\left\{-\frac{\sigma_x^2(\omega_x+\omega_{x0})^2}{2} - \frac{\sigma_y^2(\omega_y+\omega_{y0})^2}{2} - \frac{\sigma_t^2(\omega_t+\omega_{t0})^2}{2}\right\}}$$

(δ) Οι ισοϋψείς επιφάνειες που θα προκύψουν από την απόκριση συχνότητας $G_c(x,y,t)$ είναι ελλειψοειδή κεντραρισμένα στα $\omega_x, \omega_y, \omega_t$ με εύρος $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_t$ ανά διάσταση αντίστοιχα. Για μία διάσταση:



(λόγω Fourier)

Άσκηση 3.6 (α). Η διανυσματική παραμετροποίηση της καμπύλης $\vec{C}(p,t)$ γίνεται μέσω της ΜΔΕ:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = V\vec{N_0}, \text{ με: } V = \sigma_B(\vec{N_0}), \text{ όπου:}$$

N_0 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εξωτ. καθέτου στην καμπύλη και σ_B είναι η support function του συνόλου B:

$$\sigma_B(x,y) = \bigvee_{(h,u)\in B} (hx+uy).$$

Επειδή το σύνολο B είναι μία έλλειψη συμμετρική ως προς τους άξονες, η ανωτέρω μεγιστοποίηση αντιστοιχεί σε:

$$\max_{0\le h\le a/2} \{hx+\phi(h)y\}, \quad \phi(h) = \sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{b^2h^2}{a^2}}$$

Άρα: $$\boxed{V = \sigma_B(\vec{N_0}), \quad \sigma_B = \frac{ab(x^2+y^2)}{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}}}$$

(β) Η επιπεδο-συνάρτηση $u(x,y,t) = f(x,y)\oplus tB = u(x,y,0)\oplus tB$ αποτελεί ένα πολυκλιμακωτό flat dilation της αρχικής grayscale εικόνας με B

Από την ανάλυση scale-space PDEs, γνωρίζουμε ότι η $u(x,y,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\boxed{u_t = \sigma_B(\nabla u)}$$

Άσκηση 3.7 (δ) Τα principal points x και x' στα επίπεδα των εικόνων συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$x^T F x' = 0$$

Έχουμε: $x = x' = (0,0,1)^T$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{f_{33} = 0}$$

(ε) Γνωρίζουμε ότι:

$$F = K'^{-T} R K^T [e]_\times = [e']_\times K' R K^{-1} \xrightarrow[K = K']{R = I}$$

$$\Rightarrow F = [e']_\times K K^{-1} \Rightarrow F = [e']_\times \quad (1)$$

Για τα επιπολικά σημεία

$$e = P\begin{pmatrix} -R^T t \\ 1 \end{pmatrix} = K R^T t \xrightarrow{R = I} Kt$$

$$e' = P'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = K't \xrightarrow{K'=K} e' = Kt.$$

<u>Άρα</u>: $\boxed{e = e' = Kt} \boxed{= [e_x \ e_y \ e_z]^T}$ και

$$\boxed{F = [e]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}}$$

Θεωρούμε ότι η μεταφορά της κάμερας είναι παράλληλη στον $X'X$ άξονα, δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{l} e = e' = [1 \ 0 \ 0]^T, \text{που συνεπάγεται} \\ F = [e]_\times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}}$$

(B) ⊙ Εφόσον ο πίνακας P έχει 3 γραμμές και 4 στήλες, αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει μηδενόχωρος μιας διάστασης. Άρα:

$$\exists \vec{C} \in \mathbb{R}^4 : P\vec{C} = \vec{0}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι το ~~κέντρο~~ διάνυσμα C

αποτελεί το κέντρο της κάμερας.

Θεωρούμε μία γραμμή που περιλαμβάνει το C και ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο A. Έτσι, για τα σημεία X στην ευθεία, έχουμε την εξίσωση:

$$X(\lambda) = \lambda A + (1-\lambda) C$$

Η προβολή των σημείων αυτών είναι

$$x = P X(\lambda) = \lambda PA + (1-\lambda) \cancel{PC}^{0} = \lambda PA.$$

Συνεπώς, όλα τα σημεία της γραμμής αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο της εικόνας PA, που σημαίνει ότι η γραμμή πρέπει να περνά από το κέντρο της κάμερας. Έτσι, το διάνυσμα C αποτελεί την ομογενή αναπαράσταση του κέντρου της κάμερας.

<u>Πεπερασμένη κάμερα:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} = [M \mid p_4] \\ \text{και} \\ \vec{C} = \begin{bmatrix} C_{3\times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{C} = 0 \Rightarrow [M \mid p_4] \cdot \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow M \cdot C + p = 0 \Rightarrow C = -M^{-1} \cdot p \Rightarrow \boxed{\vec{C} = \begin{bmatrix} -M^{-1} p \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Κάμερα στο άπειρο: $\boxed{Z = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}}$, με:

$$PZ = 0 \Rightarrow [M|p_4]\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{M \cdot C = 0}$$

Έχουμε για τον δοθέν πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & \sigma \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M) = 48 + 1\cdot(\sigma 0) + 2\cdot(-14-40) =$$

$= 48 + \sigma 0 - 2\cdot 54 \Rightarrow \det M = 0$ άρα δεν ορίζεται ο πίνακας M^{-1} και η κάμερα έχει το κέντρο της στο άπειρο, δηλαδή:

$C = [c_1\ c_2\ c_3\ 0]^T$ και $M \cdot C = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & \sigma \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 7c_1 + 4c_2 + \sigma c_3 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 7c_1 + 4c_2 + \sigma c_3 = 0 \\ c_2 = 5c_1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c_1 + 7c_3 = 0 \\ 27c_1 + \sigma c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{7}{4}c_3, \; c_3 = \left(-\frac{4}{7}\right)c_1 \\ c_2 = 5c_1 \end{cases}$$

Άρα: $$\boxed{\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 5\lambda \\ \left(-\frac{4}{7}\right)\lambda \\ 0 \end{bmatrix}}$$

(a). <u>Μορφή αφινικού Μ/Σ:</u>

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & I \end{bmatrix} \text{ ή } H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{|H|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{12}t_y - a_{22}t_x \\ -a_{21} & a_{11} & -a_{11}t_y + a_{21}t_x \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

<u>Αφινικός Μ/Σ:</u> $H_A^{-1} = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$C = \begin{bmatrix} Q & b \\ b^T & f \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Είναι: $C_2 = H_A^{-T} C_1 H_A^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0^T \\ t & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} Q & b \\ b^T & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^TQA & A^T(Qt+b) \\ (Qt+b)^T A & \cdots \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός: $A^TQA = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & a \end{bmatrix} \cdot$

$$\cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{o}_{11} & \underline{o}_{12} \\ \underline{o}_{22} & \underline{o}_{22} \end{bmatrix}, \text{ με:}$$

$\underline{o}_{11} = a_{22}^2 a + a_{21}^2 c - a_{22} a_{21} b$

$\underline{o}_{22} = a_{12}^2 a + a_{11}^2 c - a_{12} a_{11} b$

$\underline{o}_{21} = 0.5[a_{21} a_{12} + a_{11} a_{22}] - a_{12} a_{22} a - a_{11} a_{21} c = \underline{o}_{12}$

Μ/Σ κύκλου σε έλλειψη:

$$\begin{Bmatrix} b^2 - 4ac < 0 \\ a = c \\ b = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} ac > 0 \\ a = c \\ b = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = c \neq 0 \\ b = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T Q A = \begin{array}{cc} a_{new} & \frac{b_{new}}{2} \\ \uparrow & \uparrow \\ \left[\begin{matrix} \alpha(a_{22}^2 + a_{21}^2) & -\alpha(a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}) \\ -\alpha(a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}) & \alpha(a_{12}^2 + a_{11}^2) \end{matrix}\right] \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{b_{new}}{2} & c_{new} \end{array}$$

Για να αντιπροσωπεύει έλλειψη ~~ο κύκλος C2~~ το C2, πρέπει:

$$\left[2 \cdot \frac{b_{new}}{2}\right]^2 - 4 \cdot a_{new} \cdot c_{new} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21})^2 < (a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2)$$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})^2 > 0 \Leftrightarrow \det(H_A) \neq 0$, που ισχύει, αφού ο H_A είναι non-singular.
Άρα, ο κύκλος δύναται να μετασχηματιστεί σε έλλειψη μέσω affine Μ/Σ.

<u>Μ/Σ έλλειψης σε υπερβολή/παραβολή:</u>

Ομοίως με παραπάνω, πρέπει $b^2 - 4ac < 0$ ώστε το C1 ~~η έλλειψη~~ να αντιπροσωπεύει έλλειψη.

Για να αντιπροσωπεύει υπερβολή/παραβολή ο C2, πρέπει:

$$\left(2 \frac{b_{new}}{2}\right)^2 - 4 \cdot a_{new} \cdot c_{new} \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 b^2 - 4\, a \cdot c (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 \geq 0$

$\Rightarrow [\det(HA)]^2 (b^2 - 4ac) \geq 0$

Ομως $b^2 - 4ac < 0$ (λόγω έλλειψης)

$\Rightarrow \det(HA) = 0$, άτοπο αφού ο HA είναι non-singular. Άρα, η έλλειψη ΔΕΝ γίνεται να μετασχηματιστεί σε υπερβολή ή παραβολή μέσω affine Μ/Σ.

Scanned with CamScanner

(γ). <u>Έχουμε:</u>

$$\left.\begin{array}{l} P = K[I|0] \Rightarrow (KI)^{-1}P = [I|0] \\ P' = K[A|0] \Rightarrow (KA)^{-1}P' = [I|0] \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad P' = (KA)(KI)^{-1}P \quad \text{(ΦΑ παραγοντοποίηση)} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = P'X \overset{(1)}{=} (KA)(KI)^{-1}\underbrace{PX}_{x} \\ \text{και} \\ x' = Hx \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{H = (KAK)^{-1}}$$

<u>Σ</u>την περίπτωση pure rotation, οι ιδιοτιμές του πίνακα ομογραφίας είναι $\exp\{j\theta\}$, $\exp\{-j\theta\}$, 1, οι οποίες ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Το fixed point του παραπάνω Μ/Σ δίνεται από την σχέση:

$$He = \lambda \cdot e$$

<u>Για την πραγματική ιδιοτιμή ($\lambda = 1$):</u>

$$H \cdot e = e \Rightarrow [H - I]e = 0$$ που αντιστοιχεί σε ιδιοδιανύσματα της μορφής $e = [e_x\ e_y\ e]^T$

Εφόσον η 3η τιμή του διανύσματος e είναι μηδενική, τότε αναφερόμαστε για σημείο στο άπειρο, δηλαδή για σημείο φυγής.